ANÁLISIS DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE VIDEOS DE YOUTUBE RELACIONADOS CON EL TEOREMA DE PITÁGORAS

ANDRÉS FELIPE SUÁREZ CRUZ

CARLOS FERNANDO ZUBIETA HUERTAS

Trabajo de grado presentada como
requisito parcial para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Dr. ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2022

Dedicatoria

Este trabajo de grado es dedicado a mis padres por confiar en mí y apoyar este sueño.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por estar presentes en una de las etapas más importantes de mi vida, brindándome su comprensión, apoyo y su ánimo (disfrazado de mofa).

A mis compañeros de estudio, con quienes trabajamos codo a codo por un mismo objetivo. Gracias por hacer parte de este largo proceso.

A mi compañero de trabajo de grado y compinche en la universidad, quien aceptó este inmenso reto conmigo. Gracias por confiar en mí y disponer de su ingenio para este trabajo.

A mi asesor, el profesor Oscar Molina, quien dedicó a este trabajo esfuerzo y dedicación, y sobre todo mucha paciencia.

Finalmente, y no menos importante, a mí, por no dejar de insistir...

Felipe Suárez

Dedicatoria

Este Trabajo de Grado está dedicado a mi familia, mis hermanas Luisa y Alejandra y en especial a mi mami María Eugenia por ser la principal motivación para lograr este sueño.

Se lo dedico también a mis sobrinos peludos Onix y Ramsés por ser seres tan importantes en mi vida.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios y a mis abuelitos Sildana, Francisco, Teofilde y Perpetua por su infinita protección desde el cielo...

Agradezco infinitamente a mi mami por todo su amor e incondicionalidad y siempre estar a mi lado en este largo proceso.

Agradezco a mis hermanas por siempre brindarme su apoyo cuando más lo necesite.

Agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional por permitirme estar en sus aulas formándome como profesional y como persona.

Agradezco a todos los funcionarios del DMA por contribuir en mi formación profesional y personal, en especial a aquellos que me marcaron como ejemplos a seguir; las profes Maritza, Carmen y Marcela; los profes Leonardo, Orlando, Fernando, Alejandro y Oscar; por último, a Yully por siempre ayudarme desde su labor como secretaria de la LM además de ser una gran amiga.

Reitero mi agradecimiento al profe Oscar Molina por haber aceptado ser nuestro asesor y todos los esfuerzos que esto implico: conocimientos, dedicación, tiempo y bastante paciencia...

Agradezco a todas aquellas personas con las que reímos y sufrimos nuestro paso por la universidad, en especial a aquellas en las que siempre encontré un mensaje de apoyo. Jeffer, Isa, Anamaría, Yenny, Tata, Alejo, Christian, Angela, Elvis, Mafe y Jhon...

Agradezco a Luis Bohórquez, Sebastián Peña, Juan Muñoz y Felipe Suarez por su incondicional amistad sabiendo que después de superada esta etapa de nuestras vidas seguiremos estando ahí para los otros...

Reitero mi agradecimiento a Felipe Suarez por haber aceptado trabajar conmigo en esta y otras tantas oportunidades...

Fernando Zubieta Huertas

TABLA DE CONTENIDO

FIGURAS

TABLAS

RESUMEN

Actualmente es muy común utilizar videos en ámbitos educativos, procurando enriquecer el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, no es clara la idoneidad de tales videos en relación con el abordaje de los contenidos matemáticos. En este trabajo de grado se analiza tal idoneidad (denominada idoneidad epistémica) en doce videos populares relativos al Teorema de Pitágoras albergados en la plataforma YouTube. Este análisis involucra cuatro aproximaciones conceptuales al Teorema: concepciones, argumentos, situaciones problema y generalizaciones. En este marco, usando como marco analítico los criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico, se aborda cada video y se presenta un panorama general según cada aproximación. Resultados del estudio muestran que los videos no tienen un uso del lenguaje matemático sostenido a lo largo de los videos, no hay argumentos que hagan uso de proposiciones explícitas para un espectador, hay procedimientos ocultos o no expresados de una manera rigurosa. Se resalta un intento por coordinar diferentes tipos de representación, pero no es usual el uso de software especializados que podrían apuntar a mejores representaciones y favorecer procesos de visualización.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, análisis de videos educativos, idoneidad epistémica.

ABSTRACT

Currently, it is very common to use videos in educational environments, seeking to enrich students' learning. However, the suitability of such videos in relation to the approach of mathematical contents is not clear. This study analyzes such suitability (called epistemic suitability) in twelve popular videos related to the Pythagorean Theorem hosted on the YouTube platform. The analysis involves four conceptual approaches to the Theorem: conceptions, arguments, situations, and generalizations. The suitability criteria proposed by the Onto-Semiotic Approach was used as analytical tool. Results of the study show that the videos do not have a sustained use of mathematical language throughout the videos, there are no arguments that make use of explicit propositions for a viewer, there are hidden procedures or not expressed in a rigorous way. An attempt to coordinate different types of representation is highlighted, but the use of specialized software that could aim at better representations and favor visualization processes is not usual.

INTRODUCCIÓN

El presente documento es una monografía de Trabajo de Grado, requisito para optar por el título de Licenciados en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Presentamos una propuesta de análisis de idoneidad epistémica de video educativos alojados en la plataforma YouTube que estén relacionados con el objeto matemático Teorema de Pitágoras. Consideramos que la propuesta es pertinente en el marco de los cambios educativos que se produjeron a raíz de la emergencia sanitaria causada por el Covid-19.

Estamos interesados en generar un análisis de idoneidad epistémica, tomando como principales referentes la propuesta de análisis presentada por Beltrán-Pellicer et al. (2018), y los indicadores y descriptores de idoneidad epistémica propuestos por Breda et al. (2017). En particular, nosotros abordamos el análisis epistémico del Teorema de Pitágoras desde cuatro maneras de aproximarse conceptualmente a este: (i) sus concepciones, que aluden a las formas en las que es posible enunciarlo teniendo en cuenta la relación entre objetos (por medidas de lados y por áreas de cuadrados); (ii) tipos de argumentos que lo sustentan (numéricos, geométricos, geométrico-algebraicos y geométrico-dinámicos); (iii) mediante las diversas situaciones en las que el Teorema puede ser aplicado (reales, realistas, fantasiosas, puramente matemáticas y científico-matemáticas); y (iv) posibilidades de generalizarlo a partir de la concepción relacionada con áreas (para polígonos regulares, para polígonos semejantes y para triángulos nos rectángulos).

Teniendo en cuenta este panorama, hemos planteado la elaboración de este documento en cinco capítulos:

En el primero, presentamos el planteamiento del problema; específicamente, exponemos la justificación basándonos, entre otras cosas, en nuestras experiencias educativas durante la emergencia sanitaria; así mismo, el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo.

En el segundo, presentamos los referentes conceptuales del estudio, el cual consta de cuatro partes. En la primera, presentamos una tipología de videos según la intencionalidad con la que se presenta su contenido. En la segunda, los referentes matemáticos desde las aproximaciones al Teorema de Pitágoras (concepciones, argumentos, situaciones y generalizaciones). En la tercera, el marco curricular a partir del cual indicamos cómo aparece el Teorema en los documentos directrices educativas para las matemáticas en Colombia. En la cuarta, una descripción sucinta de la teoría de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico (EOS).

En el tercero, presentamos la metodología, la cual consta de tres fases. En la primera, determinamos los videos que fueron analizados para el estudio y la manera para hacer tal determinación. En la segunda, adaptamos los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por el EOS para el Teorema de Pitágoras. En la tercera, describimos la forma en la que fueron presentados los análisis.

En el cuarto, presentamos lo análisis de los videos y los resultados correspondientes. Finalmente, en el quinto capítulo presentamos las conclusiones del trabajo; para ello, indicamos el nivel de desarrollo de los objetivos planteados, comentando los resultados obtenidos de los análisis; por último, describimos los principales aportes que nos dejó la elaboración de este trabajo de grado como futuros educadores matemáticos.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN

El marco de la pandemia originada por el COVID-19 asentó una dinámica educativa mediante la cual los procesos de instrucción deben ser cambiados. Recomendaciones generales hechas por el MEN por esa época (MEN, 2020) indicaron elementos para llevar a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje mediados por las TIC; entre estos se abordaron entornos virtuales de aprendizaje como las plataformas Edmodo, Google Classroom o Teams; diferentes aplicaciones para realizar clases de forma sincrónica como Zoom, Google Meet o Skype; y material audiovisual disponible en línea como Discovery Education[1], Colombia Aprende[2] o YouTube. De acuerdo con lo expuesto, es evidente que las prácticas docentes que conocíamos como normales en la modalidad presencial de la educación han venido cambiado considerablemente. Esto, debido a que dichas prácticas deben, ineludiblemente, adaptarse a las realidades coetáneas.

Esta actual normalidad implicó que los docentes se vean abocados a cambiar sus prácticas educativas apoyando parte de su labor en videos disponibles en plataformas como YouTube. Nuestras experiencias basadas en las prácticas pedagógicas y la literatura especializada (Beltrán-Pellicer et al., 2018a; 2018b) nos dejaron entrever que es usual que los profesores no tienen criterios no ingenuos para elegir un material audiovisual idóneo que apoye su ejercicio profesional. Este escenario nos lleva a poner en duda la calidad de la formación de los estudiantes, por cuanto no está totalmente controlada la riqueza de los contenidos o procesos que se puede poner a su disposición mediante los videos que se les sugiere.

En el ámbito de esta nueva realidad, hemos tenido la oportunidad de ver de primera mano las experiencias de personas de nuestro entorno más cercano. En ese contexto, nos ha sido fácil notar que, para el caso de la educación básica secundaria y media, los docentes de matemáticas están optando por la realización de guías taller que viene

[1] Discovery Education es una página web que desarrolla recursos curriculares digitales, en los que incluyen sus propios videos como parte de los recursos.

[2] Colombia Aprende es una página web educativa propuesta por el Ministerio de Educación Nacional que ofrece videos propios como material educativo interactivo.

acompañadas de enlaces a videos de YouTube. Al momento de hacer el pertinente acompañamiento en nuestras prácticas iniciales, tuvimos la percepción de que no todo el material audiovisual era afortunado: presentaba errores conceptuales, no usaba un lenguaje matemático adecuado o no era pertinente para el nivel de escolaridad respectivo.

Así mismo, durante el desarrollo de nuestras prácticas de inmersión, que realizamos con mediación de las TIC, nos vimos en la necesidad de complementar nuestras intervenciones con videos de YouTube. Durante el proceso de elección pudimos observar que en algunos de estos había errores en los procedimientos, no se usaba adecuadamente el lenguaje matemático o no promovía el interés en los estudiantes. Este escenario no solo nos dejó la percepción de que había videos no idóneos, sino que nos llevó a preguntarnos si como futuros profesores teníamos criterios suficientes para escoger videos idóneos que pudieran ser usados en modalidades de educación remota mediado por TIC.

Por otro lado, no debemos desconocer un hecho real. Podemos encontrar gran variedad de videos educativos en línea que son altamente consultados por los estudiantes bien sea para reforzar lo "visto" en clase, o para hacer una consulta previa a la clase misma. Siendo YouTube una red tan popular entre los jóvenes (Castaño, 2008), es normal que ellos tiendan a utilizar estas producciones en busca de ayuda para sus tareas escolares, o para reforzar algún tema que no quedó claro. En consecuencia, parece ser que los videos de YouTube son ampliamente aceptados por la comunidad estudiantil como una forma de aprender matemáticas (Ramírez, 2010).

El escenario anterior nos indujo, entonces, el planteamiento de las siguientes preguntas: ¿Qué tan idóneos son los videos que se encuentran en YouTube respecto a una temática de la matemática escolar como el Teorema de Pitágoras? ¿Qué criterios debe tener en cuenta un docente de matemáticas al momento de elegir material audiovisual para ser usado como apoyo didáctico en el aula?

Apoyándonos en nuestra experiencia adquirida durante el paso por la LM, consideramos que uno de los objetos matemáticos que tiene una gran aplicabilidad en las matemáticas y otras ciencias es el Teorema de Pitágoras. Además, su aplicación posibilita la construcción de algunos elementos de la trigonometría, permite definir la distancia euclidiana sobre la cual se construye la geometría analítica usual, facilita la introducción a los números irracionales, etc. Adicionalmente desde una perspectiva curricular encontramos que en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006, p. 86) se declara que, al finalizar el ciclo octavo a noveno, en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, los estudiantes debieron adquirir conocimientos y desarrollar habilidades directamente relacionadas con el Teorema de Pitágoras, lo que implica que sea uno de los contenidos matemáticos más estudiados en la geometría escolar de la educación básica secundaria y media.

Por consiguiente, consideramos que en medio de esta nueva realidad en donde la educación es medida por las TIC y, por ende, la búsqueda de material audiovisual disponible en línea como apoyo a la labor docente es más recurrente, es necesario el estudio de los videos disponibles en YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras (uno de los contenidos curriculares más estudiados), con el propósito de conocer su Idoneidad Epistémica desde la perspectiva del EOS.

1.2 OBJETIVOS

Con base en la problemática planteada consideramos que para poder abordarla se hace necesario declarar los siguientes objetivos generales y específicos del trabajo.

1.2.1 Objetivo general

Analizar cualitativamente el nivel de Idoneidad Epistémica, desde la perspectiva del Enfoque OntoSemiótico, de los videos más populares de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Escoger los videos más populares de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.
2. Adaptar los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Onto-Semiótico, al Teorema de Pitágoras, poniendo énfasis en la faceta epistémica.
3. Analizar el material audiovisual recopilado usando los descriptores de los criterios de Idoneidad Epistémica adaptados.

CAPÍTULO 2. REFERENTES CONCEPTUALES

En este capítulo presentamos los principales referentes conceptuales que permiten sustentar y desarrollar el trabajo de grado. Específicamente, consta de cuatro secciones: en la primera, presentamos la conceptualización adoptada para *videos educativos* y una tipificación para esta clase de videos; enseguida, exponemos diferentes aspectos de orden epistémico (representaciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, problemas) sobre el Teorema de Pitágoras, centrado en aspectos (en adelante, aproximaciones) tales como: diversas concepciones del teorema, los tipos de argumentos más usuales de este, algunas de sus situaciones matemáticas más comunes y las principales generalizaciones del mismo; luego, presentamos un panorama general de este objeto matemático dentro del Currículo Escolar Colombiano; por último, exponemos algunos elementos que plantea la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para la Idoneidad Didáctica, en particular para la Faceta Epistémica.

2.1 TIPOS DE VIDEO EDUCATIVO

Como describimos en el planteamiento del problema, el principal insumo para la elaboración de este trabajo son los videos educativos; por consiguiente, presentamos la conceptualización adoptada sobre video educativo empleada para este estudio.

Un video educativo es todo material audiovisual que cumple un objetivo didáctico (Bravo, 1996) y que puede ser utilizado durante el proceso de enseñanza o el proceso de aprendizaje, como un recurso del profesor, a pesar de no estar diseñado con este propósito (Atencia, 2009).

Los videos educativos se pueden caracterizar de acuerdo a sus recursos técnicos propuestos por (Vaquero, Brescó, Coiduras & Carrera, 2019), si utilizan como soporte varias aplicaciones como pizarras electrónicas, simuladores, motores de realidad aumentada, animaciones, programa informático (e.g., tutorial sobre las generalizaciones del Teorema de Pitágoras usando GeoGebra), aplicaciones de captura de pantalla y edición, material didáctico (e.g., archivos PDF, presentaciones de diapositivas, y otros tipos de complemento), filmación, (e.g., documental sobre el Teorema de Pitágoras de Universo Matemático, qué incluye filmes, voces secundarias, ediciones, diapositivas, entre otros).

Los videos educativos se pueden tipificar de acuerdo con la intencionalidad que presentan, (Cebrían, 1987). La Tabla 1, presenta la descripción para cada uno de los tipos de videos atendiendo a estas categorías: Interés Público e Interés Académico; el Interés Académico se divide entre Curricular y No Curricular; y, el interés No Curricular entre Científico-Técnico y Áreas del Conocimiento.

Tabla 1. Tipos de videos según su intencionalidad

<table>
<tr><th>Tipos de videos</th><th colspan="3">Intencionalidad</th></tr>
<tr><td>Interés Público</td><td colspan="3">Son aquellos cuyo objetivo es presentar a una audiencia dispersa aspectos relacionados con determinadas formas culturales. Para este tipo de videos no se requiere un previo conocimiento matemático (e.g., documental de Universo Matemático, sobre el teorema de Pitágoras).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Interés Académico</td><td>Curricular</td><td colspan="2">Son aquellos que se realizan explícitamente a la programación específicamente de la asignatura; plantean elementos evaluativos de manera explícita (e.g., un video para sexto grado que pretenda explicar una aplicación sobre el teorema de Pitágoras; en este caso, el video comenzaría hablando del nivel educativo para el cual está dirigido e indicaría su objetivo concreto dentro del plan curricular).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No Curricular</td><td>Científico-Técnico</td><td>Son aquellos que exponen contenidos relacionados con el avance de la ciencia y la tecnología. Este tipo de videos requieren un previo conocimiento matemático para ser entendidos (e.g., un video sobre la generalización del teorema de Pitágoras requiere conocer previamente el Teorema de Pitágoras).</td></tr>
<tr><td>Áreas del Conocimiento</td><td>Son aquellos que pretenden dar a conocer algún contenido académico, y son utilizados como recursos didácticos, pero no pretenden explícitamente evaluar los aprendizajes potenciales involucrados en el video (e.g., tutorial que presenta la demostración del Teorema de Pitágoras).</td></tr>
</table>

Estas categorías se convierten en un referente para tipificar los videos educativos que consideremos como muestra del estudio, según su intencionalidad. Así mismos, los rasgos técnicos indicados antes se convierten en un referente para caracterizar estos videos educativos, según sus componentes.

2.2 REFERENTES MATEMÁTICOS

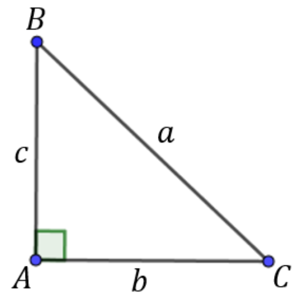
El objeto matemático protagonista de este trabajo es el Teorema de Pitágoras. Tomando de base principalmente la propuesta de (Torres, 2017) para estudiar este objeto desde un punto de vista epistémico, es decir, la representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto a un significado de referencia, según Godino (2013); en nuestro caso es el significado matemático del Teorema de Pitágoras. Nosotros planteamos cuatro aspectos centrales que apuntan a presentar diferentes aproximaciones al Teorema: concepciones, situaciones, argumentos y generalizaciones. Vale aclarar que este último aspecto no es mencionado por Torres; nosotros completamos la propuesta añadiéndolo.

2.2.1 Concepciones del Teorema de Pitágoras y principales representaciones asociadas

El Teorema de Pitágoras es posible enunciarlo a partir de dos concepciones: como una relación entre áreas de superficie de cuadrados o como una relación entre medidas de lados de un triángulo rectángulo. A estas dos interpretaciones se les pueden relacionar diferentes tipos de representaciones, a saber, verbal, gráfica estática, simbólica, numérica, gráfica dinámica y en material concreto. En la Tabla 2 y Tabla 3 se presentan las dos concepciones del Teorema, y una ilustración de algunos tipos de representaciones asociadas a cada uno con sus respectivas descripciones. Creemos que esto permite dejar el mensaje de los tipos de representaciones que se pueden vincular al objeto en una práctica matemática o de instrucción específica en la que el Teorema intervenga.

Tabla 2. Concepción del Teorema de Pitágoras de la relación entre medidas de lados de un triángulo rectángulo y representaciones asociadas

Concepción / Representación	**Relación entre medidas de lados de un triángulo rectángulo**
Verbal (Enunciado)	En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

Gráfica estática-Simbólica	 Figura 2.2-1. Gráfica estática-simbólica para las medidas de lados de un triángulo rectángulo Las letras mayúsculas A, B y C indican los vértices del triángulo; el ángulo recto se encuentra marcado por su respectiva notación geométrica para el $\angle A$; las letras minúsculas a, b y c indican las medidas de la hipotenusa y los catetos respectivamente, estando estas directamente relacionadas con el vértice opuesto a cada segmento. $a, b,$ y c se relacionan mediante la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$; siendo a^2, b^2 y c^2, los cuadrados de las medidas de la hipotenusa y los catetos, respectivamente.
Numérica	Las letras minúsculas a, b y c indican números naturales diferentes de cero[3] que satisfacen la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$; el paréntesis indica que dichos valores forman una triada ordenada de números, donde cada componente corresponde a $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{b^2}$ y $\sqrt{c^2}$ respectivamente. A su vez a, b y c indican las medidas de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, colocando en la primera componente, el menor entre ellos. A la expresión (b, c, a) se le conoce comúnmente como *terna pitagórica*.
Gráfica Dinámica	Para un triángulo rectángulo en movimiento, se debe cumplir, que el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Este es el tipo de representaciones que se pueden realizar en un software de geometría dinámica. Estas representaciones dinámicas son útiles para ilustrar el Teorema, más no para demostrarlo.
Material concreto	Hay material concreto que ilustra triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medida una terna pitagórica –e.g., (3, 4, 5)–, pero que en sentido estricto no ilustran que la medida de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de la medida de los catetos –e.g., $5^2 = 3^2 + 4^2$–, dado que esa igualdad se puede verificar a través de realizar la suma de números específicos que resultan de los cuadrados –e.g., 9 y 16–. En la literatura no encontramos referencias sobre material concreto que mostrara el Teorema de Pitágoras según su relación entre medidas de lados, por

[3] Cuando se trabaja con triadas pitagóricas, en teoría de números, es usual utilizar números naturales; sin embargo, no desconocemos que hayan triadas con números reales –e.g., $(\pi, e, \sqrt{\pi^2 + e^2})$–, pero para este trabajo, estos no son de nuestro interés.

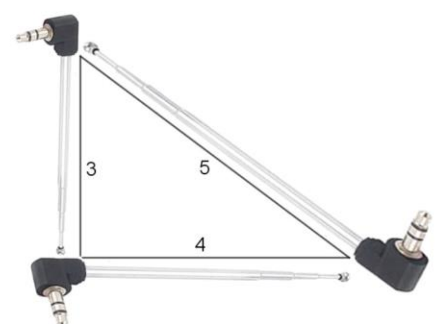
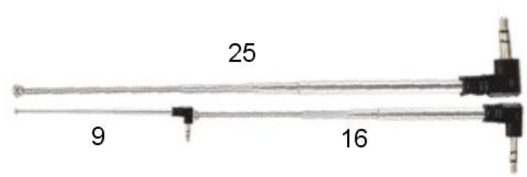
	lo que nos atrevimos a realizar una propuesta que puede ser de interés. A continuación, explicamos cómo se podría hacer uso de cierto material concreto para ilustrar el Teorema bajo esta concepción: Para un caso particular del triángulo rectángulo (3, 4, 5), debería tener una antena de medida 5 unidades, que al expandirse tenga como medida 25 unidades; de la misma manera, tener una antena de medida 4 unidades y extenderla hasta que tenga una medida de 16 unidades; y una antena de medida 3 unidades, que al expandirse tenga como medida 9 unidades y se ubicarían las antenas como se muestra en la Figura 2.2-2. En seguida, poner las antenas de medida 3^2 y 4^2, una al lado de la otra y colineales, como se muestra en la Figura 2.2-3, y comprobar que la medida total de las dos antenas juntas es igual a la medida de la antena de 5 unidades extendida a 5^2.  Figura 2.2-2. Material concreto para las medidas de lados de un triángulo rectángulo  Figura 2.2-3. Material concreto para las medidas de lados de un triángulo rectángulo

Tabla 3. Concepción del Teorema de Pitágoras de la relación entre áreas de cuadrados y representaciones asociadas

Concepción / Representación	**Relación entre áreas de cuadrados**

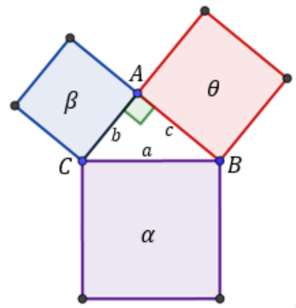
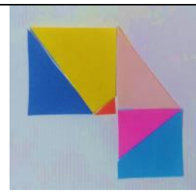
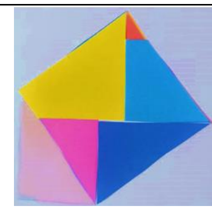
<table>
<tr><td>Verbal (Enunciado)</td><td>El área del cuadrado construido tomando como uno de sus lados la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos tomando como lado, respectivamente, uno de los catetos del mismo triángulo rectángulo.</td></tr>
<tr><td>Gráfica estática-Simbólica</td><td>

Figura 2.2-4. Gráfica estática-simbólica para áreas de cuadrados

Las letras mayúsculas A, B y C indican los vértices del triángulo; el ángulo recto se encuentra marcado por su respectiva notación geométrica para el $\angle A$; las letras minúsculas a, b y c indican las medidas de la hipotenusa y los catetos respectivamente, estando estas directamente relacionadas con el vértice opuesto a cada segmento; las letras griegas α, β y θ indican el área de superficie de los cuadrados construidos tomando como uno de sus lados la hipotenusa o uno de los catetos respectivamente. α, β y θ se relacionan mediante la igualdad $\alpha = \beta + \theta$, siendo estas las áreas de los cuadrados cuyos lados miden $a, b,$ y c, respectivamente.</td></tr>
<tr><td>Gráfica Dinámica</td><td>Para un triángulo rectángulo en movimiento, se debe cumplir, que el área del cuadrado construido tomando como uno de sus lados la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos tomando respectivamente como lado uno de los catetos del mismo triángulo rectángulo. A modo de ejemplo, en la Sección 2.2.2.3, en la p. 34, se presenta un argumento dinámico para la demostración del Teorema de Pitágoras propuesta por Perigal (1830); estas representaciones dinámicas son útiles para ilustrar el Teorema, más no para demostrarlo.</td></tr>
<tr><td>Material concreto</td><td>Para cualquier ficha o pieza que representa un triángulo rectángulo, se debe cumplir que las fichas o piezas que representan el área del cuadrado construido tomando como uno de sus lados la hipotenusa, cubran exactamente dicha región; a su vez, que al ser reacomodadas tales fichas cubran exactamente las regiones que representan las superficies de los cuadrados construidos tomando respectivamente como lado uno de los catetos del mismo triángulo rectángulo. En la Figura 2.2-5 se muestra cómo las fichas de las superficies de los cuadrados que corresponden a los catetos cubren la superficie del cuadrado, al reubicarse cubren la superficie del cuadrado construido a partir de la hipotenusa, como en la Figura 2.2-6. (Anaricio–Göpel, 1824, como se citó en González, 2008). (Loomis, 1968)</td></tr>
</table>

	 Figura 2.2-5. Material concreto para las áreas de los cuadrados	 Figura 2.2-6. Material concreto para las áreas de los cuadrados

2.2.2 Argumentos

Existe un cuantioso número de argumentos que soportan la validez del Teorema de Pitágoras propuestos por diversos autores –e.g., Pappus, Bhaskara, Euclides, Leonardo Da Vinci– (Torres, 2017); Loomis (1968) recopiló 367 argumentos entre demostraciones formales[4] y pruebas[5], proponiendo una clasificación para estos. Esta clasificación consiste en cuatro categorías: geométrico-algebraica, geométrica, dinámica[6] y cuaterniónica[7].

Para nuestro trabajo, usamos tres categorías: la geométrica, la geométrico-algebraica y la geométrico-dinámica. Para las dos primeras, usamos la misma descripción propuesta por (Loomis, 1968); para la última, usamos la descripción de (Barrantes, Zamora y Barrantes, 2021); esto es, en lugar de aludir a propiedades de fuerza y masa como lo hace Loomis para verificar la invariante pitagórica, aludimos a la posibilidad de movimiento o transformación en un continuo de las figuras geométricas implicadas, verificando dicha invariante.

[4] Para este Trabajo de Grado, entendemos por demostración, como la descripción, en el contexto de una comunidad de aula en un momento dado, de un argumento matemático que cumple tres criterios: (i) utiliza declaraciones aceptadas por la comunidad del aula (conjunto de declaraciones aceptadas) que son verdaderas y están disponibles sin más justificación; (ii) emplea formas de razonamiento (modos de argumentación) que son válidas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de, la comunidad del aula; y (iii) se comunica con formas de expresión (modos de representación de argumentos) que son apropiadas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de, la comunidad del aula, según Stylianides (2007).

[5] Para este Trabajo de Grado, entendemos por prueba a aquellos argumentos que se sustentan en verificaciones hechas a partir de diferentes representaciones –gráficas, con material concreto, con simbología algebraica, etc.– sin exponer encadenamientos de aserciones o garantías (que son parte de un sistema teórico).

[6] Argumentos sustentados a través de las propiedades de fuerza y masa.

[7] Argumentos sustentados mediante el uso de vectores que representan cuaterniones. Estos son una extensión de los números reales, similar a la de los complejos, en el que cada número está compuesto por cuatro partes de la siguiente manera: $q = a + bi + cj + dk$ con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

En la Figura 2.2-7 presentamos la relación que existe entre las dos concepciones del Teorema de Pitágoras, las tres categorías de los argumentos para dicho objeto matemático y sus respectivas subcategorías (en adelante, grupos).

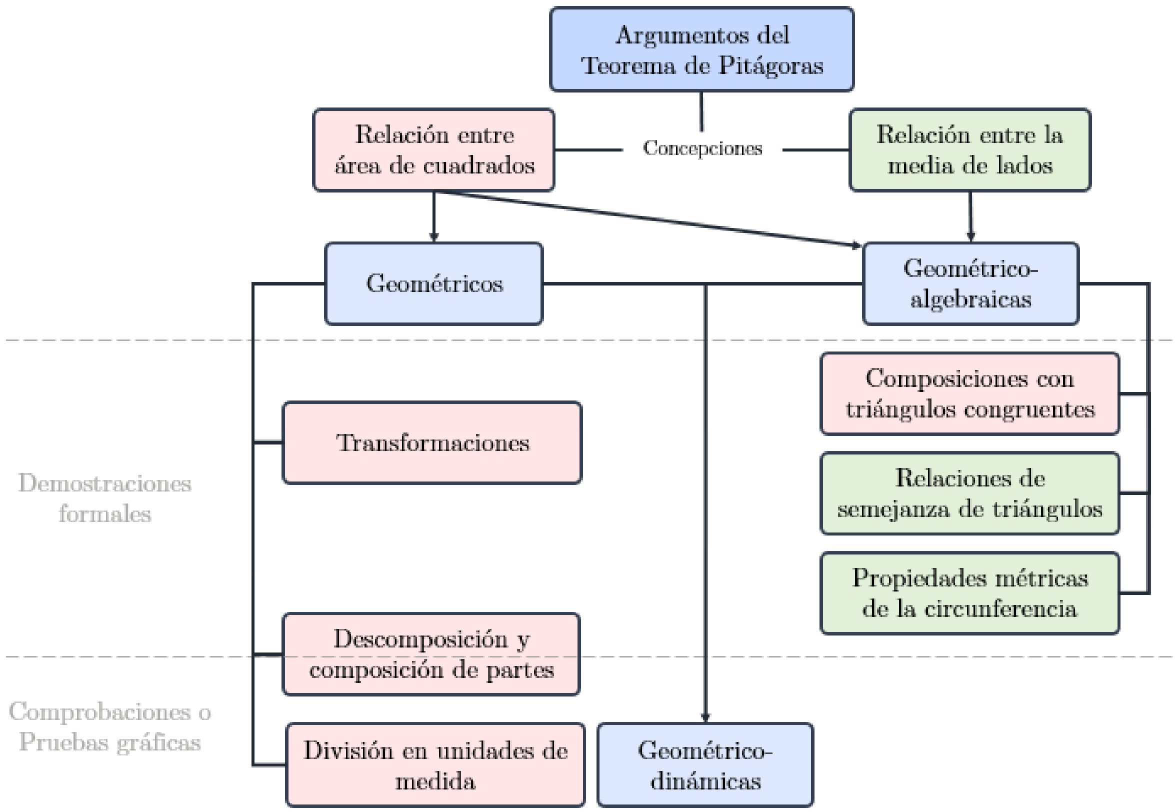


Figura 2.2-7. Relación entre las concepciones del teorema de Pitágoras, las categorías y subcategorías de sus argumentos

Es importante resaltar que para los argumentos de descomposición y composición de partes y las transformaciones, usualmente se presentan en textos como comprobaciones a la luz de representaciones gráficas, es decir como pruebas que no están basadas en un sistema teórico ni se sustentadas formalmente; ello no significa que no haya textos, como el Libro I de los Elementos de Euclides (Elementos de Euclides, 1996, p. 2426), que presenten las respectivas demostraciones formales, desatacando, eso sí, que no es usual que tales demostraciones formales sean expuestas.

Argumentos geométricos

Este tipo de argumentos le da la prioridad a la representación gráfica estática y al significado del teorema por áreas. (Loomis, 1968) propone diez subtipos para este tipo de argumentos. Sin embargo, decidimos utilizar la clasificación propuesta por

(Torres, 2017) quien, basado en aquella, considera solo tres subcategorías. Utilizamos esta última propuesta ya que la consideramos más operativa para nuestro análisis. Presentamos a continuación la descripción para cada uno de tales grupos:

Grupo 1. Argumentos a partir de la división en unidades de medida: Estos argumentos consisten en dividir los tres cuadrados (formados con los lados del triángulo) en unidades iguales; obtenemos que la suma de las unidades en las que ha sido dividido el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las unidades en las que han sido divididos los cuadrados construidos sobre los catetos. Este tipo de verificación se basa en ternas pitagóricas, a partir de las cuales se define el número de unidades a considerar por cada lado los respectivos cuadrados[8]. La Figura 2.2-8 ilustra un ejemplo para este tipo de argumento, en el que con la terna $(3,4,5)$ se prueba gráficamente que el cuadrado que tiene uno de sus lados como la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados que tienen uno de sus lados como los catetos, como se muestra en la figura tomada de (Loomis, 1986):

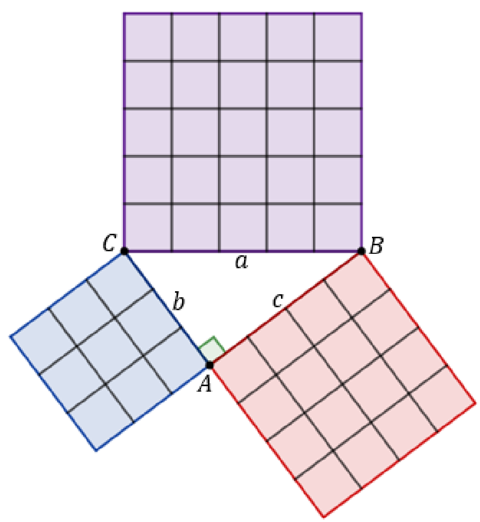


Figura 2.2-8. Argumento a partir de la división en unidades de medida

En el triángulo rectángulo de la Figura 2.2-8, se sabe que el triángulo rectángulo con 3, 4 y 5 como la medida de la hipotenusa y los catetos, respectivamente, determina la terna pitagórica $(3, 4, 5)$; además, se tiene que cada uno de los cuadrados formados con los lados del triángulo rectángulo se dividen en cuadrados más pequeños con la medida sus lados $1u$, como se muestra en la Figura. Si se cuenta la cantidad de cuadrados que lo componen (formados a partir de la hipotenusa y los catetos), serán

[8] Los triángulos rectángulos que cumplan estas condiciones se conocen como triángulos egipcios.

a^2, b^2 y c^2 respectivamente; a la vez se tiene que se satisface la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$.

Para el caso particular de la Figura 2.2-8, tenemos un triángulo rectángulo con 3, 4 y 5 como la media de la hipotenusa y los catetos respectivamente, con lo cual se determina la terna pitagórica $(3, 4, 5)$; aplicando el Teorema de Pitágoras a esta terna se tiene que:

$$25 = 9 + 16 \therefore 5^2 = 3^2 + 4^2$$

Queda así verificado el Teorema para este tipo de triángulos rectángulos.

Grupo 2. Argumentos a partir de descomposición y composición de partes: También conocidos como puzles pitagóricos; estos argumentos consisten en la descomposición en partes de los cuadrados que tienen como uno de sus lados alguno de los catetos, para luego componer, a modo de rompecabezas, el cuadrado que tiene como uno de sus lados la hipotenusa. El procedimiento inverso también hace pate de este grupo: las partes en que se descompone el cuadrado, construido con base en la hipotenusa, se disponen en los cuadrados construidos con base en los catetos del triángulo rectángulo. La Figura 2.2-9 muestra como ejemplo de este tipo de argumento, una forma de descomposición según (Perigal, 1830, como se citó en Gonzáles, 2008):

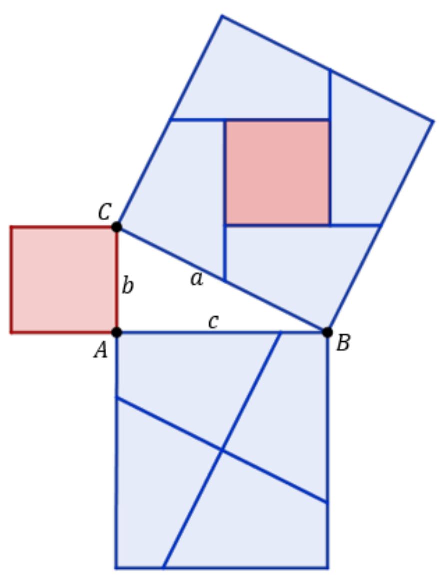


Figura 2.2-9. Argumento de Perigal a partir de descomposición y composición de partes.

Mostración[9] del teorema: Para un triángulo rectángulo con BC, AC y AB como la media de la hipotenusa y los catetos, respectivamente; además que $AC < AB$[10]. Se tiene que para el cuadrado con uno de sus lados el cateto de medida AB, se debe descomponer trazando dos segmentos, uno paralelo a la hipotenusa y el otro perpendicular a esta, tal que estos se intersequen en el centro de dicho cuadrado y sus extremos pertenezcan él. Con la construcción anterior, el cuadrado con medida de sus lados igual a la medida del cateto mayor queda descompuesto en cuatro trapezoides congruentes. El cuadrado, con la hipotenusa como uno de sus lados, se compone en forma de rompecabezas a partir de los cuatro trapezoides construidos a partir del cuadrado con lados de medida AB y el cuadrado con lados de medida AC.

Grupo 3. Argumentos a partir de transformaciones: Este tipo de argumentos requieren un conocimiento sobre equivalencias de área en figuras no congruentes. Se llaman de transformación porque en los procedimientos implicados en la argumentación hay cambios de forma en figuras que finalmente representan la misma área. Estos argumentos, en algunas ocasiones, se acompañan de la explicitación de las cadenas deductivas implicadas. A manera de ejemplo, presentamos el argumento de (Euclides, 300 a.C.), a partir de transformaciones.

Dado el ΔABC con el $\angle A$ recto, sean los $\boxdot\, ABDE$, $\boxdot\, BCFG$ y $\boxdot\, ACHI$ cuadrados y la $\overleftrightarrow{AJ} \perp \overleftrightarrow{CB}$ tal que $\overleftrightarrow{AJ} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{K\}$.

Sean $\overline{BC} \cong \overline{CF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{CH}$ por la D. Cuadrado; $\angle ACF \cong \angle BCH$ dado que $\angle ACH$ y $\angle BCF$ son rectos y ambos tiene por ángulo adyacente al $\angle ACB$. Se cumple, entonces, que $\Delta ACF \cong \Delta BCH$ por el Postulado LAL (Lado-Ángulo-Lado), por lo tanto $\mathcal{A}_{\Delta ACF} = \mathcal{A}_{\Delta BCH}$ (Figura 2.2-10).

Sea $\mathcal{A}_{\Delta BCH} = \mathcal{A}_{\Delta CHI}$ ya que los ΔBCH y ΔCHI comparten el $\overline{CH}$ como base y la altura relativa a $\overline{CH}$ (Figura 2.2-11).

Análogamente a lo anterior, se cumple que $\mathcal{A}_{\Delta ACF} = \mathcal{A}_{\Delta CFK}$ ya que los ΔACF y ΔCFK comparten el $\overline{CF}$ como base y la altura relativa a $\overline{CF}$ (Figura 2.2-12).

[9] Decimos "mostración" del teorema porque se provee una explicación del procedimiento de construcción de las piezas y se aluden a las propiedades de estas; sin embargo, no se provee una sustentación de estas propiedades. En suma, es una explicación de la representación, más que una justificación de las propiedades de los objetos que la constituyen. Esta mostración es un tipo de prueba.

[10] Si $AC = AB$ el procedimiento es análogo, ya que cualquiera de los dos cuadrados se puede descomponer, con la particularidad que el cuadrado que se descompone, lo hace en cuatro triángulos congruentes.

Usando el Principio de Sustitución podemos concluir que $\mathcal{A}_{\Delta CHI} = \mathcal{A}_{\Delta CFK}$ (Figura 2.2-13).

$\overline{JK}$ determina los $\boxdot\, CFJK$ y $\boxdot\, BGJK$ rectángulos, con lo cual $\mathcal{A}_{\boxdot BCFG} = \mathcal{A}_{\boxdot CFJK} + \mathcal{A}_{\boxdot BGJK}$.

Por otro lado, podemos afirmar que $\mathcal{A}_{\Delta CHI} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\boxdot ACHI}$ y $\mathcal{A}_{\Delta CFK} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\boxdot CFJK}$, ya que $\overline{CI}$ y $\overline{FK}$ son diagonales de $\boxdot\, ACHI$ y $\boxdot\, CFJK$, respectivamente.

Aplicando nuevamente el Principio de Sustitución tenemos que: $\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\boxdot ACHI} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\boxdot CFJK}$ y por lo tanto que $\mathcal{A}_{\boxdot ACHI} = \mathcal{A}_{\boxdot CFJK}$.

Llevando cabo un procedimiento análogo para $\boxdot\, ABDE$ y $\boxdot\, BGJK$ tenemos que: $\mathcal{A}_{\boxdot ABDE} = \mathcal{A}_{\boxdot BGJK}$.

Realizando las sustituciones correspondientes, podemos concluir que: $\mathcal{A}_{\boxdot BCFG} = \mathcal{A}_{\boxdot ACHI} + \mathcal{A}_{\boxdot ABDE}$.

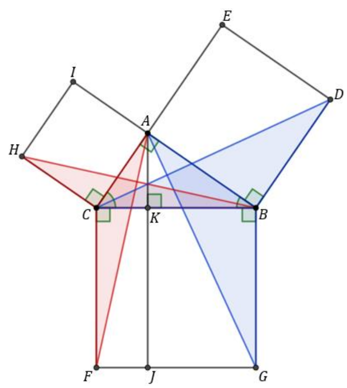


Figura 2.2-10. a

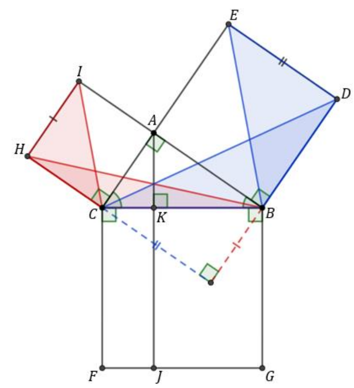


Figura 2.2-11. b

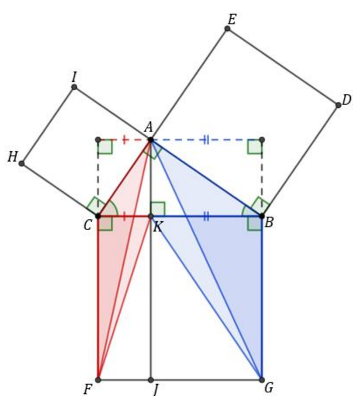


Figura 2.2-12. C

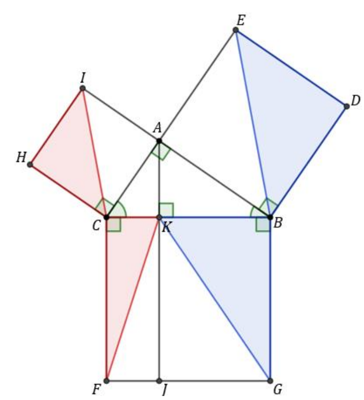
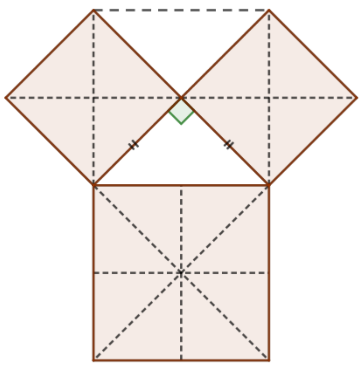
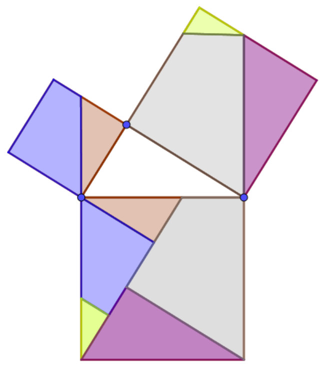
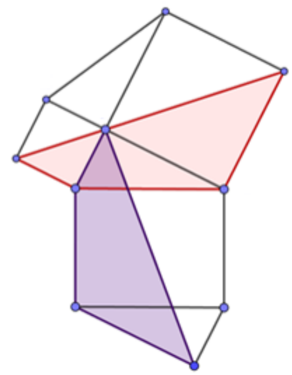


Figura 2.2-13. d

En la Tabla 4 presentamos otros ejemplos para cada grupo de argumentos con el fin de esclarecer y diferenciar estas tres subcategorías de argumentos del Teorema de Pitágoras.

Tabla 4. Argumentos geométricos del Teorema de Pitágoras

Grupo 1: División en unidades de medida	**Grupo 2: Descomposición y composición de partes**	**Grupo 3: Transformaciones**
 Fuente: Adaptado de *paper folding "proofs"* por (Loomis, 1968)	 Fuente: Adaptado de *El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años* por (Anaricio–Göpel, 1824, como se citó en Gonzáles, 2008)	 Fuente: Adaptado de *El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años* por (Leonardo da Vinci, 1452 - 1519, como se citó en Gonzáles, 2008)

Argumentos Geométrico-Algebraicos

Este tipo de argumentos usan tanto propiedades geométricas como algebraicas, con lo cual combinan representaciones gráficas propias de la geometría con representaciones simbólico-algebraicas. En esta categoría podemos diferenciar tres subcategorías de argumentos: una que se relaciona con la concepción a partir de la relación entre áreas, en la cual se prioriza la composición de figuras a partir de triángulos congruentes. Las otras dos que privilegian la concepción de relación entre medidas de lados; por un lado, tenemos las que se fundamentan en las relaciones de semejanza entre triángulos y, por otro, aquellas que se sustentan en las propiedades métricas de la circunferencia. A continuación, se presentan las descripciones de este tipo de argumentos; hemos seguido la secuencia de la numeración para los grupos de argumentos, para una facilidad en la referenciación ulterior.

Grupo 4. Argumentos a partir de composiciones con triángulos congruentes: Este tipo de argumentos privilegia las medidas de las áreas, razón por la cual está directamente relacionado con los argumentos geométricos; sin embargo, se diferencian en que su desarrollo también alude a propiedades algebraicas. A manera de ejemplo, presentamos el argumento a partir de composiciones con triángulos congruentes propuesto por (Zhao y Liudel, 300 a.C., como se citó en Gonzáles, 2008).

Dado ΔABC rectángulo, construimos tres triángulos congruentes al ΔABC ubicándolos como se muestra en la Figura 2.2-14. Por cómo se ubicaron los triángulos se pueden deducir que la medida de los lados del cuadrado más pequeños que se ha formado es $BA - AC$, con lo cual el área de este cuadrado se puede expresar como $(BA - AC)^2$.

Por otro lado, los triángulos forman un cuadrado con medidas de sus lados igual a BC, siendo BC igual a la medida la hipotenusa; a partir de esto, el área del cuadrado se puede expresar como BC^2. Por otro lado, podemos expresar tal área como la suma de las áreas de los cuatro triángulos, más el área del cuadrado central; de lo anterior, se tiene que:

$$BC^2 = 4\frac{(BA)(AC)}{2} + (BA - AC)^2$$

$$BC^2 = 4\frac{(BA)(AC)}{2} + a^2 - 2(BA)(AC) + b^2$$

$$BC^2 = 2(BA)(AC) + BA^2 - 2(BA)(AC) + b^2$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema de Pitágoras.

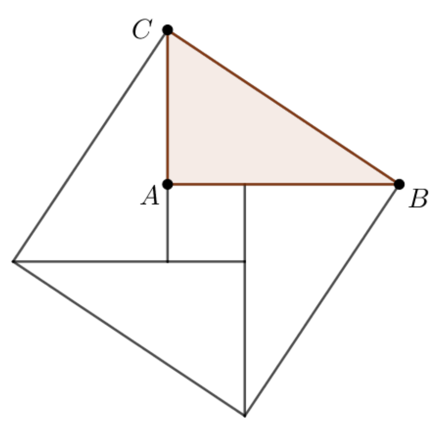


Figura 2.2-14. Argumento de Zhao y Liudel a partir de composiciones con triángulos congruentes

Grupo 5. Argumentos a partir de relaciones de semejanza entre triángulos: Este tipo de argumentos privilegia la relación entre las medidas de los lados. Se basan en la proporcionalidad que se obtiene a partir de la semejanza de triángulos y la manipulación algebraica de las proporciones implicadas. A modo de ejemplo, presentamos un argumento a partir de relaciones de semejanza entre triángulos, propuesto por (Moise, 1966).

De la Figura 2.2-15 se puede deducir que $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ y $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ dado que en ambos casos comparten dos ángulos: $\angle CAB$ y $\angle ADB$ ambos rectos, y, $\angle DCA$ y $\angle ABD$ respectivamente. Por la definición de semejanza de triángulos y alguna manipulación, obtenemos que:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{CB} \text{ y } \frac{CB-CD}{AB} = \frac{AB}{CB}$$

Ahora, llevando a cabo procedimientos aritméticos obtenemos que:

$$(CB)(CD) = AC^2 \text{ y } CB(CB - CD) = AB^2$$

Para finalizar, sumamos ambas igualdades y obtenemos que:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema de Pitágoras.

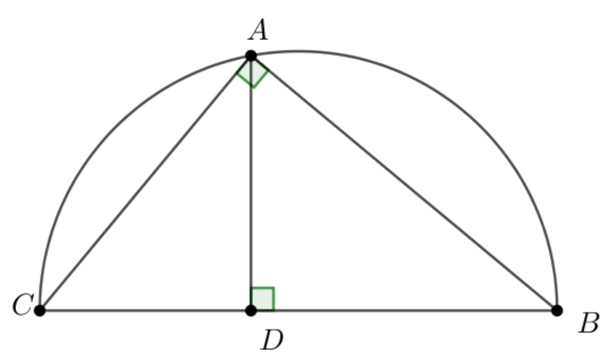


Figura 2.2-15. Argumento de Moise a partir de relaciones de semejanza entre triángulos

Grupo 6. Argumentos a partir de propiedades métricas de la circunferencia: Al igual que en el Grupo 5, este tipo de argumentos privilegia la relación entre las medidas de los lados. En este caso, se fundamenta en propiedades geométricas relativas a circunferencias, semejanza de triángulos y la manipulación algebraica de las proporciones implicadas. Como ejemplo, presentamos el argumento a partir de propiedades métricas de la circunferencia, propuesto por (García, s.f.).

Primero, se construyen las circunferencias con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Estas circunferencias se intersecan en un punto D tal que $D \in \overline{AC}$ como se muestra en la Figura 2.2-16. Por el *Teorema Potencia de un punto*[11] se puede deducir que $AB^2 = (AD)(AC)$y $BC^2 = (DC)(AC)$. Si se suman ambas igualdades se obtiene que:

$$AB^2 + BC^2 = (AD)(AC) + (DC)(AC)$$

$$AB^2 + BC^2 = (AC)(AD + DC)$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema de Pitágoras.

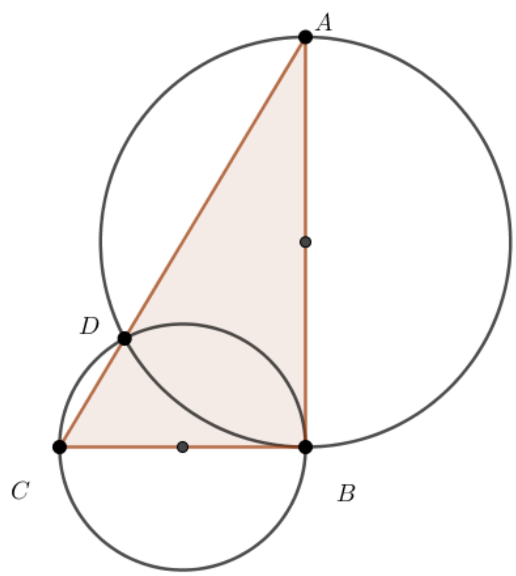


Figura 2.2-16. Argumento a partir de propiedades métricas de la circunferencia

Argumentos Dinámicos

Barrantes et al. (2021) caracteriza un *software* de geometría dinámica como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Por sus características (posibilidad de manipulación de objetos y arrastre de los mismo), puede utilizarse como apoyo en las explicaciones producto de su potencial para la visualización, construcción y movimiento de objetos geométricos.

[11] Teorema Potencia de un punto: Sea C una circunferencia y Q un punto de su exterior, L_1 una secante que pasa por Q e interseca a C en los puntos R y S; ya sea L_2 otra recta secante que pasa por Q e interseca a C en los puntos U y T. Entonces $(QR)(QS) = (QU)(QT)$. (Moise, 1966, p. 455)

A modo de ejemplo, a continuación, se argumenta la demostración de Perigal, pero con argumentos dinámicos. Para esto, en un software de geometría dinámica, se construye un triángulo rectángulo y sus respectivos cuadrados. Para el cateto de mayor medida, en este caso $\overline{AB}$, se descompone trazando dos segmentos, uno paralelo a la hipotenusa y el otro perpendicular a esta, tal que estos se intersequen en el centro de dicho cuadrado y sus extremos pertenezcan él. Mediante traslaciones en el plano, de las piezas 1 al 5, se puede "cubrir" el cuadrado correspondiente a la hipotenusa como se concluye en la Figura 2.2-21, verificando así el Teorema de Pitágoras. Por ejemplo, en la Figura 2.2-17, se traslada el cuadrilátero 1 a través del vector u desde el centro del cuadrado de lado $\overline{AC}$ hasta el vértice A del cuadrado de lado $\overline{AB}$; de manera análoga, sucede con las demás figuras excepto con la última figura, ya que se traslada el cuadrilátero 5 a través del vector v desde un vértice del cuadrado hasta la intersección de dos lados de dos cuadriláteros, como se muestra en la Figura 2.2-21.

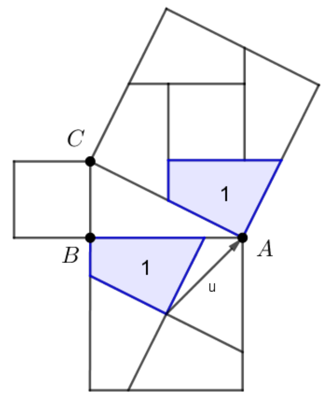


Figura 2.2-17. a

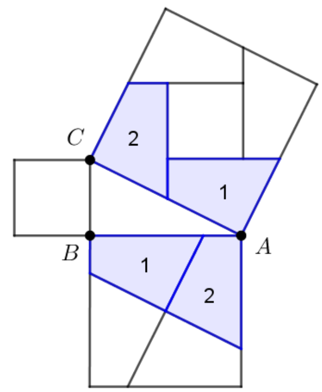


Figura 2.2-18. b

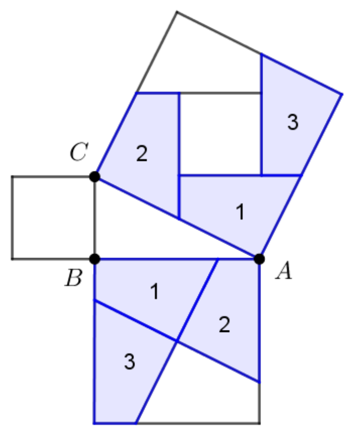


Figura 2.2-19. c

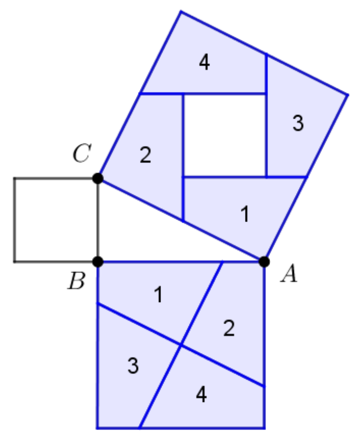


Figura 2.2-20. d

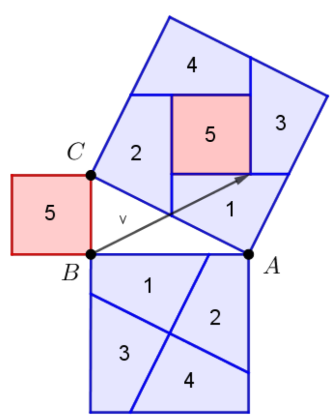


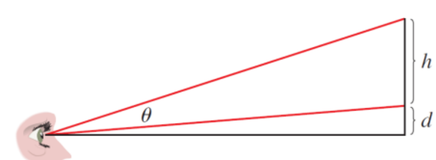
Figura 2.2-21. Argumento dinámico para la demostración de Perigal

Un ejemplo sencillo para ilustrar el Teorema de Pitágoras bajo un argumento dinámico se presenta cuando, en un software de geometría dinámica se construye un triángulo rectángulo, y usando la calculadora del programa se comprueba numéricamente que la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa. Esta propiedad se mantiene bajo la prueba del arrastre.

2.2.3 Situaciones matemáticas

La propuesta de (Díaz y Poblete, 2001) es una clasificación para problemas o situaciones matemáticas, la cual, aunque se refiere al campo aritmético, consideramos que es lo suficientemente genérica para aplicarla a la geometría. Estos autores clasifican las situaciones considerando como criterio el contexto de estas, siendo estos: real, realista, fantasioso y puramente matemático. Consideramos acertado agregar el contexto científico-matemático ya que, para nuestro objeto matemático de estudio, los anteriores no necesariamente tienen en cuenta la relación del Teorema de Pitágoras con otras ciencias. En la Tabla 5 se presenta los diferentes contextos, sus situaciones asociadas y algunos ejemplos de cada una.

Tabla 5. Situaciones matemáticas según su contexto

Contexto	**Situación**	**Ejemplo de problemas o situaciones**
Real	Se puede producir efectivamente en la realidad y puede comprometer el contexto real y la acción del estudiante.	Problema: En una galería de arte, una pintura tiene la altura h y está colgada de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador (como se muestra en la figura). ¿Qué tan lejos de la pared debe pararse un observador para tener la mejor vista? En otras palabras ¿dónde debe situarse el observador a fin de que se maximice el ángulo subtendido en su ojo por la pintura?  Adaptado de *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* por (Stewart, 2012)

Realista	Es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.	Problema: Si la pantalla del televisor mide 45", la relación es 16:9, y disponemos de un espacio de 90 cm x 60 cm. ¿El televisor cabe o no cabe?
Fantasioso	Es producto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.	Problema: Para la ceremonia al dios Ra, un sacerdote egipcio debe subir la pirámide de Keops desde su base hasta la punta. Si se sabe que la distancia de la base al centro de la pirámide es de 115 m y del centro a la punta es de 147 m, ¿qué distancia debe recorrer el sacerdote?
Puramente matemático	Hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.	Situaciones: El Teorema de Pitágoras se emplea para el estudio de identidades trigonométricas, definir la distancia entre dos puntos, para sustentar intersecciones entre objetos, etc.
Científico-matemático	Hace referencia a las ciencias que se fundamentan en el conocimiento matemático como lo son la Física y la Química, o de profesiones u oficios que también requieren de este, como lo son las ingenierías, la navegación, la construcción de edificaciones, etc.	Situaciones: En el ámbito de la Física se utiliza para determinar la trayectoria de un objeto en movimientos parabólicos, en la caída de cuerpos libres con el propósito de calcular las fuerzas sobre el sólido, para determinar la norma de un vector, para localizar lugares específicos (epicentro de un terremoto, astros en el espacio), y en asuntos relativos a la construcción (tejados, rampas); a la arquitectura, a la navegación, etc.

En el análisis de los videos se presentarán los contextos que emergen dentro de la clasificación presentada.

2.2.4 Generalizaciones

Las generalizaciones del Teorema de Pitágoras son una ampliación de este tomando en cuenta por lo menos dos escenarios según (Zárate, 1996): 1. Aquel, donde la relación pitagórica se cumple para otro tipo de figuras, no necesariamente tomando de base triángulos rectángulos o cuadrados; y 2. Aquel donde se estudia aritméticamente la posibilidad de ternas pitagóricas con exponentes diferentes de 2 (la última conjetura de Fermat[12] es ejemplo de ello–. Para iniciar con la ilustración de algunas de estas ampliaciones del Teorema de Pitágoras, iniciamos con aquellas referidas a la

[12] Teorema de Fermat: Para $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 2$ no existen número enteros positivos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$

aproximación por áreas de superficie. Para este caso, que el área de la figura construida tomando como uno de sus lados la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sea igual a la suma de las áreas de las figuras construidas tomando como lado, respectivamente, cada uno de los catetos del mismo triángulo rectángulo.

Polígonos regulares semejantes:

Privilegiando la concepción de relación entre áreas, la propiedad Pitagórica se verifica para cualquier polígono regular de la misma cantidad de lados construido tomando como uno de sus lados cualquier lado del triángulo rectángulo dado. En la Figura 2.2-22, presentamos un ejemplo recopilado por (Loomis, 1968); en ese caso, se construyen triángulos equiláteros tomando como base los lados del triángulo rectángulo; la suma de las áreas de los triángulos que toman como base un cateto, es igual al área del triángulo que toma como base la hipotenusa:

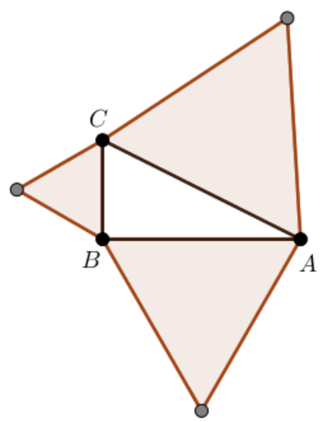


Figura 2.2-22. Generalización de polígonos regulares semejantes registrada por Loomis

Figuras planas semejantes:

Privilegiando la concepción de la relación entre áreas, esta categoría implica una ampliación a todo tipo de figuras geométricas homólogas en su relación de semejanza (Zárate, 1996), como triángulos semejantes, rectángulos semejantes y semicircunferencias semejantes. A modo de ejemplo, en la Figura 2.2-23 se presenta un argumento basado en triángulos semejantes, desarrollado en el texto "Una ampliación al teorema de Pitágoras" (Vásquez, 2021, p. 19). En este caso, por ejemplo, se construyen semicircunferencias tomando como base los vértices del triángulo rectángulo; y la suma de las áreas de las semicircunferencias que toman como base un cateto, es igual al área de la semicircunferencia que toma como base la hipotenusa.

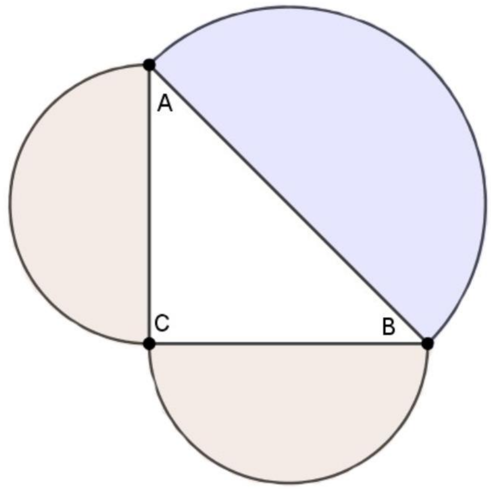


Figura 2.2-23. Generalización de Vásquez para polígonos irregulares semejantes

En la Figura 2.2-24 se ejemplifica la generalización tomando de base polígonos irregulares semejantes. A continuación, presentamos una representación geométrico-dinámica propuesta por (Licea, 2019). En este caso, por ejemplo, se construyen pentágonos irregulares y semejantes entre ellos, tomando como base los lados del triángulo rectángulo, y la suma de las áreas de los pentágonos irregulares que toman como base un cateto $(A_1 + A_2)$, es igual al área del pentágono irregulares que toma como base la hipotenusa A_3.

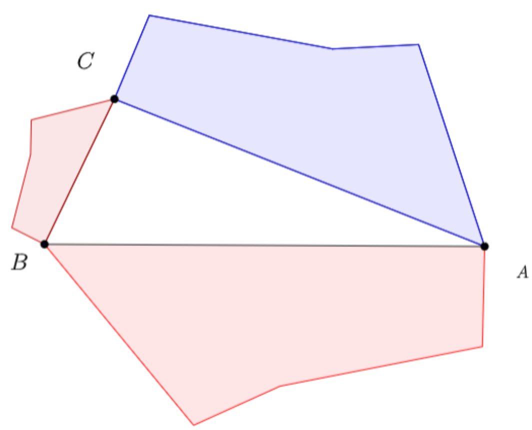
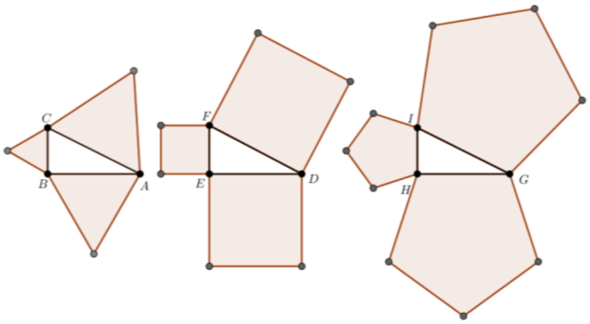
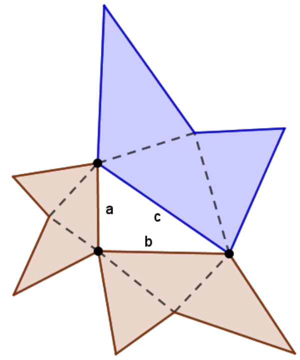
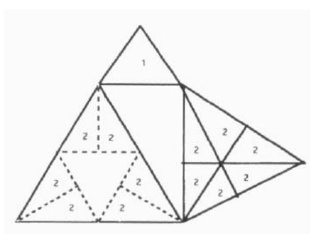
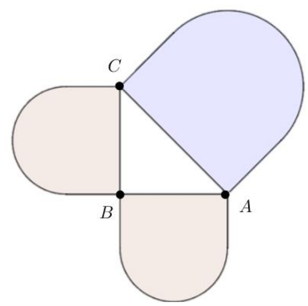


Figura 2.2-24. Generalización para polígonos pentágonos semejantes

En la Tabla 6 presentamos representaciones gráficas que ilustran algunos ejemplos más de generalizaciones del Teorema de Pitágoras con base en lo antes descrito.

Tabla 6. Generalizaciones Geométricas del Teorema de Pitágoras.

Polígonos regulares semejantes	Figuras planas semejantes
 Fuente: Adaptado de *paper folding "proofs"* por (Loomis, 1968)	 Fuente: Adaptado de *una ampliación al teorema de pitágoras* por (Vásquez, 2021)
  Fuente: Adaptado de *Puzle triangular* por (Barrantes, Barrantes, Zamora & Mejía, 2018)	 Fuente: Adaptado de *Generalización a figuras con lados curvos* por (Barrantes, Barrantes, Zamora & Mejía, 2018)

Ampliación a triángulos no rectángulos:

Privilegiando la concepción de la relación entre áreas, este tipo de generalización considera un triángulo no rectángulo y se enuncia a través del Teorema de Pappus, el cual se presenta enseguida:

> Dado un triángulo cualquiera (Figura 2.2-25), construimos dos paralelogramos P_1 y P_2 cualesquiera sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Consideramos el segmento $\overline{BD}$, cuyos extremos son el vértice del ángulo α y la intersección de las rectas que contienen a los lados de los paralelogramos P_1 y P_2. Si construimos un paralelogramo P_3 con lados paralelos y congruentes a $\overline{BD}$, entonces la suma de las áreas de P_1 y P_2 es igual al área del paralelogramo P_3" (Barrantes, Zamora & Barrantes, 2018, p, 101).

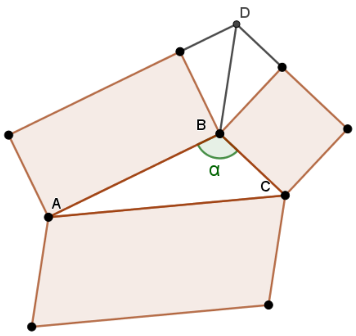


Figura 2.2-25. Generalización del Teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos

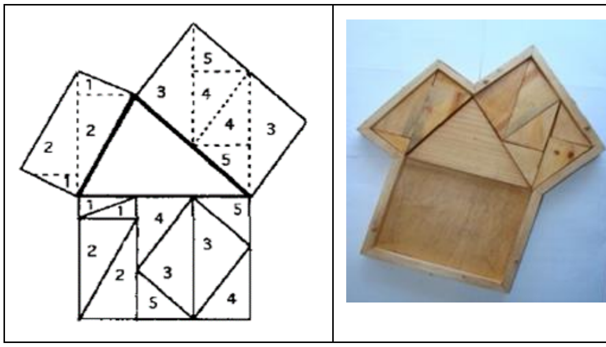


Figura 2.2-26. Generalización del Teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos

A través de los Puzzle de la Figura 2.2-26, podemos ilustrar una prueba del hecho. La demostración formal de esta generalización aparece en (Loomis, 1968).

Ampliación con volúmenes:

Se ha argumentado el Teorema de Pitágoras en figuras planas, pero ¿al aumentar el "grosor" de las figuras, se sigue cumpliendo la propiedad pitagórica? En otras palabras, ¿es válido al considerar volúmenes? La respuesta es que no de manera completa; sabemos que al tomar como dado un ΔABC rectangulo con $\angle A$ recto, se cumple que el área del cuadrado tomando como base la hipotenusa es igual la suma de las áreas de los cuadrados tomando como base los catetos, por el Teorema de Pitágoras. Sea k la medida de la altura de los prismas rectangulares que se pueden formar con los cuadrados que se construyen tomando como base los lados del triángulo. En consecuencia, se tiene que k veces el área del cuadrado es igual a k veces la suma de las áreas de los cuadrados, con lo cual k veces el área del cuadrado es igual a k veces el área del cuadrado tomando como base un cateto más k veces el área del cuadrado tomando como base el otro cateto. Esta última igualdad, representada en la Figura 2.2-27, se concibe como una generalización del Teorema de Pitágoras. La pregunta es ahora ¿existe tres números naturales tales que el área del cubo tomando como base la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual la suma de las áreas de los cubos tomando como base los catetos del triángulo rectángulo? El último Teorema de Fermat tiene respuesta para ello: No (ver su enunciado en el capítulo 2.2.4 Generalizaciones, en la p. 35)

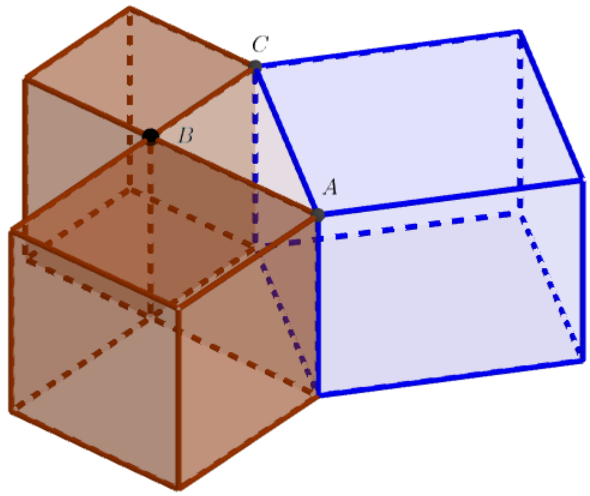


Figura 2.2-27. Generalización por volúmenes

2.3 REFERENTES CURRICULARES

El currículo escolar colombiano para la educación matemática está basado principalmente en los Derecho Básicos de Aprendizaje –DBA– (DBA, 2016), los Estándares Básicos de Competencias –EBC– (EBC, 2006) y los Lineamientos Curriculares –LC– (LC, 1998). Nos parece importante presentar de qué manera los documentos que orientan el currículo involucran el Teorema de Pitágoras porque nos sirve como referente de lo que se espera que sea aprendido por los estudiantes al respecto y, en consecuencia, tener un referente más para precisar la pertinencia de los objetos primarios que se involucran en los videos en correspondencia con lo deseable. De estos tres pilares (LC, DBA y EBC), en el primero no aparece una alusión al Teorema de Pitágoras de manera explícita, aunque sí menciona que los teoremas en geometría deber ser involucrados. En los otros dos, aparece el Teorema de Pitágoras tal como describimos en lo que sigue.

Los EBC son criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación en todas las áreas que integran el conocimiento escolar (MEN, 2006). Específicamente, están organizados por pensamientos. El Teorema de Pitágoras está especialmente vinculado al *Pensamiento métrico y sistemas de medidas* para los grados 8° a 9°; en ese escenario, se menciona como estándar “Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)”. En este sentido, tomado de base este orientado curricular, el abordaje epistémico del Teorema se concentra en los argumentos, especialmente deductivo, y en los objetos primarios que se usan en estos.

Por su lado, los DBA explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular, cada uno compuesto por tres elementos: enunciado, evidencia de aprendizaje y ejemplo. Para el caso del Teorema de Pitágoras, este aparece en dos enunciados, y relativos a estos, en varias evidencias presentadas en la Tabla 7. El primero se concentra en la identificación de regularidades y la argumentación de propiedades y su aplicación en situaciones. El otro, en el uso de propiedades para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes. En esos escenarios, se proponen evidencias que aluden al Teorema de Pitágoras en relación con diversos tipos de objetos primarios tales como argumentos para validarla, aplicaciones intra o extra matemáticas y las relaciones geométricas que se emplean al utilizar el Teorema.

Tabla 7. DBA asociados al Teorema de Pitágoras

Grado	Enunciado	Evidencias
8°	Número 7: Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.	Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos (Software, tangram, papel, entre otros).
		Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto.
		Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras y Thales, entre otros.
		Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo.
		Resuelve problemas utilizando teoremas básicos.
9°	Número 5: Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.	Describe y justifica procesos de medición de longitudes.
		Explica propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición.
		Justifica procedimientos de medición a partir del Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras y relaciones intra e interfigurales.
		Valida la precisión de instrumentos para medir longitudes.
		Propone alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes.

En resumen, a partir de los documentos orientadores, es claro que el objeto Teorema de Pitágoras debería ser abordado en los grados de básica secundaria, centrado en el estudio de los argumentos (no necesariamente deductivos), y sus aplicaciones para el cálculo de medidas, principalmente.

2.4 REFERENTES DIDÁCTICOS

En la educación matemática encontramos diferentes perspectivas respecto a la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje, las cuales pretenden aprobar si un proceso "está bien desarrollado". Para este estudio, usaremos la noción de idoneidad didáctica (Breda *et al.*, 2017), propuesto desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)[13]. Este marco es útil para la evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, tal como lo indican Beltran-Pellicier, Giacomone y Burgos (2018), ese marco también es útil para evaluar la idoneidad de video educativos. En ese sentido, nosotros usamos ese referente para llevar a cabo este trabajo, específicamente para describir la idoneidad didáctica de los videos escogidos, centrados en la faceta epistémica. Según el EOS (Godino, 2013; Breda *et al.*, 2017) esta faceta hace referencia al nivel de representatividad de los significados institucionales implementados, respecto de un significado de referencia. Para realizar una evaluación educativa idónea, se requieren unas directrices (indicadores) claras que permitan identificar las características de un proceso formativo, y así, poder juzgar si el proceso formativo o es idóneo o no lo es. En la Tabla 8 se presentan los indicadores y componentes de la idoneidad epistémica, y los indicadores más relevantes, para clarificar y especificar la noción de idoneidad epistémica.

Tabla 8. Objetos Primarios e Indicadores de Idoneidad Epistémica

Objetos Primarios	Indicadores
Situaciones - problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas

[13] "El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2013, p. 114)

	• Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones[14] son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas

Adicionalmente, presentamos los Componentes de Idoneidad Epistémica propuestos por Breda *et al.* (2017). Estos componentes (Errores, Ambigüedades, Riqueza de procesos y representatividad de la complejidad) contienen indicadores que señalan que características cumple un contenido para que no presente “equivocaciones” epistémicas, mismos indicadores que, junto con los indicadores de idoneidad epistémica matemática presentados en la Tabla 8, se convertirán en la principal herramienta para analizar los videos. En la Tabla 9 se presentan los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad epistémica:

Tabla 9. Componentes y Descriptores de Idoneidad Epistémica

Componentes	**Descriptores**
Errores	• No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático
Ambigüedades	• No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas etc.
Riqueza de procesos	• La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones etc.).

[14] Interpretando la demostración como la propone Stylianides (2007).

Representatividad de la complejidad	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. • Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno (o varios significados parciales), se propone una muestra representativa de problemas. • Para uno (o varios significados parciales), se hace uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), y de tratamientos y conversiones entre los mismos.

En el Capítulo de Metodología, se realizará una adaptación de estos criterios para el Teorema de Pitágoras: los indicadores y componentes de la idoneidad epistémica propuestos por Godino (2013) se ampliarán, se resumirán y codificarán; los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad epistémica propuestos por Breda *et al.* (2017) serán adaptados y relacionados con aquellos estipulados siguiendo la idea de Godino.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo presentamos las fases metodológicas del estudio, el cual es de tipo cualitativo-interpretativo (Kelly & Lesh, 2000), fundamentado en la propuesta metodológica sugerida por Beltran-Pellicier, Giacomone y Burgos (2018) para analizar videos educativos. En primera instancia describimos la Fase 1, mediante la cual precisamos el procedimiento para escoger los videos analizados. Enseguida, describimos la Fase 2; esto es, la manera mediante la cual adaptamos las propuestas de componentes y criterios para la Idoneidad Epistémica presentadas en la sección 2.4. Finalmente, describimos la Fase 3; es decir, presentamos el procedimiento mediante el cual determinamos la Idoneidad Epistémica de cada video de acuerdo con indicadores que establecimos; así mismo, explicamos la manera mediante la cual presentamos el análisis de cada video.

3.1 FASE 1 DEL ANÁLISIS: DETERMINACIÓN DE LOS VIDEOS ANALIZADOS

En esta primera Fase del Análisis describimos las tres Etapas que se tuvieron en cuenta para la determinación de la muestra y de los datos de estudio; esto es, los videos que finalmente analizamos teniendo como referentes lo presentado en la Sección 2.2 y las opciones de búsqueda que provee YouTube.

3.1.1 Etapa 1: Asuntos claves de búsqueda

En la primera Etapa de esta Fase, determinamos el asunto clave del Teorema de Pitágoras sobre el cual se podría focalizar los videos "más populares"; esto asuntos clave se corresponden con las aproximaciones conceptuales presentadas en la sección 2.2 (las cuales se sintetizan en la Tabla 10): enfoque conceptual, argumentos, situaciones y generalizaciones.

Tabla 10. Aproximaciones Conceptuales del Teorema de Pitágoras

<table>
<tr><th>Aproximaciones</th><th colspan="2">Categorías</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Concepciones</td><td colspan="2">Relación entre medidas de lados de un triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Relación entre áreas de cuadrados</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Argumentos</td><td rowspan="3">Geométricos</td><td>A partir de la división en unidades de medida</td></tr>
<tr><td>A partir de descomposición y composición de partes</td></tr>
<tr><td>A partir de transformaciones</td></tr>
</table>

	Geométrico-Algebraicos	A partir de composiciones con triángulos congruentes
		A partir de relaciones de semejanza entre triángulos
		A partir de propiedades métricas de la circunferencia
	Geométrico-Dinámicos	
Situaciones	Real	
	Realista	
	Fantasioso	
	Puramente matemático	
	Científico-matemático	
Generalizaciones	Polígonos regulares	
	Figuras semejantes	
	Triángulos no rectángulos	

Para cada una de las aproximaciones conceptuales asociamos una etiqueta de búsqueda, como se muestra en la Tabla 11; para precisar las etiquetas de búsqueda procuramos usar términos no tan especializados que se asocien con las aproximaciones, teniendo en cuenta la relación entre las palabras claves que usamos con mayor frecuencia y el contenido que esperamos se aborde en el video.

Tabla 11. Etiquetas de búsqueda

Aproximaciones conceptuales	**Etiqueta de búsqueda**
Enfoque conceptual	Explicación del Teorema de Pitágoras
Argumentos	Demostración del Teorema de Pitágoras
Situaciones	Aplicaciones del Teorema de Pitágoras
Generalizaciones	Generalización del Teorema de Pitágoras

3.1.2 Etapa 2: Filtros de búsqueda

El procedimiento de búsqueda de videos se realizó en YouTube, plataforma popular que cuenta con una gran cantidad de videos y con herramientas, como los filtros de búsqueda, que permiten ganar precisión o especialidad al momento de, precisamente, buscar un video. Algunos de estos filtros fueron usados para decantar la muestra del estudio.

3.1.2.1 Filtros de YouTube

Un filtro de YouTube permite precisar o acotar una búsqueda, que posibilita ahorrar tiempo o decantar con mayor precisión los resultados esperados. En YouTube, la herramienta Filtros nos permite organizar los videos en cinco categorías principales: Fecha de carga, Tipo, Duración, Características y Ordenar por. Estas a su vez se dividen en subcategorías de filtrado más específicas. En cuatro de las cinco categorías (Fecha de carga, Tipo, Duración y Ordenar por) la plataforma nos permite seleccionar una única subcategoría; en la categoría *característica* nos permite escoger varias subcategorías para la misma búsqueda. A continuación, presentamos una descripción de cada uno de cinco filtros principales:

- **Fecha de carga:** Prioriza la búsqueda de los videos de acuerdo con la fecha en que fue subido a la plataforma; sus subcategorías son: *Última hora*, *Hoy*, *Esta semana*, *Este mes* y *Este año.* Al realizar una búsqueda directa (sin la herramienta *filtros*), la plataforma no ordena los resultados teniendo en cuenta esta categoría.
- **Tipo:** Prioriza la búsqueda de los videos de acuerdo con una de las clasificaciones de contenido propia de YouTube, sus subcategorías son: *Video*, *Canal*, *Lista de reproducción* y *Película.* Al realizar una búsqueda directa, la plataforma ordena los resultados dando prioridad a las subcategorías *Video* y *Lista de reproducción*, respectivamente.
- **Duración:** Prioriza la búsqueda de los videos de acuerdo con su duración en minutos, sus subcategorías son: *Menos de 4 minutos*, *De 4 a 20 minutos* y *Más de 20 minutos.* Al realizar una búsqueda directa, la plataforma ordena los resultados dando prioridad a la subcategoría *De 4 a 20 minutos.*
- **Características** (que se corresponde esencialmente con los tipos de videos educativos según sus competentes técnicos): Prioriza la búsqueda de los videos de acuerdo con sus especificaciones técnicas: *En vivos*, *4K*, *HD*, *Subtitulados*, *Creative Commons*, *360°*, *VR180*, *3D*, *HDR*, *Ubicación* y *Comprado.* Al realizar una búsqueda directa, la plataforma ordena los resultados dando prioridad a la subcategoría *HD.*
- **Ordenar por:** Prioriza el orden de la búsqueda según lo siguientes factores: *Relevancia*, *Fecha de carga*, *Recuento de vistas* y *Calificación.* Al realizar una búsqueda directa, la plataforma ordena predeterminadamente todos los resultados por *Relevancia.*

De acuerdo con nuestra experiencia como estudiantes, docentes en formación y usuarios de la plataforma, decidimos centrarnos en la categoría *ordenar por*, ya que consideramos que no solo es la más usada al realizar una búsqueda por *filtros*, sino porque prioriza los videos por *relevancia*; esto es, toma en cuenta los siguientes aspectos, según blog de TreceBits (2020):

- Clasifica los videos según el título, las etiquetas y la descripción. Tanto en el título, como en las etiquetas y la descripción el buscador enlaza la búsqueda con estas categorías y muestra la mayor coincidencia. Un aspecto que se debe tener en cuenta es que, si el usuario ya está registrado en la plataforma, la búsqueda y clasificación de videos toma en cuenta sus canales favoritos; esto, debido al algoritmo que utiliza según el perfil del usuario.
- Clasifica los videos según el contenido. Este criterio apunta a determinar la calidad del video según la percepción del usuario. Uno de los criterios más indicativos para esta tipología tiene que ver con la cantidad de tiempo que las personas han invertido para ver el video; a mayor tiempo invertido mayor se presupone que es su calidad. Sin embargo, este no es el único criterio; YouTube realiza encuestas a sus usuarios y prioriza los videos producidos por instituciones personalizadas o canales populares; también reduce la divulgación de videos que infrinjan sus políticas de seguridad.
- Clasifica los videos según la puntación AET (Expertise, Authoritativeness y Trustworthiness) sigla que traducida al español significa Experiencia, Autoría y Confianza, y que es utilizada por Google en sus búsquedas avanzadas. Así las cosas, YouTube prioriza: (i) los *expertos* en contenido; para que un video se posicione mejor, el productor de los videos debe ser considerado experto en la materia. El algoritmo de YouTube se encargará de determinar si el productor es experto o no. (ii) Los videos de los *autores* que reciben enlaces de calidad; esto refiere a las menciones de los videos, ya sea por otros autores, páginas web o blogs, y el perfil de los autores que lo mencionan. (iii) Los vídeos que generan confianza, lo cual depende de la seguridad del video; según el certificado de seguridad SSL de Google se toma en cuenta si los enlaces añadidos en la descripción son seguros, así como los métodos de pago y trato de información.

Además del filtro *Relevancia* para acotar la muestra, también tendremos en cuenta la cantidad de visualizaciones, lo que nos permitirá recopilar videos tomando en cuenta su *popularidad*; para esto último, tendremos en cuenta el filtro *Recuento de vistas* el cual ordena la búsqueda mostrando los videos de la mayor a la menor cantidad de vistas.

3.1.3 Etapa 3: Determinación de la muestra y datos del estudio

Para poder establecer un panorama general de la cantidad de Videos Educativos en YouTube asociados a cada etiqueta de búsqueda, hicimos de antemano una búsqueda en Google, dado que YouTube no nos muestra la cantidad total o aproximada de los resultados de búsqueda.

La búsqueda de la cantidad de videos que hay disponibles en la red asociados al Teorema de Pitágoras, con las palabras "Teorema de Pitágoras", nos arrojó alrededor de 32800 resultados, de los cuales 12000 videos provienen de YouTube ya sea directamente, o a través de páginas que lo citan o mencionan.

De igual forma, realizamos una segunda búsqueda Google basados en los asuntos claves de búsqueda del Teorema de Pitágoras bajo las etiquetas mencionadas en la Tabla 8: "Explicación del Teorema de Pitágoras" con 11300 resultados, "Demostración del Teorema de Pitágoras" con 1300 resultados, "Aplicaciones del Teorema de Pitágoras" con 1090 resultados y "Generalización del Teorema de Pitágoras" con 49 resultados.

Luego de obtener un panorama general de la cantidad de videos y verificar que contábamos con insumos suficientes para realizar el análisis, determinamos la muestra realizando una tercera búsqueda directamente en la plataforma YouTube usando las etiquetas anteriormente mencionadas.

Para cada una de las etiquetas de búsqueda fueron escogidos, del número de videos correspondientes, tres videos a partir de los criterios de búsqueda mencionados en la Etapa 2 (relevancia y recuento de vistas); específicamente, fueron escogidos los primeros dos videos según el filtro relevancia, y el tercer video según el filtro recuento de vistas. Hay que aclarar que cuando se repitió un video de la misma etiqueta de búsqueda, usando los dos filtros mencionados, escogimos el siguiente video según el recuento de vistas; esto por cuanto, por experiencia propia, tal filtro no es tan cambiante como el filtro relevancia. En cualquier caso, la idea fue mantener tres videos por aproximación para analizar.

En resumen, los doce videos que hacen parte de los datos para el estudio se presentan en la Tabla 12.

Tabla 12. Muestra de Videos asociados al Teorema de Pitágoras

Filtro / Etiqueta	No.	Video	Categoría
Explicación del Teorema de Pitágoras	01	https://youtu.be/2yfkEAt2ew0	Relevancia
	02	https://youtu.be/XfVWlO3sRw0	Relevancia
	03	https://youtu.be/w6nh99v3r4A	Recuento de vistas
Demostración del Teorema de Pitágoras	04	https://youtu.be/Xj-4EUPx3A4	Relevancia
	05	https://youtu.be/R21PyY-mpzs	Relevancia
	06	https://youtu.be/KK4XTS9dgjg	Recuento de vistas
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras	07	https://youtu.be/Dbd5OmbOE9c	Relevancia
	08	https://youtu.be/2UbdPiqAiHY	Recuento de vistas
	09	https://youtu.be/Bwi73G7qPLo	Recuento de vistas
Generalización del Teorema de Pitágoras	10	https://youtu.be/UGPL2KTxVFY	Relevancia
	11	https://youtu.be/KNjkXWK7ukE	Recuento de vistas
	12	https://youtu.be/cAh6_wcs5Wc	Recuento de vistas

3.2 FASE 2 DEL ANÁLISIS: ADAPTACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE IDONEIDAD EPISTÉMICA

En esta segunda Fase del Análisis llevamos a cabo dos Etapas que buscaban una adaptación de los elementos de Idoneidad Epistémica para el objeto Teorema de Pitágoras; esto es, los indicadores y componentes para dicha Idoneidad. Para ello, vimos la necesidad, en un primer momento, de hacer una descripción de los tipos de objetos primarios involucrados (ver Tabla 13), para luego, con base en ellos, enunciar los indicadores (ver Tablas 14 y 15). Presentamos, a continuación, la forma en que tales Tablas fueron construidas (Etapa 4 para elementos de los objetos primarios y Etapa 5 para componentes y criterios de la Idoneidad Epistémica) y la manera como esas herramientas evaluativas se usaron para hacer el análisis.

3.2.1 Etapa 4: Identificación de los principales objetos primarios de los videos

En esta cuarta etapa, identificamos los principales objetos primarios involucrados en cada video de cada aproximación (o etiqueta de búsqueda), lo cual, como fue preciado en la Sección 2.4, determinan los aspectos epistémicos. Esto con el propósito de focalizar los objetos sobre los cuales se concentra cada video (lenguajes/representaciones, reglas –definiciones, proposiciones y procedimientos–, argumentos, situaciones/problemas y relaciones), y con ello, inducir una predisposición respecto de cuáles criterios se activarían principalmente al momento de analizar su idoneidad. Operativamente, esta decisión nos facilitó el proceso del análisis porque nos permitió tener un foco de observación para cada video. Enseguida, describimos la forma en que presentamos el procedimiento mediante el cual llevamos a cabo esta fase del análisis.

Tomando como referencia lo expuesto en las Secciones 2.2 (Referentes Matemáticos) y 2.4 (Referentes Didácticos), en la Tabla 13 planteamos los principales elementos que tendremos en cuenta sobre objetos primarios que, a *priori*, podrían estar presentes en los videos. Una vez construida esta Tabla, hicimos una primera observación panorámica de cada video determinado como dado, con el propósito de determinar los objetos principales presentes en ellos en correspondencia con dicha Tabla.

Esta primera experiencia de observación nos condujo a dos asuntos: el primero, a la identificación de objetos que, a *priori*, no habíamos incluido en la Tabla 13; el segundo, a la precisión de aquellos objetos primarios que son los protagonistas de cada video. Al respecto de esto último hay que precisar que reconocemos que hay objetos primarios que adquieren mayor preponderancia según el enfoque del video; por ejemplo, los videos con aproximación "argumentos" y "situaciones" priorizan, respectivamente, el objeto "argumento" y el "situaciones/problema".

En la Tabla 13, ponemos en letra cursiva aquellos objetos primarios que, mediante la primera observación, fueron emergentes.

Tabla 13. Principales elementos primarios a *priori* presentes en los videos.

Objeto primario		**Principales elementos primarios**
Lenguajes/Representaciones		• Lenguajes geométrico y algebraico • Representaciones verbal, simbólica, gráfica-estática, gráfica-dinámica y material concreto • Traducción o conversión entre representaciones
Reglas	Definiciones	De objetos relacionados con el Teorema de Pitágoras (triángulo rectángulo, hipotenusa, cateto, cuadrado, etc.)
	Proposiciones	Del Teorema de Pitágoras mismo (aproximación por áreas o por medidas de longitud) o de propiedades de objetos asociados al Teorema de Pitágoras (perpendicularidad, congruencia, semejanza, etc.)
	Procedimientos	• Realiza conversiones entre los diferentes tipos de representación • Demuestra o comprueba propiedades geométricas

		• Utiliza operaciones aritméticas o algébricas • Resuelve situaciones o problemas de diferentes contextos • Conjetura propiedades geométricas
Argumentos		• Geométricos y geométrico-algebraicos • Argumentos gráficos: geométricos y geométrico-dinámicos • Formales que atienden a un sistema teórico (demostraciones) • *Numéricos: que atienden a comprobaciones del Teorema de Pitágoras para casos particulares*
Situaciones/Problemas		Contexto: Real, realista, fantasioso, puramente matemático y científico-matemático
Relaciones		Los objetos matemáticos (representaciones, definiciones, proposiciones, argumento, problemas, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

3.2.2 Etapa 5: Precisión de los indicadores de Idoneidad Epistémica

Una vez identificamos los principales elementos relativos a cada objeto primario, con el propósito de operativizar el análisis, nos dispusimos a precisar los indicadores de Idoneidad Epistémica, de acuerdo con lo expuesto en la Etapa 4; estos nos permitieron determinar la idoneidad relativa a cada uno de los tipos objetos identificados. Enseguida, presentamos para cada objeto primario (Lenguajes/representaciones, Reglas, Argumentos, Situaciones/Problemas y Relaciones) los respectivos indicadores, asociando a cada uno un código para identificarlo.

- **Lenguajes/Representaciones**

L1. Usa representaciones gráficas, simbólicas o numéricas adecuadas: Las representaciones deben informar ostensiblemente sobre las propiedades implicadas. e.g., los objetos que son congruentes deben verse congruentes; los ángulos que son rectos deben verse rectos).

L2. Usa adecuadamente diferentes tipos de representación: Emplea representaciones de tipo verbal, escrita, gráfica, con material concreto, simbólica matemática -y geométrica, en particular- o numérica; y hay coordinación entre ellas y estas se corresponden con el significado del teorema (e.g., las representaciones escritas se acompañan de representaciones gráficas o simbólicas correspondientes para comunicar de mejor manera una idea; si la concepción implicada es el de área, se representan superficies de polígonos que informan ostensiblemente sobre las propiedades de los polígonos implicados; si la concepción implicada es el de cantidad de medida de lados, se representan lados del triángulo y no superficies de polígonos).

L3. Usa una adecuada expresión verbal o escrita: Hay correspondencia entre el significado del teorema y las expresiones (verbales o escritas) usadas (e.g., si la concepción implicada es el de relación entre áreas, se alude a superficies de polígonos, a cantidad de área/superficie, etc.; si la concepción implicada es el de relación de medidas de lados, se alude a longitud –en su defecto, a catetos e hipotenusa del triángulo y no a superficies o áreas de polígonos–).

- **Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)**

R1. Enuncia adecuadamente el Teorema de Pitágoras: Es clara su estructura condicional, las condiciones del antecedente y las propiedades del consecuente están completas y bien enunciadas de acuerdo con las dos concepciones.

R2. Presenta adecuadamente el Teorema de Pitágoras según alguna de sus concepciones o las dos: Es consistente el uso de la concepción implicada durante el video (e.g., si la concepción implicada es la de relación entre áreas, las aproximaciones involucradas en el video se refieren a esta; es decir, las representaciones, los argumentos, las generalizaciones y las situaciones/problemas aluden a áreas, mas no a medidas de lados).

R3. Alude adecuadamente a las dos concepciones del Teorema de Pitágoras: Presenta de forma clara las dos concepciones del Teorema de Pitágoras y las emplean sin ambigüedades.

R4. Formula adecuadamente las definiciones de objetos claves relacionados.

R5. Usa adecuadamente definiciones: Las definiciones enunciadas se corresponden con los procedimientos o explicaciones involucrados.

R6. Formula adecuadamente las proposiciones involucradas: Se explicitan antecedente y consecuente de proposiciones (propiedades de objetos) claves relacionados.

R7. Usa adecuadamente proposiciones matemáticas (e.g., para sustentar hechos geométricos o para llevar a cabo procedimientos).

R8. Alude adecuadamente a diferentes tipos de generalización (e.g., en un mismo video es posible encontrar generalizaciones mediante polígonos regulares y figuras semejantes)

R8. Enuncia un procedimiento de manera explícita (e.g., se deben construir cuadrados a partir de los lados del triángulo rectángulo si la concepción involucrada del Teorema de Pitágoras es la de área).

R9. Presenta de manera explícita acciones que vislumbran un procedimiento (e.g., aquellas que permiten hacer un argumento a partir de la transformación de objetos).

R10. Usa adecuadamente procedimientos matemáticos (e.g., aquellos necesarios para simplificar una expresión hasta lograr la deseada).

- **Argumentos**

A1. Presenta argumentos mediante los cuales se sustentan el Teorema de Pitágoras, o algún procedimiento llevado a cabo.

A2. Sustenta adecuadamente las aserciones involucradas: Se explicitan las garantías que sustentan aserciones en el marco de una demostración o prueba del Teorema de Pitágoras o un procedimiento.

A3. Alude adecuadamente a diferentes tipos de argumentos.

A4. Promueve situaciones donde se tenga que argumentar.

- **Situaciones/Problemas**

S1. Articula diferentes contextos: Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.

S2: Usa adecuadamente el Teorema de Pitágoras: Extrae la información proporcionada por la Situación/Problema y con base en ella aplica correctamente el Teorema de Pitágoras según la concepción involucrada.

S3: Propone situaciones de problematización: Se proponen situaciones de generación de problemas

Tabla 14. Indicadores de Idoneidad Epistémica de los principales Objetos Primarios asociados al Teorema de Pitágoras

Objeto Primario	**Código**	**Indicador**
Lenguajes/ Representaciones	L1	Usa representaciones gráficas, simbólicas o numéricas adecuadas
	L2	Usa adecuadamente diferentes tipos de representación
	L3	Usa una adecuada expresión verbal o escrita
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	R1	Enuncia adecuadamente el Teorema de Pitágoras
	R2	Presenta adecuadamente el Teorema de Pitágoras según alguna de sus concepciones: relación entre la media de lados -*me*- o relación entre áreas -*ar*-, o las dos -*me*-*ar*-.
	R3	Alude adecuadamente a las dos concepciones del Teorema de Pitágoras
	R4	Formula adecuadamente las definiciones de objetos claves relacionados.
	R5	Usa adecuadamente las definiciones
	R6	Formula adecuadamente las proposiciones involucradas
	R7	Usa adecuadamente proposiciones matemáticas
	R8	Alude adecuadamente a diferentes tipos de generalización (polígonos regulares -*pr*-, figuras semejantes -*fs*- y triángulos no rectángulos -*tn*-)
	R9	Enuncia un procedimiento de manera explícita
	R10	Presenta de manera explícita acciones que vislumbran un procedimiento
	R11	Usa adecuadamente procedimientos matemáticos
Argumentos	A1	Presenta argumentos mediante los cuales se sustentan el Teorema de Pitágoras, o algún procedimiento llevado a cabo.
	A2	Sustenta adecuadamente las aserciones involucradas
	A3	Alude adecuadamente a diferentes tipos de argumentos (geométricos -*ge*-, geométrico-algebraicos -*ga*-, geométrico-dinámicos -*gd*- y numéricos -*nu*-)
	A4	Promueve situaciones donde se tenga que argumentar
Situaciones/ Problemas	S1	Articula diferentes contextos (Real -*re*-, realista -*ra*-, fantasioso -*fa*-, puramente matemático -*pm*- y científico-matemático -*cm*-)
	S2	Usa adecuadamente el Teorema de Pitágoras
	S3	Propone situaciones de problematización
Relaciones	C1	Alude adecuadamente a diferentes aproximaciones del Teorema de Pitágoras (concepciones, argumentos, situaciones y generalizaciones).
	C2	Alude adecuadamente a los diferentes tipos de cada aproximación (concepciones -*c*-, argumentos -*a*-, situaciones -*s*- y generalizaciones -*g*-).

Adicionalmente, adaptamos los Componentes de Idoneidad Epistémica propuestos por Breda et al. (2018) descritos en la Tabla 9. Componentes y Descriptores de Idoneidad EpistémicaTabla 9, organizados por Errores, Ambigüedades, Representatividad y Riqueza de procesos. Nótese que en los indicadores presentados en la Tabla 14, deja ver asuntos relacionados con los tres primeros componentes. Explicamos esto enseguida.

En lugar de referirse a "errores" (i.e., prácticas que se consideren incorrectas), nosotros proponemos indagar sobre aquello que es adecuado, lo que en el fondo conlleva a también analizar el aquello que es inadecuado por ausencia de lo adecuado. Por ejemplo, el no cumplimiento de L1 que se puede concretar en la exposición de una representación gráfica no correcta (no nombrar los vértices de los polígonos con letras mayúsculas) indica una práctica no adecuada, por ausencia de L1.

Para el componente "ambigüedades" (i.e., la exposición de ideas que pueden llevar a la confusión) nosotros proponemos indicadores que hacen alusión al uso adecuado de la diversidad de objetos de un mismo tipo, especialmente de representaciones y concepciones (e.g., L2, R3, A3). Al igual que para el componente "errores", la ausencia de estos indicadores puede indicar ambigüedades. Por ejemplo, se puede dar que un video indique una concepción de área para explicar el Teorema, pero que en las situaciones/problemas haga alusión a la concepción de relación entre la medida de lados; ello indicaría una ausencia de R3 por cuanto, aun cuando el video habla de las dos concepciones, hay un uso inconsistente de las mismas pues no hay coherencia entre la concepción indicada y su uso para abordar la situación.

Con respecto al componente "representatividad" (i.e., muestra representativa de significados parciales y modos de expresión), nosotros proponemos dos niveles de representatividad:

Tipo 1. Alude a la posibilidad de que el video considere varias de las aproximaciones que hemos tomado para tipificar los videos (concepciones, argumentos, generalizaciones, aplicaciones); diremos entonces, que un video involucra varias de estas aproximaciones sería más idóneo que uno que sólo aborde una.

Tipo 2. Alude a la posibilidad de que el video, ya tipificado según el primer tipo, aborde una variedad de objetos según el tipo de objeto; así, por ejemplo, un video puede involucrar varias representaciones -L2-, varias concepciones -R2-, varios argumentos -A3-, varias generalizaciones -R8- o varias situaciones -S1-.

Tipo 3. Alude a la posibilidad de que el video, ya tipificado según el segundo tipo, aborde a una variedad de casos según el objeto clasificación de la generalización o de la situación; así, por ejemplo, un video puede involucrar varios casos para un tipo de situación (Real -*re*-, realista -*ra*-, fantasioso -fa-, puramente matemático -*pm*- o científico-matemático –*cm*) o varios casos para un tipo de generalización (polígonos regulares -*pr*-, figuras semejantes -*fs*- o triángulos no rectángulos -*tn*-).

En la Tabla 15, presentamos un resumen de los Componentes de Idoneidad Epistémica, sus respectivos Descriptores y el Código correspondiente; además, de los códigos de los indicadores asociados a cada componente. De las Tabla se infiere que si durante la codificación hay un indicador cuya práctica asociada sea adecuada o inadecuada el código del indicador se complementará con A o I, según el caso (e.g., L1A); si se observa alguna ambigüedad, el código del indicador se complementará con G (e.g., L2G); finalmente, si se observa alguna representatividad, el código del indicador se complementará con T (e.g., L2T).

Tabla 15. Componentes, Descriptores e Indicadores de Idoneidad Epistémica asociados al Teorema de Pitágoras

Componentes	**Código**	**Descriptores**	**Indicadores asociados**
Practicas Adecuadas, parcialmente adecuadas **o** Inadecuadas	A	Se observan prácticas que se consideran adecuadas desde el punto de vista matemático.	L1, L2, L3, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R11, A2, A3, S2
	P	Se observan prácticas que se no se pueden considerar adecuadas o inadecuadas, en su totalidad, desde el punto de vista matemático.	
	I	Se observan prácticas que se consideran inadecuadas desde el punto de vista matemático.	
Ambigüedades	G	Se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión de los estudiantes.	L2, L3, R3, A3, S2
Representatividad	T	Se observa variedad en las Aproximaciones o variedad de objetos de un solo tipo (representaciones, concepciones, proposiciones, situaciones argumentos).	L1, L2, R2, R8, A3, S1, C1, C2

3.3 FASE 3 DEL ANÁLISIS: ANÁLISIS POR INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE LOS VIDEOS

En esta tercera fase del análisis, hicimos los análisis de los video educativos usando, por supuesto, las herramientas analíticas antes descritas. El resultado de los análisis para cada video se presenta por medio de una tabla, en la cual tuvimos en cuenta cuatro elementos para su construcción: Identificación del video, descripción general, objetos primarios representativos, y codificación con los criterios de idoneidad con la explicación de la codificación.

Describimos, enseguida, la composición de la tabla de análisis. En las primeras celdas consignamos lo referente a la *Identificación del video*: etiqueta de búsqueda, enlace, título del video e intencionalidad y objetos primarios representativos. En la celda siguiente, *Descripción general*, presentamos una descripción panorámica del video de forma que el lector pueda hacerse una idea de lo que está presente en el mismo. En las celdas siguientes, todas bajo el título *Análisis de Idoneidad Epistémica*, exponemos aquellos elementos que consideramos representativos de lo que está sucediendo en el video para hacer el análisis; para ello, pusimos capturas de pantalla o transcripciones de los elementos representativos que consideramos dignos de comentar, indicando entre paréntesis su cronología dentro de este; para cualquier de estos dos casos hicimos una breve descripción de lo que está sucediendo en ese momento del video, de manera tal que el lector tenga un contexto del análisis que se va a presentar enseguida. Después de esto presentamos el análisis de los videos a la luz de los indicadores y componentes de Idoneidad Epistémica haciendo uso de las herramientas analíticas, esto es de los códigos que están puestos en las Tablas 14 y 15. Finalmente, en la última celda se presenta una *Síntesis del Análisis* de Idoneidad Epistémica con respecto a los Objetos Primarios Representativos identificados.

A continuación, en la Tabla 16 presentamos el modelo de tabla que se usamos para presentar los análisis, expuestos en el Capítulo siguiente.

Tabla 16. Modelo para presentar el análisis de los videos.

Iden-tifica-	**Etiqueta de búsqueda**	Se pone según la Tabla 12	**Enlace**	Se pone según la Tabla 12

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Título del video</td><td>Se numera según la Tabla 12. Muestra de Videos asociados al Teorema de Pitágoras
Se pone textualmente como se encuentra en YouTube</td><td>Intencionalidad</td><td>Se pone según la Tabla 1</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Se explicitan los objetos primarios en los que se centra el video</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">Se pone una breve descripción general del video según los componentes técnicos expuestos en la Sección 2.1 y las Aproximaciones que aborde.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">Se pone descripción de lo que sucede en un momento determinado.
Se pone Captura de pantalla o transcripción del momento, indicando el lapso en que ello ocurre entre paréntesis rectangulares.
Se pone análisis según indicadores expuestos en las Tablas 14 y 15.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Síntesis del Análisis
Se pone un breve balance general del Análisis de Idoneidad Epistémica realizado.</td></tr>
</table>

Cabe aclarar que en un primer momento se previó que los análisis se realizarían de forma conjunta por parte de los autores del estudio. Sin embargo, debido al tiempo que tomó el análisis de los dos primeros videos (de siete a diez minutos de transcripción por cada minuto de video y de veinte a treinta minutos de análisis por cada sección del video), decidimos distribuir el trabajo; esto es, un autor analizó unos videos; el otro, otros. Ello conlleva a que, durante la lectura de los análisis, el lector pueda identificar dos estilos diferentes en la presentación de los análisis, uno más descriptivo y otro más sintético. Ahora bien, dado que ambos procuraron mantener el acuerdo de presentar los análisis siguiendo la estructura y criterios de la Tabla 16.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo presentamos los análisis y los resultados de los análisis de los videos seleccionados en la Etapa de la determinación de la muestra y datos de estudio.

4.1 Análisis

En esta primera sección presentamos los 12 análisis realizados según la metodología, en el capítulo 3, organizados en las Tablas 17 a 28. A continuación, los análisis:

Tabla 17. Análisis del video No. 01

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Explicación del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/2yfkEAt2ew0</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 01: “TEOREMA DE PITÁGORAS Super fácil”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráfica-estática (geométricas).
• Definiciones de objetos relacionados con el Teorema de Pitágoras.
• Teorema de Pitágoras desde la concepción de relación entre la medida de lados.
• Operaciones aritméticas y algebraicas.
• Argumentos Numéricos[15].
• Situaciones/Problemas puramente matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En un primer momento del video, se tratan algunos objetos previos del Teorema de Pitágoras, como lo son: la definición de triángulo rectángulo, los elementos de este tipo de triángulo y de la operación potenciación, en particular cuando el exponente es dos; luego se aborda el Teorema por medio de la concepción de relación entre la medida de lados y, por último, se resuelve algunas situaciones asociadas a este.

Desde el punto de vista técnico, el video consiste en un avatar que, con sus movimientos, da la sensación de ser quien realiza la explicación del contenido de este, haciendo uso únicamente de recursos multimedia.</td></tr>
</table>

[15] Este tipo de argumento no lo tuvimos en cuenta de manera preliminar; el argumento numérico consiste en proveer la veracidad del Teorema a la luz de su verificación para algunos casos particulares.

Análisis de Idoneidad Epistémica
[00:26 – 00:52]: El avatar inicia la explicación del tema presentando una definición del triángulo rectángulo y de los elementos de este tipo de triángulo; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-1**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); en el lapso el avatar afirma lo siguiente:

> Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, es decir un ángulo de noventa grados. Al lado más largo del triángulo se le llamara hipotenusa. Si a simple vista no te puedes dar cuenta cuál es la hipotenusa, solo tienes que ubicar el ángulo de noventa grados y el lado que este en frente de él es la hipotenusa, y la representaremos con la letra c. Y a los otros lados le llamaremos catetos y los representaremos con la letra a y con la letra b.

Figura 4.1-1. Captura de pantalla I del video 01

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo al indicar el ángulo recto, aunque no nombra sus vértices.

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación, ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por el avatar (representación verbal) y lo representado gráficamente en la Figura 4.1-1 (representación gráfico-estática).

R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo y ángulo recto.

L3(I): Usa lenguaje no formal para definir la hipotenusa, al indicar el lado opuesto al ángulo recto como “lado en frente al ángulo recto”.

R4(A): Aunque en un principio se da una caracterización informal de hipotenusa (usando expresiones como lado más largo basándose en una percepción visual), luego define de una manera más adecuada hipotenusa y catetos haciendo alusión al lado opuesto al ángulo recto o demás lados del triángulo, respectivamente.

[01:40 – 02:23]: El avatar continúa con la explicación de los objetos previos, ejemplificando cómo calcular una potencia con exponente dos; a la vez, en el video se muestra una representación aritmética de este procedimiento (Figura 4.1-2); en el lapso el avatar afirma lo siguiente:

> Ahora vamos a hablar de elevar a la segunda potencia: aquí tengo tres a la segunda potencia; al tres se le llama base y al dos se le llama exponente. El exponente nos dice cuántas veces se va a multiplicar la base por sí misma, por lo tanto, tres al cuadrado sería lo mismo que tres por tres.

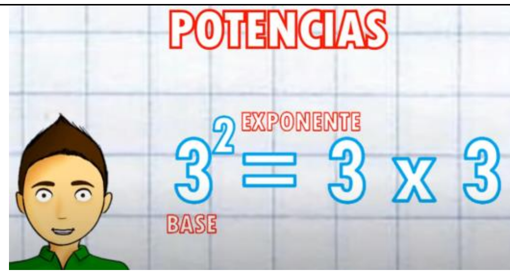


Figura 4.1-2. Captura de pantalla II del video 01

R4(I): Presenta inadecuadamente lo que indica el exponente de la potenciación, ya que este no indica cuántas veces se multiplica la base, sino las veces que se debe poner esta para poder multiplicarla.

R9: Enuncia explícitamente cómo calcular una potencia con exponente dos.

[02:24 – 02:41]: El avatar enuncia el Teorema de Pitágoras aludiendo a la concepción de relación entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo; a la vez, en el video se muestra el enunciado y la representación algebraica asociada a esta concepción (Figura 4.1-3); en este lapso el avatar afirma lo siguiente:

> Ahora sí vamos a ver que es el Teorema de Pitágoras, y este establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos; por lo tanto, la fórmula quedaría así: c cuadrada es igual a a cuadrada más b cuadrada.

Figura 4.1-3. Captura de pantalla III del video 01

L2(A)(T): Usa diferentes tipos de representación (verbal y simbólica) y hay cierta coherencia entre ellos, ya que todos aluden a la concepción de relación entre la medida de lados de un triángulo rectángulo. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; es decir, que hay varias de representaciones de un mismo objeto, para este caso, del enunciado del Teorema de Pitágoras: una escrita en lenguaje natural y otra basada en una representación simbólica.

Sin embargo, vale la pena decir lo siguiente:

L2(G): Pese al esfuerzo por usar diferentes representaciones (verbal y simbólico) de manera coherente, hay un uso ambiguo de la representación simbólica $c^2 = a^2 + b^2$, ya que en la Figura 4.1-1 las letras a, b y c se usan como los nombres de los lados del triángulo, mientras en la Figura 4.1-3 se usan como las medidas de los catetos y la hipotenusa respectivamente; ello implica que tales letras indican dos objetos: segmentos o medidas de segmentos.

R2-*me*: Aunque hay un uso ambiguo de la representación simbólica $c^2 = a^2 + b^2$, esta permite inferir que la concepción que pretende desarrollar el video es la de relación entre medidas de lados.

R1(P): La expresión “el Teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo”, que corresponde al antecedente del teorema, permite identificar el carácter de proposición condicional de este. Por otro lado, la expresión “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”, es una manera no tan afortunada de enunciar el consecuente del teorema, ya que esta se puede relacionar con la concepción de relación entre áreas; una manera adecuada de enunciar este sería: la medida de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Lo anterior permite evidenciar que el teorema enuncia de manera parcialmente adecuada.

[02:45 – 04:07]: El avatar continúo con la comprobación del Teorema de Pitágoras a partir de un triángulo rectángulo del cual se conocen las medidas de todos sus lados; a la vez, en el video se muestran las representaciones gráfico-estática, algebraica y numérica de lo descrito antes (Figura 4.1-4); en el lapso el avatar afirma lo siguiente:

> Aquí tengo un triángulo rectángulo con medidas de cuatro, cinco y tres centímetros cada uno. Como ya sabemos, el lado más grande es la hipotenusa y la representaremos con la letra c mientras los catetos los ubicamos con las letras a y b. Recordemos que la fórmula del Teorema de Pitágoras es, c cuadrada es igual a a cuadrada más b cuadrada; en palabras más simples, quiere decir que la hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b. Vamos a comprobarlo, lo primero que tenemos que hacer es sustituir valores, esto quiere decir que en lugar de las letras c, a y b pondremos la medida de cada lado: en lugar de la c cuadrada pongo cinco al cuadrado, en lugar de a cuadrada pongo tres al cuadrado y en lugar de la b cuadrada pongo cuatro al cuadrado. Ahora voy a elevar cada número al cuadrado: cinco por cinco es igual a veinticinco, tres por tres es igual a nueve y cuatro por cuatro es igual a dieciséis, veinticinco se queda igual y si sumo nueve más dieciséis me da como resultado veinticinco, por lo tanto, si se cumple el teorema de Pitágoras, la hipotenusa elevada al cuadro es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b.

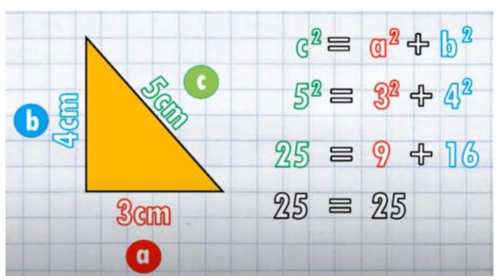


Figura 4.1-4. Captura de pantalla IV del video 01

R1(I): La expresión “la fórmula del Teorema de Pitágoras es, c cuadrada es igual a a cuadrada más b cuadrada”, es una forma inadecuada de enunciar el Teorema de Pitágoras; ya que al hacerlo como una fórmula pierde su sentido como proposición condicional, dejando de lado las condiciones del antecedente y enfocándose únicamente en el consecuente de este.

L3(I): La expresión “la hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b” es una expresión verbal inadecuada, ya que, aun en el marco de la concepción por medidas de lados, en el video sigue existiendo la ambigüedad entre si las letras indican segmentos o medidas de segmentos.

A3-*nu*(A): Presenta *argumentos numéricos* que permiten comprobar el Teorema para un caso particular, en este caso para un triángulo cuyas medidas de los catetos y la hipotenusa son 3, 4 y 5 respectivamente. Para ello, comprueba que los valores de las medidas satisfacen la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.

R9: Enuncia de forma explícita procedimientos algebraicos y aritméticos como lo son: sustitución de los valores de las medidas (i.e., tener en cuenta únicamente lo numérico, dejando de lado las unidades de medida), calcular la potencia con exponente dos y la suma de números naturales.

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la comprobación del Teorema de Pitágoras para un caso particular.

[04:11 – 05:40]: El avatar continúo resolviendo una situación puramente matemática mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras; esta consistía en calcular la medida de la hipotenusa conociendo de antemano las medidas de los catetos. A la vez, en el video se muestran las representaciones grafico-estática, algebraica y numérica de lo descrito antes (Figura 4.1-5); en el lapso el avatar afirma lo siguiente:

> Aquí tengo un triángulo rectángulo con medidas de cinco y seis centímetros; solo tengo los catetos a y b, y la hipotenusa no sé cuánto mide, así que para saber su valor tengo que utilizar el teorema de Pitágoras: c cuadrada es igual a a cuadrada más b cuadrada. Ahora voy a sustituir solo los valores que tengo: como no sé cuánto vale la hipotenusa se queda igual; c cuadrada es igual y en lugar de poner la a cuadrada pongo su valor, que es seis al cuadrado; y en lugar de poner b cuadrada lo sustituyo por el valor del cateto, que es cinco a la segunda potencia. Así que me queda la fórmula así: c cuadrada es igual a seis al cuadrado más cinco al cuadrado. Como no sé el valor de c, se queda igual; ahora voy a elevar los valores de los catetos a la segunda potencia: seis por seis es igual a treinta y seis y cinco por cinco es igual a veinticinco. c cuadrada se vuelve a bajar igual y voy a sumar treinta y seis más veinticinco que me da como resultado sesenta y uno; ahora tengo que c cuadrada es igual a sesenta y uno. Para saber el valor de c tengo que despejarla; esto quiere decir que la tengo que dejar solita. Así que el dos que esta elevado a la segunda potencia pasa al otro lado del igual haciendo lo contrario que es sacando raíz cuadrada; por lo tanto, me queda como c es igual a raíz cuadrada de sesenta y uno, al hacer la raíz tengo que c es igual a siete punto ochenta y uno. Y listo, ya tengo el valor de la hipotenusa."

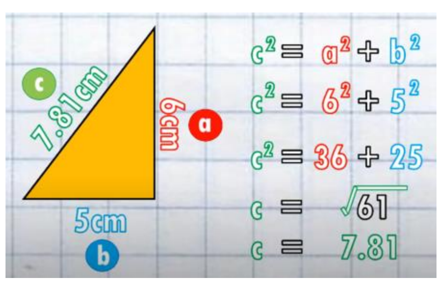


Figura 4.1-5. Captura de pantalla V del video 01

S1-*pm*: Presenta una situación puramente matemática, que consiste en calcular la medida de uno de los lados del triángulo rectángulo, conociendo las medidas de los otros dos.

S2(A): En la situación puramente matemática presentada en el video se ilustra cómo usando el Teorema de Pitágoras se le da solución a esta; esto es, se parte del hecho de conocer las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo y, con base en estas, se calcula la medida de la hipotenusa. Lo anterior permite evidenciar un uso adecuado del Teorema de Pitágoras.

R11(P): Usa adecuadamente algunos de los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la aplicación del Teorema de Pitágoras, como los son: sustitución de los valores de las medidas, calcular la potencia con exponente dos y la suma de números naturales. Por otro lado, usa inadecuadamente un procedimiento algebraico, ya que al afirmar que una operación pasa de un lado al otro de la igualdad es matemáticamente incorrecto. En este caso puntual, decir "pasar" la potenciación al otro lado de la igualdad en forma de radicación es un procedimiento que no alude a las propiedades de la igualdad para la potenciación (monotonía de la potenciación para las igualdades). Lo anterior permite evidenciar un uso parcialmente adecuado de los procedimientos algebraicos y aritméticos.

L1(I): Usa una representación numérica inadecuada, ya que se muestra el resultado final como $c = 7{,}81$, pero $\sqrt{61}$ es un número irracional. En consecuencia, lo correcto sería expresarlo como una aproximación, así: $c \approx 7{,}81$.

Síntesis del Análisis

Los siguientes son los códigos más representativos de este video:

L2(A)(T): Hay uso de varias representaciones (verbal, escrita y simbólica, gráfica), en general coherentemente.

L1(P): Sin embargo, hay algunas falencias en lo gráfico al no indicar ángulos rectos en el triángulo, por ejemplo.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

L3(I): Un asunto que no es matemático pero que podemos comentar colateralmente es una falencia ortográfica al no indicar algunas tildes. En consecuencia, un uso inadecuado del lenguaje correspondiente.

R2-*me*(A): Uso coherente de la concepción del Teorema, por relación entre la medida de lados, a lo largo del video.

R1(P): Sin embargo, vale indicar que la enunciación del Teorema fue hecha de dos maneras diferentes, una más atinada con la concepción que la otra. En un primer momento se usó la expresión "el cuadrado de un lado", siendo esta más cercana a la concepción de relación de áreas; luego, se usó la expresión "lado elevado al cuadrado", siendo está más cerca a la concepción de relación entre medidas de lados, que era la que pretendía desarrollar el video.

A3-*nu*(A): Adicionalmente, se usa un argumento numérico para presentar una comprobación del Teorema para un caso particular.

S2(A): El video plantea una situación/problema relativa a usar el Teorema para encontrar la medida de un lado del triángulo rectángulo conociendo las medidas de los otros dos lados.

S1-*pm*: Sin embargo, no hay una representatividad de las Situaciones/Problemas, ya que en el video únicamente se abordó esa situación puramente matemática.

R10(P): Se evidencio el uso parcialmente adecuado de procedimientos algebraicos y aritméticos. Por ejemplo; algunos adecuados como: sustitución de valores, potenciación y suma de números naturales; y uno inadecuado, que consiste en "pasar una operación" de un lado al otro de la igualdad, lo cual es una imprecisión matemática.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones a Teorema de Pitágoras: alude a una concepción, presenta un argumento y aborda una situación problema.

C2: Sin embargo, no alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación tratada: concepción desde la relación de mediada de lados, argumento numérico y situación puramente matemática.

C3-*pm*(T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento, pero aborda dos situaciones problema puramente matemáticas.

Tabla 18. Análisis del video No. 02

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Explicación del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/XfVWlO3sRw0</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 02: "Teorema de Pitágoras Introducción"</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráfica-estática (geométricas).
• Definiciones de objetos relacionados al Teorema de Pitágoras.
• Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre áreas de cuadrados.
• Argumentos numéricos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En el video se tratan algunos objetos previos del Teorema de Pitágoras, como lo son: la definición de triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; a la vez que aborda el Teorema por medio de la concepción de relación entre áreas de cuadrados; por último, verifica el Teorema para un caso particular.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa un tablero no electrónico, que sirve como apoyo para que un expositor realice la explicación, a modo de monólogo, del Teorema de Pitágoras desde la concepción antes mencionada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:17 – 01:11]: El expositor inicia la explicación del tema presentando simultáneamente el antecedente y algunos objetos del consecuente del Teorema desde la concepción de relación entre áreas, una definición del triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; a la vez, en el</td></tr>
</table>

video se muestra una representación gráfico-estática del triángulo rectángulo (Figura 4.1-6); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Lo primero de lo que tenemos que hablar es que el Teorema de Pitágoras funciona solamente con triángulos rectángulos, o sea con triángulos que tengan un ángulo recto, o sea un ángulo de noventa grados. Otra cosa que tenemos que dejar claro es que el Teorema de Pitágoras sí habla de un triángulo, pero a lo que se refiere es a los cuadrados que se pueden dibujar en cada uno de los lados del triángulo; acordándonos, que el lado más largo del triángulo rectángulo se llama hipotenusa y los otros dos lados, que son, los obviamente, si este es el más largo, los otros dos son los más cortos, se llaman catetos. Entonces, el Teorema de Pitágoras habla de los cuadrados que se pueden formar sobre la hipotenusa que es el lado más largo y sobre los catetos que son los lados más cortos.

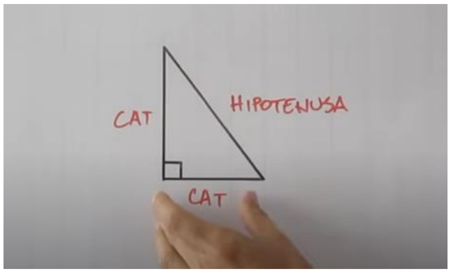


Figura 4.1-6.Captura de pantalla I del video 02

L3(I). En este lapso del video, en un primer momento enuncia el antecedente del Teorema, a la vez que define triángulo rectángulo y ángulo recto; seguido, hace un acercamiento al consecuente del Teorema, a la vez que caracteriza hipotenusa y catetos; por último, enuncia parte del consecuente del Teorema. Lo anterior, permite evidenciar una comunicación no tan afortunada, ya que no es tan idóneo el orden en el que enuncia, define y caracteriza cada uno de los objetos involucrados. Esto es, se habla de objetos muy específicos involucrados en el Teorema sin haberlo enunciado de una manera explícita. Hay evidencias que procuran indicar su antecedente, pero no su consecuente.

R1(P): Específicamente, la expresión "el Teorema de Pitágoras funciona solamente con triángulos rectángulos" correspondería al antecedente del Teorema; esto deja ver una intención para establecer el carácter de condicional para el enunciado del Teorema. Pero no hay alusión al consecuente.

R2-*ar*: Así mismo, la expresión "los cuadrados que se pueden dibujar en cada uno de los lados del triángulo", permite inferir que la concepción que pretende desarrollar el video es la de relación entre áreas. Sin embargo, no hay explicitación de la proposición que compone el consecuente.

R1(P): De manera más específica, la expresión "Entonces, el Teorema de Pitágoras habla de los cuadrados que se pueden formar sobre la hipotenusa que es el lado más largo y sobre los catetos que son los lados más cortos"; es una manera no tan afortunada de enunciar el consecuente del Teorema, ya que usa lenguaje informal al usar los verbos dibujar o formar, para referirse a la acción geométrica de construir un objeto. Una manera adecuada de formular dicho enunciado seria: Entonces, el Teorema de Pitágoras habla de la relación entre las áreas de los cuadrados que se pueden construir a partir de los lados de un triángulo rectángulo, es decir, a partir de la hipotenusa que es el lado de mayor medida y de los catetos que son los lados de menor medida.

Otros aspectos por decir son:

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo al indicar el ángulo recto, aunque no nombra sus vértices.

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal y gráfico-estática), ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por el expositor y la representación gráfico-estática. Por ejemplo, el expositor habla de un triángulo rectángulo, mientras en el video se observa un triángulo con el ángulo recto indicado. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; para este caso del enunciado del Teorema de Pitágoras: una en lenguaje verbal y otra basada en una representación gráfica.

R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo y ángulo recto.

L3(I): Usa lenguaje no formal para caracterizar la hipotenusa y los catetos, al indicar la relación entre sus medidas usando expresiones como "el lado el más largo" o "los lados más cortos", respectivamente.

[01:11 – 01:51]: El expositor continuó la explicación nombrando simbólicamente la hipotenusa y los catetos, además de presentar una definición de estos objetos mediante la relación de orden de sus medidas; a la vez en el video se muestra una representación gráfico-estática del triángulo rectángulo (Figura 4.1-7); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> La verdad, no importa las letras que uno le ponga a los lados del triángulo, lo importante es que tengamos claro que se habla de la hipotenusa y de los catetos. Entonces, pues para este caso voy a ponerle la letra a a este cateto, este cateto se va a llamar a [señala el cateto vertical] este cateto se va a llamar b [señala el cateto horizontal] y la hipotenusa la voy a llamar c. No se afanen por las letras, si ustedes quieren pueden ponerle la a, la b y la c [señala la hipotenusa y los catetos horizontal y vertical respectivamente] eso es lo de menos. Lo importante es que tengan claro que los catetos son los más pequeños, miren que los dibuje con rojo [señala las letras a y b], y la hipotenusa es el lado más largo, y obviamente lo dibuje con otro color [señala la letra c], para aclarar que hay que ver las diferencias.

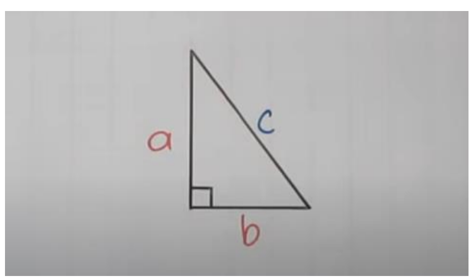


Figura 4.1-7. Captura de pantalla II del video 02

L2(A): En la expresión "No se afanen por las letras… eso es lo de menos. Lo importante es que tangan claro que los catetos son los más pequeños, miren que los dibuje con rojo, y la hipotenusa es el lado más largo, obviamente la dibuje con otro color", el expositor comenta la no relevancia de la asignación de los nombres a los lados del triángulo en algún orden predeterminado; y por el contrario, enfatiza en la relevancia de identificar que los catetos son los segmentos con menor medida en un triángulo rectángulo, con respecto a la medida de la hipotenusa, recalcando esta diferenciación al utilizar colores diferentes (rojo y azul) para nombrar los catetos y la hipotenusa, respectivamente. Lo anterior permite observar que la representación gráfico-estática se usa adecuadamente.

L3(I): Usa lenguaje no formal para caracterizar la hipotenusa y los catetos, al indicar la relación entre sus medidas usando expresiones como “el lado más largo” o “los lados más pequeños”, en lugar de usar expresiones como: el segmento o lado con mayor medida, para definir la hipotenusa; y los segmentos o lados con menor medida para definir los catetos.

[01:52 – 02:50]: El expositor continuó la explicación presentando el Teorema de Pitágoras desde la concepción de relación entre áreas; a la vez en el video se muestran representaciones gráfico-estática y algebraica de esto (Figura 4.1-8 y Figura 4.1-9); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Entonces, el Teorema de Pitágoras habla de que el cuadrado de la hipotenusa. Entonces, obviamente tenemos que dibujar un cuadrado. El cuadrado que se puede dibujar sobre la hipotenusa tiene la misma área o es igual a los cuadrados que se dibujan en los catetos. Entonces, obviamente como lo vemos, estos dos cuadrados son más pequeños que este [señala los cuadrados que tienen de lado alguno de los catetos o la hipotenusa, respectivamente], y lo que dice el teorema de Pitágoras, como les digo habla de los cuadrados. Entonces, este se llama el cuadrado del lado c, entonces lo voy a escribir así el cuadrado del lado c [señala el cuadrado que uno de sus lados es la hipotenusa y escribe en su interior la expresión c^2]. Este sería el cuadrado del lado a, por eso voy a marcarlo así, el cuadrado del lado a [señala el cuadrado que uno de sus lados es el cateto a y escribe en su interior la expresión a^2]; y el cuadrado del lado b [señala el cuadrado que uno de sus lados es el cateto b y escribe en su interior la expresión b^2]. Entonces, que dice el Teorema de Pitágoras, que el área del cuadrado grande, ósea c al cuadrado, es igual a el área de los dos cuadrados pequeños, ósea en este caso, sería igual a el área del cuadrado a más el área del cuadrado b [escribe a un lado la expresión $c^2 = a^2 + b^2$].

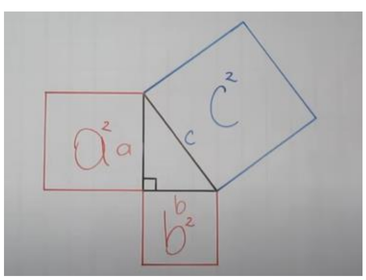


Figura 4.1-8. Captura de pantalla III del video 02

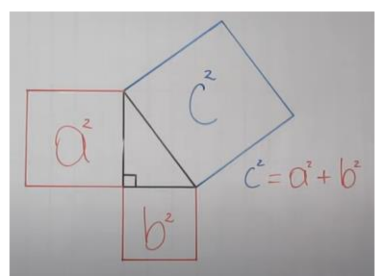


Figura 4.1-9. Captura de pantalla IV del video 02

L1(I): Representa inadecuadamente los cuadrados, ya que no indica con el símbolo correspondiente la congruencia de sus lados, ni los ángulos rectos.

R9(A): Enuncia de manera explícita el procedimiento de construir los cuadrados, a partir de los lados del triángulo rectángulo.

L3(I): La acción anterior la realiza usando lenguaje no formal, al usar expresiones como: “los cuadrados que se pueden dibujar sobre los lados del triángulo”; en lugar de afirmar: los cuadrados que se pueden construir a partir de los lados del triángulo rectángulo.

L3(I): Usa lenguaje no formal para describir la relación entre las áreas de los cuadrados, al usar expresiones como: "estos dos cuadrados son más pequeños que este"; en lugar de afirmar: el área de cualquiera de los cuadrados construidos a partir de los catetos es menor que el área del cuadrado construido a partir de la hipotenusa.

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal, gráfico-estática y simbólica), ya que hay cierta coherencia entre ellas, al estar relacionadas con la misma concepción del Teorema: relación entre áreas de cuadrados. Por ejemplo, en la representación gráfico-estática se pueden observar los cuadrados construidos a partir de los lados del triángulo rectángulo, a la vez que aparece la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, la cual señala la relación entre las áreas de los cuadrados antes mencionados. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; para este caso, del enunciado del Teorema de Pitágoras: en lenguaje verbal, en representación gráfica y en representación simbólica.

L2(G): En la Figura 4.1-8, las letras a, b y c se usan como los nombres de los lados del triángulo, mientras en la Figura 4.1-9, estas mismas aparecen elevadas al cuadrado (a^2, b^2 y c^2), representando las áreas de los cuadrados con medida de lados a, b y c. De acuerdo con lo anterior, hay un uso ambiguo de la representación simbólica, por cuanto a, b y c son usadas como lados en un momento y como medidas de lados en otro.

R9: Las expresiones "el cuadrado del lado a, b o c", permiten vislumbrar el procedimiento mediante el cual se calculan las áreas de los cuadrados de medidas de lados a, b y c, respectivamente.

R1(P): Luego de lo indicado antes, finalmente se enuncia el consecuente del Teorema. La expresión "Entonces, que dice el Teorema de Pitágoras, que el área del cuadrado grande, o sea c al cuadrado, es igual a el área de los dos cuadrados pequeños, o sea en este caso, sería igual al área del cuadrado a más el área del cuadrado b", da cuenta de ello. Sin embargo, esta es una manera no tan afortunada de enunciar la relación entre las áreas de los cuadrados, ya que usa lenguaje no formal para describirla. Una manera adecuada de enunciar dicha relación seria: Entonces, el Teorema de Pitágoras afirma que el área del cuadrado construido a partir de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los catetos, para este caso en particular se tiene, que el área del cuadrado con medida de lado c, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados con medida de lado a y b.

[02:50 – 04:10]: El expositor finaliza la explicación verificando el teorema para un caso particular; a la vez en el video se muestran representaciones gráfico-estática, algebraica y numérica de esto (); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Vamos a verlo con un ejemplo. En este caso, yo a propósito dibuje este triángulo; en este triángulo, este cateto mide tres unidades o tres cuadritos [señala el cateto horizontal y escribe debajo el número 3], este cateto mide cuatro unidades o cuatro cuadritos [señala el cateto vertical y escribe al lado el número 4], y este cateto mide cinco unidades o cinco cuadritos [señala la hipotenusa y escribe al lado el número 5]. Y si nosotros miramos, el cuadrado de este lado [señala la hipotenusa], el cuadrado que dibujé sobre este lado [señala el cuadrado que uno de sus lados es la hipotenusa], pues sería cinco al cuadrado [escribe 5^2], porque por algo habla de cuadrados, cinco al cuadrado tiene que ser igual [escribe $=$], a estos dos cuadrados [señala los cuadrados que tienen de lado alguno de los catetos]. Entonces, este al cuadrado [señala el número 4], cuatro al cuadrado [escribe 4^2], más [escribe $+$], y aquí este tres [señala el número 3], este lado, el cuadrado sería tres al cuadrado

[escribe 3^2]. Si hacemos la operación, cinco al cuadrado es veinticinco [escribe 25], y vamos a ver sí si es igual, cuatro al cuadrado es cuatro por cuatro, dieciséis [escribe 16], más [escribe $+$], tres al cuadrado que es tres por tres, nueve [escribe 9]. Y como nos damos cuenta veinticinco es igual a dieciséis más nueve, obviamente dieciséis más nueve también es veinticinco. Entonces, esto sucede en todos los triángulos rectángulos y obviamente se utiliza para hallar, por ejemplo, cuando no conocemos la hipotenusa, se puede hallar, o cuando no conocemos algún cateto y conocemos los otros dos, también se puede hallar.

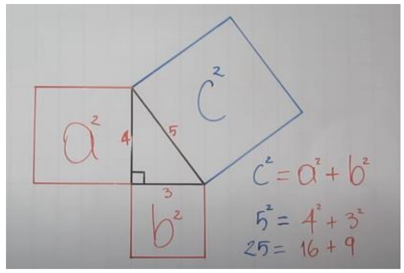


Figura 4.1-10 Captura de pantalla V del video 02

R10(A): En la expresión "en este triángulo, este cateto mide tres unidades o tres cuadritos, este cateto mide cuatro unidades o cuatro y este cateto mide cinco unidades o cinco cuadritos", el expositor enuncia de manera explícita el procedimiento de medir, ya que le asigna a cada lado del triángulo rectángulo una medida. En este caso particular los catetos y la hipotenusa miden 3, 4 y 5 unidades, respectivamente.

R11(I): Sin embargo, el usar una unidad de área, como lo es el "cuadrito", para medir unidades de longitud es un procedimiento matemáticamente inadecuado. Una manera adecuada de medir, usando el mismo instrumento de medición que presenta el video (tablero con cuadricula), seria tomar como unidad de media un lado de cada cuadrado, esto es una "rayita".

A3-*nu*(A): Presenta un argumento numérico que permiten comprobar el Teorema para un caso particular, en este caso para un triángulo rectángulo cuyas medidas de los catetos y la hipotenusa son 3, 4 y 5, respectivamente.

R8: Enuncia de forma explícita procedimientos aritméticos como lo son: calcular la potencia con exponente dos y la suma de números naturales.

R10(A): Usa adecuadamente procedimientos aritméticos (potenciación y suma de números naturales), en la comprobación del Teorema de Pitágoras para un caso particular. Esto es, para un triángulo rectángulo cuyas medidas de los catetos y la hipotenusa son 3, 4 y 5 respectivamente.

Síntesis del Análisis

Los siguientes son los códigos más representativos de este video:

L2(A)(T): Hay uso de varias representaciones (verbal, simbólica y gráfica), en general coherentemente.

L1(P): Sin embargo, con algunas falencias en lo gráfico al no indicar ángulos rectos en el triángulo y en los cuadrados, por ejemplo.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

L3(I): En general, hay uso inadecuado del lenguaje verbal, debido a que el orden en el que se presentan las ideas no es tan afortunado; esto debido a que el expositor enuncia el teorema, caracteriza y define objetos simultáneamente.

R1(P): Esto es, la enunciación del Teorema fue hecha en tres momentos diferentes. Primeramente, se enuncio el antecedente y algunos preliminares del consecuente, en un segundo y tercer momento se presentaron las condiciones del consecuente.

R2-*ar*(A): Uso coherente de la concepción del Teorema, por relación entre áreas de cuadrados, a lo largo del video.

A3-*nu*(A): Adicionalmente, se usa un argumento numérico para presentar una comprobación del Teorema para un caso particular.

R10(A): En ese marco, se evidencio el uso adecuado de procedimientos aritméticos. Por ejemplo, potenciación y suma de números naturales.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones al Teorema: alude a una concepción y presenta un argumento.

C2: Sin embargo, no alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación tratada: concepción desde la relación entre áreas de cuadrados y argumento de tipo numérico.

C3(T): Tampoco alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento.

Tabla 19. Análisis del video No. 03

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Explicación del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/w6nh99v3r4A</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 03: “TEOREMA DE PITÁGORAS ❖ Fórmula, Demostración y Ejemplos”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráfica-estática (geométricas).
Definiciones de objetos relacionados con el Teorema de Pitágoras.
Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre áreas de cuadrados.
Operaciones aritméticas y algebraicas.
Situaciones/Problemas puramente matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En el video se tratan algunos objetos previos del Teorema de Pitágoras, como lo son: la definición de triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; a la vez que aborda el Teorema por medio de la concepción de</td></tr>
</table>

relación entre áreas de cuadrados; por último, aplica el Teorema para en una situación puramente matemática.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa una pizarra no electrónica, que sirve como apoyo para que una expositora realice la explicación, a modo de monólogo, del Teorema de Pitágoras desde la concepción antes mencionada.

Análisis de Idoneidad Epistémica

[00:17 - 02:02]: La expositora inicia la explicación del tema, presentando el antecedente del teorema, dando una definición de triángulo rectángulo, construyendo cuadrados a partir de los lados del triángulo rectángulo y calculando su área; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-11); en el lapso la expositora afirma lo siguiente:

> El Teorema de Pitágoras se aplica sólo en triángulos rectángulos. Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos recto, es decir, que vale noventa grados. Cuando se dibuja, se suele pintar en la esquinita que es de noventa grados, hacer una esquinita con un puntito. Así que este triángulo azul que vemos aquí [señala el triángulo] es rectángulo porque tiene uno de sus ángulos recto. Pues, si nos fijamos, yo tengo aquí, a este lado le voy a llamar el lado h [escribe h sobre la hipotenusa del triángulo], a este le voy a llamar el lado a [escribe a sobre el cateto más largo del triángulo], y a este el lado b [escribe b sobre el cateto más corto del triángulo]. Pues, si realizamos un cuadrado que prolongue a ese lado [señala un lado del cuadrado que tiene como base la hipotenusa] que lógicamente tiene la misma medida, porque al ser cuadrado este lado [señala la hipotenusa del triángulo] va a dar lo mismo que este [escribe h sobre un lado del cuadrado que tiene por lado la hipotenusa], el área de este cuadrado sería… ¿Cuál es el área de un cuadrado? Lado por lado, este lado es h, pues h por h, Este área sería h cuadrado. Y el área de este cuadrado que está anexo al lado a, va a tener todos los lados a, el área va a ser el lado al cuadrado, es decir, a cuadrado su área. Y aquí el cuadrado anexo al lado b, va a tener todos los lados valor b, si hago el área sería, b por b, igual a b cuadrado.

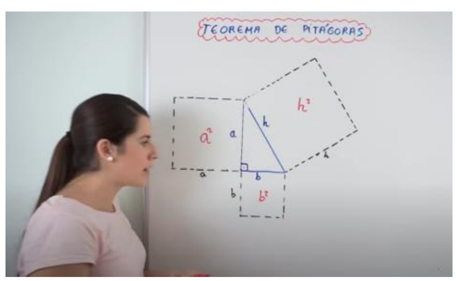


Figura 4.1-11. Captura de pantalla I del video 03

R1(A): Presenta adecuadamente todas las premisas que constiyen el antecedente del Teorema de Pitágoras.

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo ya que marca el ángulo recto y nombra sus lados. Sin embargo, representa inadecuadamente los cuadrados, ya que no indica con el símbolo correspondiente la congruencia de sus lados, ni los ángulos rectos; además, tres lados de cada cuadrado son discontinuos (en ningún momento del video aclaran porqué la discontinuidad de estos lados).

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal, simbólica y gráfico-estática), ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por la expositora y la representación gráfico-estática. Por ejemplo, la expositora habla de un triángulo rectángulo, mientras en el video se observa un triángulo con el ángulo recto indicado. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; para este caso del enunciado del Teorema de Pitágoras: una en lenguaje verbal y otra basada en una representación gráfica.

R1(P): La expresión "el Teorema de Pitágoras se aplica solo en triángulos rectángulos", que corresponde al antecedente del Teorema, permite inferir su carácter como proposición condicional, lo que se constituye en una manera adecuada de enunciar parte de este.

R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo y ángulo recto.

L3(I): La expresión "si realizamos un cuadrado que prolongue la hipotenusa", es matemáticamente incorrecta; ya que prolongar hace alusión a determinar un segmento de mayor medida a uno dado, tal que compartan uno de sus extremos y estén contenidos en la misma recta. Lo anterior se constituye en un uso inadecuado del lenguaje verbal. Por otro lado, si miramos lo que afirma seguidamente la expositora: "lógicamente tiene la misma medida, porque al ser cuadrado este lado va a dar lo mismo que este"; podemos inferir que una manera más afortuna de expresarse, sería: "si construimos segmentos perpendiculares a la hipotenusa, por cada de uno de sus extremos tal que tengan la misma media de esta, podremos determinar un cuadrado; y por definición de este, todos sus lados tienen la misma media". Por último, la expresión "de este cuadrado que está anexo al lado a", es una forma inadecuada de expresarse; una manera más afortunada de hacerlo sería: "el triángulo rectángulo y el cuadrado son adyacentes tal que comparten el lado a"

R2-*ar*: Adicionalmente, de la expresión "si realizamos un cuadrado que prolongue la hipotenusa", se puede inferir que la concepción que pretende desarrollar el video es la de relación entre áreas.

R9: Aunque la anterior expresión sea inadecuada, esta enuncia de manera explícita el procedimiento de construir los cuadrados, a partir de los lados del triángulo rectángulo. Además, la expositora explícita el procedimiento para calcular el área de estos, al afirmar: "¿Cuál es el área de un cuadrado? Lado por lado".

R10(A): De lo anterior, podemos inferir que el procedimiento para calcular el área de los cuadrados es matemáticamente adecuado. Por ejemplo: "si hago el área sería, b por b, igual a b cuadrado".

L2(G): Primeramente, las letras h, a y b se usan como los nombres de los lados del triángulo; luego, estas mismas aparecen elevadas al cuadrado (h^2, a^2 y b^2), representando las áreas de los cuadrados con medida de lados h, a y b. De acuerdo con lo anterior, hay un uso ambiguo de la representación simbólica, por cuanto h, a y b son usadas como lados en un momento y como medidas de lados en otro.

[02:04 - 04:16]: La expositora continua con la explicación, enunciando el consecuente del Teorema de Pitágoras desde su concepción por áreas de cuadrados, y dando una definición o caracterización de hipotenusa y catetos; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-12); en el lapso la expositora afirma lo siguiente:

Resulta que, si lo probáis, se dieron cuenta de que, el área de este cuadrado [señala el cuadrado de área h^2], es decir h cuadrado, es la suma de estas dos áreas, [señala los cuadrados de área a^2 y b^2], de a cuadrado más b cuadrado, [escribe la expresión h^2=a^2+b^2]; pues este es el Teorema de Pitágoras, el famoso Teorema de Pitágoras. Se dio cuenta de que el área del lado más grande del triángulo, que ahora veremos cómo se llama cada lado, va a ser la suma del área de los otros dos. A todo esto, ahora vamos a ponerle nombre a los lados: este lado [señala la hipotenusa del triángulo] que es el más grande y es el que está opuesto al ángulo de 90 grados, se le llama hipotenusa, por eso a mí me gusta ponerlo como h, así no os confundís, entonces a este lado vamos a llamarle hipotenusa; el lado a, que yo he querido llamar a, es el cateto mayor, porque los lados que forman el ángulo de noventa grados se les llama catetos, pero hay uno que va a medir más que otro, pues cateto mayor; y el lado b como también forma parte del ángulo de noventa grados, es el cateto menor. En resumen, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado, cateto a y cateto b."

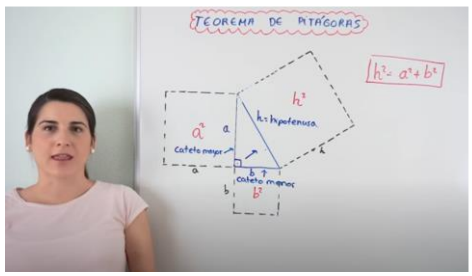


Figura 4.1-12. Captura de pantalla II del video 03

R1(P): Enuncia adecuadamente el consecuente del Teorema de Pitágoras desde su concepción de relación entre área de cuadrados, ya que afirma "el área de este cuadrado, es decir, h cuadrado es la suma de estas dos áreas [señala los cuadrados de área a^2 y b^2], a^2+b^2". Aunque lo anterior se puede describir de una manera más afortunada: "el área del cuadrado de lado medida h, es decir h^2, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados de medida a y b, es decir a^2+b^2."

R4(P): Define de manera adecuada, la hipotenusa: "este lado [señala la hipotenusa del triángulo] que es el más grande y es el que está opuesto al ángulo de noventa grados, se le llama hipotenusa"; una manercaa más adecuada se caracterizar la hipotenusa sería: "es el lado de mayor medida del triángulo rectángulo". Seguidamente caracteriza y define, de una manera no tan afortunada, los catetos: "el lado a, es el cateto mayor, porque los lados que forman el ángulo de noventa grados se les llama catetos, pero hay uno que va a medir más que otro, y el lado b como también forma parte del ángulo de 90 grados, es el cateto menor; una manera adecuada de definir los catetos sería: "a los lados que determinan el ángulo de noventa grados se les llama cateto"; además, una manera adecuada de caracterizar los catetos sería: "los catetos son los lados del triángulo rectángulo con menor medida, con respecto a la hipotenusa".

R6(I): De la caracterización de los catetos que hace la expositora, que anteriormente comentamos, podemos decir que formula inadecuadamente una proposición, al afirmar: "los lados que forman el ángulo de noventa grados se les llama catetos, pero hay uno que va a medir más que otro"; ya que esta afirmación deja de lado el caso en el que el triángulo rectángulo es isósceles, es decir tiene dos lados con igual medida.

L2(A)(T): Vale indicar que usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal, gráfico-estática y simbólica), ya que hay cierta coherencia entre ellas, al estar relacionadas con la misma concepción del Teorema: relación entre áreas de cuadrados. Por ejemplo, en la representación gráfico-estática se pueden observar los cuadrados construidos a partir de los lados del triángulo rectángulo, a la vez que aparece la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, la cual señala la relación entre las áreas de los cuadrados antes mencionados. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; para este caso, del enunciado del Teorema de Pitágoras: en lenguaje verbal, en representación gráfica y en representación simbólica.

[02:04 - 08:35]: La expositora finaliza la explicación, resolviendo dos situaciones puramente matemáticas relativas a la concepción de medidas de lados; a la vez, en el video se muestran las representaciones grafico-estática, algebraica y numérica de lo descrito antes (Figura 4.1-13 y Figura 4.1-14).

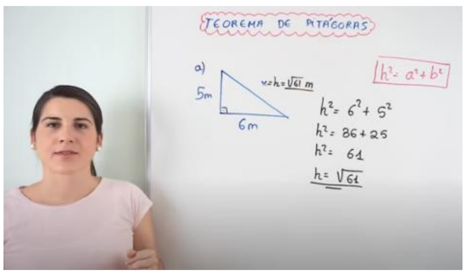


Figura 4.1-13. Captura de pantalla III del video 03

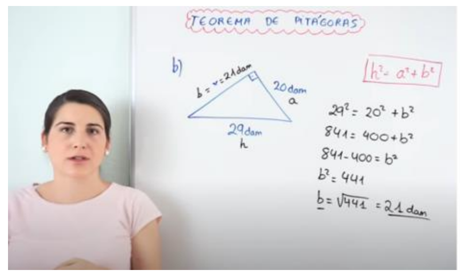


Figura 4.1-14. Captura de pantalla IV del video 03

En este fragmento del video, se realizan dos aplicaciones puramente matemáticas del Teorema de Pitágoras; en la primera se debe calcular la medida de la hipotenusa y en la segunda se debe calcular la medida de un cateto, dados las medidas de los otros dos lados del triángulo. El análisis de este lapso es análogo al realizado en video No. 01 en el fragmento [04:11 – 05:40]; por lo tanto, decidimos no hacerlo ya que no aporta objetos nuevos que puedan ser analizados. Sin embargo, podemos destacar:

S1-*pm*: las situaciones puramente matemáticas planteadas en este fragmento del video, se resuelven mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras desde la concepción que alude medida de lados.

L1(A): Usa una representación numérica adecuada, ya que se muestra el resultado final como $h = \sqrt{61}$ y no comete el error de igualar el valor de la raíz a un número aproximado, esto nos indica un buen cuidado de la sintaxis.

Síntesis del Análisis

Los siguientes son los códigos más representativos de este video:

R2-*ar*(P): En la primera parte del video se aborda el Teorema desde la concepción de relación entre áreas; en la segunda se da solución a situaciones puramente matemáticas aplicando la concepción relativa a la relación de medida de lados. Esto es un uso no coherente de la concepción del Teorema, por relación entre áreas de cuadrados, a lo largo del video.

S1-*pm*: Se evidencio poca representatividad de las Situaciones/Problemas, ya que en el video únicamente se abordaron situaciones puramente matemáticas.

R1(P): La enunciación del Teorema se hace de manera parcialmente adecuada, esto debido a que fue hecha en dos momentos diferentes. Primeramente, se enuncio el antecedente y en un segundo momento se presentaron las condiciones del consecuente.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

L2(A)(T): Hay uso de varias representaciones (verbal, simbólica y gráfica), en general coherentemente.

L1(P): Sin embargo, con algunas falencias en lo gráfico al no indicar ángulos rectos e igualdades de medidas de lados, en el cuadrado, por ejemplo.

L3(I): En general, hay uso inadecuado del lenguaje verbal, debido a que usa erróneamente términos como prolongar o anexar, para caracterizar y definir objetos relacionados con el Teorema.

R10(P): Se evidencio el uso adecuado de procedimientos geométrico. Por ejemplo, calcular el área de cuadrados.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones al Teorema: alude a una concepción y resuelve dos situaciones.

C2: Sin embargo, no alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación tratada: concepción desde la relación entre áreas de cuadrados y situaciones puramente matemáticas.

C3-*pm* (T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: aborda dos situaciones problema puramente matemáticas.

Tabla 20. Análisis del video No. 04

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Demostración del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/Xj-4EUPx3A4</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 04: “Teorema de Pitágoras demostración”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones escritas, simbólicas (algebraicas), gráfica-estática y con material concreto (geométrico).
• Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre medidas de lados y la concepción como relación entre áreas de cuadrados.
• Argumentos geométricos a partir de la división en unidades de medida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video presenta los enunciados de las dos concepciones del Teorema de Pitágoras, como relación entre medidas de lados y como relación entre áreas de cuadrados; enfocándose en la comprobación de esta última, a través del uso de material concreto.

Desde el punto de vista técnico, el video consta de dos partes: la primera es una proyección de diapositivas; y la segunda consiste en una filmación,</td></tr>
</table>

	en la que todo el tiempo se observa el material concreto y cómo este es manipulado. Cabe aclarar que no hay alguna voz que exponga el video, por lo que no hay representaciones verbales; para llenar el silencio se escucha únicamente una pista (sin *copyright*) animada de fondo.

Análisis de Idoneidad Epistémica

[00:07 – 00:21]: El video inicia presentando el enunciado del Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre medida de lados; seguido, en el video se muestra una representación gráfico-estática de dicha concepción, en esta se puede observar un triángulo con sus lados nombrados como A, B y C, además de la expresión $A^2 = B^2 + C^2$ (Figura 4.1-15 y Figura 4.1-16).

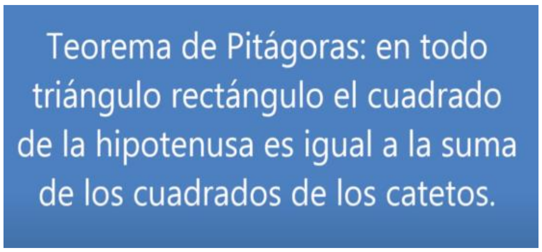


Figura 4.1-15. Captura de pantalla I del video 04

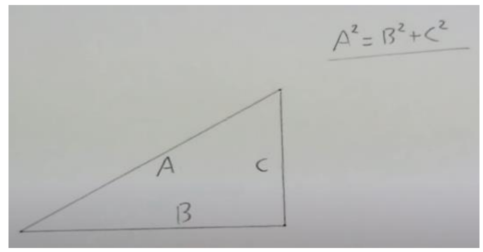


Figura 4.1-16. Captura de pantalla II del video 04

R2-*me*: De la Figura 4.1-15 y la Figura 4.1-16, se puede inferir que la concepción que pretende desarrollar el video es la de relación entre medidas de lados.

Sin embargo, vale indicar lo siguiente:

L3(G): Escribir en la diapositiva “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”, no es una manera afortunada de aludir al Teorema de Pitágoras. Esto porque se da a entender que la hipotenusa y los catetos son medidas representadas por números (por ende, susceptibles de elevarse al cuadrado) o que los objetos que son segmentos –hipotenusa o catetos– son objetos susceptibles de elevarse al cuadrado; en cualquier caso, podría haber un error de orden matemático. Para el primer caso, hipotenusa y catetos son números; para el segundo, habría que precisar el sistema axiomático local para indicar el sentido de elevar al cuadrado objetos tipo segmento; dependiendo de ello, es posible indicar errores conceptuales o no.

L2(G): Lo anterior implica que hay un uso ambiguo de la representación simbólica $A^2 = B^2 + C^2$, ya que en la Figura 4.1-15, el enunciado allí puesto, hace alusión a que las letras A, B y C se usan como los nombres de los lados del triángulo, mientras en la Figura 4.1-16 se usan como las medidas de los catetos y la hipotenusa respectivamente; ello implica que tales letras indican dos objetos: segmentos o medidas de segmentos.

L2(I)(T): Usa diferentes tipos de representación (verbal y simbólica), a pesar de que no hay la coherencia semántica deseada entre ellos (e indicada con los códigos anteriores). Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; es decir, que hay varias de representaciones de un mismo objeto, para este caso, del enunciado del Teorema de Pitágoras: una escrita en lenguaje natural y otra basada en una representación simbólica.

L1(I): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo ya que no marca el ángulo recto. Además, el ángulo que debería ser recto no se vislumbra con una medida de 90°.

[00:22 – 00:43]: El video continuó presentando el enunciado del Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre áreas de cuadrados; seguido, en el video se muestra una representación gráfico-estática de dicha concepción, en esta se puede observar que con material concreto se han sobrepuesto tres cuadrados sobre los lados del triángulo anterior (Figura 4.1-17), de tal forma que en el material concreto, el cuadrado azul comparta exactamente uno de sus lados con el lado A del triángulo, esto análogamente para los cuadrados amarillo y rojo y los lados B y C del triángulo respectivamente (Figura 4.1-18).

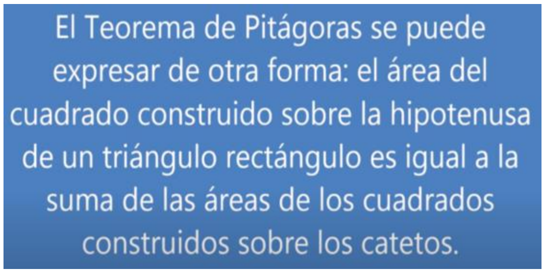


Figura 4.1-17. Captura de pantalla III del video 04

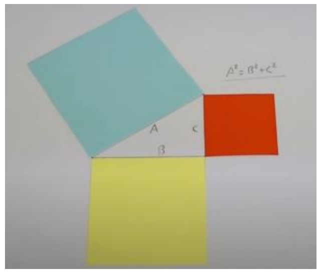


Figura 4.1-18. Captura de pantalla IV del video 04

R2-*ar*: De la representación escrita y gráfico-estática de la Figura 4.1-17 y la Figura 4.1-18, se puede inferir que otra concepción que se pretende desarrollar el video es la de relación entre áreas de cuadrados.

Vale indicar algunos aspectos:

L3(I): En la expresión "el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa", no se precisa a qué cuadrado hace referencia (puede ser cualquier cuadrado, adyacente a la hipotenusa). Lo correcto sería decir: el área del cuadrado construido de tal forma que uno de sus lados sea la hipotenusa del triángulo rectángulo. El mismo comentario cabe para la expresión "las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos."

R1(I): De lo anterior, se puede concluir que se enuncia de una manera no tan precisa el Teorema desde su concepción como relación entre áreas.

L1(I): Representan inadecuadamente los cuadrados ya que no los nombran de ninguna de las posibles formas (nombrando los cuatro vértices del cuadrado o nombrando los lados del cuadrado); tampoco tienen la indicación de los ángulos rectos ni las congruencias de los lados.

[00:44 – 00:52]: El expositor muestra una diapositiva con los materiales necesarios para la construir un artefacto que permitirá argumentar el Teorema de Pitágoras aproximándose al argumento de divisiones en unidades de medida (Figura 4.1-19).

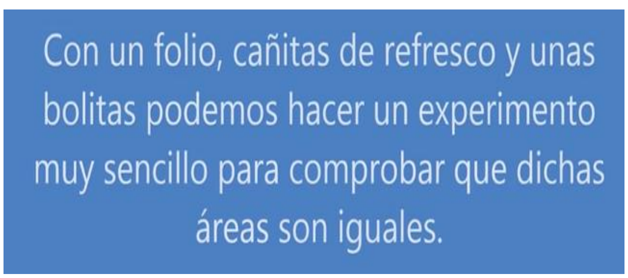


Figura 4.1-19. Captura de pantalla V del video 04

[00:43 – 02:25]: El video finalizó presentando la comprobación del Teorema de Pitágoras desde la concepción de relación entre áreas de cuadrados, a través del uso de material concreto; en el lapso, pudimos identificar ocho principales momentos:

I. En una hoja blanca, se tiene la representación gráfico-estática del Teorema de Pitágoras desde la concepción de relación entre áreas de cuadrados; en donde los lados de los cuadrados, que no son a la vez lados del triángulo, están superpuestos por fragmentos de pitillo (Figura 4.1-20).

II. Superponen un triángulo de cartón al triángulo de la hoja blanca (Figura 4.1-21).

III. Empiezan a llenar las regiones que aparentan tener menor área con esferas rojas (Figura 4.1-22).

IV. Se observa que las regiones antes mencionadas no quedan cubiertas de esferas en su totalidad (Figura 4.1-23).

V. Giran e inclinan la representación, de forma que las regiones antes mencionadas queden en la parte superior (Figura 4.1-24).

VI. Retiran el triángulo de cartón, el cual servía como barrera contenedora de las esferas rojas, para que estas se desplacen a la región que aparenta tener la mayor área (Figura 4.1-25).

VII. Acomodan las esferas para que entren todas en la región que aparenta tener la mayor área (Figura 4.1-26).

VIII. Superponen nuevamente el triángulo de cartón al triángulo de la hoja; además, se observa que la región que aparenta tener la mayor área no queda cubierta en su totalidad (Figura 4.1-27).

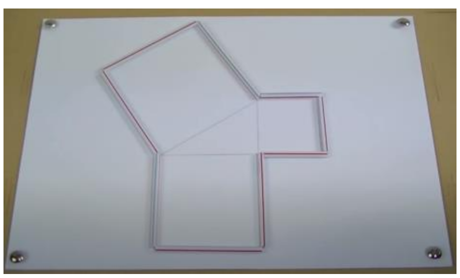


Figura 4.1-20. Captura de pantalla VI del video 04

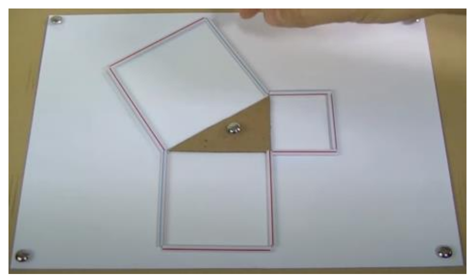


Figura 4.1-21. Captura de pantalla VII del video 04

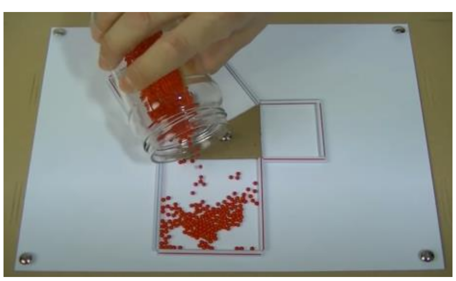


Figura 4.1-22. Captura de pantalla VIII del video 04

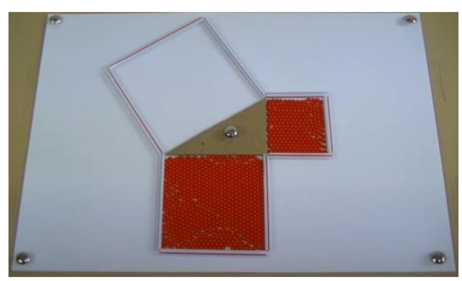


Figura 4.1-23. Captura de pantalla IX del video 04

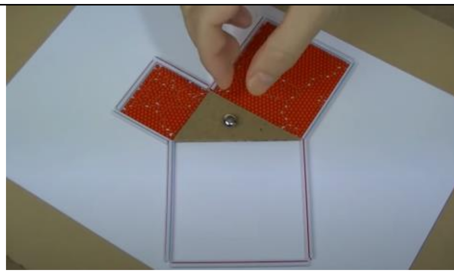


Figura 4.1-24. Captura de pantalla X del video 04

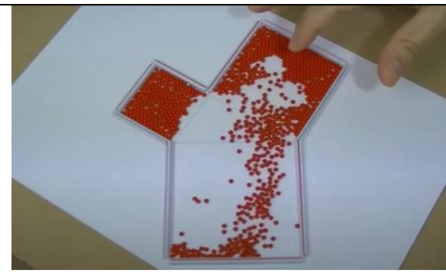


Figura 4.1-25. Captura de pantalla XI del video 04

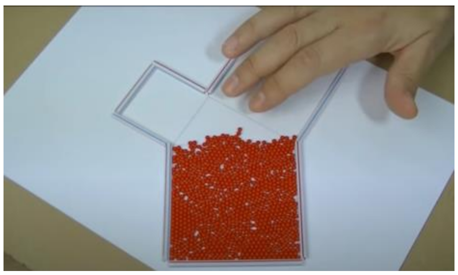


Figura 4.1-26. Captura de pantalla XII del video 04

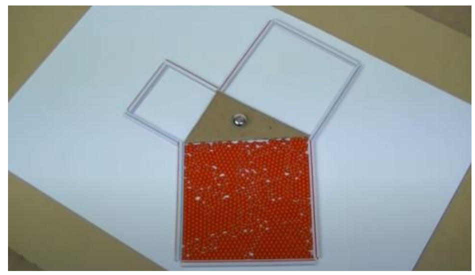


Figura 4.1-27. Captura de pantalla XIII del video 04

A3(P)-*ge*: Es posible observar que el material concreto que se utiliza hace alusión a un argumento geométrico a partir de la división de unidades de medida para mostrar el Teorema de Pitágoras desde su concepción de relación entre áreas de cuadrados, siendo las esferas rojas las que se pretende hagan las veces de unidad de superficie.

A3(P)-*gd*: Por otro lado, el hecho de verter las esferas relativas a "cubrir" la "superficie" determinadas por los cuadrados correspondientes a los catetos, en la "superficie" determinada por el cuadrado correspondiente a la hipotenusa, e inferir que las esferas iniciales cubren esta última superficie es algo dinámico con material concreto.

A1(I): Pese al esfuerzo de usar material concreto y un dinamismo para sustentar la veracidad del Teorema, el argumento correspondiente utiliza esferas para cubrir un volumen específico, lo cual no es afortunado. Esto, por cuanto usa esferas (figura de dimensión 3) para verificar un teorema que alude a superficies de cuadrados (figuras de dimensión 2); por lo tanto, este argumento debería ser apropiado para argumentar una de las generalizaciones del Teorema de Pitágoras, específicamente aquella referida a volúmenes (ver capítulo 2.2.4 Generalizaciones). Independiente de si se argumenta una de las generalizaciones del Teorema (aquella que alude a volumen) o si se alude a la concepción por superficies, la prueba no es afortunada porque las esferas no cubren por completo las regiones del espacio o las regiones de planas, según el caso. Este hecho implica un proceso de idealización (pensar que la esfera "cubren" perfectamente cada "superficie" o "volumen") que no necesariamente sea cercano para todos los receptores del video.

L3(I): Debido a lo anterior, no se pretende presentar un argumento para el Teorema de Pitágoras sino de una de sus generalizaciones. Nótese que en el video aluden a un argumento y no a una demostración del Teorema de Pitágoras como dice el título "Teorema de Pitágoras demostración". En sentido estricto, esa no es una manera correcta de indicar la tarea que se abordará en el video.

Consideramos que la tarea podría ser enunciada de manera similar a algo como: “Argumento geométrico de la Generalización del Teorema de Pitágoras (ampliación con volúmenes) a partir de la división en unidades de medida”. En ese sentido creemos que no hay una comunicación afortunada de la tarea que se va a tratar en el video.

Síntesis del Análisis

R3-*me-ar*: Se resalta su intención por aludir al Teorema de Pitágoras desde sus dos concepciones: medida de lados y áreas de superficies cuadradas.

A3(P): Se presenta de manera parcialmente adecuada, un argumento geométrico a partir de la división de unidades de medida para mostrar el Teorema de Pitágoras desde su concepción de relación entre áreas de cuadrados. Este es interesante pero no afortunado.

L2(I): Porque, hay un uso inadecuado de las representaciones concretas que se usan particularmente cuando se presenta una mostración para el Teorema. El esfuerzo es interesante, pero en realidad se hace una mostración de una generalización del Teorema de Pitágoras; más aún el argumento se fundamenta en una representación que no permitieron cubrir el espacio. El proceso de idealización debe ser alto para dar un sentido correcto del T. Pitágoras, o bien para entender asumir volumen como una representación de área de superficie, o bien para asumir que una superficie (indicada por un volumen) está perfectamente cubierta.

Otros asuntos a rescatar son:

L3(G): El Teorema de Pitágoras se enuncia de una manera no precisa: desde su concepción por medida de lados debido a que confunde lados y medidas de lados y desde su concepción por áreas de cuadrados, puesto que no precisa a que cuadrado hace referencia.

L1(I): Representan inadecuadamente los cuadrados y el triángulo rectángulo; ya que no nombran sus vértices, ni se indican los ángulos rectos, por ejemplo.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones a Teorema de Pitágoras: concepciones y argumentos.

C2(T)-*c*: Igualmente alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar dos tipos de una de las aproximaciones tratadas: concepciones desde la relación de mediada de lados, y desde la relación entre áreas

C3 (T): Igualmente alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento geométrico dinámico.

Tabla 21. Análisis del video No. 05

<table>
<tr><td rowspan="2">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Demostración del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/R21PyY-mpzs</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 05: “DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>(usando el área del triángulo y del cuadrado). FÁCIL”</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">

- Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráfica-estática (geométricas).
- Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre medidas de lados.
- Congruencia entre segmentos y triángulos.
- Área del triángulo y del cuadrado.
- Operaciones algebraicas.
- Argumentos geométrico-algebraicos.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En el video se tratan algunos objetos previos del Teorema de Pitágoras, como lo son: la definición de triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo. Por otro lado, se aborda el Teorema por medio de la concepción de relación entre áreas de cuadrados; por último, se verifica el Teorema para un caso particular.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa al expositor de la información o un tablero no electrónico, que sirve como apoyo para que el expositor realice la explicación, a modo de monólogo.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:24 – 01:10]: El expositor inicia la explicación del tema presentando simultáneamente el antecedente y el consecuente del Teorema desde la concepción de relación entre medidas de lados, una definición del triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; a la vez, en el video se muestra una representación gráfico-estática del triángulo rectángulo (Figura 4.1-28); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

Hay muchísimas formas de demostrar que para cualquier triángulo rectángulo [dibuja una figura similar a un triángulo rectángulo -en adelante triángulo inicial-], voy a llamar a la hipotenusa, que es el lado más largo, a, y a un cateto lo voy a llamar b y al otro cateto lo voy a llamar c [nombra cada lado del triángulo]. Bueno, pues estaba diciendo que hay muchísimas formas de demostrar que todos, absolutamente todos los triángulos rectángulos, este tiene un ángulo de noventa grados [indica el ángulo que parece recto], pues verifican lo siguiente [escribe la expresión $a^2 = b^2 + c^2$].</td></tr>
</table>

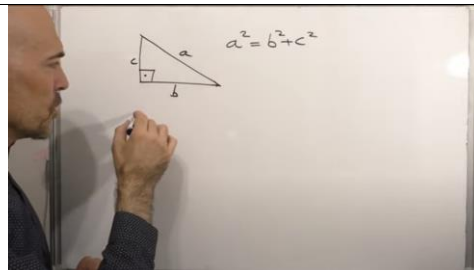


Figura 4.1-28. Captura de pantalla I del video 05

R1(P): La expresión “que para cualquier triángulo rectángulo”, que corresponde al antecedente del teorema, permite identificar el carácter de proposición condicional de este. Además, De la expresión, “absolutamente todos los triángulos rectángulos, verifican lo siguiente [escribe la expresión $a^2 = b^2 + c^2$]”, podemos afirmar que es una forma adecuada, pero poco rigurosa, de enunciar el Teorema de Pitágoras, ya que se explícita correctamente el antecedente y someramente el consecuente de este.

R2(A)-*me*: Uso coherente de la concepción del Teorema de Pitágoras por relación entre la medida de lados.

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo al indicar el ángulo recto, aunque no nombra sus vértices.

L2(G): Primeramente, las letras a, b y c se usan como los nombres de los lados del triángulo; luego, estas mismas aparecen elevadas al cuadrado ($a^2 = b^2 + c^2$), representando los cuadrados de las medidas de lados a, b y c. De acuerdo con lo anterior, hay un uso ambiguo de la representación simbólica, por cuanto a, b y c son usadas como lados en un momento y como medidas de lados en otro.

[01:12 – 01:56]: El expositor comenzó desarrollando el argumento a partir de composiciones con triángulos congruentes; dibujando un cuadrado, teniendo en cuenta las medidas del triángulo rectángulo inicial (Figura 4.1-29); a la vez, en el video se muestra una representación gráfico-estática de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Bueno, pues nuestra demostración tiene una idea feliz, la nuestra, para demostrar que esto es verdad. Nosotros vamos a construir un cuadrado grande. Aquí está un lado, aquí está otro lado, aquí está otro lado, aquí está otro lado [dibuja una figura similar a un cuadrado -en adelante “cuadrado grande”-]. Todos los lados miden lo mismo, claro, por eso es un cuadrado. Y mirad, este lado, pues va a medir $c + b$, ¿sí? Y este otro, pues va a medir los mismo, $c + b$, y este otro lado pues igualmente, $c + b$, y este otro lado, pues adivina, lo mismo, claro que sí, $c + b$ [señala cada lado del cuadrado grande y en cada uno de estos, marca el punto que determina las distancias b y c].

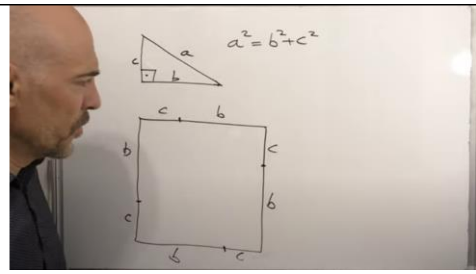


Figura 4.1-29. Captura de pantalla II del video 05

R9: Enuncia de manera explícita el procedimiento de construir un cuadrado.

R5(P): De la expresión “Todos los lados miden lo mismo, claro, por eso es un cuadrado”, podemos afirmar; que la condición de que todos los lados de un cuadrilátero tengan la misma medida, es necesaria para definir cuadrado, pero no es suficiente; ya que por sí sola, como se encuentra enunciada, se refiere a un rombo.

L1(P): Representan de manera parcialmente adecuada los cuadrados, ya que indica las igualdades de la medida de sus lados al decir que todos miden $c + b$, pero no indica los ángulos rectos.

A2(P): Se presenta un uso adecuado del argumento a partir de composiciones con triángulos congruentes; sin embargo, no se sustentan los procedimientos realizados para construir cuadrado medida $c + b$. Una forma adecuada de argumentar esto, sería hacer referencia a algún teorema que aborde la construcción de segmentos a partir de una medida dada. Para el caso de nuestro sistema axiomático local, sería el Teorema Localización de puntos.

A3-*ga*: Es posible identificar que, a partir de la concepción de relación entre medidas de lados del Teorema de Pitágoras, este se intenta demostrar usando argumentos geométrico-algebraicos a partir de composiciones con triángulos congruentes.

A2(I): No sustenta adecuadamente el hecho de que se pueda construir un cuadrado con lados de medida $c + b$. Una forma adecuada de argumentar esto, sería hacer referencia a algún teorema que mencione la construcción de segmentos a partir de una medida dada. Para el caso de nuestro sistema axiomático local, sería el Teorema Localización de puntos

[01:57 – 03:10]: El expositor continuó desarrollando el argumento dibujando un cuadrado, en el interior del cuadrado anterior, teniendo en cuenta las medidas del triángulo rectángulo inicial (Figura 4.1-30); a la vez, en el video se muestra una representación gráfico-estática de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Bien, tenemos ya un cuadrado, un cuadrado grande, y dentro de este cuadrado grande vamos a dibujar un cuadrado pequeño. Pues mira, este en concreto [dibuja una figura similar a un cuadrado, tal que está es determinada por los puntos que determinan las distancias b y c -en adelante “cuadrado pequeño”-]. Bueno, más o menos se ve que esto es un cuadrado. Este es un cuadrado muy especial, mira, tiene de lados a, a, a y a [señala cada lado del cuadrado pequeño], ¿Y por qué hago esto Juan? ¿Por qué hago esto? Pues mira, este triangulo que hay aquí, es este; este triángulo que hay aquí, es este [señala uno a uno, los dos triángulos derechos determinados por el cuadrado grande y el cuadrado pequeño y el triángulo inicial, respectivamente]. Es decir que hemos dibujado cuatro triángulos como este [señala los triángulos determinados por el cuadrado grande y el cuadrado

> pequeño y el triángulo inicial], que están dentro del cuadrado grande y además hay un cuadrado pequeño. Vuelvo a repetir otra vez qué hemos hecho: hemos dibujado un cuadrado grande, y dentro el cuadrado grande hay cuatro triángulos como este [señala los triángulos determinados por el cuadrado grande y el cuadrado pequeño y el triángulo inicial] y además un cuadrado pequeño.

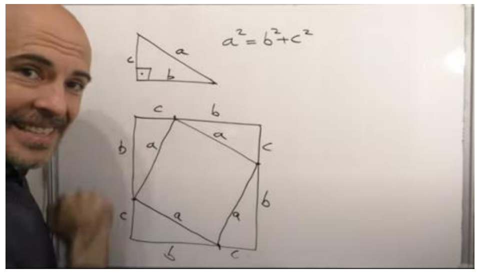


Figura 4.1-30. Captura de pantalla III del video 05

L3(I): La expresión “este triángulo que hay aquí, es este”; es una manera inadecuada de referirse a la relación de congruencia de triángulos; una manera adecuada de hacerlo sería: “estos triángulos son congruentes”.

A2(I): De la expresión “hemos dibujado un cuadrado grande, y dentro el cuadrado grande hay cuatro triángulos como este [señala los triángulos determinados por el cuadrado grande y el cuadrado pequeño y el triángulo inicial] y además un cuadrado pequeño.”; podemos inferir que lo que pretende afirmar el expositor, es que la construcción que acaba de hacer determina cuatro triángulos congruentes al triángulo inicial; pero en ningún momento provee un argumento que sustente dicha aserción. Una forma de argumentar esto, sería hacer referencia a algún elemento axiomático que aluda al criterio lado-ángulo-lado de congruencia de triángulos.

[03:16 – 04:43]: El expositor continuó la explicación calculando el área de las figuras involucradas (el cuadrado grande, el cuadrado pequeño y los cuatro triángulos determinados por estos), teniendo en cuenta las medidas del triángulo rectángulo inicial (Figura 4.1-31); a la vez, en el video se muestra una representación algebraica de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Nosotros vamos a demostrar que el Teorema de Pitágoras se cumple, es decir que esto es verdad, usando el valor de las áreas de lo que hay aquí [señala el cuadrado grande]. Mirad chicos ¿Cuál es el área de un triángulo cualquiera? Bueno, pues el área de un triángulo cualquiera es base por altura dividido entre dos. Así que mira, el área de este triángulo [señala el triángulo inicial], es simplemente, pues c por b o b por c, da igual, dividido entre dos. Y ahora pongamos nuestra vista en este cuadrado grande y en sus pequeños trozos. Mirad, el cuadrado grande ¿Cuál es el valor de su área? Pues mira Juan, el lado al cuadrado ¿El lado cuánto vale? Pues $c + b$ o $b + c$, al cuadrado. ¿Y cuál es el área del cuadrado pequeño, el de lado a? Pues será igual a a al cuadrado.

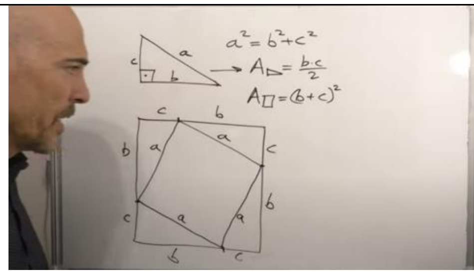


Figura 4.1-31. Captura de pantalla IV del video 05

A2(P): De la expresión “vamos a demostrar que el Teorema de Pitágoras se cumple, es decir que esto es verdad, usando el valor de las áreas de lo que hay aquí [señala el cuadrado grande]”; podemos inferir que usa adecuadamente el Postulado de adición de áreas, pero no lo explicita como argumento de la aserción. Consideramos que pudo haber verbalizado: “vamos a demostrar que el Teorema de Pitágoras se cumple, es decir que esto es verdad, comenzando con aplicar el Postulado de adición de áreas en el cuadrado de lado $b + c$ [señala el cuadrado grande]”

R9: Presenta de manera explícita el procedimiento para calcular el área del triángulo: “el área de un triángulo cualquiera es base por altura dividido entre dos”; y para calcular el área del cuadrado: “el cuadrado grande ¿Cuál es el valor de su área? Pues mira Juan, el lado al cuadrado”

[04:45 – 05:35]: El expositor continuó la explicación de la determinación del área del cuadrado grande a partir de las figuras determinadas en su interior (el cuadrado pequeño y los cuatro triángulos determinados por este) como se muestra en la (Figura 4.1-32); a la vez, en el video se muestra una representación algebraica de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Pues aquí esta lo importante, el área del cuadrado grande, voy a escribirlo, va a ser igual al área del cuadrado pequeño, más este área, este área, este área, esta área [señala los triángulos determinados por el cuadrado grande y el cuadrado pequeño], bueno pues, cuatro veces el área del triángulo [señala el triángulo inicial]. Bueno pues tenemos aquí el área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado pequeño más cuatro veces el área del triángulo rectángulo.

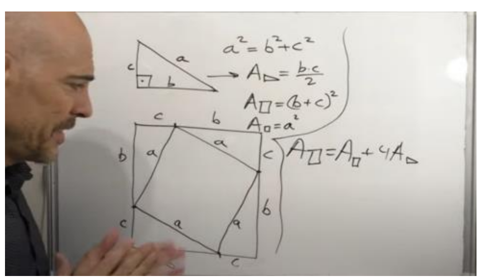


Figura 4.1-32. Captura de pantalla V del video 05

R7(A): La expresión “Bueno, pues tenemos aquí el área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado pequeño más cuatro veces el área del triángulo rectángulo”, permite evidenciar un uso adecuado de proposiciones matemáticas, para este caso particular, deducida de la representación gráfica.

R2(2): Usa coherentemente la proposición mencionada en el código anterior, ya que se condice con lo expresado verbalmente, así como con la gráfica de la cual dedujo usando implícitamente el Postulado adición de áreas.

[05:57 – 06:37]: El expositor continuó la explicación sustituyendo las expresiones de las áreas por las anteriormente calculadas (Figura 4.1-33); a la vez, en el video se muestra una representación algebraica de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Bueno pues, voy a sustituir estas áreas, por sus expresiones, por sus valores en función de los lados. Venga, el área del cuadrado grande es esto que hay aquí [señala la expresión $A_{\boxdot} = (b+c)^2$], b más c al cuadrado. Y esto tiene que ser igual al área del cuadrado pequeño, que es a cuadrado, más cuatro veces el área del triángulo, que es esto que hay aquí [señala la expresión $A_{\Delta} = \frac{b \cdot c}{2}$], pues b por c dividido entre dos. Así que simplemente hay que operar y vamos a llegar a esto [señala la expresión $a^2 = b^2 + c^2$].

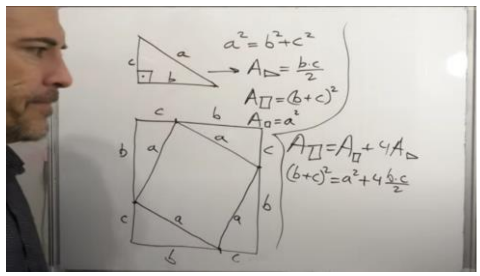


Figura 4.1-33. Captura de pantalla VI del video 05

R9: Enuncia explícitamente el procedimiento de sustituir las expresiones de las áreas: "Bueno pues, voy a sustituir estas áreas, por sus expresiones, por sus valores en función de los lados"

[06:40 – 09:20]: El expositor finalizó la explicación realizando las operaciones algebráicas necesarias, para demostrar la igualdad del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-34); a la vez, en el video se muestra una representación algebraica de esto; en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Desarrollemos este binomio al cuadrado, b más c elevado al cuadrado. Esto se puede hacer de muchas formas, a mí me gusta especialmente emplear los productos notables, pues tendríamos b cuadrado más dos veces bc más c al cuadrado. Y esto es igual a a al cuadrado, y mira, cuatro medios, esto es dos, así que cuatro bc dividido entre dos simplemente es dos bc.

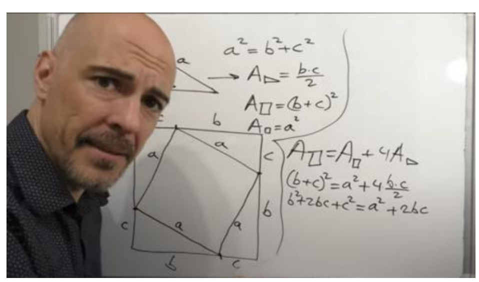


Figura 4.1-34. Captura de pantalla VII del video 05

> Y esto que hay aquí lo podemos simplificar. Por ejemplo, tenemos dos bc aquí y dos bc allá, pues simplificamos [señala y tacha la expresión $2bc$ en ambas partes de la igualdad] ¿Y qué más podemos simplificar? Nada más. ¿Qué nos ha quedado superviviente en esta

igualdad? pues tenemos b al cuadrado más c al cuadrado igual a a al cuadrado (Figura 4.1-35). Y nosotros queríamos demostrar que a cuadrado es igual a b cuadrado más c cuadrado. Yo puedo decir que esto que hay aquí [señala la expresión $b^2 + c^2 = a^2$], es lo mismo que a cuadrado, es igual a b cuadrado más c cuadrado. Bien chicos acabamos de demostrar el Teorema de Pitágoras.

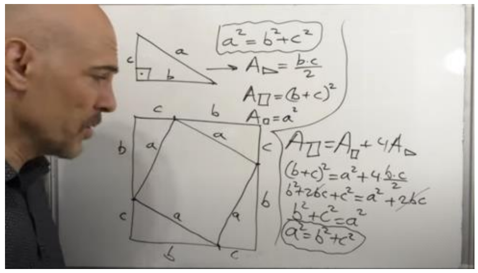


Figura 4.1-35. Captura de pantalla VIII del video 05

R11(A): Usa adecuadamente procedimientos algebraicos como: desarrollar el cuadrado de un binomio, simplificar fracciones, reducir términos semejantes en ambos términos de la igualdad.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

A3-*ga*: A partir de la concepción de relación entre medidas de lados del Teorema de Pitágoras, se argumenta desde la composición con triángulos congruentes.

A2(I): Aunque es posible seguir el “hilo lógico” de la demostración que se intenta realizar, esta es inadecuada, ya que en ningún momento hace explícitos los argumentos que sustentan las aserciones a las que alude. Por ejemplo: el Teorema Localización de puntos, el Postulado Lado-ángulo-lado y el Postulado Adición de áreas.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones a Teorema de Pitágoras: concepciones y argumentos.

C2-*c*: Además, alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación tratada: concepción desde la relación de mediada de lados y argumentos geométrico-algebraicos.

C3(T): Tampoco alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento.

Tabla 22. Análisis del video No. 06

Identificación del video	**Etiqueta de búsqueda**	Demostración del Teorema de Pitágoras	**Enlace**	https://youtu.be/KK4XTS9dgjg
	Título del video	Video No. 6: “[iconos incompatibles con Word] Demostración	**Intencionalidad**	Interés académico no curricular

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>facilísima del TEOREMA DE PITÁGORAS”</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-estáticas (geométricas).
• Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre medidas de lados
• Congruencia entre segmentos y triángulos
• Área del triángulo y del cuadrado
• Operaciones algebraicas
• Argumentos geométrico-algebraicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En el video se tratan algunos objetos previos del Teorema de Pitágoras, como lo son: la definición de triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; a la vez que aborda el Teorema por medio de la concepción de relación entre áreas de cuadrados; además, prueba el Teorema usando argumentos geométrico-algebraicos.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa un tablero digital, que sirve como apoyo para que un expositor realice la explicación, a modo de monólogo, del Teorema de Pitágoras desde la concepción antes mencionada.</td></tr>
</table>

Análisis de Idoneidad Epistémica

[00:10-01:01]: El expositor inicia la explicación dando una definición del triángulo rectángulo y los elementos de este tipo de triángulo; luego, enuncia el antecedente del Teorema de Pitágoras y la concepción que pretende desarrollar: la que alude a relación de medida de lados; seguidamente, realiza una prueba del teorema usando argumentos geométrico-algebraico a partir de composiciones con triángulos congruentes (Figura 4.1-36), para finalmente enunciar el Teorema de Pitágoras (

Figura 4.1-37).

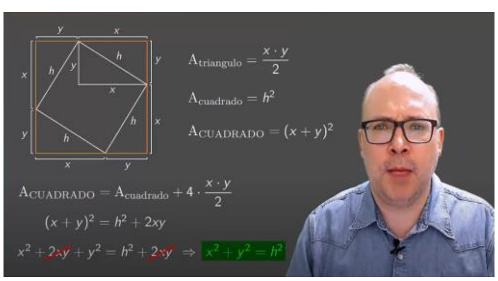


Figura 4.1-36. Captura de pantalla I del video 06

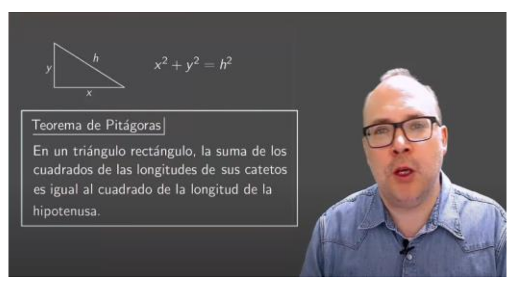


Figura 4.1-37. Captura de pantalla II del video 06

El desarrollo de esta prueba es análogo a la presentada en el video No. 5; en consecuencia, consideramos que no aporta objetos nuevos a analizar; sin embargo, consideramos que este video es más riguroso al definir y caracterizar algunos objetos, al realizar algunos procedimientos y al enunciar el Teorema desde la concepción antes mencionada.

Dichos elementos que son de destacar, los presentaremos en la sección síntesis del análisis.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

R4(A): El expositor define adecuadamente triángulo rectángulo: “el teorema de Pitágoras es válido para triángulos rectángulos, triángulos con un ángulo de 90 grados”; además, caracteriza adecuadamente los catetos: “los triángulos rectángulos tienen dos catetos, son los lados de menor longitud”

L1(I): Pese a lo anterior, representa inadecuadamente el triángulo rectángulo ya que no indica el ángulo recto.

R1(A): Enuncia adecuadamente el Teorema de Pitágoras, así: “se tiene el Teorema de Pitágoras, que dice que, en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa”.

R2(A): Este enunciado se conduce adecuadamente con la concepción de medidas de lados, del Teorema de Pitágoras

A3-*ga*: A partir de la concepción de relación entre medidas de lados del Teorema de Pitágoras, se argumenta adecuadamente usando la composición con triángulos congruentes, específicamente, el argumento de Zhao y Liudel (Mostrado en la sección de argumento, grupo 4).

L2(A): De las expresiones: “los triángulos rectángulos tienen dos catetos, son los lados de menor longitud, supongamos que en nuestro caso la longitud de estos lados es x e y, tenemos el lado más largo que se llama hipotenusa, supongamos que ésta mide h” y “$x^2 + y^2 = h^2$; podemos decir que estas se representan simbólicamente de manera adecuada, ya que las letras x, y e h aluden a medidas de segmentos.

R11(A): Al momento de construir los cuadrados involucrados en la prueba, usa la expresión “dibujamos un segmento perpendicular”, lo cual hace que el procedimiento de construcción sea matemáticamente adecuado.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones a Teorema de Pitágoras: concepciones y argumentos.

C2-*c*: Además, alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación tratada: concepción desde la relación de mediada de lados y argumentos geométrico-algebraicos.

C3(T): Tampoco alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento.

Tabla 23. Análisis del video No. 07

<table>
<tr><td rowspan="2">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Aplicación del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/Dbd5OmbOE9c</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 7: “Solución de Triángulos Rectángulos”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Objetos primarios representativos</td>
<td>

Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráfica-estática (geométricas).
Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre la medida de lados.
Procedimientos aritméticos y algebraicos.
Situaciones/Problemas puramente matemáticos.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Descripción general</td>
<td>El video presenta la resolución de cuatro situaciones puramente matemáticas, que consisten en: dado un triángulo rectángulo y las medidas de un ángulo (diferente al recto) y un lado, o de dos de sus lados; calcular las medidas de los ángulos y lados faltantes utilizando las previamente conocidas. Las situaciones 1 y 2 corresponden al primer caso (un ángulo y un lado), como no es posible aplicar directamente el Teorema de Pitágoras, el expositor da solución a estas usando identidades trigonométricas y el Teorema 180 (esto es; en todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual a 180). Las situaciones 3 y 4 corresponden al segundo caso (dos lados); aunque en ambas es posible aplicar el Teorema de Pitágoras, el expositor da solución a la situación 4 análogamente a las situaciones 1 y 2; la situación 3 es la única en la que se aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar parte de su solución. En consecuencia, presentamos el análisis del fragmento del video que nos interesa; esto es, aquel referido al Teorema de Pitágoras.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa una pizarra no electrónica, que sirve como apoyo para que un expositor realice la explicación, a modo de monólogo, de la aplicación del Teorema de Pitágoras para resolver el ejercicio.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Análisis de Idoneidad Epistémica</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">[00:03-00:09]: El expositor inicia la explicación mostrando los cuatro ejercicios que se van a solucionar a lo largo del video; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-38); en el lapso el expositor afirma lo siguiente: “Daré solución a cada uno de los siguientes triángulos rectángulos”.

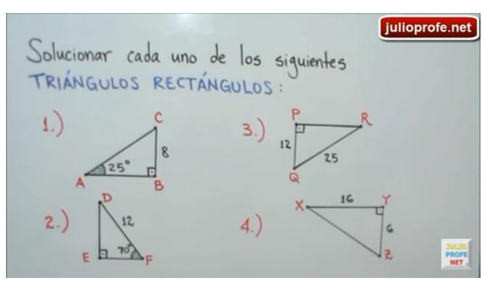


Figura 4.1-38. Captura de pantalla I del video 07

L1(A): Representa adecuadamente los triángulos rectángulos ya que indica el ángulo recto, los ángulos y lados cuyas medidas son conocidas y nombra los vértices del triángulo.</td>
</tr>
</table>

S1-*pm*: Se presentan cuatro diferentes situaciones de orden puramente matemático, aunque solo se aplica el Teorema de Pitágoras a la correspondiente al ítem 3.

L3(I): Usa lenguaje no formal para comunicar la tarea a desarrollar: "solucionar cada uno de los siguientes triángulos rectángulos". Consideramos que una manera más afortunada de comunicar la tarea puede ser: "Determinaremos las medidas de los ángulos y de los lados de un triángulo rectángulo, a partir de ángulos y lados cuyas medidas sí están dadas."

[11:03-13:13]: El expositor da comienzo al desarrollo de la situación del ítem tres; para ello, recurre en un primer momento al Teorema de Pitágoras para calcular la medida del lado faltante. El resto de la situación la resuelve aplicando identidades trigonométricas, y el Teorema 180. A la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de la aplicación del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-39); en el lapso, el expositor afirma lo siguiente:

> Tenemos el triángulo rectángulo QPR, donde conocemos la hipotenusa y uno de los catetos. Podríamos entonces, comenzar con el Teorema de Pitágoras para encontrar la medida del cateto PR. Decimos entonces que el cateto PR al cuadrado [escribe $(PR)^2$], más [escribe $+$], el cateto PQ, que mide doce unidades, esto al cuadrado [escribe $(12)^2$], nos tiene que dar como resultado la hipotenusa, que mide veinticinco, al cuadrado [escribe $(25)^2$]; ese es el Teorema de Pitágoras. Tenemos entonces PR al cuadrado, más doce al cuadrado que nos da ciento cuarenta y cuatro, igual a veinticinco al cuadrado que es seiscientos veinticinco [escribe $(PR)^2 + 144 = 625$]; de allí despejamos PR al cuadrado, pasamos 144 que está sumando, al otro lado a restar [escribe $(PR)^2 = 625 - 144$], resolvemos la resta; entonces tenemos PR al cuadrado, igual a 481 [escribe $(PR)^2 = 481$]. Y para despejar PR, tomamos raíz cuadrada a ambos lados, entonces en lado derecho tenemos la raíz cuadrada de 481, recordemos que en el lado izquierdo la raíz cuadrada elimina el exponente dos [escribe $PR = \sqrt{481}$], y esto en calculadora nos da aproximadamente igual a veintiuno punto noventa y tres, redondeando a dos cifras decimales [escribe $PR = \sqrt{481} \approx 21.93$]. Entonces escribimos el resultado por aquí [escribe arriba del lado PR del triángulo], el cateto PR mide veintiuno punto noventa y tres unidades.

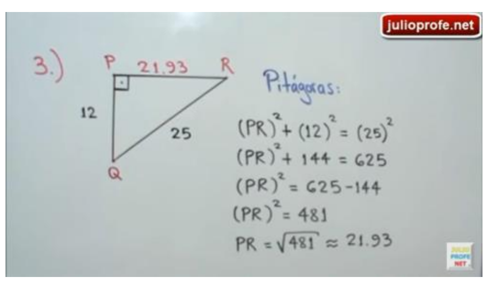


Figura 4.1-39. Captura de pantalla II del video 07

S1-*pm*: Presenta una situación puramente matemática que consiste en calcular la medida de uno de los lados del triángulo rectángulo, conociendo las medidas de los otros dos.

L1(A): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo ya que indica el ángulo recto, los lados cuyas medidas son conocidas y nombra los vértices del triángulo.

S2(A): Ya que es posible comprobar gráficamente el antecedente el Teorema, la expresión $(PR)^2 + (12)^2 = (25)^2$ es una manera adecuada de aplicar el consecuente; por tanto, esto se constituye en un uso adecuado del Teorema.

R11(A): Usa adecuadamente procedimientos algebraicos para simplificar la expresión $PR^2 + 12^2 = 25^2$, hasta calcular aproximadamente la medida de la hipotenusa.

R9(A): En términos generales, el expositor pretende hacer explícitos los procedimientos llevados a cabo para abordar el ejercicio, entre estos, el uso del Teorema de Pitágoras.

L3(I): La expresión "El cateto PR al cuadrado" es una expresión verbal no adecuada, ya que afirma que un lado de un triángulo es igual a una medida representada por un número (por supuesto, se está asumiendo que con antelación el expositor ha precisado que el cateto es un lado del triángulo, esto es, un segmento; no la medida del segmento representada por un número). El mismo comentario cabe para las expresiones "cateto PQ, esto al cuadrado" y "nos tiene que dar como resultado la hipotenusa al cuadrado".

L3(I): La expresión "tomamos raíz cuadrada a ambos lados" es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar el término "tomar" para referirse a "aplicar la propiedad de la monotonía de la potenciación" es una verbalización no rigurosa.

L3(I): La expresión "pasamos 144 que está sumando, al otro lado a restar" es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar el término "pasar" para referirse a "aplicar la propiedad aditiva de la igualdad" es una verbalización no rigurosa.

R7(I): Usa inadecuadamente procedimientos aritméticos, ya que afirmar "en el lado izquierdo la raíz cuadrada elimina el exponente dos" es matemáticamente incorrecto. En sentido estricto, $\sqrt{PR^2} = |PR|$; para este caso, al considerar que PR representa una medida, se tiene que $\sqrt{PR^2} = |PR| = PR$. Pareciera, entonces, que la expresión dicha por el expositor, en la práctica, es correcta. Podría serlo para este caso, pero matemáticamente no lo es. Este tipo de flexibilidad en la comunicación y en el uso de propiedades de los números reales puede dejar como secuelas que proposición $\sqrt{a^2} = a$ se conciba como verdadera para cualquier a real.

R7(G): Afirmar que la medida aproximada de la hipotenusa es 21.93, y poco después decir "el cateto PR mide 21.93 unidades" es una ambigüedad. Por un lado, la medida de PR es aproximada, es decir que no es la medida exacta ($PR \neq 21.93$); por otro lado, en la medida de PR es 21.93 ($PR = 21.93$). Esto es un error en la lógica proposicional, específicamente en la negación, ya que si p es verdadero (sea $p\colon PR = 21.93$) entonces $\neg p$ es falso (siendo $\neg p : PR \neq 21.93$).

L2(G): En concordancia con el error anterior, en el tablero escribe $PR = \sqrt{481} \approx 21.93$ (i.e., $PR \approx 21.93$) pero en la gráfica escribe sobre PR la medida del lado (21.93), como si fuera la medida exacta (Figura 4.1-39).

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

S1-*pm*: El video alude a diferentes situaciones de orden puramente matemático, en las cuales se debe calcular todas las medidas de un triángulo rectángulo, conociendo solo algunas de estas; unas relativas a las identidades trigonométricas y otras relativas al Teorema de Pitágoras.

R11(G): Sin embargo, no hay una comunicación afortunada de la tarea que se va a tratar en el video: en lugar de decir "solucionar triángulos rectángulos" hubiese sido más adecuado indicar: "Determinaremos las medidas de los ángulos y de los lados faltantes en un triángulo rectángulo, a partir de ángulos y lados cuyas medidas están dadas". En el abordaje de esas situaciones, el expositor: L2(A)(T): Usa diferentes tipos de representación: gráfica-estática, en la ilustración de los triángulos y sus respectivas medidas; verbal, en la explicación oral que realiza a lo largo del video; y simbólica, en el proceso de desarrollar la ecuación resultante de aplicar el Teorema de Pitágoras. En estas representaciones hay coherencia ya que todos aluden a la concepción de relación entre la medida de lados de un triángulo rectángulo. R9(A): Pretende hacer explícitos los procedimientos llevados a cabo para determinar la medida de la hipotenusa. Sin embargo: L3(P): Verbaliza inadecuadamente procedimientos algebraicos como: "pasar" lo que está sumando a restar y "tomar" raíz cuadrada a ambos lados. Sin embargo, mantiene un lenguaje respecto de los Teoremas vistos y figuras geométricas. R7(I): Usa inadecuadamente la radicación al afirmar que $\sqrt{PR^2} = PR$. R7(G): Usa ambiguamente la igualdad matemática al afirmar que dos medidas son iguales y diferentes a la vez. L2(G): Usa ambiguamente el término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado. R7(A)(T): Aunque no se presenta acá el análisis de todos los fragmentos, damos fe de que en el video se usa diferentes proposiciones como identidades trigonométricas, el Teorema de ángulos complementarios y el Teorema 180°. S2(A): Además, aplica adecuadamente el Teorema de Pitágoras según la concepción de medidas de lados. C1: Finalmente, podemos afirmar que el video no alcanza el Tipo 1 de representatividad, al abordar solo una aproximación al Teorema: situación problema. C2: No alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar no abordar solo un tipo de cada aproximación: Situaciones problema. C3-*pm*(T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: aborda cuatro situaciones problema puramente matemáticas.

Tabla 24. Análisis del video No. 08

Identificación del video	**Etiqueta de búsqueda**	Aplicación del Teorema de Pitágoras	**Enlace**	https://youtu.be/2UbdPiqAiHY
	Título del video	Video No. 08: "Teorema de Pitágoras:	**Intencionalidad**	Interés académico no curricular - Área del conocimiento

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>Encontrar la hipotenusa”</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-estáticas (geométricas).
Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre la medida de lados.
Procedimientos aritméticos y algebraicos para despejar ecuaciones de segundo grado.
Situaciones puramente matemáticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En un primer momento del video se expone el enunciado del Teorema de Pitágoras y la definición de triángulo rectángulo; se aborda el Teorema por medio de la concepción por medidas de lados. Por último, se presenta la solución de cuatro situaciones puramente matemáticas en las cuales es necesario usar el Teorema. Las primeras dos situaciones son explicadas detalladamente; las siguientes se presentan como ejercicio al lector, dando un espacio para resolver los ejercicios, y luego mostrando la solución con su respectivo procedimiento.

Desde el punto vista técnico, este video consiste en una filmación en la que todo el tiempo se observa una pizarra no electrónica, que sirve como sustento para que un emisor realice la explicación, a modo de monólogo, del Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:22-02:04]: El expositor da comienzo del video en el que está planteado un ejercicio (encontrar la medida de la hipotenusa), para ello se explica someramente el Teorema de Pitágoras y la definición de triángulo rectángulo; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-40); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:<blockquote>Primero que todo, debemos recordar el Teorema de Pitágoras, que ya lo expliqué en uno de los videos anteriores, y dice que el cuadrado de la hipotenusa, pilas que esto funciona, el Teorema de Pitágoras funciona solamente en triángulos rectángulos, o sea, triángulos que tengan un ángulo recto; entonces dice, el cuadrado de la hipotenusa. Bueno, antes de seguir, primero debemos identificar como están marcados los lados, acordémonos que siempre va a estar marcado el ángulo recto y los dos lados que forma en ángulo recto se llaman catetos, a este cateto le voy a poner a y al otro cateto le voy a poner b. Los nombres es lo de menos, ustedes le pueden poner m y n o x y y. Bueno, la x no porque ya está aquí [señala la x de la figura], es lo menos, generalmente yo le coloco ahí b, ya les digo porqué, y el otro lado que queda, pues se llama hipotenusa; yo generalmente le coloco la h (h de hipotenusa). Aquí [señala los catetos del triángulo] no les coloco la c pues porque sería c y c, y, como son lados diferentes, pues toca colocarle letras diferentes, ¿no? Pero bueno, la hipotenusa es el lado más largo y los otros dos lados son los catetos. Ahora sí, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, entonces si lo escribo matemáticamente, digámoslo así, ¿cómo escribimos el cuadrado de la hipotenusa? la hipotenusa yo la llame h, entonces sería h al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los</blockquote></td></tr>
</table>

catetos, entonces, ¿cómo llamé yo los dos catetos? a y b, o sea los cuadrados ¿cómo los escribo?, a al cuadrado y b al cuadrado [escribe $h^2 = a^2 + b^2$]. Como les digo, las letras, eso es lo de menos, lo importante es que sepamos que aquí dice hipotenusa al cuadrado y que estos dos, a y b, son los catetos.

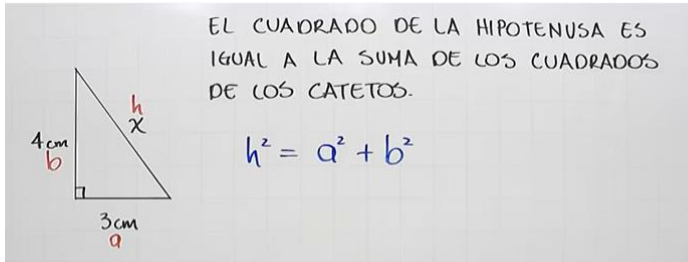


Figura 4.1-40. Captura de pantalla I del video 08

L3(G): La expresión “tomamos raíz cuadrada a ambos lados” es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar el término “tomar” para referirse a “aplicar la propiedad de la monotonía de la potenciación” es una verbalización no rigurosa. la verbalización no es la más precisa. (i) Da la impresión de que en el orden en el que va necesitando los antecedentes del Teorema, los va enunciando. Por lo tanto, consideramos afortunado ordenar los antecedentes de la siguiente manera: definición de triángulo rectángulo, representación gráfica del triángulo rectángulo (la marca en el ángulo recto), notación de los lados (catetos e hipotenusa) del triángulo, definición de estos lados en un triángulo rectángulo, finalmente, se enuncia el Teorema de Pitágoras. (ii) La expresión “entonces si lo escribo matemáticamente” es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar el término “matemáticamente” para referirse a “simbólicamente” es una verbalización no rigurosa.

L3(I). En este lapso del video, en un primer momento enuncia el antecedente del Teorema, a la vez que define triángulo rectángulo y ángulo recto; seguido, hace un acercamiento al consecuente del Teorema, a la vez que caracteriza hipotenusa y catetos; por último, enuncia parte del consecuente del Teorema. Lo anterior, permite evidenciar una comunicación no tan conveniente, ya que no es tan idóneo el orden en el que enuncia, define y caracteriza cada uno de los objetos involucrados. Esto habla de los objetos muy específicos involucrados en el Teorema sin haberlo enunciado.

L2(A): En la expresión “Los nombres eso es lo de menos", el expositor comenta la no relevancia de la asignación de los nombres a los lados del triángulo en algún orden predeterminado; y por el contrario, enfatiza en la relevancia de identificar que los catetos son los segmentos con menor medida en un triángulo rectángulo, con respecto a la medida de la hipotenusa.

R9(A): En términos generales, el expositor pretende hacer explícitos los procedimientos llevados a cabo para abordar el ejercicio, entre estos, el uso del Teorema de Pitágoras.

R5(G): En el párrafo se evidencia un uso ambiguo de los términos cateto e hipotenusa. En ocasiones pareciera que fueran las medidas de los lados del triángulo rectángulo (e.g., el cuadrado de la hipotenusa); en otras, pareciera que el nombre que recibe los lados de un triángulo rectángulo (e.g., los dos lados que forma en ángulo recto se llaman catetos). Esta ambigüedad no deja claridad respecto a cómo entender tales términos, si como lados o como medida de lados. Al final del fragmento, al escribir la expresión $h^2 = a^2 + b^2$ parece adoptar la segunda opción. En cualquier caso, la ambigüedad existe.

L3(G): Escribir en el tablero “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos” no es una manera pertinente de aludir al Teorema de Pitágoras. Esto porque se da a entender que la hipotenusa y los catetos son medidas representadas por números (por ende, susceptibles de elevarse al cuadrado) o que los objetos que son segmentos –hipotenusa o catetos– son objetos susceptibles de elevarse al cuadrado; en cualquier caso, podría haber un error de orden matemático. Para el primer caso, hipotenusa y catetos son números; para el segundo, habría que precisar el sistema axiomático local para indicar el sentido de elevar al cuadrado objetos tipo segmento; dependiendo de ello, es posible indicar errores conceptuales o no. R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo de forma explícita diciendo “triángulos que tengan un ángulo recto”. L1(G): La representación para indicar en el triángulo las medidas de los lados que están dados no es tan idónea; mejor es decir $b = 4\ cm, a = 3cm$ y $h = x$, x indicado con esto último que la medida de la hipotenusa es desconocida. Por supuesto, en este caso, se asume que las letras b, a y h indican medidas de los lados y no nombres de segmentos.
[02:18-04:14]: El expositor muestra el procedimiento para llevar a cabo la tarea y empieza a aplicar el Teorema de Pitágoras sustituyendo las medidas de los lados del triángulo y resolviendo la expresión; en el video se muestra una representación grafico-estática de la aplicación del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-41); en el lapso el expositor afirma lo siguiente: Ahora sí, habiendo recordado el Teorema de Pitágoras, pues simplemente remplazamos con los datos que tenemos en nuestro triángulo. Conocemos dos catetos y nos falta la hipotenusa, entonces reemplazamos: Hipotenusa, en este caso la hipotenusa se llama x, entonces sería x al cuadrado igual al cateto a al cuadrado; en este caso el cateto a es 3 centímetros, 3 centímetros al cuadrado, hay que colocarlo entre paréntesis, porque si no le colocamos paréntesis solamente quedaría al cuadrado los centímetros y toca el cateto que mide 3 centímetros, todo al cuadrado; [escribe $(3cm)^2$] más el otro cateto al cuadrado, que la b en este caso mide 4 centímetros, también al cuadrado. Como tenemos que averiguar el valor de x, tenemos que despejar la x, sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad. Entonces ¿para qué sacamos la raíz cuadrada? Para eliminar este cuadrado, para que la x quede solita, ¿y que nos queda? x. Voy a hacer todas las operaciones, pero ustedes si quieren, se pueden saltar alguna: aquí [esto] quedaría igual a raíz cuadrada y voy a elevar estos cuadrados [señala al $(3cm)^2$ y al $(4cm)^2$]. Acordémonos que cuando hay un cuadrado y dentro hay varias cosas, elevamos las dos; por ejemplo, aquí dice 3 centímetros, entonces, elevamos el 3 al cuadrado y también los centímetros al cuadrado, entonces ¿Cómo nos queda? 3 al cuadrado, 3 por 3 [es] 9, y los centímetros también al cuadrado; más 4 elevado al cuadrado que es 4 por 4 [es] 16 y los centímetros también al cuadrado. Nos queda que x es igual a la raíz cuadrada, y hacemos esta suma, 9 más 16 que es 25 centímetros cuadrados, y sacamos la raíz cuadrada, si queremos podemos colocar por aquí abajito, no cabe, pero colocaríamos x igual y la raíz cuadrada de 25 que es 5, porque 5 por 5 [es] 25 y la raíz cuadrada de centímetros cuadrados es centímetros.

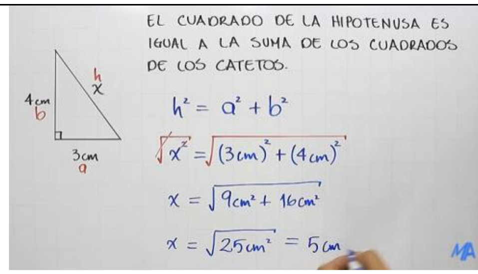


Figura 4.1-41. Captura de pantalla II del video 08

El análisis de esta sección es muy similar al presentado en el “video No. 7” en el fragmento [11:03-13:13]. Sin embargo, caben destacar:

R8(G): En la expresión “voy a hacer todas las operaciones, pero ustedes si quieren, se pueden saltar alguna” no es claro si se refiere a que las operaciones que va a realizar se pueden omitir, o se pueden calcular mentalmente. En ese sentido, tal expresión puede ser ambigua.

R3(G): Alude ambiguamente al Teorema de Pitágoras según su concepción de medida de lados, ya que en la ecuación “$x = \sqrt{9cm^2 + 16cm^2}$” se observa que los cm se elevan al cuadrado; por lo tanto, ya no se refiere a la concepción por medidas de lados sino a la concepción por áreas de cuadrados. Este hecho nos lleva a pensar que, si bien se pretende hacer un uso cuidadoso de la sintaxis, se descuida la semántica (el significado) que está de fondo cuando se usa la sintaxis empleada por el expositor.

[06:29-07:40]: El expositor aborda otras dos situaciones en las que debe hallar la medida de la hipotenusa; muestra los dos triángulos con los nombres de sus lados y las medidas de sus lados, y da un espacio para pausar el video con la intención de que el receptor resuelva dichos ejercicios antes de que el emisor muestre el desarrollo de los ejercicios; en el video se muestra una representación grafico-estática de la aplicación del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-42).

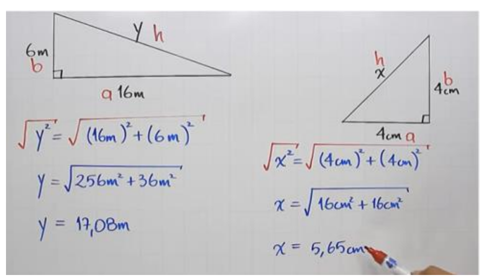


Figura 4.1-42. Captura de pantalla III del video 08

S3(A)-*pm*: El expositor propone situaciones de problematización de orden puramente matemático, que luego procede a resolver.

R5(I): muestra el resultado final como $y = 17{,}08\,m$ y $x = 5{,}65\,cm$, respectivamente. Sin embargo, hay que contemplar que las medidas logradas son aproximadas, por lo que su representación escrita deberá ser $y \approx 17{,}08\,m$ y $x \approx 5{,}65\,cm$, respectivamente. Esta aclaración se realiza verbalmente, pero simbólicamente se expresa incorrectamente.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

R2-*me*: El método de solución de las situaciones, alude a la concepción de relación de medidas de lados; ya que, en esencia eleva las distancias al cuadrado.

S1(A): El video plantea cuatro situaciones problema relativas a usar el Teorema para encontrar la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo, conociendo las medidas de los otros dos lados. Sin embargo, no hay una representatividad de las Situaciones/Problemas, ya que: (i) En el video únicamente se abordaron situaciones puramente matemáticas (ii) En las situaciones abordadas no hubo riqueza de procesos, ya que los cuatro procedimientos son análogos.

S1-*pm*: Aludiendo al hecho de que el video se concentra en abordar situaciones problema, consistente en hallar la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo, teniendo conocidas las medidas de los otros dos.

L2(T): Usa diferentes tipos de representación: gráfica-estática, en la ilustración de los triángulos, la asignación de variables y sus respectivas medidas; verbal, en la explicación oral que realiza a lo largo del video, y; simbólica, en el proceso de desarrollar la ecuación resultante de aplicar el Teorema de Pitágoras.

R3(G): Sin embargo, en estas no hay coherencia. Si bien es cierto que todas aluden a la concepción de relación entre la medida de lados de un triángulo rectángulo, la sintaxis no se condice consistentemente con la concepción del Teorema en el momento que eleva los centimetros al cuadrado.

L2(G): Hay uso ambiguo del término hipotenusa o catetos: cómo lado o como medida de lado.

R9(A): En términos generales, el expositor pretende hacer explícitos los procedimientos llevados a cabo para abordar el ejercicio, entre estos, el uso del Teorema de Pitágoras.

L3(I): Verbaliza inadecuadamente procedimientos algebraicos como “sacar” raíz cuadrada a ambos lados.

R7(G): Usa ambiguamente la igualdad Matemática al afirmar que dos medidas son iguales y diferentes a la vez.

S2(A): Aplica adecuadamente el Teorema de Pitágoras según la concepción de medidas de lados.

S3(A)-*pm*: El expositor propone situaciones de problematización de orden puramente matemático.

C1: Finalmente, podemos afirmar que el video alcanza el Tipo 1 de representatividad, al abordar dos aproximaciones al Teorema: concepción y situación.

C2: Por otro lado, el video no alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar solo un tipo de cada aproximación: concepción que alude a media de lados y situaciones puramente matemáticas.

C3-*pm* (T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: aborda cuatro situaciones problema puramente matemáticas.

Tabla 25. Análisis del video No. 09

Identi-fica-	**Etiqueta de búsqueda**	Aplicación del Teorema de Pitágoras	**Enlace**	https://youtu.be/Bwi73G7qPLo

	Título del video	Video No. 09: “23. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.”	**Intencionalidad**	Interés académico curricular
	Objetos primarios representativos	• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-estáticas (geométricas). • Teorema de Pitágoras desde la concepción como relación entre la medida de lados. • Procedimientos aritméticos y algebraicos. • Situaciones/Problemas: fantasioso y realista.		
Descripción general		El video presenta la resolución de dos situaciones: una fantasiosa y otra realista; estas consisten en calcular la longitud de un segmento, a partir de unas distancias conocidas aplicando el Teorema de Pitágoras. Desde el punto de vista técnico, el video consta de una proyección de diapositivas y una *voz en off* que van explicando paso a paso la solución de las situaciones. Cabe resaltar que el video inicia con la siguiente descripción: “Matemáticas tercer grado, bloque 2, secuencia 17, Teorema de Pitágoras dos, aplicaciones del Teorema de Pitágoras”; esto nos permite establecer su intencionalidad como de tipo académico curricular.		

Análisis de Idoneidad Epistémica

[00:05 – 01:40]: La explicación comienza presentando un contexto fantasioso y luego una representación gráfico-estática asociada a este (Figura 4.1-43); en el lapso la voz en off afirma lo siguiente:

> Dos moscas matemáticas planean una competencia para ver cuál recorre primero la distancia más larga en línea recta dentro de un salón. Como no la pueden medir, tienen que hacer los cálculos para averiguar cuál es esa medida. Las moscas conocen la forma del salón desde afuera e hicieron este dibujo: el salón tiene la forma de una caja, mide 4 metros de ancho 7 de largo y 2.5 metros de altura. Observen y traten de encontrar los dos puntos que están separados por la mayor distancia posible. Después de analizar su diagrama, las moscas determinaron que la distancia más larga es del punto C al punto D, y la trazaron.

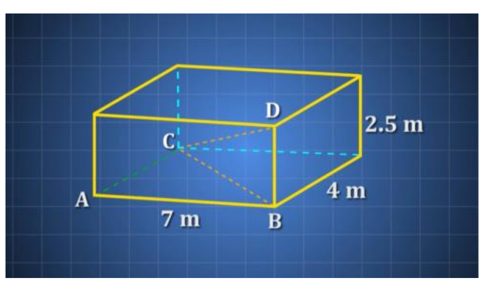


Figura 4.1-43. Captura de pantalla I del video 09

S1-*fa*: El contexto en el que está inmersa la situación es de tipo fantasioso; esto porque refiere a una actividad aparentemente conscientes de dos insectos que planean una competencia y resuelven un problema que ello les implica.

L1(A): El paralelepípedo representado en la Figura 4.1-43 es adecuado; ya que, se indican las distancias de los segmentos y se nombran los vértices, necesarios para dar solución a la situación.

L2(A): Adicionalmente, la representación gráfico-estática realizada se corresponde con la descripción de la situación, lo que se constituye en una modelación adecuado de esta.

S3(A): La expresión "Observen y traten de encontrar los dos puntos que están separados por la mayor distancia posible" propone una problematización que se resuelve por medio de la visualización de la representación gráfico-estática.

[00:05 – 01:40]: La *voz en off* continúa realizando unas preguntas al observador del video: ¿Cuántos triángulos rectángulos ven en la figura?, dibujen los triángulos en su cuaderno, ¿porque es necesario conocer la hipotenusa de uno de los triángulos del piso?

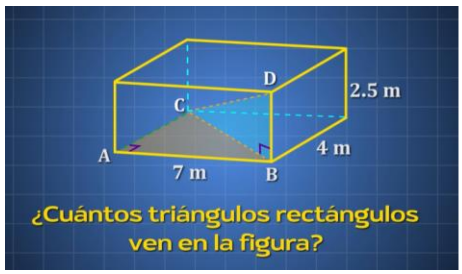


Figura 4.1-44. Captura de pantalla II del video 09

S3: Podemos afirmar que este lapso se propone una problematización, ya que, quien observa, debe visualizar la representación gráfico-estática, construir una representación que corresponda a la situación e indique los triángulos rectángulos asociados e inferir que la hipotenusa del ΔABC es uno de los catetos del ΔBDC.

L1(A): En la Figura 4.1-44, se observan dos triángulos rectángulos, ΔABC y ΔBDC, y se indica su respectivo ángulo recto; esto se constituye en una representación gráfico-estática adecuada.

[01:41 – 02:24]: La *voz en off* continúa explicando la solución del problema enunciado en el fragmento [00:05 – 01:40], que consiste en calcular la distancia CB (Figura 4.1-45); en el lapso esta afirma lo siguiente:

"La hipotenusa BC del triángulo del piso ABC es un cateto del triángulo BCD; con lo anterior, las moscas usaron el Teorema de Pitágoras en el triángulo ABC para encontrar el valor de la longitud BC."

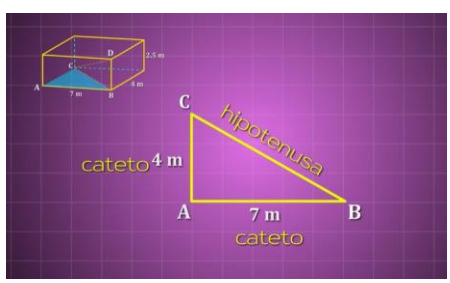


Figura 4.1-45. Captura de pantalla III del video 09

“El cateto AB al cuadrado más el cateto AC al cuadrado es igual a la hipotenusa DC al cuadrado. En el diagrama, podemos ver que el cateto AB mide 7 y el cateto AC mide 4, sustituimos los valores y elevamos al cuadrado, al sumar se obtiene 65 es igual a BC al cuadrado.” (Figura 4.1-46)

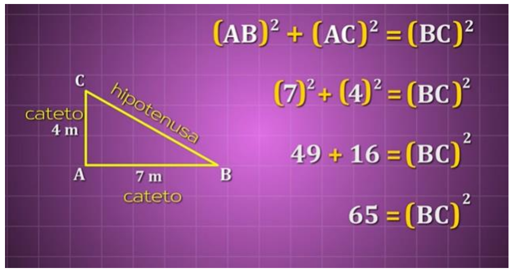


Figura 4.1-46. Captura de pantalla IV del video 09

R2-*me*: El método de solución de la situación, alude a la concepción de relación de medidas de lados; ya que, en esencia eleva las distancias al cuadrado.

S2(A): Al tener el ΔABC rectángulo con las respectivas medidas de sus lados, y a partir de estas formular la expresión “$(7)^2 + (4)^2 = (BC)^2$”, podemos afirmar que se realiza una adecuada aplicación del Teorema de Pitágoras.

L3(G): La expresión “el cateto AB al cuadrado más el cateto AC al cuadrado es igual a la hipotenusa DC al cuadrado” es una expresión verbal ambigua, ya que no es claro si los términos cateto e hipotenusa hace referencia a los segmentos en sí o a sus medidas. Una forma adecuada de enunciar el Teorema evitando la ambigüedad sería: “la medida del cateto AB al cuadrado más la medida del cateto AC al cuadrado es igual a la medida de la hipotenusa DC al cuadrado.”. Cabe resaltar que al ser un video curricular, el no enunciar el Teorema puede ser producto de que, en la planeación del video, la enunciación se realice en clase.

L1(P): Representa el triángulo rectángulo de manera parcialmente adecuada; ya que no indica el ángulo recto, pero si nombra los vértices.

R9: Enuncia de forma explícita procedimientos algebraicos y aritméticos como lo son: sustitución de los valores de las medidas, elevar al cuadrado y la suma de números naturales.

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la solución de la situación.

[02:24-03:35]: La *voz en off* continúa explicando la solución del problema enunciado en el fragmento [00:05 – 01:40], que consiste en calcular la distancia CD (Figura 4.1-47); en el lapso esta afirma lo siguiente:

> Ahora BC es un cateto del triángulo más grande y la hipotenusa de ese triángulo es la distancia que están buscando las moscas. Entonces al aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo CBD se tiene: BC al cuadrado más BD al cuadrado es igual a CD al cuadrado. Como acabamos de encontrar, BC al cuadrado es igual a sesenta y cinco y BD mide dos punto cinco. Entonces sesenta y cinco más seis punto veinticinco es igual a CD al cuadrado. Al operar, obtenemos que CD al cuadrado es igual a setenta y uno punto veinticinco; sacamos raíz cuadrada de ambos lados y obtenemos que la hipotenusa CD es aproximadamente igual a ocho punto cuarenta y cuatro, entonces la distancia más larga que recorrieron las moscas es de ocho punto cuarenta y cuatro metros.

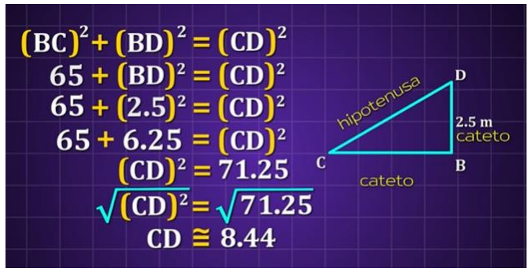


Figura 4.1-47. Captura de pantalla V del video 09

S2(A): Al tener el ΔBCD rectángulo con las respectivas medidas de sus lados, y a partir de estas formular la expresión “$65 + (2.5)^2 = (CD)^2$” podemos afirmar que se realiza una adecuada aplicación del Teorema de Pitágoras.

L1(P): Representa el triángulo rectángulo de manera parcialmente adecuada; ya que no indica el ángulo recto, pero si nombra los vértices.

R9: Enuncia de forma explícita procedimientos algebraicos y aritméticos como lo son: sustitución de los valores de las medidas, elevar al cuadrado y la suma de números naturales.

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la solución de la situación, como lo son los anteriormente mencionados.

L3(I): La expresión “sacamos raíz cuadrada a ambos lados” es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar el término “sacar” para referirse a “aplicar la propiedad de la monotonía de la potenciación” es una verbalización no rigurosa.

R7(I): Usa inadecuadamente procedimientos aritméticos, ya que afirmar “en el lado izquierdo la raíz cuadrada elimina el exponente dos” es matemáticamente incorrecto. En sentido estricto, $\sqrt{CD^2} = |CD|$; para este caso, al considerar que CD representa una medida, se tiene que $\sqrt{CD^2} = |PR| = PR$. Pareciera, entonces, que la expresión dicha por el expositor, en la práctica, es correcta. Podría serlo para este caso, pero matemáticamente no lo es. Este tipo de flexibilidad en la comunicación y en el uso de propiedades de los números reales puede dejar como secuelas que proposición $\sqrt{a^2} = a$ se conciba como verdadera para cualquier a real.

L1(I): El símbolo “≅” es usado inadecuadamente, al usarlo para aludir al símbolo de aproximación “≈”.

[03:35 – 05:05]: La explicación comienza presentando un contexto realista y luego una representación gráfico-estática asociada a este (Figura 4.1-43); en el lapso la voz en off afirma lo siguiente:

> Miguel y Daniela tienen una lona de tres metros de largo y quieren usarla para hacer el techo de una tienda para acampar. La tienda tiene dos metros de frente, ¿qué altura deben tener los soportes que quedan en medio? El frente de la tienda tiene forma de triángulo isósceles y el soporte es la altura del triángulo; como la tienda tiene dos metros de frente, la altura divide a la base a la mitad; sabemos que la lona mide tres metros, entonces cada lado del triángulo mide uno punto cinco metros que corresponde a la hipotenusa de los triángulos. Observen que los dos triángulos rectángulos son iguales, entonces podemos aplicar el Teorema de Pitágoras en alguno de ellos para encontrar el cateto AD que coincide con la altura de la tienda. DC al cuadrado más AD al cuadrado es igual a AC al cuadrado,

entonces al elevar al cuadrado y despejar a AD al cuadrado, y se obtiene, se hace la resta, se saca raíz cuadrada de ambos lados y se tiene que AD es aproximadamente uno punto once, así Miguel y Daniela ya saben que la altura del soporte me de uno punto once metros.

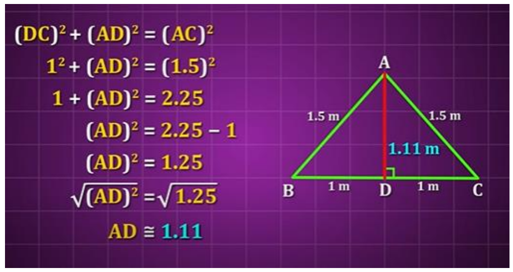


Figura 4.1-48. Captura de pantalla VI del video 09

S1-*ra*: El contexto en el que está inmersa la situación es de tipo realista, ya que trata de dos personas que deben calcular una medida.

R5: Usa adecuadamente las definiciones de triángulo isósceles y altura de triángulo para calcular las medidas de los lados del triángulo y para determinar que ΔACD es rectángulo, respectivamente.

S2(A): Al tener el ΔACD rectángulo con las respectivas medidas de sus lados, y a partir de estas formular la expresión "$1^2 + (AD)^2 = (1.5)^2$", podemos afirmar que se realiza una adecuada aplicación del Teorema de Pitágoras.

L1(A): Representa el triángulo rectángulo de manera adecuada, ya que indica el ángulo recto y nombra los vértices.

R9: Enuncia de forma explícita procedimientos algebraicos y aritméticos como lo son: sustitución de los valores de las medidas, elevar al cuadrado y la suma de números naturales.

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la solución de la situación.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

S1-*fa,ra*: Se abordan dos situaciones que se presentan una es de tipo fantasiosos y la otra realista.

R2-*me*: El método de solución de las situaciones alude a la concepción de relación de medidas de lados; ya que, en esencia eleva las distancias al cuadrado.

S2(A): Al tener un triángulo rectángulo con las respectivas medidas de sus lados y, a partir de estas, formular expresiones en términos de los cuadrados de las medidas de los lados, podemos afirmar que se realiza una adecuada aplicación del Teorema de Pitágoras.

L3(G): La expresión "lado al cuadrado" es ambigua, ya que hace referencia a los segmentos en sí, mas no a sus medidas. Una forma adecuada de enunciarlo sería: "la medida del lado al cuadrado".

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la solución de la situación, como lo son los anteriormente mencionados.

C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad al abordar diferentes aproximaciones a Teorema de Pitágoras: alude a una concepción y aborda situaciones problema. C2(T)-*s*: Igualmente alcanza el Tipo 2 de representatividad al abordar dos contextos de situaciones: uno fantasiosos y otro realista. C3-*pm* (T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: aborda dos situaciones problema puramente matemáticas.

Tabla 26. Análisis del video No. 10

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Generalización del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/UGPL2KTxVFY</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 10: “23. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-dinámicas (geométricas).
• Teorema de Pitágoras desde la concepción entre áreas de cuadrados.
• Generalización del Teorema de Pitágoras desde su concepción por figuras planas semejantes y desde polígonos regulares semejantes.
• Operaciones aritméticas (suma).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video presenta el enunciado del Teorema de Pitágoras desde concepción por áreas de cuadrados y lo comprueba en un Software de Geometría Dinámica; luego, en el software comprueba la generalización del Teorema usando triángulos equiláteros, hexágonos regulares y semicircunferencias.

Desde un punto de vista técnico, las comprobaciones del Teorema y de la generalización del Teorema se presentan con una grabación de pantalla, en la que usan Cabri Geometría II Plus, un software de geometría dinámica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:01-01:37]: El video comienza explicando los antecedentes al Teorema de Pitágoras, el expositor presenta las condiciones y procede a enunciar el Teorema según su significado por áreas; en el video se muestra una representación grafico-estática de la aplicación del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-49); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

Bueno sean ustedes bienvenidos a un nuevo vídeo en el cual hablaremos sobre la generalización del Teorema de Pitágoras. Pitágoras siempre nos dice que, en un triángulo rectángulo –es importante mencionar eso, es decir, que siempre se va a cumplir esta propiedad en un triángulo rectángulo; es decir, un triángulo que tenga uno de sus ángulos de 90 grados [agrega un indicativo de ángulo recto sobre el triángulo]–, siempre se va a cumplir que, sea el cuadrado que corresponde al lado más largo del triángulo, es decir la hipotenusa,</td></tr>
</table>

será igual, a a al cuadrado, que corresponde a uno de esos catetos, más b al cuadrado que sería el otro cateto. Es decir, la hipotenusa al cuadrado será igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Bueno, normalmente se utiliza esta fórmula, para o en muchos de los ejercicios que se proponen en el aula. Siempre se la utiliza para encontrar cualquiera de los dos, de los tres lados, bien sea a, bien sea c o bien sea b; o se la utiliza en muchas ocasiones para cuando nosotros queremos dados, por ejemplo, dos cuadrados y queremos encontrar un tercero, que sea equivalente a la suma del área de los otros dos; [en ese caso] podemos hacer uso entonces del Teorema de Pitágoras.

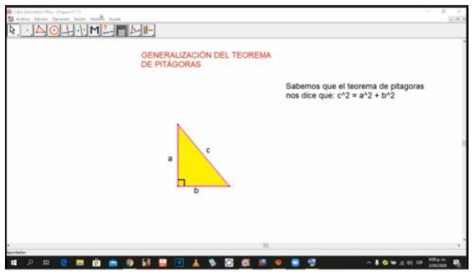


Figura 4.1-49. Captura de pantalla I del video 10

L1(P): La representación simbólica "sabemos que el teorema de Pitágoras nos dice que: c^2 $= b$^2 $+ a$^2" es matemáticamente correcto. Sin embargo (i) es muy confusa la explicación del antecedente, ya que al intentar explicar el antecedente y el Teorema al mismo tiempo se generar confusiones. (ii) La expresión simbólica "c^2 $= b$^2 $+ a$^2" a pesar de ser matemáticamente correcta, la sintaxis (c^2) es conocida por quienes programan en software especializado, por lo que también puede generar confusiones. Consideramos adecuado representar el Teorema, una vez aclarados sus antecedentes, como: "Enunciado del Teorema de Pitágoras: $c^2 = b^2 + a^2$".

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo al indicar el ángulo recto, aunque no nombra sus vértices.

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación, ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por el expositor (representación verbal) y lo representado gráficamente en la Figura 4.1-49 (representación gráfico-dinámica).

R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo y ángulo recto.

R4(P): Aunque en un principio se da una caracterización informal de hipotenusa (usando expresiones como lado más largo basándose en una percepción visual), luego define de una manera más adecuada hipotenusa y catetos haciendo alusión al lado opuesto al ángulo recto o demás lados del triángulo, respectivamente. Sin embargo, mezcla la enunciación del Teorema con la explicación de los antecedentes, lo que puede hacer confusa esa comunicación.

R1(A): La expresión "en un triángulo rectángulo, es importante mencionar eso, es decir, que siempre se va a cumplir esta propiedad si en un triángulo rectángulo", que corresponde al antecedente del teorema, permite identificar el carácter de proposición condicional de este. La expresión "la hipotenusa al cuadrado será igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" enuncia correctamente el Teorema haciendo alusión a su concepción por áreas.

S1-*pm*: El video alude a diferentes tipos de situaciones de orden puramente matemático, en las cuales se debe calcular la medida de un cuadrado conociendo las medidas de los otros dos cuadrados, aun cuando no se presenta ejemplos para estos tipos de situaciones.

[01:38-03:22]: El Expositor construye cuadrados tomando como base los lados del triángulo, calcula sus áreas y muestra la suma de las áreas de los cuadrados equiláteros que tienen como base los catetos; realiza la prueba de arrastre e indica que esa suma coincide con el área del cuadrado con la hipotenusa como base (Figura 4.1-50); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Bueno, lo anterior es lo que vamos a hacer a continuación: si nosotros construimos un cuadrado con esta arista [señala la hipotenusa del triángulo de la Figura 4.1-50] y bueno, aquí tenemos un cuadrado. Vamos a construir otro con la arista a y [otro] con la arista b. Entonces vamos a mirar aquí [usa la herramienta "Área" de *Cabri*] a que es igual esa área [se refiere al área del cuadrado de lado a], entonces tendríamos aquí [señala el valor del área] que esta área vale pues lo que marca allí [22.69cm^2] y bueno, acá tenemos esta área [área de cuadrado con base b]. Bueno esta área [ha calculado el área de cuadrado con base c usando la herramienta "Área" del software]. Entonces, vamos a verificar el Teorema de Pitágoras; allí, sí se cumple [se refiere al caso de la Figura 4.1-50]. Bueno, entonces haciendo uso de la herramienta, pues aquí calculadora [Usa la herramienta "Calculadora" de *Cabri*], entonces vamos a tomar este lado [selecciona el área del cuadrado de lado a] que ya sabemos que es el área que equivale al cuadrado, más esta área de acá [área de cuadrado con base b]; sabemos que eso nos da 38, bueno 69 [hace referencia al resultado "36.69cm^2" y al área del cuadrado de lado c "36.69cm^2"], que equivale al área del cuadrado más grande [inserta texto programado para que muestre el valor actual de la suma de las áreas, para este caso dice ["Resultado 36.69cm^2"]; bueno, haciendo uso de una de las propiedades de, de esta herramienta, es decir, que es de esta herramienta que es un ambiente de geometría dinámica; bueno, entonces vamos a hacer uso del arrastre, entonces podemos nosotros ver aquí que cuando yo arrastro aquí [arrastra el vértice opuesto al lado a] vemos que el área, digamos, o la relación siempre se va a mantener, podemos ver esa parte allí [haciendo alusión a la pantalla], recuerden que el resultado es la suma, de: tanto del cuadrado que tiene el lado a, [corrige diciendo] del área del cuadrado de lado a y el [más] área del cuadrado que tiene lado b; bueno, [arrastra la figura] entonces vemos que esa relación aquí se cumple [el resultado es igual al área del cuadrado de lado c].

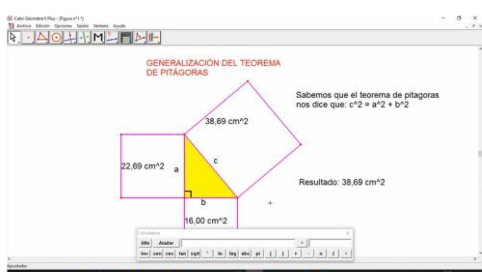


Figura 4.1-50. Captura de pantalla II del video 10

A1(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica a partir de la cual se permite vislumbrar que efectivamente el Teorema parece ser válido. Este argumento dinámico se basa en calcular el área de cada cuadrado y verificar que, bajo el arrastre, la suma del área relativa a los catetos es igual al área del cuadrado relativa a la hipotenusa.

L1(A): La representación gráfica del triángulo es adecuada ya que marca el ángulo recto. En la representación gráfica del cuadrado no se indican ni los ángulos rectos ni los lados congruentes, pero si se realiza la aclaración verbal de que se alude a un cuadrado.

[03:23-11:28] El Expositor construye triángulos equiláteros tomando como base los lados del triángulo, calcula sus áreas y muestra la suma de las áreas de los triángulos equiláteros que tienen como base los catetos; realiza la prueba de arrastre e indica que esa suma coincide con el área del triángulo con la hipotenusa como base (Figura 4.1-51). Repite este proceso, pero con pentágonos regulares y circunferencias (inicialmente se pretendía realiza el ejercicio con semicircunferencias, pero según el expositor, las limitantes del software no se lo permiten).

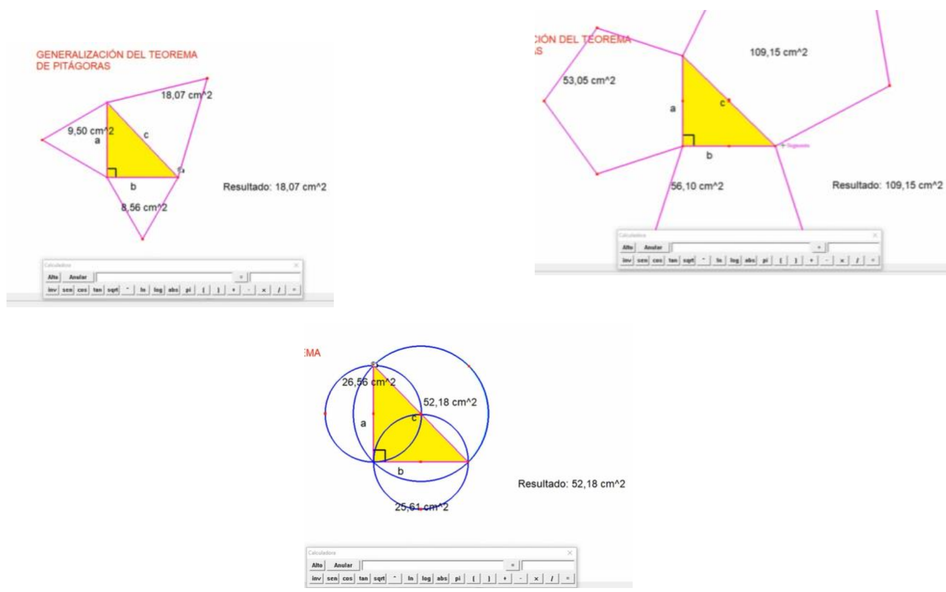


Figura 4.1-51. Capturas de pantalla III del video 10

En este fragmento del video se realizan tres generalizaciones del Teorema de Pitágoras. Su análisis es similar al presentado en el fragmento anterior (para el Teorema, según su significado por áreas). Sin embargo, cabe resaltar:

A1(A): Presenta adecuadamente un argumento dinámico para la generalización del Teorema de Pitágoras por polígonos regulares semejantes, en el caso particular del triángulo equilátero (que es equivalente a un polígono regular de tres lados); ya que los triángulos equiláteros se construyen tomando como uno de sus lados cualquier lado del triángulo rectángulo dado. Este mismo comentario es válido para los pentágonos regulares.

A1(A): Presenta adecuadamente un argumento dinámico para la generalización del Teorema de Pitágoras por figuras planas semejantes, en el caso particular del círculo (que aplica también para semicircunferencia, figura que el expositor planeaba mostrar inicialmente); ya que los círculos semejantes se construyen tomando como uno de sus lados cualquier lado del triángulo rectángulo dado.

L1(A): La representación gráfica del triángulo es adecuada ya que marca el ángulo recto. En la representación gráfica del triángulo equilátero no se indican los lados congruentes, pero si se realiza la aclaración verbal de que se alude a un triángulo equilátero. Este mismo comentario es válido para los pentágonos regulares y los círculos.

R1(A): El expositor dice "vamos a ver que si se cumple con otras figuras" para aclarar el antecedente de la generalización del Teorema de Pitágoras; es más afortunado enunciar para cada figura la generalización del Teorema, en el caso del triángulo equilátero sería: El área del triángulo equilátero construido tomando como uno de sus lados la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos tomando como lado, respectivamente, uno de los catetos del mismo triángulo rectángulo. Análogamente para los otros dos casos.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

A1(A): Presenta adecuadamente un argumento dinámico para la generalización del Teorema de Pitágoras por polígonos regulares semejantes, en el caso particular del triángulo equilátero y el pentágono regular.

A1(A): Presenta adecuadamente un argumento dinámico para la generalización del Teorema de Pitágoras por figuras planas semejantes, en el caso particular del círculo.

A1(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica a partir de la cual se permite vislumbrar que efectivamente el Teorema parece ser válido.

L2(A)(T): Hay uso de varias representaciones (verbal y gráfica), en general coherentemente.

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo al indicar el ángulo recto, aunque no nombra sus vértices. En la representación gráfica del cuadrado, el triángulo equilátero, el pentágono regular no se indican ni los ángulos rectos ni los lados congruentes, pero si se realiza la aclaración verbalmente de a cuál figura se refiere.

R4(A): Se define adecuadamente triángulo rectángulo y ángulo recto. También define de una manera adecuada hipotenusa y catetos.

A1(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica a partir de la cual se permite vislumbrar que efectivamente el Teorema parece ser válido, para todos los casos.

C1(T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones al Teorema: alude a una concepción (desde su concepción por áreas de cuadrados) y presenta un argumento (dinámico).

C2: Podemos afirmar que el video tiene Tipo 2 de representatividad, al abordar diferentes tipos de generalización del Teorema de Pitágoras, ya que alude a generalización: por polígono regulares semejantes y por figuras planas semejantes.

C3-*fs*(T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 3 de representatividad, al abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: aborda dos generalizaciones por polígonos semejantes.

Tabla 27. Análisis del video No. 11

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Generalización del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/KNjkXWK7ukE</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 11: “Generalización Teorema de Pitágoras.wmv”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">• Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-estáticas (geométricas).
• Teorema de Pitágoras desde la concepción entre áreas de cuadrados.
• Generalización del Teorema de Pitágoras desde su concepción por figuras planas semejantes y desde polígonos regulares semejantes.
• Operaciones aritméticas (suma).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">El video presenta el enunciado del Teorema de Pitágoras, su Generalización y una comprobación del Teorema. Se enuncia el Teorema de Pitágoras desde su concepción por medidas de lados, seguido de la concepción del Teorema por áreas de cuadrados; luego, presenta dos situaciones a modo de ejemplo, de la Generalización del Teorema de Pitágoras; y finalmente, comprueba el Teorema de Pitágoras en un Software de Geometría Dinámica.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en la mostración de una serie de diapositivas grafico-estáticas que ilustran la enunciación y la Generalización del Teorema. Para la comprobación del Teorema se presenta la grabación de la pantalla de GeoGebra, el software de geometría dinámica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Análisis de Idoneidad Epistémica</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:00-01:52]: El expositor inicia nombrando los lados del triángulo y enunciando el Teorema de Pitágoras desde su significado por medidas de lados; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de esto (Figura 4.1-52); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

Teorema de Pitágoras, observas un triángulo rectángulo, cuyos elementos son tres lados y tres ángulos. De estos, el ángulo recto es el que indico en este momento [señala el ángulo recto]. ¿Qué es c?; la hipotenusa, es el cateto de mayor longitud y con la particularidad de que es el opuesto al ángulo recto; cateto a y cateto b. Que dice Pitágoras, que en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos catetos [escribe $c^2 = a^2 + b^2$]. Este teorema es uno de los más importantes de la geometría euclidiana. Estos sumandos [señala c^2, a^2, b^2] en términos de área, representan el área de cuadrados de lados $c, a,$ y b.</td></tr>
</table>

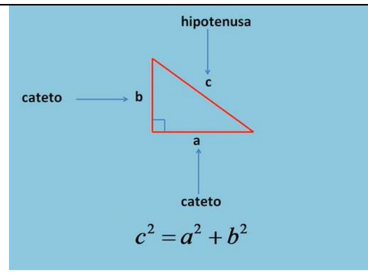


Figura 4.1-52. Captura de pantalla I del video 11

L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal y gráfico-estática), ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por el expositor y la representación gráfico-estática. Por ejemplo, el expositor habla de un triángulo rectángulo, mientras en el video se observa un triángulo con el ángulo recto indicado. Este hecho, indica una representatividad del Tipo 2; para este caso del enunciado del Teorema de Pitágoras: una en lenguaje verbal y otra basada en una representación gráfica.

R5(P): Se evidencio el uso parcialmente adecuado de la definición de hipotenusa. En la expresión: "la hipotenusa, es el cateto de mayor longitud y con la particularidad de que es el opuesto al ángulo recto" es adecuado decir que la hipotenusa es el lado "opuesto al ángulo recto"; pero es inadecuado decir que la hipotenusa es el "cateto de mayor longitud", ya que un cateto es un lado adyacente al ángulo recto, sería contradictorio que afirmar que es adyacente (tienen puntos en común) y al mismo tiempo es opuesto (no tienen puntos en común).

R5(G): Debido a esto, el uso de la definición de catetos es ambigua, ya que uno de los catetos, el más largo, es la hipotenusa y un cateto al mismo tiempo.

R1(P): La expresión "observas un triángulo rectángulo (…). De estos, el ángulo recto es el que indico en este momento", que corresponde al antecedente del Teorema, permite inferir su carácter como proposición condicional, lo que se constituye en una manera adecuada de enunciar parte de este.

L2 (I): La expresión "en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos catetos" no es una manera afortunada de aludir al Teorema de Pitágoras desde su concepción por áreas de cuadrados. Esto porque se da a entender que la hipotenusa y los catetos son medidas representadas por números (ya que escribe $c^2 = a^2 + b^2$), pero su verbalización indica que los objetos que son segmentos –hipotenusa o catetos– son objetos susceptibles de elevarse al cuadrado; en cualquier caso, podría haber un error de orden matemático.

R1(G): En este sentido, hay una forma ambigua de referirse a la hipotenusa y a los catetos; como segmentos (lados de un triángulo rectángulo) o como medida de tales segmentos.

L1(P): Representa adecuadamente el triángulo rectángulo ya que marca el ángulo recto y etiqueta sus lados, aunque no nombra sus vértices.

[01:50-02:10]: El expositor enuncian e ilustra el Teorema de Pitágoras desde su significado por áreas; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-53); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Veamos: en la hipotenusa hemos dibujado el polígono 3, en este cateto [señala el lado verde del triángulo] el polígono 4 y en este cateto [señala el lado amarillo del triángulo] el polígono

2; eso [el Teorema] quiere decir que, si sumamos el área del polígono 2 con el área del polígono 4, obtendremos el área del polígono 3.

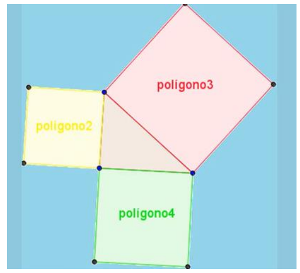


Figura 4.1-53. Captura de pantalla II del video 11

R2(G): La representación de la Figura 4.1-53 no se corresponde con la representación de la Figura 4.1-52, lo que es una ambigüedad ya que los sumandos presentados en la Figura 4.1-52 representan el área de los cuadrados de lados $c, a,$ y b ilustrados en la Figura 4.1-53. Esta representación no se condice con la Figura 4.1-52 ya que no se mantiene el nombre de los lados, la marca del ángulo recto, el indicativo de los vértices ni el color de los lados, por lo que incluso se podría asumir que son triángulos diferentes. En ese sentido, no hay un uso cuidadoso de ni del lenguaje ni de las representaciones dado que no se indica el tipo polígonos representados en la Figura 4.1-53.

L1(I): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo desde su concepción por áreas de cuadrados, ya que no marca el ángulo recto. En los cuadrados no se indican: los ángulos rectos y las congruencias de los lados.

L3(I): La expresión "en la hipotenusa hemos dibujado" es un procedimiento no riguroso; en este caso puntual, usar esa expresión para referirse a "construir el cuadrado tomando como unos de sus lados la hipotenusa" es una verbalización no rigurosa. El mismo comentario cabe para la expresión "en este cateto el polígono 2".

[02:20-02:32]: El expositor muestra una diapositiva como representación grafico-estática, en la que enuncia y verbaliza, el párrafo de la Figura 4.1-54:

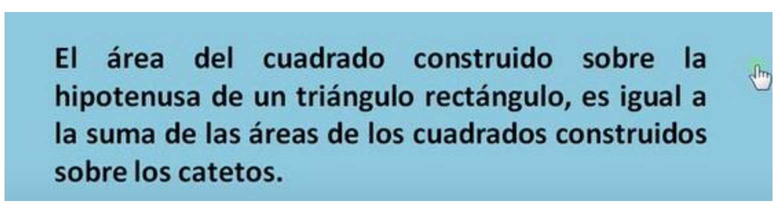


Figura 4.1-54. Captura de pantalla III del video 11

L2(P): El Teorema de Pitágoras se enuncia de una manera no precisa, ya que al verbalizar "el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa" no se precisa a qué cuadrado hace referencia (puede ser cualquier cuadrado, adyacente a la hipotenusa); sin embargo, previo al enunciado, se ha realizado una representación gráfica que sirve de referente para la comunicación del Teorema. Lo correcto sería decir: el área del cuadrado construido de tal forma que uno de sus lados sea la hipotenusa del triángulo. El mismo comentario cabe para la expresión "las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos". El mismo comentario cabe para la expresión "áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

[02:33-02:53]: El expositor presenta la primera Generalización del Teorema de Pitágoras (por hexágonos regulares); a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de la generalización del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-55); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Esto [el Teorema de Pitágoras] lo podemos generalizar, construyendo, fíjate, un hexágono en los lados del triángulo rectángulo, es decir que, si hallamos el área de este hexágono [señala el hexágono regular que tiene como lado uno de los catetos del triángulo], lo sumamos con este [señala el hexágono regular que tiene como lado el otro cateto del triángulo], obtendremos este [señala el hexágono regular que tiene como lado la hipotenusa del triángulo].

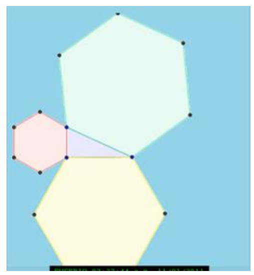


Figura 4.1-55. Captura de pantalla IV del video 11

R1(P): No se enuncia adecuadamente la generalización del Teorema ya que no se afirma que los hexágonos son regulares o que los hexágonos son semejantes, por lo que no se está aludiendo a una Generalización del Teorema de Pitágoras. Gracias a la figura se puede vislumbrar que los hexágonos son polígonos regulares semejantes; sin embargo, esto no se menciona. Sin embargo, se puede inferir el antecedente por la verbalización acompañada de la ilustración.

R2(A): Sin embargo, se mantiene la coherencia entre la representación simbólica y la representación verbal.

L1(I): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo ya que no marca el ángulo recto. En los hexágonos se indican las congruencias de los lados.

[02:53-03:09]: El expositor presenta la segunda Generalización del Teorema de Pitágoras (por semicircunferencias semejantes); a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de la generalización del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-56); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> También es válido para semicircunferencias, etc., la condición para que esto se cumpla es que estas figuras ubicadas aquí [señala las semicircunferencias alrededor del triángulo rectángulo] sean semejantes.

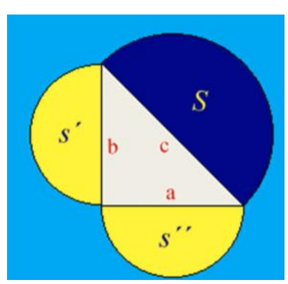


Figura 4.1-56. Captura de pantalla V del video 11

R1(P): No se realiza una enunciación de la generalización del Teorema de Pitágoras. Aunque se puede vislumbrar el antecedente por cómo se han venido verbalizando las generalizaciones, En sentido estricto no se ha enunciado.

R2(A): Sin embargo, se mantiene la coherencia entre la representación simbólica y la representación verbal.

L1(P): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo ya que no marca el ángulo recto. En los cuadrados no se indican: los ángulos rectos y las congruencias de los lados.

L1(A) Sin embargo, la representación gráfica que ilustra la generalización del Teorema de Pitágoras en figuras planas semejantes; en este caso, semicircunferencias; es adecuada.

[03:09-04:48]: El expositor muestra en la pantalla la aplicación GeoGebra, en la que comprueba el Teorema de Pitágoras según su significado por áreas de cuadrados; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática de la aplicación del Teorema de Pitágoras (Figura 4.1-57); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Comprobemos con el software GeoGebra lo expuesto anteriormente: observas aquí [señala el triángulo] un triángulo rectángulo y hemos dibujado tres cuadrados en los catetos del triángulo rectángulo; además, observa una semicircunferencia. Te recuerdo un teorema que dice que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo. Observa que, al desplazar este punto por la semicircunferencia, en todo momento es rectángulo. Entonces, el área del polígono amarillo más el área del polígono rojo debe ser igual al área del polígono verde que está en la hipotenusa, como lo puede observar acá [tiene escrito con la herramienta GeoGebra la siguiente expresión: "suma de las áreas amarilla y roja = 2.32+17.95=20.26", la cual está programada para cambiar sus valores, dependiendo de las áreas de los cuadrados]. Observa que, en todo instante, en toda posición, siempre se va a cumplir este teorema [arrastra el vértice del ángulo recto sobre la semicircunferencia], siempre y cuando sea un triángulo rectángulo y estas figuras aquí [señalas las áreas de los cuadrados] sean semejantes, como en este caso que puede ser también un pentágono, un hexágono, un triángulo, etc.

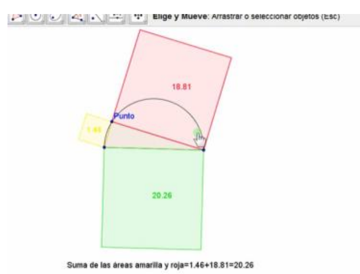


Figura 4.1-57. Captura de pantalla VI del video 11

A1-*nu*(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica con *argumentos numéricos* a partir de la cual se permite vislumbrar que efectivamente el Teorema de Pitágoras desde su significado por áreas de cuadrado parece ser válido. Para este argumento se valida que el área del cuadrado de superficie color verde sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados de superficie amarillo y rojo.

R2(A): Pese a lo anterior, se mantiene la coherencia entre la representación simbólica y la representación verbal.

R7(T)(A): Usa adecuadamente diferentes tipos de proposiciones como el Teorema triángulo – Semicircunferencia (si un triángulo está inscrito en una semicircunferencia entonces el ángulo opuesto al diámetro será recto).

L1(A): En la representación gráfica no se muestra el ángulo recto, pero si se muestra que el triángulo está inscrito en una semicircunferencia, por lo que se debe sobreentender que el ángulo es recto. En este caso, la verbalización del expositor se complementa con la representación gráfica, lo cual es afortunado.

L1(A): En la representación gráfica del cuadrado no se indican ni los ángulos rectos ni los lados congruente, pero si se realiza la aclaración verbalmente, de que se alude a un cuadrado.

L1(I): La representación simbólica "suma de las áreas amarilla y roja = 1.46+18.81=20.26" es matemáticamente incorrecta, ya que igualando una frase (de orden cualitativo) a una suma de números (de orden cuantitativo). Además, la expresión "áreas amarillas o rojas" ambigua, por lo que opinamos que se podría verbalizar como "superficies de color rojo y amarillo".

L1(G): La representación simbólica "suma de las áreas amarilla y roja = 1.46+18.81=20.26" no deja ver claramente que se está cumpliendo en Teorema de Pitágoras. Consideramos que la expresión podrías ser enunciada como: "la superficie de color rojo (determinada por el cuadrado cuyo lado se condice con la hipotenusa del triángulo) tienen un área A_3. Así esa área es igual a la suma de A_1 y A_2, las cuales corresponden a la cantidad de área de las superficies de los polígonos verde y amarillo (determinados por los cuadrados cuyos lados se condice con los catetos del triángulo)."

[04:48-05:35]: El expositor presenta una comprobación, basada en una representación dinámica, según la cual el Teorema de Pitágoras no es válido si el triángulo no es rectángulo (Figura 4.1-58); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Veamos ahora que para un triángulo no rectángulo como en este caso, el teorema de Pitágoras no se cumple. Observa aquí [señala los cuadrados] que el área del cuadrado rojo más el área del cuadrado amarillo nunca es igual al área de cuadrado verde que está situado en la hipotenusa, como puedes observar aquí [señalas la expresión que muestra las áreas de los cuadrados], miremos [arrastra uno de los vértices del triángulo], hemos comprobado así, el teorema de Pitágoras y su Generalización.

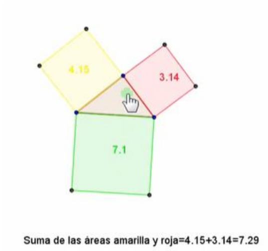


Figura 4.1-58. Captura de pantalla VII del video 11

A1(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica con *argumentos numéricos* en la que se columbra que el Teorema de Pitágoras parece no ser válido en triángulos no rectángulos.

L3(I): La expresión "hipotenusa" para referirse a uno de los lados del triángulo es una expresión verbal inadecuada, ya que la hipotenusa es el lado de un triángulo rectángulo, y en la Figura 4.1-58 el triángulo ya no es rectángulo. L1(I): La expresión "hemos comprobado así, el teorema de Pitágoras y su Generalización" no es precisa, ya que solo se comprobó el Teorema de Pitágoras, no su Generalización.
Síntesis del Análisis R1(P): No se enuncia adecuadamente la generalización del Teorema ya que no se afirma que los hexágonos son regulares o que los hexágonos son semejantes. Aunque se infiere el antecedente por la verbalización acompañada de la ilustración. R1(P): No se realiza una enunciación de la generalización del Teorema de Pitágoras. Aunque se puede vislumbrar el antecedente por cómo se han venido verbalizando las generalizaciones, En sentido estricto no se ha enunciado. A1-*nu*(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica con *argumentos numéricos* a partir de la cual se permite vislumbrar que efectivamente el Teorema de Pitágoras desde su significado por áreas de cuadrado parece ser válido. A1-*nu*(A): Presenta adecuadamente una mostración dinámica con *argumentos numéricos* en la que aproximadamente el Teorema de Pitágoras parece no ser válido en triángulos no rectángulos. L1(I): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo ya que no marca el ángulo recto. En los cuadrados no se indican: los ángulos rectos y las congruencias de los lados, en los hexágonos no se indican las congruencias de los lados. R5(G): Debido a esto, el uso de la definición de catetos es ambigua. L2(A)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación (verbal y gráfico-estática), ya que hay cierta coherencia entre lo afirmado por el expositor y la representación gráfico-estática R3 (T): Aluden al Generalización del Pitágoras desde diferentes categorías, desde polígonos regulares semejantes y desde figuras planas semejantes. L2(P): El Teorema de Pitágoras se enuncia de una manera no precisa, ya que al verbalizar "el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa" no se precisa a qué cuadrado hace referencia (puede ser cualquier cuadrado, adyacente a la hipotenusa); sin embargo, previo al enunciado, se ha realizado una representación gráfica que sirve de referente para la comunicación del Teorema. C1(T): Finalmente, podemos afirmar que el video tiene Tipo 1 de representatividad, al abordar diferentes aproximaciones al Teorema: alude a una concepción y la argumenta a través de argumentos dinámicos. C2(T): Podemos afirmar que el video tiene Tipo 2 de representatividad al abordar diferentes categorías de generalización, desde su concepción por figuras planas semejantes y desde polígonos regulares semejantes. C3(T): Tampoco alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento y de a un tipo de generalización.

Tabla 28. Análisis del video No. 12

<table>
<tr><td rowspan="3">Identificación del video</td><td>Etiqueta de búsqueda</td><td>Generalización del Teorema de Pitágoras</td><td>Enlace</td><td>https://youtu.be/cAh6_wcs5Wc</td></tr>
<tr><td>Título del video</td><td>Video No. 12: “23. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.”</td><td>Intencionalidad</td><td>Interés académico no curricular</td></tr>
<tr><td>Objetos primarios representativos</td><td colspan="3">Representaciones verbales, simbólicas (algebraicas) y gráficas-estáticas (geométricas).
Teorema de Pitágoras desde la concepción entre áreas de cuadrados.
Generalización del Teorema de Pitágoras desde su concepción por figuras planas semejantes
Operaciones aritméticas (suma).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción general</td><td colspan="3">En el video comprueba la generalización del Teorema de Pitágoras, para figuras planas semejantes, más específicamente semicírculos. Se asignan medidas a los lados del triángulo, se calculan las áreas de los semicírculos, respectivamente, y se comprueba la generalización del Teorema de Pitágoras.

Desde un punto de vista técnico, el video consiste en una grabación de pantalla, en la que observa como desde un computador se utiliza la aplicación Adobe Photoshop, que sirve como apoyo para que un expositor realice la explicación, a modo de monólogo, de la generalización Teorema de Pitágoras para figuras planas semejantes.</td></tr>
<tr><td colspan="5">[00:01-01:09]: El video comienza con la presentación del ejercicio a desarrollar, construyendo un triángulo rectángulo y sus respectivos semicírculos; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática (Figura 4.1-59); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:<blockquote>Este, y qué hay que hacer, a ver, te ponen esta figura: un triángulo rectángulo, aquí un semicírculo [dibuja un semicírculo, tomando un cateto como diámetro] aquí otro semicírculo aquí [dibuja un semicírculo, tomando el otro cateto como diámetro] y otro aquí [dibuja un semicírculo, tomando la hipotenusa como diámetro], y te dicen que esto mide 5, esto es la hipotenusa del triángulo [nombrado como a], esto mide 3, le han llamado c, y esto mide ¿cuánto?, esto mide 4, y te dicen: comprueba una generalización del Teorema de Pitágoras, calcula las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos, y comprueba que la suma de esta [señalando los semicírculos construidos tomando como diámetro los catetos de triángulo] es igual a la del semicírculo construido sobre la hipotenusa, po’ [pues] claro.</blockquote></td></tr>
</table>

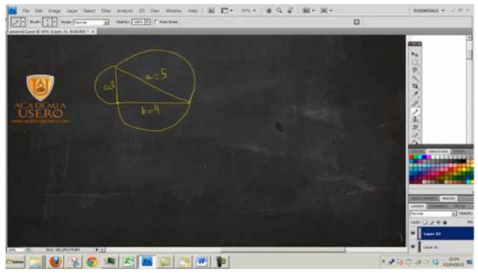


Figura 4.1-59. Captura de pantalla I del video 12

R1(P): Se enuncia adecuadamente la generalización del Teorema de Pitágoras ya que se avisa que se alude a “un triángulo rectángulo” y sus consecuentes “la suma de esta [señalando los semicírculos construidos tomando como diámetro los catetos de triángulo] es igual a la del semicírculo construido sobre la hipotenusa”. Sin embargo, no es la manera más adecuada ya que los consecuentes no son enunciados verbalmente de forma clara.

L1(I): Representa inadecuadamente el triángulo rectángulo por varios motivos: (i) cuando intenta construir el triángulo a mano alzada, se evidencia que los segmentos o no se intersecan exactamente en el vértice (como es el caso de los segmentos c intersecado b y c intersecado a) o directamente no se intersecan (como es el caso del segmentos a intersecado b); (ii) los segmentos correspondientes a los lados del triángulo no se ven “rectos”, ya que la línea trazada es realizada a mano alzada: y (iii) no indica el ángulo recto ni nombra sus supuestos vértices. Así mismo, las semicircunferencias no están perfectas. En suma, se subutilizan los recursos que se pueden obtener de un computador para hacer representaciones que el usuario tenga que idealizar.

L3(P): Pese a lo anterior, etiqueta los lados del triángulo y asigna adecuadamente sus respectivas medidas, también aborda verbalmente al lado a como la hipotenusa; pero no aborda verbalmente a los lados b y c como los catetos.

L2(P)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación, ya que hay cierta coherencia entre lo representado gráficamente en la Figura 4.1-59 (representación gráfico-estática) y lo afirmado por el expositor (representación verbal). Sin embargo, presenta una ambigüedad al representar la etiqueta de los catetos con su respectiva medida. Gracias a que presenta la etiqueta de la hipotenusa con su respectiva medida, se sobrentiende que va a presentar los catetos de manera análoga; por tanto, cuando verbaliza “esto mide 3, le han llamado c, y esto mide ¿cuánto?, esto mide 4” mientras ubica estas medidas en la representación gráfico-estática, se deduce que hace alusión a los catetos; sin embargo, esto no es verbalizado, por lo que se podría confundir con la medida del arco de circunferencia.

L3(G): La expresión “calcula las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos, y comprueba que la suma de esta es igual a la del semicírculo construido sobre la hipotenusa” de la tarea a desarrollar, es una expresión poco precisa. Esto porque sugiere que para comprobar esta generalización es suficiente con calcular las áreas respectivas de los semicírculos que tiene por diámetro los catetos; sin embargo, calcular el área del semicírculo que tiene por diámetro la hipotenusa, también es necesario para comprobar dicha generalización –de hecho, en el video se realiza este cálculo–, pero al enunciar la tarea solo se menciona el cálculo para los semicírculos que tiene por diámetro los catetos.

L3(G): La expresión “calcula las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos, y comprueba que la suma de esta […]” es una expresión poco precisa, ya que no es claro a que se refiere con “la suma de esta”; se entrevé que hacen alusión a la suma de las áreas. Consideramos que, en ese caso, el video debería referirse a la palabra “esta” como: “estas áreas”.

L3(G): Análogo al ítem anterior, la expresión “[…] igual a la del semicírculo construido sobre la hipotenusa” es una expresión poco precisa, ya que no es claro a que se refiere con “igual a la”; se intuye que hacen alusión a una igualdad con el área del semicírculo que tiene por diámetro la hipotenusa, en ese caso deberían referirse la palabra “a la” como: “al área”. Consideramos que una manera más afortunada y ordenada de comunicar la tarea puede ser: “Calcular el área de cada uno de los semicírculos y comprobar numéricamente que la suma de las áreas de semicírculos que tienen por diámetro los catetos es igual el área del semicírculo que tiene por diámetro la hipotenusa”.

[01:09-02:34]: Continua con el cálculo de las áreas de cada uno de los semicírculos, para comprobar numéricamente que se cumple la generalización del Teorema de Pitágoras; a la vez, en el video se muestra una representación grafico-estática (Figura 4.1-60); en el lapso el expositor afirma lo siguiente:

> Entonces, voy a calcular el área de este semicírculo [semicírculo c], el área de este sería: *pi* por el radio al cuadrado, ¿el radio cuánto sería?, la mitad, 1.5, partido dos [escribe $A_c = \frac{\pi \cdot 1.5^2}{2}$]; el área de b sería *pi* por dos al cuadrado, partido dos [escribe $A_b = \frac{\pi \cdot 2^2}{2}$]; y el área del grande sería *pi* por 2,5 al cuadrado partido dos [escribe $A_c = \frac{\pi \cdot 2.5^2}{2}$]. [Uso la] calculadora [para hacer los respectivos cáluclo]: 1,5 al cuadrado, partido 2, 1.125, se lo digo al que no opera el *pi*, porque no me gusta; *pi* por dos al cuadrado, 4, entre 2, 2 *pi*; y ahora, esto sería 2,5 al cuadrado, partido dos, 3.125 pi. Efectivamente la suma de estos dos [A_c y A_b] da este [A_a], pues eso lo que te piden en ese ejercicio.

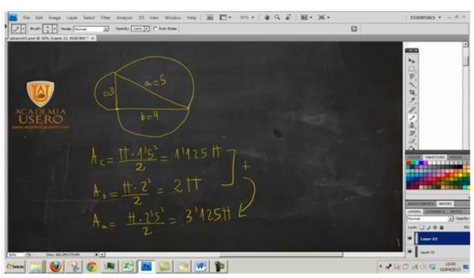


Figura 4.1-60. Captura de pantalla II del video 12

A3-*nu*(A): Presenta *argumentos numéricos* que permiten comprobar la generalización del Teorema para un caso particular, para figuras planas semejantes, en este caso para un triángulo cuyas medidas de los catetos y la hipotenusa son 3, 4 y 5 respectivamente; y con base en estas medidas, se calcula el área de las semicircunferencias que tienen como diámetro los lados del triángulo y con estas áreas aplican la generalización del Teorema.

R9(P): Enuncia de forma explícita algunos procedimientos aritméticos entre números racionales como lo son: calcular la potencia con exponente dos; la división y la suma, de dos números. Pero, no es explícita la comprobación de la generalización del Teorema de Pitágoras, es decir, no se muestra explícitamente que la suma de las áreas de los semicírculos con diámetros los catetos, sea igual al área del semicírculo con diámetro la hipotenusa.

R8(I): Sin embargo, en el desarrollo del procedimiento dice “se lo digo al que no opera el *pi*, porque no me gusta” lo cual pareciera ser un comentario de carácter subjetivo, pero en realidad podría haber un motivo por el cual el expositor no realizó el producto entre el número racional y el número irracional: al realizar este producto, el resultado será un número irracional, lo cual no es conveniente porque al realizar la comprobación numérica, el valor ya no sería aproximado. Por esta razón, no opera este número irracional con los números racionales y simplificar los cálculos de la siguiente manera:

I. $1.125\pi + 2\pi = (1.125 + 2)\pi$ Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación

II. $(1.125 + 2)\pi = 3.125\pi$ Sumando los números naturales

R11(A): Usa adecuadamente los procedimientos algebraicos y aritméticos involucrados en la comprobación de la generalización del Teorema de Pitágoras para un caso particular.

Síntesis del Análisis

Identificamos como los códigos más representativos de este video, los siguientes:

R1(P): Se enuncia adecuadamente la generalización del Teorema de Pitágoras ya que se alude a un triángulo rectángulo y se explica el consecuente con la representación verbal y la simbólica, dependientes entre sí para entender el enunciado. Por tanto, no es la manera más adecuada ya que los consecuentes no son enunciados verbalmente de forma clara.

A3-*nu*(A): Presenta *argumentos numéricos* que permiten comprobar la generalización del Teorema para un caso particular, para figuras planas semejantes, en este caso, semicírculos.

L2(P)(T): Usa adecuadamente diferentes tipos de representación, ya que hay cierta coherencia entre lo representado gráficamente en la Figura 1 (representación gráfico-estática) y lo afirmado por el expositor (representación verbal). Sin embargo, presenta una ambigüedad al representar la etiqueta de los catetos con su respectiva medida.

L1(I): Hay falencias en lo gráfico, ya que todas las figuras no son precisas, al ser realizadas a mano alzada. No se indicó el ángulo recto en el triángulo y en la semicircunferencia no “cubren” el área de los semicírculos.

L1(I): Un asunto que no es matemático pero que podemos comentar colateralmente es el software utilizado para la representación gráfica. Si bien es cierto que un editor de fotografía no es el programa más adecuado, si es posible realizar adecuadamente las representaciones gráficas requeridas (aunque la versión utilizada sea muy antigua).

R10(A): Se evidencio el uso adecuado de procedimientos algebraicos y aritméticos. Por ejemplo; algunos adecuados como: calcular la potencia con exponente dos; la división y la suma, de dos números.

L3(G): Usa expresiones verbales poco precisas, ya que es necesaria la combinación de lo verbal con lo simbólico, pero no porque se complementen sino porque se intercalan.

C1: Finalmente, podemos afirmar que el video no tiene representatividad, al abordar únicamente la generalización del Teorema.

C2: Tampoco alcanza el Tipo 2 de representatividad, ya que aborda la generalización únicamente desde las figuras planas semejantes.

C3 (T): Tampoco alcanza el Tipo 3 de representatividad, al no abordar diferentes procedimientos en una misma categoría, para un mismo tipo de aproximación: presenta un argumento y una generalización.

4.2 Resultados

En esa sección, presentamos resultados panorámicos de los análisis realizados. Para ello, hemos organizado la información usando diagramas de barras horizontales para el conjunto de videos que son parte de cada una de las cuatro aproximaciones (concepciones-explicación del Teorema, argumentos-demostración del teorema, situaciones-aplicación del Teorema y generalización del Teorema). Esto con el propósito de vislumbrar los objetos primarios (Lenguajes/Representaciones, Reglas, Argumentos, Situaciones/Problemas y Relaciones) y que componentes asociados a estos (Practicas adecuadas, parcialmente adecuadas o inadecuadas, Ambigüedades y Representatividad) aparecieron con mayor o menor frecuencia en los análisis presentados; así, podemos tener una idea general de lo que ocurre en los videos que hacen parte de cada una de las aproximaciones al Teorema de Pitágoras que hemos distinguido para hacer el estudio. De alguna manera, en la sección previa, tenemos un análisis de árboles; ahora presentamos análisis de bosques.

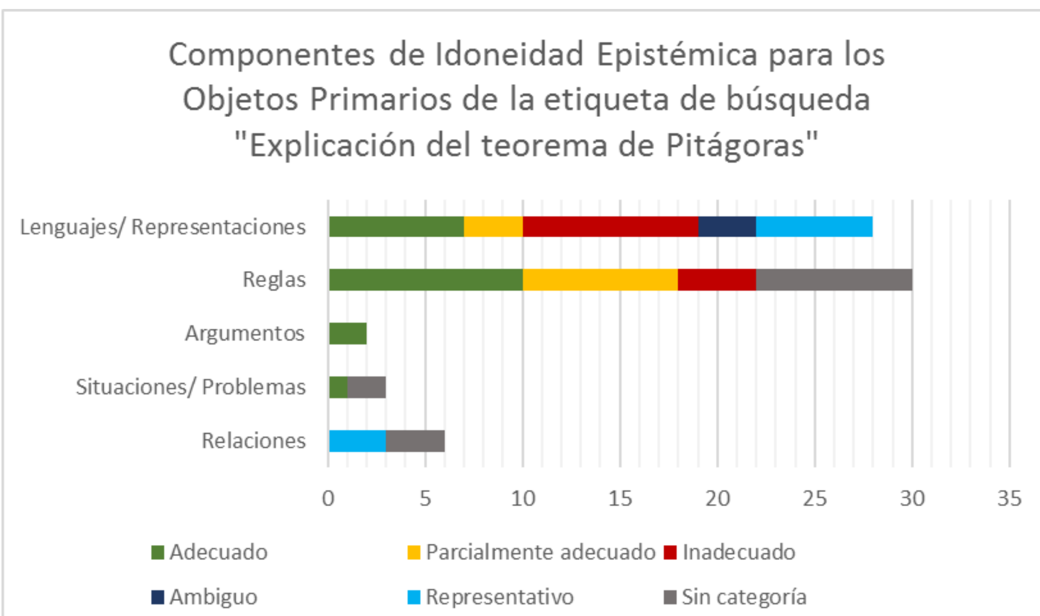


Figura 4.2-1. Componentes de la Idoneidad Epistémica para los objetos primarios relativos a videos sobre Explicación del Teorema de Pitágoras

De la figura anterior se puede inferir que, para los videos analizados, correspondientes a explicación del Teorema de Pitágoras, estos no solo se concentraron en explicar dicho Teorema bajo alguna de las concepciones (medida de lados o área de cuadrados). Producto de código sobre representatividad, inferimos que estos videos también hacen un esfuerzo por producir un argumento para sustentarlo (argumento numérico en todos los casos) y por producir alguna aplicación de orden meramente matemática. Un asunto que llama la atención en el uso inadecuado del lenguaje para comunicar las ideas (sobre todo el gráfico) o el verbal (en relación con la ambigüedad hipotenusa y cateto como segmentos o medidas de segmentos, y con el no cuidado en la organización mediante la cual se expone la información). Finalmente, aunque todos hacen un esfuerzo por indicar definiciones de los prerrequisitos mínimos para comprender el Teorema (triángulo rectángulo, ángulo recto, operación de potenciación), hay un uso inadecuado de ciertos procedimientos aritméticos obviando propiedades de la igualdad para las operaciones.

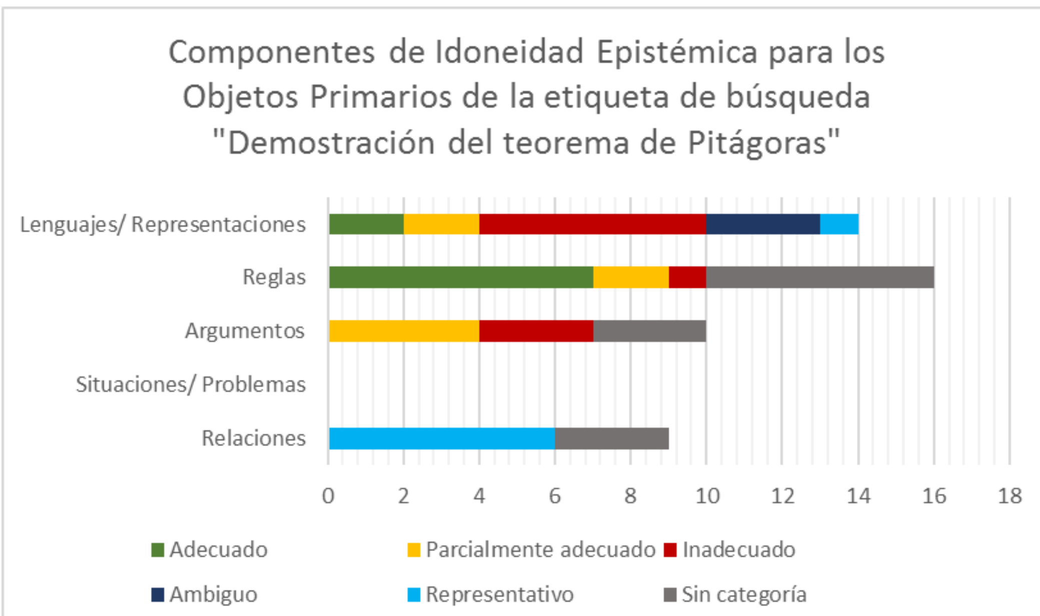


Figura 4.2-2. Componentes de la Idoneidad Epistémica para los Objetos primarios relativos a videos sobre Demostración del Teorema de Pitágoras

De la figura anterior y de los análisis hechos para los videos correspondientes a la demostración del Teorema de Pitágoras, podemos decir que hubo un esfuerzo central por producir argumentos que sustenten su validez usando, cada uno, un solo tipo de argumento (numérico, geométrico-algebraico, dinámico con representación concreta o geométrico-algebraico), lo que implica una representatividad de Tipo 3 nula. Vale indicar que lo inadecuado de las reglas hace referencia a la no rigurosidad procedimental o a la no indicación de las propiedades o hechos que permiten sustentar algún paso en el argumento. Un asunto que llama la atención es que, en el video del argumento dinámico con representación concreta, pese al esfuerzo didáctico, hay un error conceptual importante porque en realidad hay una sustentación para una generalización del Teorema (aquella relativa al volumen explicada en el Capítulo 2). Finalmente, llama la atención en el uso inadecuado del lenguaje para comunicar las ideas (sobre todo el gráfico) o el verbal (en relación con la ambigüedad hipotenusa y cateto como segmentos o medidas de segmentos).

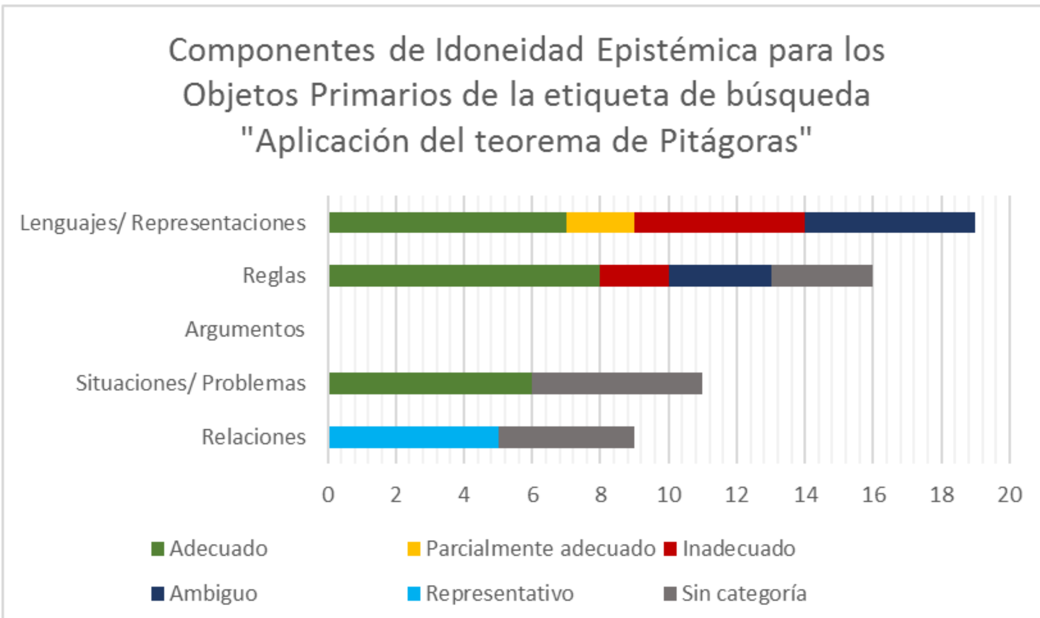


Figura 4.2-3. Componentes de la Idoneidad Epistémica para los Objetos primarios relativos a videos sobre Aplicación del Teorema de Pitágoras

De la figura anterior y de los análisis hechos para los videos correspondientes a la aplicación del del Teorema de Pitágoras, podemos decir que hubo un esfuerzo central por aludir a situaciones de orden puramente matemático. Solo un video se atrevió a exponer dos situaciones, una fantasiosa y otra realista. Ello indica, salvo en es este último, muy poca representatividad de Tipo 2. Vale indicar que lo inadecuado de las reglas hace referencia a la no rigurosidad procedimental o a la no indicación de las propiedades o hechos que permiten sustentar algún paso procedimiento. Finalmente, llama la atención en el uso inadecuado del lenguaje para comunicar las ideas (sobre todo el gráfico) o el verbal (en relación con la ambigüedad hipotenusa y cateto como segmentos o medidas de segmentos).

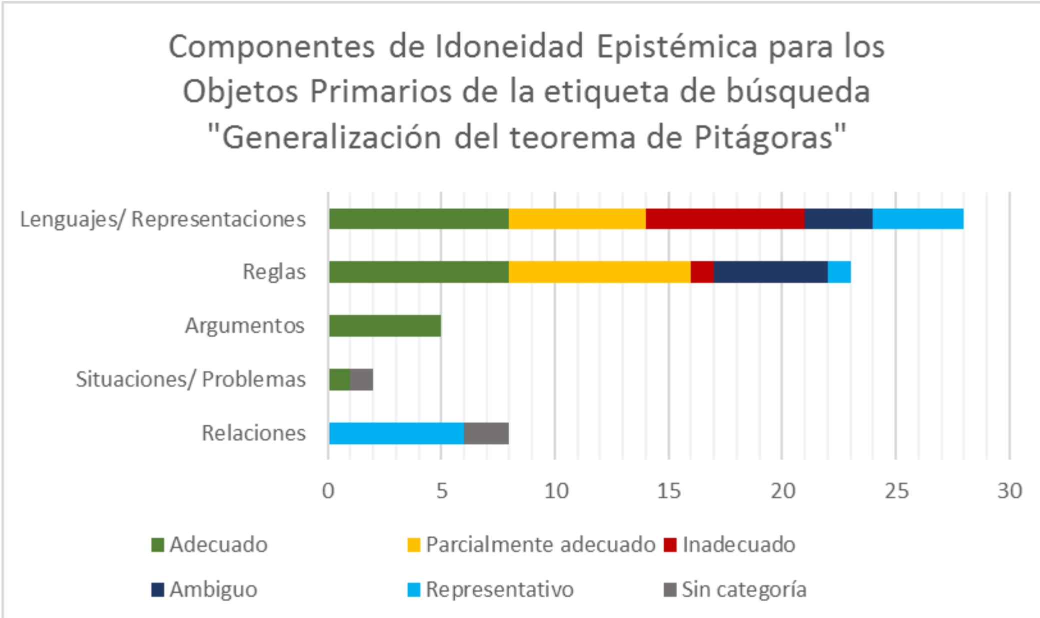


Figura 4.2-4. Componentes de la Idoneidad Epistémica para los Objetos primarios relativos a videos sobre Generalización del Teorema de Pitágoras.

De la figura anterior y de los análisis hechos para los videos correspondientes a la generalización del del Teorema de Pitágoras, podemos decir que hubo un esfuerzo central por indicar un tipo de generalización relativa polígonos regulares (dos de los videos los hacen) y al relativo a semicircunferencia (todos los hacen). Los argumentos que se llevan a cabo para sustentar su validez en esos casos se reducen a argumentos numéricos o argumentos numéricos dinámicos usando Software de Geometría Dinámica (vale decir que solo hay representatividad de Tipo 2 para este caso). El hecho de que en estos videos haya un esfuerzo por aludir argumentos y generalizaciones genera un Tipo 1 de representatividad. Finalmente, llama la atención en el uso inadecuado del lenguaje para comunicar las ideas (sobre todo el gráfico para el video 12) o el verbal (en relación con la ambigüedad hipotenusa y cateto como segmentos o medidas de segmentos).

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

Las conclusiones están escritas en términos de los siguientes tres asuntos: el nivel de desarrollo de los objetivos planteados en el trabajo, las consideraciones finales en relación con los resultados obtenidos de los análisis, y los aportes que nos dejó la elaboración de este trabajo de grado como futuros docentes.

Relativas a los objetivos

A continuación, en la Tabla 29. Nivel de desarrollo de los objetivos presentamos el nivel de desarrollo del objetivo general y de los objetivos específicos.

Tabla 29. Nivel de desarrollo de los objetivos

Objetivo General	
Analizar cualitativamente la Idoneidad Epistémica, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico, de los videos más populares de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.	Basándonos en la propuesta de Beltran-Pellicier *et al.* (2018), se analizó cualitativamente la Idoneidad Epistémica de doce videos de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.
Objetivos Específicos	
Escoger los videos más populares de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras.	Se consolido un marco teórico que nos permitió escoger los doce videos más populares de YouTube, teniendo en cuenta dos de los filtros de búsqueda que esta plataforma proporciona: Relevancia y Recuento de vistas.
Adaptar los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico, al Teorema de Pitágoras, poniendo énfasis en la faceta epistémica.	Luego de identificar los objetos primarios involucrados en los doce videos, se lograron adaptar indicadores (Godino, 2013) y descriptores (Breda *et al.*, 2017) de Idoneidad Epistémica.
Analizar el material audiovisual recopilado usando los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica adaptados.	Usando las herramientas analíticas diseñadas (códigos para los indicadores y descriptores) se logró analizar la idoneidad epistémica de cada video.

Lo anterior nos deja ver que los objetivos fueron logrados de manera aceptable. Esto porque, aunque los dos primeros objetivos específicos se desarrollaron satisfactoriamente (de hechos las adaptaciones de los indicadores de idoneidad para el Teorema de Pitágoras son un resultado interesante), tuvimos que reducir ostensiblemente la cantidad de video que fueron dato del estudio. Ello por cuanto no dimensionamos lo implica hacer un análisis de esta envergadura, apropiando los criterios de análisis y los elementos de índole conceptual del Teorema, y desarrollando una sensibilidad analítica que definitivamente no teníamos.

Relativas a los resultados del análisis mismo

Este análisis de la idoneidad epistémica no pretende indicar si un video es bueno o malo; más bien, pretende indicar aquellos aspectos que no son tan adecuados y aquellos aspectos que merecen ser resaltados de cada video. Esto, como una referencia de la cual puede echar mano un profesor que pretende usar estos videos como apoyo para su clase sabiendo, de antemano, aquellos asuntos idóneos o no que podría explotar del video.

De los resultados dichos en el Capítulo 4, un mensaje general sobre los video analizados que podemos sugerir a los profesores, y que va en la dirección citada al finalizar el párrafo anterior, se puede sintetizar en los siguientes numerales:

1. La idoneidad relativa a la comunicación verbal, en el marco de un discurso matemático, no es la más adecuada. Podemos decir que, en términos generales, no hay una rigurosidad en el uso de expresiones o términos especializados (e.g, decir lado más largo o más corto para referirse a hipotenusas o catetos, decir "pasar a" para indicar el uso de propiedades de la igualdad en relación operaciones aritméticas, ser ambiguos cuando se refieren a la hipotenusa o cateto -como lados o como medidas de lados-) o no hay un orden previamente pensado sobre la información que se va a presentar, lo cual hace que la recepción de información sea confusa, con muchos asuntos a la vez, sin reconocer el foco de un momento dado en la exposición (e.g., en el marco de la exposición del antecedente del Teorema, se describen varios prerrequisitos, asunto este que hace perder el foco sobre los aspectos centrales de tal antecedente).
2. La idoneidad relativa al uso de proposiciones en el marco de la actividad matemática que se despliega en los videos, independiente de las aproximaciones al Teorema abordadas, no es la más idónea. Ello se hace evidente por la no explicitación, en el marco de los procedimientos que se llevan a cabo, de las propiedades que se emplean para llevar a cabo algún paso de este. Claro, ello puede ser sustentado por la no precisión de los sistemas axiomáticos locales en los cuales se enmarca cada abordaje. Así las cosas, hay una tendencia a usar ciertos clichés (e.g., decir "pasar al otro lado") o no aludir a garantías

teóricas que puedan sustentar inferencias (e.g., criterios de congruencias o identidades algebraicas).

3. Pese a lo anterior, en términos generales, se vislumbra un interés por explicar procedimientos bien sea para solucionar los problemas puramente matemáticos, o para argumentar la validez del teorema bien sea numéricamente, con algún mecanismo dinámico o con aproximaciones geométrico-algebraicas. La idoneidad al respecto es relativamente aceptable. Las falencias radican en la no rigurosidad comunicacional y la laxitud al usar proposiciones (incluso nulo uso de proposiciones) para sustentar ideas.
4. Se valora como afortunado la intención de usar y coordinar diferentes tipos de representaciones (gráfica, escrita y simbólica) en todos los videos. No obstante, vale indicar que hay varias oportunidades de mejora respecto a las representaciones gráficas: algunas no rigurosas; otras muy imprecisas al ser “a mano alzada”, que invitan a hacer idealizaciones extremas. En fin, consideramos que actualmente se cuentan con muchos recursos visuales especializados o de material concreto que podrían apoyar este tipo de representaciones que no induzcan a la idealización y más bien, favorezcan procesos de visualización.
5. Con respecto a esto último, se valora como valioso la intensión de algunos videos por procurar el uso de material concreto o especializado (i.e., software de Geometría Dinámica) principalmente para presentar argumentos que sustenten la validez del Teorema de Pitágoras. No obstante ese esfuerzo, vale indicar que la idoneidad de esos videos debe indicarse a la luz de su rigurosidad de un lado, y de sus limitaciones por otro. Cuando aludimos a la rigurosidad, queremos indicar que, por ejemplo, los argumentos que se provean deben procurar ser coherentes con la concepción que se tenga del Teorema; en ese sentido, no es afortunado que, en un argumento, por didáctico que sea, se usen objetos de dimensión 3 para comprobar un Teorema que se enuncia en dimensión 2. Ahora bien, cuando aludimos a las limitaciones, queremos indicar que, por ejemplo, aun cuando se use un software de geometría dinámica para comprobar la validez del Teorema tomando de base la función del arrastre, se debe tener presente que la actividad correspondiente se condice con argumentos de índole inductivo que llevan a una plausibilidad del hecho y no a una necesariedad del mismo (i.e., argumentan inductivamente el hecho, pero no provee una demostración de este).

6. Finalmente, reconocemos que los videos, en general, tienen representatividades limitadas. Esto puede ser considerado como valioso si es que se quiere que los videos sean muy específicos, o puede ser considerado como poco idóneo si es que se quiere que estos presenten varios significados (aproximaciones) al teorema. En ese caso, vemos que no es fácil tomar una decisión. Estudios dicen que un video no puede sobrepasar siete minutos porque la atención del receptor, luego de ese lapso, se dispersa. Así las cosas, se podría pensar en videos que expliquen el teorema bajo alguna de las concepciones, y presenten alguna aplicación de este en ese lapso, de una manera clara, sin ambigüedades, haciendo uso de las herramientas informáticas con las que se cuente, etc. En los videos analizados, algunos de ellos (particularmente aquellos del primer grupo -explicación del Teorema-) apuntan a esto. En ese sentido, tienen una idoneidad relativa a la representatividad de Tipo 2 adecuada; se quedan un poco cortos en la representatividad de Tipo 1 porque, por ejemplo, las aplicaciones son de un solo tipo, pues se reducen a situaciones puramente matemáticas muy simples (hallar medidas de un lado, conociendo las otras dos), dejando de lados otras aplicaciones a las matemáticas mismas (definición de distancia, de norma, para determinar un ángulo recto, para demostrar intersecciones de objetos, etc.) o a situaciones realistas o reales.

   Un comentario similar puede hacerse para los videos que apuntan a la demostración del Teorema. Sin duda no son idóneos en cuanto a su representatividad de Tipo 1, dado que no exponen diferentes tipos de argumentos durante su reproducción. Cabría, entonces, la pregunta de si es posible realizar un video que en siete minutos exponga dos o más demostraciones con una idoneidad del lenguaje, procedimental y conceptual (uso de reglas) adecuada. Sin duda es una cuestión abierta.

Bien, con las reflexiones hechas en el marco de los literales anteriores, no solo quisimos indicar la complejidad que implica determinar la idoneidad de los videos tomando en consideración los matices que se pueden presentar. También, queremos hacer una invitación a diseñar videos sobre el Teorema de Pitágoras, empleando los criterios de idoneidad establecidos por nosotros; ello no solo contribuye al mejoramiento de los recursos disponibles en YouTube más populares al respecto, sino que permiten evaluar los criterios establecidos por nosotros.

Relativas a nuestra formación docente

Consideramos que el principal aporte de este trabajo de grado a nuestra formación como futuros profesionales de la docencia en matemáticas cosiste en reconocer las enormes falencias conceptuales que teníamos en relación con un objeto clásico de la matemática escolar (el Teorema de Pitágoras) y construir un escenario que permitió solventarlas, aunque sea, parcialmente. Así mismo, en reconocer la poca sensibilidad analítica que habíamos desarrollado a lo largo de nuestra formación en la Universidad, la cual, de hecho, sigue siendo bastante limitada. En ese marco, reconocimos que adaptar y usar herramientas teóricas para llevar a cabo análisis de videos no es una tarea fácil, y que debemos seguir perfeccionado esas competencias de corte principalmente investigativo; con este trabajo apenas dimos un "puntapié" inicial en ese proceso.

Con el anterior escenario, caímos en la cuenta de que aspectos de tipo actitudinal también juegan un papel muy importante para sacar avante un trabajo como este: es menester tener hábitos de estudio, generar autonomía, ser propositivos, ser focalizados, etc.

REFERENCIAS

Atencia, P. (2009). Los videos educativos en la web. Un recurso para utilizar las nuevas tecnologias aplicadas a la educación. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 22*, 17-29.

Aveleyra, E., & Proyetti, M. (2019). Un estudio sobre la producción de videos educativos para la enseñanza universitaria. *Educación con Tecnología : un compromiso social. Iniciativas y resultados de investigaciones y experiencias de innovación educativa*, 89-101.

Barrantes, M., Barrantes, M., Zamora, V., & Mejía, A. (2018). El Teorema de Pitágoras, un problema abierto. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14*(54), 92-112.

Barrantes, M., Zamora, V., & Barrantes, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Revista de Educación Matemática, 36*(1), 27-42.

Beltran-Pellicier, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specifi didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Bravo, L. (1996). ¿Qué es el vídeo educativo? *Comunicar: Revista científica iberoamericana de comunicación y educación,* (6), 100-105.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: boletim de educação matemática, 32*, 255-278.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista española de pedagogía, 78*(275), 27-50.

Cebrían, M. (1987). El vídeo Educativo. *Actas del II Congreso de Tecnología Educativa* (pp. 55-74). Sociedad Española de Pedagogía.

Díaz, V., & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números, 45*, 33-41.

Euclides. (1996). *Los Elementos.* (M. L. Puertas, ed. y trad). España: Editorial Gredos S.A. (p. 42).

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8*(11), 111-132.

González, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *SIGMA: Revista de matemáticas, 32*(1), 103-130.

Kelly, A., & Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. doi:https://doi.org/10.4324/9781410602725

Licea, J. (2019). *Teorema de Pitágoras generalizado.* (Portal Académico del CCH, UNAM.) Obtenido de Teorema de Pitágoras: https://portalacademico.cch.unam.mx/matematicas2/teorema-pitagoras/generalizado

Loomis, E. (1968). *The Pythagorean Proposition* . Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Primera ed.).

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas* (Vol. II).

Moise, E., & Downs, F. (1966). *Geometría Moderna.* Estados Unidos: Addinson-Wesley (p. 455).

Ramírez, A. (2010). Youtube y el desarrollo de la competencia matemática. Resultados de una investigación cuasiexperimental. *Contextos Educativos,* (13), 123-138.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7 ed.). México D.F.: Cengage Learning.

Torres, G. (2017). *El Teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria.* Universidad de Granada.

Vasquez, M. (2017). Una ampliación al teorema de Pitágoras. *RevEM: Revista de Educación Matemática, 27*(3), 3-22.

Vicent, J. (29 de Junio de 2020). *Cómo funciona el algoritmo de YouTube.* Obtenido de TreceBits. Redes sociales y tecnología: https://www.trecebits.com/2020/06/29/como-funciona-el-algoritmo-de-youtube/

Zárate, E. (1996). Generalización del Teorema de Pitágoras. *Educación Matemática, 8*(2), 127-144.