Actividades Matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Contar e inducir

Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Jorge Édgar Páez Ortegón

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Actividades matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Contar e inducir

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Actividades Matemáticas
para el desarrollo de procesos lógicos:
contar e inducir

ISBN: 978-958-8650-60-9
Primera edición, 2002
Segunda edición, 2013

Autores
© Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Jorge Édgar Páez Ortegón

Juan Carlos Orozco Cruz
Rector

Édgar Alberto Mendoza Parada
Vicerrector Académico

Víctor Manuel Rodríguez Sarmiento
Vicerrector de Gestión Universitaria

Preparación editorial
Universidad pedagógica Nacional
Fondo Editorial

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Alba Lucía Bernal Cerquera
Editora

Haydee Jiménez Tafur
Diagramación en LaTeX

Mauricio Esteban Suárez Barrera
Diseño de carátula

Impresión Javegraf
Bogotá, Colombia, 2013

Actividades matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Contar e inducir

Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Jorge Édgar Páez Ortegón

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Catalogación en la fuente
Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional

Luque Arias, Carlos Julio
Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir / Carlos Julio Luque Arias ... [et. al.].– 2ª. ed. – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2013

345 p.
Incluye bibliografía p. 339

ISBN:978-958-8650-60-9

1. (Matemáticas). 2. I. Mora Mendieta, Lyda Constanza. II. Páez Ortegón, Jorge Édgar. III. Tít.

A la memoria de dos grandes maestros:
Carlos Javier Ruiz Salguero
y Jorge Pérez Álvarez.
Carlos Julio Luque Arias

A Dios, por esta segunda oportunidad...
Lyda Constanza Mora Mendieta

A mis hijos Jorge y Sebastián.
Jorge Édgar Páez Ortegón

Tabla de contenido

Prólogo

Prólogo a la segunda edición

La segunda edición difiere de la primera en que se han agregado más actividades, producto del trabajo de más de diez años con los estudiantes de aritmética del primer semestre de la Universidad Pedagógica Nacional, bajo la guía de profesores pertenecientes al Grupo de Álgebra, con el mismo espíritu de investigación que generó la primera edición.

Tiene más referencias históricas, varias secciones se han reescrito completamente y reorganizado; por ejemplo, el capítulo 4 de la primera edición fue distribuido entre los tres primeros capítulos de la segunda, y en los capítulos 5 y 6 profundizamos un poco más en los números triangulares para que nos sirvan como modelo en el estudio de los otros temas y porque permiten escribir los demás números poligonales en términos de ellos; con el propósito de enfatizar más en la actividad matemática elemental y en la diversidad de maneras de afrontar los mismos problemas, donde los estudiantes tienen el rol central de generadores de conjeturas y formulación de teoremas.

Manifestamos nuestro agradecimiento a Haydee Jiménez Tafur por su esmero, dedicación y aporte no solo a la diagramación en Latex, sino en muchas de las actividades e ideas matemáticas expuestas. Así como también a los profesores que orientaron los cursos de aritmética durante estos últimos diez años (Johana Torres, Juan Carlos Ávila, Haydee Jiménez y Yeison Sánchez) y a los maestros en formación que desarrollaron sus prácticas pedagógicas

en el marco de este espacio académico y en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Al interior del Grupo de Álgebra compartimos experiencias e ideas, con las que mediante un proceso intencional y planeado pretendemos facilitar la apropiación creativa del conocimiento matemático de los estudiantes, con miras a elevar su formación; tales ideas las llevamos a nuestras aulas, en donde los estudiantes realizan una tarea fructífera que retroalimenta nuestra labor. Pretendemos que, a partir de las propuestas del grupo, los estudiantes hagan matemáticas; deseamos, como enuncia Brousseau, simular "microsociedades científicas"; es decir que la actividad matemática no consista

> [...] solamente en aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos, [...] hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. Solo se hacen matemáticas cuando nos ocupamos de problemas, pero se olvida a veces que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones. Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que son útiles, etc. [...] (Brousseau, 1986).

Para ello, inicialmente, hacemos matemáticas elementales, problemas que, si bien están al alcance de ellos, no son triviales, requieren de cierto talento, y es ese el que buscamos desarrollar para generar niveles más abstractos de pensamiento.

Los resultados aquí expuestos son producto de la interacción entre los estudiantes y el docente: este último propone una tarea, algún estudiante sugiere un camino de solución, otro modifica la propuesta anterior, otro mejora la conjetura en su formulación o en su contenido, otro propone una argumentación para apoyar o refutar las propuestas, el docente coordina y organiza la discusión hasta llegar al resultado. En algunas ocasiones mencionamos los nombres de algunos estudiantes relacionados con propuestas particulares cuando ellos propusieron ideas que consideramos novedosas.

El lenguaje aquí usado no corresponde literalmente al de los estudiantes, respetamos la idea pero lo escribimos con fórmulas en aras de la precisión.

Las conjeturas son producto de las intuiciones y los conocimientos anteriores de los estudiantes que en la mayoría de las situaciones no son homogéneos, pero nos preocupamos por respetar el rigor lógico en su presentación.

Comentario de Carlos Ruiz Salguero (q.e.p.d.) a la primera edición

En esa época ya todo estaba hecho y todo descubierto. Hablo de mi infancia. Las matemáticas y el catecismo no admitían discusión. Ambas eran cosa seria. Se decía inclusive, de manera muy sabia "con esas cosas no se juega".

La religión y la aritmética tenían sus dogmas. Sus leyes no eran perversas; se imponía con argumentos de aspecto razonable.

Los sistemas numéricos y las tablas de la ley eran útiles, indiscutibles, aprovechables, simples y duraderos.

Con el pasar del tiempo llegué a palpar un hecho inmenso: en ese universo, en su construcción y en su estructura yo no había participado por razones inexplicables, yo había llegado tarde; todo estaba hecho.

Sin embargo, si sentía que someterme a lo dicho me costaba, aprender las operaciones aritméticas fue, lo recuerdo con resquemor, una tarea dolorosa a pesar de la ayuda. La mente marcha mejor cuando inventa que cuando recicla, o por lo menos el cuerpo está más cómodo.

¿Cómo se llegó al extremo de plantear problemas de aritmética que yo, en mi inocencia, debía resolver?

¿Qué extraño duende ayudó a los que me precedieron a implantar obstáculos que yo debía sobrepasar?

¿Quién inventó tanta cosa?, siendo ya difícil la vida, como si se tratase de complicarla.

Más tarde me di cuenta de otro hecho; yo debía aprender a la velocidad que los otros fijaban.

Yo sé que eso forja. Arrecia el alma, que la vida es dura; pero, insisto, otros marcaban las jornadas, los temas, su profundidad, y en muchos casos se callaron su trascendencia.

¿Cuántas generaciones recibieron ese trato, cuántas lo sufrieron y cuanto esperaron para someter a lo mismo a la próxima generación?

Esas inquietudes se vuelven tozudas con el tiempo, y un día cuando ya pude gobernar mi alimentación, me di a la tarea de aprender de a pocos, con gusto y con lo mío. Para quedar contento y saciado, ser partícipe en la formación del mundo. Así parezca una quimera: en una parte del mundo que soy, he de participar en su formación.

No está mal, porque yo lo diga, un método de enseñanza, y tan no lo es que fue con todo lo que aprendí que logré reaccionar. Hay varios recuerdos nítidos del jovencito que fui, en los que siento la necesidad de cambiar. Existe el deseo, por ejemplo, de volver ameno el aprendizaje. Hay más tarde la oportunidad de volverlo más mío.

Más tarde, también, el deseo de enseñar, para aprender; poco a poco, voy precisando casi sin decirlo, cuándo siento que algo es trascendente.

Luego un día exagero al punto que no acepto me enseñen un tema sin haber hecho un acto de balance ceñudo de lo que de ello sé.

Las críticas son dos: "yo no soy el dueño", "otros marcan el paso". O mejor tres: los maestros no sabían matemáticas.

¿Qué noto yo en este libro?

En primer lugar, que *no parte del supuesto que todo está terminado*. Parte del supuesto que, de quererlo, podemos también construir mientras aprendemos. Las personas que hacen investigación en matemática sienten que han logrado ese estadio. Esa asimilación entre aprender y buscar me parece un elemento positivo evidentemente poco común en un texto.

En segundo lugar, que *inicia desde muy poco*, casi siempre el contacto de un libro científico con su lector parte de una salvedad implícita: el requisito, si es muy costoso, la probabilidad de éxito aminora.

En tercer lugar, *es ameno*. Por razones que serían de precisar, el lego siente que la ciencia no lo es, que es aburrida además de ser difícil. Es difícil, que lo digan sus grandes gestores. Pero lo que ellos palparon es justamente que no los aburría. Por esa rama del saber muchos sienten repulsión. Y este libro *atrae y no hostiga*.

Agregaría que sus autores *además de respetar su línea de conducta, muestran haberse informado sobre el proceso de los pensadores en la historia de la ciencia matemática. Sin invadir con sus experiencias.*

Es una obra de talla: bien pensada y bien escrita.

Si, como inicié esta charla, miro en el aprendizaje primario de la matemática y lo comparo con esta otra, puedo dar fe del progreso espectacular que hemos tenido.

Me alegro y me felicito: *mis tres quejas habían sido oídas.*

Carlos Javier Ruiz Salguero
Premio Nacional de Matemáticas 1993

Capítulo

1 Un sistema de números para contar

Los seres humanos[1] en sus distintas culturas y en la medida en que sus necesidades e intereses lo han exigido, han resuelto su problema de contar, inventándose su propio *sistema de números*. Nuestro primer interés no radica en aprender las soluciones que se han dado a este problema, sino más bien, desde un punto de vista didáctico, estamos interesados en el proceso matemático de construir un sistema de números para contar[2].

Para esto inventaremos símbolos y reglas, haremos acuerdos, encontraremos problemas para los cuales propondremos soluciones, descubriremos procedimientos mentales que nos permitan hacer cuentas de manera más rápida y eficiente, mostrando cómo es posible evitar el trabajo físico directo para sustituirlo por el trabajo mental (cálculo), y a su vez ver cómo el cálculo permite predecir resultados verificables con la experimentación.

Luego, cuando sea posible, contaremos en reversa a partir de un cierto número (la resta); contaremos por grupos de 2, de 3, de 5, etc. (la multiplicación); desharemos este proceso cuando sea posible, preguntándonos, por ejemplo, cuántos grupos de 5 se pueden formar con 36, cuántos de 6, etc. (la división).

[1] En el artículo "La capacidad de los pájaros para contar", de O. Koehler (1997), y en el de "Contar", de Levi Leonard Conant, que aparecen en el volumen 4 de la enciclopedia *Sigma, el mundo de las matemáticas*, Editorial Grijalbo, Barcelona, se discute la posibilidad de que algunos animales tengan también las habilidades necesarias para contar.

[2] Los números que se utilizan para contar se conocen como **números naturales**.

En el siguiente paso y haciendo una analogía con el producto, donde se adiciona varias veces la misma cantidad, multiplicaremos varias veces la misma cantidad en un proceso mental que nos permite obtener una nueva operación (la potenciación), de mucha ayuda para resolver el problema de escribir números mayores a los inicialmente considerados, de manera más simple.

Para desarrollar estas ideas, no usaremos los símbolos conocidos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; nos veremos obligados a inventar nuevos símbolos para representar nuestros números, aceptamos sin embargo, copiarnos de *procesos* conocidos.

Resaltamos que este trabajo es el producto de la continua observación y sistematización de los aportes realizados por algunos profesores y estudiantes, en particular en la Universidad Pedagógica Nacional, en la formación inicial de profesores de matemáticas, que han intentado no enseñar o aprender un sistema de numeración ya construido, sino, a partir de preguntas y respuestas, proponer soluciones a problemas de conteo y de representación de números.

Métodos y resultados han surgido luego de ensayos y errores y no nos hemos preocupado mucho por saber si lo que descubrimos en clase ya fue inventado en otra parte; en su lugar, nos dedicamos al libre ejercicio de pensar y disfrutarlo. Invitamos al lector, con insistencia, a elaborar sus propios caminos, a plantear sus propias soluciones y, sobre todo, a formular sus propias preguntas.

1.1. Símbolos y reglas del sistema

Empecemos planteando un problema simple: supongamos que queremos contar[3] el número de dedos que tiene una persona normal, con la condición de no utilizar los dígitos usuales.

Para ello, una idea inicial es hacer[4] una *representación del número* pintando en un papel un *símbolo* por cada dedo, digamos, una raya vertical, horizontal; puede no ser raya, puede ser una flor o el auto de papi, o lo que

[3] La idea de *contar* es una de las más primitivas en los seres humanos, bien sea con los dedos, como los indios de las islas de Borneo contando uno, dos, tres ..., muchos; con ábacos, con complejas construcciones, como el agrupamiento de grandes piedras, conocido como Stonehenge, en el sur de Inglaterra, o con los más modernos ordenadores.

[4] Lo que presentamos aquí es resultado de discusiones llevadas a cabo con estudiantes de secundaria y de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional. Salvo por los símbolos elegidos, los resultados son, en todos los casos, similares.

sea. Ojalá sea *fácil de pintar*, para no detenernos mucho en un asunto que no es fundamental para lo que queremos hacer. Esta es solo una manera de hacerlo, cada cual puede inventar sus propios símbolos y sus propias reglas para representar un número[5].

Enfatizamos que el número es único, pero sus representaciones pueden ser diversas[6].

El resultado inicial se verá:

I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I

Esta representación significa que el número de dedos de una persona normal es el mismo que el de rayas en el papel[7]. Muchas veces nos referiremos al número como su representación, pero estos conceptos no deben confundirse.

Estamos iniciando y ya empezaron los problemas:

1. La representación elegida es difícil de leer.

2. Si el número de cosas que queremos contar es grande se complica aún más la escritura y la lectura.

Una solución al primer problema es disponer las rayas de manera que sea más fácil leerlas; por ejemplo, sustituyendo: IIIII por $\boxminus$, con lo cual nuestra cuenta queda $\boxminus$ $\boxminus$ $\boxminus$ $\boxminus$ *¿Tiene usted otras soluciones?*[8].

[5]El proceso de contar consiste en establecer una *correspondencia* entre los objetos a contar y un conjunto de objetos o símbolos que representan a los objetos iniciales, pero que son más fáciles de manipular, como los dedos de una persona o los nudos en una cuerda o algunos signos dibujados en un trozo de piedra o de madera, poniendo uno o varios símbolos por cada objeto a contar.

[6]Un número es un concepto abstracto; un símbolo numérico es una forma de representar el número.

[7]La comunidad científica internacional afirma que se empezaron a utilizar instrumentos para contar desde hace más de 37.000 años, una evidencia es el *hueso de Lebombo*, que data de aproximadamente 35.000 años en el cual hay marcas talladas similares a las que se hallaron en 1937 en el *hueso de Dolni Vestonice*, que data de aproximadamente 30.000 años de antigüedad, o en el *hueso de Ishango*; todas de aspecto muy similar a las marcas que acabamos de hacer acá sobre papel.

[8]Aquí hemos agrupado IIIII y sustituido por otro símbolo; en todos los cursos es usual que se hagan agrupaciones, sino de diez, de cinco, como en este caso, tal vez porque esa es la cantidad de dedos que tenemos en nuestra(s) mano(s); lo cual está asociado también con la historia. En particular, en el *hueso de Dolni Vestonice*, se hallaron 55 marcas agrupadas de cinco en cinco, lo que lleva a pensar que la agrupación natural de los dedos sirvió de base para su organización.

✳ ✳

Es muy importante que su papel sea activo, que la lectura sea solo un motivo de reflexión y de construcción de su propio proceso, que toda afirmación sea para usted una pregunta.

✳ ✳

Sin embargo, pintar un rectángulo es complicado y si tenemos prisa, seguramente no nos queda exactamente rectángulo y podría parecer un círculo; para evitar calamidades y confusiones mejor *convengamos* sustituir I I I I I por O y para simplificar, de una sola vez, convengamos sustituir OOOO por X, así el número de dedos de una persona normal la podemos escribir en forma muy sintética como X.

Ya podemos rescribir, no solo cuántos dedos, tiene una persona, sino cuántos tiene una cantidad razonable de personas.

Nota: la representación que se utilizó aquí es arbitraria y usted puede elegir la suya. Los mayas, los babilonios, los egipcios, los chinos y, en general, cada cultura inventó sus propios símbolos[9] y sus reglas de cálculo; *un ejercicio interesante consiste en hacer un estudio comparativo de estos sistemas, incluyendo, por supuesto, el suyo*, con esto podrá comprobar que algunas ideas que se le ocurrieron a usted, ya se le habían ocurrido a otros grandes pensadores de la antigüedad; si lo mira bien esto puede aumentar su autoestima. En las notas al pie de este capítulo como en parte del siguiente damos algunas ideas para este estudio, pero *es deseable que usted lo inicie por su cuenta*.

[9]En algunos pueblos no hubo (o no hay) notación escrita para los números, solo representaciones orales, los números recibían nombres comunes; por ejemplo, los *tumanacos*, una cultura sudamericana, usaban para 5 la misma palabra que usaban para decir "una mano entera". El término que designaba al 6 significaba "uno de la otra mano"; el siete eran "dos de la otra mano", y análogamente para 8 y 9; el 10 era "ambas manos". Para expresar de 11 a 14, los tumanacos extendían ambas manos y contaban "uno del pie, dos del pie...", y así sucesivamente, hasta el 15, que era "un pie completo". El sistema continuaba expresando el 16 como "uno del otro pie"y así hasta 19. La palabra que expresaba 20 era la misma empleada para decir "un indio". El 21 era "uno de la mano del otro indio". "Dos indios"significaba 40; "tres indios", 60, etc. Algunos pueblos del África descubrieron, como muchos otros pueblos, que resulta sumamente difícil contar y calcular si se emplea una palabra o un símbolo distinto para cada número. En lugar de inventar una nueva palabra para cada número, se forman términos a partir de los que se designan los números de base y se establecen relaciones aritméticas entre ellos. En los sistemas orales de numeración africanos existen muchos ejemplos de este procedimiento (Gerdes y Cherinda, 1993).

Ejemplo

El número de días del año en el calendario[10] juliano[11] y en el calendario maya[12] es:

XXXXXXXXXXXXXXXXXXO

Podríamos argumentar que existen otras posibilidades para escribir el mismo número, con los mismos signos pero de apariencia distinta, por ejemplo:

XXXXXXXXXXOXXXXXXXX

O algo más exótico:

```
XXXXXXXXXXXXXXO
              X
              X
              X
              X
```

Esto nos obliga a poner reglas, para que cada número tenga solo una manera de escribirse. Por ejemplo:

[10]Si convenimos que: un año es el tiempo que dura la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol, un mes es el ciclo completo de las fases de la Luna y un día es el tiempo de una vuelta de la Tierra alrededor de sí misma, un calendario es una distribución del año en meses y días. Lamentablemente, no existe una correspondencia exacta entre los tres movimientos, es decir que un año *¡no son 12 meses!*, *¡ni 365 días!*, *¡el día no tiene una duración fija!* (¡Tantas cosas que uno se cree!); por lo tanto, un calendario es lo que uno quiera (como casi todo).

[11]En el año 708 del calendario romano, el emperador Julio César intentó poner de acuerdo, con la ayuda del astrónomo Sosígenes, el curso del Sol con la duración de los años en su calendario, agregando un día cada cuatro años (años bisiestos) pero este calendario tenía una inexactitud de 11 minutos 14 segundos por año. En 1582 el papa Gregorio XIII decretó que el 5 de octubre se volviera 15 de octubre y además que el primer año de cada siglo fuera bisiesto en tres siglos de cada cuatro; sin embargo, 1700, 1800 y 1900 no han sido bisiestos a pesar de ser divisibles por 4, pero; ¡el 2000 lo fue! Naturalmente, hay una razón.

[12]Existen dos tipos de calendarios mayas: el *tzolkín* y el *haab*. El primero era sagrado y constaba de 260 días (*kines*), pero como no coincidía con la translación terrestre alrededor del Sol, no era útil como una guía de actividades agrícolas. El año civil (*haab*) se componía de 18 meses de 20 días cada uno y cinco días adicionales (*uayeb*) al final del año, considerados nefastos, en ellos se guardaba ayuno y se hacían sacrificios de sangre.

1. Escribir de izquierda a derecha (esto por seguir nuestras costumbres[13]).

2. Escribir primero los símbolos X, luego los símbolos O y finalmente los símbolos I.

3. Escribir la representación del número con el mínimo número de símbolos posibles.

4. Escribir los símbolos en el mismo renglón y aproximadamente del mismo tamaño.

Si pensamos en escribir números mayores a los considerados hasta ahora, podría ser útil inventarnos más símbolos, por ejemplo reemplazar XXXXXXX por L o algo similar. Pero esto no es solución porque para números aún más grandes tendríamos que seguir aumentando el número de símbolos, en un proceso sin fin. Esta es la razón de dejar solo tres símbolos en nuestro sistema.

El problema de escribir números grandes, requiere mayor esfuerzo de parte nuestra, por lo que dejaremos esta tarea para más adelante.

Ejercicios

1. *Invente sus propios símbolos, elija sus propias reglas y construya un sistema de números para contar, luego proponga soluciones para el problema de escribir números grandes.*

2. *Consulte cuáles fueron los símbolos utilizados por los egipcios y por los romanos para representar números y cuáles eran sus reglas de escritura, compárelas con el sistema creado por usted y por el propuesto en este texto ¿Encuentra diferencias? ¿Similitudes? ¿Cuáles?*

∗ ∗

No espere que siempre le pongan ejercicios, haga sus propias hipótesis, intente caminar solo desde el principio; es posible que se caiga a veces, pero consuélese, eso nos pasa a todos.

∗ ∗

[13]Los antiguos egipcios, en su sistema de jeroglíficos, leían los números de derecha a izquierda. En el idioma alemán los números de dos cifras se escriben de izquierda a derecha pero se leen de derecha a izquierda.

1.2. Operaciones

Una de las utilidades más grandes de un sistema de números es la posibilidad de *calcular*, esto es, *operar* dos o más números para obtener otro mediante procedimientos mentales, sin tener que recurrir a la experiencia directa[14].

Por ejemplo, si queremos conocer el número de elementos que resulta de reunir dos colecciones de objetos, de cada una de las cuales ya conocemos su número, no es necesario hacer de nuevo el conteo de la nueva colección; podemos efectuar una *operación* y con ella obtener el resultado.

La más simple de las operaciones aritméticas es la *adición* o *suma*.

1.2.1. Adición

Para sumar dos cantidades cualesquiera, podemos escribir los símbolos que representan cada una de las cantidades, una a continuación de otra y reescribir el resultado de acuerdo con nuestras reglas[15]; a este procedimiento lo llamaremos *adición* o *suma*, al resultado de la operación lo llamaremos *suma*, como a la operación, sin que haya lugar a confusión, y a los números que se adicionan los llamaremos *sumandos*.

Ejemplo

Si tenemos los números XOOOIII y XOOII podemos adicionarlos de la siguiente manera:

1. Coloquemos uno a continuación del otro: XOOOIIIXOOII.
2. Escribamos los símbolos en el orden acordado: XXOOOOOIIIII.
3. Reduzcamos la cantidad de símbolos: XXXOO.

[14] No todas las culturas que han desarrollado símbolos numéricos los han utilizado para calcular, las culturas que lo hicieron, desarrollaron conocimientos matemáticos más avanzados, como los babilonios y los egipcios. Otras, en cambio, como la de los romanos, no utilizaron sus símbolos para hacer cálculos; no obstante, de las numeraciones antiguas, esta es la única que permanece.

[15] Esta manera de adicionar es la misma que usaron los babilonios para adicionar números menores de 60, también la usaron los egipcios.

Luego de hacer varias adiciones nos vamos dando cuenta de ciertas cosas que pasan en todas ellas; de ciertas reglas generales que van surgiendo de la experimentación y la observación, por ejemplo:

1. La suma no depende del orden de los sumandos.

2. El resultado de contar un conjunto dado de objetos no depende del orden en que se cuenten.

Aunque usualmente cuando tenemos dos números y queremos sumarlos utilizamos un signo para indicar nuestro interés, al parecer aquí no es necesario; solo con disponer un número a continuación del otro, sabemos que se requiere hacer una adición[16].

Ejercicios

1. *Plantee otras regularidades comunes a todas las adiciones.*

2. *Consulte qué signos se utilizaron para representar la adición en la antigüedad.*

1.2.2. Orden entre cantidades

Decimos que *un número es menor que otro* si sus símbolos están explícita o implícitamente en los símbolos del otro. Al considerar las representaciones de dos cantidades diferentes siempre hay una de ellas que es menor.

1.2.3. Sustracción

En muchas situaciones es necesario quitar una cantidad de otra, lo cual puede llevarse a cabo sin necesidad de recurrir a los objetos que las cantidades representan. Un procedimiento que nos permite realizar esta tarea lo llamaremos *sustracción*[17] o *resta*.

[16]Diofanto de Alejandría no utilizaba signo alguno para la adición, la representaba simplemente por yuxtaposición de los sumandos; similarmente lo hacía el árabe al-Qalasadi en el siglo XV.

[17]En rigor, la sustracción no es una operación entre números naturales, pues no todas las sustracciones se pueden efectuar, solo es posible si el sustraendo es menor o igual que minuendo, pero para los propósitos de este trabajo, esta limitación no la consideramos fundamental, por el momento.

Ejercicio

¿Es posible sustraer dos números iguales?

Si tenemos un número que llamamos *minuendo* y le queremos sustraer otro número que llamamos *sustraendo*, utilizamos nuestros símbolos y reglas para encontrar el resultado que llamamos *diferencia o resta*, de la siguiente forma:

1. Eliminamos los símbolos que se encuentren comunes en el minuendo y el sustraendo, uno a uno, hasta que no queden símbolos en el sustraendo. (Es necesario que el número que representa el sustraendo sea menor o igual que el del minuendo; a diferencia de la adición, los números que participan en la sustracción desempeñan un papel diferente).

2. En el caso en que no haya símbolos comunes, sustituimos en el minuendo X o O por su equivalencia y procedemos como en el numeral inmediatamente anterior.

3. Aplicamos las reglas de escritura a los símbolos que quedan y este es el resultado.

Ejemplo

Si queremos sustraer (también se dice restar) del número XXXOIII el número XOOI:

i. Eliminamos, uno a uno, los símbolos que se encuentran comunes en el minuendo y el sustraendo. El resultado de este primer paso es: XXII en el minuendo y O en el sustraendo.

ii. Como aún tenemos símbolos en el sustraendo, sustituimos una X del minuendo por OOOO, quedando XOOOOII en el minuendo y O en el sustraendo.

iii. Repetimos el paso 1 y tenemos como resultado final la diferencia XOOOII.

Si quisiéramos indicar simbólicamente una sustracción, sería necesario algún signo para diferenciarla de una adición. *¿Cuál símbolo propone usted y por qué?*[18].

Ejercicio

¿Encuentra algunas regularidades que se cumplan para todas las sustracciones? Enumérelas y compárelas con las observadas para la adición.

1.2.4. Multiplicación

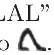
Cuando se requiere sumar varias veces la misma cantidad, es natural intentar simplificar el proceso de adicionar, en uno que nos evite hacer varias veces lo mismo. A este procedimiento lo llamamos *multiplicación*; al resultado de una multiplicación, *producto* y a los números que se multiplican, *factores*.

Como el propósito de ahora es contar por conjuntos[19] que tengan la misma cantidad de elementos, lo que equivale a hacer varias adiciones del mismo número; iniciaremos la discusión con el caso más sencillo (*este truco funciona casi siempre*). Empecemos por multiplicar los números básicos de nuestro sistema, por ejemplo:

1. Si queremos sumar I consigo mismo, escrito O veces; esto es, multiplicar O con I, encontramos el producto escribiendo O veces I y sumando[20], o sea,

   IIIII

   Esto es, escribir el símbolo I tantas veces como esté I en el primer factor; el resultado es IIIII, o lo que es lo mismo, según nuestras reglas,

[18] Según Hilpretch (1906, citado por Cajori, 1928), los babilonios tenían un ideograma para representar la sustracción, el cual es presentado por este autor como "LAL", los egipcios también tenían un símbolo similar a dos piernas hacia atrás, algo como . Diofanto también utilizó un signo para esta operación: , mientras que Bakhshali empleó el signo + para la sustracción. Desde el siglo XV matemáticos franceses e italianos utilizaban la letra "m" o con una marca encima.

[19] Muy seguramente quedaría mejor la expresión "contar por grupos", pero decidimos cambiarla a "contar por conjuntos"por cuanto, en matemáticas, el término "grupo"tiene un significado particular.

[20] En las escuelas de primaria o secundaria se suele decir que la multiplicación de O y I, consiste en sumar O veces I, pero esta interpretación es incorrecta pues en ella solo hay IIII sumas; para efectuar *una* adición se necesitan *dos* números.

O. En resumen

O veces I es O.

2. O veces O significa escribir IIIII veces O, o sea, repetir el símbolo O tantas veces como esté I en el primer término y sumar, esto es OOOOO, por lo tanto

   O veces O es OOOOO,

   esto es,

   XO.

   Razonando en forma parecida obtenemos que

   O veces X es XXXXX.

   De manera similar conseguimos los resultados siguientes:

   X veces I es X

   X veces O es XXXXX.

   X veces X es XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX.

Es claro que para sumar o para multiplicar se requieren por lo menos dos números; sin embargo, muchas veces resulta útil *hacer convenios* que nos permiten escribir de manera unificada un conjunto de reglas o procedimientos sin tener que enunciar cada vez una lista de excepciones. En el caso que nos ocupa podemos *convenir*, que aunque *no estamos sumando*, digamos que

I vez I debe ser I.

I vez O es O

I vez X es X.

Todos estos resultados los podemos poner juntos en una tabla, que se conoce como una tabla de *multiplicar*.

•	I	O	X
I	I	O	X
O	O	XO	X X X X X
X	X	X X X X X	X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X

Tabla 1.1

Antes de ponernos a hacer cuentas más complicadas, detengámonos un momento a pensar (*este es otro viejo truco de los matemáticos*); miremos qué características tiene nuestro sistema, para ver si podemos hacer las cuentas más fácil:

1. Para simplificar la notación, reemplazaremos la palabra "veces" por un símbolo más sencillo de escribir, por ejemplo un punto • (como lo hicimos en la tabla 1.1), o lo que usted quiera, siempre y cuando no corresponda a uno de los símbolos del sistema y no se le olvide; es decir, que algunas veces use un punto y otras, una raya u otra cosa; una condición que exigen los símbolos, es que una vez que usted los acepte, deben tener siempre el mismo significado, mejor dicho, *seamos serios con los símbolos.*

2. Para multiplicar dos números, los escribimos uno a continuación del otro colocando el símbolo acordado entre ellos. Es conveniente acordar que si alguno de los factores está conformado por más de un símbolo, este será escrito entre paréntesis[21] dado que se puede prestar para confusión si no lo hacemos. Por ejemplo, si escribimos X • OI, es posible interpretar esta multiplicación como X • (OI) o como (X • O) I, de lo cual obtenemos resultados diferentes.

3. Al efectuar multiplicaciones notamos que:

   a) No importa el orden en que se multipliquen dos números cualesquiera el producto de ellos es el mismo[22]. A este comportamiento se le conoce *como propiedad conmutativa de la multiplicación.*

   $$\mathrm{O} \bullet \mathrm{I} = \mathrm{I} \bullet \mathrm{O}$$
   $$\mathrm{X} \bullet \mathrm{I} = \mathrm{I} \bullet \mathrm{X}$$
   $$\mathrm{O} \bullet \mathrm{X} = \mathrm{X} \bullet \mathrm{O}$$

   b) Cualquier número multiplicado con I y I multiplicado con cualquier número da como resultado el mismo número; es decir, que I tiene un comportamiento especial en nuestro sistema; por esto a I se le conoce como *elemento idéntico, elemento neutro* o *módulo de la multiplicación.*

[21] Los paréntesis en esta sección solo indican que lo que está entre ellos debe considerarse como un único número.

[22] Usaremos dos líneas de la misma longitud (=) para indicar la igualdad de acuerdo con la costumbre; este signo fue usado por primera vez por Robert Recorde en Inglaterra en 1557.

c) Multiplicar un número por otro, equivale a escribir uno de ellos tantas veces como I esté en la representación del otro, es decir repetirlo una vez por cada I y sumar.

d) Para multiplicar cantidades que tengan varios símbolos, multiplicamos cada símbolo del primer factor por el segundo factor y luego sumamos los resultados. Esta propiedad se conoce como *propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.* ¿Obtenemos el mismo resultado si multiplicamos cada símbolo del segundo factor por el primer factor y luego sumamos? ¿Por qué?

Estas observaciones nos ayudarán cuando las cosas empiecen a complicarse.

Ejemplo

Para multiplicar (OI) • (XOII); es decir, saber el resultado de adicionar OI veces la cantidad XOII, procedemos así:

1. Separamos el símbolo OI en O y I y cada uno de ellos lo multiplicamos por XOII

$$(\mathrm{OI}) \bullet (\mathrm{XOII}) = (\mathrm{O} \bullet (\mathrm{XOII}))\ (\mathrm{I} \bullet (\mathrm{XOII}))$$

2. A la derecha, reemplazamos la primera O por su equivalente en I

$$(\mathrm{OI}) \bullet (\mathrm{XOII}) = ((\mathrm{IIIII}) \bullet (\mathrm{XOII}))\ (\mathrm{I} \bullet (\mathrm{XOII}))$$

3. Por cada I escribimos una vez XOII

$$(\mathrm{OI}) \bullet (\mathrm{XOII}) = (\mathrm{XOII})(\mathrm{XOII})(\mathrm{XOII})(\mathrm{XOII})(\mathrm{XOII})(\mathrm{XOII})$$

4. Reescribimos el resultado de acuerdo con nuestras reglas

$$(\mathrm{OI}) \bullet (\mathrm{XOII}) = \mathrm{XXXXXXOOOOOOIIIIIIIIIIII}$$
$$(\mathrm{OI}) \bullet (\mathrm{XOII}) = \mathrm{XXXXXXXXII}.$$

El procedimiento descrito aquí para multiplicar, por fortuna, no es el único, como *sucede con casi todos los procedimientos y métodos usados en matemáticas*; otra manera de hacerlo que puede resultarnos más familiar por nuestros días de escuela, es la siguiente:

$$\begin{array}{r} \text{XOII} \\ \bullet\ \text{OI} \\ \hline \text{XOII} \\ \text{XXXXXXOOO} \\ \hline \text{XXXXXXXXII} \end{array}$$

Lo que hemos hecho es:

1. Multiplicar el I de OI por cada uno de los símbolos de XOII y lo escribimos en el primer renglón.
2. Multiplicar O de OI por cada uno de los símbolos de XOII de acuerdo con la tabla de multiplicar y lo escribimos en el segundo renglón.
3. Sumar los resultados.

Notemos que en este proceso las posiciones no son importantes (*¿por qué?*); además, podemos empezar por cualquier símbolo y hacerlo en cualquier orden. Un muchacho de escuela posiblemente apreciará esta información.

Ejercicio

Seguramente usted ya notó que existen otros procesos para realizar este mismo cálculo y está sacando sus propias conclusiones. Verifique si las observaciones que se cumplen para multiplicar los números base del sistema también se tienen cuando un número tiene varios símbolos.

1.2.5. División

Nuestro propósito ahora es repartir una cantidad[23] en un número determinado de conjuntos, de manera que cada conjunto tenga el mismo número de elementos, o de manera equivalente (*¿por qué?*), repartir una cantidad en conjuntos de manera que cada una de ellos tenga un número determinado de elementos; a este proceso se le da el nombre de *división*[24].

La cantidad a repartir la llamaremos *dividendo*, la cantidad de elementos de cada parte, o el número de partes, la llamamos *divisor*, el número

[23]Nos referimos a cantidad como el número que resulta de un conteo.

[24]La división, como la sustracción, tampoco es una operación en el sentido de que no siempre es posible repartir una cantidad dada en un determinado número de partes, sin que sobren elementos, pero nuestro interés se centra por ahora en los procedimientos, por eso omitiremos, por ahora, esta dificultad.

de partes resultante, o el número de elementos de cada parte, *cociente* y el número de elementos que sobran, *residuo*.

Ejercicio

¿Todas las divisiones son posibles? Explique.

Copiando lo hecho para la multiplicación, primero hagamos unas cuentas simples.

En los procesos de repartición, como ya hemos mencionado, hay dos tipos de problemas:

1. Repartir, por ejemplo, una cantidad X en O conjuntos con el mismo número de elementos.

2. Repartir la cantidad X en conjuntos de O elementos[25].

Para resolver el primer problema, un camino es:

a) Escribir el dividendo utilizando solamente el símbolo I.

b) Colocar un I en cada conjunto como en la figura 1.1.

c) Repetir el paso *b*) hasta agotar las existencias o hasta que lo que sobre no alcance para asignar un I a cada conjunto.

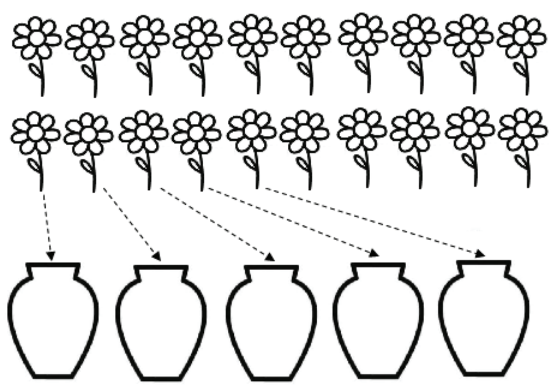


Figura 1.1

[25]En la didáctica de las matemáticas, estos dos significados de la división han sido nominados como *división partitiva* y *división cuotitiva*, respectivamente. Según investigaciones, para los niños resulta más sencilla la primera que la segunda.

El resultado de este proceso lo podemos resumir en la figura 1.2.

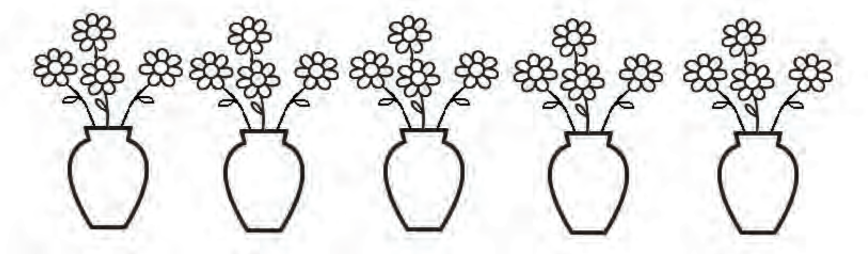


Figura 1.2

Como se ve, en cada conjunto hay IIII elementos. Lo que expresamos simbólicamente así:

$$\mathrm{X}\,\underline{\big|\,\mathrm{O}\quad}\\ \qquad \mathrm{IIII} \qquad\qquad \text{o así:}\quad \mathrm{X} \div \mathrm{O} = \mathrm{IIII}$$

Ejercicio

Plantee un procedimiento para resolver el segundo problema.

∗ ∗

Si su lápiz, atento lector, ha estado activo, proponerle más ejercicios de nuestra parte no se hace necesario.

∗ ∗

Notemos que estos procesos son poco prácticos cuando las cantidades son grandes, esto hace que sea necesario buscar procedimientos (también llamados *algoritmos*) que nos faciliten resolver el problema más eficientemente.

Ejemplo

Si queremos dividir XXOOIII entre XO, el dividendo puede representarse en la forma XO XO III, es decir:

$$\mathrm{XXOOIII} = \mathrm{XO\ XO\ III}$$

se observa que el divisor "cabe" II veces en el dividendo y que el residuo es III.

También podríamos adaptar los procedimientos que aprendimos en la escuela[26] para ver si estos funcionan también en nuestro sistema de números.

Continuando con nuestro ejemplo, dividamos XXOOIII entre XO copiando el procedimiento que aprendimos en la escuela para hacer divisiones, así:

1. Como en el divisor hay dos símbolos, tomamos también dos en el dividendo.

2. Como el primer símbolo del divisor es igual al primer símbolo del dividendo, buscamos en la tabla de multiplicar un número que multiplicado por X nos dé X, este es I y va a formar parte del cociente.

3. Multiplicamos I por el divisor y lo restamos del dividendo.

$$\begin{array}{l|l}
\text{XXOOIII} & \text{XO} \\ \cline{2-2}
\text{XO} & \quad\text{I} \\ \cline{1-1}
\quad\text{XOIII} &
\end{array}$$

4. Repetimos 1, 2 y 3 tomando como dividendo el residuo.

$$\begin{array}{l|l}
\text{XXOOIII} & \text{XO} \\ \cline{2-2}
\text{XO} & \quad\text{II} \\ \cline{1-1}
\qquad\text{XOIII} & \\
\qquad\text{XO} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad\text{III} &
\end{array}$$

El cociente de nuestra división es II y el residuo es III.

Este proceso lo describimos en los siguientes pasos:

1. Separamos desde el extremo izquierdo del dividendo tantos símbolos como haya en el divisor.

2. Si el divisor es menor o igual que el número formado en la separación hecha en el paso anterior en el dividendo; es decir, si el divisor se encuentra de manera explícita o implícita en alguna representación del número separado[27],

[26] Curiosamente, esta es una de las primeras propuestas que surgen en las aulas al discutir el tema.

[27] Por ejemplo I es menor que O porque I está en la representación IIIII de O, O es menor que X porque O está en la representación OOOO de X.

2.1. Buscamos un número que multiplicado por el divisor quede lo más próximo posible, pero sin que sea mayor que el número separado, este número va a ser parte del cociente.

2.2. Multiplicamos el número que encontramos por el divisor y el resultado lo restamos del número separado del dividendo.

2.3. Tomamos el resultado de esta resta (residuo) como nuevo dividendo y repetimos el proceso hasta que el residuo sea menor que el divisor. Aquí termina el proceso.

3. Si el número formado en el dividendo, en la separación inicial del paso 2, es menor que el divisor agregamos el símbolo siguiente (si existe) en el dividendo y continuamos en el paso 2. Si no existe, el proceso termina o la división no se puede efectuar.

Ejercicios

1. *Formule explicaciones para el algoritmo descrito anteriormente.*

2. *Proponga su propio procedimiento para dividir.*

1.2.6. Potenciación

En esta sección vamos a usar un proceso, muy utilizado en la construcción de nuevas teorías matemáticas a partir de otras previamente establecidas; consiste en *copiar un procedimiento o concepto, modificando alguno de sus componentes.*

Vimos cómo la multiplicación se puede construir con la ayuda de la adición, repitiendo un mismo sumando algún número de veces; análogamente podemos repetir un factor para hacer una multiplicación de él por sí mismo un número de veces y con ello obtener otra operación; esta se denomina *potenciación.*

Como esta es una nueva operación *debemos escoger* una manera adecuada de escribirla para no confundirnos; es decir, *una notación* (*este también es un paso importante cuando estamos inventando*). Como de costumbre la simbología y la notación podemos escogerlas tan exóticas como queramos, pero sería mejor que si estamos expresando ideas ya conocidas, usemos la notación usual.

Escribiremos

$$\begin{aligned}&\mathrm{O}^{\mathrm{II}} \text{ para expresar } \mathrm{O} \bullet \mathrm{O}\text{; es decir, } \mathrm{O}^{\mathrm{II}} = \mathrm{O} \bullet \mathrm{O}\\&\mathrm{O}^{\mathrm{III}} = \mathrm{O} \bullet \mathrm{O} \bullet \mathrm{O}\\&\mathrm{O}^{\mathrm{O}} = \mathrm{O} \bullet \mathrm{O} \bullet \mathrm{O} \bullet \mathrm{O} \bullet \mathrm{O}\end{aligned}$$

No hay problema en escribir O • O • O puesto que de cualquier forma que realicemos los productos el resultado es el mismo; es decir,

$$(\mathrm{O} \bullet \mathrm{O}) \bullet \mathrm{O} = \mathrm{O} \bullet (\mathrm{O} \bullet \mathrm{O}).$$

Para notar la potenciación entre dos números, escribimos un número que llamamos *base*, y en la parte superior derecha de este, escribimos el otro número que denominamos *exponente*. La base se escribe tantas veces como lo diga el exponente y luego se efectúa la multiplicación de todos ellos; al resultado de esta operación se le conoce como *potencia*.

Convenimos además que O^{I} significa O; es bueno notar que en este caso no hay multiplicaciones[28] cuyos factores sean O.

∗ ∗

Es hora de soltar la mano; asegúrese de hacer cuantas operaciones sean necesarias para que el procedimiento llegue a ser automático en su cabeza.

∗ ∗

1.3. El problema de los números grandes

Si en nuestro sistema numérico queremos escribir un número que represente una cantidad grande, es decir, un número mayor a los considerados hasta ahora, la cantidad de X que habría que escribir sería tan tediosa como representarlo solo con los símbolos I.

Hemos descartado ya la posibilidad de hacer nuevos reemplazos y agregar cada vez más símbolos para representar un número, por cuanto esto no resuelve para nada el problema y sí nos llenaría de una cantidad indistinguible de símbolos, que dificultaría su manejo para cualquier persona no acostumbrada a trabajar con ellos.

[28] Como en cualquier otra operación, se necesitan *dos* números para hacer *una* multiplicación.

1.3.1. Notación multiplicativa

Una propuesta de solución para este problema es que utilicemos los resultados de las multiplicaciones para resumir símbolos, escribiendo por ejemplo X • O en lugar de XXXXX. Por supuesto hay que modificar las reglas de la escritura de los números para no generar confusiones; si escribimos X • O debemos distinguir si tenemos que realizar la multiplicación o dejarla indicada. Por ello, es necesario hacer nuevos convenios.

Como nuestro problema consiste en un elevado número de X para indicar números grandes, escribamos el número de veces que aparece la X, en lugar de escribir las X.

Pero no requerimos escribir el símbolo de multiplicación, basta escribir el número de veces que aparece la X, en la parte inferior derecha de ella. Por ejemplo el número

$$\mathrm{XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXOOOIIII}$$

lo escribimos

$$\mathrm{X_{XOII}OOOIIII}.$$

En resumen:

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{X} \bullet n,$$

donde n representa un número cualquiera del sistema.

Notemos que esta solución *no* introduce nuevos símbolos al sistema y simplifica la escritura de números grandes.

Si representamos un número cualquiera con una letra, por ejemplo m, n, etc, podemos verificar ciertos comportamientos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_m\mathrm{X}_n &= \mathrm{X}_{mn} \\ n \bullet \mathrm{X}_m &= \mathrm{X}_{m\bullet n} \\ \mathrm{X}_m \bullet \mathrm{X}_n &= \mathrm{X}_{(\mathrm{X}_{m\bullet n})} \end{aligned}$$

Ejercicios

1. *Justifique las fórmulas anteriores.*
2. *¿Son equivalentes* $\mathrm{X}_{(\mathrm{X}_n)}$ *y* $(\mathrm{X}_\mathrm{X})_n$*?*
3. *Plantee un par de igualdades como las anteriores y justifíquelas; piense por ejemplo en divisiones entre números utilizando la notación multiplicativa o combine adiciones y multiplicaciones utilizando esta notación.*

4. *Estudie la propuesta de notación multiplicativa y proponga un conjunto de reglas para formar un sistema de representación de números, con sus operaciones básicas. ¿Cómo se comportan las potencias de X_n?*

5. *Represente el número de días de un año en el calendario juliano en este sistema.*

1.3.2. Notación exponencial

Otra posibilidad para resolver el problema que nos compete en esta sección es utilizar la misma idea anterior pero cambiando la operación y, en lugar de usar la multiplicación, usar la potenciación. Esta propuesta está basada en la observación de la manera como crecen los números cuando reiteramos la potenciación, con respecto a las demás operaciones.

Ejemplos

Tomemos como base X y expresemos sus primeras potencias:

1. X^{II} es aproximadamente el número de hojas que tiene un libro como el álgebra de Baldor.

2. $\mathrm{X}^{\mathrm{III}}$ es aproximadamente el número de kilómetros del radio de la Tierra.

3. $\mathrm{X}^{\mathrm{IIII}}$ es aproximadamente la mitad de la distancia entre la Tierra y la Luna en kilómetros.

4. X^{O} es aproximadamente el número de habitantes del área metropolitana de Medellín en 2013.

5. X^{OI} es aproximadamente la población de Francia en 2013.

6. $\mathrm{X}^{\mathrm{OOOII}}$ es aproximadamente el número conocido de estrellas del universo.

7. $\mathrm{X}^{\mathrm{XII}}$ es aproximadamente el número de gotas de agua que hay en el mar.

8. $\mathrm{X}^{\mathrm{XXOO}}$ es aproximadamente el número de átomos del universo.

No discutimos aquí la manera para calcular estos números, por lo engorroso de la escritura, pero en principio los cálculos son posibles en cualquier sistema numérico; dejamos esta tarea para cuando tengamos otras representaciones más evolucionadas, donde su presentación sea más cómoda.

Otra razón para escoger la potenciación es que esta también tiene comportamientos que permiten simplificar algunos cálculos, sobre todo cuando la base de los números es la misma. Por ejemplo, para multiplicar X^{OI} por X^{OI} simplemente colocamos la misma base X y sumamos los exponentes, obteniendo como resultado $\mathrm{X}^{\mathrm{OOII}}$; esto se debe a que debemos repetir X, primero OI veces y luego OI veces, en total OOII veces para multiplicar, que es lo que expresa el último resultado.

Como vemos, la notación exponencial nos permite escribir números grandes con pocos símbolos, lo que sugiere utilizar esta notación para modificar nuestro sistema de representación de números y obtener una manera más corta para escribir números grandes; sin embargo, si escogemos todas las potencias de X y de O, no tenemos un criterio sencillo para decidir cuál número entre X^{O} o O^{X} es más pequeño que el otro, para incluirlo según nuestras reglas en la escritura de un número más grande, además existen muchos números que no se pueden escribir de manera sencilla con esta notación, solo son sencillos aquellos que sean potencias de los símbolos fundamentales.

Por ejemplo, entre O^{O} y O^{X} hay muchos números cuya escritura es dispendiosa.

Ejercicio

Escriba el número anterior a O^{X}. *Le sugerimos iniciar el estudio con otros exponentes y hallar algún tipo de regularidad.*

El problema de la escritura se debe a que X es IIII veces O, pero O es IIIII veces I; es decir, que uno no se puede escribir como potencia del otro.

Una salida a este problema es omitir un símbolo de nuestro sistema y en su lugar colocar, no una sino todas las potencias del otro; es decir, por ejemplo, eliminemos de nuestro sistema inicial el símbolo X (o el símbolo O) y escribamos los números solamente con I y O y sus potencias. Así, algunos números son:

I, II, III, IIII, O, OI, OII, OIII, ..., OOOOIIII, O^{II}, ..., $\mathrm{O}^{\mathrm{III}}$, ..., $\mathrm{O}^{\mathrm{IIII}}$, ... O^{O}, O^{O}I, O^{O}II, O^{O}III, O^{O}IIII, O^{O}O, ...

Ejercicio

Defina procedimientos para las operaciones elementales con la notación exponencial eliminando el símbolo X del sistema y reintente con la notación multiplicativa; es posible que esta discusión le haya sugerido alguna idea.

---

* *

Suele suceder que luego de avanzar un poco, los problemas por los que hemos pasado se ven de una manera diferente.

* *

A pesar de las dificultades, hemos logrado resolver el problema de contar, siempre y cuando los números no sean demasiado grandes. Aunque el problema teórico está resuelto, queda uno práctico por resolver: la escritura de los números grandes tiene un aspecto muy poco estético, por lo que debemos abordarlo más adelante.

Sistemas numéricos, como el desarrollado en este capítulo, fueron inventados por diversas culturas, como los jonios y los romanos; estos sistemas tienen dificultades importantes cuando se utilizan para calcular, a diferencia del que hemos construido aquí.

Ejercicios

1. *Estudie el sistema de los números romanos y proponga procedimientos para operar con ellos.*

2. *Haga una analogía con la operación multiplicación para definir una nueva basada en la repetición de la potenciación e investigue*[29] *qué propiedades tiene. Le sugerimos, por ejemplo, definir*:

$$^{n}\mathrm{X} = ((((\mathrm{X})^{\mathrm{X}})^{\mathrm{X}})^{\cdots})^{\mathrm{X}}$$

   donde n *es el número de veces que repetimos la* X. *Por ejemplo* $^{\mathrm{II}}\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{X}}$.

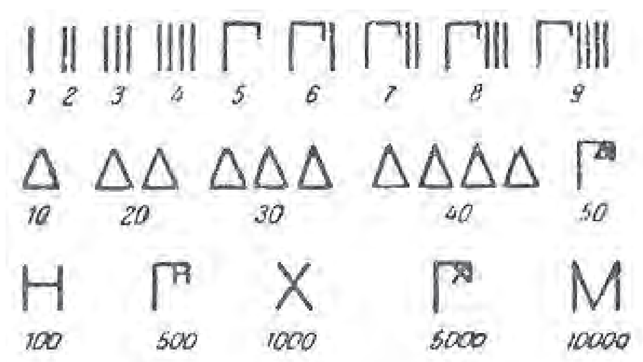
   a. *¿Será útil esta operación para inventar otra manera de escribir números grandes?*

[29] Atención, aquí le decimos “investigue”, mas no “consulte”. Entre los estudiantes es usual confundir estos dos términos, que son sustancialmente diferentes.

b. La notación multiplicativa permite calcular sumas de manera simple, la exponencial permite hallar productos fácilmente, ¿esta nueva operación se comporta bien con la potenciación?

c. Plantee propiedades para esta nueva operación.

3. *En la figura 1.3 se presenta la numeración ática griega. ¿Qué tipo de sistema de numeración es?*



Tomada de: Perelman (1980, p. 8).

Figura 1.3

Capítulo

2 Representaciones posicionales de números

2.1. Una idea genial: usar la posición

Al final del capítulo anterior, notamos que las potencias de un número dan resultados que crecen muy rápido cuando el exponente aumenta, lo que sugirió utilizar la notación exponencial para escribir números grandes.

La idea fue escoger como símbolos básicos I, O y sus potencias, convenir reglas para su escritura y estudiar procedimientos para hacer las operaciones que hemos definido en el capítulo anterior, esto es:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} \\ \mathrm{O} &= \mathrm{IIIII} \\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}} &= \mathrm{O\ O\ O\ O\ O} \\ \mathrm{O}^{\mathrm{III}} &= \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\mathrm{O}^{\mathrm{II}}\mathrm{O}^{\mathrm{II}}\mathrm{O}^{\mathrm{II}}\mathrm{O}^{\mathrm{II}} \\ \mathrm{O}^{\mathrm{IIII}} &= \mathrm{O}^{\mathrm{III}}\mathrm{O}^{\mathrm{III}}\mathrm{O}^{\mathrm{III}}\mathrm{O}^{\mathrm{III}}, \text{etc.} \end{aligned}$$

De esta forma, no es necesario incluir símbolos nuevos.

Si adoptamos las mismas reglas para la escritura de los números que en el capítulo anterior y estos nuevos símbolos, el número de dedos de una persona normal es O O O O; no parece que hayamos logrado un gran avance, pero si miramos números más grandes empezamos a ver las ganancias.

Por ejemplo, el número de días del año en el calendario juliano es:

$$\mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\ \mathrm{O\ O\ O},$$

aunque el número de símbolos disminuyó con respecto a nuestro antiguo sistema, no se ve aún muy atractivo.

Pero si consideramos números como:

$$\mathrm{O}^{\mathrm{OIII}}$$

que sirve para representar aproximadamente el número de habitantes de una ciudad como Neiva, o

$$\mathrm{O}^{\mathrm{OOIII}}$$

que es aproximadamente el número de habitantes actuales de toda China, en nuestro antiguo sistema de numeración tendrían una escritura mucho más aparatosa; por ejemplo, el primero tendría cinco mil ochocientos ochenta y dos veces la X, una O y IIII, lo que justifica el esfuerzo actual.

Los números en este nuevo sistema tienen apariencias como

$$\mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{III}}\ \mathrm{O}^{\mathrm{II}}\ \mathrm{O\ O\ O\ O\ I}.$$

Si los observamos un buen rato vemos que el símbolo O se repite muchas veces, y como ya convenimos que representa grupos de IIIII, podríamos no escribirlo y escribir solamente el número de veces que aparece cada símbolo con su exponente; para no confundirnos los separamos con un espacio, o de alguna otra forma. Con estos nuevos convenios el anterior número lo escribimos:

$$\mathrm{IIII}\quad \mathrm{I}\quad \mathrm{IIII}\quad \mathrm{I}$$

lo que significa que $\mathrm{O}^{\mathrm{III}}$ aparece IIII veces, O^{II} aparece I vez, O aparece IIII veces y I solo I vez (*¿esto no le recuerda los códigos de barras de los artículos en los supermercados*?).

Ejercicio

Averigüe cómo funcionan los códigos de barras y elabore un informe al respecto.

Como vemos, podemos ahora omitir también el símbolo O, pero aparece un problema, ¿qué hacemos cuando no haya, por ejemplo, grupos de $\mathrm{O}^{\mathrm{III}}$ pero sí de O^{II} y de OIIII? Deberíamos dejar un espacio entre la cantidad de veces que esté $\mathrm{O}^{\mathrm{IIII}}$ y la cantidad de veces que esté O^{II}; pero escribiendo de prisa, no sabríamos diferenciar si el espacio es doble o sencillo; *mejor detengámonos un poco a pensar*.

Estamos en una circunstancia similar a la inicial, pero con una gran ventaja, que hemos descubierto la posibilidad de usar la posición de los símbolos como ayuda para escribir números de una forma más breve.

Tenemos, hasta ahora, un solo símbolo (I) para representar todos los números (o bueno dos, si asumimos el espacio vacío como otro símbolo), el cual aparece repetido en cada posición hasta máximo, una unidad menos que la cantidad que escogimos como base (*¿por qué?*).

Si queremos identificar de otra manera si hay solo un I o dos o tres o cuatro, podemos introducir algunos nuevos símbolos. Por ejemplo, convengamos escribir:

$\otimes$ para cuando no aparece el símbolo básico I
$\oplus$ para cuando aparezca I vez
$\varnothing$ para cuando aparezca II veces
® para cuando aparezca III veces
© para cuando aparezca IIII veces

y no más, porque en el siguiente paso aparecería una unidad para la siguiente posición de la izquierda. Utlizando estos nuevos símbolos, el número de días del calendario juliano es

$$\varnothing \; \text{©} \; \text{®} \; \otimes$$

¡Y esto ya parece idioma chino!

∗ ∗
Una situación frecuente en el estudio de las matemáticas es que cuando avanzamos en un proceso de abstracción, podemos sustituir un conjunto de símbolos o ideas por un nuevo símbolo o una nueva idea. Conjuntos de estos a su vez pueden ser reemplazados dentro de una teoría por otros cada vez más abstractos, hasta llegar a conceptos tan sofisticados que darían la impresión de que estamos hablando sobre nada útil.
∗ ∗

Escogimos los símbolos anteriores de manera caprichosa y deliberadamente complicados, solo con el propósito de insistir en que uno puede inventarse lo que se le ocurra; es mejor, por supuesto, que si hay símbolos inventados para escribir algunas ideas será mejor usarlos y dejar nuestra inventiva para cosas más productivas. Por eso, a cambio de:

$\otimes$ escribimos 0
$\oplus$ escribimos 1
$\varnothing$ escribimos 2
® escribimos 3
© escribimos 4

y nuestro sistema queda con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4.

Este sistema tiene las siguientes características fundamentales:

1. En él es importante la posición de los símbolos, pues 34 significa que I aparece cuatro veces y O aparece tres veces, pero 43 significa que I aparece tres veces y O aparece cuatro veces. Por esta razón se llaman *representaciones posicionales de sistemas numéricos*[1]. A cada uno de los símbolos que forma un número lo llamaremos *cifra*[2].

2. El símbolo O no aparece explícitamente en la escritura de los números pero está implícito; se llama la *base* del sistema y lo podemos escoger de manera arbitraria para reemplazar tantos I como deseemos.

3. Las cifras de las representaciones posicionales no son, como en las representaciones no posicionales, un número de veces otra de ellas; aquí cada símbolo representa un residuo de hacer grupos de O elementos[3].

[1]El primer vestigio de un sistema de numeración posicional aparece en la cultura babilónica, donde se escogió como base el 60 para representar números que involucraran los problemas de matemáticas y astronomía. Aunque este sistema también era aditivo para los números escritos entre 1 y 60. Otra cultura que utilizó el principio de posición fueron los mayas, quienes utilizaban un sistema base 20 para las actividades comerciales y un sistema híbrido (base 20, base 18; es decir, las dos primeras posiciones correspondían a potencias de 20, mientras que la tercera a 18 de las de segundo orden) para las actividades referentes a la agricultura o el tiempo, por cuanto su calendario solar era de 18 meses de 20 días cada uno. Vale la pena también mencionar que los egipcios aunque agrupaban en potencias de 10, su sistema no era posicional.

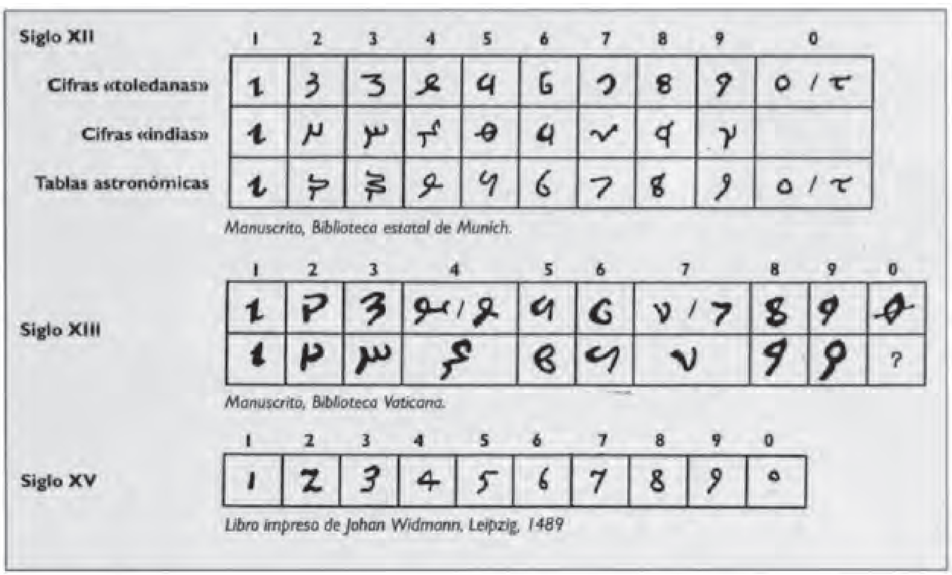
[2]La palabra *cifra* también se utiliza frecuentemente como sinónimo de número o cantidad, pero aquí solo la usamos para referirnos a un símbolo básico de un sistema de numeración posicional. En base diez las cifras suelen llamarse *dígitos*.

[3]Los babilonios escribían los números en grupos separados por espacios. Su escritura se hacía de derecha a izquierda; cada grupo representaba respectivamente unidades, grupos de 60 y grupos de 3600. Para hallar el número representado se efectuaban las multiplicaciones correspondientes y se adicionaban los productos resultantes. Para representar el cero al principio dejaban un espacio y luego lo hicieron con cuñas oblicuas.

Los mayas escribían los números en columnas de abajo hacia arriba. El grupo inferior representaba las unidades, el siguiente grupo el número de agrupaciones de 20 y el tercer grupo, el número de agrupaciones de 360. Tenían además un símbolo para representar el cero con la apariencia de un ojo semiabierto o una concha marina vista de perfil.

4. Existe un símbolo, el 0, para expresar una posición vacía[4]. El cero "0" de nuestra representación decimal, como expresión de ausencia de algún grupo, aseguran algunos, fue inventado por los indios[5] alrededor del año 718 d.C. pero hay quienes manifiestan que realmente se debe a un símbolo chino utilizado para llenar espacios.

El número cero en la actualidad representa mucho más que una posición vacía y forma parte fundamental del sistema de los números reales (Spivak, 1992, p. 5).



Tomada de: Allard (1993, p. 36).
Figura 2.1

[4]La palabra *cero* proviene de la voz árabe *ziffero*, que significa *lugar vacío*, fue inventado por los indios, pero en América los mayas utilizaron un concepto de cero, mucho antes de ser usado en Europa para expresar la ausencia de unidades o días en su sistema.

[5]Se dice que el símbolo (0) es indio, aunque algunos afirmaban que tuvo su origen en la letra griega *ómicron* que es la inicial de la palabra *ouden* o vacío. Actualmente se sabe que aunque el símbolo para representar una posición vacía, en algunas versiones en la tabla de Ptolomeo se parece a un *ómicron*, los símbolos iniciales para el cero en las fracciones sexadecimales griegas eran formas redondas decoradas, además, cuando se consolidó el sistema decimal en el Imperio bizantino durante el siglo XV, se partió de un sistema alfabético para numerales, quitando las últimas 18 letras y añadiendo un símbolo para el cero que tenía diferentes formas y que parecía una hache invertida o un punto.

2.2. Ejemplos de sistemas de numeración posicional

2.2.1. Sistema decimal (base 10)

El sistema que usamos en la actualidad y que usa la mayoría de los países del mundo es el sistema decimal; parece natural pensar que esto sea consecuencia de que el ser humano tiene diez dedos en las manos.

Los símbolos básicos de este sistema los llamamos *dígitos*, palabra que significa "dedo" en latín.

Este sistema desarrollado por los indios, incluía un símbolo para el cero. Los árabes lo dieron a conocer en Europa. Por eso, también se conoce como *indoarábigo*, aunque el aspecto de sus símbolos ha ido cambiando con el tiempo, como se observa en la figura 2.1.

2.2.1.1. El sistema de numeración inca

Al parecer una de las culturas que tuvo un sistema de numeración decimal fue la inca[6], solo que ellos no utilizaban los mismos símbolos que nosotros usamos en la actualidad, los números eran representados bien con cuentas o piedrecillas, en su ábaco inca conocido como *yupana* (derivado del vocablo quechua *yupay* que significa contar), o bien con nudos en sus quipus.

2.2.1.1.1. La representación de los números en el quipu

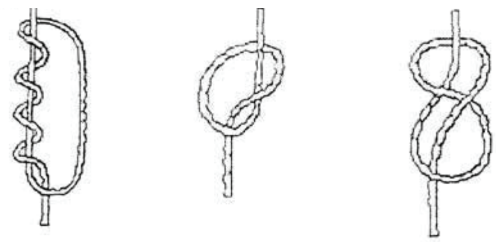
El quipu[7] consta de una cuerda delgada, de aproximadamente un metro de longitud, de la cual penden otros cordones con distintas longitudes y colores; en uno de ellos hay varios nudos, que pueden ser de tres tipos diferentes, como se muestra en la figura 2.2.

El primer nudo de la izquierda que se muestra en la figura 2.2, se utilizaba para representar las unidades de 2 hasta 9 (en la figura se está representando el número 4 por cuanto hay cuatro vueltas); el segundo tipo de nudo corresponde al que se hacía para representar unidades de primer orden (decenas), o

[6]Lo conocido de la cultura inca se lo debemos a los datos recogidos por el cronista inca-español, Felipe Guamán Poma de Ayala, en su libro *Nueva corónica y buen gobierno*. Los incas tenían un sistema social organizado desde los *puric* (peones), hasta el *hono-curaca* (jefe principal del Ayllu), pasando por los *cancha-camayo* y los *pachaca-curaca*. Por cada diez subalternos había un superior inmediato, luego del *hono-curaca* estaba el gobernador de provincia quien hacía de mandatario de cuartel; el imperio se dividía en cuatro cuarteles, la posición más alta la ocupaba el *sapa-inca* (emperador). (Wassen, 1940 y Von Hagen, 1969).

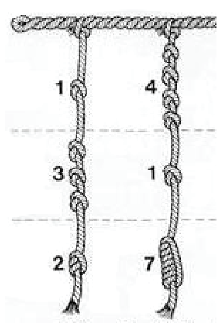
[7]El quipu se utilizaba para registrar datos importantes, como la cantidad de producción en las cosechas, el número de habitantes, etc., y solo podía ser leído por personas especializadas, denominados *kipucamayocs*.

de segundo o de tercero o ..., según la cantidad de estos nudos se interpretaba la cantidad de unidades del orden correspondiente y el último nudo, en forma de ocho, se utilizaba para representar exclusivamente el número uno.



Tomada de: Ascher y Ascher (1997, p. 2).
Figura 2.2

En la figura 2.3 se muestran cómo se escribían los números 132 y 417 en el sistema de numeración incaico; las unidades se representaban en el extremo de las cuerdas y se ascendía de acuerdo a si los nudos simbolizaban decenas, centenas, etc.



Tomada de: http://www.foroexplayate.com/phpBB3/viewtopic.php?f=22&t=18727
Figura 2.3

2.2.1.1.2 La representación de los números en la yupana

La primera representación conocida de la yupana apareció en 1615 en la obra *Nueva corónica y buen gobierno*, presentada en la figura 2.4. La tabla allí expuesta es de forma rectangular constituida por cinco filas y cuatro columnas, en cada una de las casillas se encuentran círculos negros y blancos distribuidos por columnas, en la primera se encuentran cinco, en la segunda tres, en la tercera dos y en la última un círculo; como se muestra en la figura 2.5.

Tomada del: manuscrito de don Felipe Huaman
(citado por Smith y Ginsburg 1997, p. 54).

Figura 2.4

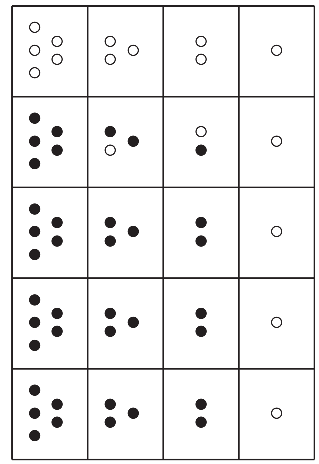


Figura 2.5

A raíz de este esquema surgieron diferentes interpretaciones con respecto al significado de los círculos negros y los círculos blancos; algunos personajes afirman que los blancos indican posiciones desocupadas y los negros representan números, los cuales eran simbolizados por los incas con cuentas, granos de maíz, piedrecillas, semillas, etc. Otros, por el contrario, aseguran que los círculos negros indican posiciones para sumar y los blancos para restar; sin embargo, de esta última acepción no se conoce desarrollo alguno.

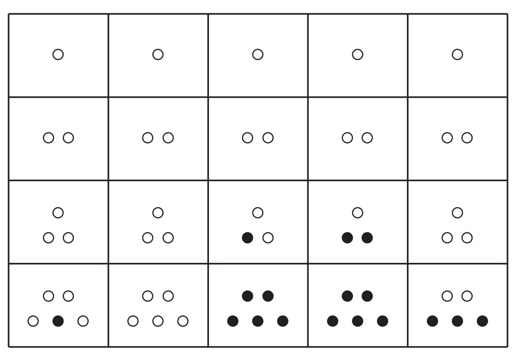


Figura 2.6

Por otra parte, personas que se han interesado por estudiar las matemáticas desarrolladas por la cultura inca, como William Burns Glynn, proponen que en los círculos se ubican granos, piedras, etc., de tal manera que cada círculo tiene un valor de uno, pero adquieren valor diferente de acuerdo con la fila donde se encuentra ubicado; además, la casilla donde solo hay un círculo se utiliza como "memoria". En la figura 2.6 mostramos cómo representar el número 10673 en la yupana según la propuesta realizada por Burns[8].

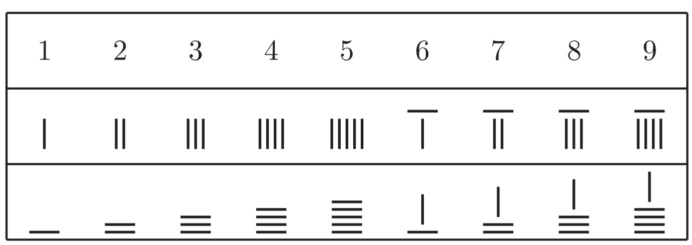
Ejercicios

1. *Elija un cordel corto, del tamaño de su muñeca y represente allí el año de su nacimiento con nudos, a la manera de los incas.*

2. *Elabore una yupana y represente algunos números.*

2.2.1.2. El sistema de numeración de la antigua china

En la antigua China se utilizaban varillas en bambú para representar los números en un tablero de cálculo. Había dos formas de representarlos (figura 2.7).

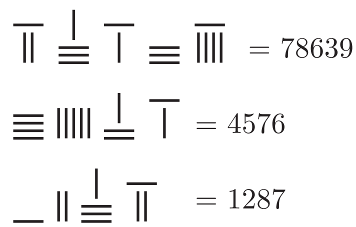


Tomada de: Perelman (1980, p. 27).

Figura 2.7

De manera tal que la primera cifra de un número, de derecha a izquierda, se representaba de la primera forma así como la tercera, la quinta; en caso de que hubiese y la segunda cifra, la cuarta, la sexta, se hacía de la segunda forma. En la figura 2.8 se muestra la representación de tres números utilizando las barritas chinas.

[8]Actualmente en el mercado escolar se encuentran yupanas, las cuales son utilizadas con fines educativos.



Tomada de: Perelman (1980, p. 28).
Figura 2.8

Ejercicio

Argumente por qué es posicional el sistema utilizado en la antigua china. ¿Es también este sistema de tipo aditivo? Explique su respuesta.

2.2.2. Sistema sexagesimal

Los antiguos sumerios (Churchill, 1965, p. 30) construyeron una aritmética para elaborar un calendario 5700 años a.C.; ellos mismos desarrollaron un sistema numérico con 60 símbolos que luego fue heredado y utilizado con mucha habilidad por los babilonios[9].

La lengua y la escritura utilizadas en las tablillas de periodo más antiguo es el acadio, que se superpuso al tipo de lenguaje y escritura sumerios; las palabras de la lengua acadia consistían en una o más sílabas y cada sílaba venía representada por un grupo de signos que se reducían esencialmente a pequeños segmentos rectilíneos. Los acadios utilizaban para escribir un prisma de sección triangular que apoyaban sobre tablillas de arcilla en una posición inclinada, produciendo así unas señales en forma de "cuña" orientadas en distintas direcciones, por ello su escritura se llamó *cuneiforme*. La aritmética alcanzó su más alto grado de desarrollo en la civilización babilónica durante el periodo acadio.

El sistema de numeración babilónico constaba solo de dos símbolos, una cuña vertical, que representaba una unidad, y una horizontal para repre-

[9] Los babilonios habitaban en la antigua Mesopotamia, región que hoy corresponde a Irak. A fines del siglo XIX se encontraron en las ruinas de esa región, unas 400 tablillas de arcilla y fragmentos de otras con textos matemáticos que han sido copiadas, transcritas y traducidas. Estas tablillas datan principalmente de dos periodos: unas, de alrededor del año 2000 a.C. y la mayoría pertenecen a un periodo entre el año 600 a.C. y el año 300 d.C. Las del primer periodo son las más importantes en lo que se refiere a la historia de la matemática.

sentar diez unidades; a partir de estos dos símbolos y mediante el principio aditivo, representaban los primeros 59 números (figura 2.9).

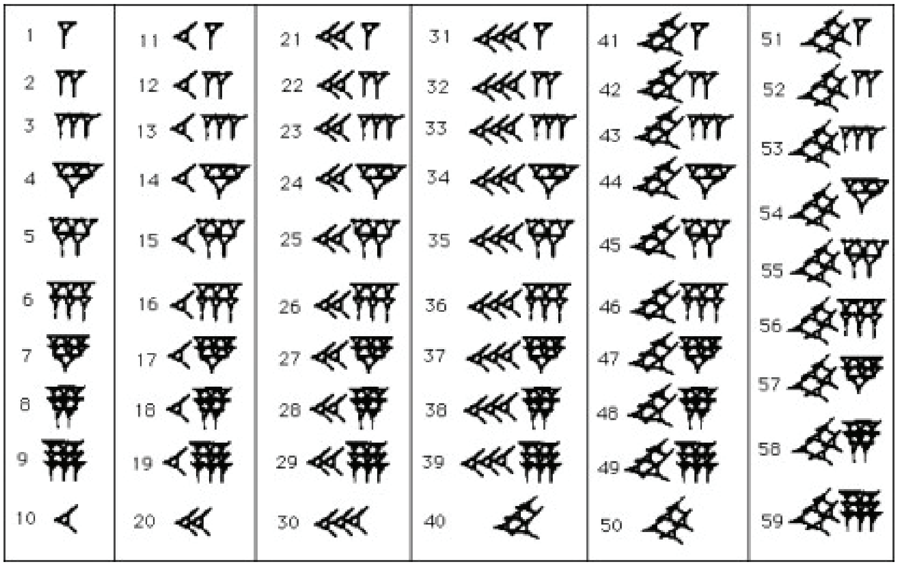
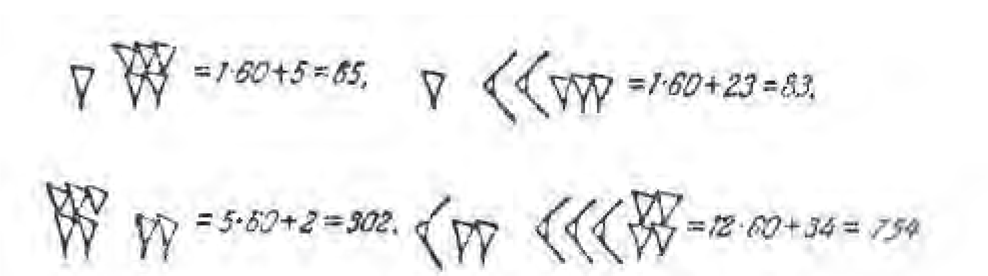
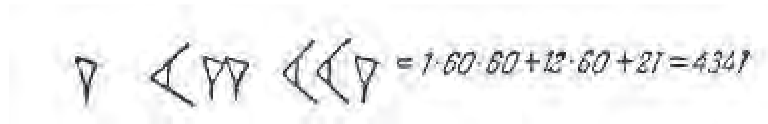


Figura 2.9

Los demás números se formaban utilizando además del principio aditivo el posicional base 60 o sexagesimal, es decir, a partir de potencias de 60; esto es, escribían los numerales de izquierda a derecha en grupos separados por espacios, cada grupo representaba, unidades, grupos de 60 unidades, grupos de $60 \times 60 = 3600$ unidades[10], etc. Para hallar el valor representado en un número, se efectuaban las multiplicaciones correspondientes y se sumaban los productos resultantes (figura 2.10).



[10]En la actualidad se sigue empleando el sistema sexagesimal para expresar medidas de tiempo (horas, minutos, segundos) y de ángulos (grados, minutos y segundos).

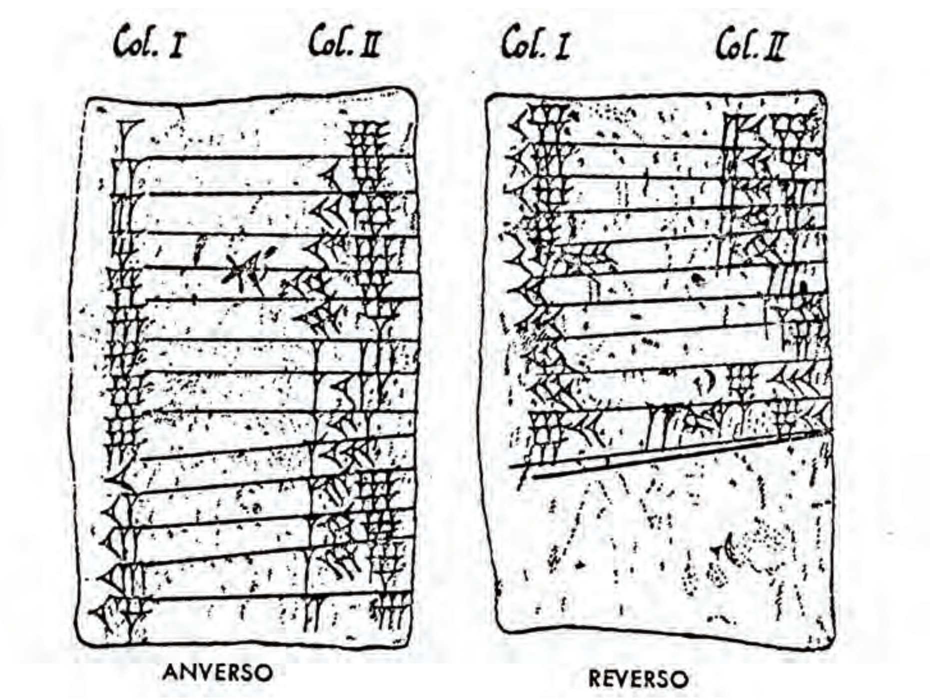


Tomada de: Perelman (1980, p. 11).

Figura 2.10

En algunos libros que tratan las matemáticas de la cultura babilónica, representan los números presentados en la figura 2.9, separando las unidades de cada orden con una coma, de la siguiente manera:

$$1,5 = 65$$
$$1,23 = 83$$
$$5,2 = 302$$
$$12,34 = 754$$
$$1,12,21 = 4341$$



Tomada de: Aaboe (1964, p. 21).

Figura 2.11

Aunque en los más antiguos textos babilónicos no se muestra la presencia de un símbolo específico para el cero, al parecer empleaban un espacio en blanco, más o menos destacado, para indicar la ausencia de unidades de posición dada, pero evidentemente esto podía ser mal interpretado y resultar confuso; luego, durante el periodo seléucida inventaron una doble cuña para representarlo.

En la figura 2.11 observamos la reproducción del anverso y del reverso de una tablilla de la antigua Babilonia; en ambas caras la escritura consiste en signos simples colocados en dos columnas, señalados por Col. I y Col. II. En total hay 24 renglones, pero de momento ignoraremos el último.

Ejercicio

Observe la figura 2.11 y plantee conjeturas acerca de la información que allí se encuentra escrita. ¿De qué se trata esta tablilla?

2.2.3. Sistema vigesimal

La civilización maya[11] utilizó el principio de notación posicional para los números e inventó el cero, aproximadamente cien años antes de la invención del sistema arábigo.

Los mayas tenían dos sistemas de numeración, el *comercial* que era vigesimal, esto es, basado en potencias de veinte[12] y el *astrónomo*, en el cual las unidades de cada orden van aumentando como potencias de veinte, excepto las unidades de tercer orden que corresponden a 18 de segundo orden; esto motivado en que en su calendario solar[13], un año es de 18 meses y no de 20.

Los símbolos del sistema eran tres: • para representar las unidades desde uno hasta cuatro en distinto orden de posición, ▬ que designaba el número

[11]Originaria de Guatemala, fue una de las culturas más desarrolladas y notables de la América precolombina. Durante el primer milenio de la era cristiana los mayas tuvieron una idea precisa de los movimientos del Sol, de la Luna, de Venus y posiblemente también de los planetas Marte, Mercurio y Júpiter, y tenían además la capacidad de predecir eclipses de Sol y de Luna. Su precisión en la medida del tiempo les permitió superar cálculos realizados en Europa en la misma época. Por ejemplo, se dieron cuenta de que un año solar no tiene exactamente 365 días sino 365,242.000 días. Cálculos recientes dan 365,242.198 días para el año solar verdadero; sin embargo, el año gregoriano que se usa en casi todos los países actualmente tiene 365,242500 días, lo que constituye un error de 3,02 diezmilésimas frente a un error de apenas 1,98 diezmilésimas del año maya (Von Hagen, 1960).

[12]Los mayas contaban con los dedos de las manos y de los pies. En la lengua quiché el número 20 significa: *toda la persona*.

[13]En su calendario se tenían las siguientes correspondencias:

cinco y una concha de caracol marino, para representar el cero. Los mayas escribían los números de abajo hacia arriba en diferentes posiciones según el sistema (comercial o astrónomo).

Los números del 1 al 19 se representaban como se muestra en la figura 2.12.

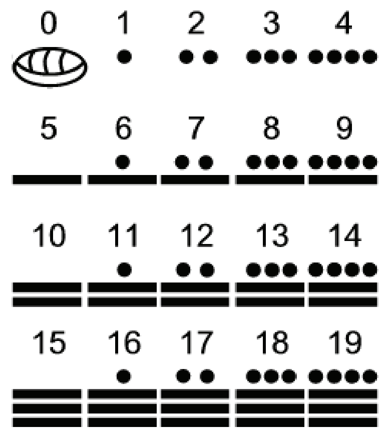
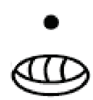


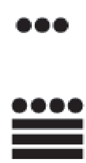
Figura 2.12

El número veinte lo representaban como sigue:



Puesto que el punto arriba de la concha representa 1×20 y la concha, el 0.

El número 79, que es igual a $3 \times 20 + 19$, se escribe:



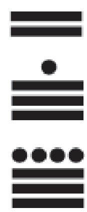
3×20

19

20 *kines*	= 1 *uinal*, o 20 días.
18 *uinales*	= 1 *tun*, o 360 días.
20 *tunes*	= 1 *katún*, 7.200 días.
20 *katunes*	= 1 *baktún*, o 144.000 días.
20 *baktunes*	= 1 *pictún*, o 2.880.000 días.
20 *pictunes*	= 1 *calabtún*, o 57.600.000 días.
20 *calabtunes*	= 1 *kinchiltún*, o 1.152.000.000 días.
20 *kinchiltunes*	= 1 *alautún*, o 23.040.000.000 días.

Con estas condiciones, el número 4339 en el sistema maya astrónomo es:

Y en el sistema comercial:



Ejercicio

Escriba en los dos sistemas mayas diferentes números.

2.2.4. Sistema binario (base 2)

Este sistema[14] está basado solamente en dos símbolos: 0 y 1. Es el lenguaje ideal para describir situaciones donde se presentan únicamente dos opciones: blanco y negro, verdadero y falso, o para entes que solo distingan entre sí y no; como las computadoras[15]: ellas reconocen estos dos símbolos; cuando pasa corriente por un circuito electrónico, la máquina lo entiende como 1, si no pasa lo entiende como 0.

Con estos dos símbolos basta para hacer entender a una máquina todo lo que ella necesita conocer para manejar el tránsito de una ciudad, llevar una nave espacial a Marte, calcular el estado del clima, ganarle al campeón del mundo jugando ajedrez, etc.

Para escribir un número en base 2, debemos hacer grupos de 2 elementos, y si sobra algún elemento esa será la cifra de las unidades, luego debemos

[14] Fue creado por el matemático alemán Wilhelm Leibniz en el siglo XVII.

[15] La sugerencia de utilizar el sistema binario en las computadoras la hizo John Von Neumann en 1945, desde entonces estas operan en sistema binario para las entradas y sistema decimal en la salida.

formar grupos de dos con los grupos resultantes del paso anterior, apuntar lo que sobra y así sucesivamente hasta que sea imposible formar nuevos grupos de 2. Los siguientes son los diez primeros números escritos en sistema decimal y en sistema binario.

Base 10	**Base 2**
0	1
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Tabla 2.1

Ejercicio

Consulte en qué consiste el código Gray binario.

2.2.5. Sistema hexadecimal (base 16)

Es un sistema cuyos símbolos básicos son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$$

donde A, B, C, D, E, F representan, respectivamente, los números 10, 11, 12, 13, 14 y 15 del sistema decimal. En base 16, 10 no es diez sino dieciséis, lo mejor es acostumbrarnos, desde ya, a leer estos números cifra a cifra, para este caso, 10 se lee "uno, cero", esto nos evitará confusiones.

El sistema hexadecimal es muy usado en la programación de computadores, sobre todo en la descripción de localizaciones de memoria en los discos duros y flexibles.

Los ordenadores o computadores modernos son máquinas de cálculo rápido; la parte de la máquina que sirve para la ejecución directa de operaciones se llama *unidad aritmética*. La parte que regula el trabajo de toda la máquina se llama *dispositivo de control* y la parte que almacena los resultados se llama *dispositivo de memoria*.

La memoria es un almacén de números y signos convencionales que se registran eléctrica o magnéticamente en cinta o en disco. El carácter grabado puede ser leído o borrado, grabándose otro en su lugar. Los dispositivos de memoria constan de miles de *celdas* y cada celda, de varias decenas de elementos magnéticos; para registrar los números por medio del sistema de base dos, cada elemento imantado expresa el 1 y los no imantados, el 0.

Carácter	**Configuración bits**	**Código hexadecimal**
A	1010 0001	A1
B	1010 0010	A2
C	1010 0011	A3
D	1010 0100	A4
E	1010 0101	A5
F	1010 0110	A6
G	1010 0111	A7
H	1010 1000	A8
I	1010 1001	A9
J	1010 1010	AA
K	1010 1011	AB
L	1010 1100	AC

Tabla 2.2

En computadores la unidad de información básica, un 0 o un 1, se llama *bit*, 8 bits forman un *byte* y cada *caracter* (cualquier símbolo que una máquina de procesamiento de datos puede leer, almacenar e imprimir) se puede representar por un *byte*; es decir, un número binario de ocho cifras, lo que significa que podemos especificar 256 posibles caracteres básicos (*¿por qué?*). Los 256 caracteres se pueden colocar en un cuadrado de 16 de lado; es decir, que cualquiera de ellos se puede especificar con números hexadecimales de solo dos cifras. La primera cifra hexadecimal corresponde a las primeras cuatro cifras binarias de la izquierda y la segunda, a las otras cuatro. En la tabla 2.2 se muestran algunos de ellos.

2.2.6. Otros sistemas (bases 1, 3, 4, 5, etc.)

Utilizando el mismo principio de construcción pueden hacerse sistemas de numeración en cualquier base; algunas de ellas son poco usadas, otras son usadas por algunas culturas; por ejemplo, en la lengua *makua* del norte de Mozambique, las palabras *thanu* (cinco) y *miloko* (diez) constituyen la base del sistema de numeración. Así, seis se dice *thanu na moza* (cinco más uno) y siete, *thanu na pili* (cinco más dos). Veinte se dice *miloko mili* (diez veces dos) y treinta, *miloko miraru* (diez veces tres).

Número de la base									
16	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	10
3	3	3	3	3	3	3	3	10	11
4	4	4	4	4	4	4	10	11	100
5	5	5	5	5	5	10	11	12	101
6	6	6	6	6	10	11	12	20	110
7	7	7	7	10	11	12	13	21	111
8	8	8	10	11	12	13	20	22	1000
9	9	10	11	12	13	14	21	100	1001
A	10	11	12	13	14	20	22	101	1010
B	11	12	13	14	15	21	23	102	1011
C	12	13	14	15	20	22	30	110	1100
D	13	14	15	16	21	23	31	111	1101
E	14	15	16	20	22	24	32	112	1110
F	15	16	17	21	23	30	33	120	1111

Tabla 2.3

En el dialecto balante de Guinea-Bissau se mezclan las bases 5 y 20, mientras que la lengua beté de Côte d'Ivoire emplea tres bases: 5, 10 y 20, lo que da para decir 56, por ejemplo, *golosso-ya-kogbo-gbeplo*; es decir, "veinte veces dos más diez (y) cinco (y) uno".

En la tabla 2.3 aparecen los quince primeros números escritos en distintas bases; *observe la secuencia de formación.*

Para indicar la base en que un número está expresado se acostumbra escribirla en la parte inferior derecha de él, así 654_8 o con un paréntesis, $654_{(8)}$. Si la base está establecida desde el principio no se escribe y si no se hace ninguna referencia a ella se supone que es base diez.

2.2.7. Sistema unario

Un sistema posicional con un solo número, digamos 1, es llamado unario. En él cualquier número es denotado por una cadena de unos y es equivalente al sistema no posicional que construimos en el primer capítulo pero con un solo símbolo.

Ejercicios

1. *Consulte qué otras culturas tenían sistemas de numeración posicionales.*

2. *Estudie cómo escribir números en base factorial, es decir, que en la primera posición de derecha a izquierda se escriban las unidades; en la segunda, los conjuntos de* $1 \times 2 = 2!$*; en la tercera los conjuntos de* $1 \times 2 \times 3 = 3!$*; en la cuarta los conjuntos de* $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ *y así sucesivamente.*

3. *Ya es tiempo de ir creando. Piense en otra forma de sistema de numeración posicional. ¿Qué se le ocurre? Desarrolle la idea representando algunos números.*

2.3. Operaciones

Centraremos ahora nuestra discusión en construir procedimientos, que como ya dijimos también llamamos *algoritmos*, para efectuar las operaciones fundamentales en diferentes bases. De nuevo los métodos no son únicos, son propuestas hechas y discutidas por los alumnos en el salón de clase, que por supuesto pueden modificarse, que es lo deseable.

2.3.1. Adición

Continuemos en la base O = IIIII, que construimos al principio de este capítulo. Si queremos adicionar[16] dos cantidades, por ejemplo 3423 y 413

[16] Usaremos los signos habituales $+$ y $-$ para denotar la adición y la sustracción respectivamente, estos fueron empleados por Widman, en un libro de aritmética publicado en

debemos inicialmente adicionar las cifras de la derecha (que llamaremos de las *unidades*) en ambos números para saber si logramos formar conjuntos de I con O elementos; en este caso 3 + 3 = IIIIII = (IIIII) I = O I, lo cual en nuestra nueva notación se escribe 11, lo que significa que al hacer conjuntos de O elementos tenemos un residuo de uno (1), el cual corresponde a la cifra de las unidades de la suma, y que hemos formado un conjunto de O elementos, lo cual se tiene en cuenta para la adición de las siguientes cifras de los sumandos; es decir, este conjunto (de O unidades) será adicionado a los de las cifras que siguen a la izquierda de las unidades llamadas *quinquenas* (por su analogía con decenas), para este caso:

$$2 + 1 = (\mathrm{O}\ \mathrm{O})\ \mathrm{O}$$

y le agregamos O del grupo que se formó en el paso anterior, así obtenemos O O O O, que en nuestra notación es 4.

Continuamos adicionando las cifras siguientes de la izquierda de las quinquenas que llamaremos *biquinquenas*, esto es:

$$\begin{aligned} 4 + 4 &= (\mathrm{O^{II}O^{II}O^{II}O^{II}})(\mathrm{O^{II}O^{II}O^{II}O^{II}}) \\ &= (\mathrm{O^{II}O^{II}O^{II}O^{II}O^{II}})\mathrm{O^{II}\ O^{II}O^{II}} \\ &= \mathrm{O^{III}O^{II}O^{II}O^{II}} \end{aligned}$$

lo que escrito en nuestra notación es 13 biquinquenas, es decir 1 *triquinquena* y 3 biquinquenas; así que llevamos 1 y escribimos 3 biquinquenas para el resultado final.

Por último adicionamos la cantidad de $\mathrm{O^{III}}$ que tenemos en cada número

$$3 + 0 = \mathrm{O^{III}\ O^{III}\ O^{III}}$$

y le agregamos $\mathrm{O^{III}}$ que corresponde al conjunto que se formó en el paso anterior, obteniendo $\mathrm{O^{III}\ O^{III}\ O^{III}\ O^{III}}$, que equivale a 4 *triquinquenas*.

Por lo tanto:

$$3423 + 413 = 4341.$$

Este proceso es el conocido desde la escuela para adicionar números naturales, solo que allí se utilizaban conjuntos de diez elementos llamados *decenas* y conjuntos de diez decenas llamados *centenas*, etc.

Alemania en 1489. Widman los utilizó para indicar un exceso o un déficit, como “más”o como “menos”, pero pronto empezaron a usarse como signos de las operaciones de adición y sustracción.

Al parecer no hemos avanzado mucho, hemos llegado a los mismos resultados que llegó la humanidad hace cientos de años, solo que ahora entendemos el porqué y debido a esto podemos generalizar este método a cualquier base, sabiendo que a pesar de que la notación es diferente, las ideas de fondo y los resultados son los mismos.

∗ ∗
Muchas veces será necesario tomar lápiz y papel para seguir una lectura en matemáticas.
∗ ∗

Ejemplos

1. En base 2 el lector puede verificar que $1111001 + 1011 = 10000100$.

2. En base 5 la tabla de la adición es:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Tabla 2.4

Así que $34 + 44 = 133$.

3. En base 16 se tiene que $9\mathrm{AE} + 743 = 10\mathrm{F}1$.

∗ ∗
También es costumbre en matemáticas, que el lector verifique las afirmaciones que se hacen en un texto y que muchas veces no se explicitan.
∗ ∗

Ejercicios

1. *Haga sus propuestas para realizar adiciones en sistemas de numeración antiguos como el babilónico o el maya. Luego haga las consultas necesarias que le permitan comparar sus propuestas con las ideas originales de tales culturas, tal vez se sorprenda..., positivamente, claro.*

   Algunas culturas no tenían sistemas de numeración escritos, como los incas, y por ello utilizaban ábacos para hacer sus operaciones.

2. *Proponga una manera de sumar utilizando el ábaco inca (la yupana).*

3. *Consulte cómo hacer adiciones en el ábaco chino (suanpan) y en el ábaco japonés (sorobán). ¿Cuál de estos es utilizado por los invidentes?*

2.3.1.1. Propiedades de la adición

Como en el capítulo anterior, luego de que se han hecho muchas adiciones, es posible observar comportamientos regulares, propiedades que le son comunes a todas ellas sin importar la base en que sean realizadas. Debido a que algunas de ellas aparecen con frecuencia, reciben nombres como:

2.3.1.1.1. Propiedad asociativa

Si en una adición hay tres o más sumandos[17], hay varias maneras de efectuar la adición. En el caso de tres, podemos adicionar los dos primeros y al resultado le adicionamos el tercero, o primero adicionar los dos últimos y adicionar este resultado al primero; la propiedad asociativa de la adición asegura que el resultado de la adición será el mismo sin importar cuál de las agrupaciones sea elegida para efectuar la operación.

Esto parece tan natural que casi podríamos considerar innecesario mencionarlo, sin embargo, hay situaciones que pueden llevar a confusión cuando se mezclan operaciones que no tengan esta propiedad con otras que sí.

Por ejemplo, el caso de tres comensales que van a un restaurante y piden tres platos cuyo valor unitario es \$10 000; en el momento del pago el dueño del restaurante otorga un descuento de \$5 000 a la cuenta total, el mesero decide devolver \$1 000 a cada comensal y quedarse con \$2 000 a manera de propina. En este punto empiezan los problemas, pues cada comensal pagó en total \$9 000, lo que nos da una suma de \$27 000 que sumamos a los \$2 000

[17] Los tres sumandos no tienen que ser diferentes.

que tomó el mesero, dan \$29 000 y han desaparecido \$1.000. *¿Dónde está el error?*

2.3.1.1.2. Propiedad conmutativa

Cuando contamos, es intuitivamente evidente que el resultado no cambia si lo hacemos en un orden o en el orden contrario (contar al revés), las adiciones son cuentas simplificadas, por lo tanto tampoco deberían variar, como en efecto sucede, por ejemplo:

$$2 + 3 = 3 + 2$$

este comportamiento es el mismo en todos los sistemas de representación de números.

Ejercicios

1. *De seguro usted ya notó otras regularidades en las adiciones, haga una lista de ellas.*
2. *En la adición*
$$7 + 77 + 777 + \ldots + 777777\ldots$$
encuentre el dígito que ocupa el lugar 100 de la suma. Resuelva el mismo problema en otras bases.
3. *Enuncie un argumento que explique la siguiente adición.*
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 123456789 \\ 987654321 \\ 987654321 \\ +\qquad\quad 2 \\ \hline 2222222222 \end{array}$$
Enuncie un resultado general para cualquier base.

Construya adiciones similares cuyos resultados sean números cuyas cifras sean solo unos, solo treses, etc. Repita el ejercicio en base 7 y enuncie un resultado general para cualquier base.

4. *¿Cuántas veces aparece cada dígito del 0 al 9 en la lista de los números del 1 al 100? Resuelva el mismo problema en base 13.*

5. *Encuentre las sumas para las siguientes adiciones indicadas, en base dos*:

$$\begin{aligned}
&1 + 11 = \\
&1 + 11 + 111 = \\
&1 + 11 + 111 + 1111 = \\
&1 + 11 + \cdots + 11111 = \\
&1 + 11 + \cdots + 111111 =
\end{aligned}$$

   Liste las siguientes cinco adiciones y halle las sumas correspondientes. Repita los cálculos en bases tres, cuatro y cinco y plantee un resultado general.

6. *Resuelva las siguientes adiciones en base tres*[18]*:*

$$\begin{aligned}
&2 + 22 = \\
&2 + 22 + 222 = \\
&2 + 22 + 222 + 2222 = \\
&2 + 22 + \cdots + 22222 = \\
&2 + 22 + \cdots + 222222 =
\end{aligned}$$

   Proponga las siguientes cinco adiciones y encuentre las sumas correspondientes.

   Con base en lo anterior, responda:

   a. *¿El número de unos consecutivos que se obtienen en las sumas depende del número de doses del último sumando?*
   b. *¿Es posible que el número de unos consecutivos en la suma se mantenga para dos adiciones distintas? Justifique su respuesta.*

   Enliste las siguientes diez adiciones, encuentre las sumas correspondientes y compruebe sus conjeturas.

[18] Este ejercicio fue ideado en conjunto con el profesor Yeison Sánchez en 2013-I.

Con base en lo anterior, conteste:

c. *¿Cuántos doses debe tener el último sumando para que el número de unos consecutivos en la suma, sea el mismo que el número de unos consecutivos obtenidos en la suma de la adición anterior?*

d. *¿Cuántos unos consecutivos tiene la suma, si el último sumando tiene cincuenta (50) doses? ¿ Ciento veinte (120) doses?*

e. *¿Cuántos unos consecutivos tiene la suma, si el último sumando tiene n doses?*

Estudie, de manera similar, las adiciones:

$$3 + 33 + \cdots + 3333\ldots333 \text{ en base } 4,$$

$$4 + 44 + \cdots + 4444\ldots444 \text{ en base } 5$$

$$\vdots$$

Y plantee una conjetura más general al respecto de lo estudiado.

∗ ∗

Habrá notado la insistencia que hemos hecho en traducir cada ejercicio a cualquier base; en realidad, lo que importa es notar que hay ciertas relaciones entre los números que son independientes del sistema que se utilice para representarlos. Así, un maya y un ruso encontrarán las mismas relaciones entre los números sin importar la simbología utilizada. Justamente allí se encuentra la transición entre la aritmética y el álgebra, en donde se estudian las leyes generales que relacionan los números, independientes del lenguaje utilizado.

∗ ∗

2.3.2. Orden en los números naturales

Como establecimos en la sección 1.1.2 del capítulo 1, al considerar las representaciones de dos cantidades diferentes o bien todos los símbolos de una de ellas está explícita o implícitamente en la otra o viceversa, esto significa que en cada caso una cantidad es la suma de la otra con otra cantidad; si representamos las dos cantidades con a y b o bien existe una cantidad u tal que

$$a + u = b$$

en cuyo caso decimos que a *es menor que* b y lo notamos $a < b$ o que b *es mayor que* a y lo notamos $b > a$; o bien existe una cantidad v tal que

$$b + v = a$$

en cuyo caso decimos que b *es menor que* a.

La relación "*ser menor que*" entre cantidades, en matemáticas la llamamos un *orden estricto*.

2.3.3. Sustracción

Como se colige de la sección anterior, dados dos números naturales cualesquiera a y b, siempre es posible determinar una de las dos cantidades u o v, pero no ambas. La cantidad u se determina si $a < b$ y la llamamos la *diferencia* entre b y a, y la notamos

$$u = b - a.$$

la cantidad v se determina si $b < a$ y la notamos

$$v = a - b.$$

El procedimiento para determinar u o v lo llamamos *sustracción* o *resta*[19].

Esto establece una relación entre la adición y la sustracción que habitualmente se utiliza como mecanismo de prueba para verificar si efectuamos alguna de ellas de manera correcta:

$$a + b = c \quad \text{es lo mismo que} \quad c - a = b \quad \text{o también} \quad c - b = a$$

así, para probar si la sustracción $c - a = b$ está bien efectuada, basta adicionar a a b para obtener como resultado c.

Por ejemplo, la sustracción

$$8 - 3 = 5$$

es correcta en cualquier base mayor que 9, puesto que en ellas se tiene que

$$5 + 3 = 8.$$

[19]Debemos insistir en que, en el sentido moderno del término *operación*, la sustracción no es una operación entre números naturales, pues para ello se requiere que todas las sustracciones posibles de números naturales tengan un resultado en los números naturales, aquí solo es posible cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. Sin embargo, para nuestros propósitos actuales este no es un obstáculo insoslayable, por lo que lo pasaremos por alto, de momento.

El signo más antiguo para indicar la sustracción es ($\wedge$), que utilizaban los antiguos egipcios, se encuentra en el papiro de Rhind.

∗ ∗

En matemáticas, por fortuna, existen mecanismos para determinar si lo que estamos haciendo es correcto o no; procedimientos de verificación que nos permiten decidir, por nosotros mismos, si nuestras afirmaciones son válidas; ¡no debemos confirmarlo con otra persona!

∗ ∗

No estamos interesados en explicar una manera de sustraer; esperamos que usted invente sus propios procedimientos; le mostraremos enseguida un ejemplo de un algoritmo para restar en base 6 y le sugerimos que lo explique.

$$\begin{array}{r} 5\,4\,3\,5\,0\,1\,3 \\ -\quad 5\,3\,4\,3\,5 \\ \hline 5\,3\,4\,1\,1\,3\,4 \end{array}$$

Ejercicio

Estudie las siguientes sustracciones y exprese en cuál base están hechas, ¿es posible que una misma sustracción sea correcta en bases distintas? ¿En cuáles casos?

$$\begin{array}{r} 3\,4\,5\,3\,2\,3 \\ -\quad 5\,4\,2\,0\,1 \\ \hline 2\,6\,1\,1\,2\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,5\,3\,4\,0\,3 \\ -\quad 5\,4\,2\,0\,1 \\ \hline 6\,8\,8\,2\,0\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,4\,5\,0\,2\,3 \\ -\quad 3\,4\,0\,0\,1 \\ \hline 5\,1\,1\,0\,2\,2 \end{array}$$

2.3.3.1. Ecuaciones de la forma $x + a = b$

Las relaciones mencionadas anteriormente entre la adición y la sustracción se utilizan también para encontrar alguno de los números que no están escritos[20] en una adición o en una sustracción; por ejemplo, si queremos averiguar cuál es el número que adicionado con 345_6 nos da como resultado 4325_6, debemos escribir esta adición en otra de sus formas equivalentes y obtener el número buscado como el resultado de otra operación.

[20]Si en una igualdad donde participan operaciones entre números ignoramos alguno (o varios) de ellos, la llamaremos una *ecuación.* Encontrar el (o los) número(s) que ignoramos es *resolver la ecuación.*

En nuestro ejemplo representemos con la letra x el número buscado; la suma es:

$$345_6 + x = 4325_6,$$

que puede escribirse,

$$4325_6 - 345_6 = x$$

de donde vemos que para hallar x debemos efectuar la sustracción y este proceso ya lo sabemos hacer; el resultado es 3540_6. Para probar que el resultado es correcto adicionamos 3540_6 con 345_6 y debemos obtener 4325_6.

∗ ∗

Toda esta discusión parece muy simple, pero asegúrese de que lo entiende bien haciendo algunos ejercicios inventados por usted.

∗ ∗

Por supuesto, podemos partir de la segunda o tercera forma de la igualdad; es decir, podemos averiguar cuál es el número que sustraído de 7652_9 nos da como resultado 231_9; si de nuevo representamos[21] con x el número buscado planteamos:

$$7652_9 - x = 231_9$$

que puede escribirse como

$$7652_9 - 231_9 = x$$

resultado que puede obtener el lector sin mayor dificultad.

∗ ∗

Suponemos que debe ir soltando la mano para que se acostumbre a hacer operaciones en otras bases; el número necesario de ejercicios depende de su voluntad y comprensión.

∗ ∗

Ejercicios

1. *Para comparar números relativamente grandes, el procedimiento que utilizamos no es el descrito. ¿Cómo saber cuál de los siguientes dos números es el mayor, si están escritos en base 12?*

   $$6532098672245677 \quad \text{y} \quad 6532098762245677$$

   ¿Importa la base? ¿Y si comparamos dos números que no tengan el mismo número de cifras? Justifique las afirmaciones que haga.

[21] Es costumbre llamar *incógnita* al número buscado y notarlo x, aunque naturalmente podemos representarla con cualquier otro símbolo.

2. *Haciendo las cuentas en base 7, ¿para cuáles valores de x se cumple que:*

   a) $x > 3$?
   b) $x + 12 > 35$?
   c) $x - 42 > 63$?
   d) $54 - x > 16$?

   Justifique sus procedimientos.

3. *Con las cinco cifras del número* 12345 *se pueden formar* 120 *números, si los números se escriben en orden ascendente, desde*

   12345 12354 12435 12453 hasta 54321

   ¿Qué número es el que ocupa el lugar 75?

2.3.3.2. Propiedades de la sustracción

Contrario a lo que sucede con la adición, la sustracción no tiene tantas propiedades, por ejemplo:

2.3.3.2.1. La sustracción no es asociativa

Por cálculo directo se ve que:

$$(12 - 4) - 3 \neq 12 - (4 - 3)$$

y si hacemos sustracciones y adiciones, esta combinación de operaciones tampoco puede asegurarse que con cualquier agrupación se obtenga el mismo resultado, por ejemplo:

$$30000 - (3000 + 2000) \neq (30000 - 3000) + 2000.$$

¿Le recuerda esta desigualdad algún problema de comensales?

2.3.3.2.2. La sustracción no es conmutativa

Para que una sustracción pueda hacerse es necesario que el minuendo sea más grande que el sustraendo, de modo que si invertimos la operación y tomamos el minuendo como sustraendo y el sustraendo como minuendo, la sustracción ya no se puede efectuar, pero si suponemos que da el mismo resultado llegamos a una contradicción; por ejemplo: $3-2=1$, si la sustracción fuera conmutativa $2-3$ debería ser también igual 1, de ser así $3+1$ debería ser igual a 2, lo cual no es cierto, pues sabemos que $3+1=4$; por lo tanto la sustracción no es conmutativa.

2.3.3.2.3. Otras relaciones entre la adición y la sustracción

A pesar de que la sustracción no tiene tantas propiedades como la adición, podemos establecer combinacionaciones de sumas y restas que son útiles a la hora de argumentar.

Dados a, b y c números naturales, se cumplen las siguientes igualdades cuando las sustracciones son posibles.

P1. $(a+c)-c=a$
P2. $a+(b-a)=b$

P1 es solo otra manera de escribir la igualdad $(a+c)=(a+c)$ y P2 otra forma de escribir $(b-a)=(b-a)$.

P3. $(a+b)-c=(a-c)+b$

Argumentación[22].

Si llamamos $(a+b)-c=x$ entonces $a+b=x+c$ (1) y si llamamos $a-c=y$ entonces $a=y+c$ (2), de modo que si reemplazamos (2) en (1), por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, conseguimos

$$(y+c)+b=x+c=(y+b)+c$$

O lo que es lo mismo

$$(y+b)=(x+c)-c$$

Y por P1

$$(y+b)=x$$

Y reemplazando x y y conseguimos el resultado

$$(a-c)+b=(a+b)-c.$$

[22]Llamamos argumentación y no prueba ni demostración puesto que no estamos dentro de un sistema axiomático con axiomas y teoremas en una secuencia rigurosa. Es más bien una exposición de razones para justificar nuestros procedimientos.

P4. $(a+b)-c = a+(b-c)$.

Argumentación.

$$\begin{aligned}(a+b)-c &= (b+a)-c && \text{Propiedad conmutativa de la suma.}\\ &= (b-c)+a && \text{Por P3.}\\ &= a+(b-c) && \text{Propiedad conmutativa de la suma.}\end{aligned}$$

Ejercicios

1. *Encuentre otras propiedades para la sustracción.*

2. *Coloque en cada casilla marcada por el símbolo* $\square$ *un número, para que los resultados coincidan con los números dados, trabajando en base 7:*

$$\begin{array}{ccccc} & \square & 5 & \square & 6\\ + & 4 & 6 & 3 & \square\\ \hline 1 & 2 & \square & 3 & \square\end{array}$$

¿Cuántas soluciones diferentes hay?

3. *a. Encuentre todas la soluciones posibles para las siguientes criptosumas*[23] *en la base indicada. En las criptoaritméticas cada letra representa una cifra, letras iguales representan cifras iguales y la primera letra de cada palabra no puede ser cero.*

$$\begin{array}{r} NUBES\\ +\ \ NUBES\\ \hline LLUEVE\end{array}\qquad \begin{array}{r} MAMA\\ +PAPA\\ \hline BEBE_8\end{array}\qquad \begin{array}{r} OJO\\ +\ \ \ LE\\ \hline PEGO_9\end{array}$$

$$\begin{array}{r} UNO\\ +UNO\\ \hline DOS_6\end{array}\qquad \begin{array}{r} TU\\ +\ \ YO\\ \hline DOS_6\end{array}\qquad \begin{array}{r} CORTO\\ +CORTO\\ \hline LARGO_8\end{array}\qquad \begin{array}{r} IT\\ +\ \ IS\\ \hline TOP_5\end{array}$$

   b. Explore si en otras bases las anteriores criptosumas tienen solución.

[23] Algunas de las cuales fueron diseñadas por los estudiantes: Cesar Acosta, Lady Súa, Carlos Martínez, Valeria Romero, Diego Romero y Erika Laiton, en 2013-I.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

En esta clase de ejercicios, es ***más importante el proceso*** *de solución que la solución misma; los procedimientos de solución son muy útiles para generalizar problemas y se usan frecuentemente en la programación de computadores cuando los problemas permiten una sistematización tal.*

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

4. *Escriba un algoritmo que permita resolver acertijos de este tipo, empezando con una cifra; por ejemplo, resolver problemas de la forma:*

$$\begin{array}{rr} & \square \\ + & 3 \\ \hline & 5 \end{array}$$

   en base 6, luego en base 8, etc. Luego ponga dos veces el símbolo $\square$*; por ejemplo:*

$$\begin{array}{rr} & \square \\ + & 3 \\ \hline & \square \end{array}$$

   ¿En qué condiciones existe la solución?, ¿cuántas soluciones existen?, ¿hay una manera general de resolver el problema en cualquier base?

   Intente resolver el mismo problema pero ahora con dos cifras y una sola incógnita, luego con dos, etc. Si el empeño se lo permite, formule y estudie un problema más general. El programa ECUACIO1 *que aparece en el apéndice puede ayudarle a resolver esta tarea.*

5. *Por cada problema bien resuelto en clase de matemáticas, recibe 8 puntos como nota; pero en cambio por cada problema mal resuelto o no resuelto le descuentan 5. Si le presentan 26 problemas y usted tiene como nota 0. ¿Cuántos problemas trabajó, y de estos, cuántos resolvió bien?*

6. *Dos muchachos atados a los extremos de una cuerda suben una escalera de 100 peldaños, y lo hacen alternándose, es decir, que mientras uno sube el otro descansa. La longitud libre de la cuerda que los ata es igual a la separación de 10 peldaños; se trata de saber cuál llegará primero arriba. El que inicia el juego puede subir hasta diez escalones, pero*

para, por ejemplo en el 4º. El otro, solo puede subir hasta el peldaño 14, porque la cuerda no da más; pero puede detenerse antes, por ejemplo en el 11. El primer jugador puede ahora llegar hasta el 21. Y así continúan hasta el fin. ¿En qué peldaños debe detenerse un jugador para llegar primero? (Tomado de Caro, 1936)[24].

2.3.4. Multiplicación

Ya en el capítulo anterior definimos la multiplicación entre dos números naturales como una operación que simplifica una adición en la cual todos los sumandos son iguales[25]; por ejemplo, si en base siete tenemos $5+5+5$, podemos expresar esta adición como la multiplicación entre 3 y 5, estamos repitiendo 3 veces 5, así:

$$5+5+5=21=3\times 5$$

Donde $\times$ es el signo de la multiplicación[26] y los números 3 y 5 son llamados factores, el primero (3) indica la cantidad de veces que se repite un sumando[27] y el segundo (5) es el sumando que se repite, aunque podría ser al revés[28], pero por ahora, asumámoslos así.

[24]Obviamente, el juego puede hacerse sin escalera y sin cuerda, entre dos personas que apuestan a ver quién llega primero a 100, diciendo cada uno un número mediante la condición de que el número que dice el uno no puede exceder en más de 10 al que dice el otro.

[25]Según Gómez, Puchalt, Vivó, Diez, Pastor, Jordá y De la Rosa (2001), a partir de un análisis histórico de libros de textos, se encuentran tres significados diferentes para la multiplicación, una, la más antigua, es la que presentamos en este libro, aquella en la cual se interpreta la multiplicación como tomar varias veces repetidas un mismo número; otra, en la que se entiende la multiplicación en términos de proporción y una tercera, debida al movimiento de las matemáticas modernas, en la cual la multiplicación corresponde al cardinal de un conjunto producto.

[26]El signo $\times$ para la multiplicación fue empleado por William Oughtred en Inglaterra, en 1631. En 1644, Herigone, utilizó un rectángulo para indicar la multiplicación entre dos números separados por una coma; por ejemplo: $\square 5,3$ para indicar 5×3. En la segunda mitad del siglo XVII se encuentra el uso de la estrella de seis puntas o asterisco ($*$) y el famoso punto ($\cdot$ o $\bullet$) como signo de multiplicación fue introducido por el célebre matemático Leibniz el 29 de julio de 1698 en una carta dirigida a John Bernoulli, argumentando que se confundía con x.

[27]Reiteramos que el número 3 en el ejemplo no representa la cantidad de veces que se suma, pues en $5+5+5$ solo sumamos dos veces.

[28]En algunos textos, sobre todo en los escolares, no se le llaman *factores* a los términos de la multiplicación sino *multiplicando* y *multiplicador* y hacen la diferencia indicando que el primero es el número que se ubica antes del signo de multiplicación y que el segundo indica

En el capítulo 1 se propuso una manera para efectuar multiplicaciones con el sistema de números que allí construimos, tal forma iniciaba haciendo una tabla de multiplicación con los símbolos del sistema, para este caso, como estamos trabajando en diferentes bases de números tendríamos que hacer una tabla para cada base. Recordemos que tal tabla la configurábamos a partir de la definición de multiplicación entre dos números, llamados *factores*, como una adición donde uno de tales números es el sumando que se repite y el otro indica la cantidad de sumandos.

Supongamos entonces que deseamos multiplicar 201 y 23, en base cuatro. Lo primero que debemos construir es la tabla de multiplicación en base cuatro, para lo cual hacemos una tabla de doble entrada, de manera que en la primera fila y en la primera columna escribimos los símbolos de la base: 0, 1, 2 y 3 (tabla 2.5).

$\times$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Tabla 2.5

Pero al iniciar a completar la tabla, aparece el primer problema, ¿qué indica cada uno de los símbolos de la base? ¿Son unidades? Por ejemplo, en el número 23_4, el 3 indica tres unidades, en cambio en 32_4, el 3 indica tres conjuntos de cuatro unidades; entonces, ¿ese 1 que está en la tabla 2.5 es una unidad?, ¿un conjunto de cuatro unidades?, ¿un conjunto de cuatro de cuatro (de dieciséis), ...? Para no complicarnos, supongamos, por el momento, que todos los símbolos en la tabla representan unidades.

Ahora, ¿qué significa 0×0? ¿Repetir cero veces el cero? ¡Eso no tiene sentido! (*Deténgase a pensar y presente alguna propuesta*). Dejemos por ahora, esta casilla vacía y continuemos. Completemos entonces la casilla correspondiente a 1×0: ¿qué significado tiene? Como ya dijimos antes, el primer factor indica la cantidad de veces que se repite el segundo; así: $1 \times 0 = 0$, pero aquí también hay un problema, si 0 es un sumando, se

la cantidad de veces que se repite el sumando (el multiplicando) en la suma que se expresa mediante tal multiplicación. También hay indicios de que estos términos (multiplicando y multiplicador) datan de los árabes (s. XIII), pues en un extracto del libro de Ibn al Banna se hace referencia a ellos, aunque no se definen, solo se utilizan. Para ver un poco más de detalle acerca de esto se puede consultar Gómez, Puchalt, Vivó, Diez, Pastor, Jordá y De la Rosa (2001) o Smith (1958, p. 104).

requiere otro sumando, pues la adición es una operación binaria... ¡Otra casilla vacía!; sin embargo, para 2×0 y 3×0 no tenemos inconveniente. También podemos diligenciar otras celdas de manera similar; así las cosas, se representa como en la tabla 2.6.

$\times$	0	1	2	3
0				
1				
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Tabla 2.6

Observemos que $2 \times 3 = 3 \times 2$. ¿Sorprendente no? (*Tal vez para usted, realmente no sea tan sorprendente, a estas alturas de la vida, ya nos han acostumbrado a no sorprendernos por estas cuestiones, pero si lo piensa por un momento, notará que en efecto es asombroso*).

Prosigamos, ¿cómo terminamos de diligenciar nuestra tabla? Podemos aceptar que así como $2 \times 3 = 3 \times 2$, también lo es $2 \times 0 = 0 \times 2$, $3 \times 0 = 0 \times 3$, $2 \times 1 = 1 \times 2$ y $3 \times 1 = 1 \times 3$, y además, que si el primer factor es 1, no poner tanto problema a que no haya otro sumando[29], así se cumplirá que $1 \times 0 = 0$ y $1 \times 1 = 1$; con esto, solamente nos resta aceptar que la primera fila la completamos con ceros asumiendo que el orden de los factores no altera el producto y que $0 \times 0 = 0$ (tabla 2.7).

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Tabla 2.7

Continuando con nuestro interés inicial, copiar el procedimiento que utilizamos en el primer capítulo para multiplicar, efectuemos la operación anteriormente propuesta (201×23, en base 4), para ello, debemos multiplicar cada símbolo de un factor por cada símbolo del otro factor, pero hay que

[29] O también podríamos pensar, como sugería el profesor Carlos Federicci (q.e.p.d.), que estamos sumando el segundo factor con un cero, es decir, 1×2 lo podemos entender como una vez 2 sumado con cero: $1 \times 2 = 2 + 0$.

hacer modificaciones porque este sistema es posicional. Al multiplicar el 1 del primer factor por el 3 del segundo factor, no hay problema, el resultado es 3, pues el 1 representa unidades y el 3 también, por lo tanto el resultado también es 3 unidades; pero al multiplicar el 1 por el 2 del segundo factor, no tenemos unidades por unidades sino una unidad por 2 *cuatrenas* (conjuntos de cuatro unidades. Las llamaremos así por analogía con la palabra *decenas*), recordemos que en la tabla que hicimos solo consideramos unidades, pero la verdad es que no importa si son unidades o *cuatrenas* o *dieciseisenas* o *sesenta y cuatroenas* o ... (*¿por qué?*).

Si tenemos por ejemplo 3 *cuatrenas* $\times$ 2 unidades, esto significa 3 *cuatrenas* + 3 *cuatrenas* = 12 *cuatrenas*; es decir $3 \times 2 = 12$, lo que interesa es tener en cuenta, para el caso que nos ocupa, que unidades por *cuatrenas* da *cuatrenas* (*¿por qué?*); esto es:

1 unidad $\times$ 2 *cuatrenas* = 2 *cuatrenas*, lo que es equivalente, en términos de unidades, a: $1 \times 20 = 20$.

En otras palabras, 1 por 20 es lo mismo que 1 por 2, pero agregando un cero (*Piense en que esto explica el porqué cuando multiplicamos un número cualquiera por 10 o por 100 o por 1000 ... solo basta multiplicar el número por uno y agregar tantos ceros como haya después del 1. Justifique esta idea*). Es decir que podemos utilizar la tabla ubicando los productos en el lugar que corresponda o interpretar cada cifra de cada factor en términos de unidades, esto es:

$$\begin{aligned}
201 \times 23 &= (2\ \textit{dieciseisenas} \times 2\ \textit{cuatrenas}) + (2\ \textit{dieciseisenas} \times 3\ \textit{unidades}) \\
&\qquad + (0\ \textit{cuatrenas} \times 2\ \textit{cuatrenas}) + (0\ \textit{cuatrenas} \times 3\ \textit{unidades}) \\
&\qquad + (1\ \textit{unidad} \times 2\ \textit{cuatrenas}) + (1\ \textit{unidad} \times 3\ \textit{unidades}) \\
&= 10\ \textit{sesenta y cuatroenas} + 12\ \textit{dieciseisenas} + 0\ \textit{dieciseisenas} \\
&\qquad + 0\ \textit{cuatrenas} + 2\ \textit{cuatrenas} + 3\ \textit{unidades}.
\end{aligned}$$

Lo cual, en términos de unidades equivale a:

$$\begin{aligned}
201 \times 23 &= (200 \times 20) + (200 \times 3) + (0 \times 20) + (0 \times 3) + (1 \times 20) + (1 \times 3) \\
&= 10000 + 1200 + 0 + 0 + 20 + 3 = 11223
\end{aligned}$$

Y si lo escribimos verticalmente, equivale a:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 0 & 1 \\
 & & \times & 2 & 3 \\
\hline
1 & 0 & & & \\
 & 1 & 2 & & \\
 & & 0 & & \\
 & & & 0 & \\
 & & & 2 & \\
+ & & & & 3 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 3
\end{array}
$$

Ejercicios

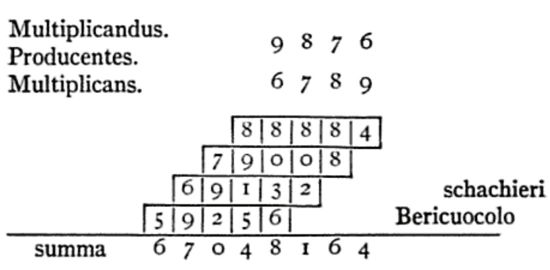
1. *Realice todas las tablas de multiplicar desde base 2 hasta base 16, plantee algunas multiplicaciones en distintas bases y resuélvalas.*

2. *Justifique el algoritmo usual de multiplicación a partir de un ejemplo*[30].

2.3.4.1. Propiedades de la multiplicación

La multiplicación[31] es una operación que se construye a partir de la adición. *¿Será razonable esperar que algunas de las propiedades de la adición, sean heredadas por la multiplicación?* Si observamos muchas multiplicaciones notamos que se tienen las propiedades:

[30]El algoritmo que utilizamos actualmente para multiplicar fue llamado por Luca Pacioli *Multiplicatio bericocoli vel scachierij* y aparece en su tratado Sūma (1494) como se muestra a continuación.



Tomado de: Smith (1958, p. 107).

[31]La multiplicación es una operación elaborada, los griegos usaban la tabla pitagórica que conocían antes de Pitágoras. Los babilonios empleaban tablas de cuadrados, y para los romanos la operación era lenta y trabajosa.

2.3.4.1.1. Propiedad asociativa

Verifique que la multiplicación cumple la propiedad asociativa.

2.3.4.1.2. Propiedad conmutativa

¿No le parece extraño que la multiplicación sea conmutativa? ¿Cómo es posible que sea lo mismo colocar 17 veces el 35 y adicionar, que colocar 35 veces el 17 y adicionar? Pareciera que las dos adiciones nada tuvieran en común. *Sin embargo verifique que la multiplicación es conmutativa sin importar la base en que sea efectuada. Proponga una explicación para esta propiedad.*

2.3.4.1.3. Existe un elemento idéntico para la multiplicación

El número 1 tiene un comportamiento particular en los números naturales cuando se multiplica con los demás, si aplicamos la definición de multiplicación[32] obtenemos de manera natural que

$$n \times 1 = n.$$

Como en ocasiones anteriores, si queremos preservar la propiedad conmutativa para la multiplicación, debemos convenir que 1 multiplicado por cualquier número también da como resultado el mismo número; simbólicamente lo escribimos

$$1 \times n = n$$

en donde la letra n puede ser reemplazada por un número cualquiera, aunque, como ya hemos dicho, no se puede efectuar una adición con un solo número.

También convenimos[33] que

$$0 \times n = 0$$

si queremos que la multiplicación se mantenga conmutativa en todos los casos, puesto que n veces adicionado 0, sí es 0.

[32] Algunas veces se usa el símbolo $\times$ (no cursiva) para denotar multiplicación; en otras ocasiones el punto, y cuando no hay lugar a confusión no se escribe signo alguno.

[33] Este resultado se puede obtener de otras formas cuando hayamos estudiado un poco más a fondo las propiedades de las operaciones adición y multiplicación.

2.3.4.1.4. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Otra propiedad que ya hemos utilizado para realizar multiplicaciones y que resulta muy útil para simplificar los algoritmos de multiplicación es que si multiplicamos un número por la suma de otros dos, el resultado es el mismo que adicionar los resultados de los productos del primero con cada uno de los sumandos; en símbolos podemos expresar esto escribiendo:

Si a, b, c representan números naturales cualesquiera, entonces

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Podríamos visualizar un poco esta propiedad, pensando en la siguiente adición:

$$\begin{aligned} 4 \times (3 + 5) &= (3 + 5) + (3 + 5) + (3 + 5) + (3 + 5) \\ &= (3 + 3 + 3 + 3) + (5 + 5 + 5 + 5) \\ &= 4 \times 3 + 4 \times 5 \end{aligned}$$

O justificarla geométricamente con:

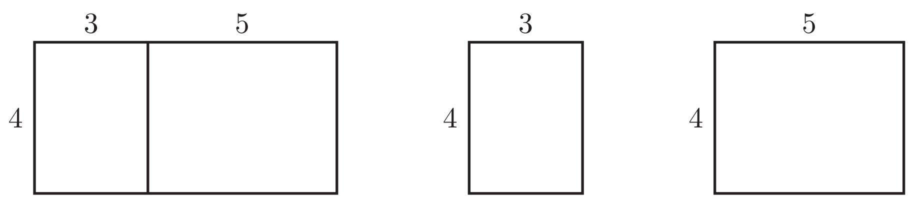


Figura 2.13

O con una distribución espacial de puntos:

$$3 \times (4 + 3) \quad = \quad (3 \times 4) \quad + \quad (3 \times 3)$$

Figura 2.14

El procedimiento más conocido para la multiplicación en base 10 se deriva de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (*explique*) y es adaptable para multiplicar en cualquier base.

2.3.4.1.5. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción

Si a, b, c representan números naturales cualesquiera, entonces cuando las restas son posibles,

$$a(b-c) = ab - ac$$

Argumentación.

Si llamamos $ab - ac = y$ entonces $ab = y + ac$ y si llamamos $b - c = x$ entonces $b = c + x$, de modo que por la distributiva de la multiplicación con respecto a la suma,

$$ab = a(c+x) = ac + ax$$

o sea que $ab = ac + ax$, lo que significa que

$$ab - ac = ax = a(b-c).$$

Que es el resultado deseado.

Ejercicios

1. *¿En qué base está* $31 = 2 \times 17$*?*

2. *Coloque paréntesis para que obtenga una igualdad*

$$3 \cdot 9 \cdot 5 + 2 - 8 \cdot 3 + 1 = 22.$$

3. *Resuelva el siguiente acertijo en base 7.*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \square & \square & \square \\
 & & \times & 6 & 6 & 6 \\
\cline{2-6}
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\hline
4 & 5 & \square & \square & \square & 4
\end{array}$$

4. *Verifique la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción y busque una explicación.*

5. *¿Intuye alguna relación entre las propiedades de la adición y las de la multiplicación? Elabore una argumentación que explique las últimas en términos de las primeras.*

6. *A continuación aparecen algunas multiplicaciones efectuadas por medio de algoritmos distintos al usual, todos consecuencia de la historia de las matemáticas. Para cada uno de ellos,*

   i. *Realice por lo menos un ejemplo en base 10 y otro en una base diferente.*
   ii. *Describa el algoritmo.*
   iii. *Indique si el algoritmo se puede utilizar para cualquier base. Si no, presente qué modificaciones haría para que fuese aplicable.*
   iv. *Presente diferencias del método con el algoritmo usual.*
   v. *Busque una justificación para cada procedimiento.*

A. Método egipcio: en el papiro de Rhind[34], un manual de antiguas matemáticas egipcias, escrito alrededor de 1700 a.C., se describe la siguiente forma de multiplicar. Para multiplicar, por ejemplo, 25×27 se hace lo siguiente (Newman, 1997, p. 97):

•	1	vez	27	es	27
	2	veces	27	son	54
	4	veces	27	son	108
•	8	veces	27	son	216
•	16	veces	27	son	432

Los números marcados en la primera columna suman 25, por lo tanto 25 veces 27 se obtiene de adicionar los números correspondientes en la última columna; por lo que

$$25 \times 27 = 27 + 216 + 432 = 675.$$

Este procedimiento nos sugiere un método para multiplicar en base 2: sabemos que para multiplicar por dos, un número en base 2, basta agregar un 0; así si queremos multiplicar 11011 que corresponde a 27 en base 10, por 25 (en base 10), basta hacer lo siguiente:

[34]El más antiguo de los papiros egipcios que data aproximadamente de la dinastía doce (2000-1788 a.C.), el papiro de Moscú, se halla en el British Museum de Moscú. El papiro de Rhind, que se conoce también como papiro de Ahmes, por el nombre de su autor, tiene 30 cm de alto y 6 cm de largo, fue comprado en 1858 en una ciudad del Nilo por el escocés Henry Rhind, del cual se deriva su nombre.

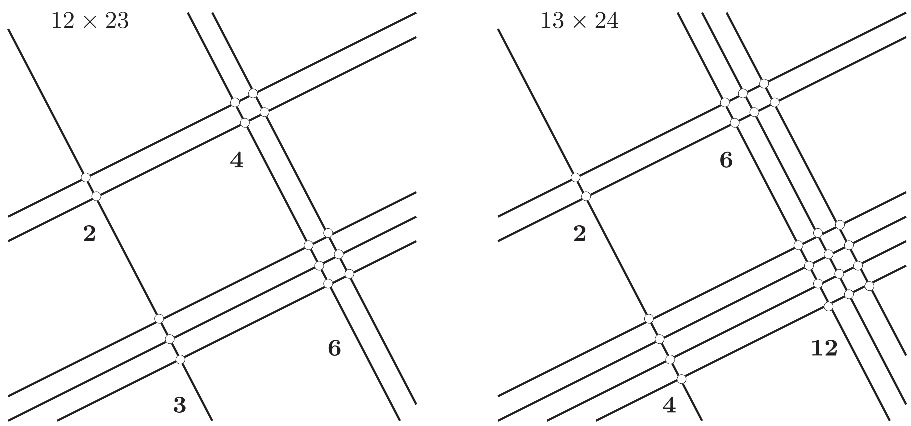
En ellos aparecen los conocimientos que sobre aritmética poseían los egipcios, el sistema de numeración y algunas operaciones. Los papiros contienen problemas y soluciones, 85 en el papiro de Rhind y 25 en el papiro de Moscú.

•	1	vez	11011	es	11011
	10	veces	11011	son	110110
	100	veces	11011	son	1101100
•	1000	veces	11011	son	11011000
•	10000	veces	11011	son	110110000

y adicionamos los valores señalados, obteniendo 1010100011.

Quizá el método no sea tan práctico o inteligente para un humano de esta época, pero tiene sus ventajas.

B. Método gráfico con líneas: este curioso método de multiplicar es atribuido a mayas, chinos e indios, hay quienes aseguran que se debe a los primeros y que está basado en el *principio Tzeltal*; otros, que se debe a los segundos y que se fundamenta en que los chinos utilizaban varillas de bambú para representar los números.



Así:
$12 \times 23 = 276$

Por tanto:
$13 \times 24 = 312$

Figura 2.15

No es de nuestro interés dilucidar de quién es originariamente este método, lo que nos interesa es ver en qué consiste, así que observe los ejemplos presentados en la figura 2.15 para interpretar cuál es el procedimiento[35].

[35]Una estrategia que utilizamos con frecuencia para validar nuestro conocimiento, en este caso, la interpretación de este método de multiplicar es consultar si otros han visto lo mismo, una manera de hacerlo es mediante la Internet, en particular para el tema que nos

¿Si una de las cifras es cero, cómo se podría seguir el método? Haga sus propuestas.

C. Método gráfico con círculos: multipliquemos, con este método, 23×32. Primero dibujamos dos círculos concéntricos por cuanto la primera cifra del primer factor es 2; así:

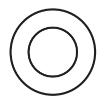


Figura 2.16

Como nuestro segundo factor tiene dos cifras hacemos otra copia de la figura anterior:

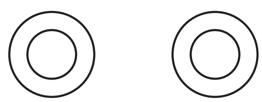


Figura 2.17

Ahora dibujamos tres círculos concéntricos porque la segunda cifra del primer factor es tres y repetimos tal figura dos veces también, debajo de las anteriores, de esta manera:

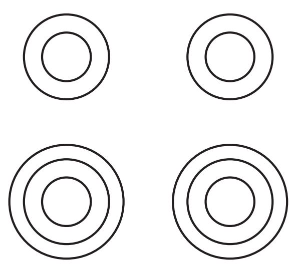


Figura 2.18

Seguidamente, trazamos tantos radios como indique la primera cifra del segundo factor, en los círculos ubicados en la primera columna, esto es:

ocupa, vale mencionar que ingresando por un buscador cualquiera se encuentran no solo documento sino videos alusivos a este método, una dirección donde se halla uno de ellos es http://www.youtube.com/watch?v=ZO1_5oja7aI (extraído el 16 de julio de 2013). Le sugerimos que antes de ir a consultar a otras fuentes, lo intente primero usted solo, sin duda. ¡Es gratificante hacer hallazgos propios así otros ya los hayan hecho antes!

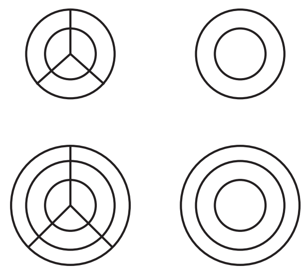


Figura 2.19

De manera similar, trazamos tantos radios como indique la segunda cifra del segundo factor en los círculos ubicados en la segunda columna:

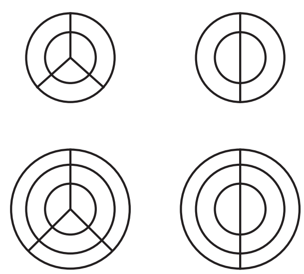


Figura 2.20

Ahora, trazamos unas rectas que separen los círculos en secciones así:

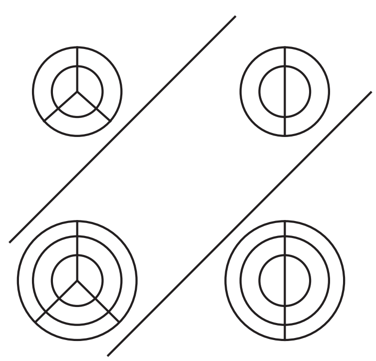


Figura 2.21

Contamos, para cada sección, en cuántas partes quedaron divididos los círculos sumando las partes de una misma sección; obteniendo:

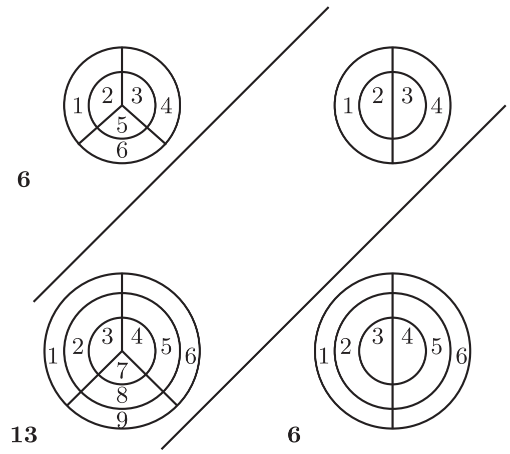


Figura 2.22

Por lo tanto, $23 \times 32 = 736$.

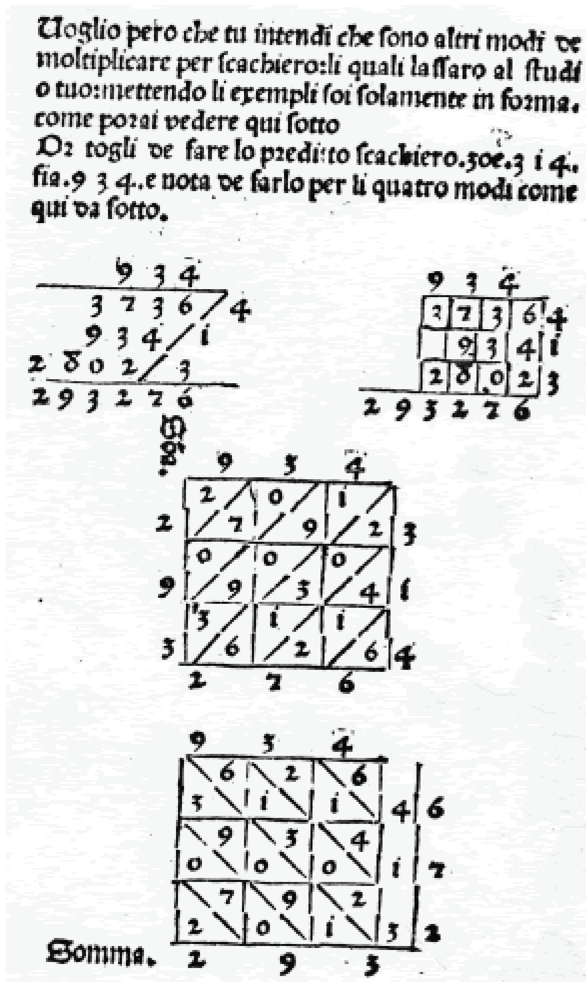
Al igual que en el método anterior[36], *¿cómo utilizaría este método si en las cifras de los factores hubiese ceros? ¿No le parece curioso que para multiplicar se haya requerido dividir –los círculos–? Proponga una explicación para este hecho.*

D. Métodos *scacchero* (*cachieri* o por *bericuocolo*), por cuadrilátero y gelosia (o enrejado, graticola, de las celdas, de la cuadrícula, por galeras, de las casas, musulman, árabe o hindú): la figura 2.23 forma parte de una página de la obra *Aritmética de Treviso* publicada en Treviso (Italia) en 1478, impresa para aquellos interesados en las actividades comerciales. Inicialmente, *descifre lo que en ella se encuentra escrito.*

Estas figuras muestran algunos de los métodos utilizados para multiplicar[37], algunos de los cuales o con sutiles modificaciones, se encuentran en Internet bajo los nombres de método musulmán, árabe, indio o hindú.

[36]Al igual que para el método anterior, también circulan en Internet algunos videos referidos a este método. Una dirección es http://www.youtube.com/watch?v=YC7ndb0msjI (extraído el 16 de julio de 2013).

[37]Dice Smith (1958) que en Lilāvati (1150), obra de Bhāskara –indio–, se presentan cinco métodos para multiplicar, los cuales fueron ampliado a ocho por Pacioli (1494) en su obra Sūma. Los cinco métodos que aparecen en la figura de la *Aritmética de Treviso* fueron considerados por Pacioli.



Tomado de: una página de la Aritmética de Treviso
(1478, citado por Smith y Ginsburg, 1997, p. 51).
Figura 2.23

Los árabes, desde el siglo X, usaban un método para multiplicar que llamaban *método de las casas*, que se podría representar de la siguiente manera[38]:

Los números a multiplicar se colocaban en la parte superior de un cuadrilátero dividido en cuadrados; en cada uno de ellos se escribía el producto de cada una de las cifras de uno de los factores por cada una de

[38]Aunque hay quienes afirman que el método era originalmente indio y que data desde el siglo V.

las cifras del otro factor y luego se adicionaban en diagonales empezando por las unidades; así, para 987×987, se hace lo que sigue:

9	**8**	**7**	
81	72	63	$\langle 987 \times 9 \rangle$
72	64	56	$\langle 987 \times 8 \rangle$
63	56	49	$\langle 987 \times 7 \rangle$

Figura 2.24

Como la adición en diagonales algunas veces causaba problemas, autores árabes como Ibn al-Baná (fallecido en 1321) y Al-Kashí (fallecido en 1429) propusieron trazar diagonales en cada cuadrado para que el método fuera más seguro. De aquí surge un método para multiplicar (Goldstein, 1995) llamado *gelosia* o *graticola*, debido a Luca Pacioli, con este método la anterior multiplicación se efectuaría así:

Inicialmente se disponen los números alrededor de un cuadrilátero dividido en cuadrados en los que se inscriben los totales a uno y otro lado de las diagonales, orientadas de acuerdo con la posición de los números de partida (figura 2.25):

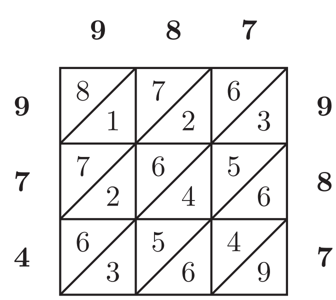


Figura 2.25

La adición de números en diagonal, empezando por el cuadrado inferior derecho, da el producto 974169, que se inscribe en los lados libres de la gelosia[39].

[39]Esta palabra designaba el entramado de madera o hierro que, como el *mucharabiah* árabe, permite ver sin ser visto desde el interior de una casa y protege el pudor de las mujeres.

Los indios, a diferencia de los árabes, dibujaban el rectángulo apoyado en uno de sus vértices y en dos de sus lados se ubican los factores (figura 2.26).

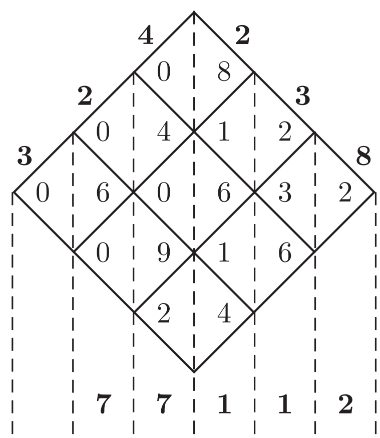
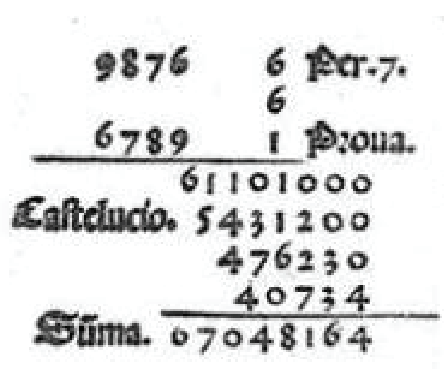


Figura 2.26

Por tanto $324 \times 238 = 77112$.

E. Método del *castelluccio* o del castillo: otro procedimiento para multiplicar (Goldstein, 1995, p. 47), llamado del *castellucio* o del castillo, también de Luca Pacioli, que puede considerarse como un antecesor de la forma moderna, se ilustra en la siguiente figura, multiplicando 9876 por 6789:



Pacioli (1494, citado por Meavilla, 2009, parra. 16).
Figura 2.27

No obstante, en la tercera línea, de abajo hacia arriba, en la figura 2.27, muy seguramente no es 476230 sino 475230, que corresponde al producto de 6789 y 70.

F. Método por *crocetta* (o *casella*) o cruzado: el método por *crocetta* o cruzado también fue mencionado por Pacioli y aunque fue muy efectivo para multiplicar factores de dos cifras, Pacioli también lo utilizó para más cifras. Enseguida una copia de Pacioli junto con su explicación (traducida al español), para la multiplicación 37×37.

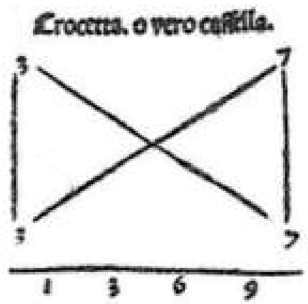


Figura 2.28

Primero asienta uno debajo del otro como se ve y empieza por la primera figura diciendo 7 por 7 hacen 49. Pon el 9 debajo de la raya y toma 4 para las decenas. Después, haz la cruz y di una vez 3 por 7, hacen 21. Después, otra vez 3 por 7, hacen 21. Suma estos dos productos, o sea 21 y 21, hacen 42 y 4 que tenías en la memoria hacen 46. Escribe el 6 y guarda 4. Después multiplica las últimas figuras, o sea 3 por 3 hacen 9, y 4 que guardabas hacen 13. Escribe el 13 al lado del 6 y el 9 que habías puesto antes y resultará 1369. (Pacioli, 1494, citado por Meavilla, 2009, parra. 20-21).

He aquí otro ejemplo para números de más de dos cifras:

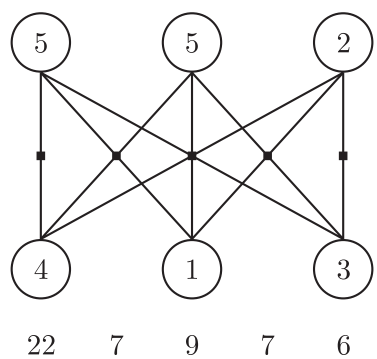
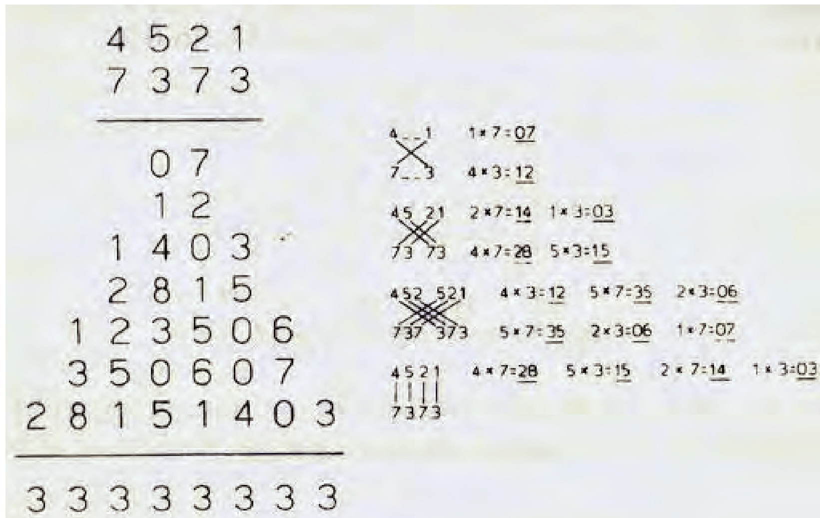


Figura 2.29

G. Método triangular: en la figura 2.30 aparece un método, que llamamos triangular, para multiplicar; posible antecesor al algoritmo que utilizamos en la actualidad. *Interprete lo que aquí se presenta.*



Tomada de: Campligio y Eugeni (1992, p. 180).
Figura 2.30

H. Método ruso: en algunos pueblos de Rusia multiplicaban utilizando el siguiente procedimiento que utiliza divisiones sucesivas por dos en una parte y duplicaciones en la otra parte. Veamos:

Para multiplicar 18×7 se hace lo siguiente:

18	$\cancel{7}$
9	14
4	$\cancel{28}$
2	$\cancel{56}$
1	112
	126

Ahora multipliquemos 136×342 también en base 10:

136	$\cancel{342}$
68	$\cancel{684}$
34	$\cancel{1368}$
17	2736
8	$\cancel{5472}$
4	$\cancel{10944}$
2	$\cancel{21888}$
1	43776
	46512

Si aún no ha identificado la particularidad de los números tachados, le sugerimos observar, en la primera columna, los números correspondientes a los tachados y su particularidad en relación con los demás de la primera columna.

Además de resolver las tareas planteadas piense en si es posible triplicar en la primera columna (y no duplicar como se muestra en el algoritmo) y en dividir entre tres en la otra columna (y no entre dos como se presenta) ¿Funcionaría el algoritmo?

I. Método de Napier: varias culturas de la Edad Media y del Renacimiento utilizaron ábacos para efectuar sus operaciones (*consulte una manera de multiplicar utilizando algún ábaco o cree la propia con base en algún ábaco existente*), pero los métodos resultaban muy tediosos; con la invención del sistema de numeración decimal, tales instrumentos de cálculo fueron abandonados; no obstante, gracias a la invención del sistema de numeración base dos o binario, un matemático del siglo XVI, descubridor de los logaritmos, creó un tablero muy eficaz para realizar cuentas, llamado el ábaco Napier[40], poco popularizado; algunos autores consideran que este fue el inicio del sistema binario, antes de que Leibniz lo expandiera.

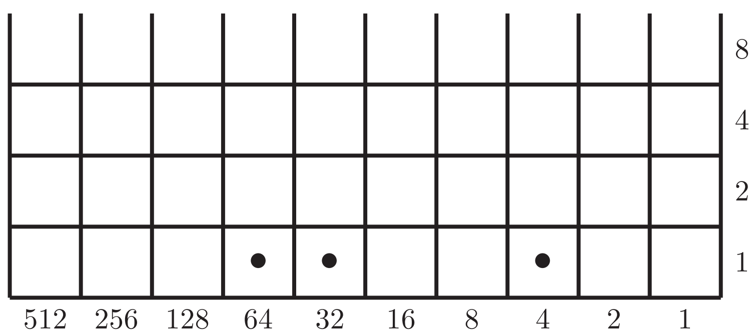


Figura 2.31

El tablero de fichas o ábaco de Napier consiste en una cuadrícula de las dimensiones deseadas, cuyas filas y columnas están marcadas con potencias de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...); sin embargo, Napier decía que era suficiente con un tablero de ajedrez y fichas.

[40]Napier también creó un conjunto de regletas para efectuar multiplicaciones conocidas como huesos de Napier, las cuales no presentamos en este texto, pero que invitamos al lector a consultar para que se dé una idea.

Para ubicar un número en el ábaco, este se descomponía como suma de potencias de dos y de esta manera, en una misma fila (o columna), se disponía una ficha por cada potencia de dos existente en la descomposición, de tal forma que en cada casilla solo se ubicara, a lo más, una ficha, pues dos fichas en una misma casilla corresponden a una ficha de la casilla siguiente (*¿por qué?*). En la figura 2.31 mostramos la representación del número 100 en la primera fila del ábaco, de acuerdo al valor de las casillas.

Aunque Napier sumó, restó, multiplicó, dividió y extrajo raíces cuadradas con su ábaco[41], en esta sección solo nos ocuparemos de la multiplicación.

Supongamos que deseamos multiplicar 35×27; primero ubicamos cada factor sobre el tablero, uno en la primera fila, de abajo hacia arriba y el otro, en la primera columna de la derecha, así:

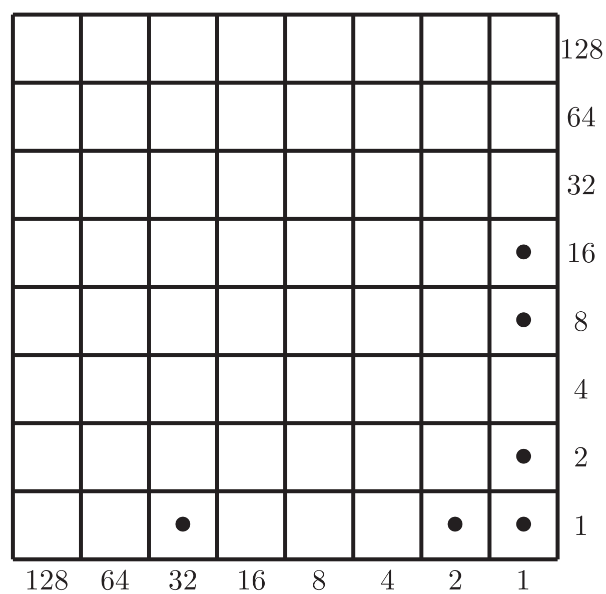


Figura 2.32

Posteriormente, ubicamos fichas en las intersecciones de las filas y columnas que tienen fichas (figura 2.33).

[41] El lector interesado puede remitirse al capítulo 8 de la obra de Martín Gardner (1987, pp. 103-118).

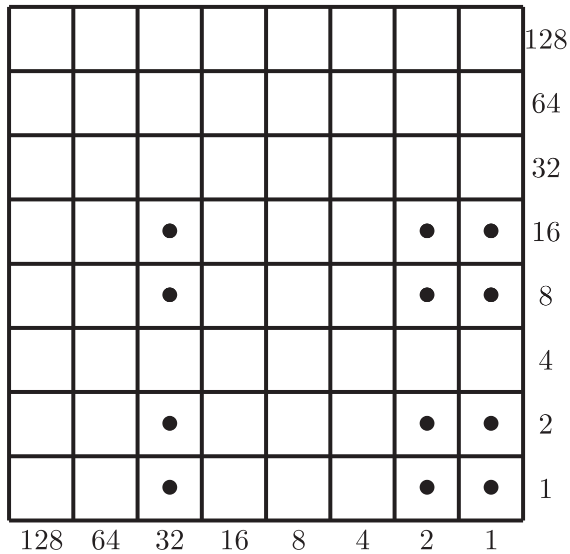


Figura 2.33

Después, movemos todas las fichas del tablero hacia la primera columna de la derecha, a la manera como corren los alfiles en el ajedrez (figura 2.34).

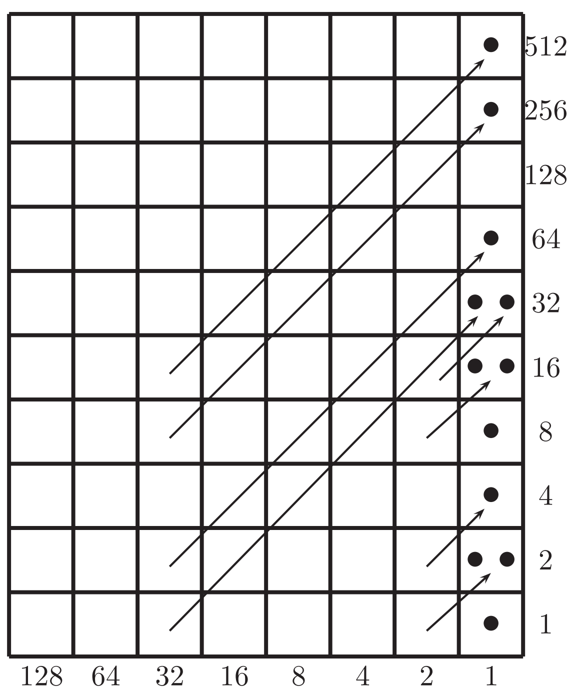


Figura 2.34

Luego, se aplica el hecho de que dos fichas en una casilla corresponden a una ficha en la casilla siguiente (figura 2.35).

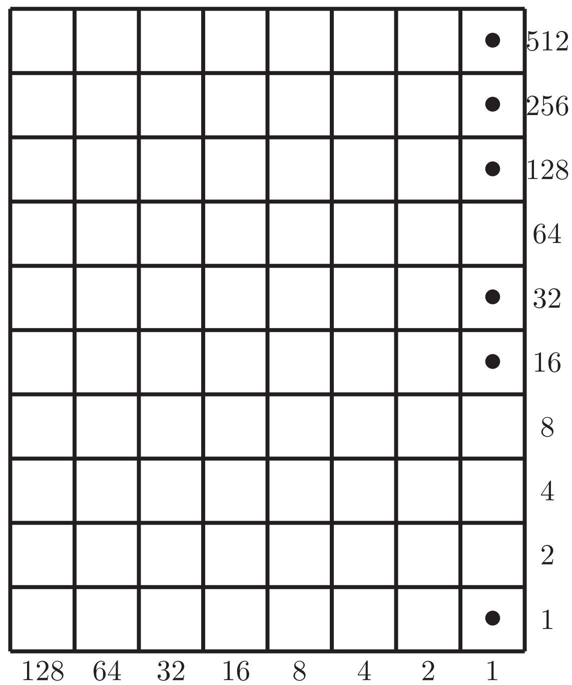


Figura 2.35

Con lo que se obtiene el producto buscado; es decir:

$$1 + 16 + 32 + 128 + 256 + 512 = 945 = 35 \times 27$$

Además de las preguntas planteadas para este ejercicio, proponemos otras: *¿cómo se efectúa el algoritmo si los números a multiplicar son pares*[42]*? ¿Cómo se modificaría el ábaco de Napier si en lugar de considerar potencias de dos para cada casilla, consideráramos potencias de tres? ¿Cómo se efectuaría una multiplicación con esta variación?*

J. Multiplicación fulmínea: según Malba Tahan, autor del libro *El hombre que calculaba*, esta manera de multiplicar fue utilizada por matemáticos como Fourier (1831) y Cauchy (1840). El método se presenta a continuación a través de un par de ejemplos que el lector debe interpretar, como hemos hecho antes (figura 2.36).

[42]Con la experiencia de los cursos en los cuales se ha utilizado este libro vale la pena mencionar que muchos estudiantes, respecto a esta pregunta, concluyen variando el método de forma tal que las fichas de los factores no se ubiquen dentro del ábaco sino fuera de él.

135 × 234			37856 × 234	
1 3 5				
4 3 **2**	2	$= \mathbf{1} \times \mathbf{2}$	0037856	
4 **3** **2**	9	$= \mathbf{1} \times \mathbf{3} + \mathbf{3} \times \mathbf{2}$	432	6
4 **3** **2**	2 3	$= \mathbf{1} \times \mathbf{4} + \mathbf{3} \times \mathbf{3} + \mathbf{5} \times \mathbf{2}$	0432	23
4 **3** 2	2 7	$= \mathbf{3} \times \mathbf{4} + \mathbf{5} \times \mathbf{3}$	00432	049
4 3 2	2 0	$= \mathbf{5} \times \mathbf{4}$	000432	0062
	3 1 5 9 0		0000432	00059
135 × 234 = 31590			00000432	000038
			000000432	0000024
			37856 × 234 =	8858304

Figura 2.36

7. *Consulte cómo multiplicaban otras culturas, por ejemplo los babilonios, los griegos y los romanos.*

8. *Consulte todos los métodos para multiplicar propuestos por Pacioli y no expuestos aquí, realice ejemplos y explíquelos.*

9. *Antiguamente era común enseñar a los niños métodos de multiplicación especiales para ciertos números (lamentablemente esta práctica en la enseñanza de las matemáticas se ha perdido), lo cual les ayudaba al hacer cálculos mentales sin necesidad de recurrir a máquinas como la calculadora (muy posiblemente por eso es que los comerciantes en las plazas de mercado son más hábiles haciendo cuentas que cualquier matemático titulado); enseguida presentaremos algunos métodos para multiplicar por ciertos números a través de ejemplos en base 10.*

   i. *Léalos, interprételos y realice otros ejemplos en base 10.*
   ii. *Intente extenderlos a otras bases.*
   iii. *Descríbalos formulando las condiciones necesarias para que se satisfagan.*
   iv. *Presente argumentos que los justifiquen.*

I. Una famosa multiplicación abreviada

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 4 & \times & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & & \\ \hline 6 & 0 & 1 & 8 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 6 & 2 & 1 & 8 & \times & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & & \\ \hline 7 & 4 & 6 & 1 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 5 & 8 & 3 & \times & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 9 & 8 & & \\ \hline 3 & 9 & 3 & 3 & 2 & 8 & & \end{array}$$

II. **Un par de multiplicaciones abreviadas**

El calculista colombiano Jaime García[43] ha escrito un manual (García, 2004) con el objetivo de comunicar algunas de las técnicas que utiliza para hacer cálculos mentales, aquí presentamos dos de ellos a partir de ejemplos elaborados a partir del manual:

a) Método 1: para multiplicar 21×61, hacemos:

$$1 \times 1 = 1$$
$$2 + 6 = 8$$
$$2 \times 6 = 12$$

Así, $21 \times 61 = 1281$.
Otro ejemplo para este mismo método: 21×31

$$1 \times 1 = 1$$
$$2 + 3 = 5$$
$$2 \times 3 = 6$$

Luego, $21 \times 31 = 651$.

b) Método 2: si se desea multiplicar, por ejemplo 44×25, hacemos lo siguiente:

$$44 \div 2 = 22$$
$$22 \div 2 = 11$$

Por tanto, $44 \times 25 = 1100$.
Ahora, otro ejemplo; digamos 65×25:

$$65 - 1 = 64$$
$$64 \div 2 = 32$$
$$32 \div 2 = 16$$

Así, $65 \times 25 = 1600 + 25 = 1625$.

[43] Quien ha indicado que sus habilidades con el cálculo mental se debe a que desde niño se interesó por el manejo del ábaco y a partir de esto fue ideando estrategias para aprender a hacer operaciones mentalmente de forma tal que al competir con sus compañeritos, él resultara ganador. Actualmente ha ganado varios récords *guinness* por ser más rápido que las calculadoras o los computadores a realizar algunas operaciones aritméticas.

III. **Por complementos**[44]

94×93			**91×96**		
Factores:	94	93	Factores:	91	96
Complementos:	6	7	Complementos:	9	4

$94 - 7 = 93 - 6 = \mathbf{87}$
$6 \times 7 = \mathbf{42}$

$\mathbf{94 \times 93 = 8742}$

$91 - 4 = 96 - 9 = \mathbf{87}$
$9 \times 4 = \mathbf{36}$

$\mathbf{91 \times 96 = 8736}$

IV. **Con cifras especiales**[45]

$36{\times}76$	**$47{\times}67$**	**$21{\times}81$**
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 6 = 24$	$2 \times 8 = 16$
$21 + 6 = 27$	$24 + 7 = 31$	$16 + 1 = 17$
$6 \times 6 = 36$	$7 \times 7 = 49$	$1 \times 1 = 1$
$36 \times 76 = 2736$	$47 \times 67 = 3149$	$21 \times 81 = 1701$

V. **Con las manos**

También las manos han sido utilizadas para realizar multiplicaciones. Presentamos una manera para encontrar la tabla del 9.

Para multiplicar cada dígito por 9, disponemos las manos como se muestra en la figura 2.37, numerando cada uno de los dedos con los dígitos.

Si queremos multiplicar nueve por uno, basta doblar el número nominado con uno, así nos quedaran nueve dedos a la derecha del dedo doblado; así, $9 \times 1 = 9$; ahora, si deseamos multiplicar 9×2, similarmente, doblamos el dedo numerado con 2, como se muestra en la figura 2.38.

[44] Estos ejemplos están basados en la obra de Perelman (1980, p. 6).

[45] Multiplicaciones como estas fueron propuestas por los profesores Carlos Zuluaga y Huego Cuéllar en un Encuentro de Geometría y Encuentro de Aritmética al que asistió uno de los autores de este texto.

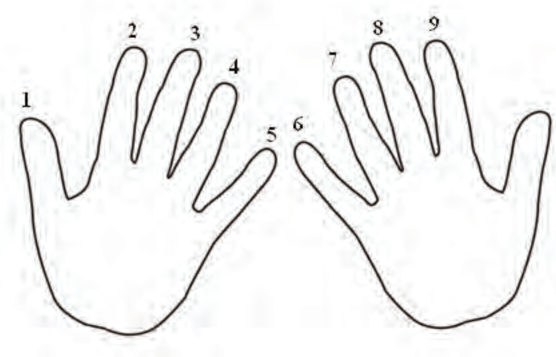


Figura 2.37

A la izquierda del dedo doblado nos queda un dedo, el cual nos indica la cantidad de decenas en el producto buscado y a la derecha del dedo doblado quedan ocho dedos, los cuales corresponden a la cantidad de unidades del producto; es decir que $9 \times 2 = 18$.

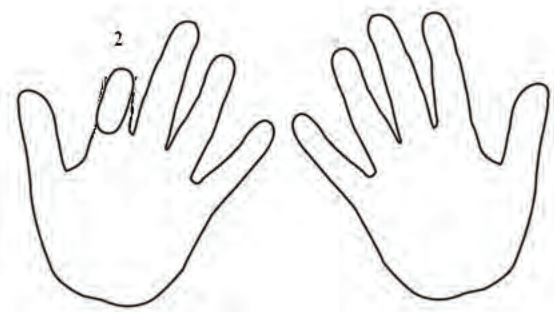


Figura 2.38

Si vamos a multiplicar 9×3, doblamos el dedo número tres, así nos quedarán levantados dos dedos a la izquierda y siete a la derecha, por lo que $9 \times 3 = 27$. De manera análoga se hace para hallar los demás resultados de la tabla del nueve.

10. *Consulte cómo realizar otras multiplicaciones con las manos y busque una explicación para el método consultado.*

2.3.5. División

Si conocemos el resultado de un producto pero ignoramos alguno de los factores, es posible hallarlo mediante una *división*[46]; el factor desconocido lo llamamos *cociente*[47], que representamos con la letra c; el factor conocido lo llamamos *divisor* y lo representamos con la letra d; el resultado del producto lo llamamos *dividendo* y lo notamos con la letra D. Dicho de otro modo, si $D \div d = c$ es porque $c \times d = D$. Por ahora no consideramos situaciones en la que alguno de los números sea cero.

La división de D (dividendo) entre d (divisor) con cociente c, se puede indicar de uno de los tres modos siguientes[48]:

$$D \div d = c \qquad D \,\underline{|\, d \quad}\atop{\;\; c} \qquad \frac{D}{d} = D/d = c$$

Por supuesto, también se tiene que si $D \div d = c$, entonces $D \div c = d$.

Esta clase de división se llama *exacta*, se dice también que el dividendo es *múltiplo* del divisor.

Como ya dijimos, las operaciones de multiplicación y división exacta no son independientes, hay relaciones entre ellas, análogas a las que existen entre la adición y la sustracción, que también, en este caso, se utilizan como mecanismo de prueba para verificar si efectuamos alguna de ellas de manera correcta. Las tres escrituras siguientes expresan exactamente lo mismo:

$$a \times b = c \qquad \text{es lo mismo que} \qquad c \div b = a \qquad \text{o también} \qquad c \div a = b$$

[46]Como la sustracción, la división no es una operación entre números naturales, en el sentido moderno de la palabra, pues no toda división entre números naturales tiene como resultado un número natural; pero de nuevo esto no nos causa problemas para nuestros propósitos actuales. Es la más compleja de las "operaciones" de la aritmética, por lo que su aparición fue un poco tardía. Babilonios e indios fueron los primeros en conocerla. Los métodos actuales para resolver la división se derivan de los indios, quienes disponían en una mesa de arena los elementos de la operación; dividendo, divisor, cociente y residuo. Estos conocimientos fueron transmitidos a Europa por los árabes; Leonardo de Pisa los expuso en 1202 en Italia.

[47]Etimológicamente la palabra *cociente* significa, cuántas veces.

[48]Los árabes indicaron la división en forma de fracciones; Rahn empleó el signo $\div$ para la división en un libro publicado en 1669, indicando que el punto encima de la línea da la posición del dividendo o numerador de una fracción y el punto por debajo de la línea, la del divisor o denominador.

En 1202, Leonardo de Pisa (Fibonaci, hijo de Bonaci) introdujo el uso de la raya horizontal entre los números para indicar la división (tomado de los textos árabes). En 1684, Leibnitz introdujo como signo de división los dos puntos (:) usado actualmente en muchos países.

así, para probar si la división $c \div a = b$ está bien efectuada, basta multiplicar $a \times b$ y obtener como resultado c.

2.3.5.1. Propiedades de la división

Al igual que la sustracción, la división no es conmutativa y no es asociativa, pero sí cumple la propiedad distributiva de la división respecto a la adición, cuando el símbolo de la división está a la derecha del de la suma.

2.3.5.1.1. Propiedad distributiva a derecha de la división respecto a la adición

Si a, b, c representan números naturales cualesquiera diferentes de cero y las divisiones son posibles, entonces

$$(a + c) \div b = (a \div b) + (c \div b).$$

En palabras, si tenemos la suma de dos números dividida entre un número, el resultado equivale a adicionar los resultados de las divisiones de cada sumando con el divisor dado; o escrito de una manera más usual, así:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Pero debemos tener cuidado, porque si la suma está a la derecha de la división, la igualdad ya no se tiene, o sea que *no se cumple*:

$$b \div (a + c) = (b \div a) + (b \div c)$$

o de otra forma

$$\frac{b}{a+c} \neq \frac{b}{a} + \frac{b}{c}$$

por ejemplo:

$$\begin{aligned} 24 \div (6 + 2) &\neq (24 \div 6) + (24 \div 2) \\ 24 \div 8 &\neq 4 + 12 \\ 3 &\neq 16 \end{aligned}$$

2.3.5.2. Ecuaciones de la forma $ax = b$

Como en el caso de la adición y la sustracción, estas relaciones se utilizan también para encontrar alguno de los números que no están escritos en una multiplicación o una división; por ejemplo, si queremos averiguar cuál es el número que multiplicado con 35_7 nos da como resultado 453_7, debemos escribir esta multiplicación en otra de sus formas equivalentes y obtener el número buscado como el resultado de otra operación.

En nuestro ejemplo, representemos con la letra x el número buscado; la multiplicación[49] es:

$$35_7 \cdot x = 453_7$$

que puede escribirse,

$$453_7 \div 35_7 = x$$

de donde vemos que para hallar x debemos efectuar la división y este proceso ya lo sabemos hacer; el resultado es 12_7. Para probar que el resultado es correcto[50] multiplicamos $35_7 \cdot 12_7$ y obtenemos 453_7.

Ejercicios

1. *Construya algunos ejercicios escribiendo productos y divisiones donde uno de los números no está escrito de manera explícita*[51]*, hasta que el proceso sea natural para usted.*

2. *Si a partir del 37 (en base 10) multiplicamos por múltiplos de 3 obtenemos*

$$\begin{aligned} 37 \times 3 &= 111 \\ 37 \times 6 &= 222 \\ 37 \times 9 &= 333 \\ 37 \times 12 &= 444 \\ 37 \times 15 &= 555 \\ 37 \times 18 &= 666 \\ 37 \times 21 &= 777 \end{aligned}$$

[49] En este caso, por ejemplo, no es aconsejable usar $\times$ para denotar la multiplicación, por la posible confusión con el número buscado x.

[50] Seguramente ya notó que casi todas las ideas (y hasta las palabras) coinciden con la sección sobre relaciones entre la adición y la sustracción, lo que dice que no estamos aprendiendo cosas nuevas; los dos procesos son esencialmente el mismo.

[51] Un detalle importante es que el punto de partida es un producto o una división donde escondemos un número con el propósito de hallarlo después; no estamos hablando de encontrar un número que multiplicado por otro nos dé un resultado establecido de antemano, porque posiblemente dicho número no exista. Por ejemplo, en base 10, no existe un número natural que multiplicado por 3 nos dé como resultado 8. *Debemos estar seguros de que la solución existe; es decir, que es un número natural, si no fuera así no podríamos aplicarle las reglas que establecemos para ellos.*

¿Existen otro par de números que nos den los mismos resultados?

3. *Observe la siguiente secuencia de hechos curiosos e intente encontrar una regularidad:*

   i. En base 3 el número 2 multiplicado por sus dos primeros múltiplos (exceptuando el cero) da 11 y 22 respectivamente:

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 11 \\ 2 \times 11 &= 22 \end{aligned}$$

   ii. En base[52] 4 el número 13 multiplicado por 3 o por un múltiplo de 3 (exceptuando el 0), da como producto un número formado por tres cifras iguales al múltiplo de 3 utilizado; así:

$$\begin{aligned} 13 \times 3 &= 111 \\ 13 \times 12 &= 222 \\ 13 \times 21 &= 333 \end{aligned}$$

   iii. En base 5 el número 124 multiplicado por 4 o por sus múltiplos (menos el cero), da como producto un número formado por cuatro cifras iguales al múltiplo de 4 utilizado:

$$\begin{aligned} 124 \times 4 &= 1111 \\ 124 \times 13 &= 2222 \\ 124 \times 22 &= 3333 \\ 124 \times 31 &= 4444 \end{aligned}$$

   iv. En base 6, al multiplicar 1235 por 5 o por sus múltiplos (desde 1 hasta 5), se genera como producto un número de cinco cifras iguales al múltiplo de 5 utilizado, así:

$$\begin{aligned} 1235 \times 5 &= 11111 \\ 1235 \times 14 &= 22222 \\ 1235 \times 23 &= 33333 \\ 1235 \times 32 &= 44444 \\ 1235 \times 41 &= 55555 \end{aligned}$$

[52] Desde ahora se omitirá el subíndice que señala la base en la cual estamos trabajando, debido a que esta se explicita en el subtítulo.

v. En base 12 si multiplicamos 123456789B por B o por sus múltiplos (múltiplos tomados desde 1 hasta B) encontramos como producto un número de once cifras iguales al múltiplo de B usado, *verifíquelo*:

$$123456789\text{B} \times \text{B} = 11111111111$$
$$123456789\text{B} \times 1\text{A} = 22222222222.$$

Son todos los que están pero no están todos los que son, porque en base 7 podemos obtener la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} 202 \times 4 &= 1111 \\ 202 \times 11 &= 2222 \\ 202 \times 15 &= 3333 \\ 202 \times 22 &= 4444 \\ 202 \times 26 &= 5555 \\ 202 \times 33 &= 6666 \end{aligned}$$

que no es de la misma forma que veníamos observando.

¿En qué bases podemos elaborar una tabla con la característica de la anterior?, ¿cuándo es posible, de cuántas maneras diferentes puede hacerse?

4. En una sección anterior observamos que el orden de los números naturales puede definirse utilizando la adición. *Con un procedimiento análogo defina un nuevo orden, pero en este caso utilice la multiplicación. Estudie los conjuntos de números que son "más grandes" que un número dado. ¿Hay elementos comunes en estos conjuntos cuando se escogen como iniciales números distintos?*

2.3.5.3. División con residuo

La idea fundamental, cuando intentamos dividir una cantidad entre otra es, como dijimos en el capítulo 1, repartir la primera cantidad en grupos que tengan la segunda cantidad, y esto no siempre es posible hacerlo de manera exacta; por lo general sobra un residuo. ¿Cómo procedemos para efectuar dicha repartición en este caso, si las cantidades están escritas en una base cualquiera? *Antes de seguir intente encontrar una manera propia.*

Para construir un algoritmo que permita efectuar divisiones con residuo en una base cualquiera, podemos utilizar dos ideas: la suposición de que la base 10 nada tiene de especial con respecto a las otras y el conocimiento que tenemos desde la escuela para dividir en base 10. Si este procedimiento sirve para base 10 debe servir para cualquier base. Podemos describirlo así:

1. Tomamos tantas cifras de la izquierda del dividendo como cifras tenga el divisor. *¿Por qué?*

2. Si el divisor es menor o igual que el formado con las cifras tomadas del dividendo, entonces:

    2.1. Buscamos un número que multiplicado por el divisor quede lo más próximo posible a él, sin sobrepasar el número formado por las cifras tomadas en el dividendo; este número forma parte del cociente. *¿Por qué?*

    2.2. Multiplicamos el número que encontramos por el divisor y lo sustraemos de las cifras tomadas del dividendo. *¿Por qué?*

    2.3. Tomamos el resultado de esta sustracción (residuo), le colocamos a la derecha la cifra que sigue a las tomadas en el dividendo y repetimos el paso 2. *¿Por qué?*

3. Si el número formado por las cifras tomadas del dividendo es menor que el divisor, tomamos una cifra adicional en el dividendo y efectuamos el paso 2. Cuando no haya más cifras disponibles en el dividendo termina el proceso.

Ejemplo

En base 8 queremos dividir 54706 entre 723: iniciamos en el paso 1, como 547 es menor que 723, según el paso 3, debemos encontrar un número que multiplicado por 723 nos quede lo más próximo posible a 5470, sin sobrepasarlo.

Un posible número es el que multiplicado por 7 nos aproxime por defecto a 54; es decir, 6, puesto que

$$7 \times 6 = 52.$$

Ahora debemos multiplicar

$$6 \times 723 = 5362,$$

resultado que debemos sustraer de 5470 para obtener como residuo 106 y primera cifra del cociente 6.

Enseguida colocamos a la derecha de 106 la cifra 6, obteniendo 1066 como nuevo dividendo.

Repetimos el proceso y conseguimos como resultado final un cociente de 61 y como residuo 143.

Ejercicios

1. *Así como se hallan diversas formas para multiplicar, también existen diversos algoritmos para la división, en la tabla 2.8 se presenta, mediante un ejemplo, un método para efectuar la división* **14578** $\div$ $\underline{93}$:

$\underline{93}$		70	1
186		70	2
372	70		**4**
744	442		**8**
1488	1186		**16**
2976		2674	32
5952		2674	64
11904	2674		**128**
14578			156

Tabla 2.8

Por tanto, el cociente de dividir 14578 entre 93 es 156 y el residuo es 70.

   a. *Por analogía resuelva* $712 \div 31$.
   b. *Resuelva, en base 3:* $212_{(3)} \div 10_{(3)}$.
   c. *Describa el método y busque una justificación para este.*

2. *Consulte otra manera para dividir (por ejemplo la de los egipcios o la de los babilonios), estúdiela y prepare una exposición para sus compañeros o haga su propia propuesta para dividir.*

3. *Reemplace cada cuadro por el número que corresponda para que la división sea correcta en base 7.*

$$
\begin{array}{ccc|l}
\square & \square & \square & 56 \\ \cline{4-4}
\square & \square & & \square\,\square \\ \cline{1-2}
 & \square & \square & \\
 & \square & 6 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Invente un algoritmo para resolver este problema con divisores de una sola cifra.

4. En base 10 se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9 \\
12 \times 8 + 2 &= 98 \\
123 \times 8 + 3 &= 987 \\
1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
123456 \times 8 + 6 &= 987654
\end{aligned}
$$

Construya una tabla semejante en base 7.

5. En base 10 se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9 = 3^2 \\
3 \times 8 + 1 &= 25 = 5^2 \\
6 \times 8 + 1 &= 49 = 7^2 \\
10 \times 8 + 1 &= 81 = 9^2
\end{aligned}
$$

Construya una secuencia similar en base 12.

6. Durante la Primera Guerra Mundial (1914-1918), los ingleses distribuían carbón a diferentes lugares del Reino Unido. A uno de sus municipios llegaron una vez 28 toneladas con instrucciones de repartirlas equitativamente entre 7 corregimientos. El alcalde, un hombre rudo e ignorante, junto con el concejo, decidió dividir 28 entre 7; esta función le correspondía al secretario, quien efectuó la operación de esta manera (Tomado de Caro, 1936, p. 254):

$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

"Siete en ocho cabe una vez; uno por siete es siete, a ocho, uno; bajo el 2; siete en 21 cabe 3 veces; 3 por 7 es igual a 21, a 21, cero". Un concejal dijo, "una división se prueba mediante una multiplicación y esta se hace así":

$$\begin{array}{rr} & 13 \\ \times & 7 \\ \hline & 7 \\ + & 21 \\ \hline & 28 \end{array}$$

y dijo: "7 por 1, siete; siete por 3, 21, y 7 más 21 da 28. No hay duda de que la división está bien hecha".

Pero un campesino estimó: "la multiplicación es una adición repetida". Y colocando el número 13 siete veces, sumó subiendo por la columna de la derecha y descolgándose por la izquierda, así:

$$\begin{array}{rr} & 13 \\ & 13 \\ & 13 \\ & 13 \\ & 13 \\ & 13 \\ + & 13 \\ \hline & 28 \end{array}$$

"3 y 3, 6; y 3, 9; y 3, 12; y 3, 15; y 3, 18; y 3, 21; y 1, 22; y 1, 23; y 1, 24; y 1, 25; y 1, 26; y 1, 27; y 1, 28". Entonces a cada corregimiento le correspondieron 13 toneladas de carbón. *Si hay errores ubíquelos y explique por qué son errores. Plantee una situación similar en otra base.*

2.3.5.4. Ecuaciones de la forma $ax + b = c$

Cuando una división no es exacta; es decir, queda un residuo distinto de cero, existe una relación entre los términos de ella, que también se usa para probar si fue realizada de manera correcta. Si escribimos D para el dividendo, d para el divisor, c para el cociente y r para el residuo, la relación es naturalmente[53] :

$$D = d \times c + r$$

Con lo que hemos aprendido hasta ahora, deberíamos estar en capacidad de encontrar uno de los números que participan en la relación si conocemos todos los demás, esto es resolver ecuaciones de la forma $ax + b = c$, o de las otras formas que ya hemos resuelto.

Ejercicios

1. *Proponga y resuelva ecuaciones de la forma*

$$ax + b = c.$$

2. *Reemplace las letras por dígitos para que las operaciones resulten correctas en base 10. ¿Es posible una solución en base 9? ¿Solo una?*

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\ B\ C\ D\ E} \\ \times\ 4 \\ \hline \mathrm{E\ D\ C\ B\ A} \end{array}$$

3. *Al multiplicar el número 2178 por 4 en base 10 se invierte; es decir, el resultado es 8712. Encuentre un número de 4 dígitos que al multiplicarlo por 9 se invierta. Repita el ejercicio en otra base.*

4. *Resuelva las siguientes ecuaciones en base 7 justificando cada paso:*

   a. $546 + x = 1005$

   b. $4523 - x = 3536$

   c. $x - 413 = 2230$

   d. $321x = 21405$

   e. $\frac{4545}{x} = 106$

[53] Esta relación es conocida como el *algoritmo de la división*.

f. $\frac{x}{51} = 223$

g. $4432 + 21x = 5455$

h. $3361 - 34x = 2213$

i. $\frac{26246}{x} - 34 = 1000$

j. $4002 - \frac{50025}{x} = 53$

2.4. Ecuaciones con dos variables

Hasta ahora hemos resuelto ecuaciones del estilo $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $ax = b$, $a/x = b$ y $x/a = b$; con a y b números naturales, en diferentes bases numéricas siempre que estas tienen solución dentro del conjunto de los números naturales. Si observamos estas ecuaciones, notamos que en cada una de las igualdades no conocemos un número, ¿cómo resolvemos ecuaciones en las cuales desconozcamos dos números? Es decir, qué estrategias proponemos para dar solución a ecuaciones como:

$$x + y = 32$$

donde x, y y 32 son números en base 7.

Una idea natural consiste en dar valores a x y resolver la ecuación de una sola variable y, así:

Si $x = 1$, entonces

$$1 + y = 32$$

o sea $y = 31$.

Si $x = 5$, entonces

$$5 + y = 32$$

o sea $y = 24$.

Y así sucesivamente para cada valor de x entre 0 y 32 encontramos un valor para y, como lo muestra la tabla 2.9.

x	0	1	2	3	4	5	6	10	$\cdots$	26	30	31	32
y	32	31	30	26	25	24	23	22	$\cdots$	3	2	1	0

Tabla 2.9

Pero, ¿es aplicable el método en cualquier ecuación de la forma $ax+by=c$, donde a, b, c son números naturales?

Estudiemos otro ejemplo en busca de formular alguna conjetura. En base siete, resolvamos la ecuación:

$$3x+5y=126.$$

Iniciemos proponiendo una solución por tanteo, luego de varios intentos encontramos las siguientes soluciones:

$$(3,15),(11,12),(16,6),(24,3) \text{ y } (32,0)$$

donde hemos representado con (x_0,y_0) una solución de la ecuación propuesta. Si hacemos una lista con las soluciones:

$$\begin{gathered}(3,15)\\(11,12)\\(16,6)\\(24,3)\\(32,0),\end{gathered}$$

observamos que los números que ocupan el lugar de x_0 van aumentando de cinco en cinco: $3+5=11$, $11+5=16$, $16+5=24$, $24+5=32$, 5 es el número que multiplica a y; en cambio, los números que ocupan el lugar de y_0 disminuyen de tres en tres: $(15-3=12, 12-3=6, 6-3=3, 3-3=0)$ y 3 es el número que multiplica a x, ¡como ya lo debió notar! Análogamente sucede con la primera ecuación que tratamos. Conjeturamos que:

Si (x_0,y_0) es solución de $ax+by=c$, donde a, b, y c son números naturales, entonces (x_0+b,y_0-a) o (x_0-b,y_0+a) es también, solución de la ecuación siempre que y_0-a o y x_0-b sean números naturales.

Esta afirmación la podemos justificar de la siguiente manera (solo haremos la primera parte, la otra queda como ejercicio para el lector).

Argumentación: supongamos que (x_0,y_0) es una solución de la ecuación $ax+by=c$; es decir que:

$$ax_0+by_0=c.$$

Debemos probar que

$$a(x_0+b)+b(y_0-a)=c.$$

Por las propiedades distributiva de la multiplicación respecto a la adición y a la sustracción, tenemos

$$a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = (ax_0 + ab) + (by_0 - ba).$$

Si llamamos $z = by_0 - ba$ entonces $by_0 = z + ba = z + ab$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}
(ax_0 + ab) + z &= ax_0 + (ab + z) && \text{Por propiedades asociativa} \\
& && \text{y conmutativa de la suma.} \\
&= ax_0 + (ab + (by_0 - ab)) && \text{Reemplazando } z. \\
&= ax_0 + by_0 && \text{Por P2.} \\
&= c && \text{Por hipótesis.}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = (ax_0 + ab) + (by_0 - ba) = c$$

esto significa que $(x_0 + b, y_0 - a)$ es también solución de la ecuación dada.

2.4.1. Representación gráfica de las soluciones

Podemos obtener otra representación de las soluciones de las ecuaciones que estamos considerando de manera gráfica, asociando cada solución a un punto en un plano.

Usualmente utilizamos el plano cartesiano (*¿en este caso tendríamos un plano*?, *¿un semiplano*?, *¿un conjunto de puntos*? *Recuerde que estamos en* $\mathbb{N}$), el cual se traza a partir de un par de semirrectas con origen común en un punto O de un plano, generalmente el punto $(0, 0)$, formando un ángulo α, regularmente de 90°. (*¿Puede ser otro valor del ángulo*?). A partir del origen en cada semirrecta se elige un punto denominados A y B respectivamente, los segmentos determinados OA y OB se utilizan como unidades de medida y los puntos A y B representan el número 1 en cada semirrecta, luego se replica cada uno de estos segmentos en la semirrecta correspondiente para obtener representaciones de los números naturales.

A partir de lo anterior, supongamos que deseamos ubicar la solución $(2, 3)$ de la ecuación $4x + y = 11$, se elige en el eje x el valor 2 (*¿por qué en este eje y no en el otro*? *¿Se podría elegir el 2 en el otro eje*?) y el valor 3 en el eje y; sobre el punto que indica 2 en el eje x, se traza una recta perpendicular a este eje (o paralela al eje y, *¿por qué*?) y sobre el punto 3 en el otro eje, el y, se traza una recta perpendicular a este (o paralela al eje x, *¿por qué*?), el punto de intersección entre tales rectas es $(2, 3)$ (figura 2.39).

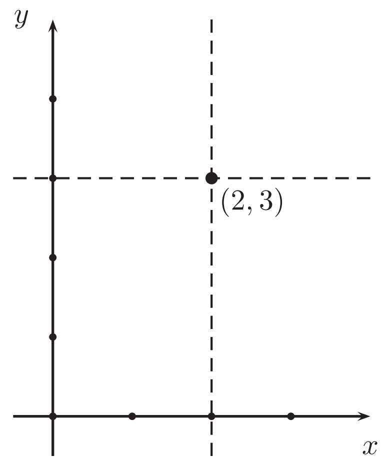


Figura 2.39

De forma similar, se pueden ubicar las demás soluciones de la ecuación $4x + y = 11$. *¿Qué forma geométrica determinan las soluciones de tal ecuación?*

Como se sugirió anteriormente, las semirrectas que determinan el semiplano podrían intersecarse formando un ángulo diferente a 90°, así que vamos a trabajar sobre un plano cuyos semiejes se intersequen en $(0, 0)$ (*¿se podrían intersecar en otro punto*?), pero formando un ángulo diferente a 90° (figura 2.40).

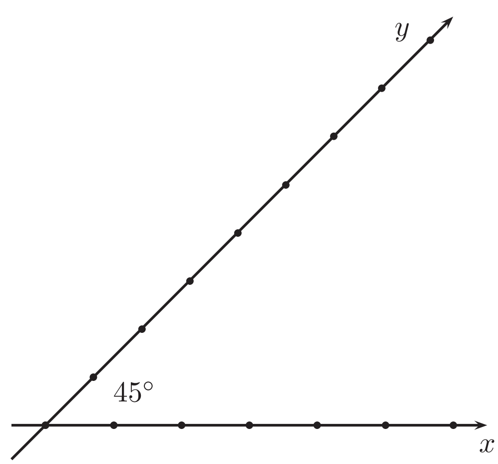


Figura 2.40

Sobre un plano como este vamos a ubicar las soluciones de las ecuaciones que estamos considerando, en diferentes planos, de la siguiente manera:

i. Plano **PAPA**: para ubicar la pareja ordenada (a, b) se ubica el punto a en el eje x y sobre este se traza una recta **pa**ralela al eje y, luego se ubica el punto b en el eje y y sobre este se traza una recta **pa**ralela al eje x. El punto de intersección entre las dos rectas es el punto (a, b) (figura 2.41).

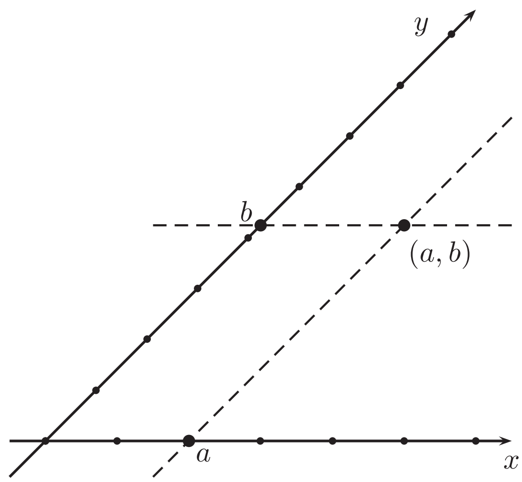


Figura 2.41

ii. Plano **PEPE**: para ubicar la pareja ordenada (a, b) se ubica el punto a en el eje x y sobre este se traza una recta **pe**rpendicular al eje x, luego se ubica el punto b en el eje y y sobre este se traza una recta **pe**rpendicular al eje y. El punto de intersección entre las dos rectas es el punto (a, b).

iii. Plano **PAPE**: para ubicar la pareja ordenada (a, b) se ubica el punto a en el eje x y sobre este se traza una recta **pa**ralela al eje y, luego se ubica el punto b en el eje y y sobre este se traza una recta **pe**rpendicular al eje y. El punto de intersección entre las dos rectas es el punto (a, b).

iv. Plano **PEPA**: para ubicar la pareja ordenada (a, b) se ubica el punto a en el eje x y sobre este se traza una recta **pe**rpendicular al eje x, luego se ubica el punto b en el eje y y sobre este se traza una recta **pa**ralela al eje x. El punto de intersección entre las dos rectas es el punto (a, b).

Ejercicios

1. *Represente gráficamente cada una de las soluciones de las ecuaciones que se listan enseguida, en cada uno de los planos anteriores. ¿Qué forma geométrica determinan las soluciones de tales ecuaciones?*

   a. *En base 7*: $3x + 5y = 126$.

   b. *En base 6*: $2x + 3y = 244$.

   c. *En base 5*: $4x + 2y = 30$.

   d. *En base 7*: $x + y = 32$.

   e. *En base 12*: $By + Ax = 1B19$.

2. *Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones y grafíquelas en las diferentes maneras de repesentación. ¿La forma geométrica de tales soluciones depende de la forma de la ecuación (tenga en cuenta los resultados encontrados en el numeral anterior)?*

   a. *En base 5*: $4x - 3y = 1$.

   b. *En base 6*: $12x - y = 20$.

   c. *En base 6*: $2y - 5x = 245$.

3. *A partir de los resultados obtenidos en el numeral 2, haga una conjetura en la que determine cómo encontrar las soluciones de una ecuación de esta forma, dada una solución, e intente probarla.*

4. *Dados los siguientes puntos, encuentre la ecuación que los define. Explique su procedimiento.*

   a. $(11, 12)$ *y* (3,15) *en base doce.*

   b. $(1, 7)$ *y* $(4, 4)$ *en base ocho.*

   c. *¿Cómo se halla la ecuación a partir de dos puntos cualesquiera dados? Determine un procedimiento general y justifíquelo.*

Si tenemos una lista de soluciones de una ecuación desconocida como la siguiente, es posible determinar la ecuación sin recurrir a un procedimiento específico. Veamos:

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	17	$\cdots$	N
y	7	11	15	19	23	27	$\cdots$	?	$\cdots$	?

Tabla 2.10

¿Cuál es el valor que le corresponde a y cuando x es 17? Observando la tabla 2.10 encontramos una relación entre los valores de x y y:

Si $x = 2$, entonces $y = 7 + 4 = 11$

Si $x = 3$, entonces $y = 7 + 4 + 4 = 7 + 2(4) = 15$

Si $x = 4$, entonces $y = 7 + 4 + 4 + 4 = 7 + 3(4) = 19$

Si $x = 17$, entonces $y = 7 + 16(4) = 71$

Luego, la ecuación que determina estas soluciones es:

$$y = 7 + (x - 1)4 = 4x + 3.$$

Al graficar las soluciones obtenemos:

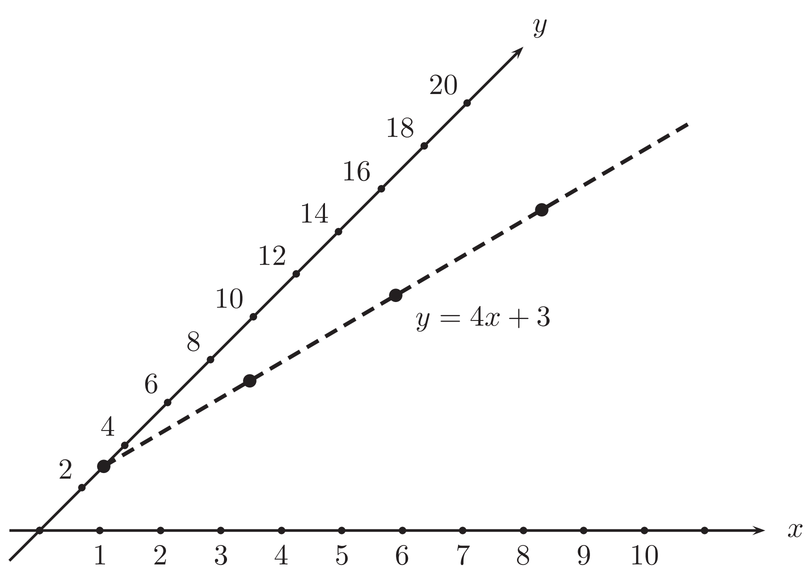


Figura 2.42

Vemos que el corte de la semirrecta con el eje y es 3.

Si hacemos la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx+b$, observamos que el corte de la gráfica de la ecuación con el eje y es b, pues $x = 0$.

Ejercicios

1. *Plantee ecuaciones con dos variables y grafique las soluciones.*
2. *Estudie el significado de los cambios en m y en b en la gráfica de las soluciones de las ecuaciones de la forma $y = mx + b$.*

2.5. Cambios de base

En lo hecho hasta ahora, hemos enfatizado que un mismo número puede ser representado con distintos símbolos en sistemas numéricos diferentes o con símbolos iguales en distintas bases. Debemos desarrollar un procedimiento para cambiar de una base a otra, para poder traducir información entre bases.

En la escuela, para cambiar de una base a otra cualquiera, se acostumbra pasar por la base 10, por familiaridad con ella, pero en realidad esto no es necesario.

Si queremos pasar un número que está en base 4 a base 7, lo natural es hacer grupos de 7 unidades, luego grupos de 7 septenas, con los resultantes grupos de 7 biseptenas, etc. Es decir, hacer divisiones sucesivas por 7, pero escribiendo 7 en base 4, o sea 13.

Ejemplos

1. Para pasar 84 en base 10 a base 2, hacemos divisiones sucesivas y obtenemos:

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r}
84 & 2 & & & & & \\
04 & 42 & 2 & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 21 & 2 & & & \\
 & & \mathbf{1} & 10 & 2 & & \\
 & & & \mathbf{0} & 5 & 2 & \\
 & & & & \mathbf{1} & 2 & 2 \\
 & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{1}
\end{array}
$$

   Por lo tanto, 84 en base diez corresponde a 1010100 en base dos. (Hemos resaltado los residuos en cada una de las divisiones y el último cociente para facilitar la lectura).

2. Pasar el número 322 de base 4 a base 7.

   a) Dividimos sucesivamente 322 por 7, con el cuidado de escribir este último en base 4; es decir, 13.

$$\begin{array}{rrr|rr|rr} 3&2&2&1&3&&\\ \cline{4-5} -3&2&&2&0&1&3 \\ \cline{1-3}\cline{6-7} &0&2&-1&3&1& \\ \cline{4-5} &-0&0&&1&& \\ \cline{1-3} &&2&&&& \end{array}$$

   b) Escribimos el primer residuo como cifra de las unidades, el segundo como cifra de las septenas, y así sucesivamente hasta terminar con el último cociente. En nuestro caso, el número 322 en base 4 corresponde al número 112 en base 7.

Describiremos otro procedimiento para cambiar de base, usado frecuentemente cuando se quiere pasar de una base cualquiera K a base 10, pero que también puede usarse para pasar de una base a otra cualquiera, cambiando el 10 por la otra base.

1. Se escribe el número en base K.
2. Se multiplica cada una de sus cifras (escritas en base 10) por el valor de la posición que ocupan (también escrito en base 10) y se expresa el resultado en base 10.
3. Se suman los resultados anteriores y el total es el número en base 10.

Ejemplo

Para pasar el número 1023 de base 5 a base 10, debemos escribir en base 10, el resultado de $1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \times 1$, esto es

$$125 + 0 + 10 + 3 = 138.$$

Y si queremos pasarlo a base 8 el resultado es

$$175_{\,8} + 0_{\,8} + 12_{\,8} + 3_{\,8} = 212_{\,8}$$

Este procedimiento para cambiar de base utiliza multiplicaciones y el anterior utiliza divisiones; si estas son operaciones inversas, *¿cómo explica que se utilicen para el mismo propósito?*

Cuando un número se escribe como la suma de los productos de cada una de sus cifras por la potencia de la base que indica su posición, se dice que el número está escrito en *forma polinómica.* Por ejemplo,

$$1101_{\,2} = 1 \times 10_{\,2}^{11} + 1 \times 10_{\,2}^{10} + 0 \times 10_{\,2} + 1 \times 1.$$

Otro procedimiento para cambiar de base un número, utilizando también la multiplicación, consiste en:

1. Multiplicar la primera cifra del número a cambiar de base por el número de la base en la que está expresado (escrito en la nueva base).

2. Sumar el producto anterior con la segunda cifra del número a cambiar de base.

3. Multiplicar la suma hallada en el numeral anterior, por el número de la base en la cual se encuentra escrito el número (escrito en la nueva base).

4. Sumar el nuevo producto obtenido, esto es el producto anterior, con la siguiente cifra del número a cambiar de base.

5. Multiplicar la suma conseguida con el número de la base en la cual se halla escrito el número.

Y así sucesivamente hasta considerar la penúltima cifra del número (de izquierda a derecha) a cambiar de base como sumando y haber multiplicado tal suma por el número de base en la que se encuentra escrito el número a cambiar de base. La última cifra del número, esto es, la de las unidades, solo se adiciona al último producto hallado.

Este procedimiento suena algo confuso, pero realmente no lo es, de hecho, es un método muy útil para hacer cambios de base mentalmente, veamos un ejemplo[54].

[54] Este método de cambio de base fue creado por el estudiante John Arley Ramírez Angarita, quien cursó primer semestre de Licenciatura en Matemáticas en la UPN, en 2013-I.

Ejemplo

Para pasar el número 5364 de base 8 a base 10, hacemos lo siguiente:

Primero multiplicamos 5×8, obteniendo 40; luego, sumamos este producto con la siguiente cifra del número, esto es $40+3 = 43$; ahora, multiplicamos esta suma con 8; así $43 \times 8 = 344$. Este producto lo sumamos con la siguiente cifra del número, es decir: $344 + 6 = 350$, lo cual multiplicamos por 8, obteniendo 2800 y como solo nos resta una cifra del número, la sumamos con el producto anterior, teniendo así que 5364 en base 8 es 2804 en base 10.

¿Por qué funciona este método? (*Sugerencia: estudie qué tanto difiere del procedimiento anterior*).

Otro algoritmo alternativo para cambio de base se presenta enseguida[55] a través de un ejemplo, le sugerimos que a la vez que va leyendo, realice el procedimiento descrito.

Ejemplos

1. Supongamos que deseamos escribir, en base 10, el número 3124 escrito en base 5; para ello, escribimos el número a cambiar de base de tal manera que cada cifra esté escrita en la nueva base, así:

$$3 \quad 1 \quad 2 \quad 4$$

   Dejamos un renglón libre debajo del número y en un tercer renglón escribimos, a la izquierda, el número de la base en la cual está escrito el número; de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 1 & 2 & 4 \\ & & & & \\ \mathbf{5} & & & & \end{array}$$

   Enseguida, escribimos la primera cifra del número (de izquierda a derecha); esto es:

[55] Este algoritmo fue creado por un matemático reconocido en la historia de las matemáticas. Se omite aquí el nombre por razones pedagógicas.

	3	1	2	4
5	3			

Ahora, multiplicamos este número (3) por la base en la cual está escrito el número, sea esta la base de salida (5), y escribimos tal producto, en la base de llegada, debajo de la segunda cifra (de izquierda a derecha) del número original; de esta manera:

	3	1	2	4
		15		
5	3			

Luego, sumamos el producto obtenido con la segunda cifra del número; así:

	3	1	2	4
		15		
5	3	16		

Tomamos esta suma y hallamos su producto, con el número de la base de salida, lo escribimos debajo de la cifra siguiente del número original y, de nuevo, sumamos ese producto con tal cifra; como observamos:

	3	1	2	4
		15	80	
5	3	16	82	

Realizamos el mismo procedimiento para la cifra faltante, obteniendo:

	3	1	2	4
		15	80	410
5	3	16	82	**414**

Esta última suma, 414, es el número buscado; es decir: $3124_5 = 414$.

2. Consideremos cambiar de base 4 a base 7, el número 123. Inicialmente escribimos el número original en un renglón y el número de la base en la cual se encuentra escrito, dos renglones después, así:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ \mathbf{4} & & & \end{array}$$

Ahora, escribimos la primera cifra del número original (de izquierda a derecha) debajo de esta, en el mismo renglón donde se halla el número de la base; esto es:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ \mathbf{4} & 1 & & \end{array}$$

Continuamos el proceso hallando el producto entre la primera cifra del número original y el número de la base, en este caso $4 \times 1 = 4$, resultado que escribimos debajo de la segunda cifra del número dado para sumarlo con esta; obteniendo:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & \\ \mathbf{4} & 1 & 6 & \end{array}$$

De manera similar, con la suma encontrada (6), hacemos el producto 6×4 (recordemos que estas operaciones se efectúan en la nueva base en la cual deseamos escribir el número), el cual, en base 7, es 33 y sumamos este resultado con la última cifra del número original consiguiendo entonces el número 123_4 en base 7 es 36_7.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 33 \\ \mathbf{4} & 1 & 6 & \mathbf{36} \end{array}$$

Ejercicios

1. *Elija un número de seis cifras para cambiar de base 3 a base 10 siguiendo el último procedimiento; posteriormente, tome ese número escrito en base 10 y escríbalo en base 3 siguiendo el mismo algoritmo. Proponga otro ejemplo de base 5 a base 7 y otro de base 8 a base 4, y plantee una justificación acerca del porqué funciona este algoritmo.*

2. *Plantee diferencias y semejanzas entre los métodos enunciados para cambiar de base.*

3. *¿Hay algoritmos más recomendables para cambiar de una base a otra? Explique su respuesta.*

4. *Cree su propio método para cambiar de base y justifíquelo.*

En las representaciones posicionales, a diferencia de las demás, el cero, que es tan útil en la escritura de un número en una base cualquiera, también aporta dificultades. La primera de ellas es la imposibilidad de dividir por él, ya que si lo hacemos introducimos contradicciones a nuestro sistema como se muestra a continuación.

2.6. Un problema lógico: la división por 0

Si queremos repartir 0 cosas en cualquier número de grupos, obviamente en cada grupo van a quedar 0 cosas, esto significa que 0 dividido por cualquier número es 0.

Pero, ¿qué sucede con el problema inverso?; si queremos repartir 2 cosas en 0 grupos, ¿cuántas cosas quedan en cada grupo?

Incluso si le damos la vuelta al problema y buscamos un número (cociente) que multiplicado por otro (divisor) nos dé como resultado el dividendo, nos vemos en dificultades, pues no existe ningún número que multiplicado por 0 nos dé 2.

Supongamos, por un momento, que no nos damos por vencidos e intentamos encontrar un número x que resuelva el problema (este es otro truco muy usado por los matemáticos, sobre todo en álgebra); es decir, un x tal que:

$$\frac{2}{0} = x$$

entonces se tendría que

$$x \cdot 0 = 2$$

pero esto no puede ser porque

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot (0+0) \\ &= x \cdot 0 + x \cdot 0 \end{aligned}$$

que puede escribirse como:

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0$$

de donde concluimos que

$$x \cdot 0 = 0$$

y se tendría que

$$\text{¡¡ } 0 = 2 \text{ !!}$$

lo que nos destrozaría el corazón.

Una forma más sutil de presentar las dificultades que implica dividir por cero, aparece en el siguiente falso razonamiento: supongamos que x e y son dos números y que:

$$x = y$$

entonces, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por x, obtenemos

$$x^2 = xy$$

Y si sustraemos en ambos lados y^2 tenemos

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

escribiendo ambos miembros de la igualdad como productos conseguimos:

$$(x+y)(x-y) = y(x-y)$$

y dividiendo en ambos miembros de la ecuación por $(x-y)$ llegamos a que

$$x + y = y$$

y como $x = y$ entonces

$$y + y = y$$

de donde

$$2y = y$$

y si suponemos que y es distinto de cero, podemos dividir por y, obteniendo que

$$¡¡\ 2 = 1\ !!$$

lo que es ridículo.

En conclusión, la división por 0, introduce en matemáticas contradicciones que romperían su coherencia lógica interna; por tanto, debemos cuidarnos de efectuar tales divisiones. Por todas estas dificultades, no debemos infringir el

Primer mandamiento de la aritmética:
¡Nunca dividirás por 0!

Capítulo

3

Operaciones superiores de la aritmética

3.1. Potenciación

La *potenciación*[1] es una operación que consiste en repetir un número[2] llamado *base*[3] tantas veces como lo indique otro número llamado *exponente* y multiplicar para obtener un resultado que llamamos *potencia*.

---

[1]Los primeros que aplicaron la elevación a potencia fueron los sacerdotes mesopotámicos, quienes empleaban una tabla de cuadrados para multiplicar dos números, restando el cuadrado de su promedio, del cuadrado de su semidiferencia.

Los griegos anteriores a Diofanto (griego del siglo III d. C.) estudiaron principalmente las potencias de 2 y de 3, por sus relaciones con la geometría, áreas y volúmenes respectivamente, pero Diofanto a pesar de enunciar solo el manejo de los números hasta la sexta potencia, utiliza en su obra *Aritmética* potencias superiores, incluyendo la octava y novena potencia (Medina y Albarracín, 2012, p. 72); esto demuestra, según Sessa (2005) una flexibilización del "sujetamiento geométrico"(p. 50). Este matemático destacado, nominado como el padre del álgebra ideó la notación de las potencias escribiendo Δ^{Υ}, para indicar un cuadrado; K^{Υ}, para un cubo; $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ para cuadrado–cuadrado, como lo llamaba él, es decir x^4; ΔK^{Υ} (cuadrado–cubo) para x^5 y $K^{\Upsilon}K$ para x^6 (Diofanto, citado por Medina y Albarracín, 2012). Hacia 1636, Hume escribía Aiii para a^3; un año después, René Descartes utilizaba notación *aaa* para a^3 y fue Stampioen en 1639 quien propuso la notación a^2, a^3, ... utilizada por el mismo Descartes en 1649 en su edición de la Geometía (Cajori, 1928).

[2]En este contexto, la palabra *número* hace referencia a los que hemos construido en el proceso de contar, sin importar su representación, incluyendo el cero. Estos los hemos llamado *números naturales.*

[3]La base de un sistema numérico y la base de la operación potenciación, naturalmente no son lo mismo y casi siempre el contexto en el que se usa aclara su sentido.

Por ejemplo, en base 7

$$5^3 = 236$$

la base es 5, el exponente 3 y la potencia 236. Esta expresión significa que

$$5 \times 5 \times 5 = 236.$$

El exponente lo escribimos, según la costumbre, en la parte superior derecha de la base.

Nuevamente, como en la multiplicación, las expresiones a^0, a^1 no tienen sentido, pero para evitar mencionar siempre estas excepciones, convenimos en que para todo número natural a

$$a^0 = 1, \quad \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad a^1 = a.$$

Esto, para preservar las leyes que gobiernan la potenciación, que enunciaremos enseguida.

3.1.1. Propiedades de la potenciación

Es fácil verificar que se tienen las siguientes propiedades elementales:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (\text{si } a \neq 0 \text{ y } x \geq y)$[4]
3. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

Las primera igualdad es consecuencia directa de la definición, puesto que si repetimos x veces a y multiplicamos, este resultado lo multiplicamos por y veces a, naturalmente la a aparece repetida $x+y$ veces en la multiplicación.

En la división del producto de x veces a entre el producto de y veces a, siempre que a no sea 0 y que x sea mayor o igual que y, obtenemos a^{x-y}, puesto que por el numeral 1,

$$a^y a^{x-y} = a^{y+(x-y)} = a^x.$$

La tercera igualdad se deduce fácilmente de la primera.

Por otra parte, si $x = y$ en el numeral 2, entonces

$$1 = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = a^0; \text{ siempre y cuando } a \neq 0.$$

Observe el comportamiento del 0 y del 1 en estas propiedades[5].

[4] La segunda condición es necesaria para que la sustracción tenga sentido.

[5] Notemos que la expresión 0^0 no se ha definido, pues la propiedad 2 no es válida para $a = 0$.

3.1.1.1. La potenciación no es conmutativa

Existe una analogía evidente entre el proceso de construcción de la multiplicación a partir de la adición y de la potenciación a partir de la multiplicación. La adición es conmutativa y la multiplicación también. *¿No le parece extraño que la potenciación no sea conmutativa, proviniendo de una operación conmutativa*?

Ejercicio

Construya ejemplos de potenciación y trate de determinar por qué ella no es conmutativa.

3.1.1.2. La potenciación no es asociativa

La potenciación tampoco es asociativa como lo muestra el siguiente *contraejemplo*, en base 8:

$$\left(3^2\right)^3 \neq 3^{(2^3)}.$$

En el primer caso tenemos 11 como base y 3 como exponente lo que nos da 1331; la segunda expresión tiene 3 como base y 10 como exponente, lo que da por resultado 14641.

Nótese que solo un ejemplo donde la propiedad no es válida, argumenta el rechazo de una propiedad. En matemáticas, esto suele denominarse *contraejemplo.*

3.1.1.3. Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación

Ya hemos dicho que la potenciación tiene parecido en su construcción con la multiplicación, este comportamiento puede llevarse aún más lejos. La multiplicación es distributiva con respecto a la adición, en la que tuvo su origen, y la potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación; los argumentos son parecidos a los que esbozamos en el caso de la multiplicación, por lo que dejaremos los detalles al lector interesado.

Lo anterior significa que si a, b y n son números naturales, entonces se tiene que:

$$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$$

es decir que cuando queremos hacer la potencia n de un producto, basta multiplicar las potencias n de los factores.

Ejercicio

Haciendo una analogía con la multiplicación, ¿es posible un razonamiento geométrico que explique la ley distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación? Justifique su respuesta.

3.1.1.4. Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división

Como la multiplicación es distributiva también con respecto a la sustracción (cuando esta se pueda hacer), por analogía, podemos esperar que la potenciación sea distributiva con respecto a la división, de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

como en efecto se cumple, siempre que la división sea posible; es decir, que el resultado sea un número natural y que el divisor no sea 0.

Ejercicios

1. *Escriba un ejemplo donde se muestre que no se cumple la propiedad distributiva de la potenciación respecto a la suma, es decir:* **no es cierto que**
$$(a+b)^n = a^n + b^n.$$

2. La siguiente lista muestra ciertos números escritos en base 7; *coloque en la casilla $\square$ el número en base 7 que corresponda para lograr en cada caso una igualdad:*
$$\begin{aligned}3 \times 5 &= \square^2 - 1\\ 4 \times 6 &= \square^2 - 1\\ 5 \times 10 &= \square^2 - 1\\ 12 \times 14 &= \square^2 - 1\\ 25 \times 30 &= \square^2 - 1\\ 43 \times 45 &= \square^2 - 1\end{aligned}$$

   Escriba una lista similar en base 4. ¿Puede generalizarse esto a cualquier base?

Repita el ejercicio con las siguientes listas:

En base 7

$$\begin{aligned}
5 \times 1 &= \square^2 - 4\\
6 \times 2 &= \square^2 - 4\\
10 \times 3 &= \square^2 - 4\\
11 \times 4 &= \square^2 - 4\\
12 \times 5 &= \square^2 - 4
\end{aligned}$$

En base 10,

$$\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= \ \ 9 = 3^2\\
3 \times 8 + 1 &= 25 = 5^2\\
6 \times 8 + 1 &= 49 = 7^2\\
10 \times 8 + 1 &= 81 = 9^2
\end{aligned}$$

Encuentre un modelo general[6].

3. Algunas tareas en matemáticas pueden parecer muy dispendiosas; sin embargo, su solución puede obtenerse de manera relativamente sencilla si observamos algunas regularidades. Por ejemplo: *¿cuál es la cifra de las unidades de* 3^{1999} *si el número está escrito en base 10?, ¿y si está en base 9?, ¿ en otras bases?*

   Si observa la siguiente secuencia en base 10, es posible encontrar una pista:

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3\\
3^2 &= 9\\
3^3 &= 27\\
3^4 &= 81\\
3^5 &= 243\\
3^6 &= 729\\
3^7 &= 2187\\
3^8 &= 6561
\end{aligned}$$

[6]Los resultados obtenidos en estos ejercicios son *identidades algebraicas*, ellas son válidas en cualquier base y para cualquier número natural.

4. *Efectúe los cálculos y observe los resultados. Invente otros casos similares. Formule alguna conjetura relacionada con sus obervaciones.*

   a) $12^2 =$ $\quad 13^2 =$ $\quad 21^2 =$ $\quad 31^2 =$

   b) $102^2 =$ $\quad 103^2 =$ $\quad 201^2 =$ $\quad 301^2 =$

5. *Encuentre las potencias de* 405^2, 605^2, 809^2 *y establezca una regla general de acuerdo a los resultados encontrados*[7]. *Arguméntela algebraicamente.*

6. *En*[8] *base 10 ¿cuál es la última cifra de* 2^{259}*? Estudie el mismo problema en otras bases y formule una conjetura al respecto.*

7. *Observe la siguiente secuencia:*

$$2^3 - 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$3^3 - 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$4^3 - 4 = 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$5^3 - 5 = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

   a) *Escriba las tres líneas que siguen.*

   b) *De acuerdo con la secuencia anterior, ¿cuánto es* $125^3 - 125$*? Plantee una conjetura al respecto de lo encontrado.*

8. *Elija los números que desee (si quiere, use una calculadora) para completar la siguiente tabla:*

Un número termina en:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Su cuadrado termina en:										
Su cubo termina en:										
Su cuarta potencia termina en:										
Su quinta potencia termina en:										
Su sexta potencia termina en:										

[7] Este ejercicio surgió en el marco del Club de Matemáticas que funcionaba en la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2009, gracias a algunos hallazgos de la entonces estudiante del club Nelly Johana Maldonado.

[8] Los ejercicios 6 al 8 fueron tomados de la página web Sector matemática, Educación Media, Potencias, Regularidades potencias: http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm el 12 de diciembre de 2009 y levemente modificados para proponerlos aquí.

Observando los resultados diligenciados en la tabla, responda:

a) *¿Es posible que el cuadrado de un número tenga a* 3 *como cifra de las unidades en base 10?. ¿Por qué? ¿Y en otras bases?*

b) *¿En qué número termina* 1353^4*?*

c) *¿El número* 4252 *puede ser el cuadrado de un número natural? ¿Por qué?*

d) 205379 *es el cubo de un número n. ¿Cuál debe ser la cifra de las unidades de n?*

e) *Un número natural y su cubo terminan en la misma cifra. ¿Cuáles son los posibles valores de la última cifra?*

f) *¿Qué observa respecto a la quinta potencia de un número cualquiera?*

g) *Plantee una pregunta que pueda resolver a partir de la tabla diligenciada y respóndala.*

h) *Estudie este ejercicio en una base diferente a 10.*

9. *Encuentre el número de dígitos de* $4^{12} \times 5^{20}$ *escrito en base 10.*

10. *Encuentre un número menor que* 9*, tal que aumentado en* 1 *da el doble de un cuadrado y cuyo cuadrado aumentado en* 1 *da otra vez el doble de un cuadrado. ¿El resultado depende de la base?*

3.2. Radicación

En la potenciación participan como ya dijimos tres números: la base, el exponente y la potencia. *Si existen* (esta condición es muy importante) tres números a, b y c, que satisfacen la relación:

$$a^b = c$$

y conocemos dos de ellos, podemos obtener el otro.

La operación para determinar c conociendo a y b la hemos llamado *potenciación*. El proceso[9] que permite averiguar a conociendo b y c se llama *radicación* y la escribimos con un nuevo símbolo llamado *signo radical*, el

[9]Al igual que la sustracción y la división, la radicación no es una operación entre números naturales, pues no todas las raíces tienen solución; aquí solo tratamos con las que la tienen.

número c es llamado *cantidad subradical,* b es el *índice* o *grado de la raíz* y a es la *raíz* b de c; en símbolos[10]:

$$\sqrt[b]{c} = a$$

Insistimos en que el significado de la expresión anterior es exactamente el mismo de la expresión

$$a^b = c.$$

Por ejemplo, en base 10 se tiene que $\sqrt[3]{64} = 4$ significa que $4^3 = 64$.

El cero de nuevo ocasiona dificultades:

i. Si $b = 0$ y $c = 1$ *no existe un único* número a como resultado de la operación, puesto que, $a^0 = 1$ *para todo* $a \neq 0$.

ii. Si $b = 0$ y $c \neq 1$ *no existe un* número a tal que $a^0 = c$. Esto significa que para el caso $b = 0$ la operación no está definida, o sea que $\sqrt[0]{c}$ *no existe* para ningún número natural $c \neq 1$ y para $c = 1$ no es único.

Ejercicio

Para cualquier número natural c, ¿qué significa la expresión $\sqrt[1]{c}$*?*

3.2.1. Propiedades de la radicación

Como la radicación es solo otra forma de escribir la potenciación, sus propiedades pueden deducirse de las de aquella; por ejemplo, se tiene la:

3.2.1.1. Propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación

La raíz n de un producto es el producto de las raíces n de cada uno de los factores.

$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Esta propiedad es la correspondiente a

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

[10]Cuando $b = 2$, es costumbre no escribirlo.

y se deduce de ella; veamos:

Si llamamos $w = \sqrt[n]{a}$ y $z = \sqrt[n]{b}$, tenemos que:

$$w^n = a \quad \text{y} \quad z^n = b,$$

por lo tanto

$$a \cdot b = w^n \cdot z^n = (w \cdot z)^n$$

lo que significa que:

$$w \cdot z = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

o sea

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

siempre y cuando las raíces existan; es decir, sean números naturales.

3.2.1.2. Propiedad distributiva de la radicación con respecto a la división

Análogamente sucede con la división

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Resaltamos de nuevo que estas propiedades se cumplen solamente cuando las raíces y los cocientes estén definidos, en particular que las raíces y los cocientes sean números naturales y los divisores sean distintos de 0.

Es deseable que el lector se acostumbre a las distintas notaciones y ejercite el tránsito de una a la otra, esto puede ayudarle mucho en su comprensión. Para ello le sugerimos que verifique la siguiente propiedad, que es análoga a la propiedad 3 de la potenciación:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Ejercicio

¿Existen propiedades para la radicación análogas a las propiedades 1 y 2 de la potenciación? Justifique.

3.2.2. Cálculo de raíces

Hemos presentado algunas propiedades de la radicación, pero no tenemos, aún, método alguno para calcular raíces; por ejemplo, si quisiéramos evaluar[11] cuánto es

$$\sqrt[5]{31446_{(7)}}$$

estamos ante un problema que posiblemente no tenemos idea de cómo resolver.

Si traducimos el problema en términos de potenciación, lo que queremos es encontrar un número x tal que

$$x^5 = 31446_{(7)}.$$

En esta forma, una primera instancia de solución es ensayar con un número cualquiera, lo elevamos a la quinta potencia, si nos da un resultado más grande que 31446_7, ensayamos de nuevo con un número menor y si nos da menor ensayamos con uno más grande. Este proceso puede ser demorado pero innegablemente funciona.

3.2.2.1. Ecuaciones de la forma $x^2 = b$

Ilustremos el procedimiento anterior mediante un problema más simple, resolvamos por ejemplo la ecuación[12]:

$$2124_{(5)} = x^2.$$

Para encontrar x, observemos que el cuadrado de x termina en 4, lo que significa que la última cifra de x debe ser o 2 o 3 y x debe ser de dos cifras, puesto que su cuadrado es de 4 cifras.

Con estas pistas podemos ensayar, por ejemplo, con $x = 22_{(5)}$, en cuyo caso obtenemos $\left(22_{(5)}\right)^2 = 2034_{(5)}$; como este resultado es inferior al buscado, ensayamos con uno mayor, por ejemplo $x = 32_{(5)}$ y obtenemos el resultado correcto.

Este proceso nos muestra, entre otras cosas, que si un número es el cuadrado de otro es porque el número se puede escribir como un producto;

[11]Hemos dicho que no toda raíz de números naturales es un número natural, por eso es necesario estar seguros de que la solución existe antes de plantear el ejercicio. Realmente lo que hacemos es calcular una potenciación y luego la reescribimos como radicación ocultando la base.

[12]Cuando el máximo exponente de la incógnita es 2, las ecuaciones se llaman *ecuaciones de segundo grado* o *ecuaciones cuadráticas*.

es decir, $2124_{(5)} = 32_{(5)} \times 32_{(5)}$, lo que nos induce a pensar que el proceso de calcular raíces está vinculado con el problema de encontrar factores.

> ∗
> *Algunos problemas en matemáticas están relacionados con otros que aparentemente no tienen que ver con el primero, pero si la relación existe, puede ser más fácil resolver uno de ellos y usarlo como ayuda para resolver el otro.*
> ∗

Como la tarea que tenemos es escribir un número como el producto de otros, ocupémonos entonces de este problema; este proceso se conoce como *factorización*.

3.2.2.1.1. Los números primos

Cualquier número lo podemos escribir, algunos de varias formas, como un producto de otros números, por ejemplo:

$$8 = 4 \times 2 = 8 \times 1 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$35 = 7 \times 5 = 35 \times 1$$

Pero existen ciertos números que solo se pueden escribir como el producto de dos números distintos, él mismo y 1, a estos los llamamos *números primos*, por ejemplo:

$$2 = 2 \times 1$$
$$3 = 3 \times 1$$
$$5 = 5 \times 1$$
$$7 = 7 \times 1$$

Esto significa que otros números están *compuestos* por factores diferentes a 1 y a sí mismos; debemos entonces encontrar una manera de de saber cuáles son dichos factores. Esto es averiguar cuáles números son primos y cuáles no.

Una manera artesanal de hallar los números primos consiste en escribir una tabla desde 1 hasta el número que se desee, luego tachar los números de 2 en 2 a partir de 2 (sin incluirlo[13]); con esto eliminamos los que están

[13]No empezamos a contar de uno en uno a partir de uno por razones obvias, ni incluiremos al uno entre los números primos.

compuestos por el 2; de 3 en 3 a partir de 3 (sin incluirlo), de 5 en 5, etc. Esta tabla se conoce como la *criba de Eratóstenes*[14]. Los números que no han sido tachados (salvo el 1) son los números primos; en la tabla 3.1 hacemos el proceso, en base 14, hasta 100.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~A~~	B	~~C~~	D	~~10~~
~~11~~	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	~~17~~	~~18~~	19	~~1A~~	~~1B~~	~~1C~~	~~1D~~	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~2A~~	~~2B~~	~~2C~~	2D	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~3A~~	3B	~~3C~~	~~3D~~	~~40~~
~~41~~	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	~~4A~~	4B	~~4C~~	~~4D~~	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~5A~~	~~5B~~	~~5C~~	5D	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~6A~~	~~6B~~	~~6C~~	6D	~~70~~
~~71~~	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~7A~~	~~7B~~	~~7C~~	~~7D~~	~~80~~
81	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~8A~~	~~8B~~	~~8C~~	~~8D~~	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~9A~~	9B	~~9C~~	9D	~~A0~~
~~A1~~	~~A2~~	A3	~~A4~~	~~A5~~	~~A6~~	~~A7~~	~~A8~~	A9	~~AA~~	AB	~~AC~~	AD	~~B0~~
~~B1~~	~~B2~~	B3	~~B4~~	~~B5~~	~~B6~~	~~B7~~	~~B8~~	B9	~~BA~~	~~BB~~	~~BC~~	BD	~~C0~~
~~C1~~	~~C2~~	C3	~~C4~~	C5	~~C6~~	~~C7~~	~~C8~~	~~C9~~	~~CA~~	CB	~~CC~~	CD	~~D0~~
~~D1~~	~~D2~~	~~D3~~	~~D4~~	~~D5~~	~~D6~~	~~D7~~	~~D8~~	D9	~~DA~~	DB	~~DC~~	~~DD~~	~~100~~

Tabla 3.1

Este método que aprendimos en la escuela es útil para números pequeños; pero si se trata de averiguar cuándo es primo un número n relativamente grande, no es procedente hacer la criba y tenemos que recurrir a otras herramientas.

Podríamos ensayar a dividir el número por 2, para ver si está compuesto por 2, luego dividirlo por 3, y así sucesivamente hasta $(n-1)$. Pero la tarea sigue siendo molesta, pues debemos hacer un gran número de divisiones en el caso de números grandes.

Una salida fácil es contratar un empleado, con suficientes habilidades para que no cometa errores y que además sea suficientemente veloz. En

[14]Eratóstenes fue un matemático, geógrafo y astrónomo griego de aprox. el año 276 a.C. Un dato curioso de este reconocido griego fue que calculó la circunferencia de la Tierra, hace más de 2000 años, con una exactitud increíble, tan solo con una diferencia de 6,192 km. Respecto a la medida tomada hoy por satélites avanzados.

la actualidad disponemos de máquinas que hacen la tarea por nosotros, por ejemplo, las calculadoras manuales o, si se quiere un poco más de efectividad, un computador.

Sin embargo, ellas requieren que les sean dados cada uno de los pasos a seguir; esto es, debemos elaborar un programa que le permita a la máquina determinar si un número es primo o no.

El programa PRIMOS1 cuyo código en lenguaje Pascal (versión 7) aparece en el apéndice 1, permite saber si un número dado es primo o no; el programa PRIMOS2 da una lista de los números primos menores o iguales a un número dado. Este también aparece en el apéndice 1.

Ejercicios

1. *¿Cuál es el procedimiento que utilizan los programas* PRIMOS1 *y* PRIMOS2 *para decidir si un número es primo o no?*
2. "¿Cuántas ovejas tienes a tu cuidado?", preguntaron a un pastor; él contestó:

   "No lo sé fijamente porque apenas puedo contar hasta diez. Pero si agrupo mis ovejas por pares, me sobra una; si las agrupo de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, siempre me sobra una; en cambio, si las agrupo de siete en siete, no me sobra ninguna. Esto es lo único que sé"(Caro, 1936, p. 247).*¿Cuántas ovejas tiene el pastor?*

3.2.2.1.2. Factores primos y divisibilidad

Si un número (distinto de 1 y de 0) no es primo, podemos escribirlo de una única forma, salvo el orden de los factores, como un producto de números primos; este enunciado se conoce como *el teorema fundamental de la aritmética*[15].

Nos ocuparemos ahora de encontrar alguna forma para *descomponer un número en sus factores primos*; por ejemplo podemos comenzar dividiendo el número dado por números primos 2, 3, 5, etc., hasta conseguir residuo 0; cuando esto ocurra, tenemos un factor primo.

Si el número resulta ser múltiplo de 2 decimos que es un *número par*; los números naturales que no son pares se llaman *números impares*[16].

[15] Burton (1969, p. 29). Un estudio detallado de la historicidad de este teorema puede encontrarse en el trabajo de grado de Triana (2012).

[16] Los egipcios y los griegos fueron los primeros en reconocer esta clasificación.

Muchas veces no es necesario hacer una división para saber si un número es múltiplo de otro o no. Por ejemplo, sabemos que el número 0 es par y se escribe de la misma forma en todas las bases.

En base 10 un número es par, si su cifra de las unidades lo es, esto es debido a que las cifras de las decenas, centenas, etc., están multiplicadas por potencias de diez y estas son números pares, de modo que la única cifra que determina si un número es par o no, es la cifra de las unidades.

Ejercicios

1. *¿Es válido el anterior razonamiento en otras bases pares? Observe la tabla 3.2 y enuncie un criterio de divisibilidad por 2 en base par.*

2. En la tabla 3.2 observe los números pares en base 3, 5, 7, 9. *Enuncie alguna regularidad*

Seguramente, en el ejercicio anterior usted encontró un criterio de divisibilidad por 2 en cualquier base impar. Intentemos una explicación para lo que sucede en base 3.

Un número cualquiera se escribe como suma de potencias de 3, y ninguna de estas potencias es un número par[17], pero si tenemos una lista de números impares y deseamos obtener de ella una lista de números pares, no es muy difícil encontrar una solución; podemos, por ejemplo[18], a cada uno restarle 1 (o sumarle 1, o cualquier número impar), pensando inicialmente en base 10, que es donde sabemos cuando un número es par; así, observamos que:

$$3^1 - 1 = 2$$
$$3^2 - 1 = 8$$
$$3^3 - 1 = 26$$
$$3^4 - 1 = 80$$

Con esto podemos escribir un número cualquiera en base 3, en forma polinómica donde cada una de las potencias es par, si modificamos un poco su escritura.

[17] Verifique con varias potencias de 3 y vea que ninguno de los números hallados es par.

[18] Las reglas que enunciamos aquí no son teoremas matemáticos hasta que no se haga una demostración de ellos, por ahora son intuiciones cuya prueba requiere de una herramienta que desarrollaremos un poco más adelante llamada el *principio de inducción matemática*.

Número de la base									
16	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
2	2	2	2	2	2	2	2	2	10
4	4	4	4	4	4	4	10	11	100
6	6	6	6	6	10	11	12	20	110
8	8	8	10	11	12	13	20	22	1000
A	10	11	12	13	14	20	22	101	1010
C	12	13	14	15	20	22	30	110	1100
E	14	15	16	20	22	24	32	112	1110
10	16	17	20	22	24	31	100	121	10000
12	18	20	22	24	30	33	102	200	10010
14	20	22	24	26	32	40	110	202	10100
16	22	24	26	31	34	42	112	211	10110
18	24	26	30	33	40	44	120	220	11000
1A	26	28	32	35	42	101	122	222	11010
1C	28	31	34	40	44	103	130	1001	11100
1E	30	33	36	42	50	110	132	1010	11110
20	32	35	40	44	52	112	200	1012	100000

Tabla 3.2

Por ejemplo, el número que en base 3 se representa como 221121, en una base mayor que 3 representa:

$$2 \times 3^5 + 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 \times 1$$

pero se puede escribir como:

$$2 \times (3^5 - 1) + 2 \times (3^4 - 1) + 1 \times (3^3 - 1) + 1 \times (3^2 - 1)$$
$$+2 \times (3 - 1) + 1 + (2 + 2 + 1 + 1 + 2)$$

si adicionamos lo que quitamos en cada una de las potencias, que es lo que aparece en el último paréntesis.

Tenemos ahora una expresión donde cada uno de los términos es un número par más una suma adicional, que es la suma de las cifras del número. El número será par si esta última suma es par. Luego, 221121_3 no es par.

En resumen, para que un número sea par en base 3, es necesario que la suma de sus cifras sea par[19]. No se puede negar que el truco es ingenioso.

Ejercicios

1. *Enuncie criterios de divisibilidad por 3 en diferentes bases.* [*Sugerencia: clasifique las bases en tres conjuntos: uno, el conformado por las bases 3, 6, 9, ..., esto es, las que son múltiplos de 3; otro, el compuesto por las bases 4, 7, 10, 13, etc., y un último conjunto, el conformado por las bases restantes; es decir, las bases 5, 8, 11, etc.*][20]

2. *Enuncie criterios de divisibilidad por 5 en diferentes bases*[21].

3. *Consulte un criterio de divisibilidad por cualquier número, en base 10; plantee uno análogo en cualquier otra base y justifíquelo.*

4. *¿Cuántos números naturales menores que 200 no son divisibles por 2, por 3, ni por 5?*

5. *¿Cuál es el menor número que al dividirlo por 2, 3 y 4 deja residuo 1 y es divisible por 51?*

6. *¿Cuánto valen x y b en*

$$\big(3(230+x)\big)^2 = 492b04\ ?$$

3.2.2.1.3. Descomposición de un número en factores primos

Con alguno de los procedimientos descritos, podemos encontrar todos y cada uno de los factores primos de un número dado y escribirlo como un producto de números primos.

[19] El resultado es válido en cualquier base impar, su demostración se basa en la afirmación "$(2n+1)^k - 1$ es par para todo número natural n y k", que se demuestra por inducción.

[20] Aunque en algunos cursos, estudiantes han decidido dividir las bases en solo dos conjuntos, las pares e impares y formular criterios de divisibilidad para los números múltiplos de tres a partir de esta clasificación. ¡Usted puede hacer sus propias propuestas!

[21] Los indios conocían criterios de divisibilidad por 3, 7 y 9, naturalmente en base 10.

Ejemplos

1. En base 10 tenemos que:

$$\begin{aligned}
48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3 \\
8 &= 2^3 \\
27 &= 3^3 \\
15 &= 3 \times 5 \\
24 &= 2^3 \times 3 \\
36 &= 2^2 \times 3^2 \\
120 &= 2^3 \times 3 \times 5
\end{aligned}$$

2. En base 7, el número 31446 lo podemos escribir como producto de números primos, efectuando las divisiones sucesivas por 2 (ya que la suma de sus cifras es un número par), luego por 3, de la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
31446 & 2 \\
14223 & 2 \\
5445 & 2 \\
2556 & 2 \\
1263 & 2 \\
465 & 3 \\
144 & 3 \\
36 & 3 \\
12 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

de manera que

$$31446 = 2^5 \times 3^5.$$

Si utilizamos la propiedad distributiva de la potenciación respecto al producto obtenemos:

$$31446 = \big(2 \times 3\big)^5$$

y hemos resuelto, el problema de hallar la raíz 5 de 31446 en base 7.

3. Calculemos

$$\sqrt{1020100_{(3)}}$$

El problema es equivalente a hallar x tal que:

$$x^2 = 1020100_{(3)}$$

Descomponemos $1020100_{(3)}$ en factores primos y obtenemos:

$$\begin{array}{r|r} 1020100 & 2 \\ 121200 & 2 \\ 22100 & 10 \\ 2210 & 10 \\ 221 & 12 \\ 12 & 12 \\ 1 & \end{array}$$

De esta manera, $1020100_{(3)} = 2^2 \times 10^2 \times 12^2$ y, por tanto, tenemos que:

$$x^2 = 2^2 \times 10^2 \times 12^2$$

y así:

$$x = \sqrt{1020100_{(3)}} = (2 \times 10 \times 12)_{(3)} = 1010_{(3)}$$

Ejercicios

1. *Propóngase ejercicios de la forma*

$$\sqrt[12]{1012_{(3)}}, \quad \sqrt[6]{31446_{(7)}}, \quad \sqrt[3]{6457_{(8)}}, \quad etc.$$

hasta que adquiera habilidad para calcular raíces en cualquier base.

2. *Resuelva las siguientes ecuaciones en la base indicada (también se encuentran escritas en la misma base):*

   a) Base 8: $x^2 + 342 = 2146$
   b) Base 6: $3x^3 - 125 = 2431$
   c) Base 5: $3^{x+1} = 311$
   d) Base 9: $2^x + 2^{x+1} = 116$
   e) Base 4: $13^x + 13^{x-1} = 320$
   f) Base 9: $17^{2x+1} = 4^{2x+6}$

3.2.2.2. Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = c$

Abordemos ahora un problema que requiere de mayor elaboración, consiste en resolver ecuaciones de la forma[22]:

$$ax^2 + bx = c.$$

Este problema fue tratado por los babilonios[23] y por los árabes[24] (Al-Khwārizmī y Thābit Ibn Qurra) y ambos le dieron ingeniosas soluciones, por cierto muy parecidas. Al parecer, los árabes se fundamentaron en la obra *Elementos* de Euclides y a partir de una interpretación algebraicas de las proposiciones geométricas del griego, lograron hacer propuestas para resolver ecuaciones. Describiremos el método de Thābit Ibn Qurra –que resulta ser equivalente al babilónico– en lenguaje moderno (*pero le sugerimos que antes de seguir intente usted algún mecanismo de solución*) utilizando el siguiente ejemplo prototipo:

Encontrar un número x tal que $x^2 + 4x = 140$.

a. Si interpretamos x como el lado de un cuadrado, x^2 será su área y $4x$ puede interpretarse como el área de un rectángulo de lados 4 y x respectivamente; es decir, que la cantidad $x^2 + 4x$ es el área de la figura 3.1.

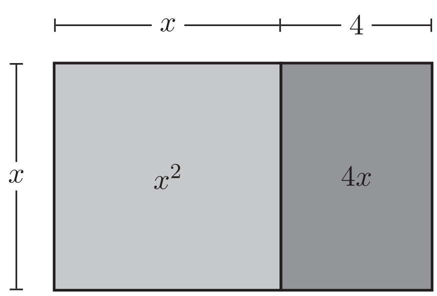


Figura 3.1

[22]El valor de a en todas estas ecuaciones debe ser distinto de cero, de lo contrario, la ecuación no sería de segundo grado. En adelante, aunque no hagamos la salvedad, se considerará $a \neq 0$.

[23]Según Sessa (2005), los resultados babilonios para ecuaciones de segundo grado iban acompañados de gráficos que no se hallan en las tablillas babilónicas porque muy seguramente se hacían solo para explicar. Es de aclarar que los babilonios no resolvían estas ecuaciones de manera general sino a través de ejemplos.

[24]En Acevedo y Falk (1997) se encuentra un desarrollo más completo de los aportes árabes y en tres de las siete entregas de Puig (2011) en la revista *Suma*, respecto a la vida de Al-Khwārizmī, un abordaje más detallado del aporte de este árabe en la solución de ecuaciones cuadráticas.

b. La chispa de ingenio[25] está en que este dibujo puede cambiarse por otro de la misma área de la siguiente forma:

Dividamos el rectángulo de área $4x$ en dos rectángulos de área $2x$ y coloquemos uno de ellos a la derecha del de área x^2 y el otro debajo para formar la figura 3.2.

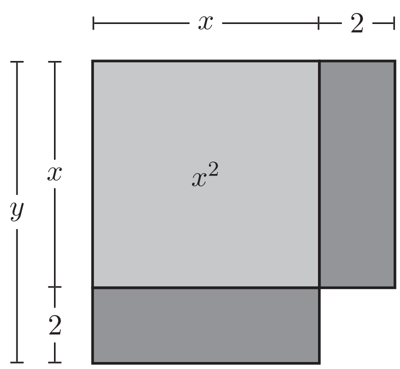


Figura 3.2

c. Esta figura no es un cuadrado, pero podemos completarlo agregando en la esquina inferior derecha, un cuadrado, cuya área conocemos.

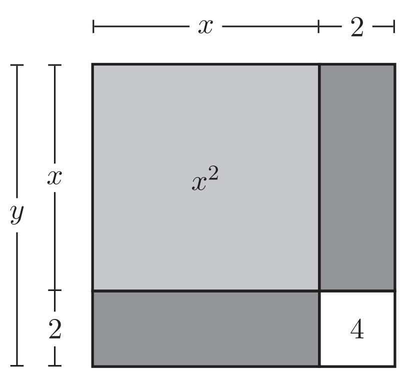


Figura 3.3

d. De esta manera, el área de la región sombreada equivale a 140 (pues corresponde a $x^2 + 4x$) unidades cuadradas y el área del cuadrado en

[25]No se preocupe si no se le ocurrió antes esta idea; muchos sabios de la humanidad tardaron años en encontrarla. (¡Y parece tan simple!)

blanco es 4 unidades cuadradas; es así, como el área total corresponde a $140 + 4 = 144$, luego el lado del cuadrado grande, llamémoslo y, es 12, entonces $x = 10$ unidades, y hemos solucionado la ecuación inicial.

Ejercicios

1. *Otro método*[26] *para resolver la ecuación anterior,* $x^2 + 4x = 140$*, se expone a través de la figura 3.4.*

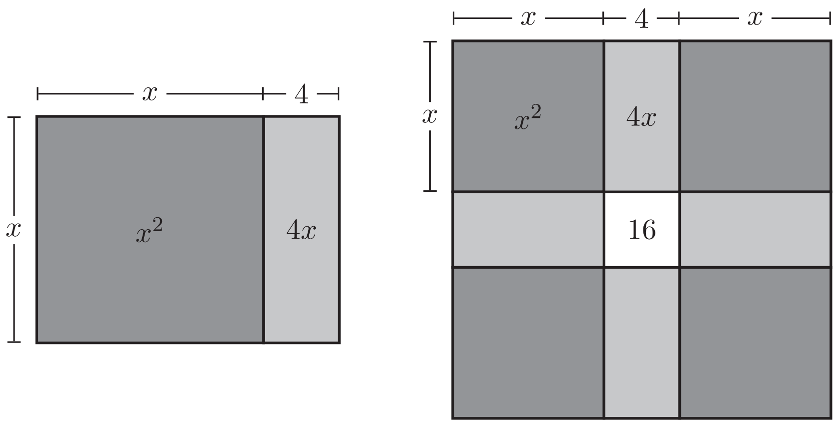


Figura 3.4

   a) *Interprétela.*
   b) *Resuelva la ecuación* $x^2 + 20x = 69$ *con este método.*

2. *Elija el método que más le llame la atención y resuelva las siguientes ecuaciones:*

   a) $x^2 + 6x = 16$
   b) $x^2 + 7x = 18$
   c) $5x^2 + 3x = 92$

3. *Extienda los dos métodos presentados para resolver ecuaciones generales de la misma forma* $ax^2 + bx = c$*; ponga las condiciones que sean necesarias.*

[26]Este método fue propuesto por el estudiante Juan David Serrano, en el curso de aritmética del segundo semestre del año 2012 y fue extendido a los otros tipos de ecuaciones que se estudian más adelante bajo la asesoría de la profesora Haydee Jiménez.

3.2.2.3. Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = bx$

Exponemos un método análogo al presentado en la sección anterior para resolver ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + c = bx$$

Empecemos, por ejemplo, con la ecuación:

$$x^2 + 21 = 10x$$

también prototipo[27].

a. Inicialmente dibujamos un cuadrado de lado x, cuya área representamos con x^2.

b. Dibujamos un rectángulo que represente 21 unidades cuadradas, pero repartidas, de manera que uno de los lados sea x (figura 3.5).

c. El rectángulo compuesto por $x^2 + 21$ tiene como área $10x$, como se ve en la ecuación original; por lo tanto, uno de los lados del rectángulo tiene como longitud 10 unidades, puesto que el otro mide x (figura 3.5).

d. Si trazamos un segmento de tal manera que divida en dos partes iguales al rectángulo cuyo lado es 10, obtenemos dos casos, veamos el primero:

Caso 1: que x sea menor o igual a 5 (esto no lo podemos saber desde el principio, porque desconocemos el valor de x, pero sí podemos dibujarlo como ayuda); este caso, se presenta en la figura 3.5.

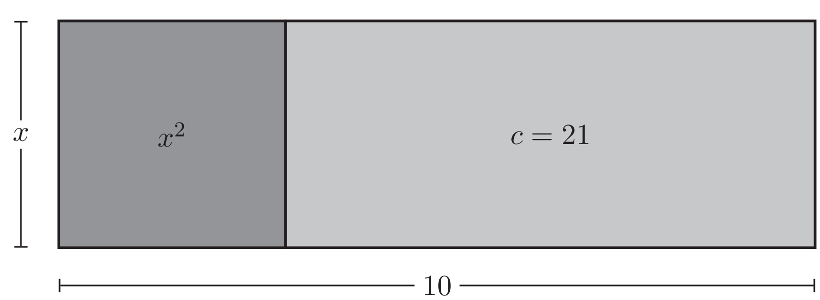


Figura 3.5

[27] La ecuación es propuesta por Al-Khwārizmī en su obra y resuelta similarmente a como la presentamos aquí, solo que con otro lenguaje.

Para encontrar el valor de x, procedemos de manera similar a la del problema anterior: primero completamos un cuadrado de lado 5 que incluya al cuadrado de lado x como en la figura 3.6.

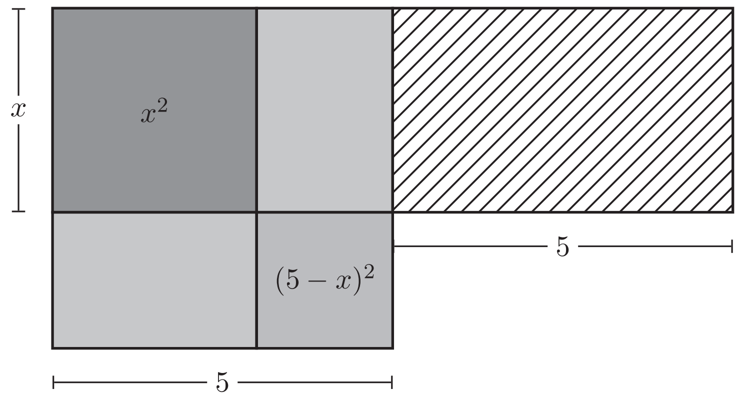


Figura 3.6

Este cuadrado está compuesto por dos rectángulos de igual área y por dos cuadrados, uno de área x^2 y el otro de área $(5-x)^2$ (*¿Por qué?*). Si sumamos las áreas de este último con 21 que es el área del rectángulo c, obtenemos el área del cuadrado de lado 5 (figura 3.7), porque: si llamamos a al área del rectángulo que está contiguo al cuadrado de lado x, tenemos que

$$x^2 + a = 21 - a$$

porque en el literal d. dividimos en dos áreas iguales el rectángulo de lados 10 y x.

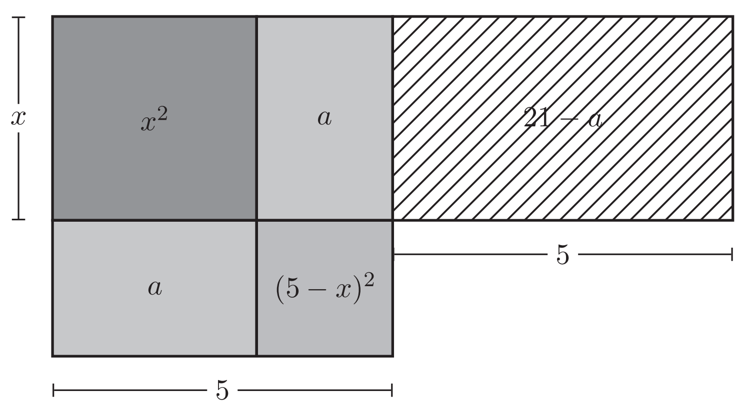


Figura 3.7

Esto significa que la suma de las áreas de los dos rectángulos contiguos al cuadrado de área x^2 (los cuadrados denotados con a) con el área del cuadrado de lado x es 21, lo que en símbolos escribimos como:

$$(x^2 + a) + a = (21 - a) + a = 21.$$

Por tanto, el área del cuadrado de lado $(5 - x)$ más 21 nos da el área del cuadrado de lado 5, como lo habíamos afirmado; en símbolos escribimos:

$$(5 - x)^2 + 21 = 5^2.$$

De esto ya podemos concluir que el área del cuadrado de lado $(5 - x)$ es 4 y por lo tanto su lado es 2, de donde podemos concluir que x es 3. Y nuestra ecuación está resuelta para el primer caso.

Caso 2: el segundo caso es que el número buscado sea mayor o igual que 5; lo cual representamos en la figura 3.8.

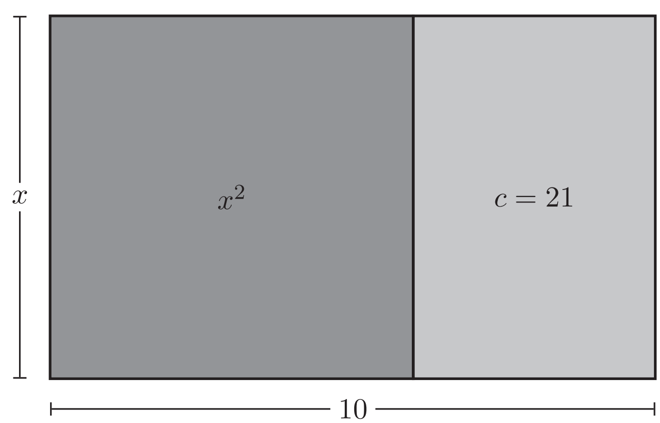


Figura 3.8

Como primero dividimos en dos partes iguales el rectángulo de lados 10 y x, según lo indicado en el literal d, tenemos la figura 3.9.

De donde tenemos que:

$$x^2 - a = 21 + a$$

O de otra manera:

$$x^2 - 2a = 21$$

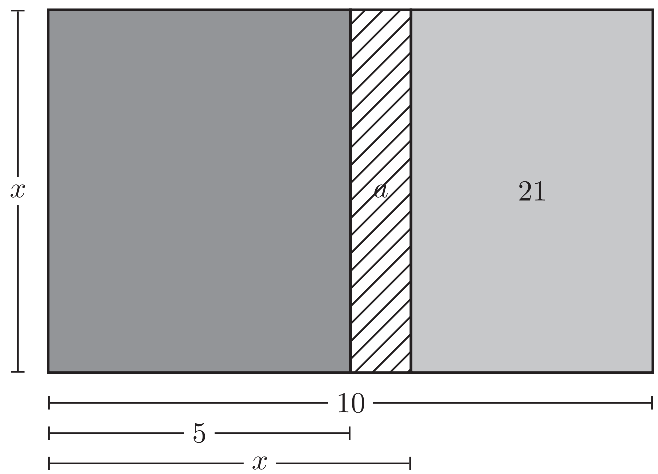


Figura 3.9

Procedemos ahora a formar un cuadrado de lado 5; obteniendo la figura 3.10.

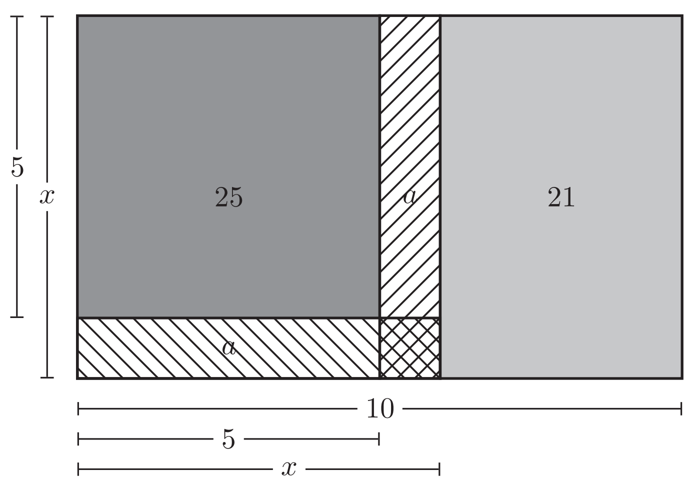


Figura 3.10

Como observamos, el cuadrado de lado x ha quedado constituido por un cuadrado de área 25 unidades cuadradas, dos veces a menos el cuadrado de lado $x-5$; así:

$$x^2 = (25 + a + a) - (x - 5)^2.$$

De donde tenemos que

$$x^2 - 2a = 25 - (x - 5)^2.$$

Pero sabemos que $x^2 - 2a = 21$; por tanto, el cuadrado de lado $x - 5$ tiene como área 4, entonces $x = 7$.

De acuerdo con lo anterior, con los casos 1 y 2, hemos obtenido dos soluciones, $x_1 = 7$ y $x_2 = 3$, para la ecuación $x^2 + 21 = 10x$.

Ejercicios

1. *Plantee ecuaciones de la forma $ax^2 + c = bx$ y resuélvalas utilizando el método presentado. Presente el método de manera general, no olvide considerar $a \neq 1$.*

2. *¿Siempre que exista una solución para las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = bx$ existe la otra? Explique.*

3. *Análogo al método 2 exhibido para las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = c$, se tiene este método para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + c = bx$; mediante las figuras 3.11 y 3.12 se expone el método para los casos 1 y 2, respectivamente, resolviendo la misma ecuación presentada en el ejemplo. Estudie las figuras e interprete el método. Realice ejercicios siguiendo este procedimiento y plantéelo de manera general.*

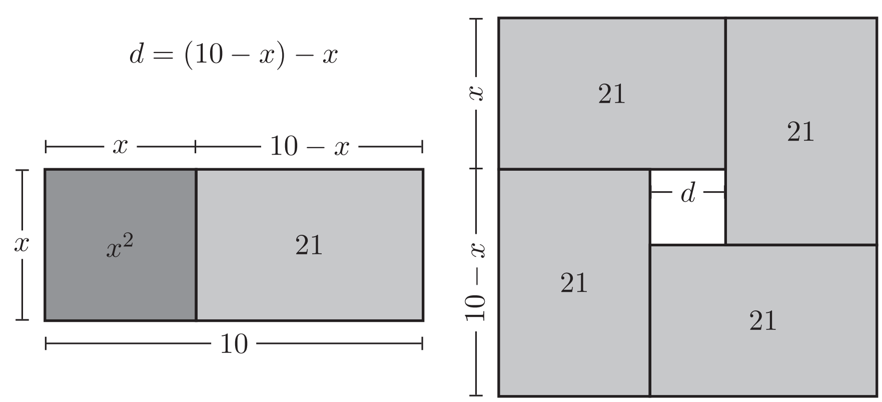


Figura 3.11

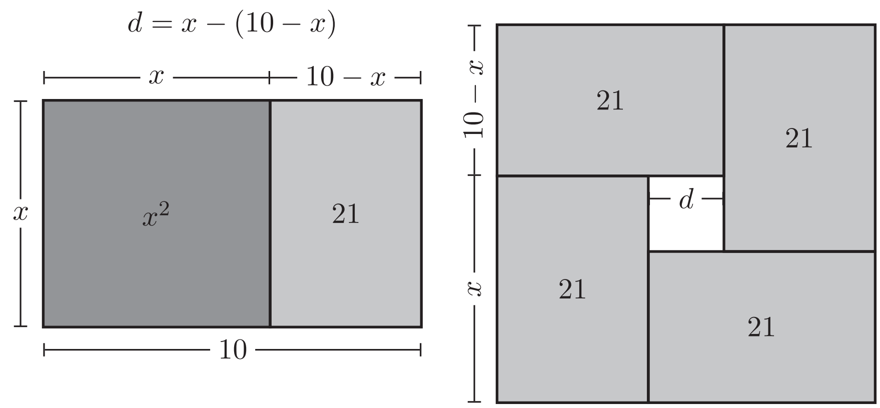


Figura 3.12

3.2.2.4. Ecuaciones de la forma $ax^2 = bx + c$

Ejemplifiquemos una manera de resolver estas ecuaciones hallando el valor de x en

$$x^2 = 4x + 60$$

Primero, representamos mediante áreas la ecuación (figura 3.13).

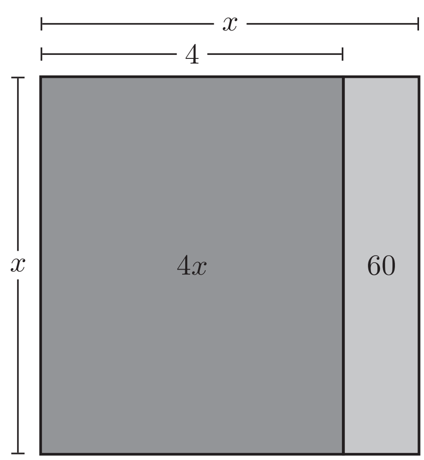


Figura 3.13

De manera análoga a como hicimos antes, dividimos en dos partes iguales el segmento de longitud conocida y a partir de ello, en dos partes iguales el rectángulo de área $4x$, como se muestra en la figura 3.14.

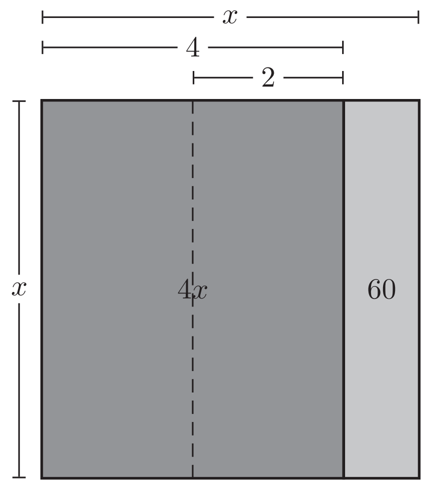


Figura 3.14

Ahora, construimos un cuadrado de lado $x - 2$, como se ve en la figura 3.15, sobre el cual vamos a trabajar:

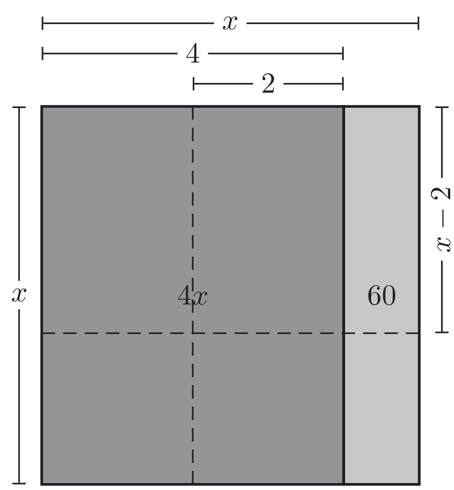


Figura 3.15

Este cuadrado, el de lado $x-2$, está conformado por un cuadrado de área 4 unidades cuadradas y por una figura en forma de L invertida (⌋) que tiene área equivalente al rectángulo inicialmente dibujado, 60 unidades cuadradas (*¿por qué?*), como vemos en la figura 3.16.

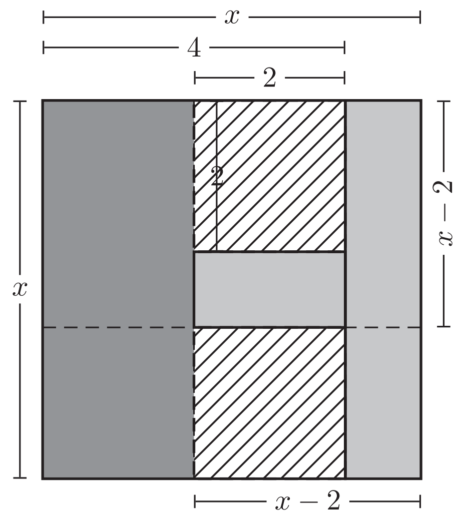


Figura 3.16

Lo cual escribimos simbólicamente como sigue:

$$(x-2)^2 = 2^2 + 60$$

Por lo que $x - 2$ es igual a 8 y con ello, hallamos el valor desconocido: $x = 10$.

Ejercicios

1. *Resuelva las siguientes ecuaciones a partir del método presentado:*

   a) $x^2 = 22_{(5)}x + 125_{(8)}$

   b) $x^2 = 20 + 8x$

   c) $x^2 = 4x + 60$

2. *Extienda el método presentado a la forma general de las ecuaciones consideradas en esta sección.*

3. *Por analogía con el método 2 presentado en las dos secciones anteriores, establezca cómo resolver ecuaciones de la forma $ax^2 = bx + c$. Inicialmetne hágalo a través de ejemplos y luego plantéelo de manera general.*

3.3. Logaritmación

Si en la expresión

$$a^b = c$$

conocemos la base a y la potencia c, el proceso para determinar el exponente b lo llamamos *logaritmación*[28]; decimos que b *es el logaritmo en base* a *de* c y lo escribimos:

$$\log_a c = b.$$

De nuevo, es bueno resaltar que esto es solo otra forma de escribir $a^b = c$; es decir, que

$$\log_2 16 = 4$$

significa que 4 es el exponente que debemos ponerle a 2 para que la potencia sea 16.

Otra vez, como en la potenciación y en la radicación tenemos problemas con el cero.

Si $c = 0$ no existe un único b tal que $a^b = 0$, ya que esta situación solo se da si $a = 0$ para cualquier $b \neq 0$.

Además, si $a = 0$ no existe ningún b para $c \neq 0$ y para $c = 0$ todos los números b satisfacen la relación. Por lo tanto, no están definidos ni el logaritmo en cualquier base de cero ni el logaritmo en base cero.

En cuanto al proceso para hallar logaritmos y sus relaciones con la potenciación y la radicación, conviene tener en cuenta las siguientes observaciones:

1. No debemos confundir la base de un logaritmo con la base de un sistema numérico; cuando haya lugar a confusión debe tenerse cuidado.

2. Tenemos tres expresiones distintas para mirar una sola relación fundamental, es decir:

   $$3^4 = 81$$

   significa que

   $$\sqrt[4]{81} = 3$$

[28] La logaritmación tampoco es una operación entre números naturales, por lo que en este contexto solo la interpretamos como una forma equivalente de escribir una potenciación. En el año 1586 el suizo Jobst Bürgi (1552-1632) concibió la idea del logaritmo, pero hasta el año 1620 publicó sus tablas logarítmicas bajo el título *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*.

En 1614, John Napier (1550-1617) publica las primeras tablas de logaritmos, pero sin explicar su construcción. En 1619, se publica su método con el título *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

y a su vez que

$$\log_3 81 = 4.$$

3. Si escogemos como base a cualquier número b entonces:

$$b^1 = b \quad \text{significa que} \quad \log_b b = 1.$$

4. Para cualquier base b, el logaritmo de 1 es cero, porque:

$$b^0 = 1 \quad \text{significa que} \quad \log_b 1 = 0.$$

5. Los logaritmos más usados son los de base 10, que se llaman *logaritmos vulgares o de Briggs*[29]; en estos el subíndice 10 se omite; es decir, que cuando no hay subíndice se sobreentiende que la base es 10, en ellos tenemos que:

$$\begin{array}{lll} 10^0 = 1 & \text{por lo tanto} & \log 1 = 0 \\ 10^1 = 10 & \text{por lo tanto} & \log 10 = 1 \\ 10^2 = 100 & \text{por lo tanto} & \log 100 = 2. \end{array}$$

3.3.1. Propiedades de la logaritmación

Una propiedad de los logaritmos, muy usada por los antiguos[30] para hacer cálculos complicados, es:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

Esto significa que a través de los logaritmos podemos convertir multiplicaciones en sumas, lo que simplifica las cosas. Veamos el origen de esta propiedad, que de nuevo está relacionada con las de la potenciación:

Supongamos que

$$x = a^b$$

[29]Henry Briggs fue el primero que hizo las tablas de logaritmos en base 10, hacia 1631.

[30]Una primera idea de esta propiedad de los logaritmos surge de Arquímedes, quien comparando las sucesiones aritméticas con las geométricas

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

había observado que "para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado".

como ya sabemos, esto es lo mismo que decir $b = \log_a x$. Análogamente $y = a^c$ es lo mismo que $c = \log_a y$.

Si multiplicamos las dos expresiones, obtenemos:

$$x \cdot y = a^{b+c}$$

esto significa, en términos de logaritmos, que

$$b + c = \log_a(x \cdot y)$$

y si reemplazamos b y c por su valor, obtenemos:

$$b + c = \log_a x + \log_a y$$

o lo que es lo mismo:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

También con la ayuda de los logaritmos es posible convertir divisiones en restas[31] y potenciaciones y radicaciones en multiplicaciones y divisiones respectivamente.

Ejercicios

1. *Pruebe las relaciones*[32]:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \text{si} \quad y \neq 0$$
$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a x$$

De nuevo, recordamos que todas estas propiedades se cumplen cuando las operaciones están definidas; es decir, cuando existan números naturales que satisfagan la relación $x = a^b$ y los divisores en las divisiones sean distintos de 0.

[31]Antes del invento de los logaritmos existía un método para reemplazar la multiplicación de dos números por una resta basado en la identidad

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Se hacía una tabla de los cuartos de los cuadrados de los números $(a+b)$ y $(a-b)$ y restando se hallaba el producto.

A mediados del siglo XIX, el matemático francés A.Cossart editó una "tabla de los cuadrados de los cuadrados de los números del 1 al 1.000 millones, con ayuda de la cual se halla el producto exacto de los números por un método más simple y más cómodo que los logaritmos".

[32]Estas propiedades fueron enunciadas explícitamente por primera vez, alrededor de 1650, por el inventor de la regla de cálculo, William Oughtred (1574-1660).

2. *Resuelva las siguientes ecuaciones en la base indicada (también se encuentran escritas en la misma base):*

   a) Base 3: $\log_2 1012 = x$

   b) Base 5: $\log_x 100 = 2$

   c) Base 7: $\log_2 x^3 = \log_2 11 + \log_2 x^2$

   d) Base 6: $\log_2 50 - \log_2 23 = x$

   e) Base 7: $\log_6[4(x-1)] = 2$

   f) Base 5: $\log_{13}[2(x^3+10)] = 2$

   g) Base 5: $\log_{2x+3} 311 = 2$

   h) Base 5: $2^{x+2} \cdot 1003 = 4^{x-1}$

3. *Proponga un procedimiento para calcular logaritmos en un sistema numérico de base cualquiera y calcule por ejemplo:* $\log_{66}(6501_{\,(7)})$, $\log_{21}(1212201_{\,(4)})$. *Construya sus propios ejemplos.*

4. Si queremos adivinar un número entre 1 y 10 formulando preguntas cuya respuesta solo sea sí o no, con el mínimo número de preguntas posible, podríamos intentar encerrar el número de la siguiente forma:

   i. ¿El número es mayor o igual que 5?
   Si la respuesta es sí, preguntamos :

   ii. ¿El número es mayor o igual que 8?

   Y así sucesivamente, hasta conseguir la respuesta: cuatro preguntas son suficientes.

   ¿Cuál es el mínimo número de preguntas posible, cuyas respuestas sean sí o no, para adivinar un número entre 1 y 100?, ¿entre 1 y 1000?, ¿entre 1 y 1000000?

   ¿Se le ocurre otro tipo de preguntas que nos lleve a una solución?

   Los caminos que se pueden seguir para buscar una solución, generalmente no son únicos. Por ejemplo, *¿será útil el sistema binario para resolver este problema?*

   Si modificamos el intervalo en el cual consideramos los números e intentamos adivinar un número entre 1 y 16, entre 1 y 53, entre 24 y 75. *¿Cuál es el menor número de preguntas en cada caso?*

5. Si en un torneo de fútbol participan 32 equipos, y el campeonato se desarrolla eliminando al que pierde un juego, el torneo duraría 5 fechas si no hay empates. Si son 128 equipos, *¿cuántas fechas son necesarias?*

   Si en el torneo participan 9 equipos, hay varias formas de jugarlo, con las mismas condiciones de eliminación. *Proponga algunas alternativas y determine en cada una de ellas el número de fechas necesarias. ¿De cuál forma obtenemos el mínimo número de fechas?*

   ¿Qué ocurre si en el torneo participan 350 equipos?

6. Utilizando solamente tres doses, las operaciones y los convenios usuales del álgebra elemental (en la raíz cuadrada no se escribe el índice), podemos escribir los otros números, por ejemplo:

$$4 = \sqrt{(2 \times 2)^2}$$
$$8 = 2^2 \times 2$$

   Escriba[33] *en forma similar los números de 1 a 10. ¿Es posible la solución con tres treses?*

3.4. Una aplicación de la potenciación: la escritura de números grandes

Como ya habíamos visto en el capítulo anterior la potenciación permite escribir números grandes con pocos símbolos; por ejemplo, tomemos 10 como base y expresemos sus primeras potencias en sistema decimal:

1. 10^2 es aproximadamente el número de ojos que hay en un salón de clase en un colegio del sur de Bogotá en el año 2000.

2. 10^3 es aproximadamente el número de kilómetros de Bogotá a Barranquilla.

3. 10^5 es aproximadamente el número de cabellos que hay en la cabeza de una adolescente.

[33]Después de algunos intentos se dará cuenta de que las cuatro operaciones básicas de la aritmética no son suficientes para este propósito; se requiere pensar en exponentes y logaritmos.

Para la estimación[34] del número de cabellos que tiene una persona joven promedio, realizamos el siguiente procedimiento:

i. Contamos el número de cabellos que hay en un centímetro cuadrado[35], lo que nos da aproximadamente $200 = 2 \times 10^2$.

ii. Medimos los diámetros de varias cabezas, promediamos y aproximamos al número natural más cercano, el resultado es 20 centímetros.

iii. Con este dato calculamos la superficie de una cabeza promedio (suponiéndola esférica para simplificar un poco); el resultado es:

$$\mathrm{S} = 4\pi r^2 = 4\pi \times 10^2 \quad \mathrm{cm}^2$$

Como solamente la mitad de la cabeza (aproximadamente) está poblada de cabellos, este número debe dividirse por 2.

iv. Multiplicamos la medida de la superficie por el número de cabellos en cada cm^2 y obtenemos aproximadamente 125600. La potencia de 10 más cercana a este número es 10^5, cantidad que tomaremos por simplicidad, pues no requerimos mayor precisión[36].

4. 10^{29} es aproximadamente el número de gotas de agua que hay en el mar.

Para calcular el número de gotas que hay en todos los océanos de la tierra procedemos de manera similar.

i. Sabemos[37] que el radio de la Tierra es aproximadamente 6400 km $= 6,4 \times 10^8$cm; con ello calculamos el volumen de la Tierra con la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Obtenemos $V \cong 10^{27}\mathrm{cm}^3$.

[34]Usaremos libremente algunos conceptos que no justificamos por considerar que no son relevantes para nuestros propósitos.

[35]Un dato más aproximado es 165 cabellos por centímetro cuadrado (Tahan, 1994, p. 225).

[36]En *El hombre que calculaba* se da como superficie poblada de cabello 775 cm^2 y 127875 cabellos en total.

[37]En el año 300 a.C. Eratóstenes midió el radio de la Tierra con la ayuda de una estaca; la descripción de su procedimiento y su resultado se encuentra en el libro (Sagan, 1985, p. 15).

ii. La proporción de agua en el volumen del planeta Tierra es aproximadamente $3/4$, luego debemos multiplicar por este factor, pero eso no influye mucho, puesto que el factor es casi 1.

iii. Si suponemos que en un cm^3 caben alrededor de 100 gotas, el número máximo de gotas que puede haber en el mar es 10^{29}.

5. El número de átomos del universo es 10^{85}, aproximadamente.

   El cálculo del número de átomos del universo es similar y tiene en cuenta que hay alrededor de cien mil millones de galaxias y cada una de ellas tiene, en promedio, cien mil millones de estrellas. Nuestro Sol es una estrella promedio, aproximadamente igual a un millón trescientos mil veces la Tierra.

   Si conocemos la masa de la Tierra y sabemos el número de átomos que hay en una mol de sustancia (el número de Avogadro $6,023 \times 10^{23}$), podemos completar el cálculo.

6. Una cuenta ligada al origen del ajedrez es la siguiente:

   Si pudiéramos colocar en cada una de las casillas de un tablero de ajedrez granos de trigo, de esta manera: en el primer cuadro un grano, en el segundo dos granos, en el tercero cuatro, ocho en el siguiente y así sucesivamente, hasta el cuadro sesenta y cuatro, el número de granos de trigo necesarios para llenar todos los escaques del tablero se escribe en base 10:

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

   Para reunir esta cantidad, sería necesario sembrar de trigo los cinco continentes de la Tierra y obtener 76 cosechas (Caro, 1936, p. 241).

7. Miremos ahora otra cuenta fantástica referida en el álgebra recreativa de Perelman[38]. También, con respecto a este noble juego, ¿cuántas partidas de ajedrez se pueden jugar?:

   "Al mover la primera pieza, las blancas tienen 20 jugadas a elegir (16 con los peones y 2 con cada caballo), las negras tienen las mismas opciones para su primera jugada, en total $20 \times 20 = 400$ variantes para 1 jugada.

   En la segunda jugada las posibilidades aumentan, si ambas han movido P4R (peón cuatro rey) se tienen 29 jugadas para elegir, y así van

[38]Tomado de M. Kraitchik (citado por Perelman, 1989, pp. 36-38).

aumentando; supongamos que hay 20 variantes en promedio para las primeras 5 jugadas, 30 para cada una de las demás y una partida dura alrededor de 40 movimientos, por consiguiente, el número de partidas será:

$$
\begin{aligned}
(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} &= 20^{10} \times 30^{70} \\
&= 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80} \\
&\cong 10^3 \times 3^{70} \times 10^{80} \\
&\cong 2 \times 10^{83} \times 10^{33} \\
&\cong 2 \times 10^{116}
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\begin{aligned}
3^{70} &= 3^{68} \times 3^2 \\
&\cong (3^4)^{17} \times 10 \\
&\cong 80^{17} \times 10 \\
&\cong 2^{51} \times 10^{18} \\
&\cong 2 \times (2^{10})^5 \times 10^{18} \\
&\cong 2 \times 10^{33}
\end{aligned}
$$

Si todos los humanos solo jugaran ajedrez, moviendo una pieza cada segundo, duraríamos más de 10^{100} siglos jugando sin repetir partida".

¡Y nuestro universo tiene alrededor de 10^8 siglos de edad!

3.5. Aplicaciones de bases diferentes a la base diez

En el capítulo 2 ya habíamos hecho mención a algunas aplicaciones del sistema binario, octal, hexadecimal, etc.; sin embargo, existen aplicaciones de bases menos usuales (Mosterín, 1997), entre ellas:

1. La información genética de todo individuo está codificada en ADN, al asignar a la adenina el 0, a la timina el 1, a la guanina el 2 y la citosina el 3, tendríamos un sistema base 4; luego, la cadena de caracteres de ADN representa únicamente un número natural; es decir, si tenemos por ejemplo la cadena TCCAGT, ésta se encuentra representada por el número

$$133021 = 1 \times 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 1 \times 4^0$$

Así, el genoma completo de cualquier organismo puede representarse con un número natural.

2. Si consideramos las letras del abecedario, los signos de puntuación y los espacios en blanco: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, Ñ, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,., ,, ;, :, -, ¡, !, ¨, ¿, ?, (,), “, , ”, / obtenemos un sistema posicional cuya base es 43 y así, a toda información, a todo libro hecho y por hacer en idioma español, le corresponde un número natural.

3. Todo sonido se puede codificar con diferentes niveles de amplitud según la quantización de sonidos wave (el sistema que se usa para digitalizar sonidos que se guardan en discos compactos CD). El dígito amplitud 1 representa el número 0, el dígito amplitud 2, el número 1. . . , hasta el dígito amplitud 65536, el cual representa el número 65535. Estos números forman un sistema de base $2^{16} = 65536$ que sirve para asignar a cada melodía y a cada ruido un número natural.

4. También es posible codificar, o mejor, digitalizar imágenes, películas, etc., usando un sistema de numeración cuya base es k^*d (donde k es el número disponible de colores y d es el número de grados de brillo para cada píxel). Los dígitos del sistema son combinaciones de un color con un grado de brillo. El dígito (color 1, brillo 1) representa el número 0, el dígito (color 1, brillo 2), el número 1, y así sucesivamente hasta el (color k, brillo d), el cual representa el número $k^*d - 1$. En general para cualquier n $(1 \leq n \leq k)$ y cualquier m $(1 \leq m \leq d)$ el dígito (color n, brillo m) representa el número $(n-1)d + m - 1$.

Capítulo

4

Problemas de conteo en matemáticas

En este capítulo ponemos en juego procesos lógicos que los matemáticos practican a menudo, que no son difíciles por sí mismos, pero que requieren entrenamiento y trabajo.

El 90 % de la actividad matemática es sudor del pensamiento; mucho empeño, mucho error, pero siempre, muchas ideas para volver a empezar.

Plantearemos algunos problemas que consideramos interesantes y divertidos, lo que es fundamental para el enamoramiento requerido por esta forma peculiar de razonar.

Esbozaremos algunas posibles soluciones que sirvan como ayudas, lo que no implica que sean el camino. No estamos interesados en una respuesta correcta para cada ejercicio, sino en que el estudiante ejercite sus propios procesos de pensamiento y proponga alternativas de solución.

4.1. ¿Qué es un problema?

Etimológicamente la palabra problema viene del latín *problēma* y del griego $\pi\rho\acute{o}\beta\lambda\eta\mu\alpha$. Un problema es un asunto o una cuestión que *requiere solución.*

Surge con la vida, los seres vivos necesitan sobrevivir; como individuo, buscar alimentación y como especie, buscar reproducción. Las plantas y los animales resuelven problemas, por selección natural ambos o tomando decisiones los segundos: correr, matar, migrar.

Los humanos como seres racionales tienen *otra* clase de problemas: de salud (los resuelve el individuo, el chaman, el tegua, el médico), sociales (los resuelven las comunidades o sus gobiernos), económicos (los resuelve el individuo, las comunidades o sus gobiernos), y algunos humanos tienen problemas *académicos*.

Los problemas académicos nacen de la curiosidad, el deseo de saber (el chisme), el deseo de conocer, de entender, de explicar el entorno en principio; luego de responder preguntas que surgen cuando estudia algún tema de su *interés*: religión, filosofía, ciencia, matemáticas, arte, etc.

Un problema es un asunto *personal*, para algunos un asunto es un problema y para otros no.

Para muchas personas los problemas son indeseables: es frecuente la expresión "¡no quiero problemas!". Para los matemáticos son sus motivos, sus pasiones y su cotidianidad.

4.2. ¿Qué es la matemática?

En la antigua Grecia la palabra $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (*mathematikós*) significaba *amante* del conocimiento. La matemática *es una actitud, una forma de ser* y de mirar; de abstraer al mundanal ruido, de elevar el espíritu, de pensar, contemplar, adivinar; o en un mejor lenguaje, conjeturar, razonar, demostrar, etc. La matemática es abstracción, generalización, clasificación, ordenamiento, razonamiento, conteo, medida, etc.

La abstracción como actividad intelectual consiste en separar un aspecto de la realidad (en primera instancia; luego, de las abstracciones y posteriormente, de las abstracciones de las abstracciones, y así sucesivamente) y aislarlo de todo, con la única finalidad de conocerla mejor. *Abstraer es encontrar las estructuras subyacentes*, en principio en la realidad, luego en las mismas ideas matemáticas.

Ninguna de las entidades que estudiamos en matemáticas existe en el mundo físico; los números, los puntos, las líneas, las superficies, las figuras geométricas, las funciones y demás objetos matemáticos son abstracciones, son ideas. La matemática no es un tema, es la manera de estudiar los temas.

4.3. ¿Qué es un problema matemático?

Un problema matemático surge cuando formulamos preguntas sobre una estructura algebraica, topológica o de orden; o un objeto matemático como números, formas, cambios, formas de razonar, etc. Las respuestas habitualmente pretenden explicar un hecho, encontrar una entidad que satisfaga algunas condiciones, demostrar que una solución es correcta, inducir una fórmula que explique una secuencia, etc.

Un problema matemático se resuelve hallando una entidad que posibilite la satisfacción de las condiciones del problema.

Hay problemas matemáticos resueltos cuyas soluciones son ampliamente conocidas: el teorema de Pitágoras, encontrar una axiomática para los números naturales, el teorema fundamental del cálculo, etc.

Otros resueltos cuyas soluciones son conocidas por algunos especialistas: el último teorema de Fermat y en general las matemáticas de frontera.

Algunos no resueltos como la conjetura de Goldbach, la infinitud de los primos gemelos, etc., y también hay problemas que no tienen solución, como construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.

Muchos problemas no han sido formulados, y hay otros que no sabemos si se han formulado o no. Nuestro interés está en formular preguntas y problemas sin importar si han sido resueltos.

Una cosa es encontrar una solución al problema y otra es demostrar que es solución, inicialmente nos ocuparemos de lo primero y en un capítulo posterior trataremos lo segundo.

Para resolver problemas se requiere *actitud*: desear resolver, no necesariamente tiene que ver con utilidad, a veces basta querer saber, curiosidad; *esfuerzo, persistencia*: superar dificultades, intentar, errar y volver a intentar y *tolerancia a la frustración.*

Los problemas de aplicación de las matemáticas se traducen en la construcción de modelos matemáticos para las situaciones que se pretende resolver, una situación se puede resolver con varios modelos o un mismo modelo puede resolver varias situaciones. Veamos algunos ejemplos.

4.4. Un modelo de solución

Los siguientes 3 problemas tienen algo en común; *intente encontrar las coincidencias.*

1. Dos satélites, X y W, tienen órbitas circulares alrededor de la Tierra; X da una vuelta en 90 minutos y W, en 120. Si X y W son representados por los puntos de la figura 4.1, y giran en el mismo sentido, *¿cuántos minutos pasarán para que juntos estén en la posición de partida por primera vez?, ¿por segunda vez?, ¿por séptima vez?*

Si cambiamos el periodo (tiempo que gasta en dar una vuelta) de X a 45 minutos y el de W a 30, *¿el problema se resuelve de la misma forma? ¿Es válido el esquema de solución para cualquier valor de X y W?*

Este problema, como casi todos, tiene varias maneras para ser resuelto. Proponga por lo menos 3 formas, intentando que cada una de ellas sea, en algún sentido, mejor que la anterior. ¿Podría resolverse utilizando el número de vueltas, en lugar del periodo?

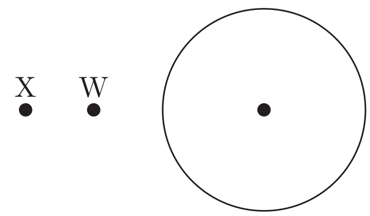


Figura 4.1

Si dos satélites se encuentran por primera vez al cabo de 60 minutos, *¿cuáles son los posibles periodos de cada uno?; ¿y si se encuentran al cabo de un número cualquiera k de minutos?*

2. *¿Cuál es la menor capacidad que debe tener un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres grifos que vierten, el primero 36 litros por minuto, el segundo 54 litros por minuto y el tercero 60 litros por minuto? ¿Y si cambiamos los valores del primero por un número k de litros por minuto, el segundo por un número m y el tercero por un número n?*

3. Tres aviones salen de una misma ciudad, el primero cada 8 días, el segundo cada 10 días y el tercero cada 20. Si salen juntos del aeropuerto el día 2 de enero, *¿cuáles serán las dos fechas más próximas en que volverán a salir juntos?* (El año no es bisiesto).

Un modelo de solución para estos problemas incluye encontrar un múltiplo común entre dos números naturales, para ello una opción elemental es multiplicarlos; si el problema consiste en encontrar un múltiplo común pero cada vez menor, podemos dividir el resultado anterior entre algún factor común de los números, pues este ha sido multiplicado dos veces en el producto, si lo que debemos es encontrar *el mínimo común múltiplo* de ellos podemos repetir el proceso anterior con cada uno de los factores comunes de los dos números. *A partir de estas observaciones, escriba un algoritmo para hallar el mínimo común múltiplo de dos números cualesquiera. Enuncie una relación entre el mínimo común múltiplo y la multiplicación de dos números cualesquiera.*

4.4.1. La operación MCM

Hallar el *mínimo común múltiplo* (MCM) entre dos números naturales a y b, que notaremos $[a, b]$, puede verse como una operación similar a la multiplicación, en el sentido de que si damos dos números cualesquiera, su MCM es otro número natural. Podemos, entonces, construir una tabla para esta nueva operación; por ejemplo, la tabla 4.1 muestra el MCM de algunos números escritos en base 12.

Base 12												
$[,]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	0	2	2	6	4	A	6	12	8	9	18	B
3	0	3	6	3	10							
4	0	4										
5	0	5										
6	0	6										
7	0	7										
8	0	8										
9	0	9										
A	0	A										
B	0	B										

Tabla 4.1

Ejercicios

1. *Complete la tabla 4.1 y explique las dos primeras filas y las dos primeras columnas.*
2. *¿En cuáles casos es lo mismo multiplicar dos números que hallar su MCM?*

4.4.2. La operación MCD

Si a y b son dos números naturales, la relación entre la multiplicación $a \times b$ y el mínimo común múltiplo de ellos, la llamamos el *máximo común divisor* (MCD) de a y b y lo notamos (a, b), tenemos que

$$(a, b) = \frac{a \times b}{[a, b]}$$

De esta relación resulta otra operación entre números naturales que también tiene su tabla correspondiente:

Base 12												
(,)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
4	4	1	2									
5	5	1	1									
6	6	1	2									
7	7	1	1									
8	8	1	2									
9	9	1	1									
A	A	1	2									
B	B	1	1									

Tabla 4.2

Ejercicios

1. *Sugiera una explicación para el nombre de esta operación.*
2. *Complete la tabla 4.2 y explique las dos primeras filas y las dos primeras columnas.*
3. *¿La operación es conmutativa?, ¿tiene elemento idéntico?*

4. *Enuncie otras regularidades.*
5. *Multiplique las tablas 1 y 2 casilla a casilla, ¿qué obtiene?; ¿lo esperaba?*

∗ ∗
Notemos que no nos interesamos mucho en la solución de los problemas planteados, más bien nos ocupamos del método de solución y de los objetos matemáticos que de él se derivan.
∗ ∗

4.5. Los datos y las hipótesis en un problema

Frecuentemente encontramos en matemáticas problemas donde, al parecer, faltan datos o las hipótesis que se deben manejar no están explícitas; en estos casos se requiere de algo de paciencia y observación.

En el siguiente ejercicio es muy importante la lectura y traducción de las condiciones del problema y la formulación de conjeturas o hipótesis bajo las cuales la solución propuesta es válida.

Ejercicio

Un club de 99 miembros hizo una rifa con tres premios. En ella cada ganador tenía como premio un número de entradas al teatro, igual a la suma de los dígitos de su boleta.

Uno de los miembros, que no asistió, preguntó quiénes habían ganado y no le quisieron decir; luego preguntó por el número total de entradas repartidas y le dijeron que si le respondían, le dirían los números premiados, y él contestó: “ya sé”. *¿Cómo lo supo?*

4.6. Algunas veces no se puede

En algunas ocasiones encontramos problemas que tienen una solución para algunos valores de los datos del problema, pero que en general no se pueden resolver con datos arbitrarios. Veamos un ejemplo:

Con las siguientes seis cifras 1, 1, 2, 2, 3 y 3 es posible escribir un número donde los “1”estén separados por un dígito, los “2”por dos dígitos y los “3”por tres dígitos. Por ejemplo:

3 1 2 1 3 2 y por supuesto, escritos en orden inverso 2 3 1 2 1 3

Solo con las cifras 1, 1, 2 y 2 no es posible escribir un número donde los "1" estén separados por un dígito y los "2" por dos dígitos, pues en cualquier configuración nos falta una cifra.

Con las cifras 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 *y* 4 *escriba un número donde los* "1" *estén separados por un dígito, los* "2" *por dos dígitos, los* "3" *por 3 y los* "4" *por 4.*

El mismo problema con los números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5 y 5 no tiene solución, tampoco si los números van hasta 6, pero sí la tiene para 7 y 8.

Una solución para 7 es:

4 6 1 7 1 4 3 5 6 2 3 7 2 5

Encuentre una para 8.

Ejercicio

¿Para cuáles valores de k, el problema de escribir

$$1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6\ 6\ldots,\ k\ k$$

con las condiciones expuestas es posible?

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Hay problemas en matemáticas que no tienen solución; no por incapacidad del matemático, sino porque la solución no existe, generalmente porque las condiciones lo impiden.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Por ejemplo, es imposible dividir un ángulo arbitrario en tres ángulos iguales utilizando solamente regla y compás euclidianos, construir un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado o construir un cuadrado de área equivalente a un círculo dado (Muñoz, 1990); también es imposible encontrar una fórmula que permita resolver cualquier ecuación de grado 5 o superior, utilizando las operaciones básicas del álgebra (Herstein, 1976, p. 249).

Demostrar que un problema no tiene solución suele ser más complicado que encontrar una; tal vez sea Evariste Galois el matemático más recordado por haber generado soluciones a problemas de este tipo. Él demostró la imposibilidad de solución de algunos problemas milenarios, como la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la ecuación general de quinto grado por radicales, y eso que tan solo vivió 20 años.

Generalmente, en la búsqueda de soluciones para problemas insolubles, se aprende mucho sobre otros problemas que sí tienen solución y se desarrollan teorías nuevas. Galois no solo resolvió los problemas clásicos, sino que puso las bases para el desarrollo de la teoría de grupos y de la teoría de Galois (Fraleigh, 1988, p. 415).

4.7. Contar en geometría

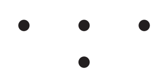
En geometría aparecen de manera natural muchos problemas de conteo, contar el número de diagonales de un polígono regular de n lados, el número de caras de un poliedro regular, irregular, de una estrella, etc.

Presentamos aquí dos problemas que requieren para su solución mezclar un poco de intuición en el manejo del espacio, con cierta habilidad de cálculo.

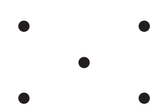
Ejercicios

1. Inicialmente, notemos que con 3 puntos se puede formar una sola fila (de manera que los tres estén en la misma recta):

Si ponemos 4 puntos, con la condición adicional de no poner más de tres puntos en cada fila, podemos hacer, de nuevo, solo una fila de 3 puntos.



Pero con 5 puntos, ya podemos hacer, a lo más, dos filas de 3:



Se puede verificar, que con

6 puntos se hacen máximo 4 filas de 3

7 puntos se hacen máximo 6 filas de 3

8 puntos se hacen máximo 7 filas de 3

9 puntos se hacen máximo 9 filas de 3

10 puntos se hacen máximo 11 filas de 3.

Ejemplificamos este último caso en la figura 4.2.

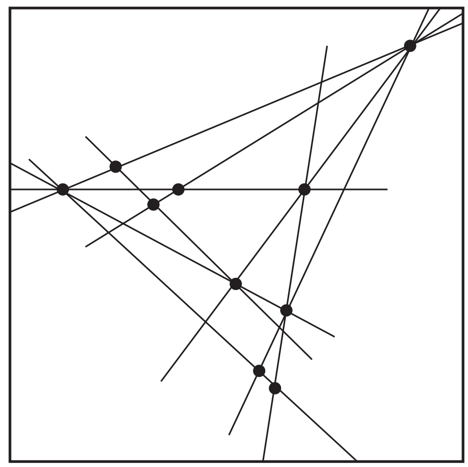


Figura 4.2

Con 20, 21, 22, puntos, ¿cuál es el mayor número de filas de tres puntos que se puede construir?¿Cuál es la secuencia para k puntos?

2. *La conjetura del punto.* Consideremos un conjunto de puntos que están conectados todos entre sí, por líneas rectas, como se muestra en la figura 4.3.

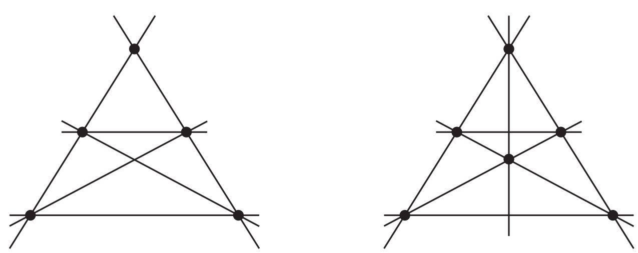


Figura 4.3

La conjetura sostiene que es imposible trazar un diagrama de puntos en el que cada línea contenga al menos tres puntos (sin tener en cuenta el diagrama en el que todos los puntos descansen sobre la misma línea). En efecto, tras experimentar con unos pocos diagramas, la afirmación parece ser cierta.

Por ejemplo, el primer diagrama consta de cinco puntos conectados por seis líneas. Cuatro de ellas no contienen tres puntos, así que, claramente, esta disposición no cumple el requisito de que todas las líneas posean tres puntos. Si insertamos un punto más y su línea correspondiente, como en el segundo diagrama, el número de líneas que no reúne tres puntos se reduce a tres.

Distribuya el diagrama de manera que todas las líneas contengan al menos tres puntos. ¿Es imposible? Argumente por qué.

4.8. Contar en topología

La topología es una parte de la matemática donde se estudian las propiedades que no cambian cuando a un objeto se le hace una transformación continua; por ejemplo los puntos que son interiores a una figura plana se mantienen en el interior ante transformaciones continuas.

Presentamos dos problemas que relacionan aritmética y topología, en ambos problemas trabajó el matemático suizo Leonhard Euler con lo que dio origen a la topología algebraica.

Ejercicios

1. **La característica de Euler:** consideremos un triángulo ABC en un plano α y un punto P fuera del plano. Si unimos con segmentos de línea recta el punto P con cada uno de los vértices del triángulo obtenemos un poliedro de cuatro caras, llamado *tetraedro*, que tiene cuatro vértices y seis aristas. Note que el número de vértices V más el número de caras C, menos el número de aristas A es 2. Este número es llamado la *característica de Euler* del tetraedro.

   Sustituya el triángulo por un polígono de $4, 5, 6\ldots$ *lados en* α (con esto obtenemos *pirámides*), *cuente sus caras, sus vértices y sus aristas. Calcule la característica de Euler de las pirámides*; es decir, el número $\mathrm{V} + \mathrm{C} - \mathrm{A}$.

   Sustituya ahora el punto P por un polígono A'B'C'... en un plano β, paralelo a β, del mismo número de lados que el que se toma en el plano α; una los vértices correspondientes hasta formar un *prisma. Repita las cuentas hechas para las pirámides y compare los resultados. Intente con otras figuras.*

En otros poliedros, como las *torres*, que están formadas por pirámides sobre prismas, también se verifica la relación de Euler (Campos, 1996). *¿Existe alguna figura donde ella no se verifique?*

Calcule la característica de Euler para un cubo con un agujero, como el que muestra la figura 4.4. *Haga sus propios ensayos con sólidos que tengan dos o más huecos*.

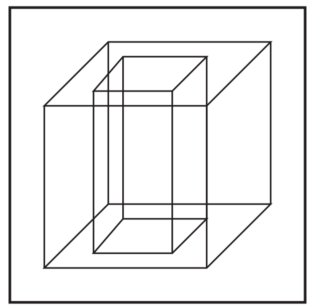


Figura 4.4

Una consecuencia asombrosa de que la característica de Euler sea 2 para cualquier poliedro, es que:

Solo existen 5 poliedros regulares

Un *poliedro* se llama *regular* si su superficie está formada por caras poligonales todas congruentes entre sí y los ángulos en sus vértices son también congruentes.

Y solo existen cinco poliedros regulares: el tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Mostraremos aquí un razonamiento basado en el teorema 21 del libro XI de los *Elementos* de Euclides, el cual dice que "todo ángulo sólido es contenido por ángulos menores que cuatro ángulos rectos". Veamos:

Con tres triángulos equiláteros se construye un ángulo sólido del tetraedro, cuya medida es la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos que forman el vértice del ángulo del tetraedro (esto es $3 \times 60 = 180 < 360$); con 4 el ángulo del octaedro ($4 \times 60 = 240 < 360$), con 5 el ángulo del icosaedro ($5 \times 60 = 300 < 360$).

Con seis triángulos equiláteros, no se puede formar un ángulo sólido, porque, como el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un ángulo recto, los seis serían iguales a cuatro ángulos rectos, lo que es imposible.

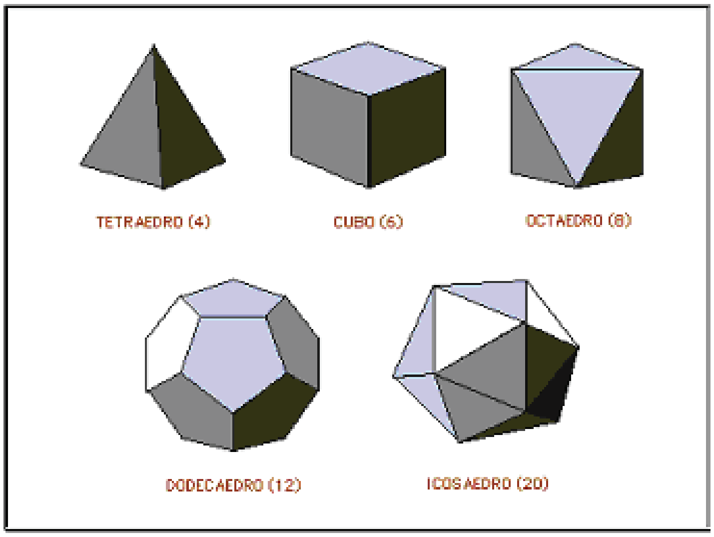


Figura 4.5

El ángulo de un cubo está formado por tres cuadrados y no se puede formar un ángulo sólido con cuatro cuadrados, porque serían cuatro ángulos rectos.

El ángulo del dodecaedro regular está formado por tres pentágonos equiláteros, y construir un ángulo sólido con cuatro pentágonos es imposible, puesto que el ángulo del pentágono regular es 6/5 de un ángulo recto, los cuatro ángulos serían mayores que cuatro ángulos rectos. Imposible.

Poliedro regular	**Número de vértices de caras**	**Número de aristas**	**Número**
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Tabla 4.3

En conclusión, solo hay cinco poliedros regulares. El número de sus vértices, aristas y caras está en la tabla 4.3.

Para todos ellos la característica de Euler es 2. Una demostración analítica de este hecho, donde se utiliza la relación de Euler $V - A + C = 2$ se encuentra en el libro de R. Courant y R. Robbins (1971, pp. 242-246).

2. **Cuentas en teoría de grafos:** algunas de las siguientes figuras se pueden trazar sin levantar el lápiz y sin repetir línea, *¿cuáles?*

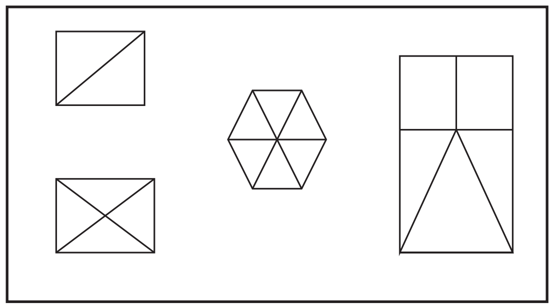


Figura 4.6

Observe la siguiente secuencia de figuras. Todas ellas se pueden dibujar con las condiciones estipuladas.

En la figura 4.7 encontramos el caso más simple, en donde el punto de partida (i) coincide con el punto de llegada (f).

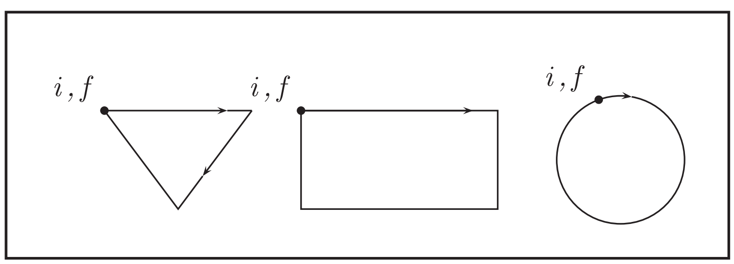


Figura 4.7

Notemos que en estos trazos, la $forma$ no es determinante para la solución del problema[1]; ellos son esencialmente los mismos.

[1]Existen otros problemas en donde la forma de las figuras es irrelevante para su solución; una de las ramas de la matemática que se ocupa de algunos de ellos es la topología.

La figura 4.8 muestra de nuevo tres trazos en esencia iguales, en el sentido que tienen la misma solución, aunque su forma es distinta. *Busque otras.*

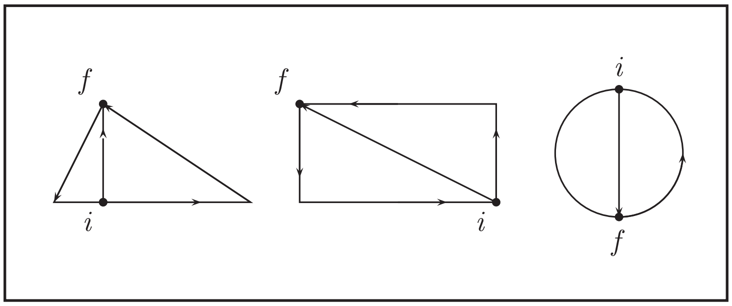


Figura 4.8

El primer trazo de la figura 4.8 se obtiene mediante la adición de una línea interior al primer trazo de la figura 4.7 y por un proceso similar, podemos obtener nuevas situaciones que también son equivalentes, como las que se muestran en la figura 4.9.

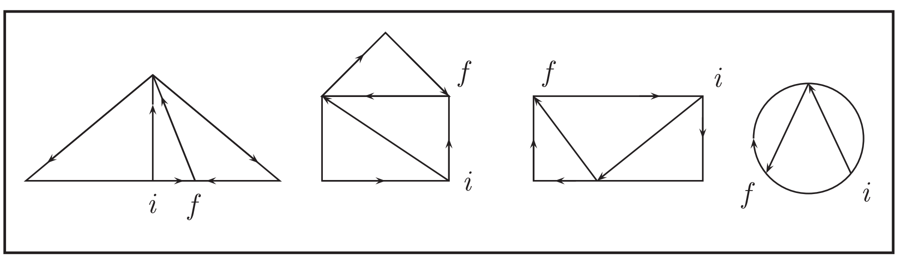


Figura 4.9

Exprese un criterio según el cual son equivalentes los trazos en cada una de las figuras anteriores.

La figura 4.10 muestra otros trazos que se pueden hacer, sin repetir línea y sin levantar el lápiz, que pueden servir para que usted intente sus propias conjeturas, sin importar que logre o no una conclusión válida, mediante el pegamiento de figuras similares al primer trazo de la figura 4.8.

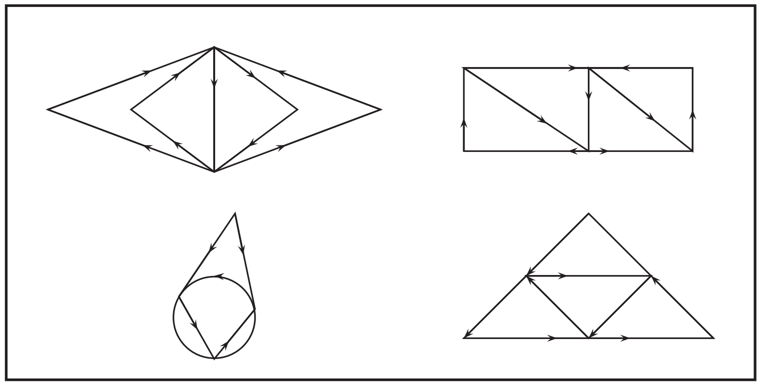


Figura 4.10

Sin embargo, si adicionamos una línea más al primer trazo de la figura 4.9, la construcción ya no es posible. Este y otros casos imposibles se muestran en la figura 4.11. *Estudie en las figura que hemos presentado y determine en qué condiciones se pueden trazar sin levantar el lápiz y sin repetir línea.*

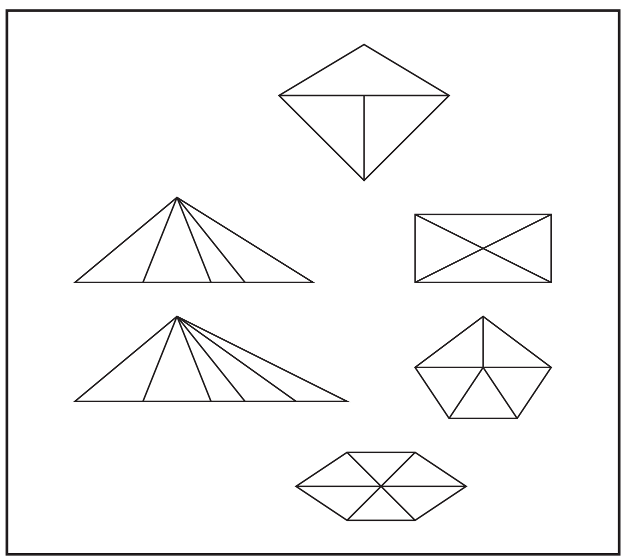


Figura 4.11

En figuras como las que hemos presentado se acostumbra llamar *vértices* a los puntos de los cuales parten las líneas, *vértice impar* si de él parte un número impar de líneas, y *par* en caso contrario. Por ejemplo, el vértice A en la figura 4.12 es par y el B es impar.

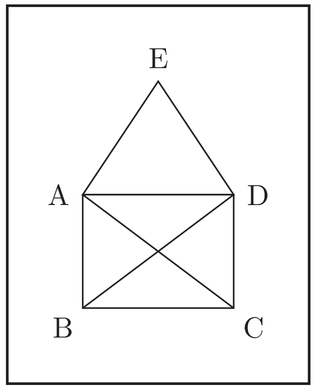


Figura 4.12

El problema de hacer trazos sin levantar el lápiz y sin repetir línea está relacionado con uno que le fue propuesto al matemático Leonhard Euler, sobre un paseo por la ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado); allí hay una isla llamada Kueiphof, el río que la rodea se divide en dos brazos y sobre ellos, en tiempos de Euler, estaban colocados siete puentes, como se indica en la figura 4.13.

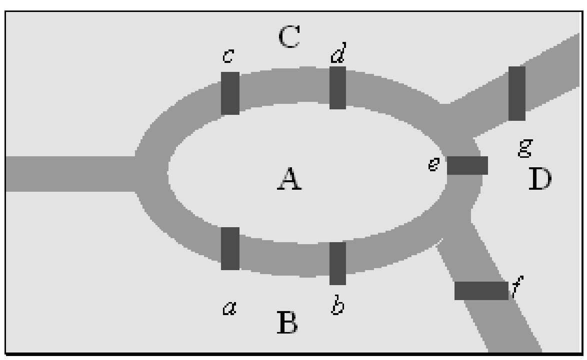


Figura 4.13

Los habitantes del lugar intentaban descubrir una trayectoria para sus paseos, de forma tal que pudiesen regresar al punto de partida después de haber cruzado por los siete puentes, pero pasando por cada uno solo una vez.

Euler presentó una solución a un problema más general: "dada una configuración cualquiera del río y de los brazos en que pueda dividirse, así como un número cualquiera de puentes, determinar si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez, de la siguiente forma:

Si hay más de dos regiones a las que conduce un número impar de puentes, ninguna ruta se puede hallar que satisfaga las condiciones requeridas.

Si, por el contrario, hay solo dos regiones con un número impar de puentes que conduzcan a ellas, el camino pedido se puede realizar, supuesto que comience en una de tales regiones.

Si, finalmente, no hay ninguna región a la que conduzca un número impar de puentes, el camino pedido se puede realizar comenzando en cualquier región".

Una solución propuesta en teoría de grafos para el problema de trazar figuras sin levantar el lápiz y sin repetir línea se muestra a continuación (Tahan, 1994, p. 236):

a) Las figuras donde todos sus vértices son pares se pueden dibujar con un trazo continuo partiendo de un vértice cualquiera.

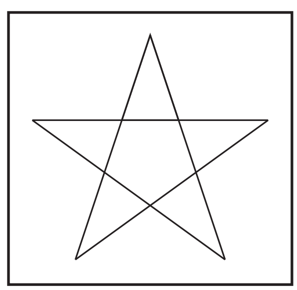


Figura 4.14

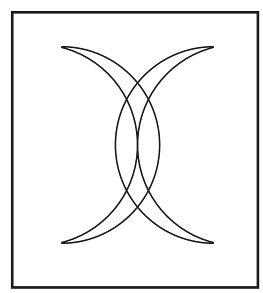


Figura 4.15

La estrella pentagonal (figura 4.14), símbolo que empleaban los pitagóricos para reconocerse, y la firma de Mahoma, formada por dos medias lunas opuestas (figura 4.15), y que según la tradición, trazaba el Profeta con la punta de su cimitarra, son dos de estos casos.

b) Cuando una figura tiene dos vértices impares, puede describirse con trazo continuo partiendo de uno de dichos vértices.

Así, por ejemplo, la figura 4.16 puede describirse en cualquier sentido con tal de que se parta de una de sus vértices impares B o D.

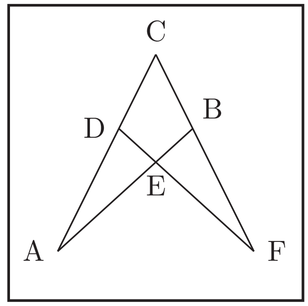


Figura 4.16

En iguales condiciones se halla la figura 4.17.

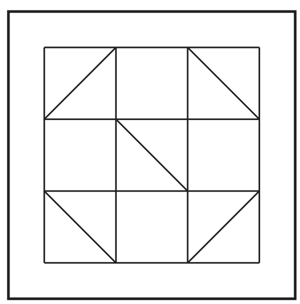


Figura 4.17

c) Las figuras que tienen más de dos vértices impares no pueden describirse con un trazo continuo.

Compare esta solución con la dada por Euler al problema de los puentes. ¿A qué corresponde una región en el lenguaje de los trazos?, ¿a qué corresponde un puente?; dibuje el trazo[2] *correspondiente.*

[2]La palabra trazo que utilizamos aquí, corresponde a *grafo* en los libros dedicados a su estudio, por ejemplo: Johnson y Johnson (1972).

4.9. Contar en combinatoria

La teoría de las probabilidades (Kreyszig, 1978) es una parte de la matemática que estudia fenómenos *aleatorios*, aquellos que no son determinísticos, como por ejemplo el lanzamiento de un dado o una moneda no siempre tienen el mismo resultado; en ella se utilizan conceptos de combinatoria que describimos enseguida.

Ejercicios

1. **El número de permutaciones de n objetos:** estudiemos de cuántas formas se pueden colocar en un renglón 1, 2, 3 y 4 letras respectivamente.

   En el primer caso solo tenemos una forma.

   En el segundo caso, si las letras son a y b, estas las podemos colocar de dos formas diferentes
   $$ab \quad \text{y} \quad ba$$

   Para tres letras, por ejemplo a, b y c, las podemos colocar de seis formas distintas a saber:
   $$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$$

   notemos que dos empiezan con a, dos con b y dos con c, en total $3 \times 2 = 6$; tres formas de empezar con dos posibilidades cada una.

   Si son cuatro letras, digamos a, b, c y d, tenemos cuatro maneras de empezar, y por el ejercicio anterior, seis posibilidades en cada una, por ejemplo:
   $$abcd, \quad abdc, \quad acbd, \quad acdb, \quad adbc, \quad adcb$$

   Ahora, colocando la b en la primera posición nos resultarán otras seis posibilidades y si continuamos con cada una de las letras vamos a obtener seis posibles formas por cada letra; lo que nos da $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneras diferentes para las cuatros letras.

   ¿Cuántas formas posibles existen para colocar 5 letras? ¿Cuántos posibles arreglos se pueden encontrar con 10 elementos diferentes?; ¿con 25?, ¿con k letras? El resultado lo escribimos $n!$, *lo llamamos n factorial y convenimos que* $0! = 1$.

2. **Elección de k objetos de n posibles teniendo en cuenta el orden:** si tenemos cinco objetos que no se puedan distinguir por el tacto, por ejemplo, bolas de igual volumen y peso, pero distinto color en una bolsa, hay exactamente cinco posibilidades de sacar *una* bola de un color determinado.

   Si deseamos sacar dos bolas de manera que sea diferente sacar las bolas en diferente orden, hay cinco posibilidades de sacar la primera y cuatro posibilidades de sacar la segunda, pues ya hay una menos en la bolsa. Es decir, 5×4 en total.

   Para sacar la tercera bola hay $5 \times 4 \times 3$ posibilidades. *Si sacamos 4 bolas de 6 posibles, ¿cuántas posibilidades hay?; ¿si sacamos k bolas de n posibles?*

   El resultado para elegir k bolas de n posibles teniendo en cuenta el orden lo podemos escribir como

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

   Exponga un argumento que justifique esta escritura.

3. **Elección de k objetos de n posibles sin tener en cuenta el orden:** complicando el problema anterior un poco más, *deseamos saber* (y esto es fundamental en cualquier estudio) de cuántas formas se puede escoger dos bolas de cinco posibles, pero en esta ocasión no distinguimos entre sacar la bola marcada con un color y luego la marcada con otro color, y la elección en orden contrario; es decir, sacar primero la bola del segundo color y luego la bola del primero.

   En este caso, las posibilidades se reducen a la mitad; es decir, dividimos la respuesta del problema anterior, entre dos.

   Si en lugar de dos, sacamos tres, cuatro, bolas, sin distinguir el orden de aparición, ¿cuántas formas son posibles?; ¿si sacamos k bolas de n posibles?

   El resultado de elegir k bolas de n posibles lo podemos escribir como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

   conocido como *número combinatorio* o *coeficiente binomial. Exponga un argumento que justifique esta escritura.*

4. *¿De cuántas formas pueden siete personas estar sentadas en una silla de una cafetería con capacidad para tres personas?*

5. *Se quieren sentar tres hombres y dos mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?, ¿y si son cinco hombres y cuatro mujeres?*

6. *¿De cuántas formas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa de tres puestos, si pueden sentarse de cualquier forma?*

7. *¿De cuántas formas pueden sentarse cinco personas alrededor de una mesa de tres puestos, si dos personas determinadas no deben sentarse una al lado de la otra?*

8. *Con tres mujeres y cinco hombres quiere formarse un comité de dos mujeres y tres hombres. ¿Cuántos comités distintos pueden formarse si:*

   i. No se impone ninguna restricción?

   ii. Dos mujeres determinadas deben estar en el comité?

   iii. Un determinado hombre no debe estar en el comité?

9. En dos cajas hay encerrados un mango y una papaya; si sabemos que en cada caja hay una sola fruta, es obvio que sacando la fruta que hay en una de ellas sabremos el contenido de la otra.

   Similarmente es posible saber el contenido de tres cajas, donde hay tres mangos y tres papayas, sacando solo una fruta de cada caja y sabiendo que en cada caja hay dos frutas y que no hay en ellas la combinación de frutas que se indica en la figura. *Encuentre la solución. Enuncie y resuelva una generalización de este problema para cuatro cajas, seis mangos y seis papayas.*

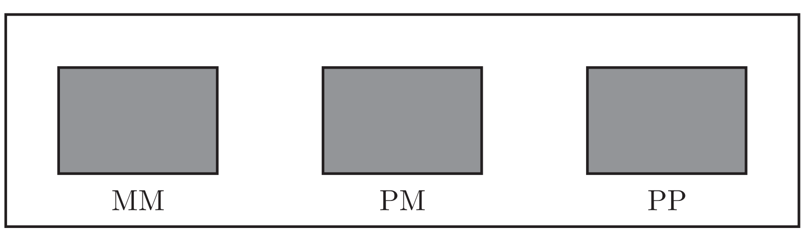


Figura 4.18

10. *¿Con una balanza es posible distinguir una moneda falsa entre tres, sabiendo que la falsa pesa menos y haciendo solo una pesada?; ¿y si son seis, ocho, o nueve monedas, se puede en dos pesadas?*

    ¿Y si la falsa pesa distinto de las otras dos, pero no sabemos si más o menos, se puede distinguir una de tres haciendo dos pesadas? ¿Una de 9 o de 12 en tres pesadas? ¿Hay una regla general para este problema?

4.10. Contar en teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de la matemática que le sirve de fundamento, utilizando como punto de partida los conceptos de conjunto y de pertenencia de un elemento a un conjunto y unos axiomas que relacionan los conceptos básicos.

En teoría de conjuntos, como en casi todas las ramas de la matemática aparece el conteo de forma natural. Asumiremos de momento que podemos contar los elementos de conjuntos particulares y nos ponemos por tarea contar los elementos de conjuntos formados a partir de ellos.

4.10.1. Subconjuntos y el conjunto de partes

Un conjunto X es subconjunto de otro conjunto Y si y solo si todo elemento de X es elemento de Y. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto X es el conjunto de partes de X y se denota $\wp(X)$.

Ejercicio

Para responder a la pregunta: *¿si un conjunto X tiene n elementos, cuántos subconjuntos tiene X?* Es decir, *¿cuántos elementos tiene su conjunto de partes* $\wp(X)$? Empecemos haciendo una lista:

Si X es vacío naturalmente tiene un solo subconjunto.

Si X tiene un elemento, tiene dos subconjuntos, etc.

Encuentre todos los subconjuntos en conjuntos con tres, cuatro, cinco, seis elementos y complete la tabla 4.4.

Escriba una fórmula para el caso en que el conjunto tenga n elementos.

Observe en el proceso de formación de la tabla. ¿Cuántos conjuntos se agregan en cada paso? Dé una explicación para ello.

Elementos	**Subconjuntos**
0	1
1	2
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 4.4

4.10.2. El producto cartesiano de conjuntos

Dados dos conjuntos, A y B, el *producto cartesiano* de A y B notado $A \times B$, es el conjunto formado por las parejas ordenadas (a, b) de manera que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B; es decir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

Si queremos averiguar el número de elementos de un producto conociendo el número de elementos de cada uno de sus factores, procedemos por partes:

Primero, tomemos el conjunto A con un elemento; por ejemplo, $A = \{a\}$ y el conjunto B, también con un elemento, digamos $B = \{x\}$; el número de parejas ordenadas que se puede formar teniendo como primera componente a elementos de A y como segunda componente a elementos de B, es solamente:

$$A \times B = \{(a, x)\}$$

Si A tiene un elemento y B tiene dos elementos el producto naturalmente tiene dos parejas, así sucesivamente; luego tomamos un conjunto A con dos elementos y variamos el número de elementos de B.

Ejercicio

Complete la tabla 4.5.

Número de elementos de A	**Número de elementos de B**	**Número de elementos de $A \times B$**
1	1	1
1	2	2
1	3	3
1	k	k
2	1	2
2	2	4
2	3	6
2	k	$2k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	k	?

Tabla 4.5

4.10.3. Relaciones

A cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ lo llamamos *una relación de A en B*.

Una relación R de un conjunto X en sí mismo la llamamos una *relación en X*.

Una relación R en un conjunto X es *reflexiva* si y solo si para todo $x \in X$, se cumple que $(x, x) \in R$.

R es *simétrica* en X si y solo si para todo x, $y \in X$, si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.

R es *antisimétrica* en X si y solo si para todo x, $y \in X$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces $x = y$.

R es *transitiva* en X si y solo si para todo x, y, $z \in X$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

R es una *relación de equivalencia*, si y solo si, R es reflexiva, simétrica y transitiva.

R es una *relación de orden* si y solo si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejercicios

1. *Si el número de elementos de A es n y el de B es m, ¿cuántas relaciones hay de A en B?*

2. *Formule ejemplos de relaciones que cumplan cada una de las propiedades enunciadas.*

3. *Para conjuntos con uno, dos, tres, cuatro, ..., elementos, ¿cuántas relaciones hay que cumplan cada una de las propiedades enunciadas? Procure una generalización.*

4.10.4. Funciones

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una relación de A en B, tal que todo elemento de A está como primera componente en alguna pareja ordenada de f, pero solamente en una.

Es decir, que si la pareja $(x, y) \in f$ y la pareja $(x, z) \in f$, debe tenerse que $y = z$.

El conjunto de todas las funciones que se pueden definir de un conjunto A en otro conjunto B lo notamos B^A. Nuestro propósito es averiguar cuántos elementos tiene B^A, si A tiene n elementos y B tiene m elementos.

De nuevo recurramos a las tablas por casos:

Supongamos que A tiene solo un elemento y B tiene un elemento; por ejemplo:

$$A = \{0\} \quad \text{y} \quad B = \{a\}$$

Una función de A en B debe tener por lo menos una pareja que tenga como primera componente a 0, y el único elemento para combinar en B es a, luego la única función de A en B es:

$$f = \{(0, a)\}$$

Si A tiene solo un elemento y B tiene dos elementos, por ejemplo:

$$A = \{0\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b\}$$

Una función de A en B debe tener por lo menos una pareja que tenga como primera componente a 0, y pero ya hay dos posibilidades para combinar en B, una con a y otra con b, luego hay dos funciones de A en B, ellas son:

$$f = \{(0, a)\} \quad \text{y} \quad g = \{(0, b)\}$$

Así, es fácil intuir que si A tiene un elemento y B tiene n elementos, en total hay n funciones de A en B; una por cada elemento de B como segunda componente.

Ejercicios

1. Si A tiene n elementos y B solo uno, la situación es distinta, pues únicamente hay una función de A en B. *¿Por qué?*

2. *Complete la tabla 4.6.*

$\#A$	$\#B$	$\#B^A$
1	n	n
n	1	1
2	2	4
2	3	9
2	n	
3	2	8
3	3	27
3	n	
n	4	
n	m	

Tabla 4.6

4.10.5. Funciones inyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *inyectiva o uno a uno* si todo elemento de B que está en alguna pareja de la función, está solo una vez; es decir, que si la pareja $(x, y) \in f$ y la pareja $(z, y) \in f$ debe tenerse que $x = z$.

Dicho de otra manera: si para todo x, y elementos de A se cumple que $f(x) = f(y)$, entonces debe tenerse que $x = y$.

Ejercicio

Para contar cuántas funciones inyectivas hay de un conjunto A con n elementos en un conjunto B con m elementos debemos distinguir dos casos:

i. Si $m \leq n$.

ii. Si $n \leq m$.

En el primero, no hay funciones inyectivas de A en B. *¿Por qué?*

Para determinar el número de funciones inyectivas de A en B, en el segundo caso, *haga una tabla similar a las anteriores y establezca una fórmula.*

4.10.6. Funciones sobreyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *sobreyectiva* o simplemente *sobre* si todo elemento de B está en alguna pareja de la función; es decir, que para todo elemento y de B exista un elemento x de A tal que la pareja $(x, y) \in f$.

Ejercicio

Para contar cuántas funciones sobreyectivas hay de un conjunto A con n elementos en un conjunto B con m elementos, también debemos distinguir dos casos:

i. Si $n \leq m$.

ii. Si $m \leq n$.

En el primer caso, no hay funciones sobreyectivas de A en B. *¿Por qué?*

Para el segundo, *haga una tabla similar a las anteriores y establezca una fórmula para el número de funciones sobreyectivas de A en B.*

4.10.7. Funciones biyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejercicio

De las dos secciones anteriores se desprende que la única manera de que hayan funciones biyectivas entre dos conjuntos A y B es que ambos tengan el mismo número de elementos. *¿Por qué?*

¿Cuántas funciones biyectivas hay entre dos conjuntos que tengan n elementos?

4.10.8. Operaciones binarias internas

Una *operación binaria interna* en un conjunto A es una función

$$* : A \times A \to A$$

Para conocer cuántas operaciones binarias internas son posibles en un conjunto de n elementos veamos primero los casos más sencillos, por ejemplo con $n = 2$. Debemos llenar una tabla

	0	1
0	?	?
1	?	?

Tabla 4.7

donde el signo ? debemos reemplazarlo por 0 o por 1. Como hay cuatro casillas que se pueden llenar de dos formas distintas, en total hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$, formas de definir las operaciones.

Con tres elementos hay nueve casillas que se pueden llenar de tres maneras distintas, es decir, $3^9 = 19683$, maneras de definir una operación.

Si de estas operaciones queremos saber cuántas tienen elemento idéntico en un conjunto con dos elementos, $\{0, 1\}$ debemos elegir a uno de ellos como elemento idéntico.

Si escogemos a 0, la fila y columna donde se ubica quedará llena y la tabla queda

	0	1
0	0	1
1	1	?

Tabla 4.8

donde falta llenar una casilla, que se puede llenar de dos formas distintas, es decir, hay dos operaciones con elemento idéntico 0. Por supuesto otras dos con 1; en total $2 \times 2 = 4$ operaciones con elemento idéntico.

Con tres elementos $\{0, 1, 2\}$ hay tres posibilidades de elegir y en cada una de ellas quedan cuatro casillas por llenar, cada una con tres posibilidades; es decir, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ operaciones para cada elemento fijo como elemento idéntico. En total $3 \times 81 = 243$ operaciones con elemento idéntico.

Ejercicios

1. *¿Cuántas operaciones binarias internas son posibles en un conjunto de n elementos?*

2. *De las operaciones binarias anteriores, ¿cuántas tienen elemento neutro?*

3. *De todas las operaciones binarias posibles de un conjunto con n elementos, ¿cuántas son conmutativas?*

4. *De todas las operaciones binarias conmutativas de un conjunto con n elementos, ¿cuántas tienen además elemento neutro?*

Capítulo

5

Inducción a partir de listas

Uno de los procesos lógicos que más han desarrollado las personas que se dedican a estudiar matemáticas, es el proceso de encontrar regularidades en una sucesión de resultados a partir de algunos casos particulares, esto es, encontrar una manera general de decir todos los casos, hallar fórmulas que resuman en una sola expresión todas las características de un grupo de informaciones, a este proceso lo llamaremos *inducir*.

∗ ∗

Este proceso, como casi todos, no se desarrolla de manera espontánea a partir de una explicación, sino, por el contrario, va surgiendo, se va formando lentamente, saliendo del ejercicio cotidiano, de la insistencia, de la continua repetición. Es fruto de muchos ensayos y errores, de volver a empezar, pero, sobre todo, de la persistencia en el trabajo.

∗ ∗

En el ejercicio del proceso de inducir, es frecuente enfrentarse a dificultades adicionales, como, por ejemplo, confirmar la sospecha de que una fórmula que es válida en *muchos* casos lo es para *todos* los casos; dificultad que solo superaremos cuando estudiemos el principio de *demostración por inducción matemática*[1].

[1]La expresión *inducción matemática* tiene un significado particular en matemáticas como método de demostración de afirmaciones que se hacen sobre todos los números

Otra dificultad radica en la tendencia a creer que todo proceso que tiene algún tipo de regularidad es susceptible de ser modelado mediante una fórmula, situación que en muchos casos no se tiene; sin embargo, la ganancia obtenida en el intento es suficiente retribución por el esfuerzo.

Iniciaremos recurriendo a formar listas de números para percibir relaciones entre los números, que nos lleven a establecer conjeturas y verificarlas en casos particulares; en el siguiente capítulo juntaremos listas para hacer tablas e inducir en dos direcciones.

Los números naturales tienen una gran simplicidad para su comprensión, lo que facilita la familiarización con ellos de manera relativamente rápida, pero encontrar y sistematizar relaciones entre ellos puede llegar a complicarse mucho, aunque en la mayoría de los casos las relaciones halladas pueden ser enunciadas de manera simple. Esta aparente dificultad les da una ventaja pedagógica, pues con pocos conocimientos podemos plantear y resolver problemas cuyo enunciado es de fácil comprensión, permitiendo, además, distintos niveles de profundidad en las soluciones propuestas.

Comenzaremos por estudiar algunas curiosidades de los números que forman parte del legado matemático griego[2], las cuales, por su cercanía con representaciones geométricas sencillas, nos ayudan a desarrollar la intuición y con ella la capacidad de abstracción y generalización.

5.1. Números pares e impares

En la lista de los números naturales,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

una primera observación permite diferenciar dos tipos de números, que aparecen cuando contamos de dos en dos, a partir de 0 o a partir de 1.

Los primeros, conocidos como *números pares* son:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots$$

naturales; este uso lo precisaremos en el capítulo 7.

[2]Los griegos, hacia el siglo IV a.C. desarrollaron los conceptos básicos de lo que hoy conocemos con el nombre *teoría de números*. Pero antes, desde el siglo VI a.C., matemáticos como Pitágoras y los que formaban parte de su escuela (entre ellos Teano, una célebre mujer matemática) estudiaron algunos tipos de números, que trataremos en este capítulo, números con tal importancia para las matemáticas que son considerados siglos después en obras tan famosas como en la Aritmética de Diofanto de Alejandría (siglo III d.C., aprox.).

Los segundos, llamados *números impares*, son:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots$$

Iniciemos tratando de determinar cuál es el par número 100. Un camino es notar la regularidad en la sucesión de número pares y establecer una fórmula.

Como la diferencia entre cada uno de ellos es 2, al cabo de n pasos, obtenemos $2n$ si partimos de 0.

Para los números impares el mismo proceso nos da $2n-1$ si empezamos a contar en 1.

Esto significa que si queremos saber cuál es el número que ocupa el lugar 1000 en la lista de los números impares, basta reemplazar el número 1000 por la letra n en la fórmula $2n-1$ para obtener $2(1000)-1 = 1999$.

* *

Esta es una herramienta formidable, nos permite saber mucho más allá de lo que podemos escribir, no hay un último paso ¡Ningún animal, no humano, puede inferir tanto!

* *

Empecemos a formular preguntas, por ejemplo: *¿la suma de dos pares es par?; ¿la de dos impares?, ¿el producto?, ...*

Ejercicios

1. *Sea p un impar y n un número natural cualquiera, entonces*

$$p^2 + np$$

   a) *¿Es siempre impar?*
   b) *¿Es siempre par?*
   c) *¿Es par si n es par?*
   d) *¿Es impar si n es impar?*
   e) *¿Es impar si n es par?*

   Justifique su respuesta.

2. *Encuentre el promedio*[3] *de los 7777 primeros números impares.*

[3] El promedio de un conjunto de números es el resultado de dividir su suma entre el número de elementos del conjunto.

3. *Si en lugar de contar de 2 en 2, partiendo de 0, contáramos de 3 en 3, obtendríamos la siguiente lista:*

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \ldots$$

¿Comparte ella algunas propiedades de los números pares? Explique.

¿Si partimos de 1, cuál es la lista?, ¿si partimos de 2?, ¿si partimos de 3?, etc.; ¿cuántas listas hay que no tengan elementos en común?

Contemos ahora de 4 en 4, a partir de 0, de 1, de 2, etc. Enuncie conclusiones generales cuando contamos de k en k, donde k es cualquier número natural.

5.2. Los números triangulares

Los discípulos de Pitágoras[4] estudiaban los números absolutos (aritmética), los números aplicados (la música), las magnitudes en reposo (geometría) y las magnitudes en movimiento (astronomía). La ciencia de los números absolutos estudiaba los números poligonales (aquellos que se pueden representar como ensamble de un polígono regular básico preservando la forma), en especial triangulares y cuadrados, las razones y proporciones, la teoría de la divisibilidad, los números primos, perfectos (aquellos que son iguales a la suma de sus divisores diferentes de él), etc., y las progresiones (Caro, 1936, p.p. 13-14).

Los pitagóricos representaban los números por medio de agujeros en la arena o por medio de piedras[5]. Así, por ejemplo, los números triangulares los formaban, cada uno a partir del anterior, añadiendo líneas de piedras conformando triángulos equiláteros, como se muestra en la figura 5.1.

[4]Para los pitagóricos los números lo eran todo, no solo el instrumento para comprender y explicar todos los fenómenos del universo, sino que, además, eran de naturaleza divina. Le atribuían cualidades morales a los números; en la matemática griega se encuentran números perfectos, números amigables, y otras muchas curiosidades. El 1, que no era número para los pitagóricos, representaba la dignidad, el 2 representaba el mal, el 3 la armonía, el 5 el matrimonio, el 7 a la diosa Atenea. Un video recomendado acerca de Pitágoras es el documental titulado *El legado de Pitágoras* que se puede encontrar en http://www.youtube.com/watch?v=h6qJoUQPvE_A.

[5]En la parte tres del video *Historia del uno*, se puede apreciar esta idea. No obstante, le sugerimos al lector dedicarle tiempo a disfrutar de las siete partes del video completo (Murphy y Terry, 2005).

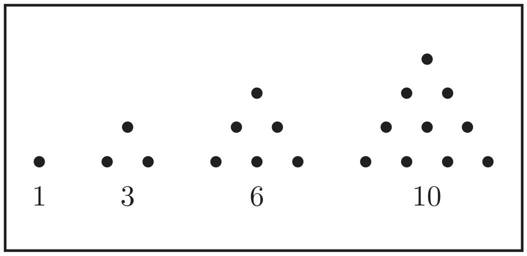


Figura 5.1

Los primeros números triangulares son:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots$$

Ejercicio

¿Cuáles son los cuatro siguientes números triangulares? ¿Cuál es el 35° *número triangular?*

Una manera de resolver este problema es hacer los dibujos que continúen la secuencia presentada y contar los puntos. Por supuesto, este proceso no es práctico.

Sin necesidad de recurrir al dibujo, podemos encontrar una manera para saber cuántos puntos hay en un triángulo equilátero, como los que aparecen en la figura 5.1, pero esta vez de lado: 9, 10, 15, 157, etc. *La mente ve lo que los ojos no alcanzan.*

∗ ∗

Se hace necesario detectar las regularidades que nos permitan saberlo. Cuando lo logramos, esperamos que esa regularidad sea válida para todos los casos, pero no podemos escribirla y verificarla para cada uno de ellos; tenemos que hacer una representación simbólica de los elementos involucrados en las relaciones del problema.

∗ ∗

En el ejemplo que nos ocupa, al relacionar los números triangulares con los lados de los triángulos formados, podemos empezar haciendo una lista de los primeros diez números triangulares:

n	T_n
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

Una idea que puede ser de utilidad para encontrar una fórmula que nos permita calcular el número triangular T_n que ocupa el lugar n en la lista es notar que cada número triangular T_n se forma sumando n al triangular anterior, es decir que partiendo de $T_1 = 1$:

$$\begin{aligned} T_1 + 2 &= T_2 \\ T_2 + 3 &= T_3 \\ T_3 + 4 &= T_4 \\ T_4 + 5 &= T_5 \end{aligned}$$

y en general

$$T_{n-1} + n = T_n.$$

O sea que

$$\begin{gathered} T_1 = 1 \\ T_2 = 1 + 2 \\ T_3 = 1 + 2 + 3 \\ T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{gathered}$$

y en general

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n.$$

Es decir que el problema de calcular el n–ésimo número triangular es equivalente a calcular la suma de los primeros n números naturales.

Para efectuar esta suma no es sensato usar la calculadora, sobre todo si el número n es grande, pero puede ayudar la observación, *pero no una observación cualquiera.*

En el caso de $n = 10$, es decir:

$$T_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Vemos que al sumar el primer número de la adición con el último $(1+10)$ obtenemos el mismo resultado que al sumar el segundo con el penúltimo $(2+9)$, y el tercero con el antepenúltimo $(3+8)$ y así sucesivamente.

Si intentamos sumar los primeros 100 números naturales (en base 10) también se tiene que $100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3$, etc.

Conjeturamos que esta observación se cumple para todos los números naturales, o sea que

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

Y como $(n+1)$ está repetido n veces la suma de todos estos números es $n(n+1)$, que corresponde a la suma de dos veces la suma de los primeros n números naturales, una en orden ascendente y otra en orden descendente. En conclusión

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es decir, que el n–ésimo número triangular es

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La lista de los números triangulares se puede hacer tan grande como queramos usando una hoja electrónica de cálculo como Excel. En la celda `A1` de la hoja escribimos =`FILA()`, esta función imprime en la celda el número de la fila en la que se está trabajando; en la celda `B1` escribimos =`(A1*(A1 + 1))/2`, esta instrucción imprime en la celda el número triangular T_1; ahora para extender estas instrucciones a las otras celdas, seleccionamos la celda `A1` y con el cursor en la esquina inferior derecha de la celda, desplegamos la sección hasta la celda `An` deseada. De forma similar, seleccionamos la celda `B1` y con el cursor en la esquina inferior derecha de la celda, desplegamos la sección hasta la celda `Bn`.

Ejercicios

1. *¿Es válida la expresión hallada para calcular los números triangulares en base 8?, ¿en otras bases?*
2. *Una curiosidad en base 9 es que los números 1, 11, 111, 1111, ..., son todos números triangulares. Proponga una explicación. ¿Habrá un caso similar en otra base?*
3. *Observe y enuncie regularidades sobre la lista de los números triangulares. Pregúntese por ejemplo cuándo un número triangular es par, cuando es múltiplo de algún número dado, si hay números triangulares primos, ...*

✳ ✳

Aprender a plantearse preguntas es muy importante en el ejercicio de la actividad matemática y también en la formación como futuro profesor de matemáticas.

✳ ✳

5.2.1. Suma de números triangulares

De la misma manera en que nos preguntamos si la suma de números pares o impares da como resultado un número par o impar, es válida la pregunta: ¿la suma de dos números triangulares es un número triangular?

Aunque no es el caso general, pues $1 + 3 = 4$ muestra un ejemplo en contra, hay casos en que así es (Pinzón, Moreno y Luque, 1998, p. 97); por ejemplo, la lista de los números triangulares aumentada, ayudándonos con Excel, nos permite observar que:

$$\begin{aligned} T_3 + T_5 &= T_6 \\ T_4 + T_9 &= T_{10} \\ T_5 + T_{14} &= T_{15} \\ T_6 + T_{20} &= T_{21} \end{aligned}$$

Los subíndices de los primeros sumandos crecen como los números naturales, los de la suma son los números triangulares correspondientes y los del segundo sumando son estos disminuidos en 1, en símbolos:

$$T_n + T_{(T_n - 1)} = T_{(T_n)}$$

pero estos no son todos los casos; por ejemplo, se tiene que:

$$T_{18} + T_{25} = T_{31}.$$

Por lo tanto, es necesario obtener una generalización que contenga todas las diferencias entre los subíndices.

Para ello, organicemos diversas *tríadas pitagóricas triangulares* a partir de la diferencia entre los subíndices, indicada en la primera fila, como se aprecia en la tabla 5.1.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$	$\boldsymbol{k}$
$T_1 + T_0 = T_1$	$T_2 + T_0 = T_2$	$T_3 + T_0 = T_3$	$T_4 + T_0 = T_4$	$T_5 + T_0 = T_5$		
$T_2 + T_2 = T_3$	$T_5 + T_6 = T_8$	$T_8 + T_{10} = T_{13}$	$T_{11} + T_{14} = T_{18}$	$T_{14} + T_{18} = T_{23}$		
$T_3 + T_5 = T_6$	$T_6 + T_9 = T_{11}$	$T_9 + T_{13} = T_{16}$	$T_{12} + T_{17} = T_{21}$	$T_{15} + T_{21} = T_{26}$		
$T_4 + T_9 = T_{10}$	$T_9 + T_{21} = T_{23}$	$T_{11} + T_{20} = T_{23}$	$T_{19} + T_{45} = T_{49}$	$T_{19} + T_{35} = T_{40}$		
$T_5 + T_{14} = T_{15}$	$T_{10} + T_{26} = T_{28}$	$T_{12} + T_{24} = T_{27}$	$T_{20} + T_{50} = T_{54}$	$T_{20} + T_{39} = T_{44}$		

Tabla 5.1

Observando la secuencia en la primera columna, podemos sugerir que todas las adiciones satisfacen la expresión:

$$T_n + T_{\left(\frac{T_{n-1}}{1}\right)} = T_{\left(\frac{T_{n-1}}{1}\right)+1}.$$

Nótese que esta es la misma fórmula hallada anteriormente, pero escrita de otra manera, por conveniencia, como veremos más adelante.

∗ ∗

Es usual en matemáticas, escribir las cosas de diferente forma para adecuar unos resultados a otros ya obtenidos y establecer una regularidad.

∗ ∗

Para la segunda columna, aparecen dos casos:

Caso 1: para las filas 1, 3 y 5 tenemos:

$$\begin{aligned} T_2 + T_0 &= T_2 \\ T_6 + T_9 &= T_{11} \\ T_{10} + T_{26} &= T_{28} \end{aligned}$$

Como vemos, el subíndice del primer sumando es el doble del número de su fila, lo cual notamos como T_{2k}.

Si tratamos de expresar al segundo sumando en términos del primero notamos que

$$\begin{array}{ccc} T_2 = 3 & \text{y} & 0 = \dfrac{3-3}{2} \\ T_6 = 21 & \text{y} & 9 = \dfrac{21-3}{2} \\ T_{10} = 55 & \text{y} & 26 = \dfrac{55-3}{2} \end{array}$$

O sea que el segundo término de la adición, en términos del primero es

$$T_{\left(\frac{T_{2k}-3}{2}\right)}$$

De modo que si k es impar tenemos:

$$T_{2k} + T_{\left(\frac{T_{2k}-3}{2}\right)} = T_{\left(\frac{T_{2k}-3}{2}\right)+2}$$

Enfaticemos en que la expresión

$$T_{\left(\frac{T_{2k}-3}{2}\right)}$$

es un número natural, puesto que T_{2k} es un número impar mayor o igual que 3 cuando k es impar

$$T_{2k} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

ya que el producto de dos impares es impar.

Caso 2: cuando k es par tenemos como ejemplo (para las filas 2, 4 y 6):

$$\begin{gathered} T_5 + T_6 = T_8 \\ T_9 + T_21 = T_{23} \\ T_{13} + T_{44} = T_{46} \end{gathered}$$

El subíndice del primer sumando es el doble del número de su fila más uno, lo notamos $T_{(2k+1)}$, el segundo sumando es

$$T_{\left(\frac{T_{(2k+1)}-3}{2}\right)}$$

O sea que si k es par tenemos:

$$T_{(2k+1)} + T_{\left(\frac{T_{(2k+1)}-3}{2}\right)} = T_{\left(\frac{T_{(2k+1)}-3}{2}\right)+2}$$

Como vemos en todos los casos encontramos infinitas parejas de números triangulares cuya suma es un número triangular.

Ejercicios

1. *Para la tercera columna, la fórmula*

$$T_n + T_{\left(\frac{T_n-6}{3}\right)} = T_{\left(\frac{T_n-6}{3}\right)+3}$$

   no es válida para todos los valores de n, por ejemplo para $n = 2$ o 4. Pero hay infinitos casos en que sí. Averigüe en cuáles casos es cierta.

2. *En la cuarta columna, la fórmula*

$$T_n + T_{\left(\frac{T_n-10}{4}\right)} = T_{\left(\frac{T_n-10}{4}\right)+4}$$

   es válida para algunos valores de n. Averigüe para cuáles.

3. *Proponga una fórmula general y verifique algunos casos particulares.*

4. Por supuesto, la forma que hemos presentado para organizar las tríadas de números triangulares halladas no es la única manera, otra forma es

$$\begin{array}{ccc}
15 + 21 = 36 & \to & T_5 + T_6 = T_8 \\
36 + 55 = 91 & \to & T_8 + T_{10} = T_{13} \\
66 + 105 = 171 & \to & T_{11} + T_{14} = T_{18}
\end{array}$$

   Que podemos escribir como

Fila	**Primer sumando**	**Segundo sumando**	**Suma**
1	5	6	8
2	8	10	13
3	11	14	18
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3n+2$	$4n+2$	$5n+3$

Tabla 5.2

Lo que significa que

$$T_{(3n+2)} + T_{(4n+2)} = T_{(5n+3)}$$

Proponga otras listas a partir de esta idea (o de cualquier otra).

5.2.2. Múltiplos de números triangulares

Una variación de la actividad anterior[6] surge al considerar sumandos iguales, por ejemplo

$$T_2 + T_2 = T_3$$

O de otra forma

$$2T_2 = T_3$$

también se cumple que

$$2T_{14} = T_{20}.$$

¿Hay otros números triangulares que cumplan esta relación? En caso afirmativo, ¿son infinitos?

Por supuesto, la pregunta es válida para un múltiplo k cualquiera de un número triangular.

Y como para $k = 2$ en los primeros 50 valores de n no encontramos más ejemplos, podemos cambiar el camino y estudiar alguna regularidad en la diferencia entre un número triangular y un múltiplo de otro triangular, o equivalentemente ¿En qué casos, si multiplicamos un número k con un número triangular T_n y luego le sumamos algo, nos da como resultado un número triangular T_p? En otros términos, ¿para cuáles valores de k, n, m y p se cumple que $kT_n + m = T_p$?

Para $k = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2T_1 + 1 &= T_2 \\ 2T_2 + 4 &= T_4 \\ 2T_3 + 9 &= T_6 \\ 2T_4 + 16 &= T_8 \\ 2T_5 + 25 &= T_{10} \end{aligned}$$

[6] Algunos de estos resultados fueron encontrados por el estudiante José Alirio Contreras Barrera en el segundo semestre de 2010, cuando desarrollaba su práctica apoyando el espacio académico Aritmética, bajo la asesoría del profesor Carlos Luque.

Así, conjeturamos que para todo número natural n se cumple que:

$$2T_n + n^2 = T_{2n}.$$

Otra posibilidad la obtenemos de

$$\begin{aligned} 2T_3 - T_1 + 4 &= T_5 \\ 2T_4 - T_2 + 4 &= T_6 \\ 2T_5 - T_3 + 4 &= T_7. \end{aligned}$$

Lo cual podemos generalizar como

$$2T_{(n+2)} - T_n + 4 = T_{(n+4)}.$$

Ejercicios

Haga listas en Excel en las que pueda tener T_n, $2T_n$, $3T_n$, ..., $9T_n$, para n tan grande como quiera; con base en ello:

1. *Verifique que para $k = 3$ se cumple*

$$\begin{aligned} 3T_n + T_{(n-1)} &= T_{2n} \\ 3T_n + T_{(n+1)} &= T_{(2n+1)} \end{aligned}$$

   Encuentre otras regularidades.

2. *Verifique que para $k = 6$ se cumple*

$$6T_n + T_{(n-1)} + T_{(n+1)} = (2n+1)^2$$

   Encuentre otras regularidades.

3. El caso $k = 9$ tiene un comportamiento particular. De la lista

$$\begin{aligned} 9T_1 + 1 &= T_4 \\ 9T_2 + 1 &= T_7 \\ 9T_3 + 1 &= T_{10} \\ 9T_4 + 1 &= T_{13} \\ 9T_5 + 1 &= T_{16} \\ 9T_6 + 1 &= T_{19} \end{aligned}$$

conjeturamos que

$$9T_n + 1 = T_{(3n+1)}.$$

¿Con cuál(es) otro(s) número(s) k se obtiene un comportamiento similar?

En el curso de aritmética del I-2010 de la Universidad Pedagógica Nacional encontramos este mismo resultado, pero en la forma

$$(T_4 - 1)T_n + 1 = T_{(2n+1)+n}.$$

¿Cuál sería el camino?

4. Por ejemplo, de los casos

$$\begin{aligned} 25T_1 + 3 &= 28 = T_7 \\ 25T_2 + 3 &= 78 = T_{12} \\ 25T_3 + 3 &= 153 = T_{17} \end{aligned}$$

conjeturamos que

$$25T_n + 3 = T_{(5n+2)}.$$

Y de los casos

$$\begin{aligned} 49T_1 + 6 &= 55 = T_{10} \\ 49T_2 + 6 &= 153 = T_{17} \\ 49T_3 + 6 &= 300 = T_{24} \end{aligned}$$

conjeturamos que

$$49T_n + 6 = T_{(7n+3)}.$$

Estudie el caso general: si T_n es un número triangular, ¿cuáles pares de números k y m hacen cumplir la igualdad

$$kT_n + m = T_p$$

para algún número natural p?

Una ayuda está en completar la tabla 5.3.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{kT_n + m = T_p}$
0	1	$T_n + 0 = T_n$
1	9	$9T_n + 1 = T_{(3n+1)}$
3	25	$25T_n + 3 = T_{(5n+2)}$
6	49	$49T_n + 6 = T_{(7n+3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla 5.3

5.2.3. Otras sumas de números triangulares

Otra variante es buscar cuádruplas de números triangulares, de manera que la suma de tres de ellos de como resultado el otro, por ejemplo

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2 + T_3 &= T_4 \\
T_1 + T_3 + T_6 &= T_7 \\
T_1 + T_4 + T_{10} &= T_{11} \\
T_1 + T_5 + T_{15} &= T_{16}
\end{aligned}$$

De donde tenemos que:

$$T_1 + T_{(k+1)} + T_{(T_{(k+1)})} = T_{(T_{(k+1)}+1)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \ldots$$

O iniciando con T_2:

$$\begin{aligned}
T_2 + T_3 + T_8 &= T_9 \\
T_2 + T_4 + T_{12} &= T_{13} \\
T_2 + T_5 + T_{17} &= T_{18} \\
T_2 + T_6 + T_{23} &= T_{24}
\end{aligned}$$

A partir de lo cual obtenemos:

$$T_2 + T_{(k+2)} + T_{(T_{(k+2)}+2)} = T_{(T_{(k+2)}+3)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \ldots$$

O con T_3:

$$\begin{aligned}
T_3 + T_4 + T_{15} &= T_{16} \\
T_3 + T_5 + T_{20} &= T_{21} \\
T_3 + T_6 + T_{26} &= T_{27} \\
T_3 + T_7 + T_{33} &= T_{34}
\end{aligned}$$

Conjeturamos,

$$T_3 + T_{(k+3)} + T_{(T_{(k+3)}+5)} = T_{(T_{(k+3)}+6)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \ldots$$

En suma, si iniciamos con T_n y le sumamos T_{n+k}, el tercer término es $T_{(T_{(k+n)}+(T_n-1))}$ y la fórmula es[7]:

$$T_n + T_{(k+n)} + T_{(T_{(k+n)}+(T_n-1))} = T_{(T_{(k+n)}+T_n)}$$

con $k = 1, 2, 3, \ldots$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejercicios

1. *Observe el siguiente patrón*

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &= T_4 \\ T_5 + T_6 + T_7 + T_8 &= T_9 + T_{10} \\ T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} &= T_{16} + T_{17} + T_{18} \\ T_{19} + T_{20} + T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24} &= T_{25} + T_{26} + T_{27} + T_{28} \end{aligned}$$

Conjeture el siguiente renglón. Exprese una fórmula general.

2. *Estudie quíntuplas de números triangulares.*

5.2.4. Números triangulares como productos

Los números triangulares, como cualquier otro, pueden escribirse como producto de números naturales, pero surgen curiosidades cuando a estos factores se les exige alguna condición particular, como que sean números consecutivos, o primos, triangulares, etc.

[7] Estos resultados fueron encontrados por los estudiantes Haydee Jiménez Tafur, Carlos Ruiz, Rafael Angarita y Diana Lucía Domínguez, bajo la asesoría del profesor Carlos Luque, cuando desarrollaban su práctica en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el primer semestre de 2006. Los resultados completos se hallan en Jiménez, Ruíz y Luque (2007).

Ejercicios

1. Algunos números triangulares son productos de dos números consecutivos, por ejemplo[8]:

$$2 \times 3 = 6 = T_3$$
$$14 \times 15 = 210 = T_{20}$$
$$84 \times 85 = 7140 = T_{119}$$
$$492 \times 493 = 242556 = T_{696}$$

Procure conseguir otros ejemplos.

Algunos números triangulares son productos de tres números consecutivos, pero solo hay seis de ellos:

$$1 \times 2 \times 3 = 6 = T_3$$
$$4 \times 5 \times 6 = 120 = T_{15}$$
$$5 \times 6 \times 7 = 210 = T_{20}$$
$$9 \times 10 \times 11 = 990 = T_{44}$$
$$56 \times 57 \times 58 = 185136 = T_{608}$$
$$636 \times 637 \times 638 = 258474216 = T_{22736}$$

Además 120 es el único número triangular que es producto de tres, cuatro y cinco números consecutivos

$$4 \times 5 \times 6 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

2. Algunos números triangulares son productos de dos números primos, ellos son conocidos como *números triangulares semiprimos*, por ejemplo:

$$2 \times 3 = 6 = T_3$$
$$3 \times 5 = 15 = T_5$$
$$3 \times 7 = 21 = T_6$$
$$5 \times 11 = 55 = T_{10}$$
$$7 \times 13 = 91 = T_{13}$$
$$11 \times 23 = 253 = T_{22}$$

Procure conseguir otros ejemplos.

[8]Este ejercicio y el siguiente fueron tomados de Gupta (2002).

3. Veamos algunos productos de números triangulares:

$$T_2 \cdot T_3 = 3 \times 6 = 18 = \frac{T_8}{2}$$
$$T_3 \cdot T_4 = 6 \times 10 = 60 = \frac{T_{15}}{2}$$
$$T_4 \cdot T_5 = 10 \times 15 = 150 = \frac{T_{24}}{2}$$

   en general para dos números triangulares consecutivos T_{n-1} y T_n, el producto no es un número triangular; pero casi, es la mitad de un triangular.

   ¿Hay casos en que el producto de dos números triangulares sea un número triangular?

4. El menor número de paquetes que se pueden colocar en dos sacos, de tal manera que en cada uno quede un número diferente de paquetes y que cada uno de ellos contenga por lo menos uno, es tres.

   ¿Cuántos en tres sacos?, ¿cuántos en cuatro sacos?, ¿cuántos en siete sacos?

5. Invirtiendo la pregunta, el mayor número de sacos en los que se pueden repartir 28 paquetes de manera que cada uno tenga por lo menos uno, pero cada uno con un número distinto de paquetes es 7. *¿Cuántos sacos con 55 paquetes?*

6. Y si tenemos 25 paquetes, podemos distribuirlos con las condiciones establecidas en máximo seis sacos, ubicando, por ejemplo, 1, 2, 3, 4, 5 y 10 paquetes en cada uno de los sacos. Por supuesto, esta no es la única solución posible.

   ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esta repartición?

7. Si el número de sacos es 17, *¿cuál es el número mínimo de paquetes?* Si el número de paquetes es 123, *¿cuál es el mayor número de sacos y de cuántas formas diferentes es posible hacerlo? ¿En qué casos la solución es única?*

8. En 1640, Pierre de Fermat encontró que todo número natural o es un número triangular, o es suma de dos o tres números triangulares. En 1796, Carlos Federico Gauss demostró que todo número natural es la suma de tres números triangulares (incluido el 0). *Exprese 954, 2500, 10000 y otros números en esta forma.*

9. En analogía a lo construido para los números triangulares, surgen nuevos números cambiando la operación que los genera; como vimos, si sumamos los n primeros números naturales obtenemos el n–ésimo número triangular; si en lugar de sumar multiplicamos los primeros n números naturales conseguimos el n–ésimo *número factorial*, que lo notamos $n!$ es decir

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n$$

Intente encontrar regularidades para estos números. Ensaye a definir números análogos a estos con otras operaciones.

10. Observe la siguiente secuencia:

28	2^2	18	2^1	8	2^3
26	2^1	16	2^4	6	2^1
24	2^3	14	2^1	4	2^2
22	2^1	12	2^2	2	2^1
20	2^2	10	2^1		

Encuentre la mayor potencia de 2 que divide a

$$28! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 25 \times 26 \times 27 \times 28$$

Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

a) Si n es par.

b) Si n es impar.

Repita el ejercicio con la mayor potencia de 3 que divida a $n!$

5.3. Los números cuadrados

En la sección anterior ya aparecieron los *números cuadrados*, estudiémoslos con más detalle. Para lo pitagóricos, los números cuadrado son los que corresponden al número de puntos que se pueden colocar repitiendo un cuadrado para formar nuevos cuadrados.

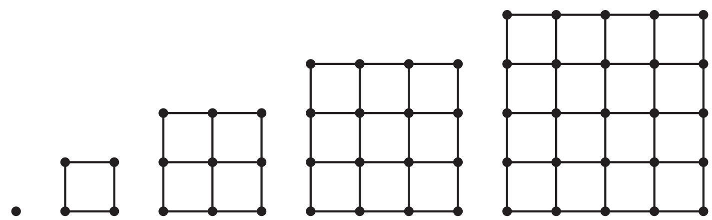


Figura 5.2

Los primeros números cuadrados son:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Su expresión general es n^2.

Ejercicios

1. Observe que:

$$\begin{aligned} 1+3&=4\\ 1+3+5&=9\\ 1+3+5+7&=16 \end{aligned}$$

Escriba los siguientes dos renglones y plantee una fórmula general a partir de lo observado.

2. El ejercicio anterior sugiere considerar la suma de los n primeros números pares, para establecer una fórmula que nos diga cuánto es esta suma, podríamos seguir dos caminos:

a) En la fórmula

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

multiplicamos por 2 a ambos lados de la igualdad y obtenemos:

$$2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)=2T_n$$

Lo que significa que la suma de los números pares es el doble de un número triangular.

b) Como en la suma de los n primeros números naturales, observamos que el primer término y el último suman lo mismo que el segundo y el penúltimo, y así sucesivamente, todas las parejas suman $2n+2$ al sumar números pares. Si n es un número par hay $\frac{n}{2}$ parejas, la suma debe ser

$$(2n+2)\frac{n}{2} = n(n+1).$$

Proponga otra forma. Analice el caso de n impar.

3. De los dos ejercicios anteriores surge una relación entre los números cuadrados y los triangulares. Observemos otra manera de obtener números cuadrados como suma de otros:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1+2+1 \\ 3^2 &= 1+2+3+2+1 \end{aligned}$$

Escriba una fórmula que describa esta situación.

4. Gauss encontró (Bell, 1997) que todo número de la forma $8n+3$ es la suma de tres números cuadrados de números impares. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ 11 &= 1^2 + 1^2 + 3^2 \\ 19 &= 1^2 + 3^2 + 3^2. \end{aligned}$$

Exprese 707, 1219, 2515 y otros números en esta forma.

5. La afirmación anterior es equivalente[9] a que todo número natural es suma de tres números triangulares (Gauss, 1995). *Busque alguna justificación de este hecho.*

6. Lagrange ideó un procedimiento para dilucidar cuándo un número de la forma $nx+1$ es un número cuadrado. *Estudie este problema, comenzando en casos particulares con n = 2, 3, 4, etc.*

[9] Esta equivalencia significa que al suponer que una afirmación es cierta, la otra se deduce de ella y viceversa.

7. Otra conjetura de Fermat, debida en realidad a Bachet, afirma que todo número, o es un cuadrado, o es la suma de dos, tres, o cuatro cuadrados[10]. En efecto tenemos que:

$1 = 1^2$	$10 = 1^2 + 3^2$
$2 = 1^2 + 1^2$	$20 = 2^2 + 4^2$
$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$	$30 = 1^2 + 2^2 + 5^2$
$4 = 2^2$	$40 = 2^2 + 6^2$
$5 = 1^2 + 2^2$	$50 = 5^2 + 5^2$
$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$	$60 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2$
$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$	$70 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 8^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	$80 = 4^2 + 8^2$
$9 = 1^2 + 2^2 + 2^2$	$90 = 3^2 + 9^2$

Intente una descomposición semejante para números mayores a los presentados y trate de encontrar alguna regularidad.

5.3.1. Sumas de cuadrados: tríadas Pitagóricas

Al igual que en los números triangulares, hay números cuadrados que se pueden escribir como la suma de otros dos números cuadrados. Por ejemplo, el quinto número cuadrado (que es 25), se puede escribir como la suma del tercero y el cuarto números cuadrados: 9 + 16; esto lo expresamos más brevemente así:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Una vez que se tiene una terna, por ejemplo, la formada por los cuadrados de 3, 4, 5 respectivamente, pueden formarse infinitas de ellas tomando sus múltiplos, puesto que si k es un número natural cualquiera, entonces

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

Pero este tipo de soluciones no es esencialmente nuevo y se deriva fácilmente de 3, 4, 5. Nos interesan entonces las soluciones reducidas, que como 3, 4, 5 no tienen divisores comunes. (Cuando sucede esto, se dice que 3, 4, 5 o los números correspondientes son *primos entre sí*, o *primos relativos*).

[10]Este teorema fue demostrado por J. L. Lagrange en 1770. Edward Waring en 1770 conjeturó que todo número natural puede expresarse como suma de no más de 4 cuadrados, 9 cubos, 19 cuartas potencias. La demostración la hizo Hilbert en 1909.

Otras tríadas que comparten esta propiedad, conocidas como *tríadas pitagóricas*, están formadas por los cuadrados de los números:

$$5, 12 \text{ y } 13;$$
$$7, 24 \text{ y } 25;$$
$$9, 40 \text{ y } 41;$$
$$11, 60 \text{ y } 61.$$

Ejercicios

1. Observemos la secuencia de formación:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$11^2 + 60^2 = 61^2$$

   Los números que inician las tríadas forman la secuencia de los cuadrados de los números impares; es decir, la n-ésima tríada de esta secuencia tiene como primer elemento $(2n+1)^2$. Notamos también que los segundos y los terceros números, cuyos cuadrados conforman las tríadas, son consecutivos. Debemos encontrar la regularidad de la segunda columna. Entre los números de ella hay un factor común; si lo extrae, encontrará una secuencia conocida. *Encuentre una expresión para la n-ésima tríada pitagórica de esta secuencia.*

2. *Encuentre otras tríadas pitagóricas cuya secuencia de formación sea distinta a la enunciada anteriormente*[11]. *Estudie, por ejemplo, tríadas de la forma*[12] $x = 2n + 1$, $y = 2n(n + 1)$, $z = 2n(n + 1) + 1$ *o de la forma*[13] $x = 4n$, $y = 4n^2 - 1$, $z = 4n^2 + 1$, *donde n es cualquier número natural.*

   Para encontrar tríadas pitagóricas debemos notar que los tres números no pueden ser todos impares, porque el cuadrado de un número impar

[11]Los babilonios conocían muchas ternas pitagóricas relacionadas con estas fórmulas para $k = 1$ (Klein, 1994, p. 29).

[12]Estas fueron estudiadas por los pitagóricos 600 años a.C.

[13]Las tríadas de esta forma fueron estudiadas por Platón (430 a.C.)

es siempre impar y la suma de dos impares es par. Tampoco puede ser que dos de ellos sean pares y el otro impar. Solo pueden ser uno de ellos par y los otros impares. Con un poco más de trabajo puede demostrarse que una terna cualquiera reducida, está completamente determinada por un par de números m y n, tales que uno es impar y el otro par y no tienen divisores comunes[14].

3. Existen otras relaciones entre algunas de las tríadas pitagóricas; por ejemplo si a, b y c son múltiplos de 3, 4 y 5 respectivamente, entonces se cumple que
$$c = b + (b - a) = 2b - a.$$
Si a, b y c son múltiplos de 5, 12 y 13, se cumple que
$$c = \frac{3a + 2b}{3}.$$
Enuncie un resultado similar para otras tríadas pitagóricas. ¿Existe una regla general?

4. *¿Cuál es el único número menor que nueve, tal que aumentado en uno da el doble de un cuadrado y cuyo cuadrado aumentado en uno da otra vez el doble de un cuadrado?*

5. *Explore otro tipo de relaciones que involucre la suma de tres o más números cuadrados o suma de múltiplos de números cuadrados.*

5.4. Números cúbicos

De la misma forma como se ubicaron en el plano puntos formando vértices de polígonos regulares para visualizar los números triangulares y cuadrados, pueden distribuirse los puntos en el espacio formando vértices de sólidos conocidos. Un primer ejemplo de ello se encuentra en los *números cúbicos*.

Estos son los números que representan a la cantidad de puntos que pueden disponerse en una red cúbica, como se muestra en la figura 5.3. Los primeros son:
$$1, 8, 27, 64 \ldots, n^3$$

[14] En el libro X de los *Elementos* de Euclides aparece la fórmula $x = k(n^2 - m^2)$, $y = 2kmn$, $z = k(n^2 + m^2)$ donde k, m, n son números naturales, con $n > m$, uno par y el otro impar y que no tengan factores primos comunes.

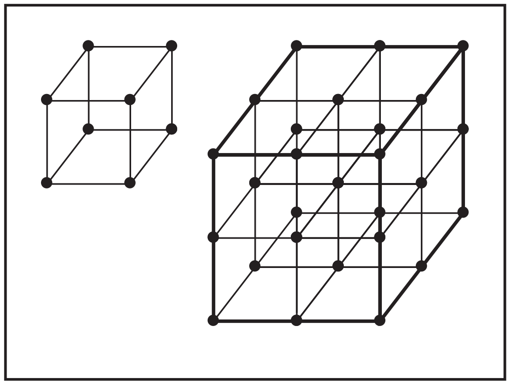


Figura 5.3

Ejercicios

1. Observe la siguiente lista:

$$8 = 3 + 5$$
$$27 = 7 + 9 + 11$$
$$64 = 13 + 15 + 17 + 19$$

Escriba 125 como una suma similar y enuncie una regla general.

2. Otra curiosidad de los números cúbicos la observamos en la siguiente secuencia:

$$8 = 4 + 2 + 2$$
$$27 = 9 + 3 + 3 + 3 + 9$$
$$64 = 16 + 4 + 4 + 4 + 4 + 16 + 16$$
$$125 = 25 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 25 + 25 + 25$$

Escriba los siguientes tres números cúbicos de esta forma y enuncie su regularidad.

3. Una manera de relacionar los números cuadrados con los números cúbicos se encuentra en la siguiente secuencia:

$$1^2 = 1^3$$
$$2^2 = 2^3 - 2^2$$
$$3^2 = 3^3 - 3^2 - 3^2$$
$$4^2 = 4^3 - 4^2 - 4^2 - 4^2$$

Exprese 7^2, 15^2 *y otros números de esta forma. Proponga una explicación.*

4. Una relación entre los números triangulares y los números cúbicos se colige de[15]:

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Escriba los siguientes dos renglones de la secuencia y enuncie una regla general.

5. A partir de la lista anterior, si restamos un renglón del siguiente encontramos que la diferencia de los cuadrados de dos números triangulares sucesivos es un número cúbico, en símbolos

$$(T_n)^2 - (T_{n-1})^2 = n^3$$

O sea que todo número cúbico se puede expresar como la diferencia de dos números cuadrados; o equivalentemente que la ecuación diofántica

$$n^3 = x^2 - y^2$$

tiene soluciones enteras para cualquier n número natural. *¿Hay un par de números naturales tales que la suma de sus cuadrados sea un número cúbico?*

5.4.1. Anotaciones sobre el último teorema de Fermat

El número[16] 1729 se puede expresar como la suma de dos números cúbicos:

$$1729 = 12^3 + 1^3.$$

Existen otros números a, b tal que $1729 = a^3 + b^3$. *Encuéntrelos.*

Sin embargo, 1729 no es un número cúbico.

[15]Este resultado es de Nicómaco de Gerasa en el siglo II d.C. en su libro *Introducción a la Aritmética* recopilado por Vera (1970).

[16]El matemático indio S. Ramanujan descubrió que este número es el más pequeño que se puede escribir como la suma de dos cubos, de dos maneras diferentes.

Naturalmente, podemos sumar un par de números cúbicos cualesquiera intentando conseguir otro número cúbico; pero se ha demostrado que esta tarea es infructuosa.

Un teorema famoso[17], debido a Fermat, asegura que no existen números enteros a, b, c, que satisfagan:

$$c^3 = a^3 + b^3$$

Explore con algunos números.

Este teorema es uno de los más famosos de las matemáticas; Fermat lo escribió en el margen del libro *Aritmética*, de Diofanto, sin demostración. Pero sugirió una prueba (Singh, 1998, pp. 95-96) para el caso específico de $n = 4$, en un problema totalmente distinto usando un método de prueba por contradicción inventado por él, conocido como *método de descenso infinito* (Luque, Ávila y Soler, 2013, pp. 369-374).

Comenzó por suponer que existía una solución, digamos: $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Estudiando las propiedades de esta solución demostró que si esta era cierta, debía existir otra; x_2, y_2, z_2 formada por números más pequeños; aplicando de nuevo el procedimiento debe existir otra solución, x_3, y_3, z_3 aún menor, y así sucesivamente hasta el infinito. Pero como los números naturales tienen un elemento que es el más pequeño de todos, el proceso no puede seguir indefinidamente, lo que implica que la solución inicial no puede ser cierta.

Ejercicios

1. La demostración, para el caso de $n = 4$, prueba también los casos para $n = 8$, 12, 16, 20, etc. *¿Por qué?*

2. En 1753, Euler aplicó el método de descenso infinito de Fermat para demostrar el teorema en el caso $n = 3$, utilizando el número imaginario i; intentó con otros valores de n, pero fracasó. Si la prueba es válida para $n = 3$, también es válida para $n = 6, 9, 12, 15$, etc. Este caso es más importante puesto que el 3 es un número primo. Realmente, para probar el último teorema de Fermat con todos los valores de n, basta probarlo para los casos en que n sea un número primo. *¿Por qué?*

[17] El teorema de Fermat, en realidad, afirma que no es posible encontrar tres números enteros x, y, z que satisfagan la igualdad $x^n + y^n = z^n$, para n mayor que 2. Fermat, siendo abogado, acostumbraba escribir afirmaciones matemáticas sin dar las pruebas, como una manera de retar a los matemáticos; con el tiempo, todas fueron demostradas; este teorema se le denomina el “último” porque fue la última de las afirmaciones que quedó por demostrar. (Singh, 1998, pp. 48-49).

Sophie Germain, nacida en 1776, planteó a Gauss un método general de aproximación al problema; su objetivo inmediato no consistía en probar un caso concreto, sino en afirmar algo sobre muchos casos a la vez de un número primo p, tal que $2p + 1$ también fuera primo.

Para los valores de n equivalentes a estos primos de Germain, utilizó en argumento notable con el fin de mostrar que era muy probable que no hubiera soluciones a la ecuación $x^n + y^n = z^n$. Con "probable", Germain quería decir que la existencia de soluciones era inverosímil porque, si las hubiera, x, y o z tendrían que ser múltiplos de n, y eso impondría fuertes restricciones a las soluciones posibles.

En 1825, el método de Germain alcanzó su primer éxito pleno gracias a Gustav Lejeune-Dirichlet y a Adrien-Marie Legendre, para resolver el caso $n = 5$.

En 1993, Andrew Wiles presentó una demostración del último teorema de Fermat, que luego de ser examinada por los matemáticos, presentó un error. Sin embargo, Wiles logró corregirlo y publicar la solución definitiva, en 1995.

5.4.2. Otras sumas de cubos

Ejercicios

1. A pesar de que la tarea de encontrar dos cubos que sumen un cubo no tiene solución[18], hay otra parecida que sí la tiene; es posible encontrar tres números cúbicos cuya suma sea un número cúbico[19], por ejemplo:

[18] En los primeros intentos de demostración, Leibniz resolvió el caso $n = 4$ en 1678. El caso $n = 3$ fue resuelto por Euler y contenía el germen de la teoría de los ideales que Kummer aplicó en 1840. El caso $n = 5$ fue tratado por Legendre y Dirichlet, en 1825. El caso $n = 7$ fue demostrado por Lamé y Lebesgue.

[19] En general, si se tienen dos soluciones al problema $x^3+y^3+z^3 = t^3$ y $a^3+b^3+c^3 = d^3$, podemos encontrar infinitas, puesto que podemos hallar una condición sobre un número k para que

$$(a + kx)^3 + (b + ky)^3 + (c + kz)^3 = (d + kt)^3$$

sea también una solución; para ello basta que:

$$k = (t^2d - y^2b - z^2c - x^2a)/(xa^2 + yb^2 + zc^2 - td^2)$$

Este proceso, como muchos otros en matemáticas, se hace en reversa: se supone que $(a + kx)^3 + (b + ky)^3 + (c + kz)^3 = (d + kt)^3$ se cumple para algún k y se despeja k.

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$
$$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$$
$$29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3$$

Escriba otros ejemplos.

2. También cinco cubos sumados pueden dar un cubo, por ejemplo:

$$8^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 1^3 = 9^3$$

Escriba otros ejemplos.

3. También hay en matemáticas conjeturas famosas que luego de mucho tiempo han resultado falsas; tal vez el más célebre ejemplo sea la Conjetura de Euler, parecida al teorema de Fermat: “No existen soluciones enteras para la ecuación

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4\text{''}.$$

La conjetura duró 200 años sin ser probada ni refutada, hasta que en 1988, Noam Elkies, de la Universidad de Harvard, la refutó con el siguiente contraejemplo:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615673^4$$

Además, demostró que existen infinitas soluciones. *Encuentre otra.*

5.5. Los números poligonales

Análogamente a lo hecho hasta ahora podemos construir, con otros polígonos o poliedros regulares, números con las formas de pentágonos, hexágonos, y en general números poligonales[20] como lo sugiere la figura 5.4.

[20] Teón de Esmirna describió bastante bien los números poligonales, que también fueron estudiados por Hipsicles, Pseusipo y Filipo en la Grecia antigua. Diofanto también tiene un libro sobre números poligonales en su *Aritmética*.

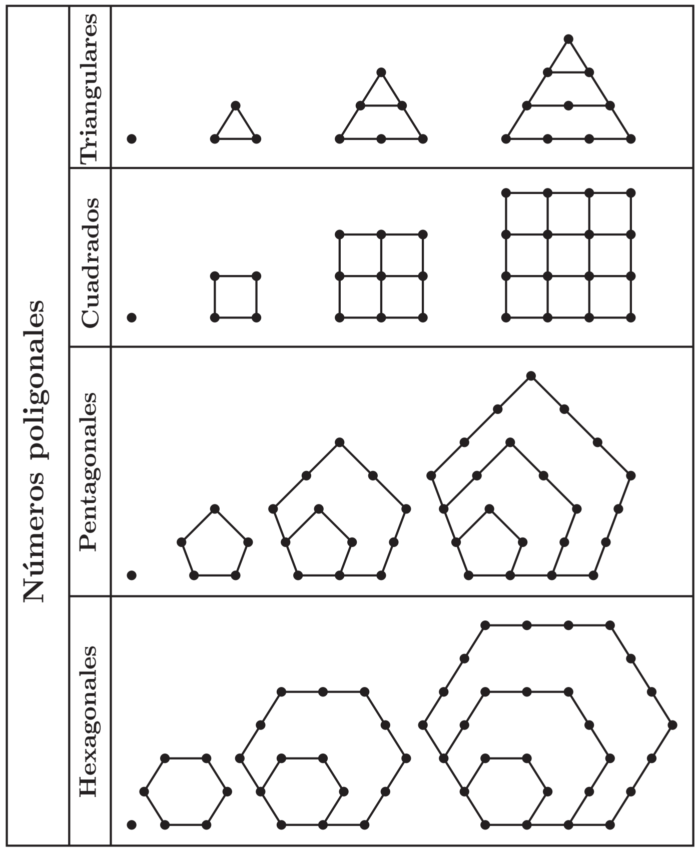


Figura 5.4

En particular, los primeros nueve números pentagonales son

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117$$

Y su representación gráfica para los primeros cinco es

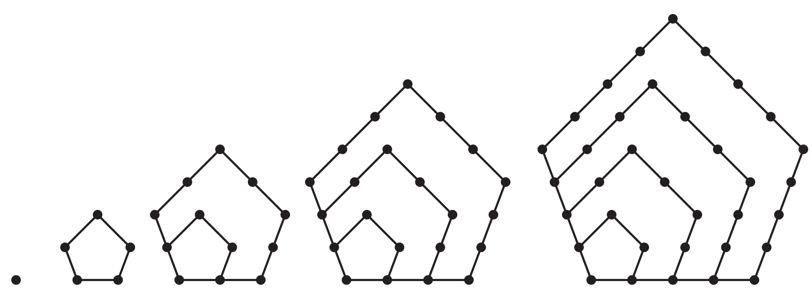


Figura 5.5

Como vemos en la figura 5.5, cada *número pentagonal* se construye con un conjunto de puntos que forma el contorno de pentágonos regulares cuyos lados contienen de 1 a n puntos, a partir de los anteriores pentágonos, de forma que tienen un vértice en común, o sea que cada nuevo número se forma sumando a los anteriores el último sumando más 3; es decir, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&P_1 = 1\\
&P_2 = 1 + (1 + 3) = 5\\
&P_3 = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3) = 12\\
&\quad\vdots\\
&P_n = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3) + \cdots + (1 + 3 + 3 + \cdots + 3),
\end{aligned}$$

donde en el último sumando aparece $(n-1)$ veces 3. Es decir que en la suma aparece n veces 1 y $(1+2+3+\cdots+(n-1))3$, con lo que el n–ésimo número pentagonal es

$$P_n = n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3$$

Es decir:

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Análogamente, los *números hexagonales* son 1, 6, 15, 28, ... y en general, el n–ésimo número hexagonal está dado por la fórmula:

$$2n^2 - n.$$

Ejercicios

1. *Copiando lo hecho hasta ahora para números triangulares, cuadrados y pentagonales:*

   a) *Justifique la fórmula dada para números hexagonales.*

   b) *Encuentre una fórmula para el n–ésimo número poligonal asociado a un polígono regular de p lados*[21].

[21] Estudie, por ejemplo, la fórmula $n + \dfrac{n(n-1)b}{2}$ para distintos valores de b , o expresiones de la forma $\dfrac{n(n(p-2)+(4-p))}{2}$.

2. *De manera similar a lo que presentamos para números triangulares y cuadrados, estudie los números pentagonales, hexagonales y otros números poligonales. Intente hallar regularidades por usted mismo. Luego, busque información sobre el tema.*

3. Como ya mencionamos, Gauss demostró que todo número se puede escribir como la suma de a lo más tres números triangulares y a lo más cuatro números cuadrados. Cauchy generalizó este resultado demostrando (Investigación y Ciencia, 1995, p. 73) que todo número se puede escribir como la suma de a lo más p números poligonales, donde p es el número de lados del polígono considerado. *Exprese 954, 2500, 10000 y otros números en esta forma. ¿Se le ocurren algunas preguntas? Si no, rétese y formule al menos dos. Respóndalas.*

∗ ∗

Ya va siendo hora de desarrollar iniciativas propias y formularse sus propias preguntas, este es el motor de la investigación en matemáticas, la curiosidad, el deseo de saber.

∗ ∗

5.6. Números piramidales

Estos números son unos análogos espaciales de los números poligonales, los formamos haciendo pirámides[22] cuya base es un polígono regular; así, los hay triángulo-piramidales, cuadrado-piramidales, etc.

Para los primeros, los triángulo-piramidales, la base de la pirámide está formada por un triángulo equilátero con n puntos equidistantes en cada lado, la segunda capa hacia arriba está formada por un triángulo equilátero de lado $n-1$, la siguiente de lado $n-2$, y así sucesivamente hasta terminar con una punto en la cima. *¿Cuántos puntos tiene la pirámide?*

Para encontrar la respuesta vemos que la base de la pirámide tiene al n–ésimo número triangular, la segunda capa hacia arriba tiene al $(n-1)$–ésimo número triangular y así sucesivamente; luego el n–ésimo número *triángulo–piramidal* o *tetragonales* (Rodríguez, 1987, p. 34) lo conseguimos sumando los primeros n números números triangulares.

[22]Estudiados inicialmente por Diofanto de Alejandría en el siglo III d.C. y retomados por Descartes extendiendo su estudio a números hiperpiramidales y a los números figurados sólidos basados en los poliedros regulares.

Los primeros nueve son:

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165$$

Ejercicios

1. *Haga un estudio de los números tetragonales similar al hecho para los números triangulares.*

2. *De manera análoga a lo presentado para los números triángulo piramidales, realice una lista de números cuadrado–piramidales y haga un estudio de ellos.*

3. *Escriba una lista de números pentagono–piramidales. Haga un estudio de ellos.*

5.7. Números primos

Como ya sabemos, un número primo es el que solo tiene dos divisores diferentes, la siguiente es una lista de los primeros 38 números primos:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	p_{30}
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113

Lamentablemente no hay, ni en Excel, ni en matemáticas, fórmulas para calcular todos los números primos[23], pero en el apéndice incluimos códigos en Pascal (que pueden ser usados en Delphi o Lázaro) de los programas: Primos1

[23]Existen algunas funciones polinomiales en los números naturales que producen números primos para algunos valores de su variable; por ejemplo $2x^2 + 29$ da números primos para valores enteros de x comprendidos entre 0 y 28. La función $x^2 + x + 41$ de Euler da valores primos para los valores entre 1 y 39, para 40, 41, 44, 49 los resultados no son primos, pero para 42, 43 y otros valores sí; la función $y^2 - 79y + 1601$ da números primos para ochenta números consecutivos (para otros valores a veces da primo a veces no). Goldbach demostró que ningún polinomio podía generar números primos para todos los valores de la variable x y Legendre probó que ninguna función algebraica racional podía generar siempre números primos. En 1977 James Jones, Daihachiro Sato, Hideo Wada, y Douglas Wiens encontraron un polinomio que genera todos los primos, pero es de 26 variables.

que permite saber si un número (razonablemente grande[24]) es primo o no; Primos2 que hace una lista de los números primos menores que un número (razonablemente grande) dado; Primos3 que hace una lista de los números primos obtenidos con una fórmula debida a Euler, pero que solo es segura para 80 números.

Si miramos una lista más grande de números primos notamos que a medida que avanzamos en la secuencia, aparecen cada vez menos números primos; por ejemplo hay 168 primos menores que 1000, esperaríamos que hubiese 10 veces esta cantidad de primos menores que 10 000, pero solo hay 1229 y menores que 1000 000 solo hay 78 498.

Veamos cómo estimar (Lang, 1985, pp. 10-12) ¿cuántos números primos hay menores que un número cualquiera x?

Consideremos los números naturales hasta x,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, x.$$

Entre estos números, hay números pares y números impares. Si un número es primo, este no es par, excepto el 2.

¿Cuántos números impares hay hasta x? Aproximadamente la mitad de ellos, esto es, $\frac{x}{2}$, que puede escribirse como $\left(1 - \frac{1}{2}\right)x$, por tanto no son divisibles por 2. De los números impares, ¿cuántos no son divisibles por 3?

Dos tercios no son divisibles por 3. Escribamos $\frac{2}{3}$ en la forma $\left(1 - \frac{1}{3}\right)$. Ahora de los números que quedan, ¿cuántos no son divisibles por 5? Naturalmente $\left(1 - \frac{1}{5}\right)$.

Y de los que quedan, ¿cuántos de ellos no son divisibles por el siguiente número primo? $\left(1 - \frac{1}{7}\right)$.

Entonces para encontrar los números que son primos necesitamos que ellos no sean divisibles por cualquier número primo desde 2 hasta el último primo anterior a x, entonces conjeturamos que el número de primos menores o iguales a x debería ser aproximadamente igual al producto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

con $p \leq x$; esto los matemáticos suelen escribirlo, de forma un poco presuntuosa, como

$$\prod_{p\leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

La fórmula tiene un gran aspecto pero *¿qué tan útil es? Explore.*

[24]Esto significa menor o igual a 2 147 483 647.

Mirando su cuaderno, con aproximadamente dos millones de números primos, el matemático francés Bertrand en 1845 conjeturó que para todo $x > 1$, entre x y $2x$ siempre hay un número primo. El matemático ruso Tchebyshev la demostró cinco años después.

Bonolis (1911) dio una fórmula para el número de primos entre x y $\left(\frac{3}{2}\right)x$, con esto concluyó que hay menos de un millón de primos entre 100 y 150 millones.

A pesar de que los números primos van escaseando, ellos son infinitos ¿Cómo podemos probar esto?

Euclides demostró que si suponemos que hay un último número primo p, y hacemos una lista de números primos desde 2 hasta p,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p$$

entonces siempre podemos encontrar otro número primo que no está en esta lista.

Sea

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot p) + 1.$$

Si N es primo, este no es igual a alguno de los listados desde 2 hasta p y por tanto hemos construido un nuevo número primo.

Si N no es primo, entonces podemos expresar N como un producto de primos. En particular podemos escribir $N = qN'$ donde q es un número primo que divide a N.

¿Puede q ser igual a alguno de los primos desde 2 hasta p?

No, porque al dividir N por alguno de los primos desde 2 hasta p, el residuo es 1. Así que descubrimos un nuevo primo el cual no está en la lista. Esto significa que no podemos hacer una lista finita de todos los números primos y esto concluye la prueba. Hay infinitos números primos.

5.7.1. Números primos gemelos

Naturalmente, si p es primo diferente de 2 entonces $p+1$, $p+3$, $p+5$ y en general $p+(2k+1)$ no son primos, pues son pares.

Pero ¿qué sucede con $p+2$?, algunos son primos (conocidos como *primos gemelos*) como

3 y 5	17 y 19	59 y 61
5 y 7	29 y 31	71 y 73
11 y 13	41 y 43	101 y 103

Pero otros no son primos gemelos como las parejas 7 y 9, 13 y 15, ... *Haga una lista más grande de primos gemelos.*

De nuevo mirando en listas más grandes, notamos que la frecuencia de aparición de números primos gemelos, para números primos más grandes va disminuyendo.

En el año 2007, Vautier, McKibbon, Gribenko y otros descubrieron (Ogilvy, 1994, p. 24) los números primos gemelos más grandes conocidos a la fecha $2003663613 \times 2^{195000} \pm 1$, que tienen 58711 cifras.

Como en el caso de los números primos, la pregunta natural ¿existen infinitos primos gemelos? ¡Nadie sabe! ¡Aún no hay respuesta! *Tenemos tarea.*

Otra pregunta: ¿hay tripletas de números primos cuya diferencia es 2? Un ejemplo es 3, 5 y 7. *¿Hay otra?*

Ensayemos, si los hay, los tres números deben ser impares. Construyamos una lista a partir de la lista de los primos gemelos:

$$\begin{array}{lll} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 \\ 29 & 31 & 33 \\ & \vdots & \end{array}$$

Estas no son tripletas de números primos; sin embargo, notamos que la tercera columna, salvo la primera tripleta, es de múltiplos de 3.

Sospechamos que en toda tripleta de números impares, siempre hay un múltiplo de tres.

Prueba: sea una tripleta de números impares

$$2n+1 \qquad 2n+3 \qquad 2n+5$$

para algún número natural $n \geq 0$.

Si $2n+1$ es múltiplo de 3, es decir, es de la forma $3p$ para algún $p \geq 1$, terminamos.

Si $2n+1$ es de la forma $3p+1$, entonces

$$2n+3 = 3p+3 = 3(p+1)$$

es decir múltiplo de 3.

Si $2n+1$ es de la forma $3p+2$, entonces

$$2n+3 = 3p+4 \ \text{ y } \ 2n+5 = 3p+6 = 3(p+2)$$

es decir múltiplo de 3.

Por tanto, no hay una tripleta de números primos diferente a la ya mencionada. $\square$

5.7.2. Números de Euclides

Si no suponemos que hay un último número primo, para cada uno de ellos podemos formar el número

$$E_k = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_k) + 1$$

Y preguntarnos ¿E_k es primo? De nuevo hagamos listas

$E_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$	Es primo
$E_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$	Es primo
$E_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$	Es primo
$E_5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$	Es primo
$E_6 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$	No es primo. $30031 = 59 \times 509$
$E_7 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 = 510511$	No es primo. $510511 = 19 \times 97 \times 277$
$E_8 = 9699691 = 347 \times 27953$	No es primo
$E_9 = 223092871 = 317 \times 703763$	No es primo
$E_{10} = 6469693231$	No es primo
$E_{11} = 200560490131$	Si es primo
$E_{12} = 7420738134811$	No es primo

Estos son los llamados *números de Euclides* (Alsina y Nelsen, 2010, p.10), no sabemos si hay infinitos primos entre ellos. *Explore.*

∗ ∗

Hay programas como Maple, Mathematica y otros que le pueden ayudar en la tarea, cuando se trata de hacer cuentas enormes o molestas, busque y aprenda cómo manejarlos.

∗ ∗

5.7.3. Números compuestos consecutivos

Hay sucesiones de tres números compuestos consecutivos 14, 15 y 16 entre los primos 13 y 17, igualmente hay cinco números compuestos consecutivos 32, 33, 34, 35 y 36 entre 31 y 37. ¿Podríamos encontrar una secuencia de 50 números compuestos consecutivos? ¿O una secuencia con un número cualquiera de números compuestos consecutivos?

En la demostración de Euclides de la infinitud de los números primos, él construye el número (Luque, Avila y Soler, 2013, pp. 125-126)

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Y si a este número se le suma 1, el resultado ya no es divisible por ninguno de los primos que aparecen en el producto.

Pero si a N se le suma 2, 3 o 5 o cualquier primo que esté en el producto, el número obtenido es divisible por el primo sumado, por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} N_1 = 2 \times 3 + 2 & \text{es divisible por } 2 \\ N_2 = 2 \times 3 + 3 & \text{es divisible por } 3 \\ N_3 = 2 \times 3 \times 5 + 2 & \text{es divisible por } 2 \\ N_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 5 & \text{es divisible por } 5. \end{array}$$

Y como el propósito es construir números compuestos podemos agregar números compuestos al producto, para simplificar la escritura usando el símbolo factorial, así

$$\begin{array}{ll} N_5 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 2 = 7! + 2 & \text{es divisible por } 2 \\ N_6 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 3 = 7! + 3 & \text{es divisible por } 3 \\ N_7 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 4 = 7! + 4 & \text{es divisible por } 4 \\ N_8 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 5 = 7! + 5 & \text{es divisible por } 5. \end{array}$$

Y en general conjeturamos que

$$N! + n \text{ es divisible por } n$$

Para un número arbitrario n los números $n! + 2$, $n! + 3$, ..., $n! + k$, con $n \geq k$, son todos compuestos, es decir que entre $n! + 2$ y $n! + k$ no hay números primos, esto significa que podemos formar intervalos tan grandes como queramos donde no haya números primos, por ejemplo, ¡entre 1000000! y 1000000! + 1000000 hay un millón de números que no son primos!

5.7.4. Suma de números primos

Como todos los números primos mayores que 2 son impares, naturalmente la suma de dos números primos mayores que 2 es un número par, ¿la afirmación recíproca es cierta? Este es un problema aún no resuelto de la teoría de números[25]. *Ensaye.*

Los números primos han sido un tema históricamente difícil, como vemos no es mucho lo que pudimos lograr.

[25]Esta es la conocida *conjetura de Goldbach.*

✳ ✳

No siempre hay respuestas simples, no siempre hay respuestas satisfactorias e incluso en muchos casos no hay respuestas. Pero esto no significa que la búsqueda de ellas no sea un ejercicio reconfortante y generalmente muy instructivo.

✳ ✳

Ejercicio

Consulte alguna noticia reciente acerca de los números primos.

5.8. Orden en diferentes bases

Queremos estudiar ahora, cuál es el número más grande que se puede escribir con tres cifras iguales con los convenios establecidos para la escritura de los números, pero sin signos de operaciones entre ellos, salvo lo acordado para la notación exponencial, y determinar además su dependencia de la base en que se escribe.

Ejercicios

1. En base 2 solo tenemos dos símbolos, 0 y 1. El número más grande que se puede escribir con tres cifras repetidas y sin colocar signos de operaciones entre ellos es, naturalmente, 1 1 1, puesto que:

$$1^{\left(1^{1}\right)} = \left(1^{1}\right)^{1} = (1)^{11} < (11)^{1} < 111$$

¿Es válido este ordenamiento con tres unos, en cualquier base?

2. En base tres, la secuencia con tres doses es:

$$2^{\left(2^{2}\right)} = \left(2^{2}\right)^{2} < 222 < (22)^{2} < (2)^{22}$$

¿La secuencia es la misma en cualquier base?

3. *¿Cuál es el orden con tres treses en base 4?*

$$3^{\left(3^{3}\right)} \qquad \left(3^{3}\right)^{3} \qquad (3)^{33} \qquad (33)^{3} \qquad 333$$

¿Es el mismo en otra base?

4. Con tres cuatros en base 5, la secuencia es:

$$444 < (44)^4 < \left(4^4\right)^4 < (4)^{44} < 4^{\left(4^4\right)}$$

¿Es el mismo en otra base?

5. En base 10 el mayor número que se puede escribir con tres doses, sin ningún signo de operación, es 2^{22}, puesto que:

$$\begin{aligned}\left(2^2\right)^2 = 16 &\leq 222\\ &\leq 22^2 = 484\\ &\leq 2^{22} = 4194304\end{aligned}$$

Ahora, con tres treses el mayor número que podemos escribir es 3^{33}, debido a que:

$$3^{(3^3)} \leq 3^{33}$$

El mayor número con 3 nueves es $9^{(9^9)} = 9^{387420489}$ (más grande que el número de átomos de todo el universo). *¿Es el mismo en otra base?*

6. Intentemos una generalización para el caso de tres cifras iguales a b en base k.

Los dos candidatos a ser el más grande, según hemos visto, son:

$$b^{\left(b^b\right)} \qquad \text{y} \qquad b^{bb}$$

Como la base es la misma basta comparar los exponentes[26] esto es

$$b^b \qquad \text{y} \qquad kb + b.$$

Para que el primero sea mayor, es necesario que

$$b^{(b-1)} > (k+1),$$

donde hemos dividido por b ambas expresiones (suponiendo naturalmente que b no es 0).

Si b es 4 la expresión es cierta hasta base 62, donde $b^{(b-1)}$ es $4^3 = 12$ (64 en base 10) y $k + 1 = 11$ (63 en base 10). La fórmula considerada en base 10 es cierta para $b > 3$.

[26] Esto se debe a que si $x < y$ entonces $a^x < a^y$.

Ensaye un trabajo similar con cuatro cifras iguales; he aquí unas perlitas: el número más grande que se puede escribir con cuatro unos en base 10 es:

$$11^{11} = 285311670611.$$

Con cuatro doses el más grande es:

$$\left((2)^2\right)^{22}$$

Este número es mayor que $2^{4000000}$, que a su vez es mayor que $10^{1200000}$ y este último que tiene más de un millón de cifras (Perelman, 1989, p. 49).

7. *Escriba de menor a mayor*

$$2^{121} \qquad 9^{55} \quad 7^{88}$$

en diferentes bases.

Capítulo

6 Inducción a partir de tablas y dibujos

Hasta ahora hemos logrado conseguir información sobre los números observando secuencias en forma de listas. Enseguida colocaremos varias listas, unas al lado de las otras, para observar relaciones entre ellas formando tablas que contienen no solo información vertical sino también horizontal. Al final del capítulo veremos una alternativa geométrica que sugiere resultados algebraicos.

6.1. Inducción a partir de tablas

En algunas ocasiones constrastar dos tipos de informaciones organizadas en filas y columnas puede ayudar a conjeturar un resultado que se ve más facilmente en una de las dos direcciones, como aparece a continuación.

6.1.1. Tabla de las progresiones aritméticas

Veamos la construcción de una tabla sencilla[1], formada a partir del número 1, que apareció en el ejercicio 3 de la sección 5.1 del capítulo 5:

La primera casilla de la primera fila es 1. La segunda casilla y las siguientes de esta fila, se forman sumando 0 al número de la casilla anterior.

La primera casilla de la segunda fila es 1. La segunda casilla y las siguientes se forman sumando 1 al número de la casilla anterior.

[1]El programa A.8. del apéndice nos ayuda con esta tarea.

La primera casilla de la tercera fila es 1. La segunda casilla y las siguientes se forman sumando 2 al número de la casilla anterior.

La primera casilla de la cuarta fila es 1. La segunda casilla y las siguientes se forman sumando 3 al número de la casilla anterior, y así sucesivamente.

El resultado es la tabla 6.1 de las *progresiones aritméticas*:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	...	$\boldsymbol{n}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	n
3	1	3	5	7	9	11	13	15	17	...	$2n-1$
4	1	4	7	10	13	16	19	22	25	...	$3n-2$
5	1	5	9	13	17	21	25	29	33	...	$4n-3$
6	1	6	11	16	21	26	31	36	41	...	$5n-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{k}$	1	k	$2k-1$	$3k-2$	$4k-3$	$5k-4$	...	...	...	...	$(k-1)n-(k-2)$

Tabla 6.1

Como vemos, en la segunda fila están los números naturales, en la tercera los números impares, en la cuarta los naturales de 3 en 3 a partir de 1, en la siguiente de 4 en 4 a partir de 1 y así sucesivamente.

Algunas observaciones elementales sobre la tabla 6.1 son:

1. Si (n,k) denota la posición del número en la fila n, columna k entonces

$$\begin{aligned}(2,k)+(2,k+1)&=(3,k+1)\\(2,k)+(3,k+1)&=(4,k+1)\\(2,k)+(4,k+1)&=(5,k+1)\\&\vdots\\(2,k)+(p,k+1)&=(p+1,k+1).\end{aligned}$$

2. La diagonal principal son los números

$$1,2,5,10,17,\ldots,1+(n-1)^2,\ldots$$

donde n indica la posición del número en la diagonal.

3. Las diagonales que siguen a lado y lado de la principal son iguales:

$$1,3,7,13,21,\ldots,1+n(n-1),\ldots$$

4. Las siguientes diagonales corresponden a la secuencia de los números cuadrados
$$1, 4, 6, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

Ejercicios

1. *Escriba las siguientes diagonales principales y explore relaciones entre ellas, busque una forma general para la n–ésima diagonal; súmelas, réstelas, combínelas a su manera.*

2. Las primeras diagonales secundarias son

D1:	1					
D2:	1	1				
D3:	1	2	1			
D4:	1	3	3	1		
D5:	1	4	5	4	1	
D6:	1	5	7	7	5	1

¿Cuál es la diagonal k? Busque una forma general para la k–ésima diagonal; sume, reste, combine diagonales a su manera.

3. Si formamos escuadras o gnomones[2] en la tabla obtenemos

G1:	1										
G2:	1	2	1								
G3:	1	3	5	3	1						
G4:	1	4	7	10	7	4	1				
G5:	1	5	9	13	17	13	9	5	1		
G6:	1	6	11	16	21	26	21	16	11	6	1

¿Cuál es el gnomon de la posición k?

Si sumamos cada uno de los gnomones obtenemos

[2] La palabra *gnomon* significó en Babilonia, una varilla vertical (⌋) cuya sombra marcaba la hora. En la época de Pitágoras significaba una escuadra de carpintero. También significó lo que queda de un cuadrado al cortar otro cuadrado más pequeño en una de sus esquinas. Más tarde, con Euclides, su significado se amplió a lo que queda de un paralelogramo al cortar otro más pequeño en una de sus esquinas, siempre que este fuera semejante al primero.

SG1:	1	1
SG2:	$1+2+1$	$4=3+1=T_2+T_1$
SG3:	$1+3+5+3+1$	$13=9+4=C_3+C_2$
SG4:	$1+4+7+10+7+4+1$	$34=22+12=P_4+P_3$
SG5:	$1+5+9+13+17+13+9+5+1$	$83=45+28=H_5+H_4$

donde T_i, C_i, P_i y H_i, denotan los i–ésimos números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales, respectivamente.

¿Cuál es la fila SGk?

4. Y si en lugar de formar gnomones estudiamos los números que se encuentran dentro de un cuadrado de lado 1, de lado 2, etc. *¿Qué listas de números se obtienen? Profundice en este estudio.* Por ejemplo, si elige cuadrados de lado 2, *¿es posible hallar uno de los cuatro números en el cuadrado, en términos de los otros tres? ¿Es posible hallar dos en términos de los otros dos?*

5. *Estudie otras figuras en la tabla 6.1, por ejemplo bordes o contornos de cuadrados, cruces, etc. y plantee relaciones entre los números allí dispuestos*[3].

6.1.2. Tabla de los números poligonales

Cada tabla[4] nos reporta tantas tablas como queramos; por ejemplo, usando la tabla 6.1 formamos la tabla 6.2 de los números poligonales, como lo indicamos a continuación:

La primera casilla de la primera fila es el número 1.

La segunda casilla de la primera fila se forma sumando los números de las dos primeras casillas de la fila 1 en la tabla 6.1.

La tercera casilla de la primera fila se forma sumando los números de las tres primeras casillas de la fila 1 en la tabla 6.1 Y así sucesivamente.

La primera casilla de la segunda fila es el número 1.

La segunda casilla de la segunda fila se forma sumando los números de las dos primeras casillas de la fila 2 en la tabla 6.1.

[3]En el primer semestre del año 2013, el estudiante Sergio Malagón halló que el cociente de la suma de los ocho números que rodean a uno de los números que se encuentran en la tabla 6.1 con 8, es precisamente el número que se rodea.

[4]El programa A.9. del apéndice puede ayudarle con esta tarea.

La tercera casilla de la segunda fila se forma sumando los números de las tres primeras casillas de la fila 2 en la tabla 6.1. Y así sucesivamente.

De manera similar se procede para las demás filas. El resultado es:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	...	$\boldsymbol{n}$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	n
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
3	1	4	9	16	25	36	49	64	81	...	n^2
4	1	5	12	22	35	51	70	92	117	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
5	1	6	15	28	45	66	91	120	153	...	$n(2n-1)$
6	1	7	18	34	55	81	112	148	189	...	$\frac{n(5n-3)}{2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{k}$	1	$k+1$	$3k$	...	...	...	...	...	...	...	$\frac{n((k-1)n-(k-3))}{2}$

Tabla 6.2

Notamos que en la primera fila de la tabla 6.2 están los números naturales; en la segunda, los triangulares; en la tercera, los cuadrados; la cuarta corresponde a los pentagonales y la fila k es la de los números $(k+1)$–*gonales*.

Por la forma de construcción, el término n–ésimo de la segunda fila se consigue sumando los n primeros términos de la fila 2 de la tabla 6.1 cuyo resultado ya conocemos.

El término n–ésimo de la tercera fila se consigue sumando los n primeros términos de la fila 3 de la tabla 6.1; y como en este caso también la suma de los extremos de la lista es la misma que la del segundo término con el penúltimo y así sucesivamente obtenemos que

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 3 & + & \cdots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\
S_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \cdots & + & 3 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (2n) & + & (2n) & + & \cdots & + & (2n) & + & (2n)
\end{array}$$

Y por tanto

$$S_n = n^2$$

Aunque para ello no hubiésemos necesitado hacer estas cuentas, vale la pena extrapolar la idea para las siguientes filas, como veremos enseguida. Para la fila k–ésima la suma es

$$\begin{array}{rcccccccc}
S_n & = & 1 & + & k & + & \cdots & + & (k-1)n-(k-2) \\
S_n & = & (k-1)n-(k-2) & + & (k-1)(n-1)-(k-2) & + & \cdots & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (k-1)n-(k-3) & + & (k-1)n-(k-3) & + & \cdots & + & (k-1)n-(k-3)
\end{array}$$

De modo que

$$S_n = \frac{n}{2}((k-1)n-(k-3)) \quad \text{con } k \geq 3.$$

Y de ahí obtener una fórmula general para el n–ésimo número $(d+2)$–gonal:

$$\wp_n(d+2) = \frac{n}{2}((n-1)d+2) \quad \text{con } d \geq 1.$$

Por ejemplo, para $d=1$ obtenemos la fórmula de los números triangulares, para $d=2$ la de los números cuadrados y así sucesivamente.

Algunas observaciones sobre la tabla 6.2 son:

1. Todos los números de la fila 5 están en la fila 2, o sea que todo número hexagonal es triangular.

2. Todos los números de la fila 4 son iguales a un número de la fila 2 dividido entre 3, o sea que todo número pentagonal es un tercio de algún número triangular. Más específicamente

   $$P_1 = \frac{T_2}{3}, \quad P_2 = \frac{T_5}{3}, \quad P_3 = \frac{T_8}{3}, \quad P_4 = \frac{T_{11}}{3}, \quad P_5 = \frac{T_{14}}{3}$$

   y en general el n–ésimo número pentagonal es la tercera parte del $(3n-1)$–ésimo número triangular.

3. *Teorema de Nicómaco*: en la tabla 6.2 notamos que la diferencia entre dos números consecutivos de una columna crece de la siguiente forma:

   En la segunda columna la diferencia es 1, en la tercera 3, en la cuarta 6, en la quinta 10 y ¡adivine! En la n–ésima columna la diferencia es el $(n-1)$–ésimo número triangular.

   Esto significa que un número cuadrado es la suma del triangular que está encima suyo en la tabla y el triangular anterior a este. En símbolos,

   $$C_n = T_n + T_{(n-1)}$$

   Pero también, un número pentagonal es la suma del cuadrado que está encima suyo en la tabla y el triangular anterior a este. En símbolos,

   $$P_n = C_n + T_{(n-1)}$$

Y un número hexagonal es la suma del pentagonal que está encima suyo en la tabla y el triangular anterior a este. En símbolos,

$$H_n = P_n + T_{(n-1)}$$

y así sucesivamente.

Si llamamos $\wp_n(q)$ al n–ésimo número q–gonal tenemos la fórmula

$$\wp_n(q) = \wp_n(q-1) + T_{(n-1)} \quad \text{con } q \geq 4.$$

Este resultado era conocido en la antigua Grecia y es conocido como teorema de Nicómaco[5].

En 1621 el matemático francés G. Bachet de Meziriac publicó la obra de Diofanto, que permitió a Fermat encontrar otra forma del teorema de Nicómaco en términos de solo números triangulares, así:

$$\wp_n(q) = T_n + (q-3)T_{(n-1)} \quad \text{con } q \geq 3.$$

Y de ahí obtener una fórmula general para el n–ésimo número q–gonal:

$$\wp_n(q) = \frac{n((n+1)+(q-3)(n-1))}{2} \quad \text{con } q \geq 3.$$

Ejercicios

1. *Enuncie otras regularidades que encuentre en la tabla 6.2.*
2. *Proponga alternativas a las fórmulas dadas para números poligonales.*
3. *¿En cuáles casos la suma de dos números pentagonales es un número pentagonal?* Veamos algunos ejemplos

$$\begin{array}{ccl}
1 & \rightarrow & P_4 + P_7 = P_8 \\
2 & \rightarrow & P_7 + P_{23} = P_{24} \\
3 & \rightarrow & P_{10} + P_{48} = P_{49} \\
4 & \rightarrow & P_{13} + P_{82} = P_{83} \\
5 & \rightarrow & P_{16} + P_{125} = P_{126}
\end{array}$$

¿Cuál tripla corresponde a la fila n?

[5]Otras aproximaciones didácticas a este teorema se encuentran en Jiménez, Angarita y Luque (2007).

6.1.3. Los múltiplos de los números triangulares

Muchas veces creemos que encontramos una regularidad y procuramos obligar a los números a cumplirla. Generalmente los números no se dejan y nos obligan a cambiar nuestras fórmulas o a intentar otros caminos.

En la tabla 6.3 están algunos múltiplos de los primeros diez números triangulares.

n	T_n	$2T_n$	$3T_n$	$4T_n$	$5T_n$	$6T_n$	$7T_n$	$8T_n$	$9T_n$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3	6	12	18	24	30	36	42	48	54
4	10	20	30	40	50	60	70	80	90
5	15	30	45	60	75	90	105	120	135
6	21	42	63	84	105	126	147	168	189
7	28	56	84	112	140	168	196	224	252
8	36	72	108	144	180	216	252	288	324
9	45	90	135	180	225	270	315	360	405
10	55	110	165	220	275	330	385	440	495

Tabla 6.3

Ejercicios

1. *Verifique las inducciones de la sección 5.2.2 del capítulo 5 y conjeture otras.*

2. En la tabla 6.2 vemos que hay números cuadrados que también son triangulares, por ejemplo 1 y 36.

   Pero no parecen muy abundantes. Entre los primeros 1000 naturales solo hay dos de ellos (el siguiente es 1225). *¿Hay otros? ¿Son infinitos?*

Si miramos la fórmula para los números triangulares en la posición $8T_n$, tenemos:

$$T_{(8T_n)} = \frac{8T_n(8T_n + 1)}{2} = 4T_n(8T_n + 1).$$

Y como

$$8T_n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

entonces

$$T_{(8T_n)} = 4T_n(2n+1)^2.$$

Esto significa que si T_n es un número cuadrado, el número $T_{(8T_n)}$ es un número cuadrado y triangular a la vez, por ejemplo si $T_n = 1$, entonces $T_{(8T_n)} = 36$, si $T_n = 6^2$, entonces $T_{(8T_n)} = (876)^2$, y con cada uno de ellos podemos conseguir otro, en un proceso sin fin. En conclusión, hay infinitos números cuadrado–triangulares.

6.1.4. Los cuadrados y los cubos de los números triangulares

En la tabla 6.4 encontramos cuadrados de números triangulares y sus múltiplos.

n	T_n	$(T_n)^2$	$2(T_n)^2$	$3(T_n)^2$	$4(T_n)^2$	$5(T_n)^2$	$6(T_n)^2$	$7(T_n)^2$	$8(T_n)^2$	$9(T_n)^2$
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	9	18	27	36	45	54	63	72	81
3	6	36	72	108	144	180	216	252	288	324
4	10	100	200	300	400	500	600	700	800	900
5	15	225	450	675	900	1125	1350	1575	1800	2025
6	21	441	882	1323	1764	2205	2646	3087	3528	3969
7	28	784	1568	2352	3136	3920	4704	5488	6272	7056
8	36	1296	2592	3888	5184	6480	7776	9072	10368	11664
9	45	2025	4050	6075	8100	10125	12150	14175	16200	18225

Tabla 6.4

En esta tabla observamos que

$$\begin{aligned}
(T_1)^2 + (T_2)^2 &= 10 = T_4\\
(T_2)^2 + (T_3)^2 &= 45 = T_9\\
(T_3)^2 + (T_4)^2 &= 136 = T_{16}\\
(T_4)^2 + (T_5)^2 &= 325 = T_{25},
\end{aligned}$$

lo que nos permite conjeturar que

$$(T_n)^2 + (T_{(n+1)})^2 = T_{(n+1)^2}.$$

Ejercicios

1. *Observe la tabla 6.4 y proponga otras conjeturas.*

2. *Observe la tabla 6.5 de cubos de números triangulares y sus múltiplos, proponga conjeturas a partir de ella.*

3. *Proponga nuevas tablas como las presentadas hasta ahora y enuncie algunas conjeturas.*

n	T_n	$(T_n)^3$	$2(T_n)^3$	$3(T_n)^3$	$4(T_n)^3$	$5(T_n)^3$	$6(T_n)^3$	$7(T_n)^3$
1	1	1	2	3	4	5	6	7
2	3	27	54	81	108	135	162	189
3	6	216	432	648	864	1080	1296	1512
4	10	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000
5	15	3375	6750	10125	13500	16875	20250	23625
6	21	9261	18522	27783	37044	46305	55566	64827
7	28	21952	43904	65856	87808	109760	131712	153664
8	36	46656	93312	139968	186624	233280	279936	326592
9	45	91125	182250	273375	364500	455625	546750	637875
10	55	166375	332750	499125	665500	831875	998250	1164625

Tabla 6.5

6.1.5. Los números piramidales

Repitiendo el procedimiento para formar la tabla 6.2 a partir de la tabla 6.1, obtuvimos la tabla 6.6[6] con base en la tabla 6.2, e insistiendo otra vez obtenemos una tabla de *números hiperpiramidales* a partir de la tabla 6.6, y así sucesivamente.

En la primera fila de la tabla 6.6, de los números piramidales, están los números triangulares; en la segunda, la suma de los números triangulares o sea los triángulo–piramidales; la tercera es la suma de los números cuadrados o sea los cuadrado–piramidales, y así sucesivamente.

[6]El programa A.10. del apéndice nos ayuda con esta tarea.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	...	$\boldsymbol{n}$
1	1	3	6	10	15	21	28	36	45	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	1	4	10	20	35	56	84	120	165	...	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
3	1	5	14	30	55	91	140	204	285	...	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4	1	6	18	40	75	126	196	288	405	...	$\vdots$
5	1	7	22	50	95	161	252	372	525	...	$\vdots$
6	1	8	26	60	115	196	308	456	645	...	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{n}$	1	$(n+2)$	$(4n+2)$	...							$\vdots$

Tabla 6.6

Podemos conseguir la fórmula correspondiente al n–ésimo número triángulo–piramidal si conocemos[7] la suma de los n primeros números triangulares,

$$P_T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Para calcular el n–ésimo número cuadrado–piramidal sumamos los n primeros números cuadrados[8], el resultado es

$$P_C(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

El n–ésimo *número penta–piramidal* $P_P(n)$ es la suma de los primeros n números pentagonales, y por el teorema de Nicómaco, lo podemos escribir como la suma de los primeros n números cuadrados con la suma de los primeros $(n-1)$ números triangulares; es decir, como

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(2n+1)T_n}{3}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n-1} T_i = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{(n-1)T_n}{3}$$

[7]Al final de este capítulo presentamos unas figuras que nos permiten conjeturar estas fórmulas.

[8]La suma de los primeros n números cuadrados se consigue de la de los triangulares usando la igualdad $T_{(n-1)} + T_n = n^2$.

entonces

$$P_P(n) = \frac{(2n+1)T_n}{3} + \frac{(n-1)T_n}{3} = nT_n.$$

Ejercicios

1. *Use el teorema de Nicómaco para expresar los números poligonales en términos de números triangulares y luego sume los n primeros de ellos para obtener una fórmula para el n–ésimo número k–piramidal.*
2. *Estudie la tabla 6.6 y establezca conjeturas.*
3. *Formule una conjetura similar al teorema de Nicómaco pero para números piramidales.*
4. *Construya la tabla de números hiperpiramidales a partir de la tabla 6.6. Estúdiela y proponga conjeturas.*

6.1.6. La tabla pitagórica de multiplicar

Una de las tablas más conocidas y más antiguas es la tabla pitagórica o tabla de multiplicación (tabla 6.7) y a pesar de su aparente simplicidad esconde tesoros insospechados.

Si trazamos *gnomones* en la tabla pitagórica y sumamos los elementos en cada uno de ellos podemos calcular la suma de los n primeros números cúbicos, así: el primer *gnomon* está formado por el número 1, el segundo por los números 2, 4, 2, el tercero, por los números 3, 6, 9, 6, 3 y así sucesivamente, tal como sugiere la tabla 6.7.

Si sumamos los números que aparecen en cada *gnomon* encontramos

$$\begin{gathered} 1 = 1^3 \\ 2+4+2 = 2^3 \\ 3+6+9+6+3 = 3^3 \\ \vdots \end{gathered}$$

Conjeturamos que

$$n + 2n + 3n + \cdots + (n-1)n + n^2 + (n-1)n + \cdots + 2n + n = n^3$$

Y si sumamos todos los números del cuadrado formado por los números entre 1 y n (las primeras n filas y las primeras n columnas) obtenemos la suma de los cubos. *¿Por qué*?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
2	4	6	8	10	12	14	16	18	$\cdots$
3	6	9	12	15	18	21	24	27	$\cdots$
4	8	12	16	20	24	28	32	36	$\cdots$
5	10	15	20	25	30	35	40	45	$\cdots$
6	12	18	24	30	36	42	48	54	$\cdots$
7	14	21	28	35	42	49	56	63	$\cdots$
8	16	24	32	40	48	56	64	72	$\cdots$
9	18	27	36	45	54	63	72	81	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Tabla 6.7

Por otro lado, si sumamos por filas en la tabla 6.7 obtenemos para la primera fila

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = T_n.$$

La suma de la segunda fila es $2T_n$, la suma de la tercera $3T_n$, ... y la suma de la n–ésima fila es nT_n; si sumamos las primeras n filas obtenemos

$$T_n + 2T_n + 3T_n + \cdots + nT_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)T_n = (T_n)^2.$$

Reuniendo los dos resultados,

$$\begin{aligned}
(T_1)^2 &= 1^3 \\
(T_2)^2 &= 1^3 + 2^3 \\
(T_3)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\
(T_4)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \\
(T_5)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \\
(T_6)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3
\end{aligned}$$

Lo que nos permite inducir que[9]

$$(T_n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Ejercicio

Proponga nuevas conjeturas sobre la tabla pitagórica.

6.1.7. Tabla de las escuadras iguales

El *gnomon* también puede utilizarse para encontrar la suma de los primeros n números cuadrados usando la tabla 6.8.

1^2	$=$	1	1	1	1	1
2^2	$=$	1	2	2	2	2
3^2	$=$	1	2	3	3	3
4^2	$=$	1	2	3	4	4
5^2	$=$	1	2	3	4	5

Tabla 6.8

Ejercicios

1. *Induzca una fórmula para la suma de los n primeros números cuadrados*[10].

[9] Un estudio similar de la tabla de multiplicación se encuentra en Jiménez, Domínguez y Luque (2007).

[10] Estudie por ejemplo la relación:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k + \sum_{k=1}^{n-1} T_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Los babilonios conocían (Kline, 1994, p. 28) expresiones concretas de la fórmula:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = (1/3 + 2n/3)(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

2. *Proponga otras regularidades a partir de la tabla 6.8.*

3. *Sobre la tabla 6.8 estudie diagonales, sumas parciales y otras opciones.*

6.1.8. Tabla del máximo común divisor

En la sección 4.4.2 mencionamos la tabla del máximo común divisor (MCD) de dos números a y b que notamos (a, b), la cual, en base 10 para los primeros 12 números naturales se ilustra en la tabla 6.9.

(,)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

Tabla 6.9

Algunas observaciones elementales de la tabla 6.9 indican que para todo número natural a se cumple:

i. $(a, a) = a$.

ii. $(a, b) = (b, a)$. Esto significa que la operación es conmutativa.

iii. $(a, ka) = a$.

iv. $(a, a+1) = 1$. Esta igualdad significa que un número y su sucesor son primos relativos.

Ejercicios

1. *Estudie qué sucede con*

   $(a, a+2)$ *si a es impar y si a es par,*

   $(a, a+3)$ (*¿Cuántos casos hay?*),

   $\vdots$

   $(a, a+k)$ (*¿Cuántos casos hay?*).

2. *¿La operación tiene elemento idéntico?*

3. *¿La operación es asociativa?, ¿es cancelativa?*

4. *¿Cómo se resuelven ecuaciones con esta operación?*

6.1.8.1. La función $d(n)$

A partir de la observación de la tabla 6.9: ¿en cuáles filas aparece un solo número? ¿En cuáles hay solo dos números? ¿En cuáles hay solo tres números? ¿Solo 4 y cuáles son? ¿Solo 5? ¿Solo 11?

Para buscar una solución organicemos la información en otra tabla (6.10)[11].

En la fila 1 de la tabla 6.9 únicamente hay un número, el 1. En las filas

$$2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ \ldots$$

se encuentran únicamente dos números. Estas filas corresponden a los números primos.

Como en cada fila aparecen todos los divisores que tiene el número correspondiente a esta, las preguntas iniciales se pueden interpretar como ¿cuáles números tienen un divisor? ¿Cuáles tienen 2 divisores? ¿Cuáles tienen 3 divisores? En general, ¿cuáles tienen k divisores?

Veamos ahora la lista de los números que tienen solo tres divisores, es decir, las filas en las que solo aparecen tres números:

$$4\ 9\ 25\ 49\ 121\ 169\ 289\ 361\ 529\ 841\ 961\ 1369\ 1681\ 1849\ 2209\ \ldots$$

[11] Los resultados de esta sección se consiguieron en el Club de Matemáticas de la UPN en el primer semestre de 2006, pero partiendo de la tabla de multiplicar; ellos se encuentran en Jiménez y Luque (2007).

Aparece solo	**Número de la fila en que aparece**
1 número	1
2 números	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 . . .
3 números	4 9 25 49 121 169 289 361 529 841 961 1369 1681 1849 2209 . . .
4 números	6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 39 51 55 65 125 343 1331 2197 . . .
5 números	16 81 625 2401 14641 28561 83521 130321 279841 707281 . . .
6 números	12 18 20 28 32 45 50 63 75 98 147 175 243 245 3125 16807 . . .
7 números	64 729 15625 117649 1771561 4826809 24137569 47045881 . . .
8 números	24 30 40 42 54 56 66 70 78 105 110 128 135 165 189 250 375 385 486 686 875 1029 1715 2187 78125 . . .
9 números	36 100 189 196 225 256 441 484 1225 3025 6561 . . .
10 números	48 80 112 162 405 512 567 1250 1875 4802 19683 . . .
11 números	1024 59049 9765625 282475249 . . .

Tabla 6.10

¿Cómo los caracterizamos? Son cuadrados,

$$
\begin{aligned}
4 &= 2 \times 2 = 2^2 \\
9 &= 3 \times 3 = 3^2 \\
25 &= 5 \times 5 = 5^2 \\
49 &= 7 \times 7 = 7^2 \\
121 &= 11 \times 11 = 11^2 \\
169 &= 13 \times 13 = 13^2.
\end{aligned}
$$

Pero no todos los cuadrados; solo p^2, donde p es un número primo.

Pasemos a la lista de los números que tienen solamente cuatro divisores

6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 39 51 55 65 125 343 1331 2197 . . .

¿Se pueden expresar en términos de números primos? Unos de ellos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
8 &= 2 \times 2 \times 2 = 2^3\\
27 &= 3 \times 3 \times 3 = 3^3\\
125 &= 5 \times 5 \times 5 = 5^3\\
343 &= 7 \times 7 \times 7 = 7^3\\
1331 &= 11 \times 11 \times 11 = 11^3\\
2197 &= 13 \times 13 \times 13 = 13^3.
\end{aligned}$$

Eliminemos estos números de la fila cuatro de la tabla 6.10 y busquemos de nuevo una regularidad; nos quedan

$$6\ 10\ 14\ 15\ 21\ 22\ 26\ 33\ 34\ 35\ 39\ 51\ 55\ 65\ \ldots,$$

que los podemos organizar en la forma:

$$\begin{aligned}
2 \times 3 &= 6\\
2 \times 5 &= 10\\
2 \times 7 &= 14\\
2 \times 11 &= 22\\
2 \times 13 &= 26\\
3 \times 5 &= 15\\
3 \times 7 &= 21\\
3 \times 11 &= 33\\
5 \times 7 &= 35,
\end{aligned}$$

y con esto conjeturar que los números que únicamente tienen cuatro divisores se pueden escribir como p^3 o qr, donde p, q y r son primos y $q \neq r$.

∗ ∗

Es frecuente en la actividad matemática que una lista no siempre se pueda describir de una sola forma, a veces aparecen varios comportamientos y en estos casos es útil separar lo que hemos clasificado y observar los restantes.

∗ ∗

¿Cómo se pueden expresar los números de la quinta fila de la tabla 6.10?

$$16\ 81\ 625\ 2401\ 14641\ 28561\ 83521\ 130321\ 279841\ 707281\ \ldots$$

Aquí aparece algo curioso, todos ellos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
16 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \\
81 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \\
625 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 \\
2401 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 \\
14641 &= 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^4 \\
28561 &= 13 \times 13 \times 13 \times 13 = 13^4 \\
83521 &= 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 17^4.
\end{aligned}$$

En general los números de la fila 5 de la tabla 6.10 se pueden escribir como p^4, donde p es un número primo.

En la fila 6 de la tabla 6.10, donde están los números:

$$12\ 18\ 20\ 28\ 32\ 45\ 50\ 63\ 75\ 98\ 147\ 175\ 243\ 245\ 3125\ 16807\ \ldots,$$

es natural buscar quintas potencias, como en efecto sucede

$$\begin{aligned}
32 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \\
243 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 \\
3125 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5 \\
16807 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5,
\end{aligned}$$

pero en esta lista no están todos los números, veamos que si descomponemos los otros números en factores primos obtenemos

$$\begin{aligned}
12 &= 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \\
20 &= 4 \times 5 = 2^2 \times 5 \\
28 &= 4 \times 7 = 2^2 \times 7 \\
18 &= 9 \times 2 = 3^2 \times 2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
45 &= 9 \times 5 = 3^2 \times 5 \\
63 &= 9 \times 7 = 3^2 \times 7 \\
50 &= 25 \times 2 = 5^2 \times 2 \\
75 &= 25 \times 3 = 5^2 \times 3 \\
98 &= 49 \times 2 = 7^2 \times 2.
\end{aligned}$$

Conjeturamos entonces, que los números de la fila 6 se pueden escribir como p^5 o q^2r, donde p, q y r son números primos y $q \neq r$.

¿Y qué sucede con los números de la fila 7 de la tabla 6.10? Estos son:

$$64\ 729\ 15625\ 117649\ 1771561\ 4826809\ 24137569\ 47045881\ \ldots$$

De nuevo, como en el caso de la fila 5, todos ellos son sextas potencias de los números primos

$$\begin{aligned}
64 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 \\
729 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 \\
15625 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 \\
117649 &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 = 7^6.
\end{aligned}$$

Es decir que los números de la fila 7 se pueden escribir como p^6, donde p es un número primo.

La fila 8 resulta un poco más complicada, pues aparecen séptimas potencias, ¡como esperábamos!:

$$\begin{aligned}
128 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 \\
2187 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7 \\
78125 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7,
\end{aligned}$$

pero también:

$$\begin{aligned}
24 &= 8 \times 3 = 2^3 \times 3 \\
40 &= 8 \times 5 = 2^3 \times 5 \\
56 &= 8 \times 7 = 2^3 \times 7 \\
54 &= 27 \times 2 = 3^3 \times 2 \\
135 &= 27 \times 5 = 3^3 \times 5 \\
189 &= 27 \times 7 = 3^3 \times 7 \\
250 &= 125 \times 2 = 5^3 \times 2 \\
375 &= 125 \times 3 = 5^3 \times 3 \\
875 &= 125 \times 7 = 5^3 \times 7 \\
686 &= 343 \times 2 = 7^3 \times 2 \\
1029 &= 343 \times 3 = 7^3 \times 3 \\
1715 &= 343 \times 5 = 73 \times 5,
\end{aligned}$$

y por primera vez aparecen tres factores primos:

$$\begin{aligned}
30 &= 2 \times 3 \times 5 \\
42 &= 2 \times 3 \times 7 \\
66 &= 2 \times 3 \times 11 \\
78 &= 2 \times 3 \times 13 \\
105 &= 3 \times 5 \times 7 \\
165 &= 3 \times 5 \times 11 \\
195 &= 3 \times 5 \times 13 \\
70 &= 2 \times 5 \times 7 \\
110 &= 2 \times 5 \times 11
\end{aligned}$$

En resumen podemos suponer que los números de la fila 8 se pueden escribir como p^7 o q^3r o stv donde p, q, r, s, t, v son números primos y $q \neq r$, $s \neq t$, $s \neq v$ y $t \neq v$. Sin más cuentas conjeturamos que:

Los números de la fila 9 se pueden escribir como p^8 o q^2r^2 donde p, q, r son números primos y $q \neq r$.

Los números de la fila 10 se pueden escribir como p^9 o q^4r donde p, q, r son números primos y $q \neq r$.

Los números de la fila 11 se pueden escribir como p^{10} donde p es un número primo.

Ahora, a partir de lo anterior, intentemos responder la pregunta ¿cuántos divisores tiene un número dado cualquiera? Y si queremos realizar el proceso inverso, es decir, dado un número cualquiera, ¿cómo podemos ubicarlo en una determinada fila de la tabla 6.10?

∗ ∗

Deténgase por un momento y presente sus propias conclusiones antes de continuar con la lectura. Este es un buen ejercicio cuando estudiamos matemáticas, parar y plantear resultados propios. ¡Siempre hay ganancias!

∗ ∗

Realicemos primero una tabla (6.11), con las regularidades encontradas, a partir de la tabla 6.10.

Como en la segunda columna solo hay productos de potencias de números primos, esto nos sugiere descomponer en factores primos un número dado para determinar cuál forma tiene dicha descomposición y ubicarla en la tabla 6.11.

Fila N.º	**Forma de los números**
1	1
2	p
3	p^2
4	p^3 qr
5	p^4
6	p^5 q^2r
7	p^6
8	p^7 q^3r stv
9	p^8 q^2r^2
10	p^9 q^4r
11	p^{10}

Tabla 6.11

Por ejemplo, en la fila 3 de la tabla 6.10 están los números primos al cuadrado y si tenemos un número primero al cuadrado, debe estar en la fila 3; así, el número 10609, cuya descomposición en factores primos es 103×103, debe pertenecer a la fila 3.

El número 4913 debe estar en la fila 4 pues su descomposición en factores primos es $4913 = 17^3$.

El número 112 está en la fila 10 pues $112 = 2^4 \times 7$, lo que significa que el número 112 tiene 10 divisores.

Para averiguar en cuál fila está el número 8281, lo descomponemos en sus factores primos

$$\begin{array}{r|l} 8281 & 7 \\ 1183 & 7 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

como $8281 = 7^2 \times 13^2$ es de la forma p^2q^2 con p y q primos y $p \neq q$, es de la fila 9 lo que indica que tiene 9 divisores.

Por tanto, para averiguar en cuál fila está un número, tenemos que primero descomponerlo en sus factores primos y determinar qué forma tiene para luego ubicarlo en una fila de la tabla 6.11; sin embargo si resulta tener una forma que no aparezca en dicha tabla, ¿*qué hacemos*?

Inicialmente podemos conjeturar que en la fila k están los números de la forma p^{k-1}. Pero hay algo más, algunas filas solo tienen elementos de esa forma, esto sucede en las filas 2, 3, 5, 7, 11, ..., o sea en las filas correspondientes a los números primos.

Apliquemos de nuevo la idea de eliminar lo hecho para fijar nuestra atención en los casos restantes.

Debemos encontrar una relación entre el número que aparece en la primera columna y los exponentes de los factores primos que están en la segunda columna y parece ser que algo tiene que ver con los factores del primero. Vemos esta información organizada en la tabla 6.12.

Fila N.º (N)	**N como producto de números**	**Forma de los números con N divisores**
4	$= 4 \times 1 = 2 \times 2$	$p^3 \;\; pq$
6	$= 6 \times 1 = 3 \times 2$	$p^5 \;\; p^2q$
8	$= 8 \times 1 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$	$p^7 \;\; p^3q \;\; pqr$
9	$= 9 \times 1 = 3 \times 3$	$p^8 \;\; p^2q^2$
10	$= 10 \times 1 = 5 \times 2$	$p^9 \;\; p^4q$

Tabla 6.12

De acuerdo con lo anterior, ¿cómo podemos encontrar la forma general de un número que tenga 12 divisores? Hallemos todas las formas posibles de escribir 12 como producto de números,

$$12 = 12 \times 1 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$$

Entonces las formas generales de los números que están en la fila 12, o que tienen 12 divisores, son:

$$p^{11},\ q^5r,\ t^3s^2,\ u^2vw \text{ con } q \neq r,\ t \neq s,\ u \neq v,\ u \neq w,\ v \neq w.$$

Los números que tienen 20 divisores tendrán como descomposición en factores primos alguna de las siguientes formas:

$$p^{19},\ q^9r,\ t^4s^3,\ u^4vw \text{ con } q \neq r,\ t \neq s,\ u \neq v,\ u \neq w,\ v \neq w.$$

Así, para determinar cuántos divisores tiene 432, lo descomponemos en factores primos, esto es, $432 = 2^4 \times 3^3$, y como es de la forma p^4q^3 con p y q primos y $p \neq q$, entonces el número de divisores es

$$(4+1) \times (3+1) = 20,$$

es decir, que 432 está ubicado en la fila 20 de la tabla 6.10.

En general, para hallar el número de divisores de un número x, lo descomponemos en sus factores primos, a cada uno de los exponentes los aumentamos en uno y luego realizamos el producto.

Si a la expresión *número de divisores de* x la notamos $d(x)$ para un número x cualquiera, entonces en la tabla 6.13 vemos algunos ejemplos con p, q, r números primos diferentes.

$d(p) = (1+1) = 2$		
$d(p^2) = (2+1) = 3$		
$d(p^3) = (3+1) = 4$	$d(pq) = (1+1)(1+1) = 4$	
$d(p^4) = (4+1) = 5$		
$d(p^5) = (5+1) = 6$	$d(p^2q) = (2+1)(1+1) = 6$	
$d(p^6) = (6+1) = 7$		
$d(p^7) = (7+1) = 8$	$d(p^3q) = (3+1)(1+1) = 8$	$d(pqr) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$
$d(p^8) = (8+1) = 9$	$d(p^2q^2) = (2+1)(2+1) = 9$	
$d(p^9) = (9+1) = 10$	$d(p^4q) = (4+1)(1+1) = 10$	

Tabla 6.13

Notemos que

$$\begin{aligned} d(pq) &= (1+1)(1+1) = d(p)d(q) \\ d(p^2q) &= (2+1)(1+1) = d(p^2)d(q) \\ d(p^3q) &= (3+1)(1+1) = d(p^3)d(q) \\ d(p^4q) &= (4+1)(1+1) = d(p^4)d(q), \end{aligned}$$

además

$$d(p^2q^2) = (2+1)(2+1) = d(p^2)d(q^2),$$

y

$$d(pqr) = (1+1)(1+1)(1+1) = d(p)d(q)d(r).$$

Podemos conjeturar que si p y q son números primos diferentes[12] entonces,

[12]En general, no se cumple que $d(nm) = d(n)d(m)$ para números cualesquiera n y m; es necesario que m y n sean primos relativos.

$$d(p^k q^n) = d(p^k)d(q^n),$$

y de manera general suponer que

$$d(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}) = d(p_1^{a_1})d(p_2^{a_2})d(p_3^{a_3}) \cdots d(p_n^{a_n}),$$

siempre que los p_i sean todos diferentes.

Y como todo número x se puede escribir de manera única como producto de factores primos, para hallar el número de divisores de un número x cualquiera, si

$$x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n},$$

con los p_i todos diferentes, entonces

$$d(p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \ldots (a_n + 1).$$

En otra notación presuntuosa tenemos que

$$d(x) = \prod_{j=1}^{n} (a_j + 1).$$

6.1.8.2. La función σ de Euler

Ya sabemos cuántos divisores tiene un número dado, y la forma de escribirse como producto de potencias de números primos; ahora encontremos cuáles son los divisores de un número dado. Empecemos mirando en la tabla 6.10 los números que se encuentran en las filas correspondientes a números primos, pues estos tienen una sola forma general.

Los divisores de p son: 1 y p, pues

$$p = 1 \times p.$$

Los divisores de p^2 son: 1, p, p^2, puesto que

$$p^2 = 1 \times p^2 \qquad \text{y} \qquad p^2 = p \times p.$$

Los divisores de p^3 son: 1, p, p^2, p^3 y de manera general los divisores de p^k son:

$$1, p, p^2, p^3, p^4, \ldots, p^k.$$

Miremos otros casos:

Los divisores de pq son: 1, p, q, pq.

Los divisores de p^2q son: $1,\ p,\ q,\ p^2,\ pq\ , p^2q$.

Los divisores de p^3q son: $1,\ p,\ q,\ p^2,\ p^3,\ pq,\ p^2q,\ p^3q$.

Y en general los divisores de $p^k q$ son:

$$1,\ q,\ p,\ p^2,\ p^3,\ \ldots,\ p^k,\ pq,\ p^2q,\ \ldots,\ p^kq.$$

Los divisores de p^2q^2 son: $1, p, p^2, q, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$.

Los divisores de p^3q^2 son: $1, p, p^2, p^3, q, q^2, pq, p^2q, p^3q, pq^2, p^2q^2, p^3q^2$.

Los divisores de p^4q^2 son: $1, p, p^2, p^3, p^4, q, q^2, pq, p^2q, p^3q, p^4q, pq^2, p^2q^2, p^3q^2, p^4q^2$.

Generalizando, los divisores de p^kq^2 son:

$$1, p, p^2, p^3, \ldots, p^k, q, q^2, pq, p^2q, \ldots, p^kq, pq^2, p^2q^2, p^3q^2, \ldots, p^kq^2.$$

De manera similar podemos hallar los divisores de p^kq^n, y otros productos, pero de momento nos interesan las sumas de los divisores de un número dado.

Empecemos por los números que se encuentran en las filas correspondientes a números primos:

Suma de divisores de p: $1+p$

Suma de divisores de p^2: $1+p+p^2$

Suma de divisores de p^3: $1+p+p^2+p^3$

Suma de divisores de p^k: $1+p+p^2+p^3+p^4+\cdots+p^k$

A la expresión *suma del número de divisores de* x la notamos $\sigma(x)$ para un número x cualquiera.

Hasta ahora tenemos sumas indicadas, pero ¿podemos hallar una fórmula que nos permita calcular la suma sin tener que hacerla efectivamente? Consideremos inicialmente la suma:

$$\sigma(p^k) = 1+p+p^2+p^3+p^4+\cdots+p^k.$$

Notemos que si la multiplicamos por p, obtenemos

$$p\sigma(p^k) = p+p^2+p^3+p^4+\cdots+p^k+p^{k+1},$$

y como la mayoría de los sumandos es la misma que en la primera suma, puede ser productivo restar de esta última la expresión inicial, obteniendo:

$$\begin{array}{rccccccccccccccc} & p\sigma(pk) & = & p & + & p^2 & + & p^3 & + & p^4 & + & \ldots & + & p^k & + & p^{k+1} \\ - & \sigma(pk) & = & 1 & + & p & + & p^2 & + & p^3 & + & \ldots & + & p^{k-1} & + & p^k \\ \hline \end{array}$$

$$p\sigma(p^k) - \sigma(p^k) = p^{k+1} - 1$$

o sea,

$$\sigma(p^k)(p-1) = p^{k+1} - 1$$

Y por tanto,

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

Veamos ahora qué sucede con la suma de los factores de un producto de dos números primos, es decir con $\sigma(pq)$ sabiendo que los divisores de pq son 1, p, q, pq, por tanto,

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq,$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned}\sigma(pq) &= (1+p) + q(1+p)\\ \sigma(pq) &= (1+p)(1+q),\end{aligned}$$

y como[13] en el caso de la función d,

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q).$$

Estudiemos el caso de $\sigma(p^2q)$, teniendo en cuenta que los divisores de p^2q son 1, p, q, p^2, pq, p^2q, luego:

$$\begin{aligned}\sigma(p^2q) &= 1 + p + p^2 + q + pq + p^2q\\ &= (1+p+p^2) + q(1+p+p^2)\\ &= (1+p+p^2)(1+q).\end{aligned}$$

Observemos que al igual que en el caso anterior,

$$\sigma(p^2q) = \sigma(p^2)\sigma(q).$$

De lo expuesto podemos conjeturar que si p y q son números primos entonces,

$$\sigma(p^kq^n) = \sigma(p^k)\sigma(q^n).$$

Y por consiguiente para hallar la suma de los divisores de un número x cualquiera, basta descomponerlo en factores primos

$$x = p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}$$

y calcular

$$\sigma(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}) = \sigma(p_1^{a_1})\sigma(p_2^{a_2})\sigma(p_3^{a_3})\cdots\sigma(p_n^{a_n}),$$

[13] De nuevo este resultado no es cierto para cualquier par de números n y m, es necesario que sean primos relativos.

así, el problema de hallar la suma de divisores de un número x se reduce a encontrar $\sigma(p^k)$, pero esto ya está resuelto, entonces

$$\sigma(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_n^{a_n}) = \left(\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\right)\left(\frac{p_3^{a_3+1}-1}{p_3-1}\right)\cdots\left(\frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}\right).$$

O escrito elegantemente[14]

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}.$$

Por ejemplo, la suma de los divisores de 9600 es:

$$\sigma(9600) = \sigma(2^7\cdot 3\cdot 5^2) = \sigma(2^7)\cdot\sigma(3)\cdot\sigma(5^2) = 255\cdot 4\cdot 31 = 31620.$$

6.1.8.3. Los números perfectos

Un caso de particular interés, vinculado con la función σ, es el de encontrar números perfectos, aquellos que son iguales a la suma de sus divisores propios[15]. Estos números han sido estudiados desde la Antigüedad; por ejemplo, Euclides en la proposición 36 del Libro IX, dice:

> Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su suma total resulte un número primo y si la suma multiplicada por el último produce algún número, el producto será un número perfecto.

Cuando dice: "a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada" significa que

$$1+2+4+\cdots+2^{k-1}.$$

Supone que esta suma es un número primo, la multiplica por 2^{k-1} y obtiene un número perfecto.

Observemos que $1+2+4+\cdots+2^{k-1}$ es una suma como

$$\sigma(p^k) = 1+p+p^2+p^3+p^4+\cdots+p^k$$

con $p=2$, cuya suma es:

$$\frac{2^k-1}{2-1} = 2^k-1.$$

[14]Este resultado fue encontrado por el matemático suizo Leonhard Euler.

[15]Se le llama *divisores propios de un número* a sus divisores excepto él mismo.

Así, la proposición de Euclides establece que:

Si $2^k - 1$ es primo y si $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, entonces N es perfecto.

Su demostración inicia suponiendo que $p = 2^k - 1$ es un número primo, entonces los divisores propios de

$$N = 2^{k-1}(2^k - 1) = 2^k - 1p$$

tienen como factores solamente potencias de 2 y p, y por lo tanto la suma de todos ellos es

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} + p + 2p + \cdots + 2^{k-2}p & \\ &= (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-2}) \\ &= (2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) \\ &= p + p2^{k-1} - p \\ &= p2^{k-1} = N, \end{aligned}$$

así concluye que N es perfecto.

Por ejemplo, si $k = 2$, entonces $2^2 - 1 = 3$ es primo y por consiguiente $N = 2 \cdot (2^2 - 1) = 6$ es un número perfecto.

Si $k = 3$ entonces $2^3 - 1 = 7$ es primo y $N = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$ es un número perfecto.

Si $k = 13$, como $2^{13} - 1 = 8191$ es primo, entonces $N = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33550336$ es perfecto.

Con esto Euclides cambió el problema de encontrar números perfectos por el de encontrar números primos de la forma $p = 2^k - 1$. Estos números se llaman *números primos de Mersenne*, en honor a Marin Mersenne (1588-1648), su divulgador en el siglo XVII. Euler probó, veinte siglos después, que todo número perfecto par es de la forma establecida por Euclides.

En términos de la función $\sigma(n)$ podemos caracterizar a los números perfectos como aquellos para los cuales se cumple que

$$k = \sigma(k) - k, \text{ es decir, } \sigma(k) = 2k.$$

Una potencia de 2 *nunca* es un número perfecto, porque en este caso

$$\sigma(N) = \sigma(2^r) = \frac{2^{r+1} - 1}{2 - 1} = 2(2^r) - 1 = 2N - 1,$$

y como $\sigma(N) \neq 2N$, este no es perfecto.

Otra observación interesante es que los primeros cinco números perfectos son 6, 28, 496, 8128 y 33550336. Y,

$$\begin{gathered}
6 \text{ es el tercer número triangular, } T_3\\
28 \text{ es el triangular } T_7\\
496 \text{ es } T_{31}\\
8128 \text{ es } T_{127}\\
33550336 \text{ es } T_{255}.
\end{gathered}$$

Lo que nos lleva a conjeturar que todos los números perfectos pares son triangulares[16]. Con una prueba se convierte en teorema.

Prueba: un número perfecto par es de la forma

$$P = 2^{n-1}(2^n - 1),$$

donde n es un número natural cualquiera y $2^n - 1$ es un número primo. Debemos escribirlo como un número triangular, o sea $P = \frac{k(k+1)}{2}$ para algún k,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2 \times 2^{n-1}(2^n - 1)}{2}\\
&= \frac{(2^n - 1)2^n}{2}\\
&= \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{con } k = 2^n - 1\\
&= T_{(2^n-1)}.
\end{aligned}$$

¿Hay números perfectos impares? Nadie sabe.

6.1.8.4. La función φ de Euler

Volviendo sobre la tabla 6.9 vemos que el número 1 se repite con persistencia y nos preguntamos ¿cuántos unos existen en cada diagonal secundaria?

Observando las diagonales secundarias notamos que, por ejemplo, la diagonal secundaria 8, DS8, que corresponde con los números

$$1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1$$

y se obtienen de evaluar

$$(7,1),\ (6,2),\ (5,3),\ (4,4),\ (3,5),\ (2,6),\ (1,7),$$

[16] Pitágoras encontró este resultado hace más de 2500 años.

respectivamente; resulta igual a la fila 8 entre la columna 1 y la columna 7, sin embargo este fragmento de fila tiene otra interpretación:

$$(8,1),\ (8,2),\ (8,3),\ (8,4),\ (8,5),\ (8,6),\ (7,7),$$

lo que significa que

$$\begin{aligned}(7,1) = (1,7) = (8,1) = (8,7)\\(6,2) = (2,6) = (8,2) = (8,6)\\(5,3) = (3,5) = (8,3) = (8,5)\\(4,4) = (8,4).\end{aligned}$$

Extendiendo la observación a otras diagonales secundarias, apreciamos el mismo comportamiento; esto nos lleva a conjeturar que[17]

$$(a,b) = (a+b,a) = (a+b,b).$$

Retomando la pregunta inicial y la observación anterior, notamos que contar el número de unos que aparecen, por ejemplo, en DS8 es contar el número de primos relativos con 8, por tanto en búsqueda de una respuesta, hagamos una lista donde n indica el número de la diagonal secundaria (tabla 6.14).

n	**Número de unos en la diagonal n**
2	1
3	2
4	2
5	4
6	2
7	6
8	4
9	6
10	4
11	10
12	4

Tabla 6.14

[17]Este resultado es un caso particular de un teorema más general en teoría de números: *para todo x,* $(a,b) = (b,a) = (a,b+ax)$. (Niven y Zuckerman, 1976, p. 14).

Si p es un número primo, entonces la cantidad de unos en DSp, que notamos $\varphi(p)$ está dada por

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Ejercicios

1. *¿Cuál es el valor de $\varphi(n)$ si el número n es de la forma p^2, p^3, ... p^k, con p un número primo? ¿En cuáles casos $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$?*

2. Si n se descompone en factores primos

$$n = (p_1^{k_1})(p_2^{k_2}) \cdots (p_r^{k_r}),$$

dé una expresión para $\varphi(n)$.

6.1.9. Tabla del mínimo común múltiplo

En la misma forma como estudiamos la tabla 6.9 podemos considerar la tabla 6.15 del mínimo común múltiplo (MCM) entre dos números n y k, notada por $[n, k]$.

[,]	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	2	6	4	10	6	14	8	18	10	22
3	3	6	3	12	15	6	21	24	9	30	33
4	4	4	12	4	20	12	28	8	36	20	44
5	5	10	15	20	5	30	35	40	45	10	55
6	6	6	6	12	30	6	42	24	18	30	66
7	7	14	21	28	35	42	7	56	63	70	77
8	8	8	24	8	40	24	56	8	72	40	88
9	9	18	9	36	45	18	63	72	9	90	99
10	10	10	30	20	10	30	70	40	90	10	110
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	11

Tabla 6.15

Algunas observaciones rápidas son:

- $[a, a] = a$
- $[a, ka] = ka$
- $[a, b] = [b, a]$

Ejercicio

Estudie la tabla 6.15 y proponga regularidades.

6.1.10. Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico es una tabla con el mismo número de casillas verticales (columnas) que horizontales (filas), donde se ubican números, de manera que la suma de las filas es la misma que la de las diagonales y la de las columnas.

Ejercicios

1. *Coloque*[18] *en cada casilla vacía un número entre 1 y 9, de manera que la suma de los números en cada fila, columna o diagonal, sea 15 en base 10. Repita el ejercicio en base 11 y en base 16.*

	5	
	9	

Tabla 6.16

¿Cuántas maneras hay de hacerlo?,¿la suma debe ser 15 o puede ser otro número?, ¿puede ser cualquier número?, ¿se puede con multiplicaciones?, ¿con mínimo común múltiplo?

2. *Escriba*[19] *una tabla similar con los números entre 1 y 16 en un cuadrado 4×4, de manera que su suma sea 34. Repita el ejercicio en base 11 y en base 16. Busque regularidades, explore posibilidades.*

[18]Los chinos resolvieron este ejercicio hace más de 6000 años.
[19]El pintor Alberto Durero presentó este cuadrado en una de sus obras, en 1514.

6.1.11. Tablas triangulares

6.1.11.1. El triángulo de Pascal

La tabla 6.17 fue usada por Pascal para sus estudios en teoría de juegos.

1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	
3	6	10	15	21	28	36	
4	10	20	35	56	84	120	
5	15	35	70	126	230	350	
6							

Tabla 6.17

Ejercicios

1. *¿Cómo es la fila k?*
2. Si leemos la tabla 6.17, no por filas y columnas sino por diagonales y columnas, nos indica el número de grupos que pueden hacerse con el número de elementos que indica la columna seleccionada disminuida en 1, a partir de un conjunto de elementos cuyo número queda indicado por la diagonal seleccionada. Por ejemplo, el elemento de la cuarta diagonal y la tercera columna nos dice el número de combinaciones posibles de cuatro elementos tomados de 2 en 2.

   Esta tabla es más conocida en forma de triángulo. *Estudie algunas de sus regularidades; por ejemplo, sus diagonales, sus relaciones con los números triangulares y otros tipos de números, etc.*

6.1.11.2. Una tabla caprichosa

La tabla 6.18 se construye así: la primera línea tiene un 1; eso escribo en la segunda: 1 1; la segunda línea tiene dos unos; eso escribo en la tercera: 2 1; la tercera línea tiene un 2 y un 1; eso escribo en la cuarta; la cuarta línea tiene un 1, un 2 y dos unos; eso escribo en la quinta, etc.

			1		
		1	1		
		2	1		
	1	2	1	1	
1	1	1	2	2	1
3	1	2	2	1	1

Tabla 6.18

Ejercicio

¿Cómo es la línea 12?;¿cuál es la línea 25?; ¿cuál es la línea número k?

6.1.12. Tablas en secuencia

La tabla 6.19 es una secuencia de tablas en base 10 encadenadas en su formación.

1

2	3
1	3

4	5	6	7
2	3	6	7
1	3	5	7

8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	12	13	14	15
2	3	6	7	10	11	14	15
1	3	5	7	9	11	13	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31

Tabla 6.19

Ejercicios

1. *Dé una explicación de su formación.* Puede ayudarle, pensar por ejemplo, en:

   a) La secuencia de los primeros números de cada tabla.

   b) Si hay relación entre el primero y el último número de cada tabla.

   c) La forma como se rompe la secuencia en cada fila y el número de veces que esto ocurre.

2. *¿Cuántos números aparecen en una sola fila en cada tabla?, ¿cuántos números aparecen solo en dos filas en cada tabla?, ¿en tres?, ¿en cuatro? ... ¿Encuentre alguna regularidad? Justifique.*

3. *Sin mirar las tablas, diga cuál número está solamente en la segunda, tercera y cuarta filas de la quinta tabla. Construya un ejemplo análogo partiendo de 32 (los números están escritos en base 10). ¿Pueden hacerse ordenamientos similares en otras bases?*

6.2. Inducción con dibujos

No todas las personas tienen las mismas habilidades para intuir una regularidad, a algunos se les facilita inducir a partir de listas o tablas, otros ven en los dibujos y figuras una herramienta más fructífera.

Los dos libros que sirvieron de fuente para la mayoría de las gráficas que presentaremos a continuación son un gran recurso para este tipo de actividad (Nelsen, 1993; 2000).

6.2.1. Suma de números triangulares

Si queremos hallar la suma de los n primeros números triangulares la figura 6.1 puede ayudarnos[20]; *mírela y trate de ver más allá. Estudie cómo a partir de ella podemos colegir la fórmula para la suma de los n primeros números triangulares.*

Si tiene problemas para visualizar objetos de tres dimensiones a partir de su representación en dos dimensiones, construya un modelo en madera o cualquier otro material que le facilite notar las relaciones.

[20]La figura 6.1. es de Roger B. Nelsen (1993, p. 95).

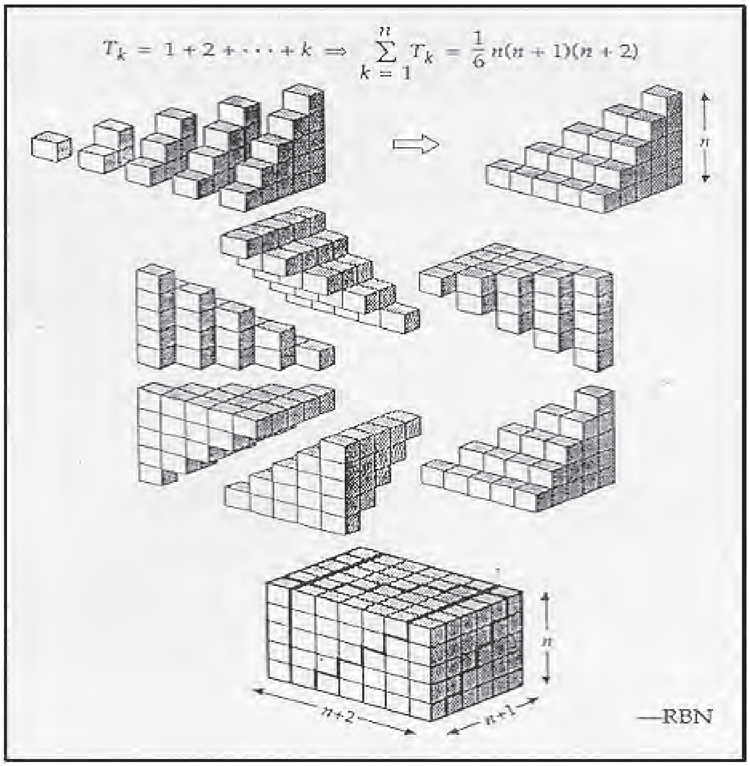


Figura 6.1

Una alternativa en dos dimensiones es[21] la figura 6.2.

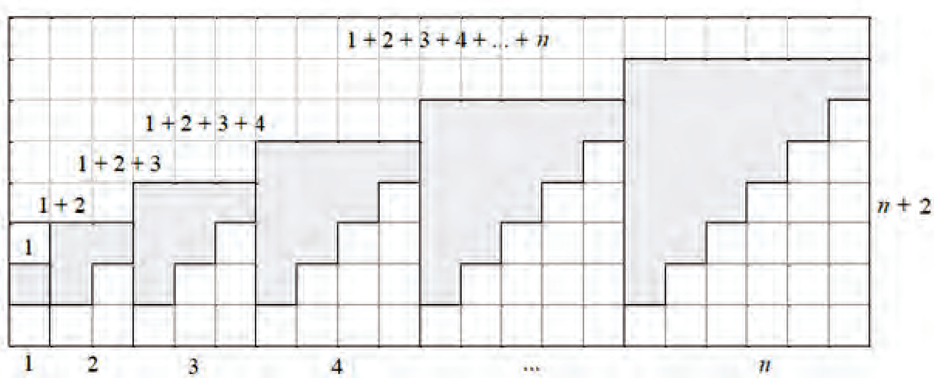


Figura 6.2

[21]La figura 6.2. es de Monte J. Zerger (Nelsen, 1993, p. 94).

6.2.2. Suma de números cuadrados

Para sumar los primeros n números cuadrados, las figuras 6.3[22] y 6.4[23] nos muestran dos caminos.

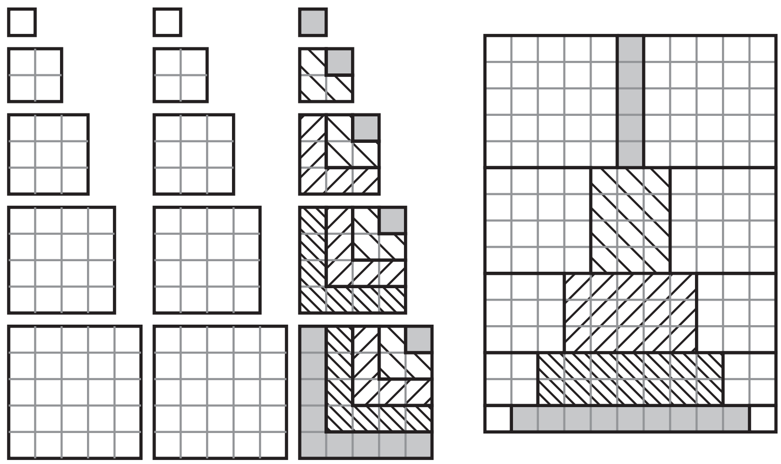


Figura 6.3

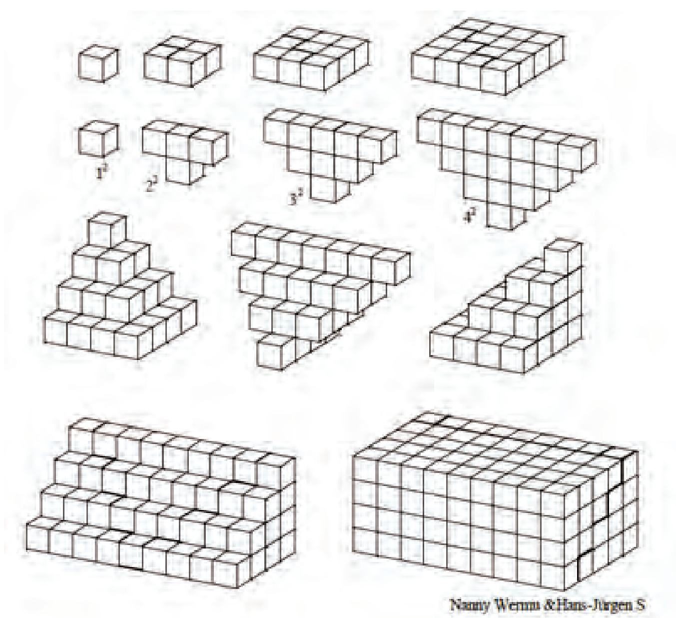


Figura 6.4

[22]La figura 6.3 es de Martin Gardner y Dan Kalman (Nelsen, 1993, p. 78).
[23]La figura 6.4 es de Wermur. N. y Jünger. H. (Nelsen, 2000, p. 87).

La suma de los números cuadrados nos ayuda a encontrar el número total de cuadrados de la figura 6.5.

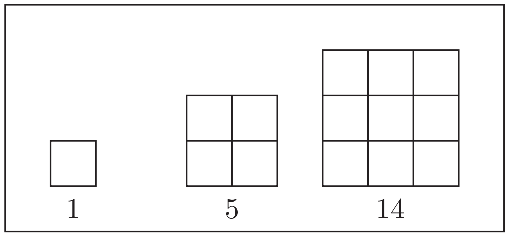


Figura 6.5

En la primera aparece solamente un cuadrado de lado 1.

En la segunda hay 4 cuadrados de lado 1 y 1 de lado 2

En la tercera hay 9 cuadrados de lado 1, 4 de lado 2 y 1 de lado 3.

De esto inducimos que, para un cuadrado de lado 4 debería haber 16 cuadrados de lado 1, 9 de lado 2, 4 de lado 3 y 1 de lado 4.

Y en un tablero de ajedrez debería haber:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$$

cuadrados en total, y así sucesivamente para un cuadrado de lado n.

Existe, además, solamente una figura regular que nos permite hacer figuras semejantes a partir de ella por repetición, como en el caso anterior; es el triángulo equilátero.

Ejercicio

Estudie el problema de encontrar el número de triángulos equiláteros que se forman en un triángulo equilátero de lado $1, 2, 3, \cdots, 10, k$. En la figura 6.6 se muestra el caso para un triángulo equilátero de lado 4.

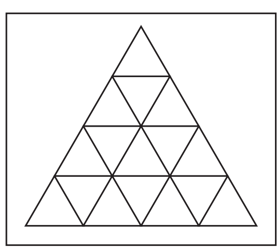


Figura 6.6

6.2.3. Suma de cubos

Georg Schrage (Nelsen, 1993, p. 90) nos muestra una idea para hallar la suma de los cubos de los primeros n números naturales en la figura 6.7.

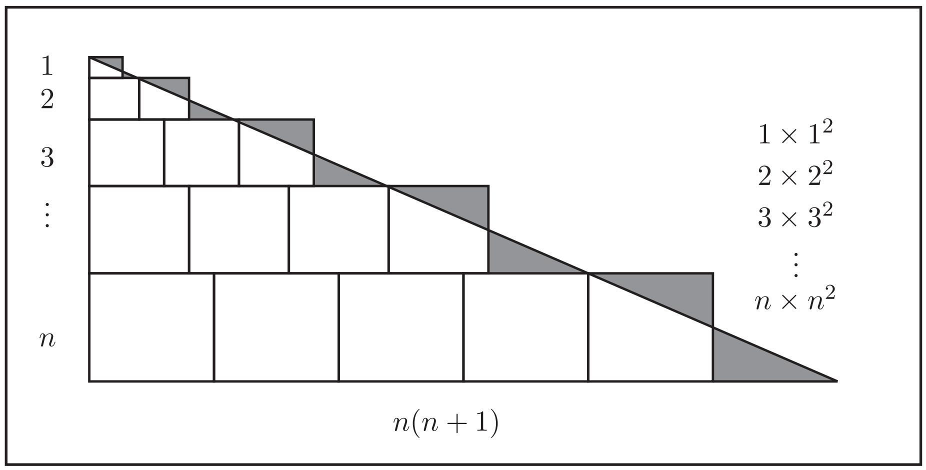


Figura 6.7

Una alternativa[24] es

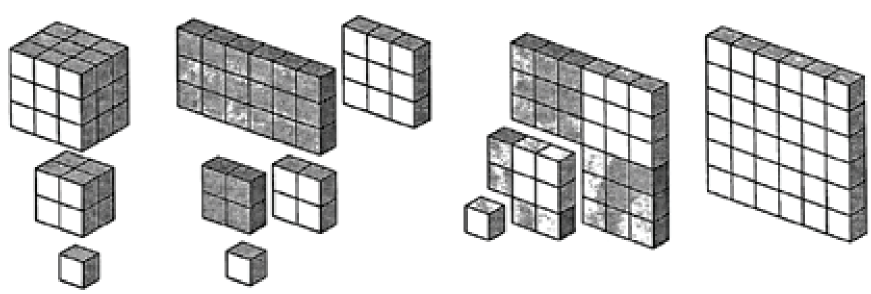


Figura 6.8

[24]Propuesta por Alan L. Fry (Nelsen, 1993, p. 86).

Y otra posibilidad[25]:

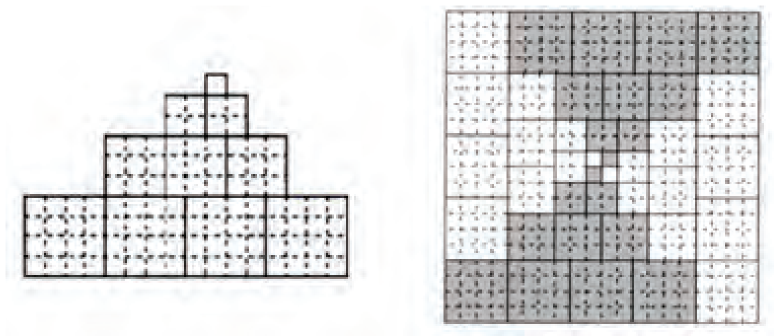


Figura 6.9

6.2.4. Suma de números pentagonales

Para la suma de los primeros n números pentagonales[26] la figura 6.10 tiene una sugerencia.

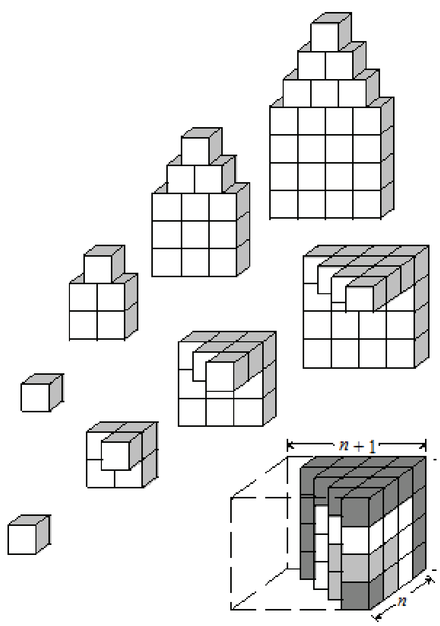


Figura 6.10

[26]Original de William A. Miller (Nelsen, 1993, p. 100).

[25]Creada por Antonella Cupillari y Warren Lushbaugh (Nelsen, 1993, p. 87).

6.2.5. Otras figuras que nos permiten inducir fórmulas

Además de las anteriores figuras relacionadas con los números estudiados (triangulares, cuadrados, cubos, pentagonales y sumas de estos), aquí presentamos otras que permiten inducir algunas relaciones.

Por ejemplo, la figura 6.11 muestra una regularidad que encontramos en la sección 5.2.2. del capítulo 5. *¿La recuerda*?

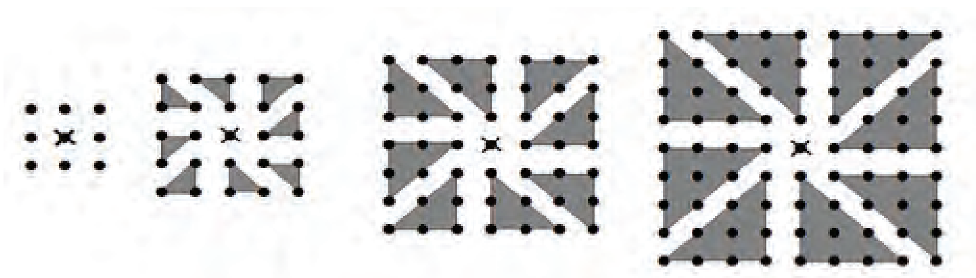


Figura 6.11

La figura 6.12[27] nos muestra una relación entre los números impares y los números cúbicos.

$$1 = 1 \times 1 = 13$$
$$3 + 5 = 2 \times 4 = 23$$
$$7 + 9 + 11 = 3 \times 9 = 33$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4 \times 16 = 43$$

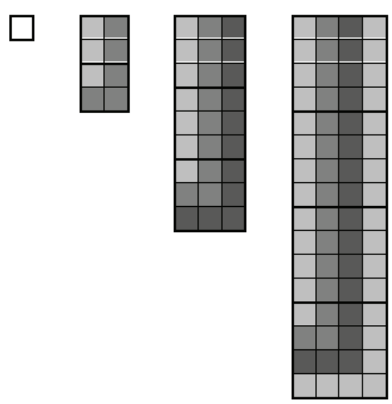


Figura 6.12

[27]Tomada de (Flores, 2000).

La figura 6.13[28] nos muestra una relación interesante de la suma de los cuadrados de los términos de la sucesión de Fibonacci[29]:

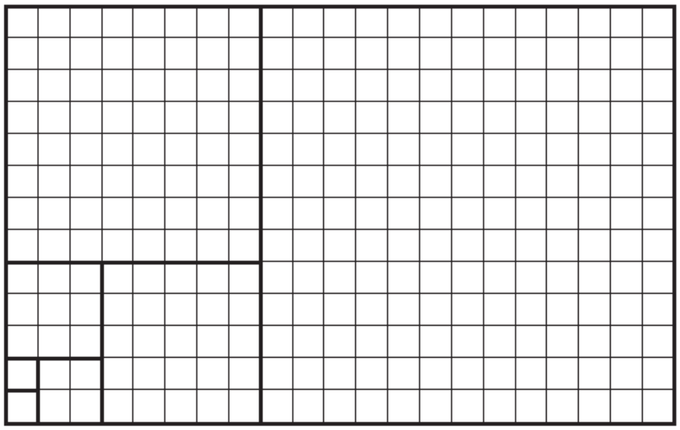


Figura 6.13

Ejercicios

1. *Para cada una de las gráficas anteriores encuentre una fórmula que exprese lo que dictan las figuras[30].*

2. *A partir de la figura 6.3. proponga una gráfica que represente la suma de los números hexagonales. ¿Es posible generalizar esta gráfica para la suma de otros números poligonales? Explique.*

3. Las gráficas de la figura 6.14 corresponden a las capas exteriores de algunos números poligonales[31].

   Si llamamos f_n^l a la n–ésima capa exterior del poligonal del lado l, tenemos entonces, por ejemplo que f_5^3 es la quinta capa exterior del número triangular, esto es $f_5^3 = 12$. Teniendo en cuenta esta notación,

[28] Elaborada por Alfred Brousseau (Nelsen, 1993, p. 83).

[29] La sucesión original de Fibonacci es 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... para la cual, cada término corresponde a la suma de los dos anteriores. En términos simbólicos y por recurrencia se escribe: $f_1 = 1 = f_2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

[30] Para la figura 6.13 los estudiantes del grupo 2 que cursaron aritmética en el primer semestre de 2013 encontraron tres fórmulas alternativas. Una de ellas considerando el caso de una cantidad par de sumandos y de una cantidad impar. Tal vez esta idea le ayude o le sugiera otras.

[31] Este ejercicio está basado en el trabajo de Ruiz y Sánchez (2006).

a) *Hallar una expresión algebraica general para* f_n^3, f_n^4, f_n^5, ..., f_n^l.

b) *A partir de la figura 6.15, encuentre la suma de las* m*–ésimas primeras capas exteriores de los números triangulares; es decir* $\sum_i = 1^m f_i^3$.

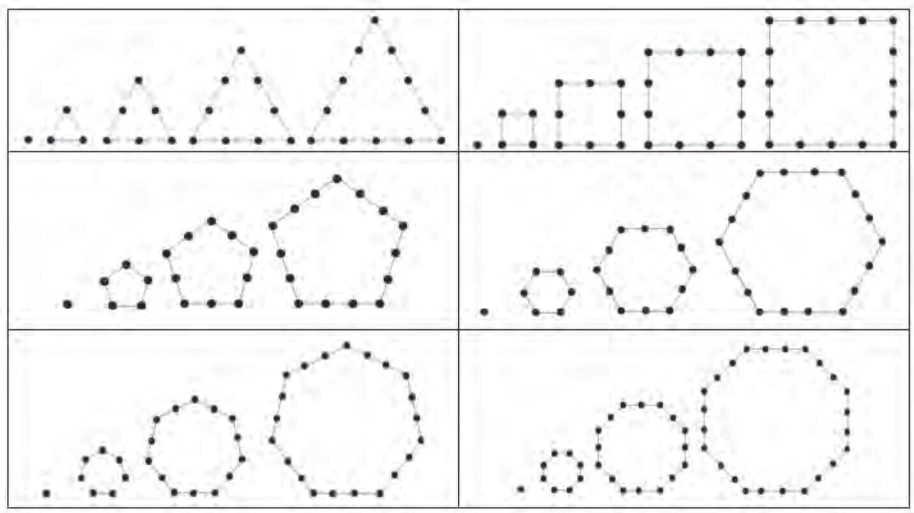


Figura 6.14

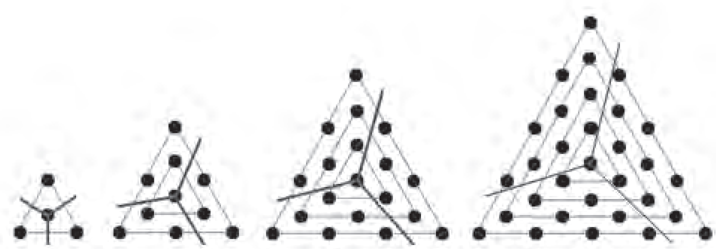


Figura 6.15

4. *Consulte cuáles son las figuras correspondientes a los números estrellados y a partir de estas establezca fórmulas para números estrellados de 4 puntas, de 5, de 6, ..., de n.*

5. *Consulte uno de los libros sugeridos en la sección 6.2, elija una figura que no esté expuesta en este libro y que tenga que ver con números naturales, en lo posible con lo presentado en este capítulo, y estúdiela.*

Capítulo

7

El método de demostración por inducción matemática

El proceso intuitivo de inducción, que hemos presentado en los capítulos anteriores y que es de común uso en las ciencias de la naturaleza y en la lógica, consiste en la obtención de una fórmula o ley general a partir de algunos casos particulares; en él se razona desde lo particular hasta lo general. La base de este proceso es la suposición de que si algo es cierto en algunas ocasiones, también lo es en situaciones similares, aunque estas no se hayan observado.

Las afirmaciones obtenidas mediante la inducción intuitiva no necesariamente son válidas para todos los casos; sin embargo, la probabilidad de acierto aumenta cuando el número de fenómenos observados es mayor.

Existen herramientas para estudiar la veracidad de las afirmaciones obtenidas por esta manera de inducción. Un ejemplo de ellas es el uso de métodos estadísticos para la selección de muestras, que es el objeto de estudio de la estadística inductiva. Como en la mayor parte de los casos no se puede tener certeza absoluta, el estudio deberá hacerse a partir de la teoría de probabilidades (Spiegel, 1961).

Un ejemplo común de inducción intuitiva aparece en la expresión: "todos los hombres son iguales", la cual es producto de algunas experiencias con unos pocos hombres (si tenemos en cuenta que todos los hombres pueden ser alrededor de tres mil quinientos millones). En general, las respuestas dadas por un pequeño grupo de personas en una encuesta de opinión, se pueden proyectar para grupos más grandes usando los métodos de la estadística.

El razonamiento inductivo fue desarrollado por varios filósofos, desde Francis Bacon hasta David Hume, John Stuart Mill y Charles Sanders Peirce (*Studies in Philosophy*).

El proceso contrario, conocido como deducción, parte de una afirmación general aceptada como válida para inferir la veracidad de un caso particular, y es el que más se utiliza en matemáticas para demostrar teoremas.

En los capítulos anteriores hemos tenido oportunidad de descubrir algunas relaciones entre los números, usando el proceso intuitivo de inducción; ahora estamos interesados en demostrar la veracidad de algunas de tales conjeturas.

Muchas veces, en el proceso del descubrimiento de dichas conexiones, hemos utilizado gráficos, como en el caso de los números poligonales, para construir ciertas secuencias o simplemente para examinar un problema concreto. Otras veces usamos listas o tablas de números que nos permiten intuir alguna regularidad.

Una vez obtenida la conjetura, que involucra un enunciado que sospechamos válido para cualquier escogencia de un número natural, ni los gráficos, ni las verificaciones para gran cantidad de casos, ni las mismas argumentaciones que surgieron al examinar el problema dan una prueba de que el enunciado es válido.

La invalidez de los gráficos, como argumentos para demostrar una afirmación, está basada en las limitaciones de nuestros sentidos y de los instrumentos de medida que utilizamos para describir una situación.

Para ilustrar este tipo de dificultades, observemos las figuras 7.1 y 7.2, donde aparentemente disposiciones diferentes de los mismos objetos geométricos reportan áreas diferentes.

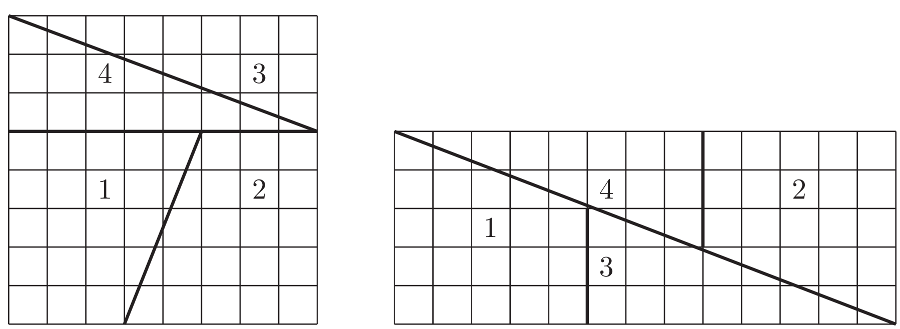


Figura 7.1

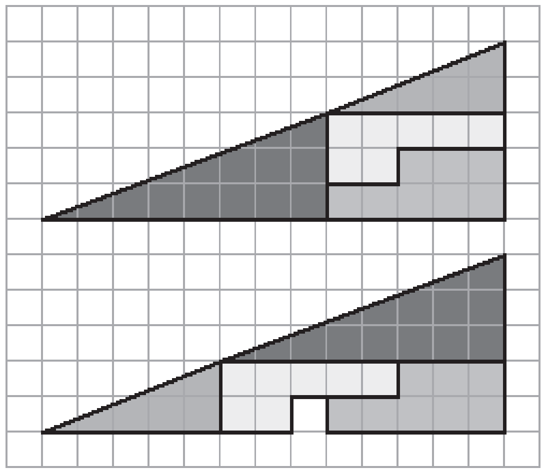


Figura 7.2

Tampoco las verificaciones, para un número grande de casos, nos garantiza la veracidad de una afirmación intuida, pues ya vimos en el capítulo anterior que la fórmula

$$p = n^2 - 79n + 1601$$

es válida para calcular números primos, si n toma valores menores que 80, pero para valores de n mayores ya no es válida.

La dificultad radica en que una afirmación en la que estén involucrados los números naturales, debe ser cierta para todos ellos y puesto que estos son infinitos, no podemos comprobarla en todos los casos.

Las argumentaciones que surgieron al examinar el problema, tampoco son aceptadas como prueba de una afirmación donde estén involucrados todos los números naturales. Por ejemplo, cuando nos preguntamos por el número de cuadrados que se pueden distinguir en un cuadrado de lado n (figura 6.5, de la sección 6.2.2), observamos que:

1. Podemos ubicar un cuadrado de lado n.

2. De manera similar a la anterior podemos encontrar cuatro cuadrados de lado $n-1$, pues solo hay cuatro posiciones distintas posibles de un cuadrado de lado $n-1$, dentro de un cuadrado de lado n.

3. También hay nueve maneras distintas de colocar un cuadrado de lado $n-2$ dentro de un cuadrado de lado n, y ya estamos listos para dar el salto:

   "Existen en total $1^2 + \cdots + n^2$ cuadrados en un cuadrado de lado n".

Razonamientos como este, nos pueden convencer de la veracidad de la afirmación, pero no son aceptados como pruebas en matemáticas, porque no sabemos cómo sean los cuadrados infinitamente grandes, o tal vez, ni siquiera son cuadrados; además, tampoco estamos de acuerdo con lo que queremos decir con la palabra infinito.

En matemáticas, para garantizar la veracidad de tales afirmaciones que involucran a todos los números naturales, debe recurrirse a un método conocido como *método de demostración por inducción matemática.*

Este requiere una clara concepción de la idea de infinito y ella nos es un poco esquiva y difícil; por ello, necesitamos precisarla un poco, para mostrar enseguida en qué consiste la inducción matemática.

7.1. ¿Qué significa infinito?

Las concepciones que tenemos los seres humanos acerca del infinito son, en algunos casos, inocentes, intimidantes en otros, pero en el común de las personas está asociada con una cantidad suficientemente grande.

En particular, en la escuela primaria se discute si el número de gotas de agua que hay en el mar, el número de granos de arena de todas las playas del mundo, el número de estrellas en el cielo y, por supuesto, el número de átomos del universo son infinitos.

Podríamos pensar que el número de átomos del universo es el más grande de todos los que representen cosas que existen en la realidad; sin embargo, este no sería el número más grande para nuestro pensamiento; por ejemplo, a este se le puede sumar otro tanto y queda más grande, lo podemos multiplicar por mil billones y el resultado es aún más grande; tal vez no exista en nuestro universo algún conjunto que tenga ese número de elementos, pero en nuestra cabeza podemos seguir inventando números cada vez más grandes.

El número 10^{100} (un 1 seguido por 100 ceros) conocido como un *googol*, es un número realmente grande, pero 10^{googol}, llamado un *googol–plex* es desmesuradamente más grande que un *googol* (recordemos los efectos de la potenciación sobre los números grandes); este número es un 1 seguido por un *googol* de ceros.

No alcanzarían los átomos del universo para escribir un cero de este número en cada uno de ellos. Pero aún podemos seguir, si elevamos un *googol–plex* al exponente de un *googol–plex* y repetimos el proceso un *googol–plex* de veces, obtendríamos un número fantásticamente más grande que toda cosa conocida o imaginable. Y aunque podemos seguir inventándonos números grandes, ninguno de ellos puede capturar la noción de infinito.

En el tratamiento que hicimos de los números grandes nos percatamos, que aunque esos sí son grandes, los hay aún mayores y si la idea de infinito es "un número suficientemente grande", los que corresponden a estas cantidades no pueden ser infinitos.

El primer contacto de los antiguos con el infinito se dio estudiando el proceso para extraer raíces cuadradas –atribuido inicialmente a Arquitas (428-365 a.C.), a Herón de Alejandría 100 d.C. y posteriormente a Newton, pero que aparece en una tabla babilónica (Boyer, 1968, p. 52)–. Este es un proceso que, si se aplica para obtener la raíz cuadrada de 2, no tiene un último paso; pueden conseguirse mejores aproximaciones de manera indefinida, es un proceso infinito.

Otro estudio famoso sobre el infinito en la Antigüedad lo presenta Zenón de Elea (Boyer, 1968, p. 109), en sus paradojas. Un ejemplo de ellas es:

> Antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer la mitad de esa distancia, pero aun antes de que recorra esta, debe recorrer la mitad de esta o sea un cuarto de la inicial y antes el primer octavo y así sucesivamente a través de una sucesión infinita de subdivisiones. Un corredor que quiere iniciar su carrera debe realizar un número infinito de etapas, sin ninguna primera en un tiempo finito, pero es imposible agotar una colección infinita y por lo tanto, el comienzo del movimiento es imposible.

Más tarde, Gauss afirmaba que "en matemáticas la magnitud infinita nunca puede usarse como algo que realmente exista, sino que el infinito tan sólo es una forma de hablar".

En teología, por el contrario, "el infinito" no solo tiene existencia propia sino que tiene parte activa en la naturaleza; en ella se atribuye a Dios ser "infinitamente" bueno, justo y poderoso; el carácter infinito y eterno de Dios no es solo una forma de hablar. Por supuesto, esta concepción implica que el infinito es único.

El primer matemático que trató el infinito como un ente con existencia real fue George Cantor, quien, al generalizar la noción de número, desarrolló el concepto de números transfinitos y definió para ellos una aritmética. Probó que no solo existe un infinito, sino que hay infinitos tipos de infinitos (Muñoz, 2002, p.237).

En la teoría cantoriana del infinito, el número de elementos de un conjunto se llama *cardinal del conjunto.*

Un conjunto A es *finito* si existe algún número natural n, de manera que se pueda establecer una correspondencia biyectiva entre A y un conjunto de la forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

En este caso se dice que el cardinal de A es n. De lo contrario, el conjunto es *infinito*.

Si A es el conjunto de los números naturales, al cardinal de A se le da el nombre de Aleph$_0$ y se representa con el símbolo $\aleph_0$.

Este número es de otro mundo, de un mundo conocido como el de los *números transfinitos*; es realmente el más pequeño de los números transfinitos, pero para el sentido común puede parecer gigantesco, ya que si lo dividimos a la mitad queda exactamente igual al original, pues a cada natural le podemos hacer corresponder un número par multiplicándolo por 2, y esta es una correspondencia biyectiva.

Esto significa que el número de números naturales es el mismo que el de números pares. ¡Quién lo creyera!

Aún más, si dividimos $\aleph_0$ en 10 000 pedazos cada uno de ellos, es idéntico en número al original y no importa el número de pedazos en que lo dividamos; en cualquier caso seguiría siendo igual al original. Cualquier número finito, por grande que sea, es demasiado pequeño frente al menor de los números transfinitos $\aleph_0$.

$\aleph_0$ tampoco se inmuta por multiplicaciones con un número finito, pues multiplicarlo por cualquier número m es equivalente a considerar el número asociado a un conjunto que contenga m copias de los naturales, pero al hacerlo podemos definir una función biyectiva entre el conjunto así formado y el de los naturales, como lo ilustra la figura 7.3, en donde, por ejemplo, el punto identificado por 3_2 corresponde al número natural 3 en la segunda copia realizada. La función asigna al punto 1_1 el número 1, a 1_2 el número 2 y en general al punto identificado por p_q el número $(p-1)m+q$.

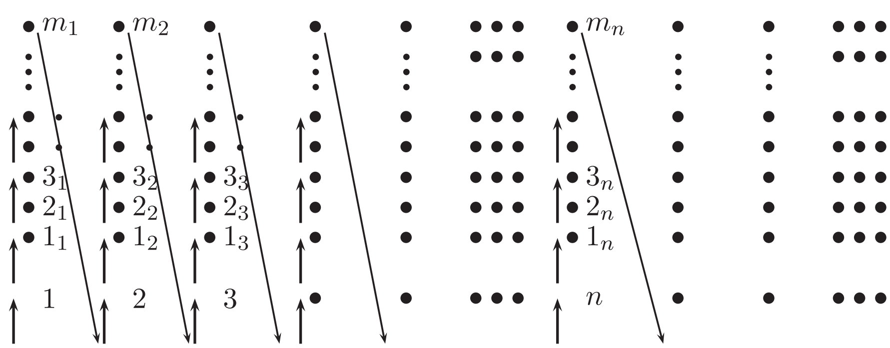


Figura 7.3

Incluso, si multiplicamos $\aleph_0$ por sí mismo; es decir, reproducimos por cada número natural una copia del conjunto de los números naturales y los pintamos en un arreglo rectangular, como lo muestra la figura 7.4, en donde sobre cada natural, por ejemplo, el 3, colocamos una copia de los números naturales indicados por los puntos $1_3, 2_3, 3_3, \ldots n_3, \ldots$, el cardinal de este nuevo conjunto es nuevamente $\aleph_0$, por cuanto podemos definir una correspondencia biyectiva entre ellos y los números naturales.

La figura 7.4 da una idea intuitiva de la manera como podría definirse esta correspondencia, asignando al punto identificado con 1_1 el número 1, a 2_1 el 2, a 1_2 el 3, a 1_3 el 4, y así sucesivamente.

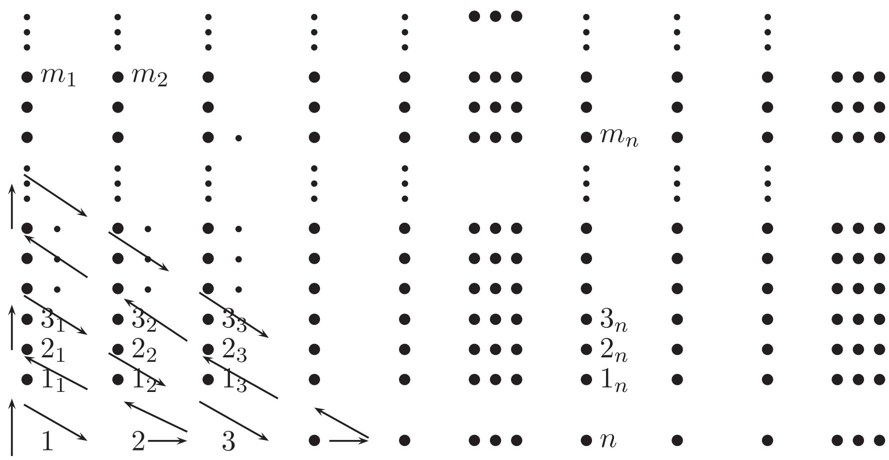


Figura 7.4

Podemos resumir las anteriores relaciones entre $\aleph_0$ y cualquier cardinal $n \neq 0$ de un conjunto finito, así:

$$\begin{aligned} n + \aleph_0 &= \aleph_0 \\ \aleph_0 - n &= \aleph_0 \\ \aleph_0 / n &= \aleph_0 \\ \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \\ n \cdot \aleph_0 &= \aleph_0 \\ \aleph_0 \cdot \aleph_0 &= \aleph_0 \\ (\aleph_0)^n &= \aleph_0. \end{aligned}$$

La operación equivalente a la resta de $\aleph_0$ consigo mismo presenta un comportamiento especial. Veamos:

Si de los números naturales eliminamos el subconjunto de los pares, el cardinal del conjunto resultante es también $\aleph_0$. Pero si de los naturales eliminamos todos los mayores que un cierto número n, el cardinal del conjunto resultante es n; por tanto, no hay manera de establecer un único resultado para $\aleph_0 - \aleph_0$; luego esta expresión no está definida.

Si queremos hacer una analogía para interpretar una división entre $\aleph_0$ consigo mismo, consideremos disponibles cuantas cajas como números naturales. Podemos imaginar todas estas cajas como no vacías colocando un número natural en cada caja, pero también podría hacerlo depositando los dos primeros en la primera caja, los dos siguientes en la segunda y así sucesivamente, quedando exactamente dos números en cada caja. Por supuesto, podría hacer una repartición parecida depositando k números naturales en cada caja. Incluso mediante una distribución adecuada podrían asociarse a cada caja infinitos números naturales.

No podemos, por tanto, asignar un único valor al posible resultado de efectuar $\aleph_0/\aleph_0$. Esta expresión tampoco está definida.

La potenciación, en cambio, sí provoca un cambio sustancial a Aleph$_0$, ¡otra vez la potenciación!, si elevamos $\aleph_0$ al exponente $\aleph_0$ (bastaría incluso elevar 2, o cualquier número finito al exponente $\aleph_0$), obtenemos otro número infinito llamado Aleph$_1$ representado por el símbolo $\aleph_1$. Este representa el número de puntos que hay en un segmento de línea recta o curva; es el mismo número de puntos de toda la recta. Además, corresponde al número de puntos de un cuadrado de cualquier tamaño y al número de puntos de todo el espacio.

Esto último es un golpe fuerte a la intuición, ¿no le parece? ¡Pero ya deberíamos irnos acostumbrando a perder la vergüenza!

Si reincidimos y elevamos Aleph$_1$ al exponente Aleph$_1$, obtenemos Aleph$_2$, que corresponde al número de curvas (Navarro, 1973) que se pueden trazar en un plano.

Así sucesivamente podemos construir infinitos números infinitos y con ellos hacer una aritmética parecida a la que conocemos, que se conoce como la *aritmética cardinal transfinita* de Georg Cantor (Suppes, 1976, pp. 123-149).

7.2. El método de demostración por inducción matemática

Cuando escribimos una fórmula donde aparecen números naturales, como por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

quizá no nos damos cuenta del profundo significado que ella tiene.

A un humano corriente, no interesado por las mieles intelectuales del razonamiento matemático, le ocupará bastante tiempo, en caso de serle estrictamente necesario, sumar los primeros 200 números naturales; a nosotros, en cambio, que ya descubrimos que basta multiplicar 201 por 100, o sea 20100, nos llevaría 15 segundos a lo más.

¡Hemos ganado! Si nos retan, podríamos hasta sumar el primer *googol* de números naturales en muy poco tiempo; pero la fórmula dice más, ella debe valer para cualquier número natural n y no podemos comprobarla para todos.

Hay veces, sin embargo, en que las fórmulas se cumplen solo para algunos valores de n y no para otros, como ya lo hemos visto para los números primos.

De nuevo la pregunta es: ¿cómo aseguramos que una fórmula se vale para todo número natural si no podemos ensayar con todos?

Los matemáticos han asumido un principio llamado *principio de inducción matemática*, que actúa como garante en este caso y que está basado en el contagio propio de una hilera de fichas de dominó, colocadas cada una a corta distancia de la otra, de manera que cuando se empuja una de ellas, ella afecta a la siguiente y esta, a su vez, a la siguiente, y así sucesivamente.

Fueron Pascal y Fermat quienes desarrollaron primero el razonamiento por inducción. En 1654, Pascal dio una exposición clara y precisa del método de inducción completa, aunque ya había ciertas indicaciones en la obra de Maurolico. El nombre de inducción matemática tuvo su origen más tarde, en el artículo de De Morgan, en la *Penny Cyclopaedia* de 1838.

En 1889, Guiseppe Peano escogió el principio de inducción como uno de los axiomas para fundamentar la aritmética con un simbolismo formalizado (con símbolos formales y no con el lenguaje cotidiano) en su obra *Arithmetices Principia nova methodo exposita.*

El principio de inducción matemática establece: una proposición matemática $p(k)$ donde esté involucrado un número natural k es válida para todo número natural n si:

i. Se cumple para el número 0.

ii. Si se cumple para n debe cumplirse para el siguiente de n, es decir $(n+1)$.

La condición (i) afirma que debemos establecer la verdad de p para el valor 0; en realidad podemos iniciar en cualquier número m en cuyo caso la afirmación es válida solo para los números n mayores o iguales a m. Sin embargo, si cambiamos la variable n por la variable $k = n - m$, la nueva afirmación es válida para todos los números naturales k.

La condición (ii) afirma que la verdad de p para el valor $(n+1)$ depende de la verdad de p para el valor n. Esto basta para asegurar la verdad de p para cualquier valor de n si se cumple la condición *(i)*, pues si p es cierta para el valor $n = 1$, entonces es cierta para $n = 2$; y como es cierta para $n = 2$ entonces, es cierta para $n = 3$, y así sucesivamente.

Naturalmente, todo número será alcanzado alguna vez mediante una serie de etapas de esta clase, de manera que p será verdad para todos los números n.

En el caso de la fórmula para la suma de los n primeros números naturales, obviamente se tiene para 1, y si suponemos que se cumple para un determinado k; es decir, suponemos que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

sumando $(k+1)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Aunque no parece, la expresión $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$ es la suma de dos números naturales ya que en el primer término, para todo número natural k, o bien k es par o $k+1$ es par.

Esta suma la podemos escribir como

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2},$$

por la definición de división de números naturales $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = bc$ para todo a, b, y c con $b \neq 0$ y en consecuencia $k+1 = \frac{2(k+1)}{2}$.

Además

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}.$$

Puesto que para todo a, b, y c números naturales tales que $a = br$ y $c = bt$ con $b \neq 0$ se cumple que

$$\frac{a}{b} = r \text{ y } \frac{c}{b} = t.$$

Y por tanto

$$\frac{a+c}{b} = \frac{br+bt}{b} = \frac{b(r+t)}{b} = r+t = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. En consecuencia tenemos que

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}.$$

Y de nuevo por la misma propiedad distributiva

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que es la fórmula correspondiente a la suma para $(k+1)$, y por el principio de inducción matemática podemos concluir que la fórmula

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{n(n+1)}{2}$$

es válida para todo número natural n.

Observemos que una demostración que utiliza el principio de inducción matemática no tiene relación explícita con el proceso intuitivo de inducción mediante el cual se descubre la fórmula.

El principio de inducción matemática tiene varias formas equivalentes, por ejemplo:

1. Si A es un subconjunto de los números naturales y

   i. 0 pertenece a A,

   ii. $k+1$ pertenece a A siempre que k pertenezca a A

   Entonces, A es el conjunto de todos los números naturales (Spivak, 1992, p. 29).

2. A primera vista parece cierto que si A es una colección cualquiera de números naturales, en A debe haber un elemento más pequeño que todos los demás.

Si A es el conjunto vacío (notado $\varnothing$) esta afirmación no es cierta, puesto que el conjunto vacío es una colección de números naturales que no tiene elementos y por lo tanto no tiene elemento mínimo.

Pero *si A es un conjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo*. Esta afirmación se conoce como *principio de buena ordenación*, el cual se puede demostrar por inducción, como sigue:

Supóngase que el conjunto A es no vacío y no tiene elemento mínimo. Sea B el conjunto de los números naturales n tales que $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ no esté ninguno en A. Por supuesto que 0 está en B, pues si 0 estuviese en A entonces A tendría a 0 como elemento mínimo.

Además, si $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k$ no están en A, evidentemente $k + 1$ no está en A (si no, $k + 1$ sería un elemento mínimo de A), de manera que $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k + 1$ no están en A.

Esto demuestra que si k está en B, entonces $k+1$ está en B. Entonces todo número n está en B; es decir, los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ no están en A cualquiera que sea el número natural n. Así pues, $A = \varnothing$, pero esto no puede ser porque habíamos supuesto lo contrario, con lo que se concluye la demostración.

3. Ocurre a veces que para demostrar que una proposición p se cumple para el valor $k + 1$, debemos suponer que p no solo es válida para el valor k, sino para todos los valores menores o iguales a k. Este principio se conoce como el principio de inducción completa, que establece:

   Si A es un conjunto de números naturales y

   (1) 0 está en A

   (2) $k + 1$ está en A si $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, k$ están en A

   entonces A es el conjunto de todos los números naturales.

   Aunque el principio de inducción completa puede parecer más fuerte que el principio de inducción ordinario, en realidad no es sino una consecuencia de este último.

$* *$

En el estudio de las matemáticas encontramos que en casi todos los textos no se explicitan todos los pasos, es deber del lector verificar cada afirmación.

$* *$

Ejercicios

1. *Consulte y estudie* (Apóstol, 1988, p. 42) *una demostración del principio de inducción matemática asumiendo como cierto el principio de buena ordenación.*

2. *Compare las tres formas del principio de inducción y estudie su equivalencia.*

Ejemplos

Presentamos enseguida algunas demostraciones que usan el método de demostración por inducción matemática, que no pretenden demostrar todas las afirmaciones hechas en el libro, pues esperamos que el lector lo haga, sino ejercitar y mejorar la percepción sobre este método de razonamiento.

Comenzamos con algunas de las afirmaciones sobre divisibilidad que hicimos en los capítulos anteriores para los que presentamos justificación.

1. Cuando estudiamos la divisibilidad por 2, afirmamos que $3^k - 1$ es par para toda escogencia de k dentro de los números naturales.

   Para demostrar esta afirmación, debemos verificar que se cumple al reemplazar k por 0, como en efecto sucede.

   Enseguida, debemos suponer que la afirmación es cierta para un valor fijo k, y haciendo uso de esto, construimos la afirmación para el valor $k + 1$.

   Comenzamos, sin embargo, construyendo la afirmación para el valor $k + 1$, esto es:

   $$3^{k+1} - 1 \qquad \text{es par,}$$

   pero

   $$3^{k+1} - 1 = 3 \cdot 3^k - 1 = 2 \cdot 3^k + (3^k - 1).$$

   El primer sumando es par, pues es múltiplo de 2 y el segundo es par, porque supusimos cierto el caso para k; esta es la hipótesis de inducción. Con esto queda demostrado el teorema.

   Debemos tener cuidado con el orden de los razonamientos, pues en ocasiones pueden aparecer gazapos como: probemos que para todo número natural se cumple que $n^2 \leq n$.

Para $n = 0$ tenemos que $0^2 \leq 0$.

Supongamos que para un k, $k^2 \leq k$. Entonces como $(k+1)^2 \leq k+1$ implica que

$$\begin{aligned} k^2 + 2k + 1 &\leq k + 1 \\ k^2 + 2k &\leq k \\ k^2 &\leq k, \end{aligned}$$

y como esto último es cierto por hipótesis de inducción, la afirmación queda probada. ¿*Cuál es el error*?

2. $5^n - 2^n$ es divisible por 3, para todo número natural n.

   Si $n = 0$ la igualdad se cumple ya que $5^0 - 2^0 = 0$, que es divisible por 3.

   Supongamos que la igualdad es verdadera para $n = k$, esto es, existe un número q tal que
   $$5^k - 2^k = 3q,$$
   y probemos que se tiene para $n = k + 1$

   $$\begin{aligned} 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (3+2) \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot 5^k + 2 \cdot (5^k - 2^k) \\ &= 3 \cdot 5^k + 2 \cdot (3q). \end{aligned}$$

   Notemos que en el último paso hemos usado la hipótesis de inducción, finalmente:
   $$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3 \cdot (5^k + 2q),$$
   lo que implica que $5^{k+1} - 2^{k+1}$ es un múltiplo de 3 y con esto el teorema queda demostrado.

   De manera análoga, se prueba que $4^k - 1$ es múltiplo de 3 y que $10^k - 4$ es divisible por seis, para todo número natural $k \geq 1$.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Por supuesto, usted ya no espera órdenes.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

3. Si miramos los ejemplos anteriores, podemos sospechar (inducción intuitiva) que si[1] $a > b$ con $b \neq 0$ entonces $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$ para todo valor de n natural. Haremos enseguida una demostración por inducción matemática:

   Si $n = 0$ se cumple ya que $a^0 - b^0 = 0 = 0 \cdot (a - b)$.

   Supongamos que es verdad para $n = k$, esto es, existe un número p tal que

$$a^k - b^k = (a - b)p,$$

   y probemos que se tiene para $n = k + 1$

$$a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - bb^k.$$

   Como $a > b$ entonces existe un número natural c tal que $a = c + b$; por tanto:

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= (c + b)a^k - bb^k \\ &= ca^k + ba^k - bb^k \\ &= ca^k + b(a^k - b^k) \\ &= ca^k + b(a - b)p. \end{aligned}$$

   Pero sabemos que $c = a - b$, luego:

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= (a - b)a^k + b(a - b)p \\ &= (a - b)(a^k + bp) \\ &= (a - b)q, \end{aligned}$$

   donde $q = a^k + bp$, y con esto se concluye la demostración.

   Otro tipo de argumentación la vemos cuando contamos elementos de un conjunto, por ejemplo:

4. El número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

   Fácilmente se verifica que para un conjunto con 0 elemento, el número de sus subconjuntos es 1, el conjunto vacío.

[1] Esta condición solo es para garantizar que estamos tratando con números naturales; sin embargo, la proposición es válida en conjuntos de números más generales.

Si suponemos cierta la afirmación para n elementos, debemos probar que es cierta para $n+1$ elementos.

Si un conjunto tiene $n+1$ elementos, tiene uno más que el conjunto de n elementos y como por hipótesis de inducción este tiene 2^n subconjuntos, podemos formar 2^n nuevos subconjuntos agregando el nuevo elemento a cada uno de los que ya estaban formados; es decir, en total tenemos $2^n + 2^n$ elementos, o sea 2^{n+1} elementos.

O cuando tratamos con desigualdades:

5. La desigualdad $(1+x)^n \geq 1+nx$ para cualesquier números naturales[2] n y x, conocida como desigualdad de Bernoulli[3], tiene la siguiente prueba por inducción sobre n:

   Claramente se tiene para $n = 0$

   $$(1+x)^0 \geq 1 + 0x.$$

   Si suponemos que la fórmula es válida para $n = k$, cuando $n = k+1$, tenemos que:

   $$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x).$$

   Utilizando la hipótesis de inducción

   $$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1 + kx + x + kx^2\\ &= 1 + (k+1)x + kx^2,\end{aligned}$$

   y como kx^2 es un número natural, entonces

   $$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x,$$

   porque si a un número natural escrito como una suma $(1 + (k + 1)x + kx^2)$ le quitamos uno de los sumandos kx^2, el resultado es más pequeño. Y con esto finaliza la demostración.

[2] La desigualdad también es válida si x no es un número natural, si está en el campo más amplio de los números reales.

[3] Esta desigualdad fue publicada por él en 1689, pero ya se encontraba en una publicación de Isaac Barrow, maestro de Newton, en 1670.

6. En este ejemplo hacemos uso del principio de inducción completa para demostrar que "todo número natural mayor o igual que 2 o es primo o se puede escribir como un producto de números primos".

   Si $n = 2$, la proposición se tiene.

   Si $n = k$, supongamos que la afirmación es válida para todo número natural menor o igual que k y mayor o igual que 2.

   Si $n = k + 1$, entonces:

   a) Si $k + 1$ es primo, la afirmación sería válida.

   b) Si $k + 1$ no es primo, $k + 1$ tiene un divisor m diferente de 1 y de sí mismo, es decir existe un número z tal que

   $$k + 1 = mz,$$

   donde $1 < m \leq k$ y $1 < z \leq k$.

   Ahora, aplicando la hipótesis de inducción a los números m y z, ambos son producto de números primos y por tanto $k + 1$ es producto de números primos.

   En algunos casos la demostración tiene un aspecto intimidante:

7. El teorema del binomio de Newton[4] afirma que[5] si $n \geq 1$:

   $$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

   La lectura de su demostración requiere la paciencia que es natural en los matemáticos.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Si aún no la ha desarrollado suficientemente tenga paciencia, que si se esfuerza, ya vendrá.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

[4] Recordemos que $\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$.

[5] El teorema es válido para $n \geq 0$, pero aquí evitamos dificultades innecesarias del caso $n = 0$.

Para el caso $n = 1$, la fórmula se cumple puesto que

$$a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$$

Supongamos que es válida para $n = k$. Si $n = k + 1$:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k =$$

$$a\left(\binom{k}{0}a^{k-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{k-1} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^k\right)$$

$$b\left(\binom{k}{0}a^{k-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{k-1} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^k\right) =$$

$$\left(\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k+1-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k+1-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k+1-(k-1)}b^{k-1} + \binom{k}{k}a^{k+1-k}b^k\right) + \left(\binom{k}{0}a^{k-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^{1+1} + \binom{k}{2}a^{k-2}b^{2+1} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{k+1-1} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^{1+k}\right).$$

Y si asumimos que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(la anterior igualdad queda como ejercicio para el lector), agrupando los términos que tengan los mismos exponentes para a y para b, concluimos que:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1-0}b^0 + \binom{k+1}{1}a^{k+1-1}b^1 + \binom{k+1}{2}a^{k+1-2}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}a^{k-(k-1)}b^{k+1-1} + \binom{k+1}{k+1}a^0b^{k+1},$$

y por lo tanto la fórmula es válida para todo número natural n.

También podemos hacer inducción sobre fórmulas que tengan más de una variable y en este caso tenemos dos opciones: hacemos inducción sobre cada variable dejando las demás fijas o hacemos inducción sobre una variable y dejamos las demás fijas pero *arbitrarias*.

8. Cuando estudiamos la divisibilidad por 2 en cualquier base, afirmamos que un número escrito en base impar es divisible por 2 si la suma de sus cifras es par, esta afirmación es cierta si lo es la siguiente:

$$(2n+1)^k - 1 \qquad \text{es par.}$$

El problema es equivalente a probar que $(2n+1)^k$ es impar para cualquier escogencia de los números n y k.

Para probar esta afirmación por inducción, consideramos primero el caso $n = 0$, pero $1^k = 1$ para todo número natural k y por tanto es impar.

Suponemos ahora que la afirmación es válida para un valor fijo de $n = s$. Esto es, para todo número natural k, se cumple que $(2s+1)^k$ es un número impar y debemos probar que para $n = s+1$ se cumple que $[2(s+1)+1]^k = (2s+3)^k$ es un número impar para cualquier valor del número natural k y para ello hacemos inducción sobre la variable k.

Para $k = 0$, la proposición es válida.

Suponemos que para $k = t$, $(2s+3)^t$ es un número impar y como $(2s+3)^{t+1} = (2s+3)^t(2s+3)$, es el producto de dos números impares concluimos que es también un número impar.

Estas demostraciones son conocidas como *inducción doble* (Halmos, 1960, p. 46).

Podemos también hacer inducción primero sobre k y luego sobre n. Consideremos para ello n un número natural fijo.

Observemos inicialmente que para $k = 0$ se tiene que $(2n+1)^0 = 1$ es un número impar.

Supongamos que la afirmación se tiene para $k = s$; es decir, existe Q tal que $(2n+1)^s = 2Q+1$ y probemos que se tiene para $k = s+1$.

$$\begin{aligned}
(2n+1)^{s+1} &= (2n+1)(2n+1)^s \\
&= (2n+1)(2Q+1) \\
&= 4Qn + 2Q + 2n + 1 \\
&= 2(2Qn + Q + n) + 1 \\
&= 2q + 1,
\end{aligned}$$

tomando como $q = 2Qn+p+n$. Luego, habiendo fijado n, la expresión es válida para todo número natural k.

Ahora debemos hacer inducción sobre n, dejando fijo el exponente k, y esta tarea se la dejamos al lector.

No siempre que hagamos una afirmación sobre todos los números naturales debemos probarla por inducción, por ejemplo, si queremos probar que $T_n + T_{(T_n-1)} = T_{(T_n)}$ una prueba válida es:

Como $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$, entonces $T_{n+1} = T_n + (n+1)$ y como esto es válido para todo número natural n, si reemplazamos n en la última igualdad por $T_k - 1$ obtenemos $T_{(T_k)} = T_{(T_k-1)} + T_k$.

Otra alternativa es reemplazar cada uno de los números triangulares por la fórmula correspondiente, teniendo en cuenta que $T_p = \frac{p(p+1)}{2}$ para todo número natural p, afirmación que ya hemos probado; y realizar las operaciones indicadas hasta llegar a una igualdad.

Pero para que estas demostraciones, las que ya hicimos y las que vienen, tengan validez es necesario que probemos primero las propiedades básicas de las operaciones entre números naturales como la asociativa, conmutativa, cancelativa, etc. Y esto es lo que haremos en la sección 7.4.

Un asunto que debemos resaltar es que no todas las fórmulas que incluyen números naturales se prueban por inducción; es necesario que la fórmula se refiera a todos los números naturales. Por ejemplo, la afirmación: "un número natural es perfecto si es de la forma

$$2^{n-1}(2^n - 1),$$

donde $2^n - 1$ es un número primo cuando n es primo", no es demostrable por inducción matemática, pues a pesar de que el número n es natural, en esta afirmación debe ser primo y no todos los naturales lo son.

7.3. Definiciones por recurrencia

Otra de las ventajas que ofrece el principio de inducción matemática se encuentra en la posibilidad de utilizarla en la obtención de una nueva forma para definir objetos matemáticos.

Estas definiciones, conocidas como *definiciones por recurrencia*, se encuentran de manera abundante en las matemáticas y consisten en distinguir un elemento de un conjunto e indicar la manera de conseguir un nuevo objeto a partir de otros previamente construidos.

En ella se está contagiando la esencia misma de los números naturales a otros conjuntos; esta es que *cada elemento tiene un sucesor*.

Ejemplos

1. La definición del factorial de un número n, el cual se denota n, se describe por recurrencia, así:

$$0! = 1$$
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

2. La potenciación también puede ser definida por recurrencia así:

$$a^0 = 1 \qquad \text{y}$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

3. No necesariamente se define un nuevo objeto a partir del anterior, sino a la manera de lo presentado en la inducción completa. Puede presentarse a partir de varios o todos los anteriores. Por ejemplo, una sucesión relacionada con la reproducción de los conejos, con la forma de distribución de las ramas en los árboles, y de las semillas en la flor del girasol, conocida como *sucesión de Fibonacci* tiene su presentación por recurrencia, como:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Ejercicios

Demuestre por inducción que las fórmulas que le presentamos a continuación son válidas para todo número natural n:

1. La suma de los primeros n números pares es:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)].$$

   La suma de los primeros n números que se obtienen a partir de uno y contando de tres en tres, es:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Las dos fórmulas anteriores son casos particulares de la siguiente relación, donde partiendo de a se cuenta de x en x.

$$a + (a + x) + (a + 2x) + \cdots + (a + (n - 1)x) = \frac{n(2a + (n - 1)x)}{2}.$$

2. Las sumas de los primeros n números cuadrados, los primeros n números cuadrados impares y los n primeros números cúbicos impares, están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 &= \frac{n(4n^2-1)}{3} \\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 &= n^2(2n^2-1). \end{aligned}$$

3. Las dos fórmulas siguientes establecen una relación entre la suma de los primeros n números cúbicos y el n-ésimo número triangular:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

4. Los tres siguientes ejercicios tienen algo en común:

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n &= 2(2^n - 1) \\ 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n &= \frac{3(3^n - 1)}{2} \\ 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^n &= \frac{5(5^n - 1)}{4}. \end{aligned}$$

   Encuentre una fórmula general que los describa y pruébela también.

5. $5^{2n} + 1$ es múltiplo de 24, para todo $n \geq 0$.

6. $5^{2n} - 1$ es divisible por 8.

7. $5^n - 4n - 1$ es divisible por 16.

8. $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 1$.

9. $n^3 - n$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 2$.

10. $n^3 - 6n + 11n$ es divisible entre 6 para todo $n \geq 1$.

11. $\sum_{i=1}^{n} i!i = (n+1)! - 1$.

12. Si F_n representa el n–ésimo término de la sucesión de Fibonacci:

    a) F_{3n} es par para todos los números naturales.
    b) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.
    c) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.
    d) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
    e) El número de Fibonacci F_{4n} es divisible entre 3.

13. Como ya dijimos hay fórmulas que no son válidas para todo número natural, pero sí para todo natural mayor que un número dado. Estas fórmulas pueden escribirse como válidas para todo número natural introduciendo una variable distinta.

    Por ejemplo, $2^n \geq n^2$ es una desigualdad válida a partir de 4, y es equivalente a garantizar que si $n = 3+m$ la expresión $2^{m+3} \geq (m+3)^2$ es válida para todo número natural m.

    Sin embargo, sin necesidad de hacer el cambio de variable, la prueba por inducción se reduce a garantizar que la fórmula dada es válida para $n = 5$ y continuar el proceso de manera similar al anterior.

    Demuestre que:

$$2^n \geq n^2 \quad \text{para} \quad n > 3.$$
$$2^n \leq n! \quad \text{para} \quad n > 3.$$
$$4^n \geq n\ 3^n \quad \text{para} \quad n > 6.$$

14. Use el método de inducción matemática para demostrar que los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ son números naturales para todo $k \geq n$. *¿Se requiere usar inducción completa? ¿Inducción doble? Justifique.*

15. Las siguientes proposiciones requieren de inducción doble:

$$a^{n+m} = a^n a^m$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

    Toda potencia de un número par es par.

    Realice las demostraciones.

7.4. Presentación axiomática de los números naturales

Hemos insistido en que las intuiciones que resultan de la experiencia directa usando nuestros sentidos, o las obtenidas de observar regularidades, por más que estas se presenten muchas veces, no son suficientes para dar validez a una afirmación matemática; esto hace necesario que fijemos un criterio para decidir sobre la validez de ellas. Existe un método regularmente aceptado entre los matemáticos desde hace muchos años, conocido como *método axiomático.*

Euclides, en el año 300 a.C, e incluso antes Eudoxo, presentaron la geometría como un conjunto de proposiciones que se deducen de unas fundamentales que llamamos axiomas, mediante una forma preestablecida de razonar. Arquímedes hizo lo mismo con la mecánica teórica que luego perfeccionaron Newton en su *Principia Matemática* de 1686, y Lagrange, en su *Mecánica analítica* de 1788.

La presentación axiomática de la geometría en su forma moderna se debe a Hilbert en su libro *Grundlagen der Geometrie* de 1899.

En estas presentaciones axiomáticas se parte de unos términos no definidos, se enuncian unas relaciones entre ellos, que aceptamos como ciertas (los axiomas), se presume una forma correcta de razonar, usualmente la lógica bivalente clásica, y con esto se deducen otras afirmaciones que llamamos teoremas. Los teoremas son ciertos en la medida de que los axiomas lo sean y que los razonamientos sean correctos.

En el sistema axiomático, para los números naturales, presentado por el italiano Guiusseppe Peano, en 1889, figuran como términos primitivos número natural, 0 y sucesor, y como axiomas:

1. 0 es un número natural[6].
2. El sucesor de cualquier número natural n es un único número natural n^+, es decir que si $k = n$ entonces $k^+ = n^+$.
3. Dos números naturales diferentes no tienen el mismo sucesor; es decir, que si $k \neq n$ entonces $k^+ \neq n^+$ o equivalentemente si $k^+ = n^+$ entonces $k = n$.
4. 0 no es el sucesor de algún número (0 es el primer número natural[7]).

[6] En la presentación inicial de Peano, el primer número es el 1, pero esto no cambia sustancialmente el sistema.

[7] En (Luque, Jiménez y Ángel, 2009, pp. 177-232) se presentan varias versiones axio-

5. Si P es una propiedad tal que:

    a) 0 tiene la propiedad P.

    b) Siempre que un número n tiene la propiedad P implica que su sucesor n^+ también tiene la propiedad P, entonces todo número natural tiene la propiedad P.

    El axioma 5 es el que da sustento lógico al método de inducción matemática que hemos utilizado para probar las regularidades encontradas, al trabajar con los números naturales.

7.4.1. La adición de números naturales

La operación adición de números naturales se define por *recurrencia* (Hempel, 1997) de la siguiente forma:

i. $n + 0 = n$

ii. $n + k^+ = (n + k)^+$,

para todo número natural n y k.

Con esto y la definición de multiplicación, que presentamos un poco más adelante, tenemos las bases para deducir todas las propiedades que rigen al sistema de los números naturales.

Veamos, a manera de ejemplo, la demostración de las propiedades fundamentales de los números naturales.

∗ ∗
Observe la diferencia en la manera de pensar con respecto a lo hecho anteriormente.
∗ ∗

7.4.1.1. Propiedad modulativa de la adición

Teorema 1: para todo número natural n se cumple[8] que

$$n + 0 = 0 + n = n.$$

máticas para los números naturales y su equivalencia. La de Peano es más formal que la que hacemos aquí; por ejemplo, se demuestra que las definiciones de suma, multiplicación y orden son consecuencia de los axiomas.

[8]Esta propiedad es conocida formalmente como *existencia del elemento neutro* o *elemento identidad*.

Prueba: de la definición de suma se tiene que $n + 0 = n$. Demostraremos por inducción que para todo n, se tiene que $0 + n = n$.

i. Para $n = 0$, tenemos que $0 + 0 = 0$, por la definición.

ii. Suponemos válido que $0 + k = k$, siendo k un número natural y debemos demostrar que se cumple para su sucesor k^+. Pero esto también es inmediato de la segunda parte de la definición de la suma puesto que $0 + k^+ = (0 + k)^+ = k^+$. Por tanto, la afirmación es válida para todo número natural n. □

7.4.1.2. Propiedad conmutativa de la adición

Para hacer una demostración de la propiedad conmutativa de la adición, probaremos primero que:
Teorema 2: para todo n y k números naturales se cumple que:

$$k^+ + n = (k + n)^+.$$

Prueba: sea k un número natural fijo pero arbitrario. Hagamos inducción sobre n. Para $n = 0$

$$k^+ + 0 = (k + 0)^+,$$

por la propiedad modulativa de la adición.

Supongamos que la igualdad es válida para $n = m$ y demostrémosla para m^+; es decir, debemos probar que $k^+ + m^+ = (k + m^+)^+$.

Partamos de:

$$\begin{aligned} k^+ + m^+ &= (k^+ + m)^+ && \text{por la definición de adición} \\ &= ((k + m)^+)^+ && \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= (k + m^+)^+ && \text{por la definición de adición,} \end{aligned}$$

que es lo que debíamos demostrar. □

Ahora sí probaremos la *propiedad conmutativa de la adición* que afirma:
Teorema 3: para todo m, n números naturales se tiene que

$$m + n = n + m.$$

Prueba: sea n un número natural fijo pero arbitrario. Hagamos inducción sobre m:

i. Para $m = 0$, por ser 0 el módulo de la adición, tenemos que

$$0 + n = n = n + 0.$$

ii. Suponemos que para $m = k$ se tiene que $k+n = n+k$, debemos probar que $k^+ + n = n + k^+$, pero esto es cierto puesto que:

$$\begin{aligned} k^+ + n &= (k+n)^+ && \text{por el teorema 2} \\ &= (n+k)^+ && \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= n + k^+ && \text{por la definición de adición.} \end{aligned}$$

La última igualdad termina la prueba. □

7.4.1.3. Propiedad asociativa de la adición

Teorema 4: para todo m, n, k números naturales se cumple que:

$$(m+n)+k = n+(m+k).$$

Prueba: sean m y n números naturales fijos pero arbitrarios. Hacemos inducción sobre k:

i. Para $k = 0$, aplicamos dos veces la propiedad modulativa y obtenemos que:

$$(m+n)+0 = m+n = m+(n+0).$$

ii. Suponemos que para $k = t$ se tiene que $(m+n)+t = m+(n+t)$ para todo m, n números naturales, debemos probar que

$$(m+n)+t^+ = m+(n+t^+).$$

Y esto se deduce de:

$$\begin{aligned} (m+n)+t^+ &= ((m+n)+t)^+ && \text{por la definición de suma} \\ &= (m+(n+t))^+ && \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= (m+(n+t)^+) && \text{por la definición de suma} \\ &= (m+(n+t^+)). \end{aligned}$$

La última expresión es el resultado deseado. □

7.4.2. La multiplicación de números naturales

La multiplicación también admite una definición por recurrencia de la siguiente forma:

i. $n \cdot 0 = 0$.

ii. $n \cdot k^+ = n \cdot k + n$.

para todo número natural n y k.

7.4.2.1. Propiedad modulativa de la multiplicación

Teorema 5: para todo número natural n se cumple que

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n,$$

donde hemos definido $1 = 0^+$.

Prueba:

i. Para $n = 0$, por la primera parte de la definición de multiplicación se tiene que $1 \cdot 0 = 0$. Y de la segunda parte,

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 &= 0 \cdot 0^+ && \text{por la definición de 1} \\ &= 0 \cdot 0 + 0 && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= 0 + 0 = 0 && \text{por la propiedad modulativa de la adición.} \end{aligned}$$

ii. Suponemos válido para $n = k$ que $k \cdot 1 = 1 \cdot k = k$, y debemos demostrar que se cumple para su sucesor k^+; es decir, que $k^+ \cdot 1 = 1 \cdot k^+ = k^+$.

$$\begin{aligned} 1 \cdot k^+ &= 1 \cdot k + 1 && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= k + 1 && \text{por hipótesis de inducción} \\ &= k + 0^+ && \text{por la definición de 1} \\ &= (k + 0)^+ && \text{por la definición de suma} \\ &= k^+ && \text{por la propiedad modulativa de la suma.} \end{aligned}$$

Falta probar que:

$$k^+ \cdot 1 = k^+.$$

Pero esto es inmediato, puesto que

$$\begin{aligned} k^+ \cdot 1 &= k^+ \cdot 0^+ && \text{por la definición de 1} \\ &= k^+ \cdot 0 + k^+ && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= 0 + k^+ && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= k^+ && \text{por la propiedad modulativa de la suma.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es válida para todo número natural n. $\square$

En la definición de multiplicación se afirma que $n \cdot 0 = 0$, probaremos ahora que $0 \cdot n = 0$.

Teorema 6: para todo número natural n se tiene que

$$0 \cdot n = 0.$$

Prueba: hacemos inducción sobre n.

i. Para $n = 0$, se tiene que $0 \cdot 0 = 0$ por la definición de multiplicación.

ii. Supongamos que para $n = k$, $0 \cdot k = 0$, probemos que $0 \cdot k^+ = 0$.

$$\begin{aligned} 0 \cdot k^+ &= 0 \cdot k + 0 && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= 0 + 0 && \text{por hipótesis de inducción} \\ &= 0 && \text{por la propiedad modulativa de la suma.} \end{aligned}$$ □

7.4.2.2. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Teorema 7: para todo m, n, k, números naturales se cumple que

$$(n + k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m.$$

Prueba: sean n y k números naturales fijos pero arbitrarios, hagamos inducción sobre m:

i. Para $m = 0$, tenemos que

$$(n + k) \cdot 0 = 0 \qquad \text{por la definición de multiplicación.}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} n \cdot 0 + k \cdot 0 &= 0 + 0 && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= 0 && \text{por la propiedad modulativa de la adición.} \end{aligned}$$

ii. Suponemos que se cumple que $(n + k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m$, para todo m y n números naturales y debemos demostrar que $(n + k) \cdot m^+ = n \cdot m^+ + k \cdot m^+$.

Pero,

$$\begin{aligned} (n + k) \cdot m^+ &= (n + k) \cdot m + (n + k) && \text{por la definición de multiplicación} \\ &= (n \cdot m + k \cdot m) + (n + k) && \text{por hipótesis de inducción} \\ &= (n \cdot m + n) + (k \cdot m + k) && \text{por la conmutativa y asociativa de la adición.} \\ &= n \cdot m^+ + k \cdot m^+ && \text{por la definición de multiplicación,} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

7.4.2.3. Propiedad conmutativa de la multiplicación

Teorema 8: para todo m, n, números naturales se cumple que

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Prueba: sean n un número natural fijo pero arbitrario, hacemos inducción sobre m:

i. Para $m = 0$, tenemos que $0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$ por el teorema 6.

ii. Suponemos que para $m = k$ se tiene que $k \cdot n = n \cdot k$, debemos probar que $k^+ \cdot n = n \cdot k^+$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
n \cdot k^+ &= n \cdot k + n && \text{por la definición de multiplicación}\\
&= k \cdot n + n && \text{por la hipótesis de inducción}\\
&= k \cdot n + 1 \cdot n && \text{por la propiedad modulativa de la}\\
& && \text{multiplicación}\\
&= (k + 1) \cdot n && \text{por la propiedad distributiva}\\
&= (k + 0^+) \cdot n && \text{por la definición de 1}\\
&= (k + 0)^+ \cdot n && \text{por la definición de adición}\\
&= k^+ \cdot n && \text{por la propiedad modulativa de la adición.} \square
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. *Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales; es decir, que para todo m, n, k números naturales se cumple que:*

$$(m \cdot n) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

2. *Demuestre las leyes cancelativas de la adición y la multiplicación; es decir, que:*

   a) Para todo m, n, k, número natural se cumple que, si $m+n = m+k$ entonces $n = k$.

   b) Para todo m, n, k, número natural, $m \neq 0$, se tiene que, si $m \cdot n = m \cdot k$ entonces $n = k$.

7.5. El orden en los números naturales

Entre los números naturales hemos establecido una jerarquía que nos permite decir cuándo uno de ellos es mayor que otro; las propiedades de esta relación, conocida como una *relación de orden*, también puede demostrarse usando las propiedades de los números naturales que hemos demostrado en este capítulo.

Decimos que entre dos números naturales a y b, *a es menor o igual que b*, o también que *b es mayor o igual que a* y se nota $a \leq b$ si y solo si existe un número natural c tal que $a + c = b$.

Esta relación cumple las siguientes propiedades:

1. *Reflexiva:* para todo número natural a se cumple que $a \leq a$.

   Prueba: el primer axioma de Peano garantiza que el 0 es un número natural y la propiedad modulativa de la suma afirma que para todo número natural a, se tiene que $a + 0 = a$, por tanto $a \leq a$ para todo número natural a. □

2. *Antisimétrica:* dados dos números naturales cualesquiera a y b, si se cumple que $a \leq b$ y también se cumple que $b \leq a$ entonces debe cumplirse que $a = b$.

   Prueba: si se cumple que $a \leq b$ entonces existe un número natural c tal que $a + c = b$, y si además se cumple que $b \leq a$, existe también un número natural d tal que $b + d = a$.

   Si reemplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

   $$(a + c) + d = a$$

   aplicando las propiedades asociativa y cancelativa de la adición, la igualdad se convierte en

   $$c + d = 0,$$

   lo que implica que $c = d = 0$, porque si no fuera así y uno de ellos, por ejemplo d fuera diferente de 0, existiría un número natural p tal que $p^+ = d$ *(¿por qué?)* y entonces

   $$c + d = c + p^+ = (c + p)^+ = 0$$

   lo que significaría que 0 es sucesor de $(c + p)$, lo que contradice el axioma 4 de Peano. □

3. *Transitiva:* dados números naturales cualesquiera a, b y c, si se cumple que $a \leq b$ y también se cumple que $b \leq c$ entonces debe cumplirse que $a \leq c$.

   Prueba: si se cumple que $a \leq b$ entonces existe un número natural k tal que $a + k = b$, y si además se cumple que $b \leq c$, existe también un número natural d tal que $b + d = c$.

   Si reemplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

   $$(a + k) + d = c,$$

   aplicando la propiedad asociativa de la adición, la igualdad se convierte en

   $$a + (k + d) = c$$

   lo que significa que $a \leq c$, puesto que $(k+d)$ es un número natural. $\square$

4. *Monotonía de la adición:* dados números naturales cualesquiera a, b, c y d, si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.

   Prueba: si $a \leq b$ entonces existe un número natural k tal que $a + k = b$, y si además $c \leq d$, existe también un número natural n tal que $c + n = d$.

   Si sumamos las dos igualdades, obtenemos:

   $$(a + k) + (c + n) = b + d,$$

   aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, la anterior igualdad toma la forma

   $$(a + c) + (k + n) = b + d,$$

   lo que significa que $a + c \leq b + d$, puesto que $(k + n)$ es un número natural. $\square$

Ejercicios

1. *Demuestre la propiedad de monotonía para la multiplicación, esto es que: dados números naturales cualesquiera a, b y c, si $a \leq b$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

2. *Demuestre que si a, b, c son números naturales y $a \cdot c < b \cdot c$ entonces $a < b$.*

3. Si definimos por recurrencia la potenciación de números naturales por las fórmulas:

   i. $a^0 = 1$
   ii. $a^{n^+} = a^n \cdot a.$

   Demuestre que

$$a^{n+m} = a^n a^m$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

4. En el capítulo 1 definimos una operación que reitera la potenciación; esta se puede definir por recurrencia con las fórmulas:

   i. ${}^1a = a$
   ii. ${}^{n^+}a = ({}^na)^a.$

   Estudie sus propiedades y demuéstrelas por inducción.

Notemos la diferencia de los procedimientos y los razonamientos que hacemos en este capítulo con lo hecho en los capítulos anteriores, aquí lo que importa son los axiomas y sus conexiones lógicas sin importar las representaciones que de las palabras "número natural" podamos hacer.

Por ejemplo, si llamamos $1 = 0^+, 2 = 1^+, 3 = 2^+, 4 = 3^+, \cdots$, etc. Podemos demostrar que

$$3 + 1 = 4 \qquad \text{(¿No le parece exótico, demostrar esto?)}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} 3+1 &= 1+3 = 1+2^+ = (1+2)^+ = (1+1^+)^+ = ((1+1)^+)^+ \\ &= ((1+0^+)^+)^+ = (((1+0)^+)^+)^+ = ((1^+)^+)^+ = (2^+)^+ = 3^+ = 4. \end{aligned}$$

Esta es una de las maneras oficiales de presentar los números naturales; usted puede averiguar otras.

∗ ∗

El estudio aquí apenas comienza.

∗ ∗

Apéndice

A

Apéndice

A.1. Programa primos 1

```
PROGRAM PRIMO1;
USES CRT;
VAR I,J,K,F:LONGINT;
PASO:CHAR;
BEGIN
REPEAT
CLRSCR;
WRITELN('TECLEE UN NÚMERO MENOR O IGUAL A 2.147.483.647');
WRITELN('PARA SABER SI ES  PRIMO');
READLN(K);
J:=0;
FOR I:=2 TO K-1 DO
IF (K MOD I) =0 THEN
BEGIN
J:=1;
F:=I;
END;
WRITELN;
IF J=0 THEN
WRITELN ('EL NÚMERO ',K,' ES PRIMO')
```

```
ELSE
BEGIN
WRITELN('EL NÚMERO ',K,' NO ES PRIMO');
WRITELN('POR EJEMPLO ',F,' ES UN FACTOR DE ',K)
END;
GOTOXY(1,24);
WRITELN('PRESIONE C PARA REPETIR Y N PARA SALIR');
READLN(PASO)
UNTIL (PASO IN ['n','N']);
END.
```

A.2. Programa primos 2

```
PROGRAM PRIMOS2;
USES CRT;
VAR I,N,J,K,L:LONGINT;
PASO:CHAR;
BEGIN
REPEAT
CLRSCR;
WRITELN('TECLEE UN NÚMERO MENOR O IGUAL A 2.147.483.648');
WRITELN('PARA HALLAR LOS PRIMOS MENORES O IGUALES A ,L');
READLN(N);
L:=0;
FOR K:=2 TO N DO
BEGIN
J:=0;
FOR I:=2 TO TRUNC(SQRT(K)) DO
IF (K MOD I) =0 THEN
J:=1;
IF J=0 THEN
BEGIN
L:=L+1;
WRITE (K:10);
IF L=160 THEN BEGIN
L:=0;
WRITELN;
WRITELN('TECLEE ENTER PARA CONTINUAR');
READLN;
```

```
CLRSCR;
END;
END;
END;
WRITELN;
WRITELN('TECLEE C PARA CONTINUAR Y N PARA SALIR');
PASO:= READKEY;
UNTIL PASO IN ['n','N'];
END.
```

A.3. Programa primos 3

```
PROGRAM PRIMOS;
USES CRT;
VAR I,N,J,P,F:LONGINT;
PASO :CHAR;
BEGIN
REPEAT
CLRSCR;
WRITELN('TECLEE UN NÚMERO N ENTRE 1 Y 100');
WRITELN('PARA CALCULAR P=N.N-79N+1601');
WRITELN('Y SABER SI P ES PRIMO');
READLN(N);
P:=N*N-79*N+1601;
J:=0;
FOR I:=2 TO P-1 DO
IF (P MOD I) =0 THEN
BEGIN J:=1;
F:=I
END;
IF J=0 THEN
WRITELN ('SI N=',N,'. EL NÚMERO P= ',P,' ES PRIMO')
ELSE
BEGIN
WRITELN('SI N=',N,'. EL NÚMERO P= ',P,' NO ES PRIMO');
WRITELN ('POR EJEMPLO ',F,' ES UN FACTOR DE ',P);
READLN
END;
WRITELN('TECLEE C PARA CONTINUAR Y N PARA SALIR');
```

```
PASO:=READKEY;
UNTIL PASO IN ['n','N']
END.
```

A.4. Programa factores

```
PROGRAM FACTORES;
USES CRT;
VAR I,J,K,L:LONGINT;
PASO:CHAR;
BEGIN
REPEAT
CLRSCR;
WRITELN('TECLEE EL NÚMERO PARA HALLARLE LOS FACTORES');
WRITELN('DIFERENTES DE 1 Y DE ÉL MISMO');
READLN(K);
j:=0;L:=0;
GOTOXY(1,5);
FOR I:=2 TO K-1 DO
IF (K MOD I) =0 THEN
BEGIN J:=1;L:=L+1;
WRITELN(I, ' ES DIVISOR DE ',K);
IF L=22 THEN BEGIN
GOTOXY(1,24);
WRITELN('TECLEE ENTER PARA CONTINUAR');
READLN;
CLRSCR;
L:=0;
END;
END;
IF J=0 THEN
BEGIN
WRITELN ('EL NÚMERO ',K,' ES PRIMO');
L:=L+1;
GOTOXY(1,24);
IF L=22 THEN BEGIN
WRITELN('TECLEE ENTER PARA CONTINUAR');
READLN;
CLRSCR;
```

```
L:=0;
END;
END;
GOTOXY(1,24);
WRITELN('TECLEE C PARA CONTINUAR Y N PARA SALIR');
PASO:=READKEY;
UNTIL PASO IN ['n','N']
END.
```

A.5. Programa ecuacio1

```
PROGRAM ECUACIO1;
{ESTE PROGRAMA LE PERMITE RESOLVER SITUACIONES DE LA FORMA
      X        A         A         X        A        A
    + A      + X       + B        -A       -X       -B
   ------   ------   --------   ------   ------   ------
      B        B         X         B        B        X

EN BASE K, DONDE A Y B SON NÚMEROS DADOS Y X ES EL NÚMERO
BUSCADO. ELIJA LA BASE Y LA SITUACIÓN QUE QUIERE RESOLVER}
USES CRT;
VAR I,J,K:INTEGER;
A,B,RESP,BASE,OP:INTEGER;
X,RESPU:STRING[30];
PROCEDURE MENU;
BEGIN
CLRSCR;
WRITELN;
WRITELN('ESTE PROGRAMA LE PERMITE RESOLVER SITUACIONES
DE LA FORMA');
WRITELN;
GOTOXY(5,5);WRITELN('1.  X');
GOTOXY(5,6);WRITELN('  + A');
GOTOXY(5,7);WRITELN('-------');
GOTOXY(5,8);WRITELN('    B');
GOTOXY(20,5);WRITELN('2. A ');
GOTOXY(20,6);WRITELN(' + X');
GOTOXY(20,7);WRITELN('-------');
GOTOXY(20,8);WRITELN('   B');
```

```
GOTOXY(35,5);WRITELN('3. A');
GOTOXY(35,6);WRITELN(' + B');
GOTOXY(35,7);WRITELN('-------');
GOTOXY(35,8);WRITELN('   X');
GOTOXY(5,12);WRITELN('4. X');
GOTOXY(5,13);WRITELN(' - A');
GOTOXY(5,14);WRITELN('-------');
GOTOXY(5,15);WRITELN('   B');
GOTOXY(20,12);WRITELN('5. A');
GOTOXY(20,13);WRITELN(' - X');
GOTOXY(20,14);WRITELN('-------');
GOTOXY(20,15);WRITELN('   B');
GOTOXY(35,12);WRITELN('6. A');
GOTOXY(35,13);WRITELN(' - B');
GOTOXY(35,14);WRITELN('-------');
GOTOXY(35,15);WRITELN('   X ');
GOTOXY(50,12);WRITELN('7. TERMINAR');
GOTOXY( 1,16);WRITELN;
WRITELN('EN BASE K, DONDE DESEAMOS ENCONTRAR UN NÚMERO X,
CONOCIDOS DOS NÚMEROS A Y B');
WRITELN;
WRITELN('ELIJA UNA BASE ENTRE 2 Y 10 Y LA SITUACIÓN QUE
QUIERE RESOLVER');
WRITELN;
WRITE('TECLEE EL VALOR DE LA BASE ');
READLN(BASE);
GOTOXY(18,23);WRITE('TECLEE EL NÚMERO DE LA OPCIÓN DESEADA ');
READLN(OP);CLRSCR
END;
PROCEDURE RESPUESTA;
BEGIN
GOTOXY(10,10);WRITELN('ESCRIBA EL VALOR DE X (UN SOLO SÍMBOLO)
QUE USTED CONSIDERA CORRECTO');
GOTOXY(36,12);READLN(X);
END;
PROCEDURE CALIFICACION;
BEGIN
IF X=RESPU THEN WRITELN('CORRECTO!!')
ELSE WRITELN('LA RESPUESTA CORRECTA ES ',RESPU);
END;
```

```
PROCEDURE UNO11;
BEGIN
GOTOXY(35,5);WRITELN(' X');
GOTOXY(35,6);WRITELN(' ',A);
GOTOXY(35,7);WRITELN('----');
GOTOXY(35,8);WRITELN(' ',B);
END;
PROCEDURE UNO12;
BEGIN
GOTOXY(35,5);WRITELN(' ',A);
GOTOXY(35,6);WRITELN(' X');
GOTOXY(35,7);WRITELN('----');
GOTOXY(35,8);WRITELN(' ',B);
END;
PROCEDURE UNO13;
BEGIN
GOTOXY(35,5);WRITELN(' ',A);
GOTOXY(35,6);WRITELN(' ',B);
GOTOXY(35,7);WRITELN('----');
GOTOXY(35,8);WRITELN(' X');
END;
PROCEDURE UNO;
BEGIN
RESP:=A+B;
IF (RESP)>(BASE-1) THEN RESPU:='NO HAY SOLUCIÓN'
ELSE STR(RESP,RESPU);
WRITELN;
WRITELN;
END;
PROCEDURE UNORESTA;
BEGIN
IF B<=A THEN BEGIN
RESP:=A-B;
STR(RESP,RESPU);
END
ELSE  RESPU:='NO HAY SOLUCION';
WRITELN;
WRITELN;
END;
PROCEDURE UNO11RESTA;
```

```
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('-');
UNO11;
RESPUESTA;
UNO;
CALIFICACION;
END;
PROCEDURE UNO12RESTA;
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('-');
UNO12;
RESPUESTA;
UNORESTA;
CALIFICACION;
END;
PROCEDURE UNO13RESTA;
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('-');
UNO13;
RESPUESTA;
UNORESTA;
CALIFICACION
END;
PROCEDURE UNOSUMA;
BEGIN
IF B>=A THEN BEGIN
RESP:=B-A;
STR(RESP,RESPU);
END
ELSE RESPU:='NO HAY SOLUCIÓN';
WRITELN;
WRITELN
END;
PROCEDURE UNO11SUMA;
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('+');
UNO11;
RESPUESTA;
UNOSUMA;
CALIFICACION;
```

```
END;
PROCEDURE UNO12SUMA;
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('+');
UNO12;
RESPUESTA;
UNOSUMA;
CALIFICACION;
END;
PROCEDURE UNO13SUMA;
BEGIN
GOTOXY(34,6);WRITELN('+');
UNO13;
RESPUESTA;
UNO;
CALIFICACION
END;
PROCEDURE SALIDA;
BEGIN
CLRSCR;
GOTOXY(30,12);
WRITELN('ADIOS PUES....');
BASE:=0
END;
PROCEDURE EJERCICIO;
BEGIN
RANDOMIZE;
REPEAT
CLRSCR;
MENU;
A:=RANDOM(BASE);
B:=RANDOM(BASE);
CASE OP OF
1:UNO11SUMA;
2:UNO12SUMA;
3:UNO13SUMA;
4:UNO11RESTA;
5:UNO12RESTA;
6:UNO13RESTA;
7:SALIDA;
```

```
ELSE WRITELN('LA OPCIÓN ES UN NÚMERO 1-7');
END;
GOTOXY(35,22);
WRITELN('OPRIME UNA TECLA PARA CONTINUAR');
READLN;
UNTIL BASE=0;
END;
BEGIN
EJERCICIO
END.
```

A.6. Programa propiedades

```
PROGRAM PROPIEDADES;
USES CRT;
VAR I, J, K, N:INTEGER;
NUE,NUE1:STRING;
A:CHAR;
H:STRING[1];
BASTA:BOOLEAN;
(* ARMAR LA TABLA *)
PROCEDURE TABLA;
BEGIN
CLRSCR;
NUE:='';
FOR K:=1 TO N DO
BEGIN
GOTOXY(13+5*K,5); WRITE(K-1);
END;
GOTOXY(10,5);WRITE('* |');
GOTOXY(12,6);
FOR K:=1 TO 5*N+4 DO
WRITE('-');
FOR K:=0 TO N-1  DO
BEGIN
GOTOXY(12,8+2*K);WRITE('|');
GOTOXY(10,7+2*K);WRITE(K,' | ');
END;
GOTOXY(13,6+2*N);WRITE(NUE);
```

```
GOTOXY(1,1);WRITE('POR FAVOR COMPLETE LA TABLA. ');
K:=0;
REPEAT
GOTOXY(14,7+2*K);
J:=0;
REPEAT
REPEAT
NUE[K*N+J+1]:=READKEY;
UNTIL (ORD(NUE[K*N+J+1]) IN [48..47+N]);
WRITE(NUE[K*N+J+1]:5);
J:=J+1;
UNTIL (J>N-1);
K:=K+1;
UNTIL (K>N-1);
WRITELN;
WRITELN;
EXIT;
END;
PROCEDURE TABLA1;
BEGIN
NUE1:='';
GOTOXY(45,5);
WRITE('# |');
FOR K:=1 TO 3 DO
BEGIN
GOTOXY(47+5*K,5);
WRITE(K-1);
END;
GOTOXY(45,6);
FOR K:=0 TO N-1 DO
WRITE(K:5);
GOTOXY(45,6);
FOR K:=1 TO 5*N+4 DO
WRITE('-');
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
GOTOXY(47,8+2*K);
WRITE('|');
GOTOXY(45,7+2*K);
WRITE(K,' | ');
```

```
END;
GOTOXY(48,6+2*N);
WRITE(NUE1);
GOTOXY(1,1);
WRITE('POR FAVOR COMPLETE LA TABLA.');
K:=0;
REPEAT
GOTOXY(49,7+2*K);
J:=0;
REPEAT
REPEAT
NUE1[K*N+J+1]:=READKEY;
UNTIL (ORD(NUE1[K*N+J+1]) IN [48..47+N]);
WRITE(NUE1[K*N+J+1]:5);
J:=J+1;
UNTIL (J>N-1);
K:=K+1;
UNTIL (K>N-1);
WRITELN;
WRITELN;
EXIT;
END;
FUNCTION OP(N1,N2:INTEGER):CHAR;
BEGIN
OP:=NUE[N1*N+N2+1];
END;
FUNCTION OP1(N1,N2:INTEGER):CHAR;
BEGIN
OP1:=NUE1[N1*N+N2+1];
END;
PROCEDURE ASOCIATIVA;
VAR
I,J,K,M:INTEGER;
T,S:CHAR;
BEGIN
M:=0;
WRITELN;
FOR I:=0 TO N-1 DO
BEGIN
FOR J:=0 TO N-1 DO
```

```
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
T:=OP(ORD(OP(I,J))-48,K);
S:=OP(I,ORD(OP(J,K))-48);
IF T<>S THEN
BEGIN
M:=M+1;
WRITE('FALLA ',I,'*',J,'*',K,'  ');
END;
END;
END;
WRITELN;
IF M=0 THEN WRITELN('LA OPERACIÓN ES ASOCIATIVA.')
ELSE WRITELN('LA OPERACIÓN NO ES ASOCIATIVA.');
READLN;
END;
PROCEDURE DISTRIBUTIVA;
VAR
I,J,K,M:INTEGER;
T,S:CHAR;
BEGIN
M:=0;
WRITELN;
FOR I:=0 TO N-1 DO
BEGIN
FOR J:=0 TO N-1 DO
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
T:=OP(ORD(OP(I,J))-48,K);
S:=OP(ORD(OP1(I,K))-48,ORD(OP1(J,K))-48);
IF T<>S THEN
BEGIN
M:=M+1;
WRITE('FALLA ',I,'#',J,'*',K,'  ');
END;
END;
END;
FOR I:=0 TO N-1 DO
BEGIN
FOR J:=0 TO N-1 DO
```

```
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
T:=OP1(I,ORD(OP(J,K))-48);
S:=OP(ORD(OP1(I,J))-48,ORD(OP1(I,K))-48);
IF T<>S THEN
BEGIN
M:=M+1;
WRITE('FALLA ',I,'*',J,'#',K,'  ');
END;
END;
END;
WRITELN;
IF M=0 THEN WRITELN('LA OPERACIÓN * ES DISTRIBUTIVA CON
RESPECTO #.')
ELSE WRITELN('LA OPERACIÓN * NO ES DISTRIBUTIVA CON
RESPECTO #..');
READLN;
END;
PROCEDURE CONMUTATIVA;
VAR
M:INTEGER;
A,B:CHAR;
BEGIN
M:=0;
FOR K:=0 TO N-1 DO
FOR J:=K TO N-1 DO
IF J<>K THEN
BEGIN
A:=OP(K,J);
B:=OP(J,K);
IF A=B THEN M:=M
ELSE
BEGIN
M:=M+1;
WRITE('      ',K,'*',J,' ES DISTINTO DE ',J,'*',K,'   ');
END;
END;
WRITELN;
WRITELN;
IF M=0 THEN WRITELN('LA OPERACIÓN ES CONMUTATIVA.')
```

```
ELSE WRITELN('LA OPERACIÓN NO ES CONMUTATIVA.');
READLN;
END;
PROCEDURE IDENTICO;
VAR
L:INTEGER;
BEGIN
J:=0;
H:='';
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
L:=0;
FOR I:=0 TO N-1 DO
IF (ORD(OP(K,I))-48<>I) OR ( ORD(OP(I,K))-48<>I) THEN
L:=L+1;
IF L=0 THEN
BEGIN
WRITE(K,' ES ELEMENTO IDÉNTICO');
J:=J+1;
STR(K,H)
END;
END;
IF J=0 THEN WRITE ('NO HAY ELEMENTO IDÉNTICO.');
READLN;
END;
PROCEDURE INVERSOS;
BEGIN
WRITELN;
IF H=' ' THEN WRITE('NO TIENE SENTIDO HABLAR DE INVERSOS.')
ELSE
BEGIN
FOR K:=0 TO N-1 DO
BEGIN
I:=0;
FOR J:=0 TO N-1 DO
IF (OP(K,J)=H[1]) AND (OP(J,K)=H[1]) THEN
BEGIN
WRITE(' ',J,' ES EL INVERSO DE  ',K,'.');
I:=I+1;
END;
```

```
IF I=0 THEN
WRITE(K,' NO TIENE INVERSO.');
END;
END;
READLN
END;
BEGIN
REPEAT
CLRSCR;
WRITE('NÚMERO DE ELEMENTOS DEL CONJUNTO: ');
READLN(N);
CLRSCR;
GOTOXY(10,5);WRITE('1. ASOCIATIVA');
GOTOXY(10,6);WRITE('2. CONMUTATIVA');
GOTOXY(10,7);WRITE('3. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDÉNTICO');
GOTOXY(10,8);WRITE('4. EXISTENCIA DE INVERSOS');
GOTOXY(10,9);WRITE('5. TODO LO ANTERIOR');
GOTOXY(10,10);WRITE('6. DISTRIBUTIVIDAD');
REPEAT
GOTOXY(5,15);
CLREOL;
WRITE('MARQUE LA OPCIÓN QUE DESEE');
A:=READKEY;
UNTIL (A IN ['1','2','3','4','5','6']);
IF A='6' THEN
BEGIN
TABLA;
TABLA1;
DISTRIBUTIVA;
END
ELSE TABLA;
CASE A OF
'1': ASOCIATIVA;
'2': CONMUTATIVA;
'3': IDENTICO;
END;
IF A='4' THEN
BEGIN
WRITELN('PRIMERO DEBO VERIFICAR LA EXISTENCIA DE ELEMENTO
IDÉNTICO.');
```

```
READLN;
IDENTICO;
INVERSOS;
END;
WRITELN('DE NUEVO ? S/N');
IF A='5' THEN
BEGIN
ASOCIATIVA;
CONMUTATIVA;
IDENTICO;
INVERSOS;
END;
IF UPCASE(READKEY)='N' THEN BASTA:=TRUE
ELSE BASTA:=FALSE;
UNTIL BASTA;
END.
```

A.7. Programa perfecto

```
PROGRAM PERFECTO;
USES CRT;
VAR I,J,K:LONGINT;
BEGIN
CLRSCR;
WRITELN('TECLEE UN NÚMERO MENOR O IGUAL 2.147Ï483.647');
WRITELN('PARA SABER SI ES PERFECTO');
READLN(K);
J:=1;
FOR I:=2 TO K-1 DO
IF (K MOD I) =0 THEN
BEGIN
J:=J+I;
WRITELN(I, ' ES DIVISOR DE ',K)
END;
IF J=K THEN
WRITELN ('EL NÚMERO ',K,' ES PERFECTO')
ELSE WRITELN('EL NÚMERO ',K,' NO ES PERFECTO');
READLN
END.
```

A.8. Tabla progresiones aritméticas

```
program tabla1;
{El programa genera las tablas por recursión y encuentra
los términos en una fila, dentro de una misma tabla, tales
que la suma de dos de ellos da como resultado un tercero}
uses crt;
const filas=10;
columnas=10;
ntablas=3;
type matriz=array[1..filas,1..columnas,0..ntablas] of real;
var a,b:matriz ;
i,j,k,l,m,r,o:integer;
procedure tablasuma(var m:matriz;p:integer);
begin
for i:=1 to filas do
for j:=1 to columnas do
begin
m[i,j,p] :=0;
for k:=1 to j do
m[i,j,p]:=m[i,j,p]+m[i,k,p-1]
end
end;
procedure mostrartablasuma(var m:matriz;x0,y0,fil,col,incx,
incy,p:integer);
begin
GOTOXY(1,1);WRITE('*',P,' | ');
FOR K:=1 TO col DO
BEGIN
gotoxy(x0+incx*K,1); WRITE(K);
END;
GOTOXY(1,y0-2);
FOR K:=1 TO (col+1)*incx DO
WRITE('-');
FOR K:=1 TO fil*incy  DO
BEGIN
GOTOXY(1,y0+incy*(k-1));WRITE(K:2,' | ');
END;
for i:=1 to fil do
for j:=1 to col do
```

```
begin
gotoxy(x0+4+incx*(j-1),y0+incy*(i-1));
writeln(m[i,j,p]:4:0)
end;
end;
begin
clrscr;
for i:=1 to filas do
begin
b[i,1,0]:=1;
for j:=2 to columnas do
b[i,j,0]:=i
end;
{r es el número de la tabla}
for r:= 1 to ntablas  do
tablasuma(b,r);      {generación de la tabla por fórmula}
for r:=1 to ntablas do
begin
clrscr;
mostrartablasuma(b,2,4,10,10,6,1,r);
readln;
for i:=1 to filas do
begin
clrscr;
writeln('términos de la tabla', r);
writeln('posición        +  posición     =    posición' );
m:=5;
writeln('fila ', i);
for j:=1 to  columnas-2 do
begin
for o:=5 to 24 do
begin gotoxy(m+1,o);
writeln
end;
for k:=j+1 to columnas-1 do
begin
for l:=k+1 to columnas do
if (b[i,j,r]+ b[i,k,r]) = b[i,l,r] then
begin
gotoxy(5,m);writeln(j,'  ',b[i,j,r]:6:0);
```

```
gotoxy(25,m);writeln(k,'  ',b[i,k,r]:6:0);
gotoxy(45,m);writeln(l,'  ',b[i,l,r]:6:0);
m:=m+1;
if m=25 then begin
readln;
for o:=5 to 24 do
begin
gotoxy(2,o);
writeln
end;
m:=5;
end;
end;
end;
end;
readln
end;
end;
end.
```

A.9. Tabla números poligonales

```
program tablas;
{El programa genera las tablas por recursión y encuentra
los términos en una fila, dentro de una misma tabla,
tales que la diferencia de dos de ellos es un múltiplo de
un tercero; no se muestra cuando el escalar es 1}
uses crt;
const filas=10;
columnas=10;
ntablas=3;
type matriz=array[1..filas,1..columnas,0..ntablas] of real;
var a,b:matriz ;
i,j,k,l,m,r,o,z:integer;
procedure tablasuma(var m:matriz;p:integer);
begin
for i:=1 to filas do
for j:=1 to columnas do
begin
```

```
m[i,j,p] :=0;
for k:=1 to j do
m[i,j,p]:=m[i,j,p]+m[i,k,p-1]
end
end;
procedure mostrartablasuma(var m:matriz;x0,y0,fil,col,incx,
incy,p:integer);
begin
GOTOXY(1,1);WRITE('*',P,' | ');
FOR K:=1 TO col DO
BEGIN
gotoxy(x0+incx*K,1); WRITE(K);
END;
GOTOXY(1,y0-2);
FOR K:=1 TO (col+1)*incx DO
WRITE('-');
FOR K:=1 TO fil*incy  DO
BEGIN
GOTOXY(1,y0+incy*(k-1));WRITE(K:2,' | ');
END;
for i:=1 to fil do
for j:=1 to col do
begin
gotoxy(x0+4+incx*(j-1),y0+incy*(i-1));
writeln(m[i,j,p]:4:0)
end;
end;
begin
clrscr;
for i:=1 to filas do
begin
b[i,1,0]:=1;
for j:=2 to columnas do
b[i,j,0]:=i
end;
{r es el número de la tabla}
for r:= 1 to ntablas  do
tablasuma(b,r);      {generación de la tabla por fórmula}
for r:=1 to ntablas do
begin
```

```
clrscr;
mostrartablasuma(b,2,4,10,10,6,1,r);
readln;
for i:=1 to filas do
begin
clrscr;
writeln('términos de la tabla', r);
writeln('posición     -  posición     =   z. posición    z' );
m:=5;
writeln('fila ', i);
for j:=2 to  columnas-2 do
begin
for o:=5 to 24 do
begin gotoxy(m+1,o);
writeln
end;
for k:=j+1 to columnas-1 do
begin
for l:=k+1 to columnas do
begin
z:=trunc ( (b[i,l,r]-b[i,k,r]) / b[i,j,r]) ;
if z=((b[i,l,r]-b[i,k,r]) / b[i,j,r]) then
begin
if z<>1 then begin
gotoxy(5,m);writeln(l,'  ',b[i,l,r]:6:0);
gotoxy(25,m);writeln(k,'  ',b[i,k,r]:6:0);
gotoxy(45,m);writeln(j,'  ',b[i,j,r]:6:0);
gotoxy(65,m);writeln(z);
m:=m+1;
if m=25 then begin
readln;
for o:=5 to 24 do
begin gotoxy(2,o);
writeln
end;
m:=5;
end;
end;
end;
end;
end;
```

```
end;
end;
readln
end;
end;
end.
```

A.10. Tablas números piramidales

```
program tablas;
{El programa genera las tablas por recursión y mediante una
fórmula se puede observar que los resultados son iguales}
uses crt;
const filas=10;
columnas=10;
ntablas=3;
type matriz=array[1..filas,1..columnas,0..ntablas] of real;
table=array[1..10,1..10] of real;
var a:matriz ;
b:table;
i,j,k,r:integer;
procedure mostrartablasuma(var m:matriz;x0,y0,fil,col,incx,
incy,p:integer);
begin
for i:=1 to fil do
for j:=1 to col do
begin
gotoxy(x0+incx*(j-1),y0+incy*(i-1));
writeln(m[i,j,p]:4:0)
end;
end;
procedure mostrar(var c:table;x0,y0,fil,col,incx,
incy,p:integer);
begin
for i:=1 to fil do
for j:=1 to col do
begin
gotoxy(x0+incx*(j-1),y0+incy*(i-1));
writeln(c[i,j]:4:0)
```

```
end;
end;
procedure tablasuma(var m:matriz;p:integer);
begin
for i:=1 to 10 do
for j:=1 to 10 do
begin
m[i,j,p] :=0;
for k:=1 to j do
m[i,j,p]:=m[i,j,p]+m[i,k,p-1]
end
end;
procedure tabla(var c:table;p:integer);
begin
for i:=1 to 10 do
for j:=1 to 10 do
begin
c[i,j] :=(i*j-i+p) ;
for k:=1 to p-1 do
c[i,j]:=(j+k-1)/(k+1)*c[i,j]
end
end;
begin
clrscr;
for i:=1 to filas do
begin
a[i,1,0]:=1;
for j:=2 to 10 do
a[i,j,0]:=i
end;
mostrartablasuma(a,2,2,10,10,5,1,0);
readln;
for r:= 1 to ntablas  do
begin
tablasuma(a,r);
tabla(b,r);
clrscr;
writeln('tabla ',r);
mostrartablasuma(a,2,2,10,10,7,1,r);
mostrar(b,2,14,10,10,7,1,r);
```

```
readln;
end;
end.
```

Bibliografía

[1] Evolución de la escritura peruana pre-inca. Recuperado el 17 de julio de 2013 de: http://www.foroexplayate.com/phpBB3/viewtopic.php?f=22&t=18727.

[2] Sector matemática, Educación Media, Potencias, Regularidades potencias. Recuperado el 12 de diciembre de 2009 de: http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm.

[3] Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. Cali: Norma.

[4] Acevedo, M. y Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Colciencias.

[5] Allard, A. (1993). Del ábaco a las cifras indoarábigas. *El correo de la Unesco*, 46, 34–36.

[6] Alsina, C. y Nelsen, R. (2010). *Charming proofs. A journey into elegant mathematics*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

[7] Apostol, T. (1988). *Calculus*. Vol. 1. Barcelona: Reverté.

[8] Ascher, M. y Ascher, R. (1997). *Código del quipu: un estudio en los medios de comunicación, matemáticas y cultura*. Nueva York: Dover.

[9] Bell, E. (1997). Gauss, el príncipe de las matemáticas. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. 1 (pp. 222–264). Barcelona: Grijalbo.

[10] Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

[11] Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

[12] Burton, J. (1969). *Teoría de los números*. México: Trillas.

[13] Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Vol. 1. Nueva York: Dover.

[14] Campiglio, A. y Eugeni, V. (1992). *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo*. Barcelona: Ediciones Paidós.

[15] Campos, A. (1996). El más bello teorema. En: *Memorias VII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 25–52). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[16] Canal Historia (2008). El legado de pitágoras. Recuperado el 9 de mayo de 2013 de: http://www.youtube.com/watch?v=h6qJoUQPvEA.

[17] Caro, V. (1936). *Los números: su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades*. Bogotá: Minerva.

[18] Churchill, E. (1965). *Contando y midiendo: introducción a la enseñanza de los números en la escuela de párvulos*. México: Uteha.

[19] Conant, L. (1997). Contar. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. 4 (pp. 20–29). Barcelona: Grijalbo.

[20] Courant, R. & Robbins, H. (1971). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

[21] Flores, A. (2000). Uso de representaciones geométricas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra. *Eureka*, (15). Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. Recuperado de: http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n15/en1505.pdf.

[22] Fraleigh, J. (1988). *Álgebra abstracta.* México: Adisson Wesley Iberoamericana.

[23] García, J. (2004). *Manual del ábaco.* Madrid: Ediciones García.

[24] Gardner, M. (1987). *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas.* Barcelona: Labor.

[25] Gauss, C. (1995). *Disquisitiones Arithmeticae.* Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Traducido por Hugo Barrantes, Michael Josephy y Ángel Ruiz.

[26] Gerdes, P. y Cherinda, M. (1993). Contar en África. *El correo de la Unesco*, 46, 37–39.

[27] Geresa, N. D. (1970). Introducción a la aritmética. En: F. Vera (ed.). *Científicos griegos* (pp. 907–916). Madrid: Aguilar.

[28] Gómez, B.; Puchalt, I.; Vivó, M.; Diez, P.; Pastor, C.; Jordá, M. y De la Rosa, J. D. (2001). X Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (X JAEM). En: E. Palacián y J. Sancho (eds.). *El multiplicando y el multiplicador. ¿Es necesario distinguirlos?, ¿es indiferente?* (pp. 605–609). Zaragoza.

[29] Goldstein, C. (1995). El nacimiento del número. *Mundo científico*, 15(161), 812–815.

[30] Gupta, S. S. (2002). Fascinating triangular numbers. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de: www.shyamsundergupta.com/triangle.htm.

[31] Halmos, P. (1960). *Naive Set theory.* Nueva York: Van Nostrand.

[32] Hempel, C. (1997). Sobre la naturaleza de la verdad matemática. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Vol. 5 (pp. 7–22). Barcelona: Grijalbo.

[33] Herstein, I. (1976). *Álgebra moderna.* México: Trillas.

[34] Investigación y Ciencia (1995). *Grandes matemáticos.* Barcelona: Prensa Científica S.A.

[35] Jiménez, H.; Angarita, R. y Luque, C. (2007). Del número 1 al teorema de Nicómaco. En: *Memorias XVII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 555–571). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[36] Jiménez, H.; Domínguez, D. y Luque, C. (2007). Algunas sumas en la tabla pitagórica de multiplicar. En: *Memorias XVII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 43–65). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[37] Jiménez, H. y Luque, C. (2007). De la tabla de multiplicar a la función sigma de Euler. En: *Memorias XVII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 245–259). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[38] Jiménez, H.; Ruiz, C. y Luque, C. (2007). Triadas y n-plas de números triangulares. En: *Memorias XVII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 501–516). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[39] Jiménez, R.; Gordillo, E. y Rubiano, G. (1999). *Teoría de números para principiantes*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[40] Johnson, D. y Johnson, J. (1972). *Graph Theory with Engineering applications*. Nueva York: Ronald Press.

[41] Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático: de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

[42] Koehler, O. (1997). La capacidad de los pájaros para contar. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. 4 (pp. 80–89). Barcelona: Grijalbo.

[43] Kreyszig, E. (1978). *Introducción a la estadística matemática, principios y métodos*. México: Limusa.

[44] Lang, S. (1985). *The beauty of doing mathematics*. Nueva York: Springer.

[45] Luque, C.; Jiménez, H. y Ángel, L. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[46] Luque, C.; Ávila, J. C. y Soler, N. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: razonar*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[47] Meavilla, V. (2009). Luca Pacioli (Algunos algoritmos de la multiplicación). Sección "Así lo hicieron", de la sección "Historia de las matemáticas"del Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Recuperado de: http://www.divulgamat.net.

[48] Medina, I. y Albarracín, A. (2012). Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La Aritmética. Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[49] Mosterín, J. (1997). The natural numbers as a univesal library. En: E. Agazzi y G. Darvas (eds.). *Philosophy of Mathematics Today.* Vol. 22 (pp. 305–317). Springer Science + Business Media, B.V.

[50] Muñoz, J. (1990). *Imposible duplicar el cubo. ¿Sabe usted por qué?* Bogotá: VII Coloquio distrital de matemáticas y estadística. Universidad Nacional de Colombia.

[51] Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos.* 4a. ed. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[52] Murphy, N. y Terry, J. (2005). Historia del uno. En: http://vimeo.com/10619399 o en http://www.youtube.com/watch?v=twJpGlkNT70&feature=related (siete partes).

[53] Navarro, J. (1973). *La nueva matemática.* Barcelona: Salvat.

[54] Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: exercises in visual thinking.* Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

[55] Nelsen, R. (2000). *Proofs without words II: more exercises in visual thinking.* Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

[56] Nelsen, R. & Alsina, C. (2006). *Math made visual. Creating images for understanding mathematics.* Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

[57] Newman, J. (1997). El papiro Rhind. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Vol. 1 (pp. 97–105). Barcelona: Grijalbo.

[58] Niven, I. y Zuckerman, H. (1976). *Introducción a la teoría de números.* México: Limusa.

[59] Ogilvy, S. (1994). *Excursions in mathematics.* Nueva York: Dover.

[60] Perelman, Y. (1965). *Álgebra recreativa.* Moscú: MIR.

[61] Perelman, Y. (1980). *Aritmética recreativa.* Moscú: MIR.

[62] Pinzón, L.; Moreno, H. y Luque, C. (1998). Un análogo al teorema de pitágoras para números triangulares. En: *Memorias IX Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 97–105). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[63] Porras, A. y Monge, C. (2012). VIII Festival Internacional de Matemática. En: *Un viaje por los distintos métodos de multiplicar*. Costa Rica: Liberia.

[64] Puig, L. (2011a). Historias de al-Khwārizmī (5a entrega). La cosa. *Suma*, 66, 89–100.

[65] Puig, L. (2011b). Historias de al-Khwārizmī (6a entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*, 67, 101–110.

[66] Puig, L. (2011c). Historias de al-Khwārizmī (7a entrega). Figuras y demostraciones. *Suma*, 68, 93–102.

[67] Rodríguez, R. (1987). *Diversiones matemáticas*. Barcelona: Reverté.

[68] Ruiz, C. y Sánchez, M. (2006). Algunas conjeturas aritméticas a partir de relaciones geométricas. Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[69] Sagan, C. (1985). *Cosmos*. Buenos Aires: Planeta.

[70] Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

[71] Singh, S. (1998). *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta.

[72] Smith, D. (1958). *History of mathematics*. Vol. 2. Nueva York: Dover.

[73] Smith, D. y Ginsburg, J. (1997). De los números a los numerales y de los numerales al cálculo. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Vol. 4 (pp. 30–55). Barcelona: Grijalbo.

[74] Spiegel, M. (1991). *Teoría y problemas de estadística*. Bogotá: McGraw-Hill.

[75] Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

[76] Stewart, I. (1995). Gauss. In *Grandes matemáticos. Investigación y Ciencia* (pp. 72–73). Barcelona: Prensa Científica.

[77] Suppes, P. (1976). *Teoría axiomática de conjuntos.* Cali: Norma.

[78] Tahan, M. (1994). *El hombre que calculaba.* Bogotá: Panamericana Editorial.

[79] Triana, W. (2012). Una visión histórica del teorema fundamental de la aritmética. Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[80] Vera, F. (1970). *Científicos griegos.* Madrid: Ediciones Aguilar.

[81] Von Hagen, V. (1960). *El mundo de los mayas.* México: Editorial Diana.

[82] Von Hagen, V. (1969). Los incas. En: *Colección culturas básicas del mundo.* México: Joaquín Mortiz.

[83] Wassen, H. (1940). El antiguo ábaco peruano según el manuscrito de Guamán Poma. *Etnologiska studier*, (11).

Este es un libro de actividades matemáticas elementales en aritmética, incluye desde la creación de un sistema de números para contar, proposición de algoritmos para las operaciones básicas, hasta la formulación de representaciones posicionales donde se conjeturan criterios de divisibilidad en bases diferentes a diez. Se estudian, asimismo, métodos algebraicos y geométricos para resolver ecuaciones de primero y segundo grado.

El trabajo de un matemático consiste en resolver problemas, descubrir y demostrar teoremas, y enlazarlos en teorías. Nuestra propuesta enfatiza más en los métodos para resolver problemas que en las soluciones de los mismos, cada problema genera nuevos problemas, que a su vez conducen a nuevas preguntas.

Mostramos el poder de las listas, las tablas y los dibujos para sugerir regularidades numéricas que se convierten en conjeturas y luego en teoremas cuando logramos una demostración, habitualmente con el método de inducción matemática.

La presentación pretende ser amena y mostrar el aspecto lúdico de la actividad matemática.

ISBN: 978-958-8650-60-9
9 789588 650609