UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

Propuesta de material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las expresiones algebraicas en la educación secundaria

Cindy Vanesa Amarillo Suárez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia. 2024

Propuesta de material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las expresiones algebraicas en la educación secundaria

Cindy Vanesa Amarillo Suárez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Director

Diego Guerrero Garay

Magíster en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia. 2024

Dedicatoria

A mi papá, por su interés constante en mi educación, su apoyo incondicional y sus palabras de ánimo que me impulsaron a seguir adelante. A mi mamá, por su compañía inigualable, su aliento en los momentos más desafiantes y por su amor incondicional. A ambos, por ser un ejemplo de dedicación y esfuerzo, y por su guía constante que me ha acompañado en cada paso de este camino. Gracias por ser el pilar de todo lo que soy y he logrado.

A mi pareja, por su invaluable apoyo a lo largo de este proyecto, por sus palabras de aliento que me motivaron a seguir adelante y por no permitirme desistir en los momentos difíciles. Agradezco su presencia en mis momentos de necesidad, así como su dedicación y el tiempo que me brindó en este camino.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por su guía y fortaleza en cada paso de este camino. Su amor incondicional y su apoyo constante me han brindado la serenidad y la motivación necesarias para superar los desafíos.

A mi familia, por ser una fuente de inspiración diaria. Sus palabras, su alegría y su amor incondicional me motivan constantemente y enriquecen mi vida.

Al profesor Diego Guerrero Garay, por acompañarme y orientarme en este recorrido, por confiar en mí y arriesgarse a emprender este proyecto. Aprecio su dedicación, la paciencia que mostró y, sobre todo, la calidad humana que representa.

A mi amiga Claudia Duarte, quien ha estado a mi lado a lo largo de toda la carrera, superando juntas los obstáculos que se nos han presentado.

A los profesores del departamento de Matemáticas, por las valiosas enseñanzas que me han dejado en cada clase y por mostrarme, a través de su ejemplo, el profesional que aspiro a ser.

Finalmente, a la Universidad Pedagógica Nacional, por abrirme sus puertas y brindarme la oportunidad de crecer como profesional y como persona.

Lista de contenidos

1. Preliminares 7

1.1. Justificación 7

1.2. Pregunta de investigación 9

1.3. Objetivos 9

1.3.1. Objetivo general 9

1.3.2. Objetivos específicos 10

1.4. Antecedentes 10

2. Marcos de referencia 14

2.1. Marco Curricular 14

2.2. Marco matemático 17

2.3. Historia de la simbolización algebraica 25

2.4. Marco didáctico 26

2.4.1. Obstáculo 27

2.4.2. Dificultades. 28

2.4.3. Errores. 31

2.4.4. Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje del Algebra 32

2.5. Asuntos de interés didácticos para el desarrollo del material 34

2.5.1. Proceso de generalización 34

2.5.2. Proceso de simbolización 36

2.5.3. Los significados de las letras 37

2.5.4. Los materiales impresos 38

2.6. Diseño de tareas 40

3. Metodología 47

4. Diseño del material didáctico 49

4.1. Etapa 1: Identificación de fuentes 49

4.2. Etapa 2: Identificación de las propuestas de enseñanza y aprendizaje 49

4.3. Etapa 3: Organización de las propuestas de enseñanza y aprendizaje. 51
4.4. Etapa 4 y 5: Diseño de tareas y digitalización de la cartilla 54
5. Conclusiones 57
6. Referencias 59
7. Anexos 62

Lista de anexos

Anexo 1 70
Anexo 2 82
Anexo 3 94
Anexo 4 104

Lista de ilustraciones

Ilustración 1: Resumen 20
Ilustración 2: Elementos de una tarea 41
Ilustración 3: Parámetros para el diseño de tareas 45
Ilustración 4: Obstáculo, dificultades y errores para la elaboración de la cartilla 51

Lista de tablas

Tabla 1. Algunos estándares relativos a las expresiones algebraicas 16
Tabla 2. Coherencia de las tareas Matemáticas 44
Tabla 3. Valoración de la actividad Matemática que realizan los estudiantes 45
Tabla 4. Ficha didáctica (fase 1) 52
Tabla 5. Ficha didáctica (fase 2) 52
Tabla 6. Ficha didáctica (fase 3) 53
Tabla 7. Ficha didáctica (fase 4) 53
Tabla 8. Lista de tareas fase 1 54
Tabla 9. Lista de tareas fase 2 55
Tabla 10. Lista de tareas fase 3 55
Tabla 11. Lista de tareas fase 4 56

Introducción

Este trabajo de investigación tiene como propósito diseñar un material didáctico que sirva como guía en la enseñanza y el aprendizaje inicial de las expresiones algebraicas, surge de la necesidad de replantear el enfoque tradicional que en algunas ocasiones se evidencia en la enseñanza del álgebra, el cual se centra en la memorización y la mecanización de procedimientos sin un significado. En contraste, este material propone un enfoque que fomenta el uso de procesos cómo el de generalización y de simbolización para introducir las expresiones algebraicas. Además, considera algunos obstáculos, dificultades y errores que se evidencian durante el aprendizaje de este concepto.

A lo largo de este trabajo, se presentan cinco capítulos: preliminares, marcos de referencia, metodología, diseño del material didáctico y conclusiones.

En el primer capítulo, se expone la justificación de este proyecto, que incluye una narrativa sobre algunas experiencias académicas de la autora de este trabajo. Además, se formula una pregunta de investigación y se establecen una serie de objetivos. Por último, se revisan algunos trabajos de grado que guardan afinidad con este proyecto.

En el segundo capítulo, se presenta el marco de referencia, que proporciona el sustento teórico para la construcción del material didáctico. En este apartado, se ofrece una visión de las expresiones algebraicas desde diversas perspectivas: matemática, escolar, histórica, curricular y didáctica. El tercer capítulo expone la metodología utilizada en el proyecto y en el diseño del material. En el cuarto capítulo, se presenta el diseño del material, junto con sus características. Finalmente, el capítulo cinco muestra una serie de conclusiones que surgieron al finalizar el trabajo.

1. Preliminares

El presente capítulo expone las razones por las que se decide hacer un material didáctico, que oriente la enseñanza y el aprendizaje inicial de las expresiones algebraicas. Ante esas razones, se formula una pregunta problemática que se espera será contestada al final de esta investigación y se trazan algunos objetivos que marcan el camino a seguir en este trabajo. Finalmente, este capítulo incluye algunos antecedentes sobre la enseñanza y aprendizaje del algebra, particularmente, de las expresiones algebraicas.

1.1. Justificación

Las razones principales para llevar a cabo este trabajo de investigación surgen de tres experiencias de su autora: una en su etapa escolar, otra en una observación de clase dentro de sus prácticas pedagógicas durante su formación como futura educadora matemática (FEM), y la última, cuando curso uno de los espacios académicos de formación en el desarrollo de su carrera universitaria.

Cuando estaba en la secundaria, ella estudió las expresiones algebraicas, que en aquel entonces no comprendió. Recuerda que en una clase su profesor de matemáticas presentó la definición de ese concepto, tomada del Álgebra de Baldor, y, conforme avanzaron las sesiones, propuso a los estudiantes una variedad de ejercicios para que los resolvieran. Por el uso de expresiones algebraicas y el enfoque simbólico, repetitivo y descontextualizado de las tareas propuestas por el profesor, la FEM no distinguía entre funciones y ecuaciones ni tampoco entre variable e incógnita. En una ocasión, recuerda, su profesor propuso una serie de ejercicios sobre representaciones simbólicas de funciones, con la consigna sencilla de “desarrollar”, en la solución de estos ella identificó las x en todos los ejercicios, como usualmente lo hacía, y procedió a “despejarlas”. Con desconcierto y sin recibir retroalimentación al respecto, su profesor le calificó con una nota baja.

Después, durante su formación en la Licenciatura en Matemáticas, en una de sus prácticas pedagógicas, evidenció que aún se enseñaba de la misma forma memorística que a ella le enseñaron. Esto quedó claro cuando observó a un profesor de matemáticas presentar a sus estudiantes una definición de expresión algebraica tomada de un libro de texto, luego les mostró ejemplos y, finalmente, les propuso hacer ejercicios siguiendo esos ejemplos.

A diferencia de lo que vivió en su etapa escolar y la situación que observó en una de sus prácticas educativas, en la asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra", descubrió una forma diferente de estudiar el álgebra. Conoció los procesos de generalización y de simbolización y sugerencias para desarrollarlos, propuestos por el Grupo Azarquiel[1] (1993). Una de las intenciones de estos procesos es que los estudiantes encuentren significado y se sientan cercanos a los símbolos matemáticos. Además, gracias a esa asignatura, la autora comprendió que, al diseñar cualquier tarea para desarrollar cierto proceso matemático, es fundamental considerar los obstáculos, las dificultades, y los errores que los estudiantes pueden enfrentar durante su aprendizaje.

Al investigar sobre el por qué la enseñanza del álgebra se puede presentar de forma tradicional, se descubrió que el libro de texto suele ser el principal recurso de referencia para que los profesores diseñen sus clases de matemáticas. En las experiencias de la autora, se evidenció que algunos docentes extraían los contenidos directamente de esos materiales para planificar sus lecciones. Además, según el análisis del Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas [TIMMS, siglas en inglés] de IEA (1996, p. 156), el libro de texto es la principal fuente escrita de los profesores de matemáticas para decidir cómo presentar un contenido. Por tanto, los libros de texto influyen de cierta manera en cómo los profesores enseñan matemáticas.

[1] El Grupo Azarquiel es un grupo de educadores que, en 1993, publicó *Ideas y Actividades para Enseñar Algebra,* un libro que reflexiona sobre los principales problemas didácticos al enseñar álgebra, especialmente en el contexto de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Este trabajo no busca ser una investigación formal ni una construcción teórica exhaustiva, sino un análisis práctico que parte de la experiencia docente para mejorar las prácticas educativas.

El estudio de las expresiones algebraicas puede carecer de significado porque el docente consulta libros con un enfoque rutinario y tradicional. Este enfoque lo encuentran Aguirre y Cerati (2020) en algunos libros escolares de álgebra, cuando analizaron textos y descubrieron que algunos proponen tareas que se enfocan en la aplicación de fórmulas y que presentan ejercicios que promueven la repetición mecánica, en vez de promover que los estudiantes comprendan la utilidad y la importancia de los símbolos.

En varios de los libros analizados, las actividades se abordan exclusivamente desde el lenguaje simbólico. Por ejemplo, las ecuaciones se presentan de forma descontextualizada, abstracta y como operaciones entre valores conocidos y valores desconocidos. Esto fomenta la memorización de reglas de "despeje" y lleva a los estudiantes a resolverlas mecánicamente, en lugar de lograr un significado de las ecuaciones, como herramienta para modelizar, generalizar y resolver problemas.

1.2. Pregunta de investigación

Por la influencia que tienen los libros de texto escolares en el modo en que los profesores enseñan álgebra, considerando los procesos de generalización y simbolización y atendiendo a la importancia de considerar los obstáculos, las dificultades, y los errores en el proceso de aprendizaje, surge la siguiente interrogante para ser resuelta con esta investigación:

¿Qué características debe tener un material didáctico y las tareas que este propone para que se enfoquen en el desarrollo de los procesos de generalización y simbolización durante la construcción de expresiones algebraicas?

1.3. Objetivos

En este apartado, se exponen los objetivos que serán tratados a lo largo de este trabajo de grado y constituyen el camino en cómo se presenta su contenido.

1.3.1. Objetivo general

Diseñar un material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las expresiones algebraicas, que promueva el desarrollo de procesos como la generalización y la simbolización y que atienda algunos errores, dificultades y obstáculos comunes en el proceso de aprendizaje.

1.3.2. Objetivos específicos

- Construir los marcos curriculares, matemático y didáctico sobre las expresiones algebraicas, para fundamentar el material que se elaborará.
- Indagar sobre el diseño de tareas y materiales didácticos impresos mediante una revisión bibliográfica.
- Diseñar el conjunto de tareas que harán parte del material didáctico impreso a partir de la información recolectada en los marcos de referencia.
- Recopilar de forma escrita las características del material didáctico diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de las expresiones algebraicas.

1.4. Antecedentes

Varios autores han estudiado la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en particular de las expresiones algebraicas. Ellos han desarrollado trabajos orientados a distanciar la enseñanza del álgebra de enfoques basados en la mecanización y la memorización, destacando la importancia de incorporar procesos como la generalización y la simbolización para promover un aprendizaje significativo. De igual manera, algunos estudios se enfocan en identificar algunos errores que los estudiantes enfrentan durante el aprendizaje del álgebra, explorando las posibles causas que originan dichos errores. A continuación, se presentan algunas de las investigaciones ya realizadas.

En el documento "*Proceso de simbolización algebraica: Reporte de una experiencia de aula en grado octavo"* Giraldo (2020, p. 1) realiza una investigación en un curso de grado octavo en Bogotá, con el objetivo de "establecer cómo los estudiantes transitan por los niveles de comprensión propuestos por la corriente de la Educación Matemática Realista en el desarrollo del proceso de simbolización algebraica a partir de situaciones reales" (p. 16), a raíz de los resultados obtenidos en una prueba diagnóstica. Para ello, la investigadora diseña e implementa seis tareas basadas en los principios de la Educación Matemática Realista, abarcando contextos como el cálculo de la tasa metabólica, secuencias de figuras, consumo de energía eléctrica, relaciones de edades, dobleces con una tira de papel y la organización de mesas. Estas tareas buscan facilitar la simbolización algebraica a partir de situaciones cotidianas, permitiendo observar cómo los estudiantes progresan en su comprensión de la simbolización.

Luego, Giraldo (2020) analiza las respuestas de los estudiantes y evidencia que, aunque están en el mismo grado octavo, los estudiantes están en diferentes niveles en la simbolización algebraica. La gran mayoría de los estudiantes aplicaron operaciones básicas y conocimientos previos, como en la tarea de cálculo de la tasa metabólica. Otros estudiantes utilizaron tablas y gráficos para describir relaciones, como en la tarea de dobleces con tiras de papel. Una reducida parte de los estudiantes usaron literales para variables y construyeron expresiones matemáticas. En la tarea "Dobleces con una tira de papel", un estudiante utilizó letras y paréntesis para representar la relación entre dobleces y marcas.

Con esta investigación, Giraldo (2020) recomienda proponer tareas que contengan patrones visuales y usen materiales concretos ya que estos generaron en sus estudiantes mayor interés y les permitieron acercarse con facilidad a la simbolización algebraica, a diferencia de las tareas de lectura, pues estas se les dificultó. También recomienda que se utilicen enunciados de situaciones reales cercanos a los estudiantes, como un camino para darle un significado y aplicación a las matemáticas, tal como lo plantea la Educación Matemática Realista.

Por su lado, Forigua y Velandia (2015), en su investigación titulada “*Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades sobre generalización de patrones: Reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13-*

15 años)” (p. 1). Llevaron a cabo un proyecto con el objetivo de describir y analizar la compresión que tienen algunos estudiantes de grado octavo sobre la letra como número generalizado, a través de tareas de generalización de patrones. El estudio, con un enfoque cualitativo descriptivo e interpretativo, explora cómo los estudiantes comprenden y emplean la letra en este contexto. Los autores argumentan que la enseñanza del álgebra puede integrarse en la educación a través de tareas que permitan a los estudiantes observar, verbalizar y registrar sus generalizaciones de manera simbólica.

Al finalizar el estudio, señalan que los estudiantes de octavo aún no han consolidado el uso de la letra como número generalizado. Destacan la necesidad de facilitar un tránsito gradual entre los distintos lenguajes matemáticos (gráfico, natural, aritmético y algebraico) para desarrollar una comprensión significativa del álgebra.

Subrayan la importancia de que las tareas permitan representar relaciones mediante gráficos, tablas, ecuaciones y descripciones verbales, ya que estas herramientas estimulan la capacidad de ver lo general en lo particular, un aspecto importante para el pensamiento algebraico.

Siguiendo por esta línea, Popayán (2016) mediante su investigación “*Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico”* (p.1), expresa su preocupación por las dificultades que tienen los estudiantes al plantear y resolver problemas, especialmente en lo que refiere a la representación y comunicación matemática mediante lenguaje algebraico. La habilidad para traducir situaciones cotidianas en expresiones algebraicas es crucial tanto para el desarrollo matemático como para la vida diaria.

Esta preocupación surge de los bajos resultados en las pruebas Saber del grado noveno de la Institución Educativa Isaías Gamboa, particularmente en el componente variacional. Para abordar estas dificultades, el autor propone una intervención basada en la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (1997), que busca potenciar el aprendizaje a través de actividades estructuradas. Esta teoría promueve la construcción activa de conocimientos por parte de los estudiantes y fomenta un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Al finalizar el estudio, Popayán (2016) observa un impacto positivo en los estudiantes, quienes experimentan un crecimiento en su capacidad de resolver problemas matemáticos. El estudio muestra que, tras la implementación de las situaciones didácticas, los estudiantes del grupo experimental mejoraron significativamente, tanto en la comprensión del lenguaje algebraico como en la capacidad de comunicar matemáticamente sus ideas. El proceso de aprendizaje se organiza en fases: acción individual, formulación cooperativa y validación de resultados, lo que fomenta un clima de aprendizaje colaborativo y autónomo.

2. Marcos de referencia

Este capítulo presenta las bases teóricas para la construcción del material didáctico. En primer lugar, se revisan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006), para atender a sus planteamientos sobre la enseñanza y aprendizaje de las expresiones algebraicas, y para conocer sugerencias de cómo lograrlo. En segundo lugar, y a partir de lo encontrado en los documentos curriculares, se construye un marco matemático, que precisa definiciones y teoremas alrededor del estudio de las expresiones algebraicas. En seguida se presenta el marco relacionado con los obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, se explica cada uno de estos tres conceptos y el modo en que se relacionan, así mismo, se especifica cuáles de ellos se manifiestan en el caso particular del aprendizaje de las expresiones algebraicas. En cuarto lugar, se incorporan aspectos de las propuestas del Grupo Azarquiel (1993) y de Mason et al. (2014) sobre la generalización y la simbolización algebraica en el ámbito escolar. Por último, se precisa cuál será el material didáctico que se construirá y que elementos debería contener.

2.1. Marco Curricular

Los LCM y los EBCM son referentes comunes para el diseño de currículos de Matemáticas en Colombia y toman una postura didáctica y pedagógica sobre qué enseñar en matemáticas, cuándo, por qué y para qué enseñarlo. En consecuencia y coherencia con lo propuesto para la educación colombiana, se han buscado orientaciones en esos documentos sobre el aprendizaje y enseñanza de las expresiones algebraicas.

Los LCM direccionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular de las expresiones algebraicas, a pensar matemáticamente, es decir, que los estudiantes, con las orientaciones y propuestas didácticas del profesor, desarrollen los pensamientos y procesos generales matemáticos, a saber: los pensamientos numérico, variacional, aleatorio, espacial y métrico, y los procesos de argumentación, modelación, planteamiento y resolución de problemas, comunicación y elaboración, ejercitación y comparación de procedimientos. De modo que, con ese pensamiento matemático, los estudiantes exploren la realidad, la representen, la expliquen y la predigan, asimismo, puedan tomar decisiones, enfrentarse a situaciones nuevas, exponer opiniones y ser receptivo a las de los demás (MEN, 1998).

En esa dirección, es importante lograr mostrar a los estudiantes que las matemáticas no solo viven en la clase, sino que van mucho más allá, ya que estas brindan herramientas para entender y actuar en la realidad.

Específicamente, los LCM relacionan armónicamente los contenidos del álgebra con el pensamiento variacional, ya que están estrechamente vinculados con el estudio del cambio. Algunos de los contenidos del álgebra que están asociados con el estudio del cambio son las funciones y sus representaciones, la variable y sus significados, y la igualdad y las ecuaciones.

El Pensamiento variacional refiere a la capacidad de comprender y analizar de qué manera cambian las cantidades y las magnitudes en diferentes contextos. Este pensamiento es de gran potencial para estudiar los diferentes fenómenos cambiantes de este mundo. Justamente la cuantificación del cambio es lo que se denomina variación, e involucra varios conceptos matemáticos centrales que están interconectados. El MEN (1998) identifica algunos de esos conceptos:

- Continuo numérico y procesos infinitos: Incluye conceptos de números reales, tendencias y aproximaciones sucesivas;
- Función como dependencia y modelos de función: Cómo una cantidad depende de otra y los diferentes modelos matemáticos para representar esta dependencia;
- Magnitudes: como la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, etc;
- Álgebra simbólica: Uso de símbolos y variables para representar relaciones matemáticas, liberado de significaciones geométricas.

- Modelos matemáticos de tipos de variación: Incluye variación aditiva, multiplicativa, y métodos para medir cambios absolutos y relativos. La proporcionalidad aquí juega un papel importante.

En concreto, dentro del algebra simbólica, están las expresiones algebraicas, como sistema de representación. Este sistema junto a otros, como los enunciados verbales, tablas de datos, las gráficas cartesianas, representaciones pictóricas e icónicas, y las expresiones analíticas, son formas de interpretar y comunicar situaciones de variación y también de resolver y plantear problemas.

En la misma dirección que los LCM, los EBCM amplían sus planteamientos y establecen una organización en términos de "situaciones deseadas" o "estándares" en cuanto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en cada una de las áreas, particularmente en matemáticas, a lo largo de su paso por la educación escolar colombiana (MEN, 2006, p. 11). Los EBCM establecen estándares por grupos de grados: 1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, y 10 a 11.

En relación con las expresiones algebraicas, los EBCM mencionan que "el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos" (MEN, 2006, p. 68).

Se han rastreado algunos de los estándares que abordan el trabajo con expresiones algebraicas Tabla 1.

Tabla 1. Algunos estándares relativos a las expresiones algebraicas

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y simbólicos	
Sexto a séptimo	• Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones

Octavo a noveno	• Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Nota. Datos tomados de MEN (2006, pp. 85-87). Diseño de tabla propio.

Teniendo en cuenta lo anterior, desde la perspectiva curricular, se evidencia que las expresiones algebraicas tienen un lugar importante en la escuela, y su enseñanza va más allá de la manipulación de símbolos. Como menciona el MEN (2006), el álgebra es una herramienta poderosa de representación. Por lo tanto, las propuestas de enseñanza del álgebra deben enfocarse en comprender y resaltar la utilidad y las ventajas de los símbolos algebraicos. En este sentido, el material didáctico que se desarrollará incorporará estas recomendaciones, planteando situaciones en las que se evidencie la utilidad práctica de las expresiones algebraicas en la comprensión y resolución de problemas.

2.2. Marco matemático

En los documentos curriculares colombianos se destacan algunos conceptos para el desarrollo del pensamiento variacional, tales como "expresión algebraica" y las propiedades de los números reales. En este apartado, se define que es una expresión, desde el formalismo matemático, y cuál es la estructura de los números reales. Adicional a estos conceptos, se define sucesión, debido a que su uso se tiene en cuenta en la propuesta de material que se diseña.

En el documento *Lógica y Teoría de Conjuntos* (Ivorra, s.f.), se define “expresión”, para lo cual se precisa qué es un lenguaje formal y qué es un modelo de un lenguaje formal.

En pocas palabras, un lenguaje formal es un conjunto de signos categorizados que sirven para denotar constantes, variables, funciones, relaciones, tablas de valores de verdad y descriptores. Gracias a los lenguajes formales se puede escribir e interpretar de manera precisa una teoría matemática, además de desarrollarla. Los significados de una teoría matemática son asignados a los signos de un lenguaje formal a través de un conjunto de criterios, llamado modelo de un lenguaje formal.

A continuación, se presentan algunas definiciones relacionadas con el lenguaje formal, tomadas y adaptadas de Ivorra (s.f.).

Definición 1. Un lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$ es una colección de signos divididos en las siguientes categorías:

Variables: son signos destinados a tener una interpretación de variables. Un lenguaje $\mathcal{L}$ debe tener infinitas variables. A cada variable se le debe asignar un número natural único, el cual denominaremos su índice. De manera estándar se simbolizarán las variables así x_i.

Constantes: son signos destinados a nombrar objetos. Un lenguaje $\mathcal{L}$ puede incluir una cantidad ilimitada de constantes, desde ninguna hasta infinitas. Cada constante debe tener asociado un índice natural. De manera estándar se simbolizarán las variables así c_i.

Relatores: son signos destinados a nombrar relaciones. Cada relator debe tener asociado un número natural no nulo, que se llama rango. los relatores de rango n también se conoce como relatores n-ádicos. A Cada relator n-ádico se le debe asignar un índice único. Comúnmente se simbolizará los relatores así R_i^n. Todo lenguaje formal debe tener al menos el relator diádico R_0^2, al que llamaremos igualador o $=$.

Funtores: son signos destinados a nombrar funciones. Cada funtor debe tener asociado un número natural no nulo, que se llama rango. Los funtores de rango también se conocen como funtores n-ádicos. Cada funtor n-ádico debe llevar asociado un índice distinto. De manera estándar se simbolizará los relatores así f_i^n.

Conectores lógicos: son signos diseñados para formar nuevas afirmaciones a partir de otras. Su significado no corresponde a un objeto, una relación o una función, sino a una tabla de verdad. Se pude comenzar solo estableciendo el conector ¬ y → y a partir de estos y otros signos definir ∧, ∨ y ↔.

Cuantificadores: en cada lenguaje formal habrá dos signos llamados cuantificadores, uno universal que se lee “para todo”, y otro existencial ⋁, que se lee “existe”. Un lenguaje formal puede empezar empleando solo el cuantificador universal, y con su ayuda, junto a otros signos, se puede establecer la definición del cuantificador existencial

Descriptor: el descriptor | será un signo que utilizaremos para identificar un objeto basándonos en una propiedad que lo distinga. Una expresión de la forma $x|P(x)$ se lee “el único x que cumple la propiedad $P(x)$” de este tipo se llaman descripciones. En el caso que x no tenga un único valor o no tenga ninguno, se dirá que la descripción es impropia en el modelo.

Con un lenguaje formal se pueden construir cadenas de signos, algunas tendrán sentido y otras no. Las que tienen sentido se llaman expresiones y con ellas se pueden nombrar objetos o afirmar algo. A las que nombran se les denominan términos y a las que afirman, fórmulas.

Formalmente,

Definición 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal. Una cadena de signos de $\mathcal{L}$ es una sucesión finita de signos de $\mathcal{L}$ repetidos o no y en un cierto orden.

Definición 3. Una cadena de signos de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es una expresión si es un término o una fórmula de $\mathcal{L}$. Para probarse si una cadena de signos es una expresión debe construirse a partir de las siguientes reglas (t_i representa a un término; $\alpha, \beta, \dots$ representan fórmulas).

a) x_i es un término
b) c_i es un termino

c) $R_i^n t_1 \dots t_n$ [relator de rango n e índice i] es una fórmula
d) $f_i^n t_1 \dots t_n$ [funtor de rango n e índice i] es un término
e) $\neg\alpha$ es una fórmula
f) $\rightarrow \alpha\ \beta$ es una fórmula
g) $\wedge x_i\ \alpha$ es una fórmula
h) $|x_i\alpha$ es un término (si es que $\mathcal{L}$ tiene descriptor)" (p.27).

La forma en cómo se escribieron las anteriores reglas simplifican la gramática, porque evita escribir paréntesis, pero es extraña para muchos lectores. Por eso existen unos convenios de notación que establecen formas diferentes, pero conocidas, para referirse a expresiones de un lenguaje formal. A continuación, se presentan los convenios descritos por Ivorra (s.f.). " ≡ " denota que dos cadenas son idénticas

a) "$\rightarrow \alpha\ \beta \equiv (\alpha\ \rightarrow \beta)$
b) $|x_i\alpha \equiv (x_i|\alpha)$
c) $= t_1 t_2 \equiv (t_1 = t_2)$
d) $\neg(t_1 = t_2) \equiv (t_1 \neq t_2)$
e) $(\neg\alpha\ \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \vee \beta)$
f) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv (\alpha \wedge \beta)$
g) $\neg\wedge x_i \neg\alpha \equiv \vee x_i\alpha$

Como anotación, en la Definición 3 se menciona que toda variable y toda constante es un término y que, para obtener una fórmula, se necesita un relator.

Un resumen lo presentado anteriormente es

Ilustración 1: Resumen

$$signos\ \rightarrow cadena\ de\ signos \begin{cases} expresiones \begin{cases} términos \\ fórmulas \end{cases} \\ no\ expresiones \end{cases}$$

Un lenguaje formal es útil para escribir una teoría matemática porque precisa en el significado que se necesita, además de que, al definirse unas reglas de inferencia para obtener cadenas de signos de la cadena de signos existentes, se logra desarrollar y obtener nuevas ideas en dicha teoría. Para asignar significado de una teoría matemática a los signos de un lenguaje formal, es necesario hablar de modelo de lenguaje formal.

Definición 4. Un modelo M de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ viene determinado por:

1. Una colección de objetos U llamada universo de M. La colección U ha de tener al menos un objeto.
2. Un criterio que asocie a cada constante c de $\mathcal{L}$ un objeto $M(c)$ de U.
3. Un criterio que asocie a cada relator n-ádico R_i^n de $\mathcal{L}$ una relación n-ádica $M(R_i^n)$ en U.
4. Un criterio que asocie a cada funtor n-ádico f_i^n de $\mathcal{L}$ una función n-ádica $M(f_i^n)$ en U
5. Un elemento d de U al que llamaremos *descripción impropia* de M

Mediante la definición de un lenguaje formal, unas reglas de inferencia (que no se incluyen aquí) y un modelo de ese lenguaje, se establece un sistema formal y un modelo que abarcan los significados asociados a la estructura de los números reales. Se hace referencia a esta estructura porque sus propiedades serán las que los estudiantes representen y utilicen a través de expresiones

El lenguaje formal $\mathcal{L}$ del cual se parte es el siguiente

- Variables: a, $b, c,$ ...
- Constantes: 0 y 1
- Funtores: dos funtores diádicos $+$ y $\cdot$ y un funtor monádico $-$
- Relatores: relatores diádicos $\leq$, $\in$ y =
- Cuantificadores: $\forall$

Teniendo como referencia el libro de Dueñas y Rubio (2015), se muestra como estos signos permiten expresar afirmaciones de la teoría de la estructura de los números reales.

Se comienza con un conjunto $\mathbb{R}$, en el cual se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ y la relación de orden $\leq$. Si $\mathbb{R}$ con las dos operaciones y la relación mencionadas cumplen los axiomas de cuerpo, los axiomas de orden y el axioma de completez, entonces se dice que la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es el cuerpo ordenado y completo de los números reales.

Axiomas de cuerpo:

Para todo $a, b\ y\ c \in \mathbb{R}$, se tiene

1. Las operaciones están bien definidas en $\mathbb{R}$: $a + b$ y $a \cdot b$ son elementos de $\mathbb{R}$
2. Conmutatividad de $+$ y $\cdot$: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$
3. Asociatividad de $+$ y $\cdot$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. Distributividad de $\cdot$ respecto a $+$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
5. Existencia de módulos para $+$ y $\cdot$: Existen 0 y 1 en R, $0 \neq 1$, tales que $a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$.
6. Existencia del elemento opuesto: Para cada número a, existe un número y en $\mathbb{R}$ tal que.
7. Existencia del Elemento Inverso Multiplicativo: Para cada número $a \neq 0$ existe un número y en $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot y = 1$.

Axiomas de orden:

Sea P (conjunto de los positivos) un subconjunto de $\mathbb{R}$.

8. Si $a\ y\ b \in P$, entonces $a + b$ y ab también están en P.
9. Si $a \neq 0$, entonces se tiene una y solo una de las siguientes posibilidades: $a \in P$ o $-a \in P$.
10. $0 \notin P$

Axioma de completez o de la mínima cota superior

Definición 4. Sea A un subconjunto de los reales. Se dice que $b \in \mathbb{R}$ es una cota superior (o inferior) de A si $b \geq x$ ($b \leq x$), parta todo x que pertenece a A.

Cuando A posee cotas superiores (inferiores) se dice que A es acotado superiormente (inferiormente).

Definición 5. Sea A un subconjunto de los números reales. Decimos que el número real b es el supremo (ínfimo) de A si:

b es la menor de las cotas superiores de A. (b es la mayor de las cotas inferiores de A)

Simbólicamente, se escribe: $b = SupA$ ($b = InfA$).

Decir que “b es la menor de las cotas superiores de A” significa que b es cota superior de A y, si y es cota superior de A, entonces $b \leq y$.

Definición: Sea A un conjunto de números reales. Decimos que número real b es máximo (mínimo) de A si $b = SupA\ y\ b \in A$ ($b = InfA\ y\ b \in A$).

11. Si A es un subconjunto de números reales, no vacío y A está acotado superiormente, entonces A tiene mínima cota superior: $SupA$.

Algunos teoremas que se demuestran con los anteriores axiomas y algunas definiciones para precisar algunos de sus elementos son:

- Si a, b, c están en R y $a + b = a + c$, entonces $b = c$
- Dados a, b en R, existe un único x en R, tal que $a + x = b$

Definición: Se notará $b - a$ al número x solución de la ecuación $a + x = b$. Si $b = 0$, entonces $a + x = 0$ y así $x = 0 - a = -a$, el cual se llamará el inverso aditivo de a, o el opuesto de a.

- Para todo a, b en $\mathbb{R}$, $a - b = a + (-b)$
- Para todo a, b en $\mathbb{R}$, $-(-a) = a$
- Para todo a, b en $\mathbb{R}$, $-(-a) = a$
- Para todo a en $\mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
- Para todo a, b en $\mathbb{R}$, $-(a \cdot b) = -a \cdot b$
- Para todo a, b, c en $\mathbb{R}$, $(a + b) \cdot c = ac + bc$
- Para todo a, b, c en $\mathbb{R}$, $a \cdot (b - c) = ac - bc$
- Si $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$
- Dados a, b en R, $a \neq 0,$ existe un único x en $\mathbb{R}$, tal que $a \cdot x = b$

Definición 6. Se notará $\frac{b}{a}$ al número x solución de la ecuación $a \cdot x = b$, $a \neq 0$. Si $b = 1$, entonces $a \cdot x = 1$ y así $x = \frac{1}{a}$, el cual se notará por a^{-1} y se llamará el inverso multiplicativo de a, o el recíproco de a.

- Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$.
- Si $a \neq 0$, entonces a^{-1} tiene inverso y es a.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
- Dados a, b en R, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1}. b^{-1}$.
- Si $a, b, c, d \in R$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$.
- Si $a, b, c, d \in R$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
- $a + a = 2a$

Definición 7. a^n, significa que $a^{n+1} = a^n \cdot a$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Por otro lado, como se indicó en la introducción de este apartado, se incluye la definición de sucesión, debido a que incluye en la propuesta de material didáctico [ver capítulo 4].

Definición 8. Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales y codominio es un conjunto X, que puede ser el conjunto de los números naturales, los racionales o los reales.

Existen diferentes notaciones para indicar una sucesión, por ejemplo, $\{a_n\}$, donde a_n se refiere al término general de la posición n-enésima.

Para finalizar este apartado, se considera que conocer los conceptos u objetos matemáticos desde lo formal es fundamental para diseñar una propuesta de enseñanza. Este conocimiento permite al docente tener seguridad y dominio sobre el tema, lo que facilita abordarlo de manera clara y significativa. Además, el dominio matemático le permite anticipar dificultades, ofrecer diversos enfoques para resolver problemas, y estar preparado para responder a preguntas inesperadas o aclarar posibles confusiones de los estudiantes. Por estas razones, la construcción de este marco teórico es importante para el desarrollo de esta monografía.

2.3. Historia de la simbolización algebraica

De acuerdo con Martín (2017) la evolución de los símbolos algebraicos se puede clasificar en tres periodos (Retórico, Sincopado y Simbólico). El periodo retórico se caracteriza por la construcción de expresiones haciendo uso de palabras. En el periodo sincopado se empieza a identificar abreviaturas y en el periodo simbólico, que abarca desde el siglo XVI hasta hoy, se usan diferentes símbolos y operaciones.

En el Papiro Rhind se puede identificar símbolos representados mediante palabras. Por ejemplo, utilizaban el término montón para referirse a la incógnita de una ecuación. Adicional, para resolver estas ecuaciones utilizaba un método llamado la falsa posición en el cual se parte de un valor inicial y este se ajusta para poder encontrar el valor real. Por su lado, Al-Khwârizmî introdujo la palabra "shay" (que significa cosa) para representar cantidades desconocidas. También, llamó raíces o tesoros a los números que al multiplicarse por sí mismo producen otros números y llamó números simples o Dirhams a los números que no se multiplican por sí mismos para obtener otro número.

Diofanto es uno de los primeros matemáticos en utilizar algunas abreviaturas. Martín (2017) presenta algunos de esos símbolos como **ίσς** y **ίσ** que representaban la palabra igual También, hace uso de símbolos para representar una incógnita, por ejemplo, Δ^{γ} representaba lo que hoy se conoce como x^2 . Por su lado, Carneiro de Andrade (2000) menciona que Al – Qalasadi fue un gran exponente de la etapa sincopado y para representar el concepto igual utiliza la última letra de la palabra "adala". También a los términos primera potencia y el cuadrado les designaban la primera letra de las palabras "Say" y "Mal” respectivamente.

En una etapa posterior, Vietá, exponente del periodo simbólico, introduce una notación considerablemente más adecuada. Según Martin (2017), comenzó a distinguir entre las incógnitas, representadas por vocales, y los coeficientes indeterminados, denotados por consonantes. Por ejemplo, aaa representaba a^3. Además, según Dávila (2003), Descartes desarrolló un sistema de notación para representar cantidades conocidas e incógnitas en sus trabajos matemáticos. Utilizó las primeras letras del alfabeto para las cantidades conocidas y las últimas letras para las incógnitas.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede evidenciar que la noción de expresión algebraica no es fácil de comprender. Además, desde una perspectiva histórica, se observa que la simbología que utilizamos actualmente ha pasado por el trabajo de diversos matemáticos y ha tardado muchos años en llegar a la forma que conocemos hoy. La enseñanza de estas expresiones no debería ser de manera apresurada. Además, es fundamental considerar las transformaciones que han tenido, desde enunciados verbales hasta la adopción de una simbología formal.

2.4. Marco didáctico

El estudio de las matemáticas escolares tiene sus obstáculos, motivos que impiden que se pueda avanzar en el aprendizaje y también tiene sus dificultades, motivos que hacen que aprender matemáticas no sea tan fácil.

La existencia de dificultades u obstáculos en los estudiantes se puede identificar cuando comenten errores. Los errores son los síntomas de una dificultad o un obstáculo. Socas (2000) afirma que tanto los obstáculos como las dificultades están inherentemente ligados en el proceso de enseñanza y el aprendizaje del álgebra y estos a su vez generan que los estudiantes comentan errores. Recordemos que la autora de esta monografía en su etapa escolar cometió el error de despejar la variable x de varias funciones, cuando lo que debía realizar era un procedimiento asociado al estudio de las funciones, no relacionado al de las ecuaciones. Ella recuerda las representaciones de las funciones que despejó estaban precedidas de solo una frase “Desarrollar”, y pues ella las desarrolló con los conocimientos que tenía.

Conocer las dificultades, obstáculos y errores permite a los profesores proponer caminos que faciliten el aprendizaje de las matemáticas, en particular del álgebra, y mostrar el provecho de estudiar esta disciplina. A continuación, se aborda con mayor detenimiento estos tres elementos. Después, se identifican dificultades, obstáculos y errores en la enseñanza y aprendizaje de expresiones algebraicas [objeto de estudio de esta monografía] y se propone un camino de aprendizaje, que es la ruta de la organización del material didáctico.

2.4.1. Obstáculos

Se entiende obstáculo, en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, como un conocimiento previo que funciona en cierto escenario para dar respuestas y procedimientos correctos, pero fuera de este provoca resultados incorrectos (Socas, 2000, p. 137). Un obstáculo aparece cuando se aprende un contenido matemático que se relaciona con un conocimiento previo.

Brousseau (1976) distingue varios tipos de obstáculos según su origen.

El primer tipo son los obstáculos de origen ontogénico o psicogénico. Estos son aquellos que ocurren porque el sujeto tiene limitaciones en su desarrollo, como padecimientos neurológicos. De este modo, los estudiantes con obstáculos ontogénicos pueden tener impedimentos para comprender conceptos matemáticos fundamentales debido a limitaciones en su capacidad para procesar información o desarrollar conexiones lógicas. También pueden requerir más tiempo o métodos de enseñanza alternativos para asimilar los conceptos matemáticos.

El segundo tipo de obstáculos son de origen didáctico. Son causados principalmente por decisiones específicas que se toman al diseñar el plan de estudios o el enfoque de enseñanza en un sistema educativo. Este obstáculo es un problema didáctico y sociocultural, lo que sugiere que no solo se trata de cómo se enseñan los objetos sino también de algunos factores sociales y culturales que pueden influir en el aprendizaje.

El tercer tipo de obstáculos son de origen epistemológico. Estos son aquellos que hacen parte del conocimiento objetivo, no pueden evitarse porque son necesarios para entender el concepto correctamente. Estos obstáculos están presentes en la historia de los objetos que se estudian.

Por otro lado, Tall como se citó en Palarea (1998) presenta dos tipos de obstáculos diferentes a los que plantea Brousseau.

Por un lado, propone los obstáculos basados en la secuencia de un tema. Esto significa que algunos conceptos en matemáticas tienen diferentes niveles de complejidad. Es importante comprenderlos para pensar en un orden adecuado para su abordamiento y evitar así barreras en el aprendizaje del concepto.

Por el otro lado, plantea obstáculos basados sobre casos simples. Esto se refiere a limitar al estudiante a tareas simples durante mucho tiempo antes de pasar a problemas más difíciles. Aunque los casos simples pueden ser más fáciles de entender al principio, si se queda en ellos por mucho tiempo, los estudiantes no sabrán cómo enfrentarse a problemas más complicados.

2.4.2. Dificultades.

Teniendo en cuenta los planteamientos de Socas (2000), se entiende a las dificultades, en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, como inconvenientes que retrasan la asimilación de un conocimiento o el desarrollo de diferentes procesos. Las dificultades suelen surgir cuando los estudiantes enfrentan la introducción de nuevos conceptos, ya que en este momento deben ajustar sus esquemas mentales previos, reorganizar la información y conectar el nuevo conocimiento con lo ya adquirido.

Según Socas, la mayoría de los estudiantes, si no todos, experimentan dificultades al aprender Matemáticas. Estas dificultades pueden manifestarse de diversas maneras durante el proceso de enseñanza y aprendizaje y están asociadas a: (1) La complejidad de los objetos de las Matemáticas. (2) Los procesos de pensamiento matemático. (3) Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas. (4) Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. (5) Las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

2.4.2.1. Dificultades relacionadas con la complejidad de los conceptos matemáticos.

Estas dificultades tienen su origen en el lenguaje, así como en la naturaleza técnica y abstracta de los conceptos matemáticos. En particular, una de las principales causas es la diferencia fundamental entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano, lo que puede generar confusión durante el aprendizaje. Esto ocurre, por ejemplo, con palabras que tienen un significado en la vida diaria y otro en el contexto matemático, como 'función', 'integral' o 'raíz', entre muchas otras.

Siguiendo por esta línea, mientras que el lenguaje cotidiano puede ser flexible en su interpretación, permitiendo incluso errores gramaticales u ortográficos sin perder el significado, el lenguaje matemático es estricto y preciso, lo que no permite errores al construir expresiones matemáticas porque cambiaría su significado o intención.

Por otra parte, la matemática se basa en reglas y definiciones precisas. Cada término matemático tiene una definición exacta y cada paso en un razonamiento matemático debe ser riguroso y válido. Además, muchos conceptos matemáticos no son intuitivos y pueden requerir un esfuerzo significativo para ser comprendidos.

2.4.2.2. Dificultad asociada a los procesos de pensamiento matemático.

Las matemáticas pueden resultar difíciles porque son lógicas y requieren un tipo específico de pensamiento. Una de las partes complejas es entender cómo se llega a una conclusión usando la lógica, especialmente cuando se trata de argumentos formales y deductivos.

A veces, en la enseñanza de las matemáticas se omiten las demostraciones formales, pero aun así es crucial entender el razonamiento lógico. Es importante practicar cómo seguir un argumento lógico, lo cual se puede lograr haciendo conjeturas y usando ejemplos.

Sin embargo, estas prácticas informales no deben reemplazar el desarrollo del pensamiento lógico en sí. Además, hay diferencias entre la "lógica escolar" que se enseña en las clases y la "lógica social" que usamos en la vida diaria. Esto puede confundir a los estudiantes y hacer que les resulte más difícil entender las matemáticas.

2.4.2.3. Dificultades relacionadas con los métodos de enseñanza.

Socas (2000) menciona que las dificultades en la enseñanza de Matemáticas están relacionadas con la escuela, el plan de estudios y cómo se enseña. La escuela debe organizarse de manera que ayude a los estudiantes con el aprendizaje de Matemáticas. Esto incluye tener buenos materiales de estudio, recursos y formas de enseñanza que se adapten a cada estudiante.

El plan de estudios puede hacer que sea difícil el aprendizaje de las Matemáticas si en su elaboración no se consideran cuatro aspectos importantes: las habilidades necesarias, lo que los estudiantes han aprendido antes, lo abstracto del contenido y cómo funciona lógicamente. Los métodos de enseñanza también son importantes y deben conectarse con cómo la escuela está organizada y lo que se está enseñando. Es importante que el lenguaje usado sea entendible para los estudiantes, que el orden de lo que se enseña tenga sentido, que se respeten las diferencias entre los estudiantes y que haya recursos adecuados, para entender mejor los conceptos, las instrucciones, y a su vez el aprendizaje.

2.4.2.4. Dificultades relacionadas con el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Esta dificultad está relacionada en cómo los estudiantes desarrollan su capacidad para aprender y comprender las matemáticas. Los profesores necesitan comprender en qué etapa de desarrollo cognitivo se encuentran los alumnos aclarando que no es la misma edad física para poder enseñarles de manera efectiva. Hay diferentes teorías que explican cómo se desarrolla el pensamiento matemático en los estudiantes, pero no todas estas teorías se aplican directamente en las aulas. Entender estas teorías puede ayudar a los profesores a diseñar mejor sus lecciones y materiales de enseñanza.

2.4.2.5. Dificultades relacionadas con las actitudes y emociones hacia las Matemáticas.

Muchos estudiantes, incluso aquellos que son buenos en matemáticas, a veces no se sienten cómodos con las Matemáticas. Esto puede ser debido a cómo se está enseñando Matemáticas, la actitud de los profesores y lo que los padres piensan sobre la materia. Estos factores pueden hacer que los estudiantes se sientan nerviosos y preocupados, lo que puede afectar cómo les va en Matemáticas.

Sentir ansiedad y miedo de no tener éxito son emociones comunes relacionadas con las Matemáticas. Estos sentimientos pueden surgir porque se piensa que las Matemáticas son difíciles de entender y no se ven en la vida cotidiana. Esto puede hacer que los estudiantes se sientan inseguros y abrumados. Además, las ideas negativas sobre las Matemáticas que se transmiten de generación en generación también pueden aumentar esta ansiedad y miedo, creando un ambiente donde no es fácil aprender y explorar las Matemáticas.

2.4.3. *Errores*.

Un exponente que habla sobre los errores es Popper (como se citó en Socas, 2000) quien dice que el error no se limita solo a las matemáticas y que no hay un conjunto de reglas fijas para saber siempre qué es verdad. Sin embargo, la claridad y la coherencia pueden ayudar a detectar errores en afirmaciones o argumentos. En matemáticas, es más fácil notar errores porque cada problema tiene respuestas correctas y cualquier respuesta fuera de ese rango se considera incorrecta. Por otra parte, Socas (2000) sugiere que los errores pueden ayudar al aprendizaje, no surgen por casualidad, y es importante cambiar la actitud hacia ellos, anticipándolos en lugar de culpar a los estudiantes.

El autor menciona que es importante que los docentes analicen y estudien estos errores, ya que les informan sobre cómo los estudiantes interpretan los problemas y usan los procedimientos en matemáticos para resolverlos, puede ayudar a los docentes a diseñar estrategias más efectivas para remediar estos problemas.

2.4.4. Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje del Algebra

Socas (2000) menciona que los errores pueden nacer de dificultades cuando los estudiantes están aprendiendo un tema nuevo o pueden surgir de obstáculos cuando están trabajando con un conocimiento previo. A continuación, se presentan algunos errores presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del algebra.

2.4.4.1. Algunos errores que tienen su origen en obstáculos.

Autores como Socas (2000) y Ruano et al. (2008) han identificado un error común entre algunos estudiantes al aprender Álgebra, específicamente con las expresiones algebraicas, y es la necesidad de clausurar. Algunos estudiantes, al encontrarse con una expresión algebraica, la perciben como incompleta o necesitan más operaciones por varios términos. Esto indica una inclinación por "cerrar" las expresiones, es decir, a transformarlas en un solo término. Por ejemplo, frente a la expresión $3a + 2b$, algunos estudiantes podrían intentar escribir $6ab$, lo que evidencia su resistencia a aceptar que las expresiones algebraicas puedan mantenerse abiertas.

Otro error común en álgebra es la confusión con la "concatenación", que se refiere a colocar dos símbolos uno después del otro. Esta idea puede resultar difícil para los estudiantes principiantes. En aritmética, la concatenación suele significar agregar números juntos, como en la numeración posicional (por ejemplo, 23). Sin embargo, en álgebra, la concatenación representa la multiplicación en lugar de la adición. Esto puede llevar a los estudiantes, ante expresiones como $x = 3$, a pensar erróneamente que $2x$ significa 23 en lugar de 2×3.

Por otro lado, Ruano et al. (2008) identifican que los estudiantes comenten errores cuando realizan cambios de registro, especialmente cuando tratan pasar una expresión retórica a simbólica. Por ejemplo, ante la situación "María tiene 8 libros en su estantería y decide comprar 4 veces más libros que el número que ya tenía. Después, ella regala 10 libros a la biblioteca. ¿Cuántos libros le quedan a María?" los estudiantes pueden expresarlo como $8 + 4 - 10$ en vez de $8 + (4 \times 8) - 10$.

2.4.4.2. Errores que tienen su origen en ausencia de significado.

Estos errores ocurren cuando los estudiantes enfrentan dificultades debido a la falta de comprensión del significado detrás de los conceptos matemáticos que están aprendiendo. Esta falta de sentido puede manifestarse en diferentes etapas de desarrollo como la semiótica, estructural y autónoma.

Semiótico: En esta etapa, los estudiantes están aprendiendo los signos y símbolos matemáticos básicos y cómo se relacionan entre sí. Los errores en esta etapa pueden surgir debido a una comprensión limitada de cómo interpretar correctamente estos símbolos. Por ejemplo, los estudiantes pueden interpretar incorrectamente el símbolo de exponente y pensar que $5^2 = 5x2$.

Estructural: Aquí los estudiantes empiezan a entender cómo los diferentes elementos matemáticos se organizan y se relacionan entre sí para formar estructuras más complejas. Los errores en esta etapa pueden deberse a dificultades para comprender cómo estas estructuras interactúan y se aplican en situaciones matemáticas variadas. Por ejemplo, los estudiantes pueden no identificar u operar los términos semejantes en una ecuación.

Autónomo: En la etapa autónoma, los estudiantes pueden aplicar flexiblemente los conceptos matemáticos en diferentes contextos. Sin embargo, los errores aún pueden surgir si no tienen una comprensión del significado detrás de las operaciones y conceptos matemáticos que utilizan. Por ejemplo, estudiante puede resolver correctamente una ecuación cuadrática como $x^2 - 4x + 4 = 0$, pero interpretar incorrectamente las soluciones, pensando que $x = 2$, es la única respuesta válida sin entender que tiene multiplicidad.

A) Errores de procedimientos:

Aquí los estudiantes cometen errores al aplicar fórmulas o reglas de manera incorrecta. A veces, usan una fórmula de una manera incorrecta simplemente porque la han aprendido de memoria sin entender su aplicación correcta en nuevos problemas. Esto muestra una falta de comprensión profunda de los operadores matemáticos y cómo aplicarlos correctamente.

B) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico:

Estos errores son exclusivamente algebraicos y no tienen equivalente en la aritmética básica. Por ejemplo, la interpretación del signo " $=$ " cambia en álgebra, ya que una ecuación como $8x - 6 = 2x + 6$ es verdadera solo cuando $x = 2$, no siempre como en las tautologías aritméticas.

2.5. Asuntos de interés didácticos para el desarrollo del material

Los siguientes apartados tienen como objetivo presentar algunos aspectos importantes para la construcción del material. En primer lugar, se abordan los procesos de generalización y simbolización, que constituyen su base didáctica. En segundo lugar, se presenta la clasificación de las letras, con el fin de aclarar el tipo de letra que se tratará en este recurso. Finalmente, se describe el tipo de material didáctico que se va a desarrollar, junto con sus principales características.

2.5.1. Proceso de generalización

Según Grupo Azarquiel (1993) y Mason et al. (2014) la generalización se refiere a la habilidad de reconocer patrones y regularidades en situaciones específicas y extenderlos a un contexto más amplio. Este proceso comienza observando casos particulares y formulando conjeturas sobre las relaciones subyacentes. A medida que los estudiantes progresan en su comprensión, aprenden a expresar estas ideas usando símbolos algebraicos y a validar sus generalizaciones mediante la prueba y la argumentación lógica.

En el ámbito educativo, la generalización es importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Les permite a los estudiantes no solo resolver problemas específicos, sino también comprender las propiedades y relaciones generales que subyacen a esos problemas. Esta comprensión profunda es fundamental para tener éxito en matemáticas avanzadas y en disciplinas que requieren razonamiento algebraico.

Para el Grupo Azarquiel (1993), un ejemplo típico de generalización en álgebra es trabajar con sucesiones numéricas. Los estudiantes pueden comenzar identificando un patrón en una sucesión específica de números, como los números pares $(2, 4, 6, 8, \dots)$. Observando varios ejemplos, pueden formular la conjetura de que la fórmula general para el enésimo número par es $2n$, donde n es un número natural. Esta fórmula representa una regla general aplicada a cualquier número entero para obtener el número par correspondiente. Esta habilidad de abstraer y generalizar es esencial en el aprendizaje del álgebra y de las matemáticas en general.

Además, el proceso de generalización en álgebra ayuda a desarrollar habilidades como el razonamiento abstracto y la capacidad de trabajar con conceptos matemáticos de manera flexible y creativa. Al fomentar la generalización, los docentes ayudan a los estudiantes a establecer una base sólida para el pensamiento matemático y a preparar el terreno para aprender conceptos más complejos y abstractos en el futuro.

Siguiendo por esta línea, para que los estudiantes identifiquen con mayor facilidad el patrón y puedan llegar a una generalidad del patrón, Mason et al. (2014) proponen 3 etapas: ver, decir y registrar. La primera etapa, "ver", se refiere a la capacidad de identificar patrones o relaciones en matemáticas. Al principio, los estudiantes pueden tener dificultades para reconocer estos patrones. Sin embargo, después de trabajar con numerosos ejemplos específicos, comienzan a detectar algo común entre ellos.

La segunda etapa, "decir", implica que los estudiantes articulen lo que han observado. En esta fase, pueden expresar con palabras lo que han descubierto sobre los patrones, ya sea hablando consigo mismos o comunicándolo a otra persona. Por último, La tercera etapa, "registrar", consiste en hacer visibles las etapas anteriores mediante símbolos y comunicación escrita, incluyendo dibujos y gráficos. Registrar lo aprendido puede resultar un desafío; por ello, Mason et al. (2014) recomiendan dedicar más tiempo a las etapas de "ver" y "decir" antes de apresurarse a utilizar símbolos matemáticos.

2.5.2. Proceso de simbolización

De acuerdo con Grupo Azarquiel (1993) el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra es esencial, ya que ayuda a los estudiantes a conectar símbolos con las ideas y objetos que representan. Para que estos símbolos sean útiles, es importante que estén claramente asociados con algo concreto. Por ejemplo, es muy útil cuando los estudiantes pueden usar símbolos para expresar leyes que han descubierto al observar gráficos o patrones numéricos.

Este proceso de simbolización puede dividirse en varios pasos que hacen que la comprensión y el uso de los símbolos algebraicos sean más fáciles. Primero, los estudiantes deben entender el concepto o la ley de una manera concreta. Luego, deben poder explicar estas ideas verbalmente. Después, deben aprender a escribir estas ideas de forma clara. A continuación, deben empezar a usar símbolos para representar estas ideas por escrito. Finalmente, deben usar los símbolos adecuados y reconocidos en álgebra para escribir y calcular de manera eficiente. Para llegar a estos pasos en el aprendizaje, Grupo Azarquiel (1993) destacan la importancia de tener discusiones verbales y usar materiales concretos. Estas estrategias ayudan a los estudiantes a ver la escritura con símbolos como una manera más clara y sencilla de escribir y calcular.

Los símbolos escritos deben introducirse como una herramienta para entender mejor las relaciones matemáticas. Es importante explicar que escribir con símbolos es una manera más clara y simple de escribir y calcular. Además, se debe tener en cuenta que uno de los desafíos más grandes es encontrar la forma simbólica correcta que sigue las normas de notación del álgebra.

Por otra parte, para aprender a usar símbolos, es útil hacer el proceso al revés. Esto significa empezar con una expresión simbólica y descomponerla para entender su significado concreto. Este enfoque puede ser tan efectivo como el método directo y ayuda a fortalecer la comprensión de la simbolización.

Finalmente, una actividad que apoya mucho el proceso de simbolización es resolver problemas. Esta práctica ha sido una de las razones históricas para la aparición de la simbolización en las matemáticas. Mostrar que es más eficiente resolver problemas usando símbolos, ya que hacerlo de otra manera puede ser más largo y complicado, fomenta el uso de símbolos como una herramienta esencial en el álgebra.

2.5.3. Los significados de las letras

En el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, los estudiantes se enfrentan al uso de letras. Sin embargo, estas no siempre tienen el mismo significado; su interpretación varía según el contexto. Küchemann (1981) clasifica las letras en seis tipos: letra evaluada, letra no utilizada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable. De estas, las cuatro últimas son las más empleadas en la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Letra evaluada: cuando se le asigna un valor numérico específico a la letra arbitrariamente. Un ejemplo común es utilizar la posición de la letra en el alfabeto para darle un valor. Por ejemplo, la letra a se asocia con el número 1, la b con él 2, la c con él 3, y así sucesivamente.

Letra no utilizada: Es cuando los estudiantes reconocen que hay una letra, pero no le atribuyen ningún significado matemático o valor. La letra está presente en la expresión, pero no juega ningún rol activo en los cálculos o razonamientos del estudiante.

Letra como objeto: Aquí la letra no se interpreta como un valor numérico. En su lugar, se le atribuye un significado relacionado con una palabra o un objeto concreto. Por ejemplo, $3m$ el estudiante podría pensar que la m representa metros y que significa 3 metros.

Letra como incógnita: En este caso, la letra representa un número desconocido pero específico. Este es uno de los usos más comunes de las letras en álgebra. Los estudiantes trabajan con la letra como si fuera un número que hay que descubrir u obtener a través de cálculos, pero siempre tiene un valor concreto.

Letra como número generalizado: Aquí, la letra puede representar cualquier número dentro de un conjunto. No es un número específico como en el caso de la incógnita, sino que se usa para generalizar propiedades de números. Por ejemplo, en una fórmula como $a + b = b + a$.

Letra como variable: En este caso, la letra representa un intervalo de valores posibles que dependen de una relación sistemática entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, en una función como $y = 2x + 3$, x es una variable que puede tomar distintos valores, y dependiendo del valor que tome, y cambiará también. Se trata de una relación entre las variables.

Teniendo en cuenta lo anterior y la influencia que tiene el libro de texto en la enseñanza, se ha decidido crear un material didáctico impreso que contenga tareas. Este material no debe seguir un enfoque memorístico y rutinario, sino que debe promover procesos como la generalización y la simbolización, además en el desarrollo de esos procesos se trabajar la letra como número generalizado. La cartilla, como forma de material didáctico impreso, se elige considerando que, según Guevara (2019), estos recursos son ampliamente utilizados por los docentes debido a su accesibilidad y bajo costo.

2.5.4. Los materiales impresos

Ladrón de Guevara (2019) define el material didáctico como un material que está presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, cuyo objetivo principal es facilitar el desarrollo de competencias educativas. El uso de estos materiales aporta beneficios, como mejorar la efectividad y el atractivo de los procesos educativos, además de proporcionar un apoyo para el docente. En este contexto, Ladrón de Guevara (2019) destaca que “Los materiales impresos son todos aquellos materiales que entregamos por escrito a los alumnos. Nos puede servir para: presentar una actividad, facilitar información básica o complementaria, y dar referencias bibliográficas” (p. 7).

Para que los materiales impresos sean considerados didácticos, deben diseñarse siguiendo principios pedagógicos, integrando elementos como introducciones, objetivos, ejercicios, evaluaciones y bibliografía. El diseño de estos materiales requiere la aplicación de técnicas alineadas con el modelo de aprendizaje elegido (ya sea conductista, cognitivo o constructivista), asegurando que el contenido promueva aprendizajes significativos. Es fundamental que los materiales se basen en conocimientos previos, se estructuren de manera coherente progresiva, y resulten motivadores y atractivos para los estudiantes. Además, deben contar con una redacción clara, un diseño gráfico adecuado, una tipografía legible y experiencias de aprendizaje bien estructuradas.

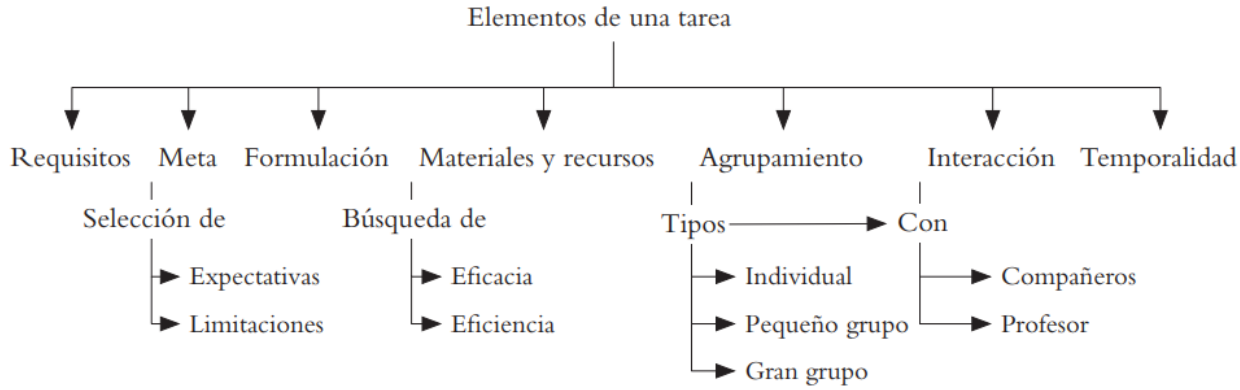
Situando la atención en la cartilla, esta no se enfocará en la evaluación, pero tendrá en cuenta algunos de los planteamientos de Ladrón de Guevara (2019), quien subraya la importancia de un enfoque pedagógico claro, una estructura coherente y progresiva, y un diseño atractivo en el material didáctico impreso. Por esta razón, se empleará la teoría de Barreiro et al., (2017a), la cual proporciona herramientas para construir enunciados o "consignas" con fines didácticos, que permiten a los estudiantes explorar y argumentar. Adicional que, en su teoría para diseñar tareas, deja claro la importancia de la claridad en los enunciados y preguntas, además de la importancia de que estas se estructuren de una manera progresiva.

2.6. Diseño de tareas

Dado que se piensa en que el material didáctico impreso contenga tareas sugeridas a los profesores para que las lleven a sus clases de álgebra, las adapten a su contexto, las enriquezca, etc., se estudia sobre el diseño de tareas matemáticas. Según Gómez y Romero (2015), las tareas contextualizadas que representen retos pueden ayudar a que los estudiantes aprendan matemáticas porque les permiten poner en juego conocimientos y destrezas, interactuar y comunicarse con otros estudiantes y con el profesor, negociar significados, llegar a acuerdos y justificar sus soluciones. A continuación, se define qué es una tarea, cuáles son sus elementos, cómo se pueden diseñar y seleccionar tareas matemáticas que presenten un desafío cognitivo a los estudiantes y que favorezcan la exploración y la argumentación en el aula.

Una tarea matemática escolar es una propuesta de aprendizaje organizada y planificada por el profesor, en la que establece un objetivo de aprendizaje para que sus estudiantes lo alcancen (Gómez y Romero, 2015). Gómez et al. (2018) proponen siete elementos para describir y caracterizar una tarea. Los siete elementos son los requisitos, la meta, la formulación, los materiales y recursos, agrupamiento, interacción y comunicación, y temporalidad. Estos elementos en su conjunto orientan a generar propuestas para alcanzar objetivos de aprendizaje y para superar errores y dificultades. A continuación, se describen en qué consisten cada uno, siguiéndose las ideas de Gómez et al.

Ilustración 2: Elementos de una tarea



Nota. Organizador gráfico de los elementos para describir una tarea matemática. Tomado de Gómez et al. (2018, p. 212).

En primer lugar, los *requisitos* de la tarea son los conocimientos y destrezas previos que les permiten a los estudiantes abordarla, son coherentes con las metas y contenido matemático de la tarea. En segundo lugar, las *metas* son las expectativas de aprendizaje que el profesor espera que los estudiantes logren, y son los errores y dificultades que el profesor busca que superen.

En tercer lugar, la *formulación* de la tarea matemática es el enunciado que el profesor entrega a los estudiantes, el cual contine un contexto, información inicial y una petición que requiere una respuesta por parte de ellos. En cuarto lugar, los recursos y materiales son cualquier medio que se pueda utilizar para aprender un concepto matemático; recursos y materiales se diferencian porque el primero no se diseña con un fine didáctico, mientras que el primero sí.

En quinto lugar, el *agrupamiento* es la manera en que trabajan los estudiantes: en grupos, en parejas o individual; cualquier elección que haga el profesor debe considerar ventajas y desventajas. En sexto lugar, la *interacción y la comunicación* en el aula hace referencia a que el docente debe reconocer que “aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema que requiere las matemáticas, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos" (Gómez et al., 2018, p. 219); en ese sentido, el profesor debe planificar y prever la interacción que se dé en el momento en que se desarrolle la tarea.

En séptimo y último lugar, la *temporalidad* de la tarea es la descripción de los momentos que se realiza cada parte de ella. El profesor puede proponer una tarea que se realice en varias etapas; para ello, debe considerar si en cada etapa cambia la forma de agrupamiento, de interacción o de materiales y recursos.

En la cartilla que se diseña, se tienen en cuenta solo los tres primeros elementos para describir una tarea [requisitos, metas y formulación]. Diseñar una tarea escolar de matemáticas con todos sus siete elementos, necesita de un conocimiento profundo de los estudiantes a los cuales se les propone. Esa es imposible de incluir aquí. La intención de la cartilla es sugerir a los profesores enunciados, con un contexto y un objetivo, que podrían usar, modificar e incluir en sus planeaciones de clase.

Para diseñar o seleccionar tareas matemáticas, se sigue los planteamientos de Barreiro et al. (2017a, 2017b). Para ellos una tarea está compuesta de una consigna, un objetivo y un contexto. Estas tres partes coinciden con los tres primeros elementos para describir una tarea, propuestos por Gómez et al. (2018).

La decisión de basar el diseño y la selección de las partes de una tarea en los planteamientos de Barreiro et al. (2017a, 2017b) se fundamenta en los parámetros que estos autores proponen. Ellos ofrecen directrices sobre el Potencial Matemático (PM) de una consigna, los tipos de consignas adecuadas, los criterios para su redacción, la coherencia entre las diferentes partes de una tarea (consigna, contexto y objetivo) y la valoración de la Actividad Matemática (AM) que dicha tarea puede promover.

La consigna es el enunciado que se da textualmente al estudiante, el objetivo es lo que el docente quiere que los estudiantes aprendan y el contexto es la descripción del trabajo previo que han realizado los estudiantes, el tipo de consignas que han realizado, la modalidad de trabajo que se propone para abordarla y una anticipación de lo que se trabajará.

Se dice que una consigna tiene PM rico cuando el enunciado posibilita tanto la exploración [admite diferentes caminos de resolución y no incluye pasos a seguir] como la argumentación sobre la validez de la resolución y de la respuesta. Por el contrario, una consiga con PM pobre no posibilita ninguno de los dos procesos. En la mitad de estas dos clasificaciones, se habla de una consigna con PM intermedio cuando un enunciado posibilita solo uno los dos procesos.

Barreiro et al. (2017a) proponen trabajar con consignas matemáticas y consignas metacognitivas matemáticas. Las primeras están vinculadas con un objeto matemático y con un quehacer matemático: trabajo con situaciones abiertas, de modelización, de argumentación, exploración, etc. Las segundas llamadas metacognitivas matemáticas apuntan a que el estudiante reflexione sobre los objetos matemáticos: sus alcances y limitaciones, cuando es conveniente usarlos, qué condiciones deben cumplirse para poder utilizarlos; reflexione sobre los tipos de problemas matemáticos: cuáles son los recursos matemáticos para su abordaje, qué tipo de respuesta es adecuada, qué estrategias pueden funcionar.

Los criterios sugeridos para redactar consignas matemáticas son:

1. Escribir el enunciado tal cual se entregará al estudiante, no es una descripción de cómo se entregaría al estudiante.
2. Si la consigna se plantea en un contexto real, plantear preguntas coherentes con ese contexto: realizar preguntas naturales que las persona se haría en esa situación.
3. Evitar dar información de existencia o unicidad.
4. Evitar pedir directamente que los estudiantes hallen formulas, resuelva ecuaciones, trazar gráficos, etc. La idea es que ellos necesariamente tengan que pasar por eso para dar una respuesta.

5. Pedir argumentos, explicaciones o justificaciones en los que los estudiantes indiquen la validez de sus afirmaciones.
6. Si una consigna plantea varias opciones de respuesta, pedir a los estudiantes explicaciones de por qué se aceptan o se descartan las opciones.

Luego de caracterizar las consignas, Barreiro et al. (2017b) hablan de la coherencia de las tareas. Ellos consideran que una tarea es coherente cuando las tres combinaciones de dos de sus partes lo son. La Figura 2 presenta las preguntas orientativas que Barreiro et al. (2017a, 2017b) recomiendan responderse para valorar la coherencia entre las partes de las tareas. Si una combinación de dos de sus partes no es coherente, entonces la tarea no es coherente.

Tabla 2. Coherencia de las tareas Matemáticas

Coherencia analizada	Preguntas orientadoras
Contexto-consigna	¿El modo de trabajo al que los estudiantes están acostumbrados y el modo de trabajo propuesto para esta consigna están en sintonía o hay mucha disparidad? Con los conocimientos previos declarados en el contexto, ¿es posible que el alumno resuelva la consigna?, el nivel de complejidad es accesible como para que puedan abordarla con lo trabajado?
Contexto-objetivo	Con los conocimientos previos declarados en el contexto, ¿es alcanzable el objetivo?, ¿es pertinente en relación con lo que el contexto indica que se ha trabajado o se pretende trabajar?
Objetivo-consigna	Si el estudiante resuelve lo que está expresado en la consigna, por cualquier camino que elija utilizar, ¿alcanza el objetivo? No debería ocurrir que, por alguna vía de resolución, el objetivo no sea alcanzado. Es decir, ¿la resolución "obliga" al alumno a alcanzar el objetivo?

Nota. Organizador gráfico de las preguntas que permiten valorar si una tarea es coherente o no. Tomada de Barreiro et al. (2017b, p. 53).

En el caso de que una tarea sea coherente, se puede valorar la actividad matemática [AM] de los estudiantes frente a la tarea que propone el docente. Este es el último parámetro, propuesto por Barreiro et al. (2017b) para diseñar o seleccionar tareas para que los estudiantes aprendan matemática y le encuentren sentido a su aprendizaje.

La AM que realiza un estudiante frente a la tarea que propone el docente se puede valorar en dos, ver tabla 3. Estas valoraciones no son rotundas pues puede haber valores intermedios que dependerán de las características de la tarea: rol que desempeñará el estudiante, la exigencia del objetivo y el PM de la consigna. Ciertamente, la valoración de AM del estudiante no solo se puede apreciar con el análisis de una tarea individualmente. Sería importante conocer tareas posteriores, el plan e intenciones que tenga el profesor de toda la clase completa, lo cual no se considera en este trabajo.

Tabla 3. Valoración de la actividad Matemática que realizan los estudiantes

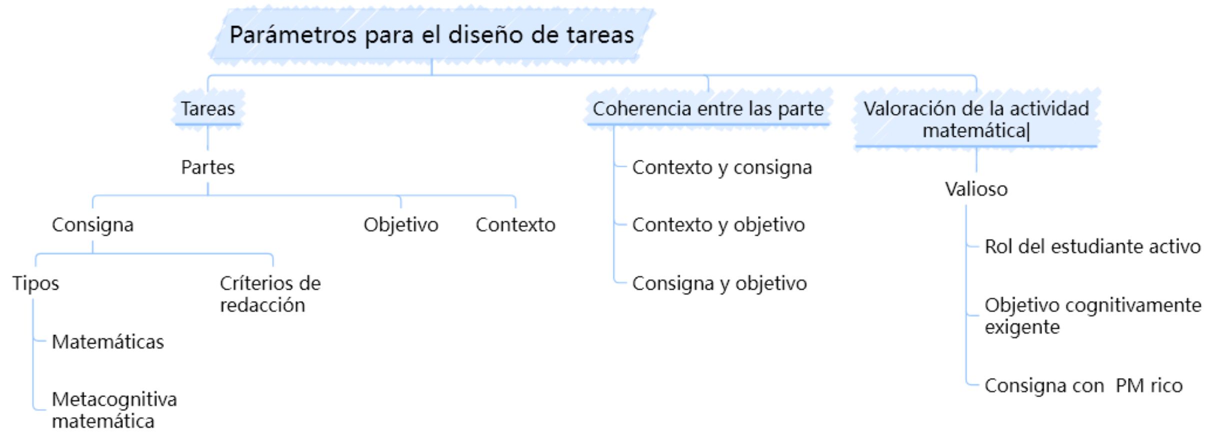
Valoración de la AM	Características
Valiosa	1. El estudiante tiene un rol activo: el docente le permite actuar sobre la consigna, le deja libertad y orienta en la resolución. 2. El objetivo es cognitivamente exigente: la tarea le demanda pensar, indagar, explorar, relacionar, descartar y argumenta, y no solo repetir un algoritmo 3. La consigna tiene un PM rico
Baja	1. El estudiante tiene un rol pasivo: el profesor es quien resuelve la consigna. 2. El objetivo no es un reto cognitivamente 3. La consigna tiene un PM pobre

Nota. Esta tabla muestra las características que debe incluir una tarea matemática para valorar la Actividad Matemática que promueve como valiosa o baja. Diseño de tabla propio. Información tomada de Barreiro et al. (2017b, pp. 62-63).

Para el diseño de la cartilla, también se tiene en cuenta las características de tareas que favorezcan una AM de los estudiantes.

En resumen, para el diseño de la cartilla se tiene en cuenta los tres parámetros presentados en la *Figura 2*.

Ilustración 3: Parámetros para el diseño de tareas



Nota. Diseño propio

3. Metodología

En el siguiente apartado se describen las etapas de elaboración de la cartilla y la monografía, ambas desarrolladas a partir de una estrategia investigativa propuesta por Camargo (2021) basada en la revisión documental. Además, para la cartilla, se integran elementos didácticos propuestos por Grupo Azarquiel (1993) y Mason et al. (2014), junto con aspectos estructurales relacionados con el diseño de tareas según Barreiro et al. (2017a, 2017b).

3.1 Etapas para la elaboración de la monografía

Etapa 1: Identificación de fuentes. En esta etapa se lleva a cabo una búsqueda bibliográfica de documentos que aborden temas relacionados con las expresiones algebraica desde diversas perspectivas: matemática, escolar, histórica, didáctica y curricular. También estudios sobre las dificultades, errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y de las expresiones algebraicas.

Etapa 2: Selección de la información. En esta etapa se selecciona la información que se presentará en los distintos marcos. Para definir el concepto de expresión algebraica, se consideran ideas desde las perspectivas de la matemática y la matemática escolar. Las razones que motivaron su creación se exploran desde una visión histórica. Su importancia en la educación colombiana se aborda desde el enfoque curricular, mientras que las estrategias para su enseñanza se analizan desde una perspectiva didáctica.

Etapa 3: Construcción de los marcos. Una vez finalizada la etapa 2, la información se presenta por escrito, tal como se detalla en la sección 2, "Marcos de Referencia"

Etapa 4: Etapa previa a la construcción de la cartilla. Una vez finalizado el marco de referencia, se seleccionan los elementos necesarios para la elaboración de la cartilla y se lleva a cabo una segunda búsqueda bibliográfica centrada en materiales didácticos impresos y en el diseño de tareas.

Etapa 5: Diseño y conclusiones. Se presenta el diseño de la cartilla y se redactan una serie de conclusiones.

3.2 Etapas para la elaboración de la cartilla

Etapa 1: Identificación de fuentes. En esta etapa se realiza una búsqueda bibliográfica acerca de documentos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del algebra, centrando la atención en documentos con propuestas alternativas a la enseñanza memorística y repetitiva. También estudios sobre obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza del álgebra y de las expresiones algebraicas.

Etapa 2: Identificación de las propuestas de enseñanza y aprendizaje. En esta etapa se seleccionan las propuestas de enseñanza que presentan un enfoque diferente al tradicional. Además, se identifican algunos obstáculos, dificultades y errores que serán considerados en el proceso de elaboración de la cartilla.

Etapa 3: Organización de las propuestas de enseñanza y aprendizaje. En esta etapa se organiza la información recopilada en las etapas 1 y 2, para definir el enfoque de la cartilla. Se evalúan las propuestas más adecuadas para su desarrollo y se establece el orden en que debe presentarse la secuencia de tareas.

Etapa 4: Diseño de tareas. En esta fase se diseñan las tareas siguiendo la teoría de Barreiro (2017a, 2017b). Estas tareas se categorizan, de acuerdo con su teoría, como de potencial matemático rico o de potencial matemático medio, tal como se describe en la sección 2.6 de esta monografía.

Etapa 5: Digitalización de la cartilla. En esta etapa, las tareas se digitalizan utilizando la herramienta Canva, junto con notas que explican los elementos didácticos considerados en el diseño de los distintos conjuntos de tareas.

4. Diseño del material didáctico

Este capítulo pretende presentar los elementos considerados en la elaboración de la cartilla, atendiendo a referentes teóricos como Barreiro (2017a, 2017b) y Ladrón de Guevara (2019), y a la metodología planteada en la sección 3.2.

4.1. Etapa 1: Identificación de fuentes

En esta etapa, se seleccionaron principalmente los documentos "Ideas y actividades para enseñar álgebra", escrito por el Grupo Azarquiel (1993), y "Raíces del álgebra y rutas hacia el álgebra", de Mason et al. (2014). Estos textos se eligieron porque presentan una perspectiva de enseñanza y aprendizaje del álgebra que va más allá de la memorización y repetición de procedimientos. En lugar de eso, promueven la construcción de conocimiento (expresiones algebraicas) a través del desarrollo de procesos como la "simbolización" y la "generalización." Por otra parte, se escogen algunos obstáculos, dificultades y errores descritos en el marco de referencia didáctico de la sección 2.4.

4.2. Etapa 2: Identificación de las propuestas de enseñanza y aprendizaje.

Para la construcción de la cartilla se decide que los estudiantes atraviesen por los procesos de generalización y simbolización siendo esta una propuesta que le puede dar sentido y significado a las expresiones algebraicas. Además, que estos procesos pueden ser útiles para la introducción del algebra y su simbología. En las secciones 2.5.1 y 2.5.2 se encuentra información sobre en qué consiste ambos procesos.

Por otra parte, para el diseño de la cartilla se tendrán en cuenta los siguientes obstáculos, dificultades y errores:

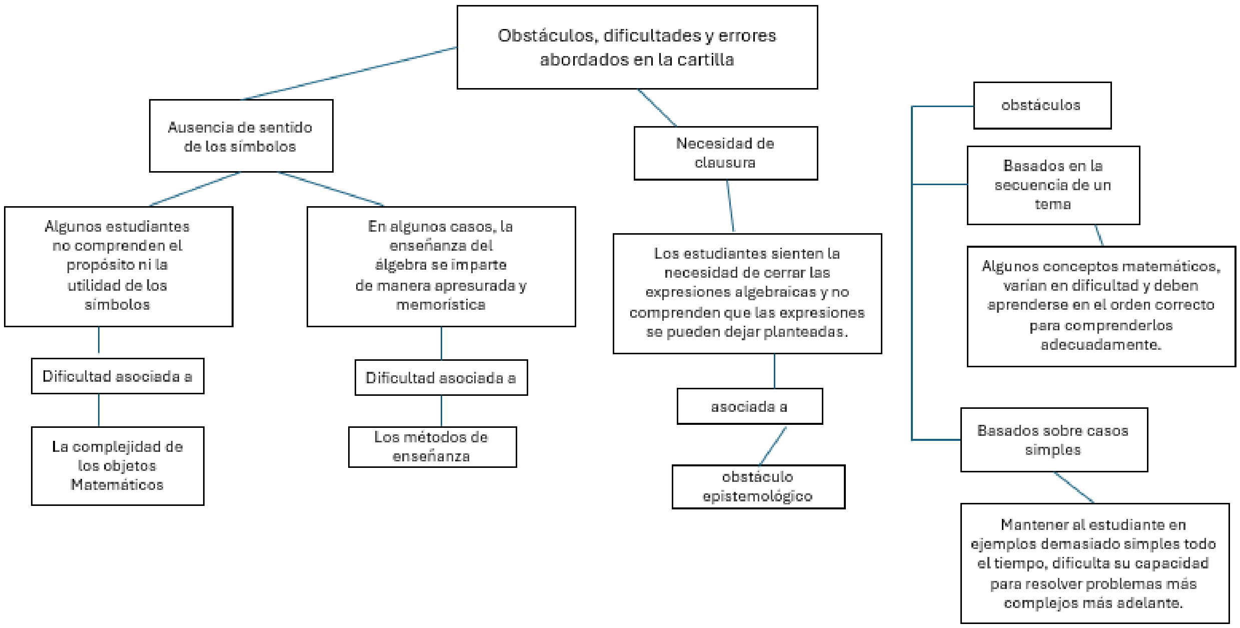
Socas (2000) señala que los estudiantes enfrentan diversas dificultades cuando están aprendiendo álgebra. Una de esas dificultades es la ausencia de sentido: los estudiantes no comprenden la utilidad de los símbolos. Esta problemática puede relacionarse con la complejidad de los objetos matemáticos, ya que esta simbología no es sencilla ni rápida de entender. En la sección 2.3, se presenta un breve recorrido histórico de la simbología que conocemos actualmente, evidenciando el tiempo y la contribución de varios matemáticos necesarios para su desarrollo. Además, en la sección 2.5.3 se exponen los diferentes significados y usos de las letras que hoy empleamos en álgebra, lo que resalta que su aprendizaje no es un proceso sencillo.

Aunque el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra presenta desafíos, en ocasiones la enseñanza se realiza de manera apresurada y memorística. Esta situación representa una de las dificultades identificadas por Socas (2000) relacionados con la enseñanza. En algunas ocasiones, los métodos de enseñanza empleados pueden inducir a los estudiantes a cometer errores, impidiéndoles comprender tanto los símbolos algebraicos como las expresiones algebraicas.

Un error común en la enseñanza de las expresiones algebraicas es la necesidad de clausura; los estudiantes, en ocasiones, sienten la necesidad de cerrar las expresiones y no comprenden que estas pueden permanecer expresadas. Este error específico se abordará en la cartilla, la cual busca que los estudiantes representen mediante símbolos las leyes que ellos mismos han identificado en diversas sucesiones gráficas.

Finalmente, Tall como se citó en Palarea (1998) identifica dos obstáculos en el aprendizaje: uno relacionado con la secuenciación de los temas y otro basado en casos simples. En el primer caso, señala que algunos conceptos u objetos matemáticos son más difíciles de comprender que otros, por lo que es necesario establecer una secuencia adecuada. En el segundo, menciona que, en ocasiones, los estudiantes solo trabajan con situaciones sencillas, sin que se les presenten retos más complejos.

Ilustración 4: Obstáculos, dificultades y errores tenidos en cuenta para la elaboración de la cartilla



Nota. Diseño propio.

4.3. Etapa 3: Organización de las propuestas de enseñanza y aprendizaje.

La cartilla trabajará con sucesiones gráficas. Los estudiantes atravesarán las fases de “ver un patrón”, “decir cuál es el patrón” y “registrar un patrón”, propuestas por Mason et al. (2014). Además, pasarán por las etapas de “entender”, “expresar”, “expresar por escrito”, “expresar con símbolos” y “expresar con los símbolos adecuados”, planteadas por el Grupo Azarquiel (1993). Todo ello con el objetivo de que, en las últimas tareas, los estudiantes construyan expresiones algebraicas.

Las tareas están divididas en cuatro fases, y cada fase incluye una ficha didáctica que contiene el 'contexto' y el 'objetivo', de acuerdo con la teoría de Barreiro (2017a, 2017b). Además, se detalla el componente didáctico, un aspecto clave según lo señalado por Ladrón de Guevara (2019). A continuación, se presentan las fichas didácticas de cada fase:

Fase 1:

Tabla 4. Ficha didáctica (fase 1)

Contexto	Se espera que los estudiantes hayan trabajado principalmente con aritmética y ahora se busca introducir conceptos y nociones de álgebra, en especial aquellos relacionados con las expresiones y símbolos algebraicos.
Objetivo	La primera fase, titulada "AlgeDetectives", busca que los estudiantes trabajen con situaciones de sucesiones gráficas. En esta etapa, no se les pedirá que construyan expresiones algebraicas con símbolos formales; en cambio, el objetivo es que observen, descubran patrones e identifiquen relaciones entre la posición y la cantidad de figuras.
Camino didáctico	Para introducir a los estudiantes en el estudio del algebra, se seguirán las recomendaciones del grupo Azarquiel (1993), descritas en su capítulo “Proceso de Simbolización”. En este, se destaca la importancia de que los estudiantes comprendan el significado de los símbolos, señalando que, en un primer acercamiento, es fundamental que estos símbolos tengan referentes concretos y se relacionen con las ideas u objetos que representan. Una actividad sugerida para facilitar esta comprensión consiste en trabajar con situaciones donde los estudiantes expresen mediante símbolos las leyes que han deducido a partir de la observación de estructuras gráficas o numéricas.

Nota. Diseño propio.

Fase 2:

Tabla 5. Ficha didáctica (fase 2)

Contexto	Los estudiantes han concluido la primera fase, durante la cual observaron y analizaron diversas sucesiones gráficas e identificaron la cantidad de elementos de algunas posiciones. La fase anterior utilizó un objeto concreto para representar la posición, con el propósito de facilitar la comprensión de la relación existente entre dicha posición y la cantidad de elementos correspondientes.
Objetivo	La segunda fase, titulada “Explora Patrones”, tiene como objetivo que los estudiantes, a través de expresiones orales o escritas, describan el patrón que observan en las sucesiones gráficas. En esta etapa, se introducirá la idea de cómo es posible determinar los elementos correspondientes a cualquier posición dentro de la sucesión.
Camino didáctico	Tanto Mason et al. (2014) como Azarquiel (1993) coinciden en que los estudiantes deben avanzar más allá de simplemente observar el patrón; enfatizan la importancia de decir cuál es el patrón, tanto de forma oral como escrita. Para lograrlo, recomiendan que los estudiantes trabajen en parejas, describiendo mutuamente lo que observan, haciéndose preguntas y ajustando sus explicaciones hasta llegar a un acuerdo. Esta capacidad de verbalizar sus observaciones resulta fundamental para avanzar hacia una

	comprensión más abstracta del patrón y, eventualmente, hacia la identificación de la expresión general que lo representa. Adicional, los autores mencionan que es fundamental que los estudiantes registren los patrones observados, ya que implica representar las ideas de manera tangible utilizando diversos formatos como dibujos, palabras o símbolos. Este proceso de registro ayuda a fijar las ideas que, de otro modo, podrían ser confusas o efímeras en la mente. Al plasmar las observaciones en papel, se facilita su análisis, discusión y modificación, lo que contribuye a que los estudiantes estructuren mejor su pensamiento.

Nota. Diseño propio.

Fase 3:

Tabla 6. Ficha didáctica (fase 3)

Contexto	En la fase anterior, los estudiantes tuvieron que expresar el patrón tanto de manera oral como escrita. Realizaron ejercicios en colaboración con sus compañeros, lo que les exigió ser claros y precisos en sus explicaciones.
Objetivo	La tercera fase, titulada El poder de los símbolos, tiene como objetivo que los estudiantes reflexionen sobre las ventajas del uso de símbolos. En este punto, aún no se introducen los símbolos del álgebra, pero se les pide a los estudiantes que transformen lo que han expresado previamente en palabras y de forma escrita, a una representación simbólica. En esta fase pueden utilizar sus propios símbolos.
Camino didáctico	De acuerdo con Azarquiel (1993) el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra es esencial, ya que ayuda a los estudiantes a conectar símbolos con las ideas y objetos que representan. Para que estos símbolos sean útiles, es importante que estén claramente asociados con algo concreto. Por ejemplo, es muy útil cuando los estudiantes pueden usar símbolos para expresar leyes que han descubierto al observar gráficos o patrones numéricos.

Nota. Diseño propio.

Fase 4:

Tabla 7. Ficha didáctica (fase 4)

Contexto	Los estudiantes ya han presentado algunas propuestas sobre cómo encontrar la cantidad de elementos en cualquier posición utilizando símbolos. Es posible que no hayan empleado símbolos algebraicos, sino que hayan recurrido a dibujos u otros símbolos creados por ellos mismos.
	Esta última fase tiene como objetivo introducir los símbolos del álgebra para que los estudiantes los utilicen al formular una estrategia para encontrar los elementos en cualquier posición.

Objetivo	
Camino didáctico	En esta fase, se utiliza la historia de la simbolización algebraica y se presenta un ejemplo de cómo podría formularse una expresión general para encontrar la cantidad de elementos en cualquier posición. Posteriormente se proponen tareas que directamente buscan que los estudiantes representen esa generalidad con símbolos algebraicos.

Nota. Diseño propio.

4.4. Etapa 4 y 5: Diseño de tareas y digitalización de la cartilla

En estas etapas se diseñan y digitalizan las tareas que forman parte de la cartilla. Según Barreiro (2017a), estas tareas presentan un potencial matemático que puede ser tanto medio como rico. Además, invitan al estudiante a argumentar y explicar las soluciones que propone frente a diferentes situaciones. Las tareas con potencial medio solo tienen una de esas características, sea la exploración o la argumentación.

Fase 1: Algedetectives

Esta fase consta de cinco tareas, en las que, según Mason et al. (2014), los estudiantes se enfocan en observar el patrón. No se les pide que construyan una regla utilizando símbolos formales; en su lugar, se busca que identifiquen el patrón, imaginen las posiciones siguientes y reconozcan la relación entre la posición y el número de objetos.

Tabla 8. Lista de tareas fase 1

Tarea 1	El chef Matemático
Tarea 2	Crecimiento de las uñas
Tarea 3	Jugando con cerillos
Tarea 4	La escalera
Tarea 5	Baldosas

Nota: Para consultar las tareas correspondientes a la fase 1, diríjase al Anexo 1

Fase 2: Explorapatrones

En esta fase, de acuerdo con Mason et al. (2014), los estudiantes comienzan a describir y registrar los patrones que observan en las sucesiones gráficas. Se realizan tareas en pareja, aprovechando la comunicación entre ellos para facilitar que la instrucción sobre el patrón sea cada vez más clara y comprensible.

Tabla 9. Lista de tareas fase 2

Tarea 1	Escucha y dibuja
Tarea 2	A jugar con las palabras
Tarea 3	Crea tu propio patrón

Nota: Para consultar las tareas correspondientes a la fase 2, diríjase al Anexo 2

Fase 3: El poder de los símbolos

En esta fase se introduce el concepto de la utilidad de los símbolos de manera general. A los estudiantes se les propone construir su propia expresión simbólica (que no necesariamente debe utilizar los símbolos convencionales del álgebra) a partir de una sucesión que elaboraron en la fase 2. Además, se les pedirá transformar un enunciado verbal en una expresión simbólica.

Tabla 10. Lista de tareas fase 3

Tarea 1	Hablemos sobre los símbolos
Tarea 2	El poder de los símbolos
Tarea 3	Empareja sucesiones con trucos
Tarea 4	¿Y si lo representamos con símbolos?

Nota: Para consultar las tareas correspondientes a la fase 3, diríjase al Anexo 3

Fase 4: Símbolos Algebraicos

En esta fase se presenta un breve recorrido histórico sobre los símbolos en matemáticas, mostrando su evolución hasta los símbolos que utilizamos hoy en día. Se les pide a los estudiantes que empleen los símbolos del álgebra para expresar la relación entre la cantidad de objetos y su posición, con el fin de encontrar el número de objetos para cualquier posición.

Tabla 11. Lista de tareas fase 4

Tarea 1	Los símbolos en Matemáticas
Tarea 2	Reto final

Nota: Para consultar las tareas correspondientes a la fase 4, diríjase al Anexo 4

5. Conclusiones

El siguiente capítulo tiene como objetivo presentar las conclusiones alcanzadas al finalizar la monografía. Para ello, se analizarán desde cuatro perspectivas: en primer lugar, a partir de los objetivos establecidos; en segundo lugar, en relación con la pregunta problema planteada; en tercer lugar, desde los aprendizajes obtenidos por la autora durante la realización del proyecto y, en cuarto lugar, una recomendación para futuros trabajos relacionados con el tema.

El objetivo general de esta monografía es "Diseñar un material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las expresiones algebraicas, que promueva el desarrollo de procesos como la generalización y la simbolización, y que atienda algunos errores, dificultades y obstáculos comunes en el proceso de aprendizaje." Este objetivo se ha llevado a cabo, dando lugar a la creación de una cartilla que incluye 14 tareas enfocadas en desarrollar los procesos de generalización y simbolización. Además, durante su elaboración se tomaron en consideración algunos errores, dificultades y obstáculos presentes en la enseñanza de las expresiones algebraicas.

Los objetivos específicos también se lograron, ya que se construyeron los marcos matemático, curricular y didáctico. Además, se investigó sobre el diseño de tareas y los materiales didácticos impresos, y se recopilaron las características de la cartilla en esta monografía.

En relación con la pregunta problema, se especificaron algunas de las características que debe tener un material didáctico que promueva procesos de generalización y simbolización. Estas características incluyen pasar por diversas fases (ver, describir, registrar), tal como lo proponen Mason et al. (2014), junto con las fases para la simbolización sugeridas por el Grupo Azarquiel (1993), que son: entender, expresar, expresar por escrito, expresar con símbolos y utilizar los símbolos adecuados. Además, se consideraron los errores que pueden cometer los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje de estos conceptos.

Respecto a los aprendizajes obtenidos por la autora durante la realización del proyecto. Un día, en su cuarto semestre, uno de sus profesores le comentó que un trabajo de grado era la “excusa” perfecta para profundizar en un tema de su carrera que le hubiera llamado la atención. La enseñanza y el aprendizaje del álgebra captaron su interés, ya que durante su etapa escolar creía que el álgebra consistía en ejercicios de destreza mental, como los sudokus o el ajedrez. Se dedicaba a aprender la mayor cantidad posible de fórmulas y herramientas para resolver problemas. Sin embargo, al llegar a la enseñanza de la aritmética y el álgebra, se sorprendió al descubrir que detrás de esas expresiones algebraicas se escondía un significado y que no se trataba simplemente de jugar con letras.

Este trabajo de grado permitió a la autora explorar en profundidad lo que hay detrás de las expresiones algebraicas. Se dio cuenta de que su enseñanza no es una tarea sencilla y aprendió sobre este concepto desde diversas perspectivas: histórica, didáctica, matemática, escolar y curricular. Además, reconoció que aún hay mucho por investigar en relación con las expresiones algebraicas y que existen numerosos trabajos y propuestas de enseñanza que merecen ser leídos.

Un último aprendizaje que dejó la construcción de este proyecto a la autora es la importancia de que los docentes de matemáticas también se enfoquen en la investigación. Cada semestre surge propuestas, artículos y trabajos de grado interesantes, y es fundamental estar al tanto de estas iniciativas y arriesgarse a construir nuestros propios proyectos.

Finalmente, como recomendación, las tareas planteadas en la cartilla no son suficientes para abordar este concepto. El estudiante debe enfrentarse y reconocer estas expresiones en diversas situaciones. Tanto Mason et al. (2014) como el Grupo Azarquiel (1993) proponen otros enfoques que deben complementarse para que los estudiantes puedan apreciar la utilidad y el significado de los símbolos en diferentes contextos.

6. Referencias

Aguirre, A., & Cerati, E. (2020). Sentidos del álgebra que priorizan textos escolares: Un análisis de libros de textos. *UNIÓN*, *59*, 252-274.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2017a). Capítulo 2. Consignas para la clase de matemáticas. En *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2017b). Capítulo 3. Actividad matemática del alumno. En *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, 101-117.

Camargo, L. (2021). Principales estrategias cualitativas empleadas en eduación matemática. En *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática* (pp. 57-98).

Carneiro de Andrade, B. (2000). *A evolução histórica da resolução das equações do 2o grau*. https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/9895/3/3026_TM_01_P.pdf

Dueñas, H., & Rubio, I. (2015). Sistemas numéricos. En *Cálculo diferencial en una variable*. Editorial Universidda Nacional de Colombia.

Giraldo, A. (2020). *Proceso de simbolización algebraica: Reporte de una experiencia de aula en grado octavo*.

Gómez, P., Mora, M.-F., & Velazco, C. (2018). Capítulo 5. Análisis de instrucción. En *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: Conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). http://funes.uniandes.edu.co/11906/

Gómez, P., & Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 61-88). Pirámide.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra 33*. Editorial Síntesis.

IEA. (1996). Chapter 5: Teacher and instruction. En *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)* (pp. 131-176).

Ivorra, C. (s. f.). *Lógica y Teoría de Conjuntos*. https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf

Küchemann, D. (1981). Algebra. En *Children's Understanding of Mathematics*. https://www.researchgate.net/profile/Dietmar-Kuechemann/publication/309033356_Chapter_8_Algebra/links/57fe6cbf08ae72756401620c/Chapter-8-Algebra.pdf

Ladrón de Guevara, M. (2019). Diseño y elaboración de material didáctico impreso. En *Selección, elaboración, adaptación y utilización de materiales, medios y recursos diácticos en formación profesional para el empleo*. Editorial Tutor Formación. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=bqqwDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA6&dq=material+impreso+guevara&ots=bkrObqPzMg&sig=xpX9KF-4NPJCegx9pdBEPbg3vzg#v=onepage&q=material%20impreso%20guevara&f=false

Martín, D. (2017). *La igualdad y la letra desde la historia de las matemáticas y libros de texto escolares* [Universidad Pedagógica Nacional]. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1147313/Martin2017La.pdf

Mason, J., Graham, A., David, P., & Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el Álgebra. Raíces del Álgebra* (C. Agudelo, Trad.; Segunda edición).

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (1. ed). Ministerio.

Popayán, Y. (2016). *Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico* [Universidad ICESI]. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1143547/Zambrano2016Situaciones.pdf

Ruano, R., Socas, M., & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria*.

7. Anexos


Detectives de patrones:
¡Un viaje desde lo retórico a lo simbólico!
X
Cindy Vanesa Amarillo Suárez
Departamento de Matemáticas
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Introducción

La presente cartilla propone una serie de tareas diseñadas para introducir elementos clave en la enseñanza del álgebra, tales como las expresiones y los símbolos algebraicos. Su elaboración se fundamentó en referentes teóricos como Azarquiel (1993) y Mason et al. (2014), considerando, en particular, los procesos de simbolización y generalización descritos por Azarquiel (1993), así como las estrategias para expresar generalidades planteadas por Mason et al. (2014).

En la construcción de la cartilla se tuvieron en cuenta algunas dificultades, errores y obstáculos que los estudiantes pueden enfrentar al estudiar álgebra. Asimismo, el diseño de las tareas se fundamenta en las propuestas de Barreiro et al. (2017), quienes destacan la importancia de crear consignas con un rico potencial matemático.

Es importante señalar que esta cartilla es una propuesta que puede ser utilizada y adaptada por los docentes según sus necesidades. Las tareas planteadas no son las únicas ni suficientes para lograr que los estudiantes comprendan los símbolos y las expresiones algebraicas. Es fundamental que los docentes expongan a los estudiantes a otras situaciones que involucren el significado y la utilidad de símbolos algebraicos

Como se mencionó en la introducción, para la elaboración de la cartilla se tuvieron en cuenta algunas dificultades, errores y obstáculos presentes en el álgebra. Entre ellos se encuentran:

Ausencia de sentido

Algunos estudiantes no comprenden el propósito ni la utilidad de los símbolos algebraicos

Dificultad asociada a

La complejidad de los objetos Matemáticos

En algunos casos, la enseñanza del álgebra se imparte de manera apresurada y memorística.

Dificultad asociada a

Los métodos de enseñanza

Necesidad de clausura

Los estudiantes sienten la necesidad de cerrar las expresiones algebraicas y no comprenden que las expresiones se pueden dejar planteadas.

asociada a

obstáculo epistemológico

Otros obstáculos

Basados en la secuencia de un tema

Algunos conceptos matemáticos, varían en dificultad y deben aprenderse en el orden correcto para comprenderlos adecuadamente.

Basados sobre casos simples

Mantener al estudiante en ejemplos demasiado simples todo el tiempo, dificulta su capacidad para resolver problemas más complejos más adelante.

LISTA DE CONTENIDOS

Fase	Tareas
1 AlgeDetectives	El chef Matemático Crecimiento de las uñas Jugando con cerillos La escalera Baldosas

Fase	Tareas
2 ExploraPatrones	Escucha y Dibuja A jugar con las palabras Crea tu propio patrón

LISTA DE CONTENIDOS

Fase	Tareas
3 El poder de los símbolos	Hablemos sobre símbolos El poder de los símbolos Empareja sucesiones y trucos ¿Y si lo representamos con símbolos?

Fase	Tareas
4 Símbolos algebraicos	Los símbolos en Matemáticas Reto final

Algedetectives

Fase 1

Contexto

Se espera que los estudiantes hayan trabajado principalmente con aritmética y ahora se busca introducir conceptos y nociones de álgebra, en especial aquellos relacionados con las expresiones algebraicas y símbolos algebraicos.

Objetivo

La primera fase, titulada "AlgeDetectives", busca que los estudiantes trabajen con situaciones de sucesiones gráficas. En esta etapa, no se les pedirá que construyan expresiones algebraicas con símbolos formales; en cambio, el objetivo es que observen, descubran patrones e identifiquen relaciones entre la posición y la cantidad de figuras.

Camino didáctico

Para introducir a los estudiantes en el estudio del algebra, se seguirán las recomendaciones del grupo Azarquiel (1993), descritas en su capítulo "Proceso de Simbolización". En este, se destaca la importancia de que los estudiantes comprendan el significado de los símbolos, señalando que, en un primer acercamiento, es fundamental que estos símbolos tengan referentes concretos y se relacionen con las ideas u objetos que representan.

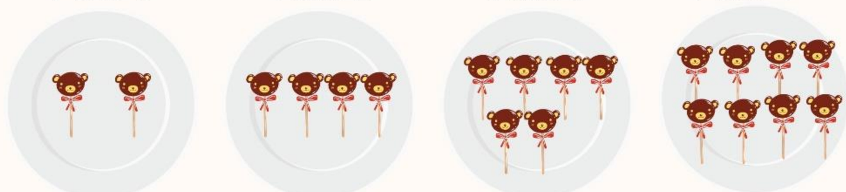
Una actividad sugerida para facilitar esta comprensión consiste en trabajar con situaciones donde los estudiantes expresen mediante símbolos las leyes que han deducido a partir de la observación de estructuras gráficas o numéricas.

Anexo 1

EL CHEF MATEMÁTICO

Rodrigo es un chef apasionado por hacer chocolates y tiene una manera especial de organizarlos en los platos. Cada plato tiene una cantidad única de chocolates, y cuando le preguntamos por qué los acomoda así, simplemente sonríe y dice que le encantan las matemáticas.

Plato 1 Plato 2 Plato 3 Plato 4




Uno de los comensales dijo que en el plato 32 deberían haber 62 chocolates. ¿Es verdadera la afirmación?


¿Qué plato tendrá 82 chocolates?


¿Qué criterio crees que utiliza el chef para organizar los chocolates en los platos?


¿Cómo podrías determinar rápidamente cuántos chocolates habrán en cada plato sin tener que contarlos uno por uno?

CRECIMIENTO DE LAS UÑAS

Samanta salió temprano de su casa para montar bicicleta en el parque. Durante uno de los giros, perdió el equilibrio y se cayó. Como resultado de la caída, se quebró gran parte de sus uñas.

Samanta fue al salón de belleza para que le hicieran una curación en las uñas.

La especialista del salón de belleza le dijo a Samanta que estuviera tranquila, le curó las heridas y le explicó que ahora solo debía esperar a que sus uñas crecieran.

En ese momento, la especialista le entrega a Samanta un folleto con información sobre el crecimiento de las uñas.

Acelerardor de crecimiento

Crecimiento normal

Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
3 mm	6 mm	9 mm	12 mm

Crecimiento con "Nailixir"

Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
5 mm	10 mm	15 mm	20 mm

PREGUNTAS

Si Samanta no compra el producto, ¿cuántos meses debe esperar para que sus uñas crezcan 21 mm?

Si Samanta compra el producto, ¿cuál será la longitud de sus uñas al pasar los mismos meses del ejercicio anterior?

¿Cuántos meses de diferencia hay entre lograr un crecimiento de 30 mm en las uñas usando el producto y sin usarlo?

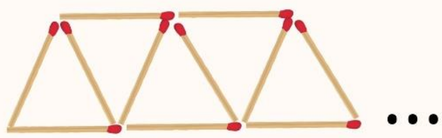
En 2017, Ayanna Williams, de Houston, rompió el récord Guinness por tener las uñas más largas del mundo, con una longitud de casi 5800 mm.

¿Cuántos meses nos tomaría tener unas uñas como las de Ayanna Williams, considerando que crecen 3 mm por mes?

JUGANDO CON CERILLOS

Mateo salió a la tienda para comprar una caja de cerillos. Sin embargo, mientras caminaba de regreso a su casa, tropezó y cayó al suelo, rompiendo la caja y esparciendo los cerillos por el suelo.

Mateo se levantó y comenzó a recoger los cerillos. Mientras lo hacía, notó que tres de ellos formaban un triángulo. Esto llamó su atención, y empezó a jugar a formar varios triángulos con los cerillos.



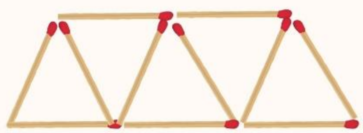
Mateo construye los triángulos de una manera particular. Describe cómo los forma.

Si para construir un triángulo se necesitaron 3 cerillos ¿para construir 2 triángulos de la manera que hizo Mateo se necesitan 6?

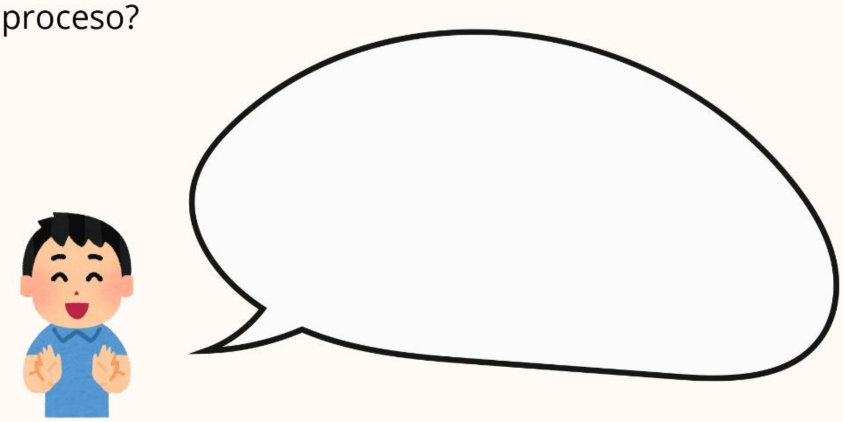
Dibuja en tu cuaderno o usa los palillos que te dio el profesor para hacer 4 triángulos, igual como hizo Mateo.

¿Cuántos cerillos utilizaste para formar los 4 triángulos?

Juliana, la hermana de Mateo, le llamó la atención el juego con los triángulos y quiso formar el sexto triángulo. Le pidió a Mateo que le pasara 3 cerillos para hacerlo, pero él la miró con confusión. ¿Por qué crees que Mateo reaccionó así?



Juliana le pidió a Mateo que le mostrara cómo hacer 8 triángulos. ¿Cómo crees que Mateo le explicó el proceso?



Mateo observó su caja de cerillos y se preguntó cuántos triángulos podría formar con los 51 cerillos que tenía.

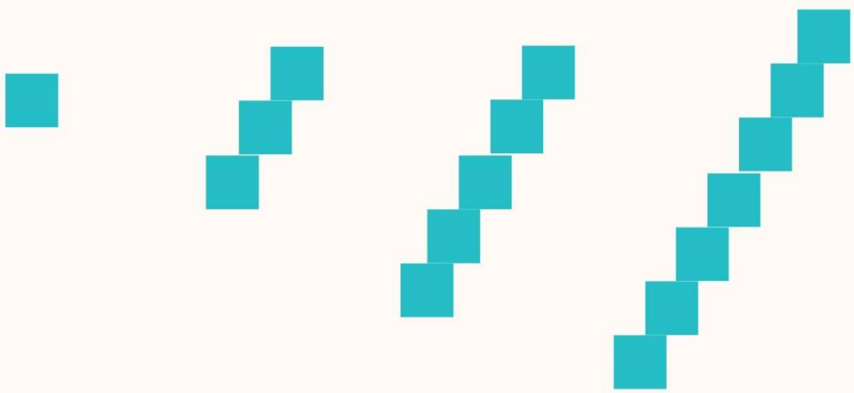
Notas para el docente

Para esta tarea, se puede entregar a los estudiantes materiales como palillos o palos de paleta para que puedan construir la sucesión.

LA ESCALERA

Marcos y Julieta son dos amigos muy curiosos y creativos a quienes les encanta construir cosas. Un día, deciden jugar a un reto especial: construir la escalera más alta posible utilizando cubos de juguete.

Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4



¿Es posible determinar cuántos escalones hay en la posición 8? ¿Cómo?

Marcos dijo que en la posición 6 hay 9 escalones, ¿es correcta su afirmación?

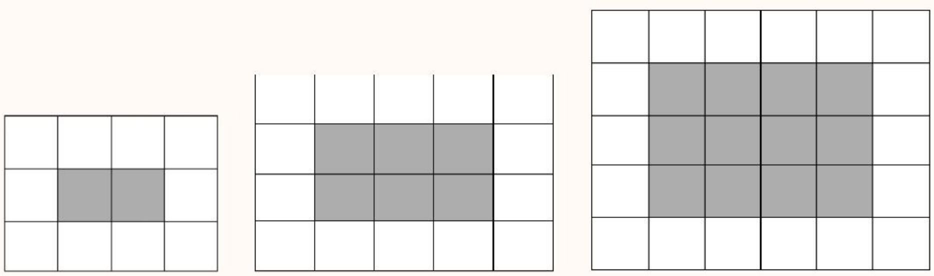
Describe la manera en la que Marcos y Julieta están construyendo la escalera

BALDOSAS

Julián salió con su padre a una fábrica de baldosas porque necesitaba encontrar un diseño económico y atractivo para su cocina. Además, buscaba a alguien que pudiera ayudarle a embaldosar.

Jorge, el asesor, le comentó al padre de Julián que existen unos estilos de embaldosado económico que han tenido muy buena acogida.

Estilo 1 Estilo 2 Estilo 3

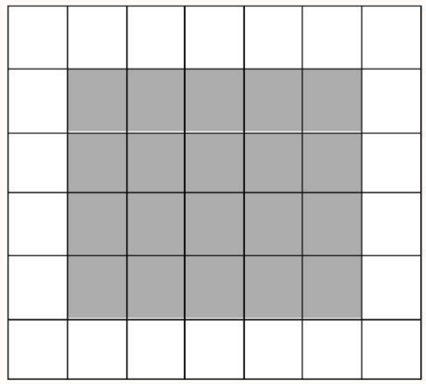


Julían observó detenidamente los tres primeros estilos y se dio cuenta de que podía crear un cuarto estilo.

¿Cuál crees que fue el cuarto estilo que creó Julían?

¡comprobémoslo!

Raspa la figura



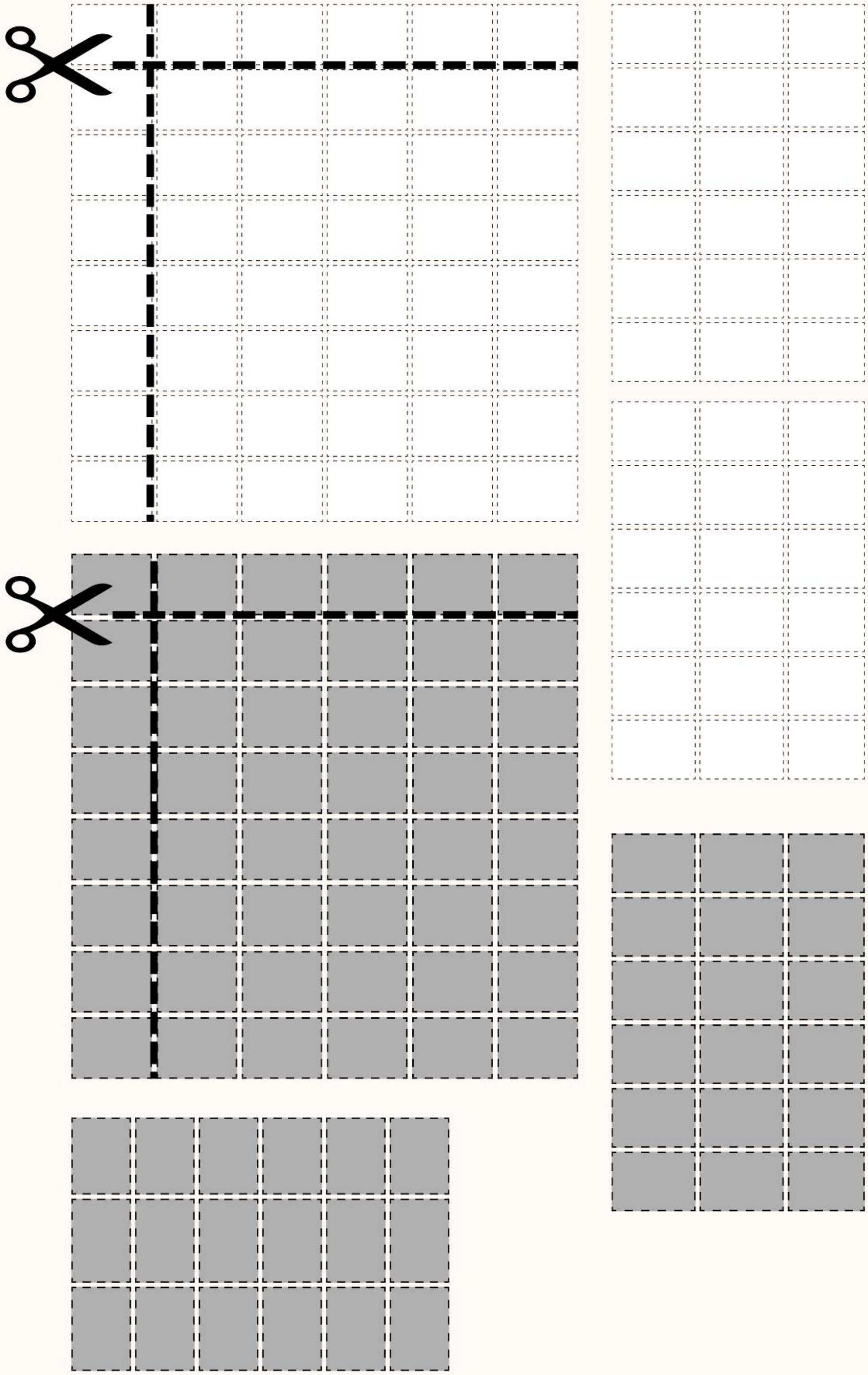
¿El estilo que creó Julían se parece al que dibujaste? ¿Por qué sí o por qué no?

Dibuja o utiliza las baldosas para encontrar los estilos 5 y 6.

Al papá de Julián también le llamó la atención los estilos de embaldosado y le comentó a su hijo que el estilo 8 tendría 64 baldosas blancas y 72 negras. ¿Es correcta su afirmación? ¿Por qué sí o por qué no?

Notas para el docente

Para esta tarea, se recomienda entregar a los estudiantes la plantilla con las baldosas para que las recorten y sigan la sucesión. Además, en la sección donde dice 'raspa la figura', se puede colocar una pegatina o adhesivo para raspar, también conocidos como 'Scratch Off'.



ExploraPatrones

Fase 2

Contexto

Los estudiantes han concluido la primera fase, durante la cual observaron y analizaron diversas sucesiones gráficas e identificaron la cantidad de elementos de algunas posiciones. La fase anterior utilizó un objeto concreto para representar la posición , con el propósito de facilitar la comprensión de la relación existente entre dicha posición y la cantidad de elementos correspondientes.

Objetivo

La segunda fase, titulada "Explora Patrones", tiene como objetivo que los estudiantes, a través de expresiones orales o escritas, describan el patrón que observan en las sucesiones gráficas. En esta etapa, se introducirá la idea de cómo es posible determinar los elementos correspondientes a cualquier posición dentro de la sucesión.

Camino didáctico

Tanto Mason et al. (2014) como Azarquiel (1993) coinciden en que los estudiantes deben avanzar más allá de simplemente observar el patrón; enfatizan la importancia de decir cuál es el patrón, tanto de forma oral como escrita.

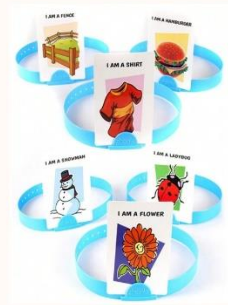
Para lograrlo, recomiendan que los estudiantes trabajen en parejas, describiendo mutuamente lo que observan, haciéndose preguntas y ajustando sus explicaciones hasta llegar a un acuerdo. Esta capacidad de verbalizar sus observaciones resulta fundamental para avanzar hacia una comprensión más abstracta del patrón y, eventualmente, hacia la identificación de la fórmula general que lo representa.

Adicional, los autores mencionan que es fundamental que los estudiantes registren los patrones observados, ya que implica representar las ideas de manera tangible utilizando diversos formatos como dibujos, palabras o símbolos. Este proceso de registro ayuda a fijar las ideas que, de otro modo, podrían ser confusas o efímeras en la mente. Al plasmar las observaciones en papel, se facilita su análisis, discusión y modificación, lo que contribuye a que los estudiantes estructuren mejor su pensamiento.

Anexo 2

ESCUCHA Y DIBUJA

Esta tarea está diseñada para realizarse en parejas. A cada pareja se le entregará unas fichas que deberán colocar boca abajo sobre una mesa para que no puedan ver la información en ellas.

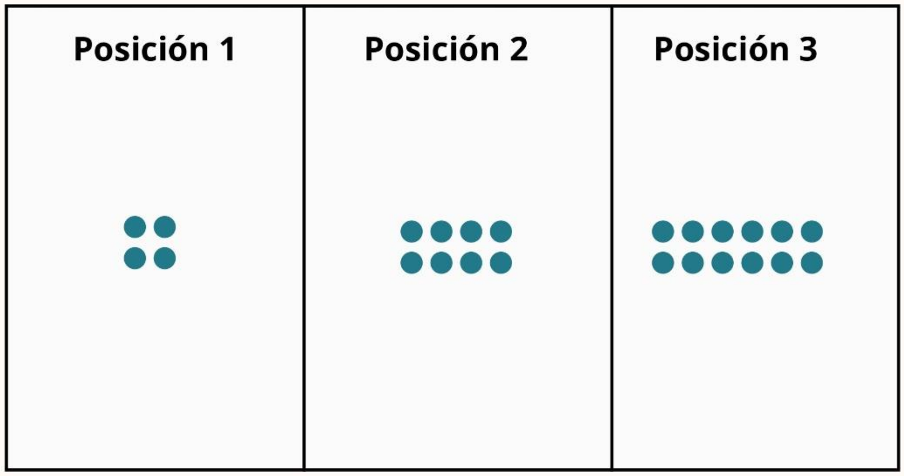


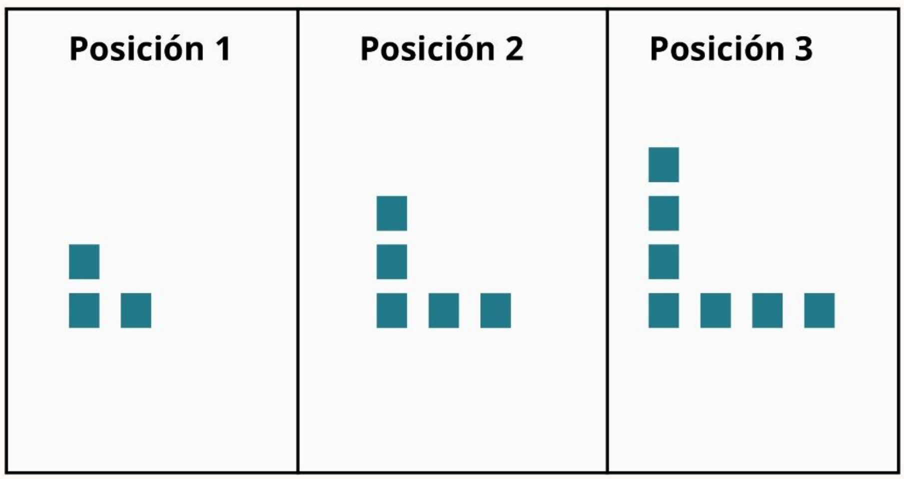
Uno de los miembros de la pareja, sin mirar, se colocará una de las fichas en la cabeza. Para facilitar esta actividad, se puede crear una banda para la frente que sostenga la ficha en su lugar.

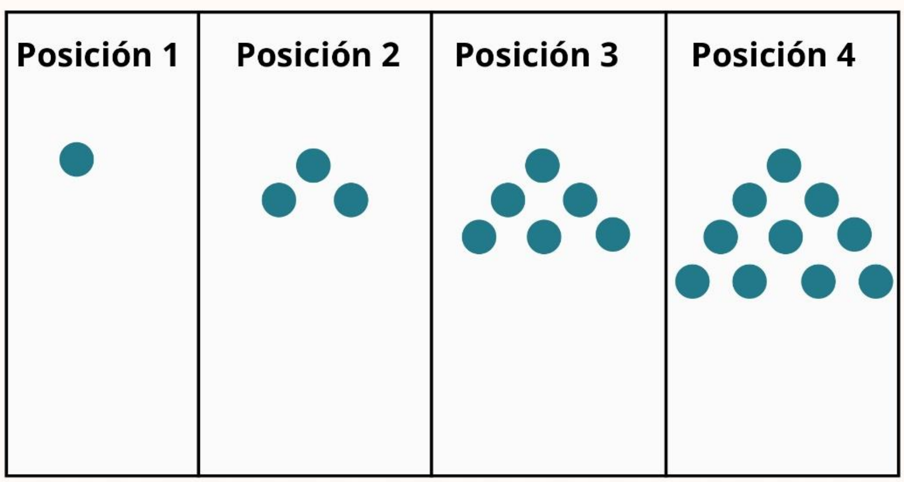
El otro miembro de la pareja intentará describir con palabras lo que hay en la ficha. El objetivo es que la persona que lleva la banda en la cabeza logre dibujar lo que está en la ficha basándose en la descripción verbal que le proporciona su compañero.

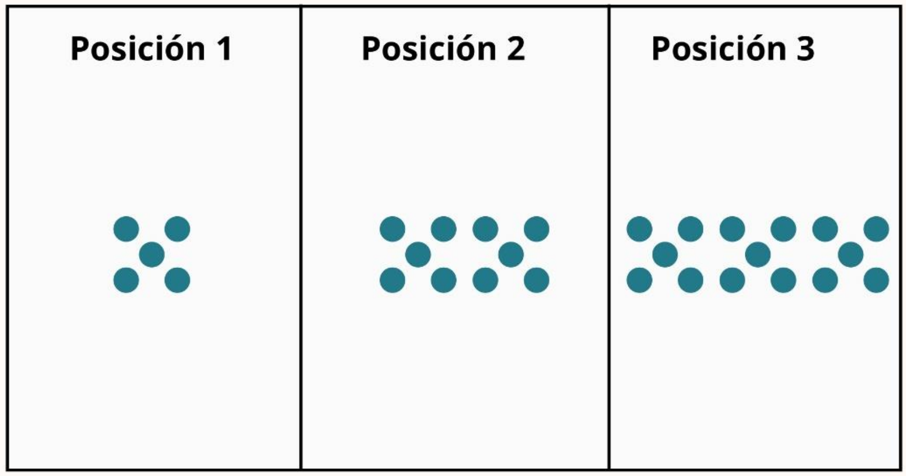
Reglas

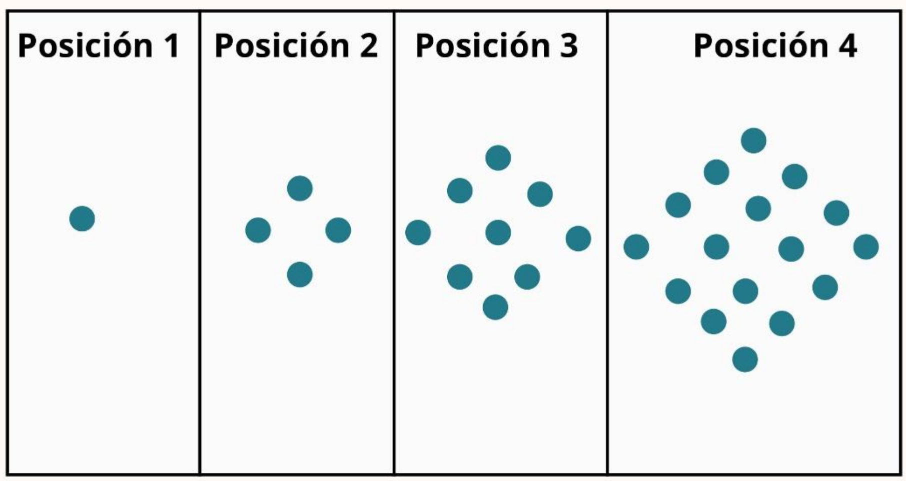
1. El jugador que tiene la ficha solo contará con tres intentos para dibujar.
2. El jugador que describe el patrón no puede tocar la mano del que dibuja ni hacer dibujos; todo debe ser expresado solo con palabras. Si la persona que dibuja logra representar lo que hay en la ficha, se otorgará un punto a quien hizo la descripción.

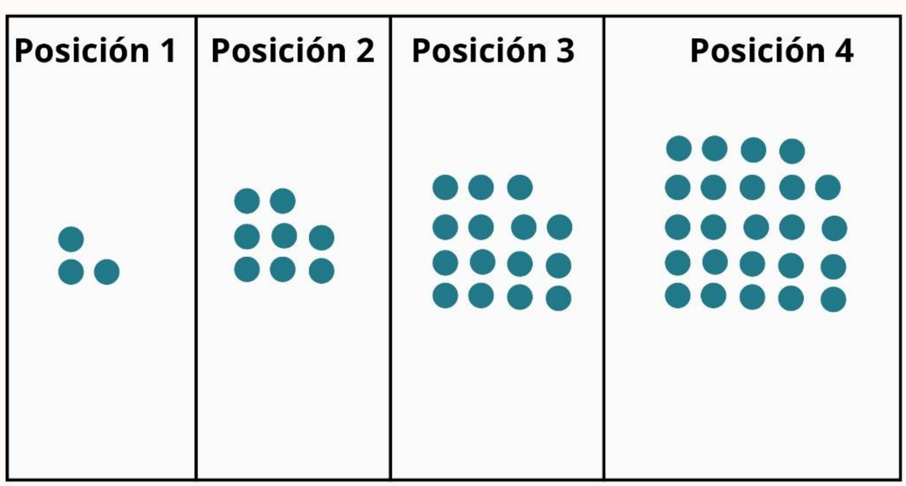

Posición 1
Posición 2
Posición 3


Posición 1
Posición 2
Posición 3


Posición 1
Posición 2
Posición 3
Posición 4


Posición 1
Posición 2
Posición 3


Posición 1
Posición 2
Posición 3
Posición 4


Posición 1
Posición 2
Posición 3
Posición 4

¡A JUGAR CON LAS PALABRAS!

Ya has completado diferentes retos, ahora estás listo para crear tu propia sucesión gráfica.

¿Sucesión gráfica?

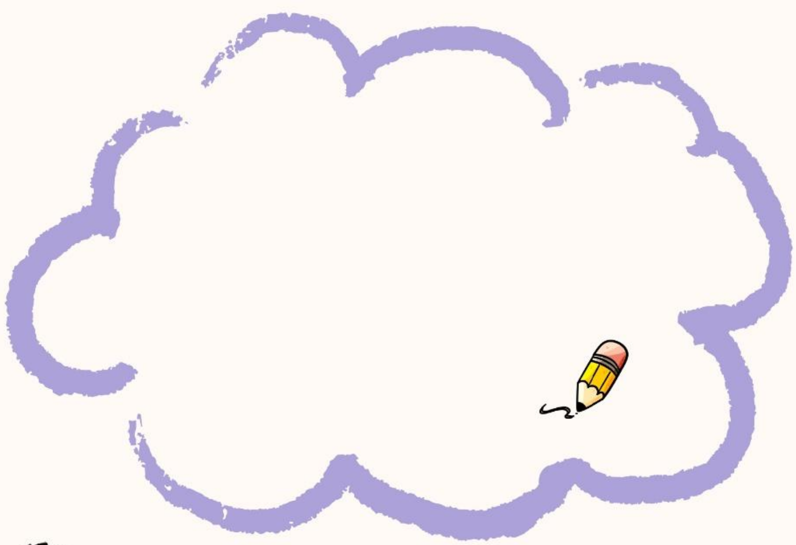
En las tareas anteriores, observaste varias sucesiones gráficas. ¿Recuerdas alguna?

Camilo no sabe qué es una sucesión gráfica. ¿Podrías explicárselo?

¡Wow! Entonces, esas imágenes siguen un patrón.

¿patrón?

¿A qué crees que se refiere Camilo cuando menciona "patrón"? ¿Qué crees que es un patrón?



Wow, entonces puedo pensar las sucesiones como una lista de números en un orden definido. Por ejemplo:

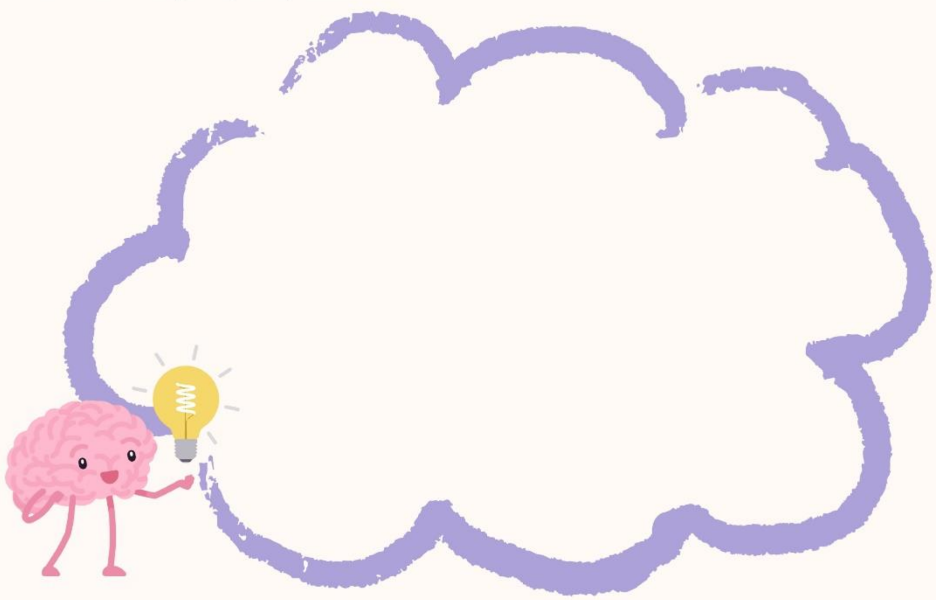
{2,4,6,8,10,...}

o

{3,6,9,12,..}

CREA TU PROPIO PATRÓN

En las actividades anteriores, exploraste distintas sucesiones gráficas, identificaste patrones, contaste la cantidad de elementos según su posición y determinaste la posición correspondiente a una cantidad dada. Ahora te enfrentas a un nuevo desafío: ¡crear tu propio patrón!



Describe tu patrón. Explíca en qué consiste y cómo lo construiste.

Según tu patrón es posible conocer, ¿cuántos elementos habrá en las posiciones 10, 20 o incluso en posiciones mayores, como la 100?

¿Crees que tu patrón tiene algún límite o continuará indefinidamente?

¡Vamos a poner a prueba a tus compañeros!

Crea un manual con el cual tus compañeros puedan dibujar la sucesión que has creado. Recuerda describirlo de manera clara y detallada, ya que ellos no pueden ver la imagen y tú no podrás dibujársela.

En el manual, incluye una forma para que ellos encuentren la cantidad de elementos en cualquier posición. Ten en cuenta que deberán calcular cuántos elementos hay en posiciones como la 1, 2 o 3, así como en posiciones más grandes, como la 50 o la 100.

Notas para el docente

Para esta tarea, se recomienda entregar a los estudiantes la plantilla para la creación del manual. Una vez que el estudiante lo haya completado, deberá entregárselo a un compañero, quien intentará dibujar la sucesión siguiendo sus instrucciones.

Sección para el creador de la sucesión

¿En qué consiste la sucesión?

Consejos para encontrar los elementos en cualquier posición

Sección para el estudiante que creará la sucesión gráfica a partir del manual

Representa la sucesión que creó tu compañero utilizando el manual como guía y responde las preguntas.

Preguntas para el estudiante que creará la sucesión gráfica a partir del manual

- ¿Te resultó sencillo construir la sucesión?
- ¿Qué parte te pareció más difícil al crear la sucesión?
- ¿Con las indicaciones del manual, es posible determinar cuántos elementos habrá en las posiciones 10, 15, 50 y 125?
- Pide a tu compañero la sucesión que creó y verifica si coincide con la que tú construiste.
- Si la sucesión no coincide, ¿cómo mejorarías el manual de tu compañero para que sea más claro?

Notas para el docente

El docente puede pedir a los estudiantes que creen otras sucesiones y vuelvan a elaborar el manual.

El poder de los símbolos

π Σ

$>$ %

Fase 3

Contexto

En la fase anterior, los estudiantes tuvieron que expresar el patrón tanto de manera oral como escrita. Realizaron ejercicios en colaboración con sus compañeros, lo que les exigió ser claros y precisos en sus explicaciones.

Objetivo

La tercera fase, titulada El poder de los símbolos, tiene como objetivo que los estudiantes reflexionen sobre las ventajas del uso de símbolos. En este punto, aún no se introducen los símbolos del álgebra, pero se les pide a los estudiantes que transformen lo que han expresado previamente en palabras y de forma escrita, a una representación simbólica. En esta fase pueden utilizar sus propios símbolos.

Camino didáctico

De acuerdo con Azarquiel (1993) el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra es esencial, ya que ayuda a los estudiantes a conectar símbolos con las ideas y objetos que representan. Para que estos símbolos sean útiles, es importante que estén claramente asociados con algo concreto. Por ejemplo, es muy útil cuando los estudiantes pueden usar símbolos para expresar leyes que han descubierto al observar gráficos o patrones numéricos.

Este proceso de simbolización puede dividirse en varios pasos que hacen que la comprensión y el uso de los símbolos algebraicos sean más fáciles. Primero, los estudiantes deben entender el concepto o la ley de una manera concreta. Luego, deben ser capaces de explicar estas ideas verbalmente. Después, deben aprender a escribir estas ideas de forma clara. A continuación, deben empezar a usar símbolos para representar estas ideas por escrito. Finalmente, deben usar los símbolos adecuados y reconocidos en álgebra para escribir y calcular de manera eficiente.

Anexo 3

HABLEMOS SOBRE SÍMBOLOS

¿Has visto alguna vez un símbolo?

¿En qué lugares o situaciones has visto símbolos?

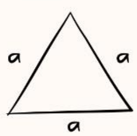
Dibuja algunos ejemplos de símbolos.

¿Para qué crees que sirven los símbolos?

¿Crees que en matemáticas se utilizan símbolos? Si es así, ¿para qué crees que se utilizan?

EL PODER DE LOS SIMBOLOS

Los símbolos tienen un poder único porque pueden transmitir significados profundos y universales sin necesidad de palabras. Un simple dibujo, como un corazón o una paloma, puede expresar amor o paz, siendo comprendido por personas de diferentes culturas y lenguas.



$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

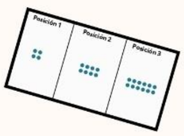
La simbolización en matemáticas fue muy importante porque ayudó a expresar ideas difíciles de forma clara y simple. Antes de usar símbolos, los problemas y las soluciones se explicaban con muchas palabras, lo que hacía más complicado entenderlos. Cuando se empezaron a usar símbolos como “+” para la suma o “=” para la igualdad, los matemáticos pudieron resolver problemas con más precisión y rapidez.

¿Recuerdas el manual que elaboraste?

Intenta escribir las instrucciones para encontrar cualquier posición utilizando símbolos. Puedes emplear los que prefieras o incluso crear tus propios símbolos.

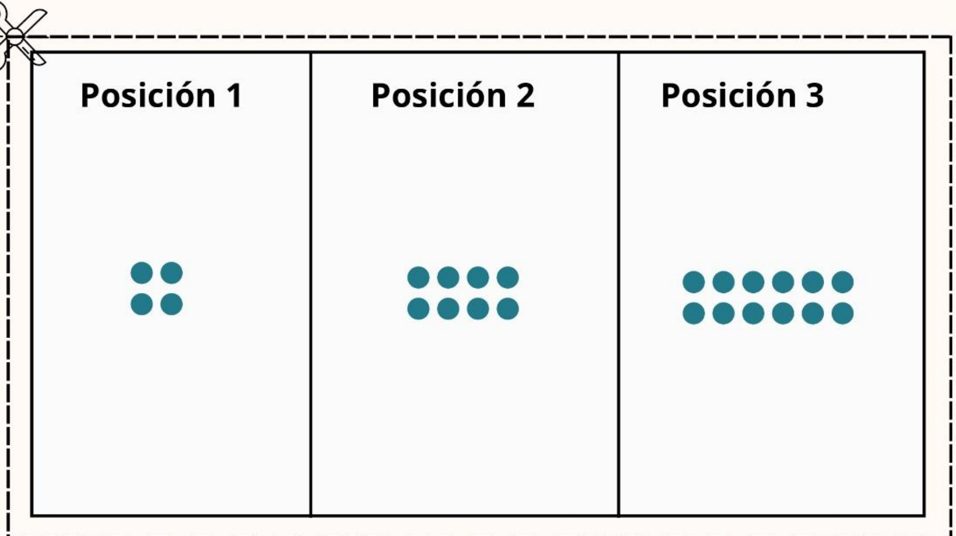
EMPAREJA
SUCESIONES Y TRUCOS

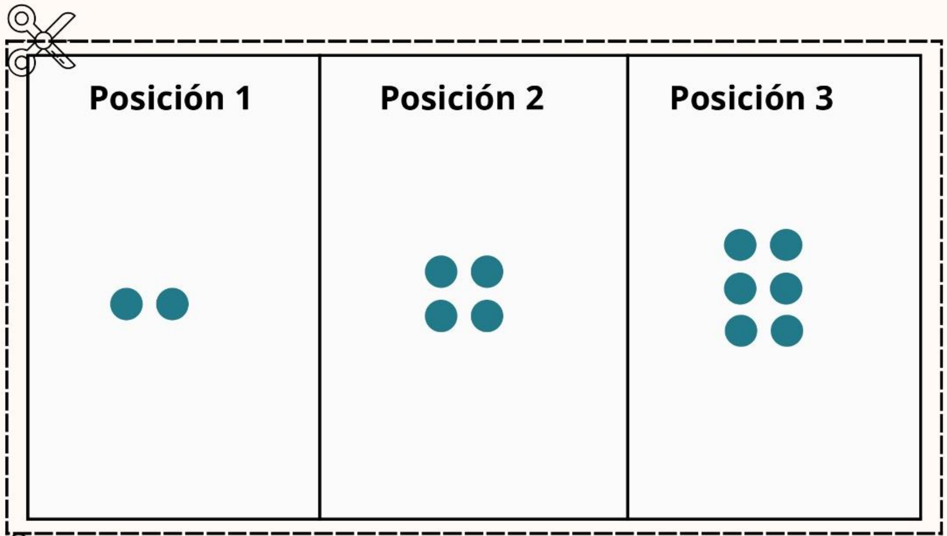
María es profesora en un colegio de Bogotá y ha preparado tarjetas con imágenes de sucesiones gráficas y otras tarjetas que contienen trucos para encontrar cualquier posición en esas sucesiones.

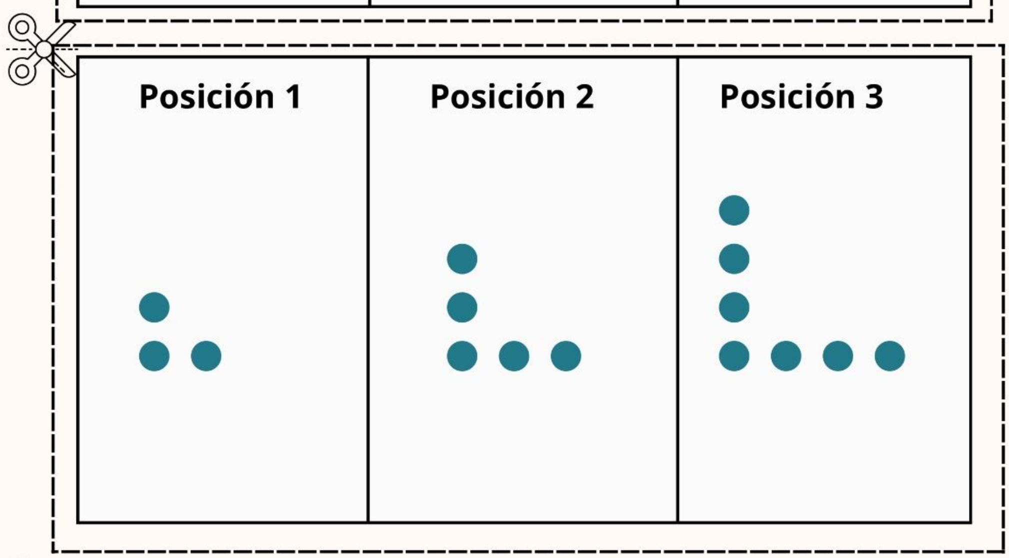


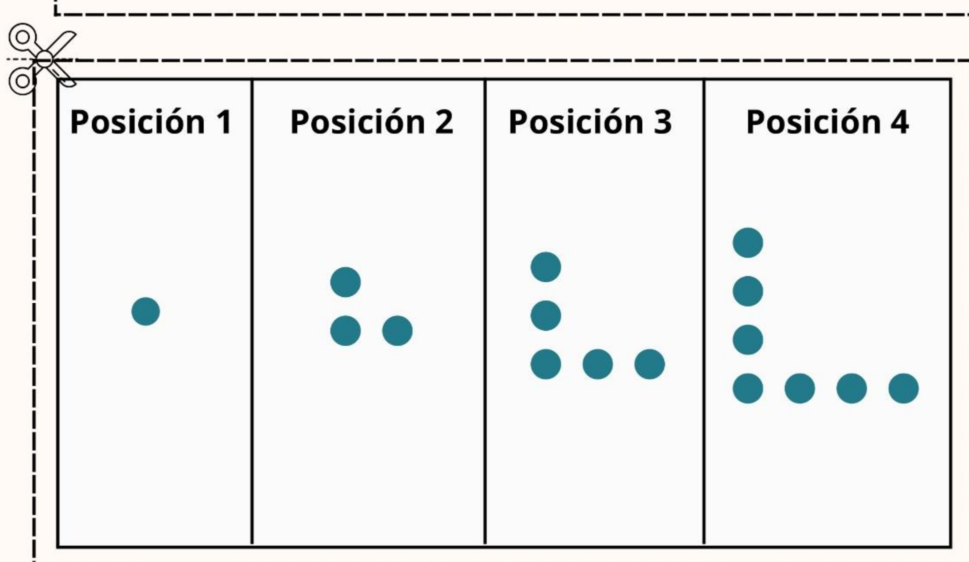
Sin querer, todas las tarjetas se cayeron, lo que provocó que se mezclaran.

Ayuda a la profesora María a emparejar cada sucesión con el truco correspondiente para encontrar cualquier posición.




Posición 1
Posición 2
Posición 3


Posición 1
Posición 2
Posición 3


Posición 1
Posición 2
Posición 3
Posición 4

Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 2

Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 4

Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición deseada, multiplícalo por 2 y réstale 1

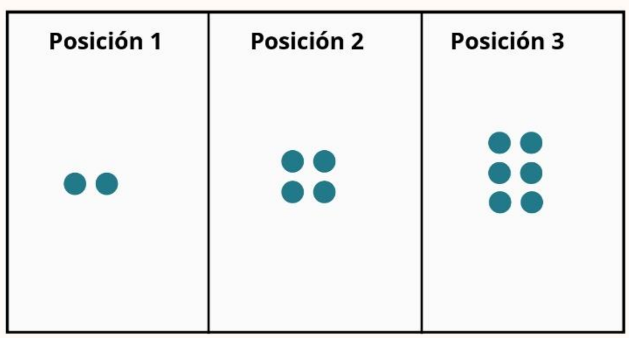
Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición deseada, multiplícalo por 2 y sumale 1

¿Y SI LO REPRESENTAMOS CON SÍMBOLOS?

¿Cómo quedarían las tarjetas de la tarea anterior si, en lugar de usar palabras, utilizamos símbolos?

Con calma, analicemos juntos el contenido de una de las tarjetas

Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 2



Reescribamos la tarjeta pero solo para la posición 4
¡Ayudame a completar!

Para encontrar la cantidad de puntos en la posición ____, toma el número de la posición (__) y multiplícalo por 2

Según la tarjeta ¿Cuántos puntos hay en la posición 4?

Ahora intentémoslo para las posiciones 6, 10 y 20

Para encontrar la cantidad de puntos en la posición ____, toma el número de la posición (__) y multiplícalo por 2

Según la tarjeta ¿Cuántos puntos hay en la posición 6?

Para encontrar la cantidad de puntos en la posición ____, toma el número de la posición (__) y multiplícalo por 2

Según la tarjeta ¿Cuántos puntos hay en la posición 10?

Para encontrar la cantidad de puntos en la posición ____, toma el número de la posición (__) y multiplícalo por 2

Según la tarjeta ¿Cuántos puntos hay en la posición 20?

Ahora intentémoslo pero para cualquier posición

> Para encontrar la cantidad de puntos en la posición ____, toma el número de la posición (__) y multiplícalo por 2

¿Cómo podríamos representar ese cualquier posición?

Utilicemos un símbolo, el que tu quiera

Completa la tarjeta utilizando el símbolo que creaste

¡Aún no hemos terminado, podemos simbolizar aún más la tarjeta!

Ya tienes un símbolo que hace referencia a cualquier posición

¡Utilicémoslo!

> Para encontrar la cantidad de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 2

$\boxed{} \times \boxed{2}$

Tú símbolo

Símbolos algebraicos

Fase 4

Contexto

Los estudiantes ya han presentado algunas propuestas sobre cómo encontrar la cantidad de elementos en cualquier posición utilizando símbolos. Es posible que no hayan empleado símbolos algebraicos, sino que hayan recurrido a dibujos u otros símbolos creados por ellos mismos.

Objetivo

Esta última fase tiene como objetivo introducir los símbolos del álgebra para que los estudiantes los utilicen al formular una estrategia para encontrar los elementos en cualquier posición.

Camino didáctico

En esta fase, se utiliza la historia de la simbolización algebraica y se presenta un ejemplo de cómo podría formularse una expresión general para encontrar la cantidad de elementos en cualquier posición. Posteriormente se proponen tareas que directamente buscan que los estudiantes representen esa generalidad con símbolos algebraicos.

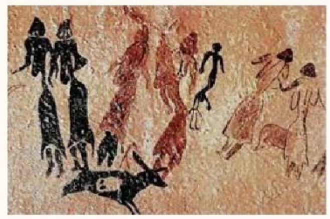
Aclaraciones

Lograr que los estudiantes utilicen los símbolos adecuados del álgebra no es una tarea fácil. Es fundamental seguir enfrentanlos a diversas situaciones donde puedan observar las ventajas y la utilidad de emplear estos símbolos.

Anexo 4

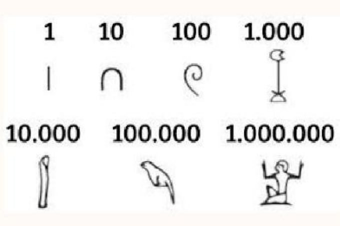
UN POCO DE HISTORIA

Desde la antigüedad, la comunicación ha sido esencial para la humanidad. Antes de la escritura, las personas usaban dibujos en las paredes de las cavernas para contar historias y compartir conocimientos, representando así una forma rudimentaria de comunicación.



A medida que las civilizaciones avanzaron, también lo hizo su necesidad de representación. En Mesopotamia, los sumerios desarrollaron uno de los primeros sistemas de escritura, el cuneiforme, que utilizaba símbolos en forma de cuña para representar palabras y sonidos. Esta invención marcó el comienzo de la escritura y la comunicación escrita.

En Egipto, los jeroglíficos combinaron símbolos con imágenes, creando un lenguaje visual rico en significado. Cada símbolo tenía un propósito específico, ya fuera representar un objeto, un sonido o un concepto abstracto, permitiendo a los egipcios contar historias sobre dioses, faraones y la vida cotidiana.



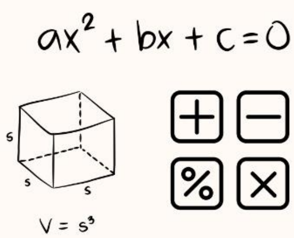
Los antiguos egipcios también desarrollaron un sistema de símbolos para representar números. Utilizaban jeroglíficos para los números, empleando diferentes símbolos para las potencias de diez. Su enfoque permitía realizar operaciones aritméticas simples y llevar registros contables, especialmente en el contexto de la agricultura y la construcción.

Los griegos, hicieron avances significativos en la simbolización matemática. Introdujeron letras del alfabeto como símbolos para representar cantidades desconocidas o variables, sentando así las bases del álgebra.

El simbolo de la sustracción para Diofanto

Los matemáticos árabes, como Al-Juarismi, realizaron importantes contribuciones a la matemáticas y a la simbolización. Al-Juarismi escribió un libro sobre la resolución de ecuaciones, donde utilizaba palabras en lugar de símbolos, pero sentó las bases para el álgebra moderna. El término "álgebra" proviene de su obra, Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala.

En el siglo XVI, matemáticos como René Descartes y François Viète comenzaron a utilizar letras y símbolos de manera más sistemática en sus trabajos. Viète introdujo la notación algebraica moderna, donde las letras representaban tanto cantidades conocidas como desconocidas. Descartes, por su parte, desarrolló el sistema de coordenadas cartesianas, que permitió representar ecuaciones gráficas.



Con el avance de la educación y la publicación de libros de texto, la notación matemática se estandarizó a nivel internacional. Hoy en día, los símbolos matemáticos son reconocidos y utilizados en todo el mundo, facilitando la comunicación entre matemáticos de diferentes culturas y tradiciones.

LOS SÍMBOLOS EN MATEMÁTICAS

Hace muchos siglos, las matemáticas se escribían con palabras. Los antiguos griegos, como Euclides y Pitágoras, describían los problemas y sus soluciones con largas frases. Por ejemplo, si querían sumar dos números desconocidos, tenían que escribir algo así como: "El número desconocido sumado a otro número desconocido es igual a 10". Resolver problemas era un proceso lento y complicado, lleno de palabras.

Con el paso del tiempo, los matemáticos se dieron cuenta de que necesitaban una manera más rápida y eficiente de representar los números y operaciones. Así fue como nacieron los primeros símbolos algebraicos. Los árabes, durante la Edad Media, jugaron un papel crucial en este proceso. Ellos usaban la palabra "al-jabr" (que significa "reunión de partes"), de donde proviene la palabra "álgebra", para describir la manipulación de ecuaciones. Pero, aun así, sus métodos no usaban los símbolos que conocemos hoy en día.

Fue en el Renacimiento, en Europa, cuando se comenzó a usar un lenguaje algebraico más moderno. El matemático francés François Viète en el siglo XVI introdujo el uso de letras para representar cantidades desconocidas. Él fue uno de los primeros en usar letras, como A, B y C, para representar números que no conocíamos. Este fue un paso gigante para las matemáticas.

¡Imagina poder escribir simplemente una letra en lugar de una palabra o una frase completa!

Camilo está aprendiendo álgebra y, en una de las clases, quedó fascinado por los símbolos algebraicos. Decidió retarse a sí mismo a utilizarlos, así que tomó una de las tarjetas que trajo su profesora y trató de reescribirla usando esos símbolos.

Para encontrar el número de puntos en una posición específica, toma el número de la posición deseada, multiplícalo por 2 y réstale 1

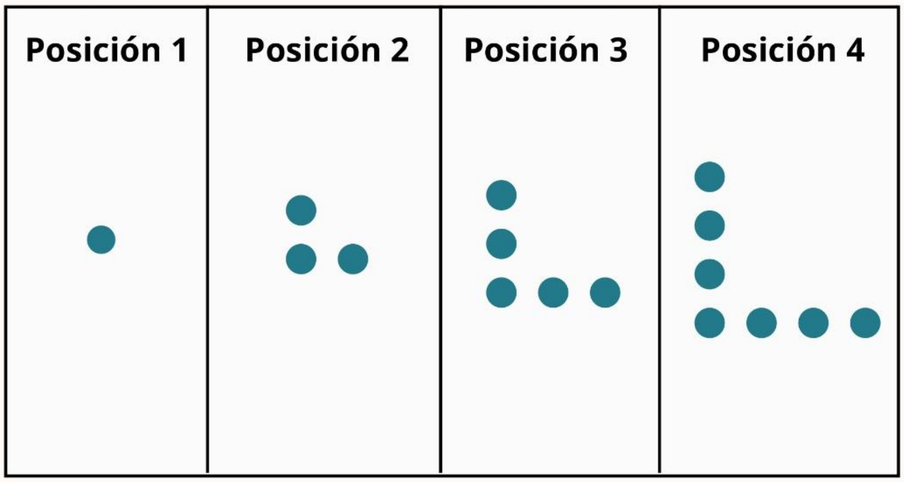
p=número de puntos
n=número de la posición

$$p=2n-1$$

p=número de puntos

n=número de la posición

$p=2n-1$



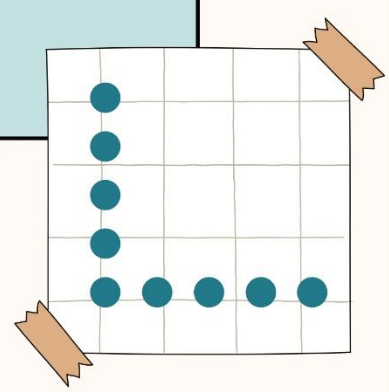
¿La posición 5?

$p=2n-1$

$p=2(5)-1$

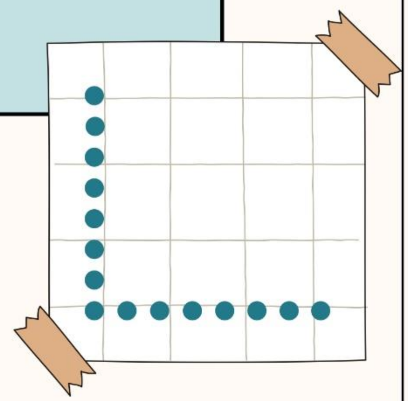
$p=10-1$

$p=9$



¿La posición 8?

$$p=2n-1$$
$$p=2(8)-1$$
$$p=16-1$$
$$p=15$$



¿La posición 10?

¿La posición 50?

¿La posición 100?

Reescribe estas tarjetas utilizando símbolos algebraicos

Para encontrar el número de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 2

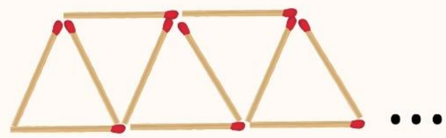
Para encontrar el número de puntos en una posición específica, toma el número de la posición que quieres encontrar y multiplícalo por 4

Para encontrar el número de puntos en una posición específica, toma el número de la posición deseada, multiplícalo por 2 y sumale 1

RETO FINAL

Reto 1

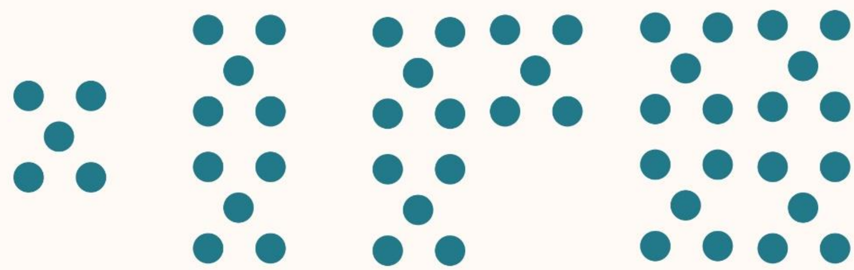
¿Recuerdas esta sucesión?



¿Puedes construir una expresión para determinar cuántos cerillos se necesitan para formar 6, 8, 10, 20 o incluso 100 triángulos?

Reto 2

Posición 1 | Posición 2 | Posición 3 | Posición 4

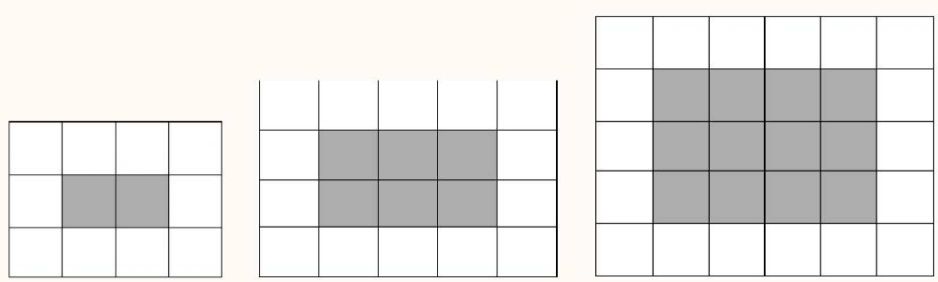


Utiliza símbolos algebraicos para construir al menos una forma de encontrar la cantidad de puntos en cualquier posición.

Reto 3

¿Recuerdas esta sucesión?

Estilo 1 | Estilo 2 | Estilo 3



Utiliza símbolos algebraicos para construir al menos una forma de encontrar la cantidad de baldosas grises.

Utiliza símbolos algebraicos para construir al menos una forma de encontrar la cantidad de baldosas blancas.

Utiliza símbolos algebraicos para construir al menos una forma de encontrar la cantidad de baldosas totales (blancas y grises).