



**MAESTRÍA EN
DOCENCIA DE LA
MATEMÁTICA**

DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES PARA EL ESTUDIO DE LA
CIRCUNFERENCIA EN GEOMETRÍA SINTÉTICA Y ANALÍTICA,
APOYADO EN GEOGEBRA

Autores

Cynthia Raquel Acosta López

Francisco Javier Páez Sosa

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D.C.

2024



DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES PARA EL ESTUDIO DE LA
CIRCUNFERENCIA EN GEOMETRÍA SINTÉTICA Y ANALÍTICA,
APOYADO EN GEOGEBRA

Autores

Cynthia Raquel Acosta López

Francisco Javier Páez Sosa

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Asesor

Dr. Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D.C.

2024

Agradecimientos

Al culminar esta etapa tan importante de nuestra vida académica, deseamos expresar nuestro profundo agradecimiento a quienes, de una manera u otra, hicieron posible este logro.

En primer lugar, a Dios, por su guía y protección a lo largo de este año. Su presencia en nuestra vida ha sido una fuente constante de paz y esperanza, especialmente en los momentos de desafío.

Al Programa Nacional de Becas "Don Carlos Antonio López" (BECAL), por brindarnos la oportunidad de acceder a una formación académica de excelencia en el exterior. Sin el apoyo y la confianza depositada en nuestro proyecto, este sueño no habría sido posible. Su compromiso con la educación y el desarrollo de nuestro país es un ejemplo para todos los que aspiramos a contribuir al bienestar de nuestra sociedad.

A nuestra familia, que siempre ha sido nuestro pilar fundamental, por su amor incondicional, su paciencia y sus sacrificios; a nuestras hermanas, por su constante apoyo y ánimo en cada momento de dificultad. Este logro es tanto de ustedes como nuestro, pues han estado a nuestro lado en cada paso del camino.

Queremos expresar especial gratitud a nuestro asesor de tesis, Prof. Dr. Edgar Alberto Guacaneme Suárez, cuyo conocimiento, paciencia y orientación fueron esenciales para la realización de este trabajo. Su disposición para compartir su experiencia y ofrecernos su tiempo, incluso en los momentos más difíciles, fue fundamental para que pudiéramos alcanzar este objetivo. Su apoyo nos permitió superar los desafíos que surgieron en el camino y enriquecer nuestra formación académica.

Dedicatoria

A mis padres, hermana y sobrinas, por ser mis pilares inquebrantables. Gracias por su amor incondicional, por sus consejos, por sus sacrificios y por creer en mí cuando más lo necesitaba. Todo lo que soy se lo debo a ustedes. Su ejemplo de esfuerzo, dedicación y perseverancia ha sido la guía que me ha permitido llegar hasta aquí.

A mi amada hija Rina Estefanía, que es y siempre será la luz de mis días. Cada paso que doy es por ti, por tu futuro y por el inmenso amor que me inspiras. Eres mi mayor motivación y la razón por la cual nunca dejo de luchar. Este logro es para ti, con la esperanza de que siempre persigas tus sueños con la misma pasión y determinación.

Agradezco sinceramente a todas las personas que, de diferentes formas, han contribuido a que pudiera alcanzar esta meta. Su apoyo ha sido fundamental para mi crecimiento tanto profesional como personal.

Cynthia Raquel Acosta López

En la memoria de mis queridos padres, cuyo amor, enseñanzas y ejemplo siguen siendo mi mayor fuente de inspiración, aun cuando ya no están físicamente conmigo. Todo lo que soy y lo que he logrado se lo debo a ustedes. Este éxito es un homenaje a sus vidas y a los valores que me inculcaron. Siempre los llevaré en mi corazón y seguirán siendo mi guía en cada paso que doy.

A mis hijos, por ser la razón de mi esfuerzo y perseverancia. Sus alegrías y amor me impulsan a seguir adelante cada día. Este triunfo es para ustedes, con la esperanza de que siempre recuerden la importancia de luchar por sus sueños y de nunca rendirse, sin importar cuán difícil parezca el camino.

A mis hermanas, por el apoyo incondicional y amor fraternal. Gracias por estar a mi lado en los momentos difíciles, por ofrecerme sus palabras de aliento y por compartir conmigo cada triunfo y cada desafío. Son en mi vida un regalo invaluable, y este logro también es vuestro, pues sin ustedes, este camino habría sido mucho más arduo.

Francisco Javier Páez Sosa

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN	1
1 GENERALIDADES	5
1.1 Inquietud Pedagógica	5
1.1.1 Contexto de la formación de profesores de matemáticas en Paraguay	5
1.1.2 La geometría y la formación de profesores de matemáticas	11
1.1.3 La tecnología y la formación de profesores de matemáticas	12
1.2 Antecedentes	14
1.2.1 Enseñanza de la circunferencia en la formación de profesores de matemáticas	14
1.2.2 Estudios sobre la enseñanza de la circunferencia con apoyo de GeoGebra	19
1.2.3 GeoGebra y la formación de profesores de matemáticas	23
1.2.4 Tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas	28
1.3 Objetivos	34
1.3.1 Objetivo general	34
1.3.2 Objetivos específicos	34
1.4 Aspectos Metodológicos	35
1.4.1 Revisión documental	35
1.4.2 Campo de investigación	36
1.4.3 Identificación y organización de las tareas	38
2 MARCO DE REFERENCIA	40
2.1 Formación de profesores de matemáticas	40
2.1.1 La formación docente en Paraguay	40
2.1.2 La competencia docente y el enfoque en “mirar con sentido”	47
2.1.3 La integración de teoría y práctica	48
2.1.4 La importancia de los entornos de aprendizaje	48
2.2 GeoGebra	49
2.2.1 GeoGebra-Characterización	50
2.2.2 Importancia de GeoGebra en la geometría sintética y analítica	53
2.2.3 Importancia de GeoGebra para los futuros profesores de matemáticas	57
2.3 Circunferencia	59
2.3.1 Tratamiento de Euclides de la circunferencia	60
2.3.2 Tratamiento de Descartes de la circunferencia	67

2.4	Diseño de tareas -----	77
2.4.1	Diseño de tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas -----	77
2.4.2	Características de las tareas con sentido en la formación docente -----	80
2.4.3	Relación entre teoría y práctica en las tareas profesionales -----	81
2.4.4	Enfoques en el diseño de tareas profesionales -----	83
3	RESULTADOS -----	86
3.1	Descripción general de las asesorías -----	87
3.2	Presentación de las tareas identificadas -----	90
3.2.1	Tareas identificadas en el libro Elementos de Euclides -----	90
3.2.2	Tareas identificadas en el libro Geometría de Descartes -----	92
3.3	Reformulación y organización de las tareas identificadas -----	95
4	CONCLUSIONES Y REFLEXIONES -----	108
4.1	Conclusiones -----	108
4.2	Reflexiones y consideraciones finales -----	111
	Referencias -----	114
	Anexos -----	121
	Anexo 1 -----	121
	¿Qué tratamiento hace Euclides de la circunferencia en su libro III y IV de Elementos?----	121
	Planteamientos y resolución de problemas de Euclides con relación a la circunferencia ----	121
	Libro III -----	121
	Libro IV -----	123
	Planteamientos y demostración de teoremas de Euclides con relación a la circunferencia --	130
	Libro III -----	130
	Anexo 2 -----	146
	Análisis del problema de Pappus -----	146

ÍNDICE DE IMÁGENES

Figura 1 <i>Descripción del perfil del Profesor del área de Matemática</i>	43
Figura 2 <i>Distribución del Currículum del Profesorado de Matemáticas</i>	44
Figura 3 <i>Malla Curricular Profesorado del 3.º Ciclo y Educación Media</i>	46
Figura 4 <i>Página principal de GeoGebra</i>	50
Figura 5 <i>Oferta de Espacios de GeoGebra</i>	51
Figura 6 <i>Recursos ofrecidos por GeoGebra</i>	52
Figura 7 <i>Interfaz de GeoGebra vista Gráfica con las herramientas de circunferencia</i>	54
Figura 8 <i>Interfaz de la vista gráfica y algebraica de GeoGebra</i>	56
Figura 9 <i>Experiencia de profesores en el uso de GeoGebra</i>	59
Figura 10 <i>Proposición III-1</i>	61
Figura 11 <i>Proposición III-33</i>	62
Figura 12 <i>Proposición IV-2</i>	62
Figura 13 <i>Proposición IV-6</i>	63
Figura 14 <i>Proposición IV-14</i>	63
Figura 15 <i>Proposición IV-15</i>	64
Figura 16 <i>Proposición III-4</i>	65
Figura 17 <i>Proposición III-36</i>	66
Figura 18 <i>Proposición III-5</i>	66
Figura 19 <i>Proposición III-19</i>	67
Figura 20 <i>Representación geométrica del Problema de Pappus</i>	69
Figura 21 <i>Extracción de la raíz cuadrada utilizando el círculo de Descartes</i>	70
Figura 22 <i>Resolución de Descartes de la ecuación cuadrática de la forma $z^2 = az + bb$ utilizando círculo</i>	71

Figura 23 <i>Resolución de Descartes de la ecuación cuadrática de la forma $z^2 = az - bb$ utilizando círculo</i>	72
Figura 24 <i>Círculo resultante del problema de Pappus</i>	76

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Clasificación de planteamientos y problemas propuestos por Euclides.....	61
Tabla 2 Clasificación de planteamientos y demostraciones propuestos por Euclides.	64
Tabla 3 Tarea 1	96
Tabla 4 Tarea 2	98
Tabla 5 Tarea 3	101
Tabla 6 Tarea 4	103
Tabla 7 Tarea 5	105

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos. (Acuerdo 031 de 2007. Artículo 42. Parágrafo 2).

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo final de grado está enmarcado en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Los autores somos estudiantes becados por el Programa Becas Don Carlos Antonio López (BECAL) de Paraguay. Este trabajo final de grado, que es de profundización sobre el “Diseño de tareas profesionales para el estudio de la circunferencia en geometría sintética y analítica, apoyado en GeoGebra” tiene como objetivo general identificar elementos base para el diseño de tareas profesionales para el estudio de la circunferencia mediados por GeoGebra.

En el contexto paraguayo de la enseñanza de las matemáticas, la circunferencia no ha sido tradicionalmente abordada desde la perspectiva sintética, tal como se desarrolla en el libro *Elementos* de Euclides, y analítica, siguiendo las ideas de Descartes. Sin embargo, el uso de software dinámico como GeoGebra permite una integración de ambas aproximaciones, facilitando la visualización, exploración y la manipulación de los conceptos geométricos de manera interactiva. A través de este enfoque, se busca promover, en futuros profesores, una comprensión más profunda y significativa de las propiedades y aplicaciones de la circunferencia.

La creación de entornos de aprendizaje apropiados resulta fundamental para que los futuros docentes adquieran las competencias¹ necesarias para enseñar matemáticas de forma efectiva. En este sentido, Llinares (2019) destaca que los programas de formación deben ofrecer espacios que permitan a los estudiantes en formación involucrarse en prácticas sociales de enseñanza, promoviendo la adquisición de conocimientos y habilidades mediante experiencias directas y procesos de reflexión crítica.

¹ En este trabajo final de grado la competencia alude directamente a las capacidades y habilidades de una persona que son necesarias de desarrollar a través de la formación.

Las tareas propuestas se fundamentan en una metodología que articula la geometría clásica con el pensamiento algebraico y la visualización interactiva, aspectos que son esenciales para la formación de los profesores de matemáticas. Este proceso de diseño ha sido guiado por la necesidad de generar experiencias de aprendizaje que no solo aborden el contenido matemático de manera rigurosa, sino que también fomenten habilidades pedagógicas necesarias para enfrentar los desafíos de la enseñanza actual.

Asimismo, se hace énfasis en la importancia del uso de GeoGebra como una herramienta que no solo facilita el estudio de la circunferencia, en particular, sino que también posibilita la creación de entornos de aprendizaje en los que futuros profesores, puedan formular conjeturas, explorar y validar sus conclusiones de manera visual e interactiva. En este marco, el trabajo tiene como finalidad proporcionar un recurso didáctico que sirva de apoyo en el desarrollo de las competencias tecnológicas y matemáticas en la formación de profesores de secundaria.

A continuación, describimos brevemente el desarrollo del trabajo final de grado y qué compone cada capítulo de este. En el capítulo uno se exponen las generalidades consistentes en la inquietud pedagógica que orienta el trabajo; se evidencia la necesidad de fortalecer la formación de los futuros profesores de matemáticas del Instituto de Formación Docente de Coronel Oviedo, en el departamento de Caaguazú, Paraguay, debido a las carencias en la capacitación en el uso de GeoGebra. Así también, se incluye una sección dedicada a los antecedentes de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la circunferencia en la formación de profesores de matemáticas, el uso de GeoGebra en el estudio de la circunferencia, así como el desarrollo de tareas profesionales en el ámbito de la formación docente. Seguidamente, se presentan los objetivos planteados en el trabajo. Finalmente, en ese capítulo se exponen los aspectos metodológicos que se abordaron. Así, se establece que la metodología fue de corte cualitativo, y

para mayor claridad se dividió en tres subapartados. En primer lugar, se realizó la revisión documental organizada a través de repositorios institucionales y base de datos, con el propósito de recoger la literatura sobre la circunferencia, diseño de tareas, formación de profesores y uso de GeoGebra. La segunda etapa consistió en estudiar, describir y explorar el campo de investigación al cual se ajusta este trabajo y es la Formación del Profesor de Matemáticas (Guacaneme y Mora, 2011). La tercera etapa fue la identificación y organización de tareas profesionales.

Seguidamente, en el capítulo dos, se presenta el marco de referencia que sirvió de base para la profundización del trabajo final de grado. Se describen la formación de profesores de matemáticas y la formación docente en Paraguay, la competencia docente y el enfoque de mirar con sentido, la integración de la teoría y la práctica y la importancia de los entornos de aprendizaje. A continuación, con respecto a GeoGebra, se caracteriza dicha herramienta resaltando su valor en la enseñanza de la geometría sintética y analítica, y destacando su provecho como una herramienta indispensable para la formación de futuros profesores de matemáticas.

Con relación al objeto matemático, la circunferencia, se exploran los diferentes tratamientos desde dos perspectivas históricas: el tratamiento que hace Euclides, basado en sus proposiciones geométricas, y el enfoque de Descartes, más analítico y algebraico. Por último, se describen aspectos sobre el diseño de tareas, empezando con la literatura sobre las tareas profesionales para la formación de profesores, para luego reseñar elementos sobre las características de las tareas con sentido en la formación docente, la relación entre la teoría y la práctica en las tareas profesionales y el enfoque en el diseño de tareas.

En el capítulo tres se encuentran los resultados, inicialmente describimos desde nuestra perspectiva los elementos base para el diseño de tareas, seguidamente, las vivencias de las

experiencias de aprendizaje en las asesorías, para luego presentar las tareas identificadas en el libro *Elementos* de Euclides y las tareas identificadas en el libro *Geometría* de Descartes, para terminar el capítulo con la reformulación y organización de cinco tareas del total identificadas anteriormente.

Para culminar, en el último capítulo se sitúan las conclusiones y reflexiones, mostrando los desenlaces del trabajo final de grado. En particular, se hace una síntesis respecto a los objetivos logrados, las consideraciones sobre lo aprendido a lo largo del desarrollo del trabajo de grado, así como las dificultades encontradas, incluidas las limitaciones, y finalmente los aportes que este proceso nos dejó tanto en el ámbito profesional como en nuestro desarrollo personal.

1 GENERALIDADES

Este capítulo incluye cuatro elementos, a saber: la inquietud pedagógica, los antecedentes que fundamentan el estudio, los objetivos y los aspectos metodológicos que orientan el desarrollo del trabajo. Estos elementos serán fundamentales para reconocer el camino y el propósito de la investigación.

1.1 Inquietud Pedagógica

En este apartado presentamos información en torno a tres asuntos que se interrelacionan, el primero de ellos, es del contexto de la formación de profesores de matemáticas en Paraguay, seguidamente la geometría y la formación de profesores de matemáticas y por último la tecnología y la formación de profesores de matemáticas.

1.1.1 *Contexto de la formación de profesores de matemáticas en Paraguay*

Este trabajo final de grado se enmarca en el campo de la formación de profesores de matemáticas, el cual es muy importante para el mejoramiento de la educación matemática en Paraguay. Los autores de este trabajo final de grado hemos sido formados como profesores de matemáticas, con una base sólida y una perspectiva crítica sobre las necesidades y desafíos de la enseñanza de la disciplina. Nuestro interés por formar futuros profesores de matemáticas no es sólo una continuación natural de nuestra propia formación, sino también una respuesta a las exigencias del entorno laboral en el Instituto de Formación Docente de Coronel Oviedo, capital del Departamento de Caaguazú.

El Departamento de Caaguazú, Paraguay, según el Instituto Nacional de Estadística (INE, 2023) cuenta con una población de 582.630 habitantes, que representa el 7,7% de la población total del país. La distribución de la población por sexo presenta diferencias entre hombres y

mujeres, 51,4% y 48,6%, respectivamente. El ritmo de crecimiento medio anual de la población del Departamento de Caaguazú al 2023 es de 1,10% y experimentará un aumento en el 2024, pues la tasa de crecimiento medio anual será de 1,11% (INE, 2023). Este departamento cuenta con 1.020 instituciones educativas, con 6.820 profesores en aula y 119.782 estudiantes matriculados; distribuidos en los niveles de Educación Inicial (17.664), Educación Escolar Básica (76.564), Educación Media (20.146), Educación Inclusiva (536) (estudiantes con capacidades o necesidades particulares) y Educación Permanente (5.403) y cuenta con tres Institutos Formadores de Docentes de carácter público.

La formación docente inicial representa un pilar fundamental en el desarrollo educativo regional. Este departamento, conocido por su rica diversidad cultural y geográfica, enfrenta desafíos en el ámbito educativo, especialmente en áreas rurales. Esto implica una formación docente que prepare a los educadores para enseñar matemáticas de manera inclusiva y contextualmente relevante que atienda a las particularidades descritas.

El diseño curricular de la nueva Formación Inicial de Docentes del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2020) se caracteriza por su enfoque innovador y flexible, destacando un currículo abierto que permite a las instituciones formadoras adaptar contenidos y metodologías a contextos locales específicos. Prioriza un aprendizaje centrado en los estudiantes, enfocándose más en la metodología de enseñanza que en el contenido mismo, promoviendo así el principio de isomorfismo (uno tiende a enseñar de la misma manera como le han enseñado) en la educación, es decir, refuerza el concepto de que los métodos de enseñanza deben ser reflexivos y culturalmente sensibles. Este currículo integra teoría y práctica, fomentando un aprendizaje activo y reflexivo. Realza la importancia del aprendizaje colaborativo y las habilidades para la vida, reconociendo al profesor como una persona integral. Incentiva un enfoque exploratorio y

experimental en el aprendizaje, preparando a los profesores para una formación continua y una transición fluida hacia grados académicos superiores, asegurando así una formación integral y adaptativa para los futuros educadores.

Podemos ver que la comprensión y aplicación de estas diferentes concepciones sobre el aprendizaje son esenciales, como lo expresa Malagón (2018). Los principios de la nueva formación docente, como el currículum abierto y contextualizado, el enfoque en el aprendizaje del estudiante, y la conexión entre teoría y práctica, se alinean con la idea de adaptar las prácticas pedagógicas que abarquen diferentes perspectivas de aprendizaje. Esto implica preparar a los profesores para enseñar matemáticas de manera que se adapten a los diversos estilos y necesidades de aprendizaje de los estudiantes, promoviendo un entorno inclusivo y efectivo para todos.

Es también importante recalcar que aplicar las ideas de Planas (2003) en la formación de profesores de matemáticas en Paraguay implica una atención consciente a las dinámicas sociales y de poder en el aula, con un enfoque en crear un ambiente de aprendizaje inclusivo y equitativo que favorezca el éxito de todos los futuros profesores.

La formación docente en Caaguazú se enfoca en preparar a los educadores para que atiendan eficazmente las necesidades de una población estudiantil diversa, poniendo énfasis a métodos pedagógicos que promuevan la inclusión y la equidad. Las instituciones de formación docente, tanto públicas como privadas, están comprometidas con la mejora continua de sus programas, integrando tecnologías educativas y estrategias de enseñanza adaptativas. Este enfoque busca no solo mejorar la calidad de la educación en el departamento, sino también fortalecer la identidad local y responder a las dinámicas sociales y económicas de la región. A pesar de los retos, como la limitación de recursos y la necesidad de una mayor conectividad, el

Departamento de Caaguazú continúa esforzándose por avanzar en la formación de profesores capaces de inspirar y guiar a las futuras generaciones. Esto se ajusta con el enfoque curricular de la Formación Docente del MEC (2020) en preparar educadores para una población estudiantil diversa, utilizando métodos pedagógicos que promuevan la inclusión y la equidad. Así mismo, en el Departamento de Caaguazú se reconoce la relevancia de adaptar la enseñanza a las realidades locales, integrando tecnologías y estrategias adaptativas para abordar las dinámicas sociales y económicas específicas de la región.

El Instituto de Formación Docente (IFD) de gestión oficial de Coronel Oviedo, ofrece cursos de formación docente inicial y continua a fin de responder a los desafíos pedagógicos del contexto educativo en el que se halla inmerso. Así también, responde a acuerdos interinstitucionales con las Supervisiones de apoyo técnico pedagógico, responsables de realizar el acompañamiento a las instituciones educativas de los distritos de Coronel Oviedo, Carayaó, Nueva Londres, La Pastora, Santa Rosa del Mbutuy, San Joaquín, Yhú, R.I.3 Corrales, San José de los Arroyos, Dr. Cecilio Báez, Simón Bolívar, Dr. J. E. Estigarribia, Raúl Arsenio Oviedo, José Domingo Ocampos.

La institución cuenta con 352 estudiantes en la formación docente inicial, que son aquellos que están iniciando la carrera de docencia en Paraguay; estos están distribuidos en el Profesorado de 1.º y 2.º Ciclo de la Educación Escolar Básica, Profesorado del 3.º Ciclo y Media en el área de Ciencias Sociales, Profesorado del 3er Ciclo y Media en el área de Lengua y Literatura y Profesorado del 3.º Ciclo y Media en el área de Matemáticas; este último será objeto de estudio en el trabajo de grado.

Los estudiantes en la formación como futuros profesores de matemáticas del IFD tienen condiciones de vida muy diversas; algunos ya son profesionales de otras áreas (como

Administración de Empresas, Contaduría Pública), y otros estudian otras carreras a la par (como Ingeniería Civil, Electrónica, entre otras). También hay estudiantes que dependen de la manutención de los padres que van desde agricultores hasta funcionarios públicos; muchos de ellos son de lugares distantes que vienen a vivir a la ciudad de Coronel Oviedo para poder sobrellevar sus estudios.

Planas (2003) subraya la importancia de reconocer y abordar la diversidad en el aula de matemáticas. En el IFD, esta pluralidad se manifiesta en estudiantes con diferentes carreras previas, condiciones socioeconómicas y orígenes geográficos diversos. Comprender cómo estas diferencias impactan en el estatus percibido y las interacciones en el aula es crucial para una enseñanza efectiva. Así, la misma autora (Planas, 2003) destaca cómo el estatus dentro del aula puede afectar la participación y el aprendizaje de los estudiantes; refiere que donde hay variados trasfondos y experiencias previas, es probable que se desarrollen dinámicas complejas de estatus que pueden influir en quién participa más activamente, quién se siente seguro compartiendo ideas y quién puede sentirse marginado o menos competente.

Los principios orientadores que sustentan el trabajo final de grado como valores transversales del proceso de capacitación son la empatía y la responsabilidad; estos serán la guía para el desarrollo de la ruta de aprendizaje propuesta, conjugados con los valores institucionales del IFD Coronel Oviedo: la honestidad, la responsabilidad, el respeto, la tolerancia, la equidad. La justicia curricular aboga por una educación inclusiva y equitativa que reconozca y valore la diversidad (Torres, 2013). Los valores mencionados del IFD Coronel Oviedo refuerzan este enfoque, promoviendo un ambiente de aprendizaje en el que se respeta y valora a cada individuo, lo que es esencial para una educación justa y equitativa. La combinación de estos valores con los

principios de justicia curricular facilita la creación de un entorno educativo que no solo transmite conocimientos, sino que también fomenta un sentido de comunidad y respeto mutuo.

La institución cuenta con dos laboratorios de informática equipados con un servidor y 20 computadoras en cada uno, también de conexión a internet, proyector, pizarra digital, además, las salas de clases cuentan con conexión a internet y el 50% de los estudiantes cuentan con notebook y la totalidad con smartphone, eso contribuye para que el presente trabajo sea viable en su futura aplicación.

Algunos datos empíricos recabados por medio de una encuesta sobre la posible población de estudio mostraron que el 92% conoce la herramienta GeoGebra, el 80% ha utilizado ocasionalmente la herramienta circunferencia, el 44% de ellos se sienten cómodos al utilizar GeoGebra, pero el 56% de la población no está bien familiarizada con respecto al uso y diseño de materiales didácticos con GeoGebra. Eso se debe a que el 96% nunca recibió capacitación en el uso de GeoGebra como herramienta apoyada para el proceso de enseñanza – aprendizaje. El 100% está predispuesto a recibir una capacitación sobre el uso de esta herramienta. Otro dato no menor es que el 80% considera que el software GeoGebra es efectivo como una herramienta para enseñar las matemáticas. En cuanto a las dificultades que encuentran sobre el uso del programa, algunas de sus manifestaciones fueron: poco conocimiento, conexión a internet, experiencia en el uso de esta, correcta utilización, falta de material en las instituciones y oportunidades de capacitación sobre el uso de GeoGebra.

Guacaneme y Mora (2014) afirman que el área de conocimiento profesional para quienes forman a profesores de Matemáticas abarca varios aspectos clave. Estos incluyen el análisis de las creencias, perspectivas y conceptos que tienen los formadores sobre la enseñanza de matemáticas; las habilidades y competencias que estos formadores poseen; la interacción entre

teoría y práctica en su enseñanza, o, en otras palabras, cómo se equilibra la base teórica con el conocimiento práctico, o cómo se relacionan sus palabras con sus acciones. Además, se considera importante el aprendizaje obtenido a través de la práctica reflexiva y cómo la reflexión actúa como una herramienta para mejorar el aprendizaje en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

1.1.2 La geometría y la formación de profesores de matemáticas

La inquietud pedagógica que motiva este trabajo final de grado surge del reconocimiento de la necesidad de mejorar las prácticas de enseñanza de la geometría, específicamente en el estudio de la circunferencia. Este interés está estrechamente vinculado al rol que desempeñamos en la formación de nuevos profesores en matemáticas, un proceso que requiere no solo la transmisión de conocimientos matemáticos, sino también el desarrollo de competencias didácticas adaptadas a las demandas actuales.

En este sentido, el trabajo propuesto no solo busca aportar al campo de la didáctica de la matemática, sino también contribuir al desarrollo profesional de los futuros profesores, fortaleciendo su capacidad para integrar tecnologías en la enseñanza de la geometría sintética y analítica. De esta manera, se espera que las tareas profesionales diseñadas mejoren la comprensión del objeto matemático e impulsen una práctica pedagógica innovadora y reflexiva en los contextos educativos donde se desempeñen estos futuros maestros.

La enseñanza de la geometría sintética y analítica constituye un pilar fundamental en la formación matemática de los futuros educadores, su impacto se refleja directamente en la comprensión de los estudiantes. En este entorno, el presente trabajo de grado se sumerge en la relevancia crucial de diseñar y utilizar materiales didácticos específicos para la enseñanza de la

geometría sintética y analítica, centrado en la circunferencia en el profesorado de Matemáticas del Instituto de Formación Docente de Coronel Oviedo.

Es importante considerar el estudio de la geometría sintética y analítica, específicamente la geometría de la circunferencia, como un aporte a la educación de los maestros en formación, un aspecto que tiene relación con cómo el profesor aplica ese saber, en la medida en que tanto su uso en el aula (discurso matemático), como los problemas y los recursos que emplea, permiten que los alumnos asignen significado a las ideas matemáticas. (Gavilán et al., 2007).

1.1.3 La tecnología y la formación de profesores de matemáticas

Para enfocar el trabajo final de grado, hemos considerado aspectos que convergen en la importancia del diseño de tareas profesionales para la enseñanza de la geometría sintética y la geometría analítica, centrándonos específicamente en la circunferencia, con el apoyo de software GeoGebra.

La motivación genuina para poder realizar este trabajo final de grado radica en la oportunidad que tenemos de contribuir en la ampliación del conocimiento sobre el diseño de tareas matemáticas, apoyadas en la herramienta GeoGebra. Además, nos interesa el uso de la tecnología en aula. Siempre que se adecue al contexto y al contenido a desarrollar en aula, esta será un aliado para el logro de un aprendizaje significativo. Estamos seguros de que este trabajo podrá ayudar a los futuros profesores de Matemática a mejorar la enseñanza.

Este trabajo final de grado aborda el empleo del software GeoGebra con el propósito de optimizar la enseñanza de la geometría sintética y analítica. Recalamos la importancia de que los futuros profesores de matemáticas incorporen nuevas estrategias didácticas, incluyendo el uso de la computadora, notebook o celular apoyados en GeoGebra para crear una geometría dinámica que contribuya a lograr un mejor aprendizaje de los alumnos.

Por esta razón, se propone diseñar tareas profesionales para la enseñanza de la circunferencia, desde perspectivas de geometría sintética y analítica con apoyo en el software GeoGebra en el profesorado en Matemáticas. GeoGebra es un programa informático que permite crear y manipular objetos geométricos, así como realizar cálculos algebraicos y gráficos. El uso de GeoGebra puede facilitar la comprensión y el interés de los estudiantes por la circunferencia, al permitirles visualizar, explorar y experimentar con sus propiedades y aplicaciones de forma interactiva y lúdica, que se conoce como geometría dinámica.

El Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) considera fundamental el uso de recursos educativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje como instrumentos que coadyuven al profesor en favorecer los escenarios para que el estudiantado pueda aprovechar al máximo las propuestas programadas (MEC, 2020). Estos recursos son elementos primordiales e imprescindibles para el desarrollo de las competencias matemáticas, favoreciendo de cierto modo la interrelación profesor-estudiante.

En Paraguay, a pesar de los considerables esfuerzos llevados a cabo por el MEC, no se ha logrado revertir el papel del profesor en el salón de clases, que hasta ahora se enfoca en una perspectiva muy tradicional como portador de saberes. Las experiencias exitosas que se han planteado en la escuela han surgido de profesores con visión innovadora, cuyo papel protagónico ha sido fundamental para generar cambios en la práctica pedagógica en el aula (MEC, 2004). La escasez de variedad de técnicas pedagógicas y estrategias de evaluación podrían constituir en su conjunto en un impedimento para el fomento de habilidades y la auténtica evaluación del rendimiento de los alumnos en la práctica de estas.

El avance tecnológico en la educación ha sido notable en las últimas décadas, y la pandemia en Paraguay ha acelerado la necesidad de utilizar medios alternativos de enseñanza, lo

que ha requerido que los profesores realicen cambios en su labor. La actitud del futuro profesor de Matemáticas hacia la tecnología, en particular hacia GeoGebra, es fundamental para impulsar la innovación en este campo tan importante.

Este trabajo final de grado pretende conseguir causar impacto en el futuro profesor de matemáticas para que desarrolle estrategias y le posibilite el uso de herramientas que le ayude a proyectar en su práctica como profesor.

1.2 Antecedentes

Con respecto a la inquietud presentada anteriormente, hicimos una revisión documental de investigación que conciben aspectos de la formación inicial de profesores de matemáticas sobre la circunferencia, con GeoGebra, en geometría sintética y en geometría analítica. Revisamos en total 90 trabajos de grado y posgrado de universidades públicas y privadas, así también como publicaciones en revistas. De estas seleccionamos 18 que se acercan de manera más explícita a lo que pretendemos con esta investigación, y las clasificamos en los siguientes cuatro grupos que forman los antecedentes del presente estudio.

1.2.1 Enseñanza de la circunferencia en la formación de profesores de matemáticas

En este apartado presentamos 5 investigaciones que abordan el círculo y la circunferencia en la formación de profesores de matemáticas.

En el artículo de Cerizola et al (2006) titulado “*Desarrollo del pensamiento geométrico en el futuro profesor de matemáticas*” aborda el diseño de estrategias pedagógicas para la formación de futuros profesores de matemática, con un énfasis particular en la enseñanza de la geometría sintética a través del análisis histórico y matemático del "Problema de Apolonio". Este trabajo surge en el contexto de la Universidad Nacional de San Luis y tiene como objetivo

fomentar un pensamiento geométrico profundo y creativo. El estudio se desarrolla a partir de una propuesta metodológica centrada en el uso de un "hilo conductor histórico". Este enfoque organiza los contenidos de geometría en torno a un tema o problema central, en este caso, el "Problema de Apolonio", permitiendo una integración de aspectos históricos, teóricos y prácticos. Se utiliza la transformación geométrica denominada "inversión" como herramienta principal para resolver problemas relacionados con tangencias y circunferencias. Este método no solo favorece la resolución de problemas complejos de manera elegante, sino que también estimula el pensamiento deductivo y la imaginación geométrica en los estudiantes.

Los resultados más destacados encontrados son: una reorganización más coherente y jerárquica de los conocimientos geométricos, la resolución de problemas clásicos, como el "Problema de Apolonio", de manera accesible y con herramientas visuales, el desarrollo de un pensamiento geométrico distinto, basado en la imaginación y la conexión entre diferentes áreas matemáticas y la integración de elementos históricos y conceptuales que enriquecen la formación matemática de los futuros docentes.

El trabajo concluye que la implementación de este enfoque contribuye significativamente a la formación de los futuros profesores de matemática, al brindarles herramientas conceptuales y prácticas que trascienden el aprendizaje de teorías formales, permitiéndoles generar un aprendizaje más dinámico y reflexivo en sus futuros estudiantes. Además, se resalta la importancia de contextualizar el aprendizaje matemático en problemas históricos, lo que potencia la comprensión de la evolución de las ideas matemáticas y su aplicabilidad en la enseñanza moderna.

Por su parte, Akyuz, (2016) en su artículo "Prácticas matemáticas en un entorno tecnológico: un experimento de investigación de diseño para la enseñanza de las propiedades del

círculo”, describe las prácticas matemáticas observadas en un curso universitario de formación docente enfocado en el tema del círculo. El curso utilizó un entorno de geometría dinámica que influyó en el desarrollo y la naturaleza de las prácticas matemáticas. Para analizar las interacciones sociales dentro del aula, se empleó el modelo de argumentación de Toulmin. Los resultados muestran tres prácticas matemáticas que emergieron de forma secuencial, cada una con un nivel creciente de complejidad, que son las siguientes:

Exploración empírica: en esta etapa inicial, los estudiantes utilizan el software para explorar las propiedades de la circunferencia de manera experimental, se centran en observar patrones y relaciones geométricas mediante la manipulación de construcciones dinámicas. Esta etapa fomenta la generación de conjeturas basadas en observaciones visuales.

Justificación informal: en la segunda práctica, los estudiantes intentan justificar las propiedades observadas utilizando explicaciones cualitativas e informales. Aquí, comienzan a conectar sus observaciones empíricas con conceptos matemáticos, desarrollando argumentos basados en su intuición geométrica y en las herramientas tecnológicas disponibles.

Formalización y generalización: en esta práctica más avanzada, los estudiantes progresan hacia un razonamiento formal, utilizando definiciones matemáticas y teoremas para justificar y generalizar sus resultados. También son capaces de construir argumentos más rigurosos, apoyados en evidencia matemática sólida y representaciones gráficas precisas.

Este análisis es significativo porque aporta un campo de conocimiento en desarrollo sobre la enseñanza apoyada por tecnología en contextos sociales, un área que requiere más estudios.

Una tercera investigación referenciada en este agrupamiento es la de Abaurrea et al. (2017), titulada “Momentos de exploración e ilustración en la determinación de circunferencias en futuros docentes de educación secundaria”, en la que se analiza la actividad matemática de

estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria, especialidad en Matemáticas, relacionada con una situación didáctica destinada al estudio de circunferencias. En las tareas a resolver por los alumnos se estudian métodos de geometría analítica para la representación de circunferencias y propiedades de estas figuras mediante una metodología de exploración e ilustración (Abaurrea et al, 2017).

Primero se reconocen los saberes previos de los alumnos y luego se les proporcionan herramientas en diversos medios para consolidar y expandir estos saberes. El proceso de estudio crece mediante la utilización de dos materiales: el «lápiz y papel» y el software dinámico GeoGebra.

El cuarto trabajo referenciado en este apartado es la de Dockendorff, y Solar (2018) en su artículo “*ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra*” (Integración de las TIC en la formación inicial de profesores de matemáticas y su impacto en la visualización: el caso de GeoGebra). Los autores analizan el impacto de la integración de las TIC en la formación de profesores y en las habilidades de visualización matemática. En particular, se examina cómo el uso del software GeoGebra en la enseñanza secundaria fomenta el aprendizaje matemático y transforma las percepciones de los futuros profesores sobre la enseñanza de las matemáticas.

Se destaca también que los applets dinámicos de GeoGebra promueven procesos como la formulación de conjeturas y la relevancia de las representaciones visuales. Además, se observó un cambio en las rutinas escolares con la incorporación de la tecnología. Los autores resaltan la importancia de la visualización como clave de competencia, analizando las implicaciones de una integración temprana de las TIC en la formación docente y su impacto en el desarrollo del conocimiento pedagógico y tecnológico.

Por su parte, Li (1997) en su artículo “*Angles, Lines and Circles: An Alternative Approach to Teaching Geometry*” (Ángulos, líneas y círculos: un enfoque alternativo para la enseñanza de la geometría), propone una crítica a la forma tradicional en la que se han enseñado las matemáticas, centrada en la demostración como el objetivo principal. Se reconoce que este enfoque ha sido predominante, pero ahora hay un creciente consenso entre los educadores de que las matemáticas deben presentarse de manera más dinámica, útil y humanística. Este cambio está respaldado por los estándares curriculares del Consejo Nacional para los Profesores de Matemáticas (NCTM), que incluyen la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento y las conexiones.

El autor destaca que estos cambios no solo afectan lo que se enseña en matemáticas, sino también cómo se enseña, sugiriendo un enfoque más investigativo apoyado por el uso de software educativo. En su experiencia, el uso de programas como *Geometer's Sketchpad* facilita la enseñanza de la geometría de manera interactiva y exploratoria, útil tanto para principiantes como para niveles más avanzados. Aunque se centra en dos casos específicos, el autor señala que los principios y métodos que utilizan pueden adaptarse a diferentes programas y situaciones en el currículo de la escuela secundaria y más allá.

Los estudios mencionados anteriormente tienen una similitud destacada entre los trabajos de Cerizola et al. (2006), Akyuz (2016), Abaurrea et al. (2017), Dockendorff y Solar (2018) y Li (1997) es el interés común en renovar la enseñanza de la geometría mediante metodologías que promuevan el pensamiento crítico y el uso de tecnologías. Todos los estudios valoran la importancia de integrar herramientas tecnológicas como GeoGebra o Geometer's Sketchpad para explorar conceptos geométricos, fomentar la visualización matemática y conectar diferentes representaciones de manera interactiva. Además, comparten el objetivo de enriquecer la

formación de futuros profesores, ofreciendo estrategias innovadoras que trascienden el aprendizaje tradicional centrado exclusivamente en la memorización de teorías.

Sin embargo, también hay puntos de separación entre los estudios en términos de niveles de enseñanza y enfoques metodológicos. Mientras que Cerizola et al. (2006) priorizan un abordaje histórico y conceptual a través del "hilo conductor" del Problema de Apolonio, destacando el uso de la transformación de inversión como herramienta clave en la enseñanza de la geometría sintética., el estudio de Akyuz (2016) es más teórico: se sitúa en el entorno universitario mientras explora las prácticas matemáticas emergentes. El estudio de Li (1997) adopta una perspectiva crítica hacia la enseñanza de la geometría tradicional y promueve un enfoque más investigativo. Esto contrasta marcadamente con Dockendorff y Solar (2018) que destacan específicamente el impacto de las TIC en la formación inicial de profesores y en la visualización matemática. Aunque es poco probable que Akyuz (2016) pudiera haberse referido a límites que claramente alterarían lo que se espera convencionalmente, excepto si se consideran aplicaciones no convencionales.

En conjunto, los estudios muestran una tendencia hacia el uso de herramientas tecnológicas para hacer más accesibles los conceptos abstractos en la formación de profesores, pero difieren en la forma en que se aplican estas herramientas.

1.2.2 Estudios sobre la enseñanza de la circunferencia con apoyo de GeoGebra

En este apartado presentamos cuatro investigaciones que se refieren al círculo y la circunferencia en GeoGebra.

La primera investigación es la desarrollada por Bonaviña et al. (2021) titulada "Modelización matemática con GeoGebra: colocación de circunferencias y esferas". En esta se relata una experiencia con alumnos de secundaria en la que se presenta un problema compuesto

por subproblemas que necesitan modelización matemática. El desafío es determinar cuántas bolas se pueden colocar en un ortoedro y explorar las diferentes disposiciones según los espacios entre las bolas.

En una primera fase, los estudiantes abordan el problema en dos dimensiones y luego lo trasladan a tres dimensiones, con la orientación del profesor y el uso de herramientas de GeoGebra.

Como conclusión, se destaca que este tipo de actividades contribuyen significativamente al desarrollo de competencias claves como la del desarrollo de habilidades para interpretar, representar y resolver problemas matemáticos en contextos reales. Así también la competencia digital con la utilización de herramientas como GeoGebra para modelizar, analizar y visualizar situaciones matemáticas.

La segunda investigación referenciada en el agrupamiento de este apartado es la de Fontes y Fontes (2010) en su artículo *"El Software GeoGebra como herramienta en las clases de geometría"* aborda la implementación del software GeoGebra como una herramienta educativa para innovar la enseñanza de la geometría en el nivel medio. Se propone el uso de este software como una alternativa a las metodologías tradicionales, destacando su capacidad para facilitar un aprendizaje dinámico y exploratorio en los estudiantes. El trabajo se enfoca en el desarrollo de talleres destinados a docentes en formación inicial y continua, promoviendo el uso de tecnologías de información y comunicación (TIC) en la enseñanza de la matemática.

La metodología sigue cuatro etapas, la primera es la de discusión inicial sobre la incorporación de TIC en la educación matemática, seguida de presentación y exploración de las funciones básicas de GeoGebra, la tercera es la de resolución progresiva de tareas didácticas con

aumento en su complejidad y por último la de evaluación del taller basada en las experiencias de los participantes.

El artículo destaca que la incorporación de GeoGebra en las clases de geometría fomenta un aprendizaje activo y significativo al transformar a los estudiantes en investigadores de conceptos geométricos. Este enfoque mejora la interacción entre docentes y alumnos al proporcionar un entorno dinámico que facilita la exploración y la construcción del conocimiento. Además, permite una comprensión más profunda de conceptos geométricos complejos mediante el uso de representaciones visuales e interactivas. Finalmente, GeoGebra contribuye a la profesionalización de los docentes al integrar herramientas tecnológicas como un componente esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, promoviendo una educación matemática más innovadora y efectiva.

.Por su parte, la tesis de maestría, presentado por Echevarría (2015), titulada “Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria”, tuvo como objetivo analizar los resultados que se tienen en los aprendizajes al abordar un problema sobre circunferencia desde la geometría sintética y geometría analítica. El estudio se fundamenta en la Teoría del Juego de cuadros, en la que se detallan etapas que los alumnos deben atravesar para que las interacciones entre los cuadros faciliten el avance de sus saberes.

Como aspecto metodológico se consideran aspectos del Estudio de Casos. Con esta investigación se logró identificar una actividad sobre circunferencia que podía ser abordada desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica. En cada uno de dichos cuadros, se tendría que hacer uso de procedimientos propios particulares; así, mientras que desde la

geometría sin coordenadas prevalecerían las construcciones exactas, desde la geometría analítica, la solución del problema se basaría en resolver sistemas de ecuaciones (Echevarría, 2015).

Así mismo, la utilización del GeoGebra posibilitó que los alumnos pudieran verificar los resultados alcanzados en la geometría sintética y analítica, consiguiendo que se enfocaran en los conceptos fundamentales y no se distrajeran con los cálculos. La experiencia facilitó que los alumnos establecieran vínculos entre los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica.

Finalmente, el último trabajo analizado en este apartado es el desarrollado por Edwards y Jones (2006) “*Linking geometry and algebra with GeoGebra*” (Vinculando geometría y álgebra con GeoGebra). Los autores resaltan que GeoGebra es un software que integra geometría y álgebra en sus representaciones. Funciona como un sistema de geometría dinámica, pero también permite observar la relación entre figuras geométricas y sus representaciones algebraicas.

Las ecuaciones o coordenadas pueden modificarse en la ventana de álgebra, lo que produce un cambio inmediato en la figura geométrica. Además, escribir una ecuación en la interfaz genera su representación visual en la ventana de geometría. GeoGebra tiene el potencial de transformar las actividades tradicionales, promoviendo un pensamiento de alto nivel y motivando a los estudiantes a explorar más allá de las clases escolares.

Los estudios revisados tienen varios puntos en común sobre el uso de GeoGebra en la enseñanza de la circunferencia y otros temas junto con la formación de profesores de matemáticas. En primer lugar, todos los autores mencionados opinan que, mediante el uso de GeoGebra, se logra una mejora significativa en el proceso de entender los conceptos de matemáticas, Edwards y Jones (2006), expresan que GeoGebra combina “sin problemas” ambos tipos de conocimiento: álgebra y geometría, haciendo así que sea más sencillo visualizar las

ecuaciones geométricas. Echevarría (2015) y Bonaviña et al. (2021) sostienen que las posibilidades de visualización dinámica y modelización matemática ofrecen a los estudiantes “una visión más clara” de los problemas geométricos, ya sea en dos o tres dimensiones.

Por otro lado, existen puntos de distancia en la manera en que los estudios abordan el uso de GeoGebra y su integración en las clases de matemáticas. Mientras que Bonaviña et al. (2021), se enfocan más en cómo los estudiantes de secundaria pueden utilizar GeoGebra para resolver problemas prácticos y explorar disposiciones geométricas en tres dimensiones. Además, Echevarría (2015) presenta un enfoque más teórico, en el cual los estudiantes investigan cómo usar GeoGebra a partir de dos marcos conceptuales: la geometría sintética y la geometría analítica. Estas diferencias metodológicas reflejan la diversidad en la implementación de GeoGebra, dependiendo de los objetivos pedagógicos y el nivel educativo en el que se emplea.

1.2.3 GeoGebra y la formación de profesores de matemáticas

En esta sección presentamos cinco investigaciones que tratan del uso de GeoGebra y la formación de profesores de matemáticas.

El primer estudio que analizamos es el de García-Lázaro y Martín (2023), titulado “Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra”, que tuvo como objetivo conseguir que el futuro profesor domine las técnicas relacionadas con las transformaciones geométricas a la vez que mejore la competencia digital, matemática y la didáctica según el modelo *Technological Pedagogical Content Knowledge* (Modelo TPACK). En ese estudio se utilizó el Software *GeoGebra Classic*, el objetivo era que los estudiantes en proceso de formación adquirieran habilidades para impartir conceptos geométricos tales como la simetría axial, central, inversión, rotación, traslación y homotecia. Se aplicó un diseño pre-experimental con una metodología mixta para una muestra de 68 participantes pertenecientes a la

asignatura de Matemáticas y su didáctica III del Grado en Educación Primaria de la Universidad Rey Juan Carlos de Ecuador, matriculados durante el curso 2021/2022 (García-Lázaro y Martín, 2023).

En este estudio se encontraron resultados muy relevantes. Con respecto al problema del contenido concerniente con la geometría, se les solicitó que evaluaran a través de una pregunta dicotómica, determinando si este era complicado, sencillo o incomprensible. La moda señaló que los estudiantes consideran los contenidos matemáticos que han visto hasta ahora como difíciles o muy difíciles. El 74,2% de los encuestados afirmaron con una valoración media de 4 puntos sobre 5 que deberían estudiar más, al menos en el momento de la encuesta, y 29% afirmó no entender nada. En cuanto a la percepción de la formación, más de la mitad entienden que en el plan de formación de su profesorado se precisa que la didáctica de las matemáticas tenga más horas destinadas.

Otro estudio, presentado por João y Ovigli (2023), titulado “Empleo del GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática”, elaborado en Sumbe, Angola, tuvo como objetivo proponer procedimientos didáctico-metodológicos que contribuyeran al proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de ecuaciones de las cónicas (elipses) con el empleo del software GeoGebra en la disciplina Geometría Analítica, considerando el rol fundamental de las tecnologías en el presente. El estudio fue eminentemente cualitativo. Se aplicó un cuestionario a los profesores y estudiantes seleccionados; además, una entrevista a estos últimos. Estos evidenciaron que GeoGebra contribuyó de forma positiva al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos referidos a la elipse, teniendo en cuenta que se comprobó que se torna más comprensible el estudio de dichos contenidos, vinculando de forma más efectiva la teoría con la práctica de la

matemática. Se reconoció la necesidad de continuar profundizando en el empleo de este software para el tratamiento didáctico-metodológico de otros temas de interés en la Geometría (João y Ovigli, 2023).

Los resultados del estudio demostraron la viabilidad de incorporar tecnologías informáticas, en particular el software GeoGebra, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica. Esto se logró teniendo en cuenta los procedimientos didáctico-metodológicos propuestos, facilitando su implementación en la práctica pedagógica en el contexto de la formación de estudiantes en la Enseñanza de las Matemáticas.

Un tercer estudio presentado en este apartado es el de Ortiz (2020), en su conferencia titulada “Inmersión del software GeoGebra en la formación inicial de futuros profesores”, en el marco del II Congreso de Internacional de Educaciones, Pedagogías y Didácticas, realizado por la Universidad Tecnológica y Pedagógica de Colombia, en la ciudad de Tunja, Colombia. Se presentó la experiencia del uso del software GeoGebra como mediador en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura Geometría Euclídea, en el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad Seccional Duitama, durante el semestre II del año 2019.

El objetivo del estudio fue fomentar espacios oportunos para la inmersión de herramientas tecnológicas desde la formación inicial del futuro profesor de matemáticas, contribuyendo a la apropiación de tecnologías efectivas, en este caso, de un software de geometría dinámica. El uso de GeoGebra en la actividad académica se llevó a cabo a partir de la mitad del semestre, para prevenir que el software se constituyera como objeto de estudio, y llegara a descuidarse el aprendizaje de los contenidos de la asignatura; se destaca la evidente participación y motivación de los estudiantes en el trabajo individual y colaborativo, con la apropiación de nociones

geométricas básicas, aspectos del razonamiento en geometría, estudio de figuras geométricas y movimientos en el plano, dando paso a que el profesor en formación lograra proponer procedimientos en la solución de problemas, planteando razonamientos que se aproximen al rigor de las demostraciones (Ortiz, 2020).

Otro trabajo de este grupo es el desarrollado por González (2014) titulado “Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra”, realizado en Santa Clara, Cuba, en la Universidad de Ciencias Pedagógicas Félix Varela Morales, con estudiantes del profesorado de Matemática-Física. Este trabajo muestra una experiencia de empleo del programa GeoGebra en la educación inicial de profesores. Su objetivo era impulsar la profesionalización de los futuros profesores, vinculando los contenidos geométricos de las distintas disciplinas con los contenidos del nivel para el que se están preparando. Se propuso, además, modelos de comportamiento que se pudieron examinar durante la práctica educativa y el trabajo profesional futuro.

Así también, se hizo referencia a las consideraciones teóricas que dieron lugar a la experiencia y el análisis del uso de GeoGebra que brinda muchas posibilidades para ser utilizado en la formación inicial de profesores.

En otro estudio, presentado por Cotic (2012) con el título de “GeoGebra en la formación docente”, realizado en el Instituto de Formación Docente, de Buenos Aires, Argentina, se presenta una experiencia de formación de un conjunto de profesores de matemáticas que se involucran en un curso de GeoGebra, con el propósito de transferir sus conocimientos específicos y metodológicos a los alumnos. Se presentaron algunos ejemplos de actividades secuenciales sobre la profundización en el estudio de las transformaciones en el plano y diseñadas por los futuros profesores para sus prácticas pedagógicas con alumnos de nivel secundario

Se pudo verificar que el uso de las tecnologías y el empleo de metodologías adecuadas en el aprendizaje de contenidos matemáticos permite a los alumnos-futuros profesores, desarrollar nuevas competencias, como la digital, resolución de problemas, comunicativa y resolución de problemas, que le permitirán incorporar recursos y herramientas informáticas adecuadas a los conocimientos matemáticos que deseen lograr en su actividad profesional (Cotic, 2012).

Los estudios descritos en este apartado exponen varios puntos de concordancia con respecto a la formación de profesores de matemáticas y el uso de GeoGebra. Primero, todas las investigaciones destacan la trascendencia del uso de GeoGebra como una herramienta eficaz para mejorar la enseñanza de conceptos geométricos, como así también las transformaciones geométricas y la geometría analítica. Además, subrayan el papel de GeoGebra para desarrollar habilidades en el uso de recursos tecnológicos en los futuros profesores, en correspondencia con las demandas existentes de la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, hay puntos de distancia entre los estudios en cuanto al enfoque y el contexto de la aplicación de GeoGebra. Mientras que García-Lázaro y Martín (2023) se enfocan en transformaciones geométricas en un contexto de educación primaria y utilizan un diseño pre-experimental, el estudio de João y Ovigli (2023) se orienta hacia la geometría analítica y la formación en educación superior, adoptando un enfoque cualitativo. De igual manera, estudios como el de González (2014) y Ortiz (2020) se ajustan en diferentes niveles y enfoques en la formación docente, destacando el uso de GeoGebra como mediador en la enseñanza, pero con variaciones en la profundidad de los contenidos abordados y el contexto en el que se implementan. Mientras que unos estudios hacen énfasis en la inmersión tecnológica durante la formación inicial, otros se centran más en la vinculación de las prácticas docentes con las competencias profesionales futuras.

Estos puntos en común y diferencias muestran que, aunque GeoGebra es una herramienta ampliamente valorada en la formación de profesores de matemáticas, su implementación varía según el nivel educativo, los contenidos específicos abordados y los objetivos pedagógicos en cada estudio.

1.2.4 Tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas

En este apartado presentamos cuatro investigaciones que tratan del conocimiento especializado de la formación de profesores de matemáticas.

El primer estudio que analizamos es el realizado por Aké y López-Mojica (2020), con el título “Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de Matemáticas”. La investigación, realizada en México, sugiere añadir tareas profesionales en la línea de la formación de profesores de matemáticas. Dada la diversidad de posturas teórico – metodológicas, presentes en la Didáctica de la Matemática, para articular las tareas profesionales, se configura un esquema general que considera tres elementos importantes: un referente teórico, el estudio del contenido matemático desde las investigaciones y una lógica de implementación durante el proceso de instrucción (Aké y López-Mojica, 2020).

El tipo de tareas profesionales que precisan plantearse durante la formación de profesores deben ser situaciones vinculadas a su práctica o futura práctica educativa y guiadas teóricamente por los resultados de las investigaciones para promover el desarrollo de sus conocimientos y competencias (Aké y López-Mojica,2020).

El segundo estudio analizado es el de Pochulu, Font y Rodríguez (2016), titulado "*Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas*" se enfoca en el desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria, explorando

cómo el diseño, implementación y rediseño de secuencias de tareas influye en esta competencia. La investigación se realizó en el contexto del ciclo formativo de formadores de futuros profesores de Matemáticas de secundaria, organizado por la administración educativa argentina, con el propósito de proporcionar herramientas para describir, evaluar y mejorar procesos de enseñanza matemática.

La metodología utilizada combina elementos de la investigación basada en diseño, incluyendo fases de preparación, implementación y análisis retrospectivo. Los datos se recolectaron mediante registros de la plataforma virtual del seminario, grabaciones audiovisuales de clases implementadas y análisis de reflexiones realizadas por los participantes. La investigación se centró en el diseño y rediseño de tareas considerando los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

La población del estudio estuvo compuesta por formadores de futuros profesores que participaron en un seminario virtual de diez semanas y en encuentros presenciales. Estos grupos diseñaron y evaluaron secuencias de tareas alineadas con orientaciones curriculares y el uso obligatorio de software como GeoGebra, lo cual permitió articular enfoques geométricos, algebraicos y numéricos en sus propuestas.

Entre los principales resultados, se evidenció un desarrollo en la competencia en análisis didáctico de los participantes, reflejado en la mejora significativa de las secuencias de tareas diseñadas, que mostraron mayor coherencia con los criterios de idoneidad didáctica. Además, el estudio destacó el impacto del uso de TIC en el fortalecimiento de las prácticas docentes y la articulación de diferentes marcos matemáticos. Sin embargo, también se identificaron dificultades, como la tasa de abandono del curso y los desafíos asociados al uso de tecnologías en la gestión de clase (Pochulu, Font y Rodríguez, 2016).

En conclusión, este trabajo aporta un marco significativo para comprender cómo el diseño de tareas puede fomentar el desarrollo de competencias profesionales claves en formadores de futuros docentes, subrayando la importancia de la integración de herramientas teóricas, tecnológicas y curriculares en la formación docente.

Por su parte, Chamoso y Cáceres (2019), en el artículo "*Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales*" aborda una experiencia educativa en la formación inicial de maestros, en la que se buscó desarrollar competencias matemáticas y pedagógicas a través de la creación de tareas basadas en contextos reales. Este trabajo se centra en cómo los estudiantes para maestro (EpM) generan propuestas didácticas que vinculan las matemáticas con situaciones cotidianas, promoviendo un aprendizaje más significativo y cercano a la realidad escolar.

Se desarrolló en el contexto del Grado en Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, durante la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Participaron 73 estudiantes, mayoritariamente mujeres, distribuidos en 20 grupos de trabajo. El proyecto constó de cuatro fases (Episodios, Cuentos, Materiales y Rutas), en la que los EpM diseñaron tareas matemáticas a partir de contextos reales, recibieron retroalimentación mediante coevaluación y autoevaluación, y posteriormente revisaron y perfeccionaron sus propuestas iniciales. Las actividades se desarrollaron a lo largo de 12 semanas, con sesiones prácticas y formativas que incluyeron aspectos curriculares, metodológicos y de evaluación (Chamoso y Cáceres, 2019).

La población estudiada estuvo formada por estudiantes de segundo curso del Grado en Maestro, quienes no tenían experiencia previa en la creación de tareas matemáticas. El enfoque se

centró en fomentar su capacidad para diseñar actividades pedagógicas que integren contextos reales como herramienta formativa.

Entre los principales resultados, se destaca que el 70% de las tareas creadas utilizaron contextos reales, mejorando significativamente en cada fase del proyecto. Las tareas se caracterizaron principalmente por desarrollar procesos cognitivos de aplicación (57%) y, en menor medida, de razonamiento (18%) y conocimiento (25%). Aunque predominó el uso de respuestas cerradas (88%), se observó un ligero aumento en la inclusión de tareas abiertas a medida que avanzaba el proyecto. Además, se logró una alta motivación en los participantes y una mayor precisión en la elaboración de las tareas, destacándose la relevancia de la reflexión y la revisión como parte del proceso formativo (Chamoso y Cáceres,2019).

En conclusión, este artículo proporciona un marco innovador para la formación de docentes, resaltando la importancia de conectar las matemáticas con la vida cotidiana a través de la creación de tareas auténticas. Asimismo, sugiere que este enfoque puede enriquecer las competencias profesionales de los futuros maestros y transformar su visión sobre la enseñanza de las matemáticas.

En otro estudio, Fernández-Mosquera et al (2017), titulado "*Diseño de tareas en Geometría Dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad de Nariño*" explora la creación e implementación de secuencias de tareas en entornos de geometría dinámica para la formación inicial de docentes. Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación "TIC en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas" y se centra en el diseño de tareas relacionadas con las propiedades de objetos geométricos como cónicas, cuerpos geométricos y funciones cúbicas, utilizando herramientas digitales como Cabri II Plus y Cabri 3D.

La metodología se basa en enfoques teóricos como la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, la Ingeniería Didáctica de Artigue, el Enfoque Instrumental de Rabardel y la Teoría de la Mediación Semiótica de Mariotti. Además, se utiliza una metodología de micro-ingeniería didáctica que comprende fases como análisis preliminar, diseño, implementación y análisis a posteriori. Estas tareas se implementaron en un contexto educativo real con estudiantes de educación media y formadores en proceso de capacitación (Fernández-Mosquera et al, 2017).

La integración de artefactos físicos (como palillos y pantógrafos) y virtuales (como Cabri II Plus) en las actividades permitió estudiar la complementariedad entre estos recursos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje.

Entre los principales resultados, se evidenció que el uso de la geometría dinámica favorece la transición entre la visualización inicial y la formalización matemática. Las tareas diseñadas permitieron a los estudiantes comprender conceptos complejos como las cónicas o las funciones cúbicas desde diferentes representaciones. Además, el estudio destaca que la integración de TIC facilita la exploración y validación empírica, promoviendo la construcción de significados matemáticos sólidos. Por último, se observó que las tareas contribuyen significativamente al desarrollo del pensamiento geométrico, tanto en estudiantes como en docentes en formación (Fernández-Mosquera et al, 2017).

En conclusión, el trabajo subraya la importancia de integrar tecnologías digitales y enfoques innovadores en la formación de docentes, resaltando que este enfoque no solo mejora la comprensión de conceptos geométricos, sino que también fomenta la reflexión sobre la práctica docente y la capacidad de diseñar actividades matemáticas significativas.

Los estudios analizados comparten importantes similitudes en su enfoque hacia la formación docente como herramienta clave para el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Cada investigación enfatiza el uso de tareas matemáticas como un eje central para mejorar las idoneidades pedagógicas y matemáticas. Además, integran marcos teóricos robustos que guían el diseño y análisis de estas tareas, como la Teoría de las Situaciones Didácticas (Fernández-Mosquera et al., 2017) y el Enfoque Ontosemiótico (Pochulu et al., 2016). Otro punto en común es la incorporación de la reflexión y revisión durante los procesos formativos, reconociendo su importancia para perfeccionar las tareas y las prácticas pedagógicas (Chamoso y Cáceres, 2019).

Un elemento destacable es la integración de tecnología en varias de estas investigaciones. Herramientas digitales como GeoGebra, Cabri II Plus y Cabri 3D son utilizadas no solo como recursos de apoyo, sino también como medios para facilitar la visualización y exploración de conceptos matemáticos (Fernández-Mosquera et al., 2017; Pochulu et al., 2016). Esta integración tecnológica refleja una tendencia hacia la modernización de las prácticas docentes, orientada a mejorar la comprensión y enseñanza de conceptos matemáticos complejos.

No obstante, las diferencias entre los estudios son significativas y reflejan la diversidad en sus objetivos y contextos. Por ejemplo, algunos trabajos, como el de Aké y López-Mojica (2020), se enfocan en el diseño de tareas profesionales vinculadas directamente con la práctica educativa, mientras que otros, como el de Pochulu et al. (2016), priorizan el análisis didáctico de las tareas desde criterios de idoneidad. De manera similar, el estudio de Chamoso y Cáceres (2019) se orienta hacia tareas relacionadas con contextos reales, buscando acercar las matemáticas a situaciones cotidianas, mientras que Fernández-Mosquera et al. (2017) exploran el potencial de las tareas de geometría dinámica, combinando artefactos físicos y virtuales.

Los estudios analizados muestran una coincidencia en la relevancia de las tareas matemáticas como herramienta formativa. Sin embargo, se diferencian en sus enfoques, contextos y metodologías. Estas variaciones reflejan la riqueza y diversidad en la investigación sobre formación docente, lo que permite abordar múltiples dimensiones del desarrollo profesional en la enseñanza de las matemáticas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Identificar elementos base para el diseño de tareas profesionales que faciliten el estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y analítica, integrando el uso de GeoGebra.

1.3.2 Objetivos específicos

- Vivenciar el estudio de la circunferencia desde el punto de vista de la geometría sintética y analítica con el uso de GeoGebra, con base en las experiencias de formación en las sesiones de asesorías.
- Identificar tareas profesionales en el marco de las vivencias del estudio de la circunferencia con GeoGebra, desde nuestra experiencia en las sesiones de asesorías.
- Organizar tareas profesionales identificadas en el marco de las vivencias del estudio de la circunferencia utilizando GeoGebra.

El primer objetivo específico se plantea de esa manera debido a que el ejercicio de estudio que está contemplado en el trabajo final de grado se incorporan unas sesiones de asesoría en las que estudiamos de manera colectiva, nosotros tres, el contenido del libro III y IV de Elementos, en ese sentido hemos hecho el estudio de la perspectiva de la geometría sintética, así también

teniendo a mano siempre la herramienta GeoGebra para ayudarnos en la interpretación y en el estudio de los libros mencionados.

De la misma manera hicimos con respecto a la geometría analítica para el estudio del libro Geometría de Descartes.

1.4 Aspectos Metodológicos

Es importante aludir que el propósito de este subcapítulo es describir el proceso para la realización de este trabajo final de grado. Cabe mencionar que lo desarrollado no sigue de forma exclusiva a un determinado enfoque metodológico de investigación, para ello, es importante aclarar que no es posible categorizar el documento de manera arbitraria. Por lo tanto, hacemos hincapié en la creación de las tareas propuestas describiendo las distintas metodologías de investigación utilizadas en el trabajo.

1.4.1 Revisión documental

La primera parte del trabajo consistió en una revisión documental de antecedentes sobre tareas en la formación docente inicial, la circunferencia desde la perspectiva de Euclides y Descartes, el uso de GeoGebra en la circunferencia y la formación de profesores. Al respecto, realizamos una búsqueda en las bases de datos a saber, Dialnet, Google Académico Springer, Scielo, y en los repositorios de la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad de los Andes. Como resultado de tal buceo bibliográfico se hallaron alrededor de 70 artículos de revista, 2 tesis de maestría, y 18 libros o capítulos de libro. No obstante, se aplicó un filtro a los documentos encontrados porque algunos apuntan a otros aspectos de la circunferencia respecto a la formación de profesores de matemáticas.

Una vez escogidos los documentos que valdrían de antecedentes para nuestro trabajo, procedimos a realizar un resumen analítico de cada uno, en los que mencionamos las ideas principales y la correspondencia con la formación inicial de profesores de matemáticas, el uso de GeoGebra para trabajar con circunferencias y la importancia del conocimiento de ello en la formación de profesores. Estos aspectos mencionados se encuentran desarrollados en el subcapítulo de antecedentes del presente documento.

Luego, nos dimos a la tarea de estudiar la circunferencia desde el punto de vista de la geometría euclidiana en los libros III y IV de Elementos de Euclides y en la geometría analítica en de Descartes, “con el fin de sentar las bases para identificar semejanzas y diferencias en el tratamiento matemático de este objeto en cada geometría considerada” (Acosta, Páez y Guacaneme, 2024, p. 99).

Además, realizar tareas en la formación inicial de profesores de matemáticas exigió la perspicacia del campo investigativo para determinar sus finalidades y propósitos. Por esta razón, el siguiente subapartado ubica el trabajo en una línea de investigación que permite hacer referencias teóricas y conceptuales para delimitar nuestro trabajo.

1.4.2 Campo de investigación

Al iniciar esta investigación, ubicamos nuestro trabajo final de grado en el campo de la investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas, muy acorde con la intención de aprender acerca del diseño de tareas para futuros profesores de matemáticas del Instituto de Formación Docente. De allí, que pasamos brevemente a describir el campo de investigación y el motivo por el cual este trabajo final de grado guarda relación con el mismo.

La Educación del Profesor de Matemáticas como campo de investigación se diferencia del campo de la Didáctica de las Matemáticas porque estudian cosas distintas. Se supone que el

conocimiento de los profesores no trata sólo de matemáticas y es por esto que los sistemas didácticos que estudia la Didáctica se quedan limitados respecto de los conocimientos que deben ser apropiados por un profesor de matemáticas (Guacaneme y Mora, 2011).

Por lo tanto, teniendo en cuenta que es posible y natural reconocer la necesidad del campo de la formación docente, el siguiente paso es buscar ejemplos de su existencia y relevancia en la actualidad. Al respecto, Guacaneme y Mora (2011) conciben un listado de diferentes evidencias que ponen más claro el actual estado en este ámbito, mencionan revistas especializadas en el campo. También se encuentra la divulgación de un *Handbook* referido únicamente a la Educación del Profesor de Matemáticas (Tirosh & Wood, 2008), en el que se resalta el importante papel que ha venido ocupando la educación del profesor en distintos eventos académicos internacionales relacionados con la Educación Matemática. Además, en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XIII CIAEM, Brasil 2011), de los grupos temáticos presentados, al menos dos (i. e., Formación de profesores en la educación matemática y competencias profesionales en la educación matemática) presentaron asuntos referentes a la educación del profesor de matemáticas (Guacaneme y Mora, 2011).

Para concebir el foco sobre el cual se centra el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, seguidamente se detallan los objetos de investigación que proponen Guacaneme y Mora (2011). Algunos de estos son:

- Las matemáticas o sus objetos; la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas; justificación, propósitos y estrategias del currículo de matemáticas, etc.
- Las actividades prácticas en el quehacer docente y los procesos de aprendizaje profesional.

- Las relaciones efectivas que los profesores en formación y en ejercicio logran efectuar entre el conocimiento teórico y las exigencias y necesidades que surgen desde la práctica de la enseñanza de las matemáticas.
- Los conocimientos y competencias que los profesores de matemáticas deben aprender y desarrollar para el ejercicio profesional docente.
- Las diferencias de formación que exige el nivel educativo de desempeño del futuro profesor.
- Las estrategias y tareas utilizadas en los programas de formación de profesores de matemáticas para su educación.
- Las dinámicas de formación que se dan en comunidades de práctica de profesores de matemáticas y su relación con el aprendizaje individual.
- La instrucción de los formadores de formadores.
- La educación on-line de profesores.

Es importante mencionar que el artículo realizado por Guacaneme y Mora (2011) tiene de base los trabajos de Cardeñoso, Flores y Azcarate (2001) así como el de Sánchez (2011). Dentro de este marco, queda claro el campo de investigación al cual se vincula el diseño de tareas para la formación de profesores.

El paso siguiente con respecto a los aspectos metodológicos, fue la identificación y organización de tareas profesionales en virtud de las vivencias del estudio de la circunferencia, que se describen a continuación.

1.4.3 Identificación y organización de las tareas

Para poder identificar las tareas, las sesiones de asesoría fueron fundamentales, debido a que, en los distintos encuentros con nuestro asesor él nos proponía una tarea para vivenciar las

dificultades y maneras de resolución sobre lo propuesto. A veces, no había una sola manera de resolver, sino que encontrábamos más de una forma de resolución, apoyándonos en GeoGebra en la mayoría de los casos para su resolución.

Cabe mencionar, que todas las asesorías fueron grabadas, por lo tanto, recurrimos a estas para poder identificar las tareas que podrían ser propuestas para la formación de profesores de matemáticas y con ello poder analizar las dificultades y maneras de resolución encontradas a la hora de desarrollar las tareas propuestas por el asesor.

Del total de las tareas identificadas, que son 15, organizamos y diseñamos 5 tareas profesionales que van enfocadas hacia los conocimientos y competencias que los futuros profesores de matemáticas deben aprender y desarrollar para el ejercicio profesional. Las tareas organizadas a saber: Dos desde la perspectiva de la geometría sintética (Proposición III-3 y Proposición III-36), y tres desde la perspectiva de la geometría cartesiana o analítica (Análisis del problema de Pappus, raíz cuadrada utilizando circunferencia y rectas, y resolución de una forma cuadrática utilizando rectas y circunferencia).

Para la organización y elaboración de las tareas profesionales, se inició con una versión borrador de cada una de ellas, las que fueron expuestas al asesor del trabajo final de grado para su análisis y discusión las veces que fuesen necesarias hasta lograr una aprobación sobre los objetivos e intenciones de estas. Posteriormente, al tener la versión final (que puede ser perfectible) de las tareas profesionales, se procedió al análisis a priori del alcance de ellas.

Finalmente, habiendo presentado la inquietud pedagógica que conlleva el trabajo, sus objetivos y la descripción de las distintas fases de los aspectos metodológicos que se observaron, es viable avanzar al marco referencial.

2 MARCO DE REFERENCIA

Para poder organizar y diseñar las tareas profesionales para la formación de futuros profesores de matemáticas en el estudio de la circunferencia, creímos que hay cuatro aspectos, a saber, la formación de profesores, el uso de GeoGebra, la comprensión de conceptos geométricos fundamentales como el de la circunferencia y el diseño de tareas, que son trascendentes para estructurar un proceso de enseñanza y aprendizaje eficaz en el contexto de la geometría sintética y analítica.

Solo a través de la integración de estos pilares mencionados anteriormente, es posible formular los tipos de tareas que incentiven el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto dinámico como adecuado.

2.1 Formación de profesores de matemáticas

La formación de profesores de matemáticas es un área vital de la investigación educativa ya que señala las competencias a adquirir por los futuros profesionales de la enseñanza para ser educadores efectivos. Con respecto a eso, no es suficiente que el profesor conozca solo los contenidos matemáticos; debe adquirir habilidades pedagógicas específicas, creando tareas para el aprendizaje activo del alumnado, conforme a herramientas teóricas y metodológicas estudiadas. Por tanto, el profesor y su capacidad de enseñanza son elementos clave para el desarrollo de tareas ya que deben ser capaces de adaptarse a las necesidades del aula conciliando estructura, propósito e implicación, para comprender la circunferencia de forma efectiva.

2.1.1 *La formación docente en Paraguay*

La formación docente en Paraguay es de carácter terciario no universitario. Las carreras de profesorado para la educación inicial, escolar básica y media tienen una duración de tres años

con prácticas educativas impartidas en Institutos de Formación Docente (IFD), así como en algunas universidades o institutos superiores habilitados para tal efecto (MEC, 2020).

Los Institutos de Formación Docente (IFD) deben cumplir para su funcionamiento las normativas vigentes que emanan del Viceministerio de Educación Superior y Ciencias, específicamente de la Dirección General de Formación Profesional del Educador (MEC, 2020).

En la Nueva Formación Docente (MEC, 2020), la combinación teoría-práctica está integrada a todos los bloques formativos, tanto en la formación fundamental, que contiene las bases pedagógicas, como en la específica con las didácticas propias. La práctica profesional es el eje integrador del proceso formativo en todos los semestres. Las teorías aprendidas en cada módulo o disciplina deben ser llevadas a la práctica.

El currículum innovado para la Nueva Formación Docente (MEC, 2020) tiene las siguientes características: abierto, centrado en el aprendizaje de los estudiantes, que conecte y articule teoría y práctica, que favorezca el aprendizaje colaborativo, trabajando las habilidades para la vida, permitiendo el aprendizaje exploratorio y experimental y, por último, posibilitando la articulación con la formación de grado.

La educación superior, con el objetivo de apreciar el esfuerzo académico de los alumnos y al mismo tiempo promover la movilidad y transferencia en los estudios, ha originado el sistema de créditos académicos. En Paraguay, el Consejo Nacional de Educación Superior (CONES) ha definido que un crédito paraguayo equivale a 15 horas de trabajo; el uso de estos favorece la movilidad y convalidación de estudios académicos en el ámbito nacional, para lo cual se tendrán en cuenta las normativas emanadas por el CONES (MEC, 2020).

Los individuos que han concluido exitosamente la educación secundaria y poseen el título de Bachillerato en cualquiera de las disciplinas, podrán dirigirse a los IFD para presentarse al

proceso de ingreso. Los candidatos a una carrera de formación docente tendrán que atravesar un proceso de capacitación antes del desarrollo del plan de estudio mediante un Curso Probatorio de Ingreso, válido como el primer semestre de la carrera (MEC, 2020). Esta etapa comienza con la implementación de exámenes que establecen los grados de comprensión escrita en los dos idiomas oficiales del país (Español y Guaraní), así como la capacidad de cálculo. Esto es regulado y programado anualmente por el MEC por medio de la Dirección General de Formación Profesional del Educador y el Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Al terminar la carrera de la Nueva Formación Docente Inicial, el título obtenido es: Profesor del Área de Matemática para el 3.º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media, según el perfil de egreso descrito en la **Figura 1**. Ser Profesor de Matemática, constituye una carrera de gran responsabilidad y compromiso con el país. Es un experto capacitado para administrar el aula en instituciones de educación formal, así como en ámbitos educativos no formales, enfocándose en los aprendizajes que el estudiante debe adquirir en función de su fase evolutiva. Posee la habilidad de diseñar y crear recursos pedagógicos que respalden su administración educativa, y también reflexionar sobre su propia práctica para optimizarla de manera constante, involucrarse de manera activa en los proyectos educativos de la institución (MEC, 2020).

Figura 1

Descripción del perfil del Profesor del área de Matemática

Conocimientos	<ol style="list-style-type: none">1. Manifiesten en su desempeño profesional conocimiento de las bases neurobiológicas, así como los procesos psicológicos, biológicos y sociales relacionados al aprendizaje y los tomen en cuenta para el proceso de planificación, implementación y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.2. Demuestren dominio de los contenidos del área atendiendo a la diversidad de los estudiantes y a las necesidades del contexto social en el que interactúa.3. Reconocen y aplican estrategias específicas de enseñanza basadas en el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) para lograr el aprendizaje de todo el alumnado, independientemente a las condiciones evolutivas, cognitivas y sociales de los estudiantes.
Habilidades	<ol style="list-style-type: none">4. Reflexionen y evalúen su práctica a fin de tomar decisiones para la mejora continua de su labor docente.5. proyecten y gestionen su propia formación permanente como un profesional responsable y consciente de los compromisos que conlleva la tarea docente, incorporando las innovaciones y las adecuaciones cuando sean necesarias.6. Conozcan, diseñen, desarrollen y evalúen procesos educativos centrados en el aprendizaje del estudiante, acordes al currículum del nivel, así como proyectos educativos, unidades y planes didácticos, ambientes, actividades y materiales, que permitan flexibilizar el currículo a la diversidad del alumnado, y para promover la calidad de los contextos en los que se desarrolla el proceso educativo.7. Desarrollan procesos de enseñanza bilingüe, en atención a la primera y segunda lengua de sus alumnos, según la realidad lingüística y la incorporación del inglés como lengua extranjera.
Actitudes y valores	<ol style="list-style-type: none">8. Demuestren un alto compromiso con la educación del país, con la labor docente que desempeñan, con el aprendizaje de todos los estudiantes y con los resultados de su práctica.9. Manifiesten habilidades sociales, emocionales y de liderazgo que les permitan relacionarse consigo mismo, con los estudiantes y con los miembros de la comunidad, de modo a propiciar la construcción de espacios de convivencia en los diferentes contextos educativos.10. Actúen como agentes de cambio en los espacios educativos y sociales, con principios y valores democráticos y éticos, con sentido de identidad y pertenencia a la comunidad y a la nación paraguaya.11. Manifiesten en su actuar el respeto por la vida, la familia y los valores enmarcados en los principios de equidad e igualdad como miembros de una sociedad pluriétnica y pluricultural.12. Generen acciones de promoción de la salud, de preservación y conservación del medio ambiente y recursos culturales en los diferentes contextos educativos.13. Apliquen en su relacionamiento personal y profesional las normativas establecidas en la legislación educativa nacional.

Nota. Facsímil del Currículum Profesorado del Área de Matemática para el 3.º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media (MEC, 2020, pp. 32-33).

Descripción de la propuesta curricular

La propuesta curricular se organiza de acuerdo con las líneas de formación que definen caminos que facilitan la adquisición de saberes generales, específicos, complementarios y

prácticos indispensables para la formación profesional del profesor (ver **Figura 2**). Se presentan líneas de formación general (FG), de formación de la especialidad (FE), formación práctica profesional (FPP), formación instrumental (FI) y formación optativa o local (FO) (MEC, 2020).

Figura 2

Distribución del Currículum del Profesorado de Matemáticas

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA PROPUESTA		
1. Duración: 3 años		
2. Régimen: semestral (6 semestres)		
3. Número de módulos: 50		
4. Carga académica total: 3351 horas		
5. Líneas de formación:		
Profesorado de Matemática	Total	Porcentaje global
Formación Fundamental	845	25
Práctica Profesional	552	17
Formación Específica	962	29
Formación Instrumental	748	22
C. Local / Optativo	244	7
	3351	100

Nota. Facsímil del Currículum Profesorado del Área de Matemática para el 3º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media (MEC, 2020, p. 49).

A continuación, detallamos la estructura de las líneas de formación distribuidas en la malla curricular (ver **Figura 3**) según corresponde a cada semestre:

Formación fundamental: constituida por 13 materias que totalizan 845 horas repartidas en los 6 semestres y representan el 25% del total de la formación.

Formación en la práctica profesional: Constituida por 5 espacios de *Práctica Profesional* que hacen un total de 552 horas reloj, siendo 477 horas presenciales (que incluye las visitas a las instituciones educativas) desarrolladas en los cinco semestres y 75 horas de trabajo independiente del estudiante, lo que representa el 17% del total de la formación.

Cada semestre de la práctica tiene intencionalidades específicas de modo a ir ofreciendo al estudiante la experiencia de campo, la responsabilidad que conlleva y las oportunidades de aplicación de las habilidades y los conocimientos en situaciones reales, de manera gradual y progresiva (MEC, 2020).

Formación específica: Consta de 15 materias que hacen un total de 810 horas presenciales desarrolladas en 5 semestres, más 152 horas de trabajo independiente hacen 962 horas en total y representan el 29 % del total de la formación.

Formación instrumental: Se compone de 12 talleres que suman 748 horas repartidas en 468 horas presenciales de distinta intensidad durante los 6 semestres (en los que el examen de ingreso representa la mayor cantidad de horas) y 280 horas de trabajo autónomo, teniendo en cuenta la inclusión del curso virtual de inglés. Esto constituye el 22 % de la totalidad de la capacitación.

Formación optativa o local: El 7% del tiempo total del profesorado se destina a un proyecto local de elección, con 244 horas distribuidas en 5 semestres. Cada IFD deberá establecer cómo repartir esta carga horaria semestral, si se llevará a cabo presencial (en el IFD o en la comunidad o en una institución educativa) y/o si se asignará trabajo independiente.

Figura 3

Malla Curricular Profesorado del 3.º Ciclo y Educación Media

1º	2º	3º	4º	5º	6º
REALIDAD EDUCATIVA PARAGUAYA	EDUCACIÓN, SOCIEDAD Y CULTURA	DESARROLLO HUMANO Y APRENDIZAJE	SUJETOS DE APRENDIZAJE, DIVERSIDAD E INCLUSIÓN	INVESTIGACIÓN EDUCATIVA	MARCO NORMATIVO DE LA EDUCACIÓN
DESARROLLO PERSONAL Y SOCIAL	DESARROLLO PERSONAL Y PROFESIONAL	TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN Y DEL APRENDIZAJE I	CURRÍCULUM, ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN I	TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN Y DEL APRENDIZAJE II	CURRÍCULUM, ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN II
	EDUCACIÓN Y RESPONSABILIDAD AMBIENTAL				
	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL
	ÁLGEBRA Y SU DIDÁCTICA I	ÁLGEBRA Y SU DIDÁCTICA II	MATEMÁTICA FINANCIERA Y SU DIDÁCTICA	CÁLCULO DIFERENCIAL Y SU DIDÁCTICA	CÁLCULO INTEGRAL Y SU DIDÁCTICA
	TRIGONOMETRÍA Y SU DIDÁCTICA	DIDÁCTICA DE LA LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS	ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y SU DIDÁCTICA	GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SU DIDÁCTICA	HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
	GEOMETRÍA PLANA Y SU DIDÁCTICA	GEOMETRÍA DEL ESPACIO Y SU DIDÁCTICA	ÁLGEBRA VECTORIAL Y SU DIDÁCTICA	PROBABILIDADES Y SU DIDÁCTICA	TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ESTRATEGIAS PARA LA COMPRESIÓN EN CASTELLANO Y GUARANÍ	TIC	EXPRESION ORAL (CASTELLANO Y GUARANÍ)	REDACCIÓN CREATIVA (CASTELLANO Y GUARANÍ)	PRODUCCION DE RECURSOS EDUCATIVOS AUDIOVISUALES (CASTELLANO Y GUARANÍ)	REDACCIÓN INSTRUMENTAL (CASTELLANO Y GUARANÍ)
ESTRATEGIAS PARA MEJORAR COMPETENCIAS DE CÁLCULO	TALLER DE INGLÉS I	TALLER DE INGLÉS II	TALLER DE INGLÉS III	TALLER DE INGLÉS IV	TALLER DE INGLÉS V
	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA

Nota. Facsímil del Currículum Profesorado del Área de Matemática para el 3.º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media (MEC, 2020, p. 43).

En lo que respecta al estudio de la Geometría, podemos ver que en toda la carrera se tiene tres módulos para su estudio, el de la Geometría plana y su didáctica, Geometría del espacio y su didáctica y Geometría analítica y su didáctica, que equivale al 6% de todo el currículum; dentro de cada módulo solo se da una pincelada de la Geometría euclidiana, y con respecto a la Geometría analítica su contenido hace referencia a contenidos desde distancia entre dos puntos y

al estudio de todas las cónicas, pero el enfoque con que se desarrolla dicho programa es más de aplicación de fórmulas, sin ahondar sobre los conocimientos históricos de cada geometría.

2.1.2 La competencia docente y el enfoque en “mirar con sentido”

Una de las competencias fundamentales que los futuros profesores deben desarrollar es la capacidad de “mirar con sentido” las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia implica identificar los aspectos relevantes de la práctica docente, interpretar las interacciones en el aula y tomar decisiones pedagógicas basadas en principios didácticos sólidos (Llinares, 2012). Este enfoque es particularmente relevante en el diseño de tareas para la enseñanza de la circunferencia, ya que permite a los profesores anticipar las respuestas de los estudiantes y adaptar sus estrategias de enseñanza para promover un aprendizaje significativo.

Según Llinares (2012), la competencia docente “mirar con sentido” permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional integrando tres destrezas: identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje.

Esta competencia no solo permite a los profesores interpretar lo que sucede en el aula, sino que también les proporciona herramientas para vincular la teoría con la práctica. Así, el desarrollo de esta se vincula estrechamente con la integración de conocimientos matemáticos y pedagógicos específicos, lo que facilita el diseño de tareas que respondan a las necesidades educativas de los estudiantes.

Además, el diseño de tareas profesionales debe estar asociado a la investigación educativa, permitiendo a los futuros profesores aplicar el conocimiento teórico en situaciones de

enseñanza reales. Este enfoque garantiza que los profesores no solo adquieran conocimientos matemáticos, sino que también desarrollen la capacidad de adaptar sus métodos de enseñanza a diferentes contextos y necesidades de los estudiantes.

2.1.3 La integración de teoría y práctica

Uno de los desafíos más importantes en la formación de profesores de matemáticas es la integración efectiva entre teoría y práctica. Investigaciones como las de Aké y López-Mojica (2020) destacan la necesidad de que los futuros profesores participen en actividades que les permitan aplicar sus conocimientos teóricos en situaciones prácticas, lo que facilita el desarrollo de competencias docentes más sólidas (Llinares, 2012). En el caso del estudio de la circunferencia, es fundamental que los futuros educadores aprendan a utilizar herramientas tecnológicas como GeoGebra para diseñar tareas que promuevan la comprensión profunda y el razonamiento geométrico.

El diseño de tareas profesionales, apoyado en el uso de tecnologías y enfoques innovadores como el de “mirar con sentido”, es crucial para preparar a los futuros profesores a fin de que puedan enfrentar los desafíos de la enseñanza de conceptos matemáticos como la circunferencia. Este enfoque garantiza que los futuros profesores adquieran las habilidades necesarias para diseñar y adaptar tareas que promuevan un aprendizaje profundo y significativo en sus estudiantes.

2.1.4 La importancia de los entornos de aprendizaje

El diseño de entornos de aprendizaje efectivos es trascendental para el desarrollo de competencias docentes. Según Schön (1983), los profesionales aprenden a través de la reflexión en la acción, lo que significa que la formación de profesores debe proporcionar oportunidades para que reflexionen sobre su propia práctica y mejoren sus habilidades a través de la experiencia

directa. En este sentido, los entornos de aprendizaje que combinan la teoría con la práctica son esenciales para que los futuros profesores adquieran las competencias necesarias para diseñar e implementar tareas profesionales que fomenten el razonamiento matemático y la resolución de problemas en sus estudiantes.

Según Llinares (2019), los programas de formación deben proporcionar oportunidades para que los estudiantes en formación participen en prácticas sociales de enseñanza, lo que les permite adquirir conocimientos y habilidades a través de la experiencia directa y la reflexión crítica. Estos entornos pueden incluir el uso de tecnologías como GeoGebra, que facilite la visualización y manipulación de conceptos matemáticos como la circunferencia, promoviendo un enfoque más interactivo y exploratorio de la enseñanza. También, su uso permite a los futuros profesores explorar conceptos matemáticos de manera interactiva, facilitando la visualización, comprensión de conceptos y manipulación de objetos geométricos como la circunferencia, y así, desarrollar nuevas estrategias de enseñanza que integren herramientas digitales en el aula.

2.2 GeoGebra

La importancia de GeoGebra como herramienta tecnológica dinámica radica en la visualización de una variedad de representaciones de objetos matemáticos de manera accesible a través de interfases interactivas. El desarrollo de la tecnología ha revolucionado la enseñanza de la matemática al ofrecer visualizaciones interactivas que permiten descubrir y manipular varios objetos geométricos de una manera intuitiva. Por lo tanto, diseñar tareas con el uso de GeoGebra para futuros profesores es muy importante para nosotros. No solo porque facilita la representación gráfica de varios objetos geométricos, sino también porque desarrolla un pensamiento matemático profundo acerca de los conceptos matemáticos. En el estudio de la circunferencia en particular, esta herramienta de software permite una exploración visual que

apoya la interpretación teórica y la transición de la representación algebraica a la representación geométrica.

2.2.1 GeoGebra-Characterización

Según la plataforma (<https://www.geogebra.org/?lang=es-ES>) GeoGebra (ver **Figura 4**) es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor. Además, GeoGebra ofrece una plataforma en línea con más de un millón de recursos gratuitos para el aula creados por la comunidad multilingüe. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de la plataforma de colaboración *GeoGebra Classroom* en la que se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real.

Figura 4

Página principal de GeoGebra



Nota. Facsímil de la página de GeoGebra.

GeoGebra ofrece, además, recursos matemáticos para todas las áreas (ver **Figura 5**), elaborados por expertos, herramientas gratuitas como calculadoras y sus aplicaciones para una experiencia interactiva de aprendizaje y evaluación, disponible en todas las plataformas. También

ofrece lecciones interactivas de matemáticas disponibles e integración con varios LMS compatibles. Un nuevo espacio ofrecido es el de *GeoGebra Practice* en el que uno puede practicar la resolución de problemas algebraicos.

Figura 5
Oferta de Espacios de GeoGebra



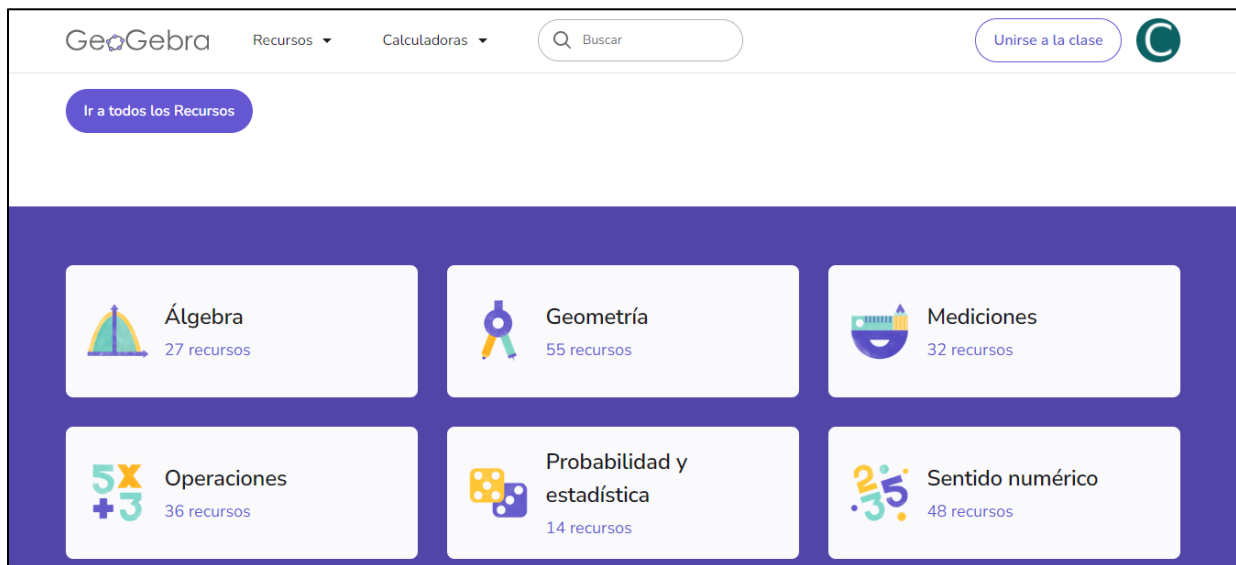
Nota. Facsímil de la página de GeoGebra.

GeoGebra es un programa de software libre, es fácil de instalar y compatible con cualquier sistema operativo. Se puede trabajar en diferentes contenidos de las matemáticas. Una herramienta que permite trabajar la metodología del aprendizaje colaborativo, es decir, los estudiantes, a través de la exploración del software, pueden construir sus aprendizajes entre sí y compartir experiencias.

La misión de GeoGebra es brindar las mejores herramientas para que los profesores acompañen a los estudiantes en el desarrollo de su potencial (ver **Figura 6**). Vamos más allá de ser solo una colección de herramientas, nos esforzamos por conectar a personas apasionadas del mundo de la educación, ofrecemos un nuevo enfoque para enseñar, explorar y aprender matemáticas (<https://www.geogebra.org/>).

Figura 6

Recursos ofrecidos por GeoGebra



Nota. Facsímil de la página de GeoGebra.

Según Ruíz, Ávila y Villa-Ochoa (2013) herramientas como el software GeoGebra son útiles en la enseñanza de matemáticas, ya que facilitan que los estudiantes muestren, mediante la aplicación de saberes previos, lo que han aprendido hasta el momento. Las actividades en el aula, diseñadas para fomentar la producción de conocimiento a través de la manipulación, visualización y uso de software educativo, permiten que los profesores mejoren sus estrategias de enseñanza, al tiempo que proporcionan a los estudiantes momentos de "diversión" y "tensión", lo que fomenta la búsqueda de diferentes resultados y un sentido de competencia. Con los elementos teóricos y prácticos proporcionados, se espera que los participantes generen nuevas experiencias y actividades aplicables en sus aulas, ampliando sus recursos didácticos y comunicativos para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, se busca motivar a los futuros profesores a implementar nuevas estrategias metodológicas que incrementen la motivación y favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

2.2.2 Importancia de GeoGebra en la geometría sintética y analítica

En la geometría sintética como en la analítica, GeoGebra cumple un rol importante, ya que brinda una plataforma de interacción e intuición dinámica para la visualización y manipulación de los objetos geométricos.

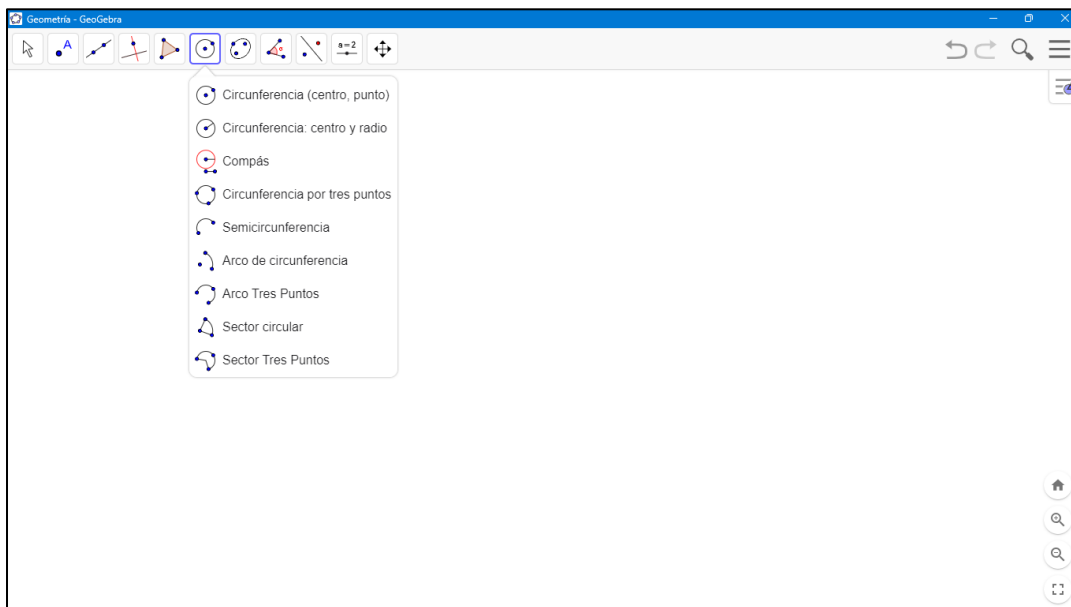
GeoGebra es una herramienta dinámica que combina geometría, álgebra y cálculo, ofreciendo numerosas ventajas en el estudio tanto de la geometría sintética como de la geometría analítica. Aquí se detallan algunas de sus aportaciones en cada área.

En la geometría sintética, la visualización dinámica GeoGebra permite a los estudiantes crear construcciones geométricas que pueden ser manipuladas en tiempo real. Esto ayuda a visualizar conceptos como congruencias, similitudes y propiedades de figuras. La interactividad en la que los usuarios pueden mover puntos, líneas y otras figuras, lo que les permite explorar cómo cambian las relaciones geométricas, fomentando una comprensión más intuitiva de los teoremas y postulados.

GeoGebra permite la representación de la circunferencia mediante diferentes métodos (ver **Figura 7**); uno de ellos es definir el centro y un punto cualquiera por donde pasa la circunferencia, otro modo es definiendo el centro y la longitud de la circunferencia, y el tercer método de representar es la manera que Euclides representaba la circunferencia, es pasando por tres puntos. Así también posee una herramienta compás con la que uno puede copiar la circunferencia.

Figura 7

Interfaz de GeoGebra vista Gráfica con las herramientas de circunferencia



Nota. Facsímil de la vista gráfica de GeoGebra.

GeoGebra puede calcular de forma automática propiedades importantes como la longitud de arcos, el área de la circunferencia, el perímetro y las relaciones entre sus elementos. Esto resulta útil para la verificación de propiedades geométricas y la exploración de relaciones numéricas sin necesidad de realizar cálculos manuales.

Según Edwards y Jones (2006), “GeoGebra permite a los estudiantes explorar las simetrías y otras propiedades geométricas de manera interactiva, promoviendo el descubrimiento de teoremas geométricos de forma autónoma” (p. 28). Este enfoque autónomo en la resolución de problemas es importante para el desarrollo de habilidades docentes que fomenten un aprendizaje activo y significativo en el aula.

En la enseñanza de la geometría sintética, el uso exclusivo de las funcionalidades geométricas permite a los estudiantes enfocarse en las propiedades espaciales y relacionales de las figuras, sin la interferencia de representaciones algebraicas. Esto facilita la adquisición de conocimientos geométricos puros, como lo argumentan Hohenwarter y Lavicza (2007), quienes

señalan que “la capacidad de GeoGebra para representar construcciones geométricas en tiempo real, sin necesidad de introducir ecuaciones, es una ventaja significativa para la enseñanza de la geometría en niveles básicos y medios” (p. 34).

Además, el uso de GeoGebra en el diseño de tareas profesionales permite a los futuros profesores explorar múltiples enfoques de resolución, alentándolos a adoptar una postura más adaptativa y flexible frente a los problemas geométricos. Por lo tanto, las tareas diseñadas con GeoGebra pueden permitir a los estudiantes formular conjeturas, verificar hipótesis y justificar sus conclusiones, lo que mejora su habilidad en argumentación matemática. Como señalan Edwards y Jones (2006), “el entorno dinámico de GeoGebra fomenta un ciclo constante de exploración, conjetura y validación, esencial para la formación de profesores capaces de guiar a sus estudiantes en la construcción de conocimiento matemático” (p. 30).

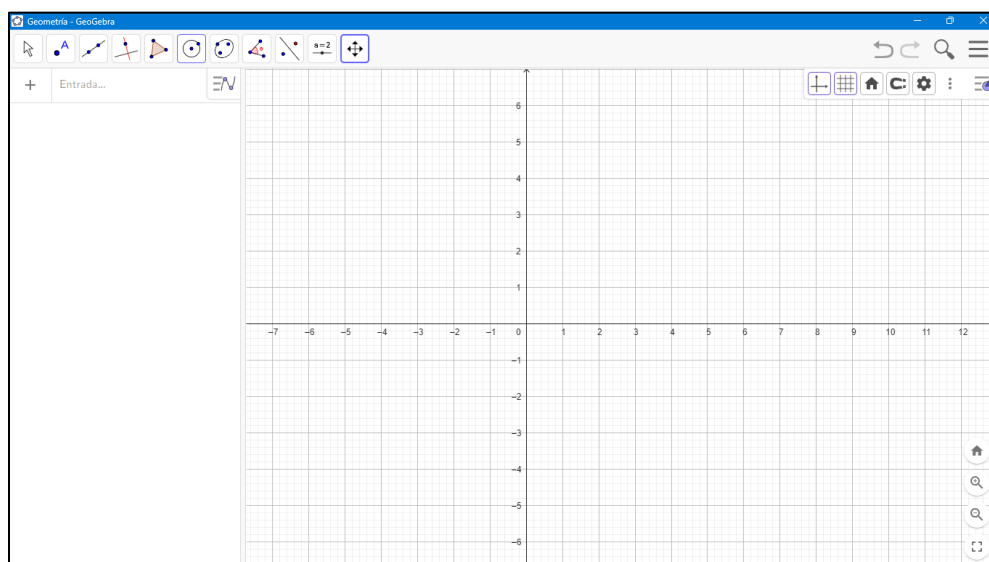
En geometría analítica, GeoGebra permite la relación entre Geometría y Álgebra; el programa permite representar gráficamente ecuaciones y funciones, facilitando la comprensión de relaciones. También favorece el análisis de funciones, a través del cual los usuarios pueden graficar funciones y analizar sus características, como intersecciones, máximos, mínimos y asíntotas, lo que es importante en la geometría analítica.

GeoGebra permite resolver problemas de geometría analítica, como la determinación de la distancia entre puntos, el cálculo de pendientes y el análisis de rectas y cónicas. De esta manera, se puede hacer la simulación de transformaciones, los estudiantes pueden observar cómo las transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones) afectan las ecuaciones y gráficos, promoviendo un entendimiento más profundo de los conceptos analíticos.

Esta característica es particularmente beneficiosa para la enseñanza de la geometría analítica, ya que permite a los estudiantes observar cómo los cambios en las ecuaciones algebraicas afectan a las figuras geométricas en tiempo real. Tal como lo destacan Edwards y Jones (2006), “GeoGebra proporciona una visión simultánea del aspecto geométrico y algebraico de los objetos (ver **Figura 8**), lo que permite a los estudiantes explorar y verificar relaciones matemáticas de manera dinámica” (p. 29).

En el diseño de tareas profesionales, GeoGebra no solo sirve como una herramienta didáctica, sino como un recurso para el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas. La posibilidad de modificar las ecuaciones y observar de inmediato los cambios en las representaciones gráficas refuerza el aprendizaje experimental, facilitando la comprensión de conceptos abstractos como las cónicas, las rectas y los sistemas de ecuaciones. Ruiz, Ávila y Villa-Ochoa (2013) subrayan que “la integración de GeoGebra en la enseñanza de la geometría analítica fomenta un aprendizaje más profundo al permitir que los estudiantes interactúen con los objetos matemáticos de manera visual y tangible” (p. 450).

Figura 8
Interfaz de la vista gráfica y algebraica de GeoGebra



Nota. Facsímil de la vista Clásica de GeoGebra.

Además, la capacidad de GeoGebra para ofrecer múltiples representaciones contribuye a una reorganización cognitiva significativa en los estudiantes, como lo argumenta Moreno (2002). Este autor señala que “las herramientas computacionales, como GeoGebra, no solo amplifican la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos, sino que también reconfiguran la manera en que los conceptos matemáticos son entendidos y aplicados” (p. 84).

En este contexto, el uso sostenido de GeoGebra puede transformar la forma en que los futuros maestros de matemáticas abordan y enseñan la geometría analítica.

GeoGebra facilita la visualización mediante su capacidad para manipular figuras y ecuaciones, lo que fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas de manera interactiva. Según Moreno (2002), “el uso de herramientas como GeoGebra en la geometría analítica proporciona a los estudiantes una experiencia geométrica genuina, donde la percepción y la conceptualización están estrechamente entrelazadas” (p. 90).

GeoGebra es una herramienta potente que no solo facilita la enseñanza y el aprendizaje de la geometría sintética y analítica, sino que también promueve un enfoque activo y visual, lo cual es decisivo para desarrollar una comprensión sólida de estos conceptos matemáticos. Su flexibilidad y capacidad para integrar diferentes áreas de las matemáticas hacen que sea especialmente valiosa en el aula.

2.2.3 Importancia de GeoGebra para los futuros profesores de matemáticas

La tecnología utilizada en el diseño de tareas de formación de profesores de matemáticas es crucial para el desarrollo de las habilidades docentes en la era digital. Los futuros profesores pueden probar técnicas y prácticas que han demostrado ser efectivas para enseñar y aprender conceptos abstractos y complejos gracias a los instrumentos tecnológicos. Algunas de las herramientas de trabajo son un software especial como GeoGebra, que ya ha demostrado ser una

herramienta útil para apoyar la comprensión de temas como geometría, álgebra, cálculo y estadística.

La incorporación de tecnologías en el aula de matemáticas crea ambientes de aprendizaje a través de los cuales los estudiantes pueden interactuar directamente con las ideas, visualizar y manipular objetos matemáticos en tiempo real (Moreno, 2002). Esta experiencia inspira aprendizaje.

La herramienta como GeoGebra permite a los futuros profesores desarrollar competencias tecnológicas, lo que les facilita diseñar e implementar tareas que promuevan el pensamiento crítico y la resolución de problemas en sus estudiantes. Ruíz, Ávila y Villa-Ochoa (2013) destacan que el uso de esta tecnología en el aula fomenta la creación de entornos de aprendizaje dinámicos, en los que los estudiantes pueden enfrentarse a retos y problemas matemáticos reales que les impulsan a encontrar soluciones innovadoras y a reforzar sus habilidades analíticas.

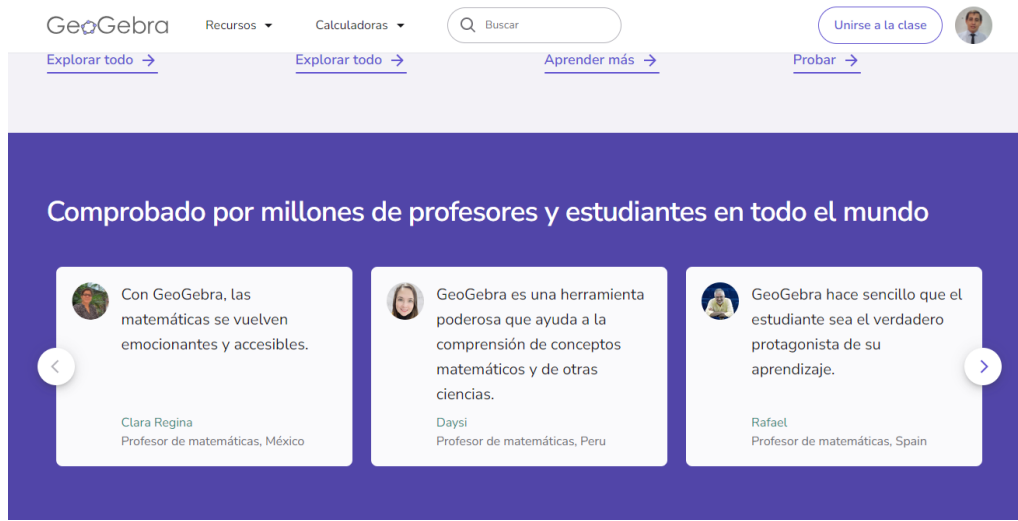
La tecnología no solo mejora la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también contribuye a la creación de un ambiente de enseñanza más participativo e interactivo.

La integración de la tecnología en la formación de profesores de matemáticas no solo enriquece el proceso de enseñanza, sino que también permite a los futuros profesores adquirir habilidades esenciales para enfrentar los retos del aula contemporánea (ver **Figura 9**).

Estas herramientas permiten visualizar conceptos abstractos, facilitando la comprensión de temas complejos y promoviendo una enseñanza más constructiva. Como señala Morales-López (2019), el uso de TIC en el aula de matemáticas no solo mejora el aprendizaje, sino que también habilita a los futuros maestros para desarrollar tareas que involucren tecnología, geometría y pedagogía, lo que potencia la capacidad de sus alumnos para explorar, argumentar y conjeturar en entornos de aprendizaje ricos en tecnología.

Figura 9

Experiencia de profesores en el uso de GeoGebra



Nota. Facsímil de la página de GeoGebra.

El uso de GeoGebra ha sido estudiado en diferentes contextos educativos, y su efectividad ha sido respaldada por múltiples investigaciones. En un estudio realizado por Rojas-Bello (2020), se encontró que GeoGebra facilita la interacción colaborativa entre profesores y estudiantes, promoviendo el aprendizaje significativo a través de la representación gráfica y el manejo de objetos geométricos. Esto se traduce en una mejor apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, quienes logran visualizar y manipular conceptos matemáticos complejos con mayor facilidad.

Esto garantiza una educación más dinámica y adaptada a los retos del siglo XXI, en la que la alfabetización tecnológica es crucial tanto para los profesores como para los estudiantes.

2.3 Circunferencia

La circunferencia es importante en la enseñanza de la geometría, especialmente en geometría sintética y analítica. Estudiar la circunferencia no se trata solamente de abordar

propiedades geométricas, sino también estudiar la conexión entre la representación algebraica y gráfica de estos conceptos.

Tomamos la decisión de estudiar la circunferencia desde el punto de vista de la geometría euclidiana y la geometría analítica con el fin de sentar las bases para identificar semejanzas y diferencias en el tratamiento matemático de este objeto en cada geometría considerada (Acosta, Páez y Guacaneme, 2024).

Las diferencias y semejanzas las suponemos esenciales en la formación matemática de los futuros profesores de matemáticas. Consideramos que la actividad de estudio realizada puede ser organizada y emulada como un conjunto de tareas en un programa de formación profesional inicial de profesores de matemáticas (Acosta, Páez y Guacaneme, 2024). Así, hemos estudiado la circunferencia en *Elementos* de Euclides e hicimos lo propio en la *Geometría* de Descartes.

2.3.1 Tratamiento de Euclides de la circunferencia

Nosotros nos hemos dado a la tarea de estudiar ([Anexo 1](#)) en “**Elementos**” de Euclides (Puertas, 1991) el tratamiento que el autor hace de la circunferencia y hemos identificado que hay dos formas esenciales de tratamiento de la circunferencia. Por un lado, como un elemento que está vinculado a la heurística que se conoce como regla y compás, es decir, la circunferencia es tratada como un objeto que se implica como herramienta en la solución de problemas y en la construcción de problemas, por ejemplo: En la primera proposición del libro I se usa la circunferencia para construir un triángulo equilátero, pero ahí se usa una condición fundamental de la circunferencia, que los puntos equidistan del centro. Esa es la condición que determina el uso de la circunferencia en términos de su definición y de la propiedad que está implicada en su definición para solucionar este problema que hace parte de la heurística en geometría euclidiana: los problemas se resuelven

trazando segmentos o rectas o circunferencias. La palabra trazar tiene un significado muy particular, estampar más bien circunferencias y estampar rectas.

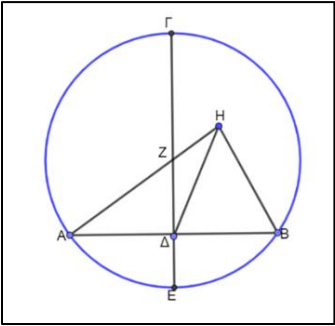
Por otro lado, Euclides hace un tratamiento de la circunferencia ya no como herramienta sino como objeto en sí mismo y ese tratamiento lo hace en el libro III y en el libro IV fundamentalmente, luego hay otros estudios de la circunferencia, pero, no abordaremos, sino únicamente de los libros III y IV. En estos libros Euclides desarrolla su teoría a través de formular proposiciones que son problemas, problemas a resolver o propiedades que demostrar para la geometría euclidiana.

Lo que presentamos enseguida es la clasificación que elaboramos según el tratamiento que hace Euclides en los libros mencionados.

Primeramente, presentamos la clasificación de planteamientos y problemas propuestos por Euclides.

Tabla 1

Clasificación de planteamientos y problemas propuestos por Euclides

<i>Circunferencia, segmentos y puntos</i>	
Proposición III-1 (Figura 10) Hallar el centro de un círculo dado (Puertas, 1991, p. 117).	<p>Figura 10 <i>Proposición III-1</i></p> 
Proposición III-17 Desde un punto dado trazar una línea recta tangente a un círculo dado (Puertas, 1991, p. 137).	
Proposición III-25 Dado un segmento de círculo completar el trazado del círculo del que es segmento (Puertas, 1991, p. 145).	
Proposición III-30 Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada (Puertas, 1991, p. 151).	
Proposición IV-1 Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo (Puertas, 1991, p. 166).	

Nota. Elaboración propia.

Circunferencia, rectas y ángulos

Proposición III-33 (Figura 11)

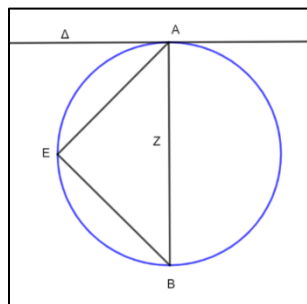
Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado (Puertas, 1991, p. 155).

Proposición III-34

A partir de un círculo dado cortar un segmento que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado (Puertas, 1991, pp. 158).

Figura 11

Proposición III-33



Nota. Elaboración propia. Elaboración propia.

Circunferencias y triángulos

Proposición IV-2 (Figura 12)

Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado (Puertas, 1991, p. 167).

Proposición IV-3

Circunscribir en torno a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado (Puertas, 1991, p. 168).

Proposición IV-4

Inscribir un círculo en un triángulo dado (Puertas, 1991, p. 169).

Proposición IV-5

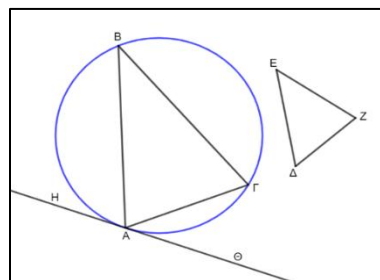
Circunscribir un círculo en torno a un triángulo dado (Puertas, 1991, p. 171).

Proposición IV-10

Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos de la base sea el doble del restante (Puertas, 1991, p. 177).

Figura 12

Proposición IV-2



Nota. Elaboración propia.

Circunferencia y cuadrados

Proposición IV-6 (**Figura 13**)

Inscribir un cuadrado en un círculo dado (Puertas, 1991, p. 173).

Proposición IV-7

Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado (Puertas, 1991, p. 174).

Proposición IV-8

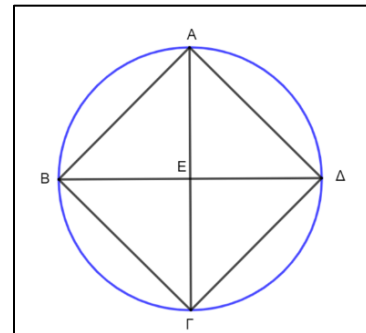
Inscribir un círculo en un cuadrado dado (Puertas, 1991, p. 175).

Proposición IV-9

Circunscribir un círculo en torno a un cuadrado dado (Puertas, 1991, p. 176).

Figura 13

Proposición IV-6.



Nota. Elaboración propia.

Circunferencias y pentágonos

Proposición IV-11

Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado (Puertas, 1991, p. 179).

Proposición IV-12

Circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno a un círculo dado (Puertas, 1991, p. 181).

Proposición IV-13

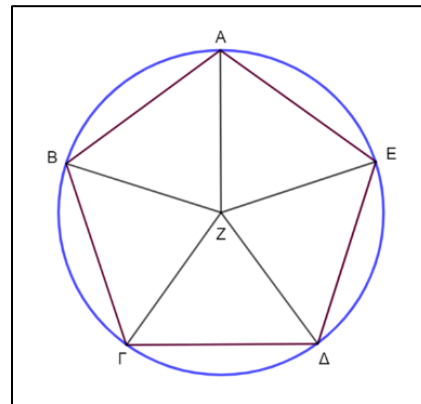
Inscribir un círculo en un pentágono dado que es equilátero y equiángulo (Puertas, 1991, p. 183).

Proposición IV-14 (**Figura 14**)

Circunscribir un círculo en torno a un pentágono dado que es equilátero y equiángulo (Puertas, 1991, p. 185).

Figura 14

Proposición IV-14



Nota. Elaboración propia.

Circunferencia y hexágono

Proposición IV-15(Figura 15)

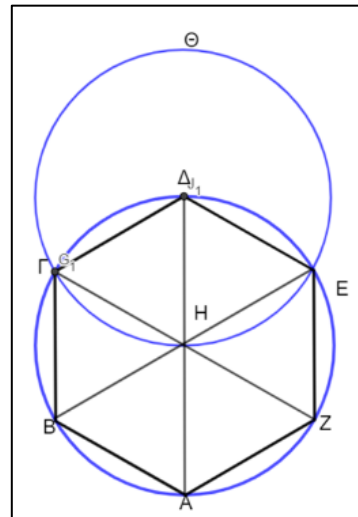
Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado (Puertas, 1991, p. 186).

Proposición IV-16

Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado (Puertas, 1991, p. 188).

Figura 15

Proposición IV-15



Nota. Elaboración propia.

Nota. Elaboración propia.

Seguidamente tenemos:

Tabla 2

Clasificación de planteamientos y demostraciones propuestos por Euclides

Circunferencia, rectas y longitudes

Proposición III-2

Si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos caerá dentro del círculo (Puertas, 1991, p. 118).

Proposición III-3

Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales (Puertas, 1991, p. 119).

Proposición III-4 (Figura 16)

Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales (Puertas, 1991, p. 120).

Proposición III-7

Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la restante y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña (Puertas, 1991, p. 123).

Proposición III-8

Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se trazan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más cercana a la que pasa por el centro es mayor a la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más cercana a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña (Puertas, 1991, p. 124).

Proposición III-9

Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo (Puertas, 1991, p. 127).

Proposición III-14

En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí (Puertas, 1991, p. 132).

Proposición III-15

En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más cercana al centro es siempre mayor que la más lejana (Puertas, 1991, p. 134).

Proposición III-23

Sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado (Puertas, 1991, p. 143).

Proposición III-24

Los segmentos circulares semejantes que están sobre rectas iguales son iguales entre sí (Puertas, 1991, p. 144).

Proposición III-28

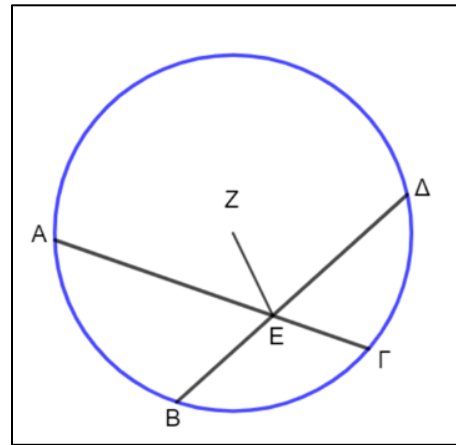
En los círculos iguales las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor (Puertas, 1991, p. 149).

Proposición III-29

En los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales (Puertas, 1991, p. 150).

Figura 16

Proposición III-4



Nota. Elaboración propia.

Circunferencias y superficies

Proposición III-35

Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra (Puertas, 1991, p. 159).

Proposición III-36 (Figura 17)

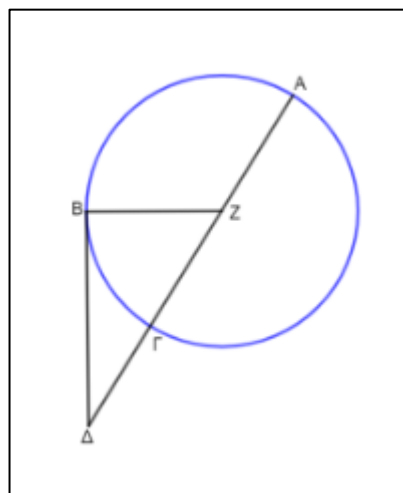
Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente (Puertas, 1991, p. 161).

Proposición III-37

Si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo, y la otra cae (sobre él), y además el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, la (recta) que cae tocará el círculo (Puertas, 1991, p. 163).

Figura 17

Proposición III-36



Nota. Elaboración propia.

Circunferencias y círculos

Proposición III-5 (Figura 18)

Si dos círculos se cortan entre sí, su centro no será el mismo (Puertas, 1991, p. 121).

Proposición III-6

Si dos círculos se tocan uno a otro, su centro no será el mismo (Puertas, 1991, p. 122).

Proposición III-10

Un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos (Puertas, 1991, p. 128).

Proposición III-11

Si dos círculos se tocan uno a otro por dentro, y se toman sus centros, la recta que une sus centros prolongada caerá sobre el punto de contacto de los círculos (Puertas, 1991, p. 129).

Proposición III-12

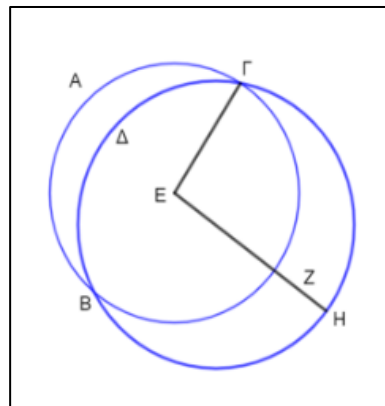
Si dos círculos se tocan uno a otro por fuera, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto (Puertas, 1991, p. 130).

Proposición III-13

Un círculo no toca a otro círculo en más de un punto, ya sea por dentro o por fuera (Puertas, 1991, p. 131).

Figura 18

Proposición III-5



Nota. Elaboración propia.

Circunferencias y ángulos

Proposición III-16

La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Puertas, 1991, p. 135).

Proposición III-18

Si una recta toca un círculo, y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la (recta) trazada será perpendicular a la tangente (Puertas, 1991, p. 138).

Proposición III-19 (**Figura 19**)

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará en la recta trazada (Puertas, 1991, p. 139).

Proposición III-20

En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia (Puertas, 1991, p. 140).

Proposición III-21

En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí (Puertas, 1991, p. 142).

Proposición III-22

Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos (Puertas, 1991, p. 142).

Proposición III-23

En los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya estén en los centros o en las circunferencias (Puertas, 1991, p. 143).

Proposición III-27

En los círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias (Puertas, 1991, p. 148).

Proposición III-31

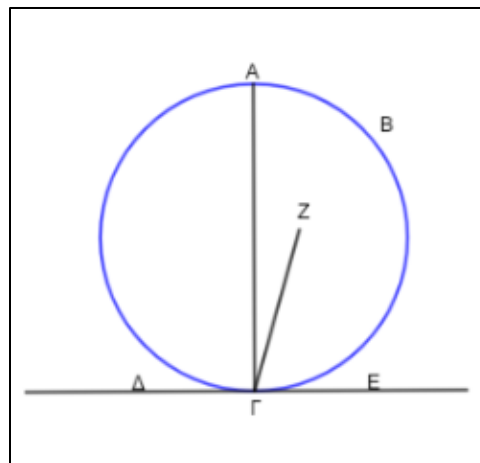
En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menor que un recto, el (ángulo) en el segmento menor es mayor que un recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto (Puertas, 1991, p. 152).

Proposición III-32

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma (Puertas, 1991, p. 154).

Figura 19

Proposición III-19



Nota. Elaboración propia.

Nota. Elaboración propia.

Con este estudio pudimos apreciar la profundidad con la que Euclides integra la circunferencia en su sistema deductivo, permitiendo tanto la resolución de problemas prácticos como la formulación de teoremas que fortalecen las bases de la geometría euclidiana.

2.3.2 *Tratamiento de Descartes de la circunferencia*

René Descartes (1637/1996) aborda la circunferencia en su obra *La Geometría*, una obra fundacional en el campo de la geometría analítica. A través de esta obra, Descartes introduce un enfoque algebraico al estudio de la geometría, que establece las bases para relacionar las ecuaciones algebraicas con las formas geométricas.

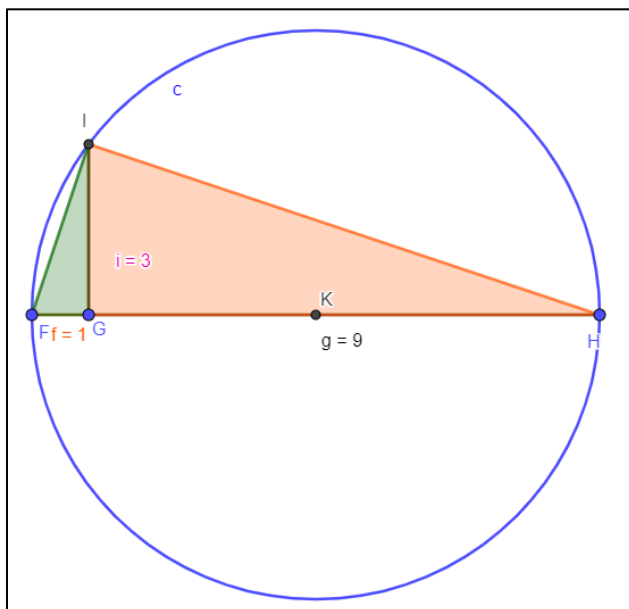
La geometría analítica tiene sus orígenes en los trabajos de Descartes. Este autor propuso durante el Renacimiento la renovación del análisis geométrico griego, Descartes buscaba plantear propuestas en la que el álgebra cumpliría una función primordial para mejorar el método del análisis geométrico.

Lo más relevante que surge de la renovación del análisis geométrico es la necesidad de probar su método, intentó resolver problemas con un grado de complejidad superior al de sus antecesores (*e.g.*, el problema de Pappus, **Figura 20**). Este problema, tiene una particularidad de que, tenía una cantidad inmensa de relaciones geométricas que no necesariamente estaban explícitas en las imágenes y de magnitudes. Por esta razón, necesitaba de un sistema que distinguiera de manera sistemática cantidades conocidas, desconocidas y operadores aritméticos. Dentro de este orden de ideas, enriqueció la utilidad de la técnica algebraica y la convirtió en una herramienta heurística integrada en un marco formal para investigar una variedad de problemas, no solo los problemas algebraicos prototípicos de la tradición algebraica anterior (Descartes 1637/1996).

El método presentado por Descartes en *La Geometría* (1637/1996) se compone de dos fases: en la primera, la parte analítica, se utiliza el álgebra para expresar las relaciones del problema mediante una ecuación adecuada; en la segunda, la parte sintética, se emplea dicha ecuación como base para construir la solución al problema, que en su caso es el lugar geométrico o locus (Bos, 2001). Así, por primera vez, se introduce la correspondencia entre ecuaciones y curvas. Además, el modo en que se construyen las curvas le permite a Descartes (1637/1996) diferenciar entre curvas geométricas y no geométricas. Las curvas geométricas son aquellas que pueden asociarse a una ecuación algebraica, mientras que aquellas que no cumplen con esta característica son llamadas por él mecánicas.

Figura 21

Extracción de la raíz cuadrada utilizando el círculo de Descartes



Nota. Elaboración propia.

Descartes (1637/1996) menciona que no es necesario trazar líneas sobre el papel para simbolizar líneas, siendo suficiente designar cada una de ellas por una letra (*e.g.*, para sumar la línea *BD* y *CH*, basta con llamar “*a*” a la primera y “*b*” a la segunda para indicar una operación, en este caso $a + b$). Las anotaciones y símbolos fueron objeto de una importante simplificación por parte de Descartes (1637/1996).

Para poder resolver un problema, se debe asumir que “el razonamiento analítico se caracteriza por trabajar con lo dado y con lo desconocido como supuestamente conocido, para con ello establecer el valor de lo desconocido” (Acosta, Páez y Guacaneme, 2024, p.105).

Aplicando este razonamiento y utilizando círculos y rectas, Descartes (1637/1996) construye la solución de una ecuación cuadrática de la forma $z^2 = az + bb$ (**Figura 22**).

Para resolver se construye el triángulo rectángulo *NLM*, cuyo lado *LM* es igual a *b* (raíz cuadrada de la cantidad conocida *bb*) y el otro lado, *LN*, es igual a $\frac{1}{2}a$, esto es: la mitad de la otra

cantidad conocida que estaba multiplicada por z , la cual se ha supuesto que es la línea desconocida. Seguidamente, prolongando MN , que es la base de este triángulo, hasta O , de suerte que NO sea igual a NL , la línea OM es z , la línea buscada. La cual se expresa de la siguiente

forma: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Pero si $yy = -ay + bb$, siendo "y" la cantidad que deseamos

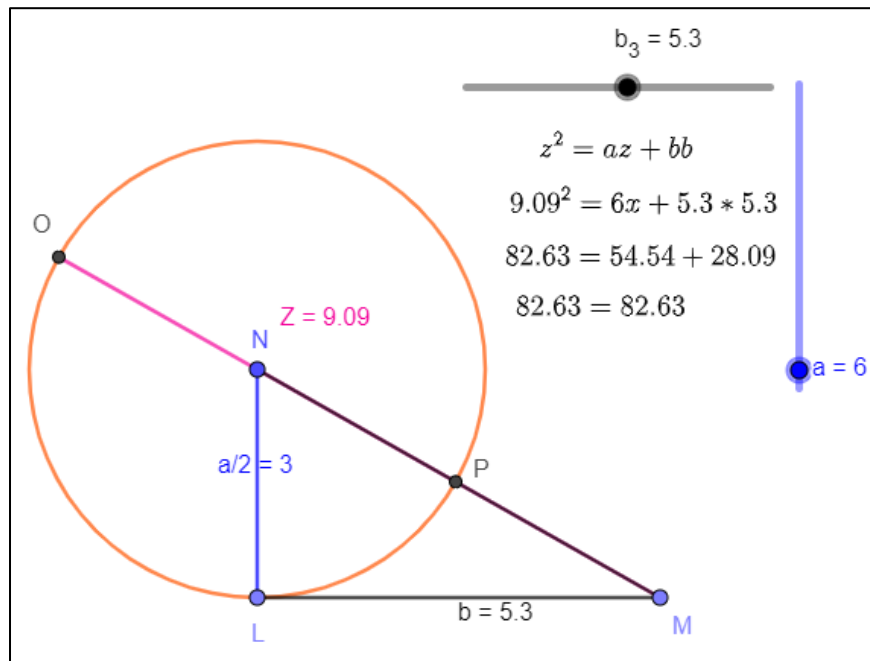
calcular, entonces se construye el mismo triángulo NLM y de la hipotenusa MN resto NP que es igual a NL , obteniendo que PM es "y", que era la raíz que se deseaba calcular, de esta forma:

$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Y de la misma forma, si tuviera $x^4 = -ax^2 + b^2$, PM sería x^2 ,

teniendo entonces que: $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Y así en otros casos.

Figura 22

Resolución de Descartes de la ecuación cuadrática de la forma $z^2 = az + bb$ utilizando círculo



Nota. Elaboración propia.

Y finalmente, si tengo $z^2 = az - bb$ (Ver **Figura 23**)

Supongo NL igual a $\frac{1}{2}a$ y LM igual a b como en el caso anterior. Después, en lugar de unir los puntos M y N, trazo una recta que pasa por MQR paralela a LN, y tomando N como centro, trazamos una circunferencia que pasa por L que corta a MQR en los puntos Q y R. Por lo tanto, la línea buscada, z, es MQ o bien MR, pues en este caso se expresa de dos maneras, a saber:

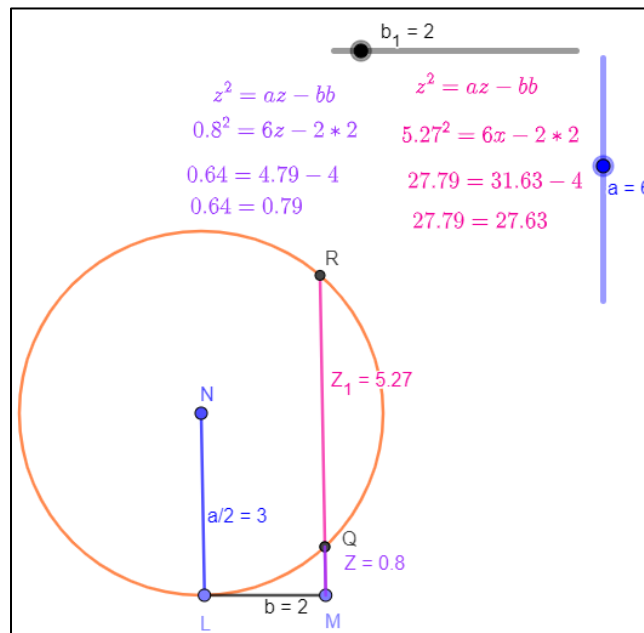
$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Y si la circunferencia que tiene como centro el punto N y pasando por el punto L, no corta ni toca a la recta MQR, entonces no existe raíz de la ecuación. En consecuencia, se puede decir, que es imposible la resolución del problema propuesto.

Figura 23

Resolución de Descartes de la ecuación cuadrática de la forma $z^2 = az - bb$ utilizando círculo



Nota. Elaboración propia.

Seguidamente, se describe las dos fases, de análisis y síntesis en el problema de Pappus (Anexo 2) para cuatro líneas², este problema fue catalogado como uno de los problemas famosos por no haber sido resuelto por geómetras de la antigüedad como Euclides y Apolonio. Descartes lo retoma en 1628 para probar su método como un reto impuesto por Golius.³ La resolución de este problema fue lo que permitió a Descartes construir su nuevo método plasmado en *La Géométrie* (1637/1996) y crear su famosa álgebra de segmentos, es decir, la semiótica del álgebra que conocemos hoy día.

El problema de Pappus, en su forma general, se describe así:

Dadas varias líneas en el plano y ciertos ángulos y razones específicas, se requiere encontrar el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a estas líneas cumplen con una proporción particular (ver **Figura 20**).

Por ejemplo, para dos líneas l_1 y l_2 y un ángulo θ , el problema puede requerir encontrar los puntos P tales que las distancias d_1 y d_2 desde P a l_1 y l_2 respectivamente, satisfagan la relación $d_1 : d_2 = k$, donde k es una constante dada.

Método Analítico de Descartes

Descartes revolucionó la forma de abordar este problema mediante los siguientes pasos:

1. Suposición Inicial: Descartes comienza asumiendo que el problema está resuelto, es decir, que existe un punto P que satisface las condiciones del problema.

² La explicación completa de la resolución puede leerse en Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Medellín: Universidad de Medellín*, 764-777.

³ Jacobus Golius, cuyo nombre de nacimiento fue Jacob van Gool (1596 – 1667), fue un orientalista y matemático neerlandés destacado por su labor en la Universidad de Leiden, fue contemporáneo y colega de Descartes en esa Universidad.

2. Designación Algebraica: Introduce variables algebraicas para representar las distancias y los ángulos. En su enfoque, las distancias y ángulos se representan mediante ecuaciones.
3. Ecuaciones y Relaciones: Utiliza la geometría analítica para expresar las relaciones geométricas en forma de ecuaciones algebraicas. Esto implica traducir las proporciones geométricas en igualdades algebraicas.
4. Resolución de Ecuaciones: Descartes desarrolla un sistema de ecuaciones que describe las condiciones del problema. Estas ecuaciones generalmente son de segundo grado y pueden resolverse usando métodos algebraicos.
5. Construcción de la Curva: La solución del problema se representa como una curva algebraica, cuyo lugar geométrico corresponde a los puntos que satisfacen las ecuaciones derivadas.

Para el caso específico de cuatro líneas, el procedimiento de Descartes se desarrolla así:

- Se consideran cuatro líneas dadas l_1, l_2, l_3, l_4 y se buscan los puntos P tales que la relación entre las distancias desde P a estas líneas cumple con una proporción específica.
- Descartes designa las distancias AB y BC a estas líneas con variables x, y .
- Introduce un parámetro z bajo la consideración, puesto que todos los ángulos del triángulo ARB son dados, la proporción entre los lados AB y BR también lo es, y la designa como z es a b , de modo que AB es x , BR es $\frac{bx}{z}$, así utiliza relaciones proporcionales para derivar una ecuación de segundo grado en dos incógnitas.
- Esta ecuación define una cónica (círculo, parábola, elipse o hipérbola) que representa la solución del problema.

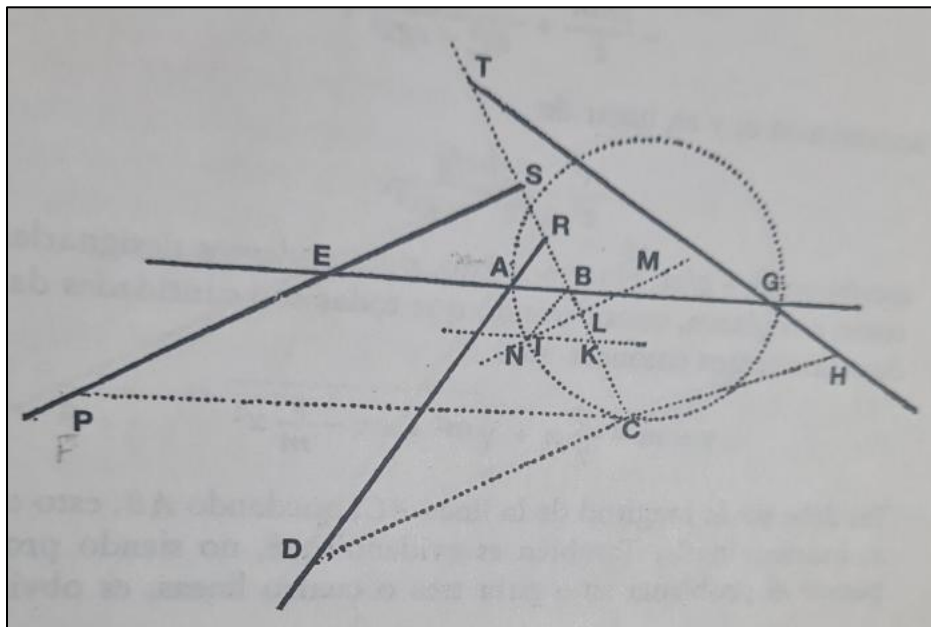
La conclusión del análisis se da con la resolución y simplificación de la ecuación general para proceder con la síntesis. Esta inicia con el estudio de los casos particulares que pueden darse con los valores de los parámetros y signos de la ecuación resultante de la etapa del análisis. Descartes muestra las diferentes soluciones de lugares geométricos resultantes y procede a mostrar sus construcciones (ver **Figura 24**).

Innovaciones y contribuciones

1. **Curvas Algebraicas:** La introducción de ecuaciones para describir curvas fue un paso crucial. Antes de Descartes, las curvas se estudiaban principalmente mediante construcciones geométricas.
2. **Sistema de Coordenadas:** Descartes emplea un sistema de coordenadas para simplificar y generalizar la solución de problemas geométricos, lo que facilita el manejo algebraico.
3. **Análisis y Síntesis:** Descartes combinó métodos de análisis (partiendo de la solución y retrocediendo hacia lo conocido) y síntesis (partiendo de lo conocido para construir la solución) para resolver problemas geométricos de manera sistemática.

Figura 24

Círculo resultante del problema de Pappus



Nota. Facsímil del libro La Geometría. Descartes (1996, p. 419)

Descartes logró resolver el problema de Pappus al desarrollar un método que unía el álgebra y la geometría, introduciendo un nuevo objeto matemático: la curva algebraica. Su enfoque permitió resolver de manera general problemas que antes solo podían abordarse de manera específica y limitada. Este método analítico-cartesiano fue una de las bases para el desarrollo de la geometría analítica moderna.

En el libro segundo, Descartes (1637/1996) profundiza en la naturaleza de las líneas curvas y su representación algebraica, en lo que constituye una extensión de su enfoque hacia las curvas geométricas en general, incluidas las cónicas, de las cuales es un caso particular, la circunferencia. Aunque Descartes no aborda específicamente la circunferencia como un objeto aislado, su tratamiento de las líneas curvas incluye herramientas y métodos aplicables al estudio de esta figura.

Descartes clasifica las curvas en dos grandes grupos: las que pueden ser descritas mediante ecuaciones algebraicas y las que requieren construcciones mecánicas más complejas.

En este contexto, la circunferencia, como una curva que puede ser descrita por una ecuación algebraica cuadrática, pertenece al primer grupo. La circunferencia, bajo el enfoque cartesiano, es una curva cuyas propiedades se pueden expresar en términos de relaciones algebraicas entre las coordenadas de puntos en el plano. Esta representación fue clave para el desarrollo posterior de la geometría analítica.

Además, Descartes discute la relación entre las propiedades geométricas de las curvas y su expresión algebraica. Esta conexión entre geometría y álgebra marcó un punto de inflexión en la forma en que los matemáticos abordaron el estudio de las curvas, permitiendo una representación más precisa de figuras como la circunferencia.

2.4 Diseño de tareas

El diseño de tareas es un aspecto crítico en la formación de futuros profesores de matemáticas, ya que implica la elaboración de actividades para los estudiantes, que permitan el aprendizaje significativo y la adquisición de competencias matemáticas claves en el área. Un diseño de tareas debe considerar el contenido matemático, los contextos de intervención, las instrumentaciones disponibles, como GeoGebra, y las necesidades pedagógicas de los estudiantes. En la noción de circunferencia, las tareas tienen que promover la visualización, experimentación y argumentación, de manera que los profesores aprendices consideren un modelo integrador y tecnológico adecuado para responder a los requerimientos de la teoría geométrica y pedagógica.

2.4.1 Diseño de tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas

El diseño de tareas en la formación de profesores de matemáticas es una estrategia fundamental para promover no solo el aprendizaje de los conceptos matemáticos, sino también el

desarrollo de habilidades pedagógicas que serán esenciales en su futuro rol como profesores. Este enfoque tiene como objetivo no solo fortalecer el conocimiento disciplinar de los futuros profesores, sino también conectar ese conocimiento con su aplicación en el aula. Así, se busca que los profesores en formación desarrollen un conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés), que incluye no solo el dominio del contenido, sino también la habilidad para interpretar y responder a las ideas matemáticas de los estudiantes (Álvarez et al., 2020).

Un aspecto crucial en el diseño de estas tareas es la consideración de la complejidad inherente a la enseñanza de las matemáticas, que va más allá de simplemente transmitir conocimientos. Las tareas deben fomentar la interacción con los estudiantes, permitir la interpretación de su razonamiento y facilitar la evaluación de su comprensión (Breen y O' Shea, 2018). Según Grossman et al. (2009), las “aproximaciones de práctica”, es decir, las oportunidades para que los futuros profesores participen en prácticas cercanas a las de un profesor en ejercicio, son fundamentales para que desarrollen las habilidades necesarias para enseñar de manera efectiva. Estas aproximaciones deben ser integradas en las tareas que realicen durante su formación, de modo que los futuros profesores puedan experimentar y reflexionar sobre las posibles respuestas que surgirán en un aula real.

El diseño de tareas para la formación de profesores debe estar centrado en actividades matemáticas que promuevan el pensamiento crítico y la resolución de problemas, de modo que los futuros profesores se enfrenten a situaciones auténticas de la enseñanza. Además, las tareas deben fomentar la participación de los estudiantes, involucrándolos en la construcción del conocimiento y el desarrollo de conceptos a través de la interacción con problemas matemáticos complejos (Breen y O' Shea, 2018). Este tipo de tareas también debe estar diseñado para generar

discusiones entre pares y reflexiones sobre cómo los estudiantes en la educación secundaria comprenderán y aplicarán los conceptos matemáticos.

En particular, las tareas que conectan el contenido de las matemáticas con su enseñanza en niveles escolares permiten que los futuros profesores comprendan cómo los conceptos que enseñarán se desarrollan a lo largo del currículo. Estas conexiones son esenciales para que los profesores puedan explicar el contenido de manera accesible y pedagógicamente efectivo, un componente clave del conocimiento matemático para la enseñanza (Álvarez et al., 2020).

El diseño de tareas debe considerar que los futuros profesores no solo necesitan dominar el contenido matemático, sino también aprender a generar preguntas significativas y constructivas que permitan avanzar en la comprensión de los estudiantes. Esta habilidad es vital para crear un entorno de aprendizaje que fomente la curiosidad y la exploración matemática, ayudando a los estudiantes a construir su propio entendimiento de los conceptos (Álvarez et al., 2020).

El diseño de tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas es un componente esencial que busca integrar la teoría y la práctica de manera significativa. Del mismo modo, una tarea con sentido, especialmente en la formación inicial de profesores, no solo debe enfocarse en la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también en el desarrollo de competencias pedagógicas específicas que permitan a los futuros profesores conectar la enseñanza con la realidad del aula.

Se fundamenta el diseño de tareas así, en diversos enfoques pedagógicos y metodológicos que buscan promover el desarrollo de competencias necesarias para enseñar matemáticas eficientemente. Este proceso involucra no solo el conocimiento disciplinar, sino también una

profunda comprensión de la didáctica de las matemáticas, la reflexión crítica sobre la práctica y la capacidad de integrar teorías educativas en contextos de enseñanza reales.

2.4.2 Características de las tareas con sentido en la formación docente

De acuerdo con Rendón, Mora y Morales (2023)⁴, las tareas con sentido en la formación inicial de profesores de matemáticas deben vincularse estrechamente con el conocimiento matemático para la enseñanza, lo que implica una combinación entre la teoría educativa y las experiencias reales que enfrentan los profesores en su práctica profesional. Estas tareas deben facilitar el desarrollo de lo que se denomina la "competencia de mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas, lo que significa que el futuro profesor debe ser capaz de analizar y reflexionar sobre su práctica, considerando tanto el aprendizaje de los estudiantes como los procesos de enseñanza antes, durante y después de la misma (Rendón, Mora, y Morales, 2023).

Además, estas tareas deben promover la participación de los futuros profesores en situaciones de enseñanza reales o simuladas, permitiendo que pongan en práctica sus conocimientos pedagógicos y matemáticos en contextos que se asemejen a las condiciones reales del aula. Según García (2005), esto es fundamental para el desarrollo de competencias profesionales que le permitan al profesor no solo enseñar matemáticas, sino también aprender de su propia práctica a través de la reflexión y el análisis crítico de su desempeño.

Las principales características de una tarea con sentido en la formación inicial de profesores de matemáticas son las siguientes:

- Producción de saberes originales o novedosos: Permitir a los futuros profesores generar conocimientos propios durante su desarrollo profesional.

⁴ Si bien se consideraron las ideas resumidas en este documento, se contó con una versión inédita ampliada de la ponencia disponible en <https://miniurl.cl/hr9sxl>.

- Rol activo del profesor en formación: Promover la interacción y el trabajo colaborativo mediante discusiones.
- Reconocimiento y enriquecimiento del saber-ser-hacer: Identificar limitaciones en las concepciones actuales de los futuros docentes y ofrecer oportunidades para superarlas.
- Contextualización en prácticas reales: Abordar problemas y situaciones profesionales auténticas de la enseñanza de las matemáticas.
- Exhibición y transformación del conocimiento profesional: Integrar y modificar el conocimiento matemático, didáctico y curricular en función de las tareas diseñadas.
- Conexión teoría-práctica: Facilitar la vinculación entre conceptos teóricos y su aplicación práctica en situaciones reales.
- Desarrollo de competencias de análisis y reflexión: Fomentar la capacidad de analizar procesos educativos, interpretar respuestas estudiantiles y reflexionar sobre la enseñanza.
- Tratamiento situado de objetos matemáticos: Abordar contenidos escolares específicos desde un enfoque contextualizado y basado en investigaciones.
- Facilitar la planeación y adaptación en la enseñanza: Incluir la anticipación de respuestas, manejo de contingencias, valoración de producciones estudiantiles y diálogo curricular.

Estas características buscan que las tareas no solo sean significativas en términos conceptuales, sino que también contribuyan directamente al desarrollo de las competencias necesarias para la práctica docente efectiva.

2.4.3 Relación entre teoría y práctica en las tareas profesionales

Una de las grandes dificultades en la formación de profesores de matemáticas ha sido la desconexión entre la teoría y la práctica. Las investigaciones de Llinares (2011; 2012) han destacado la importancia de diseñar tareas que, además de abordar conceptos matemáticos

fundamentales, ofrezcan oportunidades para que los futuros profesores experimenten de manera práctica cómo esos conceptos se enseñan y se aprenden en el aula. De esta forma, se fortalece la comprensión de los futuros profesores sobre cómo aplicar la teoría educativa y las matemáticas en situaciones concretas de enseñanza (Llinares, 2012).

La vinculación entre teoría y práctica es también un elemento central en las propuestas de Aké y López-Mojica (2020), quienes señalan que las tareas deben estar diseñadas para que los futuros profesores puedan reconocer y resolver los problemas que enfrentan en su práctica diaria, utilizando herramientas conceptuales y teóricas que han sido previamente estudiadas. Esto no solo les permite a los profesores mejorar sus habilidades de enseñanza, sino también a desarrollar un sentido crítico que los lleva a cuestionar y mejorar continuamente su práctica pedagógica.

Las tareas profesionales deben facilitar el desarrollo de un conocimiento especializado en torno a los objetos matemáticos que se enseñan en la educación básica y media. Godino et al. (2017) sugieren que este tipo de tareas deben enfocarse en el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas que permitan al futuro profesor no solo dominar el contenido matemático, sino también ser capaz de diseñar y analizar tareas matemáticas efectivamente, anticipar posibles respuestas de los estudiantes, y reflexionar sobre cómo mejorar la enseñanza.

Estas tareas permiten que el futuro profesor desarrolle una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y las estrategias pedagógicas, lo que les permitirá diseñar lecciones que respondan a las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes. En este sentido, las tareas con sentido deben ser vistas como un puente que conecta el conocimiento teórico con la práctica pedagógica, facilitando el desarrollo de competencias profesionales que son esenciales para la enseñanza efectiva de las matemáticas.

2.4.4 Enfoques en el diseño de tareas profesionales

Uno de los aspectos importantes en la formación de futuros profesores es la creación de entornos de aprendizaje que les permitan experimentar de manera auténtica el proceso de enseñanza. García (2005) destaca que el aprendizaje del futuro profesor debe ser situado, es decir, debe estar estrechamente relacionado con las prácticas reales que enfrentarán en las aulas. Este enfoque sugiere que las tareas diseñadas para la formación deben reflejar situaciones auténticas de enseñanza y aprendizaje, promoviendo un contexto en el que los futuros profesores no solo adquieren conocimientos, sino que también desarrollan habilidades pedagógicas clave (García, 2005).

Las tareas diseñadas deben involucrar a los futuros profesores en actividades de reflexión sobre su propio aprendizaje y la comprensión de cómo los estudiantes de matemáticas aprenden. De acuerdo con García y Llinares (2001), estas actividades incluyen la resolución de problemas matemáticos, la observación y el análisis de clases, y la discusión crítica sobre métodos de enseñanza. A través de estas experiencias, los futuros profesores pueden generar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y de las estrategias pedagógicas efectivas para su enseñanza.

El enfoque situado del aprendizaje propuesto por Lave y Wenger (1991) es particularmente relevante en el diseño de tareas profesionales para la formación de profesores. Este enfoque sostiene que el aprendizaje ocurre a través de la participación en comunidades de práctica, en las que los estudiantes para profesores interactúan con profesionales experimentados y participan en actividades auténticas de enseñanza. En este sentido, las tareas profesionales deben ser diseñadas para facilitar una participación periférica legítima, en la que los futuros

profesores asumen responsabilidades progresivas en el proceso de enseñanza mientras aprenden de sus experiencias (Lave & Wenger, 1991).

Además, Simon (1994) propone un enfoque cíclico para el aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas, en el que los futuros profesores alternan entre la teoría y la práctica. Este ciclo permite que los estudiantes para profesores desarrollen una comprensión teórica de los conceptos matemáticos y luego apliquen esa comprensión en situaciones reales de enseñanza, reflejando así la importancia de la práctica situada en el proceso formativo.

El diseño de tareas profesionales también debe considerar la incorporación de diversas estrategias metodológicas que favorezcan la reflexión y la evaluación continua del proceso de enseñanza-aprendizaje. Según García (2005), estas estrategias incluyen el uso de estudios de caso, protocolos de clases grabadas, entrevistas clínicas y situaciones de microenseñanza. Estas herramientas permiten a los futuros profesores analizar y reflexionar sobre sus propias prácticas y las de otros, promoviendo un desarrollo continuo de su conocimiento pedagógico y matemático.

En este contexto, el uso de ciclos de reproducción y de itinerarios de formación, tal como lo propone García (2005), se convierte en una herramienta valiosa para articular las implicaciones teóricas del aprendizaje situado con la práctica concreta en la formación de profesores. Estos ciclos permiten que los futuros profesores pasen por un proceso iterativo de resolución de problemas, reflexión y evaluación, generando un aprendizaje profundo y significativo en el aula.

En conclusión, el diseño de tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas debe centrarse en el desarrollo de competencias que les permitan vincular la teoría con la práctica de manera útil. Estas tareas no solo deben enfocarse en el contenido matemático,

sino también en los aspectos pedagógicos que son esenciales para la enseñanza. El desarrollo de la competencia de "mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas, así como la reflexión crítica sobre la propia práctica docente, son aspectos clave que deben abordarse en el diseño de estas tareas. También, a través de la reflexión crítica, la participación en comunidades de práctica y el uso de estrategias metodológicas diversas, los futuros profesores pueden desarrollar las competencias necesarias para enfrentar los desafíos de la enseñanza de las matemáticas. Así, los futuros profesores estarán mejor preparados para enfrentar los desafíos de la enseñanza en el aula, apoyados en un conocimiento especializado tanto en matemáticas como en pedagogía.

3 RESULTADOS

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en el desarrollo del trabajo final de grado. Este apartado está compuesto primeramente por el logro del objetivo general, para luego describir lo propio de los objetivos específicos en el apartado de descripción general de las asesorías, en donde se encontrarán las vivencias de las asesorías. Luego se presentarán las tareas identificadas en ese marco y por último la reformulación y organización de cinco tareas profesionales para futuros profesores de matemáticas.

Con relación al objetivo general que pretendió “Identificar elementos base para el diseño de tareas profesionales que faciliten el estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y analítica, integrando el uso de GeoGebra”, se pudo lograr, porque efectivamente pudimos identificar los cimientos para poder diseñar las tareas, considerando estos con visión de la geometría sintética, es decir, desde la perspectiva de Euclides, así como la geometría analítica de Descartes.

Desde nuestra perspectiva, esos elementos base fueron reconocidos en las vivencias durante las sesiones de asesorías, y son: el proceso de interpretación del enunciado, compuesto a su vez por el proceso de comprender la figura con relación al enunciado literal de la propuesta; el seguir paso a paso el enunciado propuesto a través de la lectura; hacer la demostración del enunciado de manera individual según como cada uno lo interpreta; y la comprensión de esa demostración para la resolución del problema.

Otro elemento importante fue el uso de GeoGebra para visualizar y manipular propiedades geométricas de la circunferencia. Así también, fue relevante el desarrollo de habilidades para integrar GeoGebra en el diseño de actividades matemáticas en el aula. Una de las principales ventajas de la utilización de GeoGebra es su capacidad para generar

representaciones dinámicas, estas tareas permitirían a los futuros profesores la oportunidad de explorar visualmente las relaciones entre la circunferencia y otros elementos geométricos.

En este orden de ideas, es importante que los futuros profesores puedan identificar las posibles dificultades que enfrentarían sus propios alumnos al trabajar con este tipo de tareas. Esto también permitiría verificar construcciones y resultados, lo que ofrece una oportunidad para que los estudiantes – futuros profesores – reflexionen sobre sus errores y ajustes. Esto es esencial para el proceso de formación docente, ya que les podría permitir a los futuros profesores anticipar posibles errores de sus propios estudiantes. Además, las tareas serían flexibles y escalables, es decir, esto implica, que los futuros profesores pueden ser capaces de modificar las tareas y adaptarlas para diferentes niveles educativos o para ajustarlas según las necesidades de sus estudiantes.

El diseño de tareas profesionales que involucren el uso de GeoGebra para el estudio de la circunferencia debe centrarse en objetivos claros de aprendizaje, exploración visual e interactiva, y la contextualización tanto matemática como didáctica. Estas tareas fomentarían la resolución de problemas, la conjeturación y proporcionarían retroalimentación formativa a los futuros profesores, permitiendo una integración efectiva entre teoría y práctica en su formación profesional (Rendón, Mora, y Morales, 2023).

De este modo podemos pasar a describir los logros respecto a los objetivos específicos en los siguientes subapartados de este capítulo.

3.1 Descripción general de las asesorías

En el marco del trabajo final de grado y respecto al primer objetivo específico “Vivenciar el estudio de la circunferencia desde el punto de vista de la geometría sintética y analítica con el uso de GeoGebra, con base en las experiencias de formación en las sesiones de asesorías”, se

logró evidenciar las vivencias adquiridas en el aprendizaje de la circunferencia mediante el uso de GeoGebra desde la perspectiva euclidiana y cartesiana, a partir de las experiencias de formación desarrolladas durante las sesiones de asesoría. Estas se llevaron a cabo desde finales de enero de 2024 con una frecuencia de cuatro horas semanales, las que ofrecieron un espacio propicio para la exploración y resolución de tareas profesionales desde las perspectivas ya citadas. Para documentar este proceso de aprendizaje, se grabaron todas las sesiones, y así nos pudo ayudar al análisis reflexivo permitiendo captar la esencia de las experiencias vividas.

Al inicio de las asesorías del trabajo final de grado, nuestro asesor empezó indagando sobre qué estudia la geometría analítica y qué la geometría sintética. Nuestra respuesta inicial tuvo un cambio, ya que con el correr de los meses y con las experiencias vividas en cada una de ellas fuimos cambiando de idea para poder hoy día tener más claro el panorama de estudio de cada geometría mencionada.

En esta perspectiva, nuestro asesor nos propuso, en primer lugar, leer las proposiciones de los libros III y IV de Elementos de Euclides, para poder entender las proposiciones y los pasos que se siguen para la demostración o resolución de los problemas planteados. En este estudio, entendimos que no era fácil interpretar lo que Euclides escribió, ya que no utiliza números sino superficies, rectas, circunferencias, y relaciones entre ellas. Esa vivencia de tratar de entender la manera de proponer Euclides sus ejercicios nos hizo ver qué es lo que debe saber un futuro profesor de matemáticas para poder enfocar de manera más acertada el objeto de la circunferencia en el aula. Además, pudimos encontrar las dificultades que un futuro profesor podría enfrentar a la hora de interpretar y representar los problemas de Euclides. Nosotros siempre nos apoyamos en GeoGebra para poder graficar y resolver esas situaciones.

Luego, el asesor nos propuso leer el libro la Geometría de Descartes, sus dos primeros libros, en el que estudiamos unas tareas de cómo Descartes utilizaba la circunferencia para poder resolver una raíz cuadrada o una ecuación cuadrática, para después proponer analizar la resolución que hizo Descartes al problema de Pappus. Este ejercicio nos hizo vivenciar más aun sobre los conocimientos que debe tener un futuro profesor de matemáticas. El problema de Pappus es muy complejo de entender, pero lo importante fue conocer de cómo lo resolvió Descartes utilizando unas ecuaciones cuadráticas para cada tipo de cónica.

Estas vivencias en cada asesoría nos hicieron reflexionar acerca de la importancia que tiene el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas con respecto a lo que va a enseñar y qué enseñar. A continuación, ponemos a disposición algunos videos de las asesorías:

- Video 1: [Asesoría TG Cynthia&Francisco-20240212_092530-Grabación de la reunión.mp4](#)
- Video 2: [Asesoría TG Cynthia&Francisco-20240219_091530-Grabación de la reunión.mp4](#)
- Video 3: [Asesoría TG Cynthia&Francisco-20240529_095624-Grabación de la reunión.mp4](#)

La vivencia del estudio de la circunferencia desde las perspectivas de la geometría sintética y analítica, mediante el uso de GeoGebra, nos permitió un enriquecimiento significativo para la formación de los futuros profesores de matemáticas. A través de las sesiones de asesoría, logramos no solo desarrollar competencias técnicas en el manejo de esta herramienta digital, sino también fomentó una comprensión profunda y contextualizada de los conceptos geométricos. Experimentamos un aprendizaje activo, en el que la visualización y la manipulación de los elementos geométricos facilitaron la integración de teorías clásicas con enfoques contemporáneos. Esta vivencia demostró ser fundamental para promover una enseñanza más dinámica y significativa, para equipar a los futuros profesores de matemáticas con las habilidades necesarias para abordar el estudio de la circunferencia de manera efectiva en sus futuras aulas.

3.2 Presentación de las tareas identificadas

Con respecto al segundo objetivo específico “Identificar las tareas profesionales en el marco de las vivencias del estudio de la circunferencia con GeoGebra, desde nuestra experiencia en las sesiones de asesorías”, constatamos lo siguiente. En los dos subapartados siguientes presentamos, primero desde la geometría sintética y luego desde la geometría analítica las tareas identificadas durante las vivencias de aprendizaje durante las asesorías.

3.2.1 Tareas identificadas en el libro *Elementos de Euclides*

El estudio de la circunferencia ha sido un tema fundamental en la geometría euclidiana desde los tiempos de Euclides, quien en *Elementos* lo utilizó como heurística con regla y compás y como objeto de estudio para demostrar proposiciones o resolver problemas. Este objeto matemático no solo juega un papel crucial en la resolución de problemas geométricos, sino que también constituye una base para la comprensión de la relación entre diferentes objetos y conceptos matemáticos, como rectas, ángulos, polígonos inscritos y áreas. En el contexto de la formación de futuros profesores de matemáticas, es esencial que comprendan profundamente las propiedades de la circunferencia, así como su comportamiento en distintas situaciones problemáticas.

Desde la perspectiva de la geometría euclidiana, el enfoque tradicional en el estudio de la circunferencia ha sido visual. A través de construcciones geométricas, demostraciones rigurosas y el uso de axiomas, nos guiamos en la exploración de las propiedades de este objeto matemático. Sin embargo, la incorporación de GeoGebra transformó la manera en que pudimos vivenciar estos conceptos, permitiendo una inspección dinámica y visualmente interactiva. La herramienta GeoGebra, nos facilitó la manipulación directa de objetos geométricos, como la

circunferencia y sus elementos asociados, nos amplió la capacidad para realizar conjeturas y desarrollar una comprensión más profunda del comportamiento geométrico de la circunferencia.

En este sentido, las sesiones de asesorías, en las que se utilizó GeoGebra para el estudio de la circunferencia, proporcionaron un espacio valioso para comprender que los futuros profesores de matemáticas puedan experimentar con las propiedades de este objeto desde una perspectiva dinámica. Estas vivencias no solo permitirían a los estudiantes observar de manera activa las relaciones geométricas, sino que también estén preparados para enfrentar situaciones reales en el aula, en donde la tecnología podría ser una herramienta poderosa para la enseñanza en este caso de la circunferencia.

A partir de estas experiencias, surge la necesidad de identificar las tareas profesionales que se derivan de estas vivencias. Dichas tareas deberían permitir a los futuros profesores integrar el uso de GeoGebra en su práctica docente, promoviendo la enseñanza de la circunferencia a través de construcciones visuales, conjeturas y análisis geométrico riguroso. Además, estas tareas deben estar diseñadas para que los futuros profesores no solo comprendan las propiedades geométricas, sino también cómo facilitar el aprendizaje de sus estudiantes mediante el uso adecuado de la tecnología.

A continuación, citamos las tareas identificadas en el marco de la geometría sintética:

1. Comprender las proposiciones del Libro III y IV.
2. Organizar las proposiciones según nuestra perspectiva.
3. Proposición III-1: Hallar el centro de un círculo dado (Puertas, 1991, p. 117).
4. Proposición III-5: Si dos círculos se cortan entre sí, su centro no será el mismo (Puertas, 1991, p. 121).

5. Proposición III-16: La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Puertas, 1991, p. 135).
6. Proposición III-19: Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará en la recta trazada (Puertas, 1991, p. 139).
7. Proposición III-25: Dado un segmento de círculo completar el trazado del círculo del que es segmento (Puertas, 1991, p. 145).
8. Proposición III-30: Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada (Puertas, 1991, p. 151).
9. Proposición III-36: Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente (Puertas, 1991, p. 161).
10. Proposición IV-4: Inscribir un círculo en un triángulo dado (Puertas, 1991, p. 169).

3.2.2 Tareas identificadas en el libro Geometría de Descartes

El estudio de la circunferencia, desde la perspectiva de la geometría cartesiana, introducida por René Descartes, marca un punto crucial en la evolución de la geometría al incorporar el análisis algebraico en la representación de figuras geométricas. En su obra *La Géométrie* (1637/1996), Descartes establece un puente entre el álgebra y la geometría, permitiendo describir las figuras geométricas (en este caso la circunferencia) mediante

ecuaciones algebraicas. Este enfoque nos permitió realizar un análisis más profundo de los objetos geométricos, como la circunferencia.

En la formación de profesores de matemáticas, es esencial que los futuros maestros no solo comprendan esta representación algebraica de la circunferencia, sino que también dominen la forma de integrarla en su práctica docente. GeoGebra, al ser una herramienta que combina las representaciones algebraicas y gráficas, proporciona un entorno propicio para que los futuros profesores exploren y visualicen las conexiones entre ambas representaciones. A través de GeoGebra, es posible manipular visualmente la circunferencia y, al mismo tiempo, observar cómo estas manipulaciones afectan la ecuación que la describe, lo que facilita una comprensión más profunda y dinámica de la relación entre geometría y álgebra.

Las sesiones de asesorías en las que se empleó GeoGebra para el estudio de la circunferencia nos permitieron vivenciar esta conexión entre la geometría de Descartes y el análisis algebraico, proporcionando herramientas no solo para resolver problemas geométricos, sino también para diseñar actividades que promuevan en los futuros profesores de matemáticas la comprensión de estas interrelaciones. Por medio de estas vivencias, los futuros maestros podrían tener la oportunidad de desarrollar una comprensión sólida de la circunferencia desde la perspectiva cartesiana.

Identificar las tareas profesionales que emergen de estas experiencias con GeoGebra implicó diseñar tareas que permitirían a los futuros profesores aplicar tanto el análisis algebraico como la exploración geométrica de la circunferencia en situaciones de enseñanza reales. Estas tareas se enfocan en el uso de GeoGebra para hacer visible la dualidad algebraica-geométrica inherente a la circunferencia y, a su vez, fomentar la reflexión didáctica sobre cómo sus futuros

estudiantes podrían aprender al integrar estas dos perspectivas en su comprensión del objeto geométrico.

Seguidamente listamos las tareas identificadas desde la perspectiva de la geometría analítica:

1. Operaciones (suma, resta, multiplicación y división) entre longitudes de segmentos.
2. La extracción de la raíz cuadrada por medio de una circunferencia.
3. Resolución de ecuación de la forma $z^2 = az + bb$ por medio de rectas y circunferencia.
4. Resolución de ecuación de la forma $z^2 = az - bb$ por medio de rectas y circunferencia.
5. Análisis de la resolución del problema de Pappus.

En conclusión, tanto la geometría euclidiana como la geometría cartesiana ofrecen enfoques complementarios para el estudio de la circunferencia, y su integración en la formación de futuros profesores de matemáticas resulta importante. Desde la panorámica euclidiana, la comprensión visual y deductiva de las propiedades geométricas de la circunferencia proporciona una base para explorar relaciones entre objetos matemáticos mediante construcciones y demostraciones. Por otro lado, la geometría cartesiana, al incorporar el análisis algebraico, permite un tratamiento más abstracto y generalizado de la circunferencia, facilitando la conexión entre las representaciones algebraicas y gráficas. GeoGebra, como herramienta tecnológica, es capaz de articular ambas perspectivas, ofreciendo un entorno dinámico que potencia el entendimiento de estas dualidades. Las tareas profesionales que diseñamos a partir de estas vivencias no solo permitirían a los futuros profesores de matemáticas conocer los conceptos

matemáticos involucrados, sino también reflexionar sobre cómo integrar estas herramientas para una enseñanza efectiva.

De este modo, pasamos a describir los logros obtenidos con respecto al tercer objetivo de este trabajo final de grado.

3.3 Reformulación y organización de las tareas identificadas

El proceso de organizar las tareas profesionales en el marco del estudio de la circunferencia utilizando GeoGebra implica estructurar las experiencias y conocimientos adquiridos en torno a este objeto matemático, con el fin de proporcionar a los futuros profesores de matemáticas herramientas didácticas y pedagógicas efectivas. GeoGebra, permitió una exploración interactiva y visual que fortaleció la comprensión del concepto tanto desde la geometría sintética como desde la analítica. La organización de estas tareas profesionales buscó no solo sistematizar los conocimientos matemáticos adquiridos, sino también establecer un puente entre la teoría y la práctica, facilitando que los futuros profesores diseñen y apliquen actividades de enseñanza que promuevan una comprensión más profunda y dinámica de la circunferencia en sus estudiantes. Este proceso implicó seleccionar y estructurar las tareas de manera que reflejen los principios fundamentales de la geometría, al tiempo que se aprovechen las capacidades tecnológicas de GeoGebra para potenciar el aprendizaje.

En función a lo planteado, presentamos la reformulación y organización de 5 tareas del total de tareas identificadas en el apartado anterior, 2 tareas son planteadas desde la perspectiva de la geometría euclidiana y los últimos 3 desde la perspectiva de la geometría cartesiana.

Tabla 3
Tarea 1

Enunciado:

1. Utilizando GeoGebra con la vista geométrica y aplicando conceptos de la geometría sintética, re-presenta la Proposición III-1 (Hallar el centro de un círculo dado) y la solución.
Sea el círculo dado ABC . Hay que hallar el centro del círculo ABC . Trácese en él al azar una recta AB , y divídase en dos por D , y a partir de D trácese DC perpendicular a AB y prolongúese hasta el punto E ; divídase en dos partes iguales CE en dos partes iguales en Z . Digo que Z es el centro del círculo ABC .
 2. Sean $A(3, 3)$, $B(6, 6)$ y $C(10, -4)$ los tres puntos de la circunferencia, para la cual hay que establecer su centro.
 - a) Resuelve de dos maneras distintas, explicando la heurística utilizada para cada estrategia de resolución.
 - b) Utilizando GeoGebra verifica las soluciones encontradas.
 3. Identifica y analiza las diferencias entre las soluciones del numeral 1 y las del literal a) del numeral 2.
-

Nota. Elaboración propia.

La tarea se enmarcó en el estudio de la Proposición III-1 de Euclides, esto demuestra una conexión evidente entre la teoría geométrica tradicional y su aplicación práctica con GeoGebra. Las tareas con sentido deben permitir que los futuros profesores conecten la teoría matemática con experiencias reales de enseñanza (Rendón, Mora y Morales, 2023). En este caso, se fomenta el uso de conceptos de geometría sintética, integrando la historia de las matemáticas a través de Euclides, y se combina con el uso de una herramienta moderna como GeoGebra, lo que permitiría una aproximación más dinámica y visual del problema, no se presenta ningún gráfico en el enunciado, pretendiendo así que los futuros profesores interpreten la proposición III-1, y puedan re-presentar con apoyo de la herramienta GeoGebra.

Esta tarea estimularía a resolver el problema de dos maneras distintas, la primera es la resolución totalmente sintética utilizando mediatrices, rectas perpendiculares y distancias entre dos puntos, la segunda siendo más analítica, utilizando la ecuación general de la circunferencia que pasa por tres puntos, lo que alentaría a los futuros profesores a explorar diferentes enfoques heurísticos. Esto coincide con las propuestas de Rendón, Mora y Morales (2023) sobre la importancia de diseñar tareas que involucren la conjetura, el descubrimiento y la reflexión sobre los diferentes métodos de solución de un problema matemático. La posibilidad de verificar las

soluciones con GeoGebra refuerza la idea de "mirar profesionalmente", ya que no solo se espera que los futuros maestros resuelvan el problema, sino que también reflexionen sobre los procesos matemáticos implicados y la validez de estos.

El uso de GeoGebra permitiría que los futuros profesores visualicen las construcciones geométricas de manera interactiva y verifiquen sus resultados. Rendón, Mora y Morales (2023) destacan la relevancia de utilizar herramientas tecnológicas en el aula para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta tarea, GeoGebra no solo sirve para la validación de las soluciones, sino que también actuaría como un medio para facilitar la comprensión de las construcciones geométricas euclidianas, al permitir que los usuarios manipulen los objetos y vean el impacto de sus modificaciones en tiempo real.

La tarea incluye un análisis comparativo entre las tres soluciones obtenidas, lo cual fomenta la reflexión crítica, un aspecto importante en el diseño de tareas para la formación profesional docente. Comparar las soluciones obtenidas por métodos distintos, además de las verificadas en GeoGebra, obligaría a los futuros profesores a reflexionar sobre la eficiencia, exactitud y viabilidad de los distintos enfoques utilizados. Esto también les ayudaría a anticipar posibles dificultades que sus propios estudiantes podrían enfrentar cuando resuelvan problemas similares en el aula.

Esta tarea intentaría promover el desarrollo de competencias profesionales al proponer que los futuros profesores se enfrenten a una tarea que integra varios niveles de dificultad: desde la comprensión de la proposición, pasando por la aplicación de diferentes estrategias de resolución, hasta la validación con tecnología. Estas competencias no solo son matemáticas, sino también didácticas, ya que, al resolver la tarea, los futuros profesores estarían modelando una actividad que podrían luego implementar en su propia enseñanza.

Desde la perspectiva de Rendón, Mora y Morales (2023), esta tarea se alineó con las características de una tarea con sentido, ya que permitiría a los futuros maestros conectar la teoría con la práctica, desarrollar competencias de análisis crítico, y utilizar herramientas tecnológicas como GeoGebra para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos. Además, la reflexión sobre las soluciones obtenidas y su validación ofrecería un espacio ideal para el desarrollo de la "mirada profesional", que es fundamental para la enseñanza efectiva de las matemáticas en el aula.

Tabla 4
Tarea 2

Enunciado:

Utilizando GeoGebra con la vista geométrica y aplicando conceptos de la geometría sintética:

1. Elabore una construcción o un dibujo a través del cual interprete la proposición siguiente:

Proposición III-36: Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente (Puertas, 1911, p. 161).

2. Usar la representación para verificar la validez de la proposición.

Caso 1: La recta secante pasa por el centro del círculo.

Se traza la tangente desde el punto Δ al punto de tangencia B y se forma el triángulo rectángulo $ZB\Delta$, donde ZB es el radio del círculo.

Utilizando propiedades de triángulos rectángulos, se demuestra que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de ZB , es igual al cuadrado de $Z\Delta$.

Se concluye que el rectángulo mencionado es igual a los cuadrados de ZB y $B\Delta$, y al restar el cuadrado de ZB de ambos lados de la ecuación, se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de la tangente AB .

Caso 2: La recta secante no pasa por el centro del círculo.

Se toma el centro del círculo como E y se trazan las perpendiculares desde E a $A\Gamma$ y $B\Delta$.

Se demuestra que AZ es igual a $Z\Gamma$, y utilizando propiedades de triángulos rectángulos en el triángulo rectángulo EZF , se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de ZE , es igual al cuadrado de $Z\Delta$.

Añadiendo el cuadrado de ZE a ambos lados de la ecuación y utilizando propiedades de cuadrados, se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de EB , es igual al cuadrado de $E\Delta$.

Se demuestra que el cuadrado de $E\Gamma$ es igual a los cuadrados de $Z\Gamma$ y ZE .

Al restar el cuadrado de EB de ambos lados de la ecuación, se concluye que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de AB .

3. Si te doy un rectángulo con 8 unidades de largo y 3 unidades de ancho, devuelve un cuadrado tan grande como el rectángulo que te di.

Nota. Elaboración propia.

Esta tarea se basó en la Proposición III-36 de Euclides, que conecta conceptos geométricos fundamentales con la manipulación de figuras y proporciones. Esta vinculación con la geometría clásica permitiría a los futuros profesores no solo explorar el contenido matemático en sí, sino también entender la historia de las matemáticas y cómo los métodos antiguos podrían ser enriquecidos mediante el uso de tecnología actual, esto favorecería el desarrollo de la competencia de “mirar profesionalmente”, integrando la teoría matemática con la práctica docente a través de tareas que permitirían a los futuros profesores acercarse a los problemas clásicos de manera moderna.

La utilización de GeoGebra para verificar la validez de las proposiciones permitiría a los futuros maestros experimentar con representaciones dinámicas y visualizar las relaciones entre los objetos geométricos. En esta tarea, los futuros profesores podrían manipular tanto la secante como la tangente, observando cómo cambian las relaciones proporcionales mencionadas en la Proposición III-36. Este tipo de exploración interactiva está en línea con la recomendación de los autores de nuestro marco de referencia, sobre el uso de herramientas tecnológicas que favorezcan la visualización matemática y el entendimiento profundo de las relaciones geométricas. Además, GeoGebra facilitaría la verificación de propiedades geométricas difíciles de observar utilizando solo lápiz y papel, ayudando así a fortalecer la comprensión conceptual.

La tarea invitaría a los futuros profesores a resolver dos casos distintos: cuando la secante pasa por el centro del círculo y cuando no lo hace. Esta división en casos fomenta el desarrollo de estrategias heurísticas diversas, un elemento que Rendón, Mora y Morales (2023) consideran esencial en la formación docente. Resolver el mismo problema desde diferentes perspectivas ayudaría a los futuros profesores a reflexionar sobre las variaciones en los enfoques y en las soluciones obtenidas, lo que también mejoraría su capacidad de análisis crítico.

Así también, la tarea incorporó el uso de propiedades de triángulos rectángulos, lo que ofreció un enfoque basado en la deducción y el razonamiento matemático. Una tarea con sentido debería permitir a los futuros profesores aplicar diferentes áreas del conocimiento matemático. En este caso, la geometría euclidiana se vincula con la trigonometría básica, permitiendo a los futuros educadores hacer conexiones entre distintos temas matemáticos y entender cómo se entrelazan en la resolución de problemas más complejos.

Al final de la tarea, se solicitaría a los futuros maestros "cuadrar un rectángulo" con dimensiones específicas, que consiste en encontrar un cuadrado de igual superficie que un rectángulo dado. Esta parte de la tarea fomentaría la creatividad y la reflexión sobre lo aprendido de la proposición, y es una oportunidad para que los futuros educadores se enfrenten a un desafío adicional. Este tipo de extensión de la tarea básica proporcionaría una plataforma para el desarrollo de competencias más avanzadas. Alineándose con los principios de una tarea profesional con sentido es importante proponer tareas que reflejen tanto los desafíos matemáticos como las estrategias pedagógicas que los futuros profesores deberían implementar en sus clases.

En esta tarea al igual que la anterior, desde la perspectiva de Rendón, Mora y Morales (2023), fue diseñada de manera que permita a los futuros profesores de matemáticas integrar teoría geométrica clásica con prácticas modernas, como el uso de GeoGebra. La tarea promovería una exploración activa, fomentando la comprensión de relaciones geométricas complejas, y desarrollando competencias tanto matemáticas como didácticas. Además, al incluir variaciones en los casos y diferentes enfoques heurísticos, se ofrecería a los futuros maestros una oportunidad para reflexionar críticamente sobre los métodos utilizados y cómo podrían ser implementados en un contexto educativo.

Tabla 5
Tarea 3

Enunciado:

Utilizando GeoGebra, halle la raíz cuadrada de un segmento utilizando una circunferencia, rectas y segmentos. Se desea calcular la raíz cuadrada de BC , se agrega AB que es la unidad y dividiendo AC en dos partes iguales, tomando como centro el punto D , traza la circunferencia AEC . Seguidamente trace sobre el punto B hasta el punto E la perpendicular a C , siendo BE la raíz buscada.

- a) ¿Por qué el segmento BE es la raíz cuadrada? Justificar
 - b) Una vez representado según lo descrito más arriba, verifique si cumple en particular con la raíz cuadrada de 9.
 - c) ¿Qué pasa si el segmento AB es mayor a 1?
 - d) ¿Cumple para todos los números?
-

Nota. Elaboración propia.

Esta tarea ofrecería una oportunidad para integrar conceptos geométricos cartesianos con el uso de GeoGebra, permitiendo que los futuros profesores de matemáticas exploren la extracción de la raíz cuadrada a través de construcciones geométricas. Esta tarea podría ser vista como una “tarea con sentido”, ya que vincula la geometría con la manipulación tecnológica, fomentando la reflexión crítica sobre los conceptos matemáticos involucrados.

El diseño de esta tarea, que involucraría la extracción de la raíz cuadrada utilizando circunferencias, rectas y segmentos, vincularía teoría geométrica con la exploración práctica mediante GeoGebra. Según Rendón, Mora y Morales (2023), una tarea con sentido debe ofrecer a los futuros profesores la oportunidad de explorar y aplicar conceptos matemáticos de manera interactiva, lo cual esta tarea lograría al permitir una construcción dinámica para hallar la raíz cuadrada. Además, la tarea involucraría también el análisis del comportamiento geométrico en diferentes casos, como la variación de \overline{AB} y su influencia en la construcción de \overline{BE} (la raíz), lo que ayudaría a una reflexión sobre la relación entre los segmentos.

Según Llinares (2011, 2012), es importante que las tareas formativas en matemáticas incluyan diversas representaciones y enfoques que fomenten el análisis y la reflexión del futuro profesor sobre los conceptos involucrados, en este caso, proporciones, paralelismo,

perpendicularidad. En esta tarea, la representación gráfica de la raíz cuadrada mediante GeoGebra proporcionaría a los futuros profesores la posibilidad de interactuar con las construcciones geométricas, verificando su exactitud y generalización (por ejemplo, al evaluar el caso de la raíz cuadrada de 9 y los efectos de variar \overline{AB}). Este proceso de reflexión sobre las construcciones permitiría que los futuros maestros se familiaricen con la relación entre las representaciones geométricas y numéricas, pudiendo facilitar su aplicación en la enseñanza.

Desde la perspectiva de Aké y López-Mojica (2020), una tarea con sentido debe conectar el contenido matemático con la práctica docente, permitiendo a los futuros profesores reflexionar sobre cómo presentar estos conceptos en el aula. En esta tarea, la construcción de la raíz cuadrada a través de la geometría cartesiana proporcionaría un enfoque visual y manipulativo que podría ser utilizado en la enseñanza para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de raíz cuadrada. Además, la tarea ofrecería una estructura lógica y secuencial que guía a los futuros profesores en la construcción de su propia comprensión, lo que podría facilitar su futura implementación pedagógica.

Esta tarea, desde la perspectiva de Rendón, Mora y Morales (2023), junto con las aportaciones de Llinares (2011, 2012) y Aké y López-Mojica (2020), cumpliría con los requisitos de una tarea formativa efectiva, ya que permitiría a los futuros profesores explorar, reflexionar y verificar conceptos geométricos mediante GeoGebra. La combinación de este tipo de geometría con herramientas tecnológicas, junto con la invitación a experimentar con variabilidad, proporcionaría una oportunidad para el desarrollo de competencias didácticas y matemáticas.

Tabla 6
Tarea 4

Enunciado:

Utilizando GeoGebra, resuelve la ecuación cuadrática de la forma $x^2 = bx + c^2$ utilizando circunferencia y segmentos, donde el número desconocido es x y los conocidos son b y c .

Construye el triángulo rectángulo ABC , cuyo lado BC es igual a c (raíz cuadrada de la cantidad conocida c^2) y el otro lado, BA , es igual a $\frac{1}{2}b$, esto es: la mitad de la otra cantidad conocida que estaba multiplicada por x , la cual supuesto que es la línea desconocida. Seguidamente, prolongamos CA , que es la base de este triángulo, hasta O , de suerte que AO sea igual a AB , la línea OC es x , la línea buscada.

- a) Verifique lo representado en la ecuación $x^2 = 6x + 25$.
 - b) Desarrolle una conjetura si los valores conocidos son negativos.
 - c) Argumente los resultados obtenidos.
-

Nota. Elaboración propia.

Esta tarea trató de establecer una conexión directa entre la geometría y el álgebra, unificando ambos enfoques en la resolución de una ecuación cuadrática. Al resolver la ecuación cuadrática $x^2 = bx + c^2$ mediante la construcción de un triángulo rectángulo y la prolongación de sus lados, los futuros profesores podrían visualizar las soluciones de la ecuación de una manera geométrica y manipulativa. Esto permitiría a los futuros profesores apreciar cómo los conceptos algebraicos tienen representaciones geométricas. Según Rendón, Mora y Morales (2023), las tareas que permiten integrar estas diferentes áreas del conocimiento matemático son esenciales para desarrollar una "mirada profesional" en la enseñanza de las matemáticas, al proporcionar una comprensión más profunda de los conceptos.

La importancia de incluir representaciones visuales y gráficas en la enseñanza de las matemáticas como en esta tarea, el uso de GeoGebra permitiría a los futuros profesores visualizar la construcción del triángulo y la prolongación de la base, verificando cómo se relacionan las áreas de estas construcciones con la solución de la ecuación cuadrática. Al utilizar GeoGebra, los futuros maestros podrían ajustar los valores de b y c de manera interactiva y observar cómo los cambios en estos parámetros afectan la longitud de x , la incógnita. Esta

manipulación directa proporcionaría una comprensión visual y más intuitiva de las soluciones algebraicas.

La tarea incluiría una invitación a desarrollar una conjetura cuando los valores de b y c son negativos. Este aspecto fomentaría la exploración y el desarrollo del pensamiento crítico, ya que los futuros profesores deberían reflexionar sobre cómo el signo de los valores conocidos afecta la construcción geométrica y, por lo tanto, la solución de la ecuación cuadrática. Según Llinares (2012), las tareas que promueven la variabilidad y la formulación de conjeturas son clave para desarrollar una comprensión más profunda del comportamiento de los conceptos matemáticos en diferentes escenarios.

Desde la perspectiva de Aké y López-Mojica (2020), las tareas que integran construcciones geométricas en la enseñanza del álgebra permiten a los futuros profesores reflexionar sobre cómo conectar la teoría matemática con la práctica docente. En este caso, la tarea requiere que los futuros profesores construyan una representación geométrica de la ecuación cuadrática, utilizando la geometría del triángulo rectángulo para encontrar la solución.

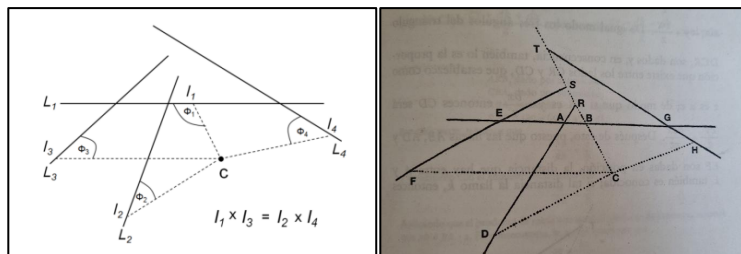
Este enfoque no solo proporcionaría una forma alternativa de resolver ecuaciones cuadráticas, sino que también permitiría a los futuros profesores experimentar cómo presentar este tipo de tareas en el aula para mejorar la comprensión de sus estudiantes.

Tabla 7
Tarea 5

Enunciado:

1. Lee el enunciado del problema de Pappus abordado por Descartes

“Teniendo cuatro rectas dadas en posición (L_1, L_2, L_3 y L_4), se intenta hallar, un punto (C) desde el cual se pudiesen trazar cuatro líneas rectas (l_1, l_2, l_3 y l_4), una sobre cada uno de las dadas, formando ángulos dados ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y φ_4) de modo que el paralelogramo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto (esto es, el producto de estos dos segmentos) guarde una proporción dada con el paralelogramo formado por el producto de las otras dos”.



- a. Utilice GeoGebra para explorar la solución.
2. Estudie el análisis del problema hecha por Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas
3. En un ambiente de geometría dinámica, reproduce el problema de Pappus para dos rectas, para un caso particular, siguiendo los siguientes pasos:
 - a. Trace dos rectas que se intercepten en un punto A formando así cuatro ángulos no rectos.
 - b. Trace la bisectriz en uno de los ángulos formados.
 - c. Ubique un punto P cualquiera en la bisectriz.
 - d. Trace una recta perpendicular a los lados que forman el ángulo y que pase por el punto P.
 - e. Trace una circunferencia con centro en P tangente a los lados del ángulo formado.
4. Mueve el centro de la circunferencia y realiza una conjetura al respecto.

Nota. Elaboración propia.

El problema de Pappus es un desafío geométrico que plantea una situación compleja relacionada con la intersección de líneas y circunferencias en un plano. Al incluir el estudio del análisis realizado por Arboleda, la tarea invitaría a los futuros profesores a reflexionar sobre la relación entre la comprensión histórica y su aplicación en contextos actuales de enseñanza. En este caso, la reproducción del problema de Pappus en un ambiente de geometría dinámica, como GeoGebra, permitiría a los futuros profesores manipular las construcciones y experimentar con los resultados de manera visual e interactiva.

La primera parte de la tarea, que involucra la lectura y comprensión del problema de Pappus, junto con el análisis de Arboleda, fomentaría un enfoque basado en la lectura crítica de textos matemáticos. Las tareas que permiten la reflexión sobre el análisis de problemas matemáticos favorecen el desarrollo de una comprensión más profunda de los conceptos involucrados. En este caso, la tarea no solo se limita a la reproducción geométrica, sino que también pide a los futuros profesores de matemáticas que estudien el análisis hecho por un autor contemporáneo, lo cual proporciona una visión multidimensional del problema y fomentaría la reflexión crítica sobre diferentes enfoques y metodologías.

La reproducción del problema de Pappus en un ambiente de geometría dinámica permitiría a los futuros profesores explorar las propiedades geométricas involucradas en el problema de manera interactiva. La visualización y manipulación de objetos geométricos son esenciales para el desarrollo de una comprensión más sólida de los conceptos. En este contexto, GeoGebra permitiría a los futuros maestros realizar construcciones dinámicas, verificar conjeturas y observar cómo varían los resultados geométricos a medida que se modifican ciertos elementos, lo que contribuye a un aprendizaje activo y significativo.

Esta tarea reformulada, desde las perspectivas de Rendón, Mora y Morales (2023), Llinares (2011, 2012), y Aké y López-Mojica (2020), representa una tarea formativa que permitiría a los futuros profesores desarrollar una comprensión profunda de un problema geométrico clásico y aplicarlo en un contexto moderno mediante el uso de GeoGebra. La integración de la lectura crítica, el análisis teórico y la reproducción geométrica proporciona una plataforma rica para el desarrollo de competencias didácticas y matemáticas, preparando a los futuros profesores para enfrentar los desafíos de la enseñanza de conceptos geométricos avanzados en el aula.

En definitiva, las tareas analizadas reflejarían una integración efectiva de la geometría clásica con el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, proporcionando un enfoque dinámico y visual que enriquecería la comprensión matemática de los futuros maestros. Estas tareas promoverían no solo el dominio de conceptos geométricos y algebraicos, sino también el desarrollo de competencias profesionales esenciales como la reflexión crítica, el análisis heurístico y la capacidad de diseñar actividades didácticas significativas para el aula. La combinación de la teoría matemática con su aplicación práctica y visual, además de la formulación de conjeturas y el estudio de textos históricos y contemporáneos, fortalecería la "mirada profesional" necesaria para la enseñanza efectiva de las matemáticas.

4 CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Cerrando el presente trabajo final de grado, en este apartado se exponen las conclusiones y reflexiones finales respecto al diseño de tareas profesionales para el estudio de la circunferencia en geometría sintética y analítica, apoyado en GeoGebra. A través de este estudio, se buscó no solo aprobar las tareas profesionales con el uso de la tecnología en la enseñanza de las geometrías mencionadas, sino también a explorar cómo estas pueden ser integradas de manera efectiva en la formación de futuros profesores de matemáticas. Las reflexiones a continuación tratan de ofrecer un análisis crítico de los logros alcanzados, así como de los desafíos enfrentados durante el proceso de elaboración del documento final del trabajo de grado.

4.1 Conclusiones

Posteriormente a la elaboración de este trabajo final de grado quedan elementos por tratar, es entonces pertinente establecer algunas conclusiones, las cuales se intentarán desarrollar en el siguiente orden: se describe una recapitulación del trabajo realizado, lo cual permite responder concretamente acerca del logro de los objetivos propuestos, de este modo, también se manifiestan aquellos asuntos pendientes y que podrían ser tratados en otros estudios con posterioridad, luego, se mencionan las limitaciones que tuvo la ejecución del trabajo.

Partimos en noviembre de 2023 con la exposición de una inquietud pedagógica que dio origen al trabajo final de grado, seguido de una revisión documental exhaustiva. Se identificó y analizó literatura sobre la circunferencia desde las perspectivas de la geometría sintética y analítica, lo que permitió sustentar la pertinencia del estudio. Además, se exploraron 90 investigaciones sobre tareas profesionales centradas en la circunferencia y el uso de GeoGebra para la formación de futuros profesores de matemáticas, de las cuales se filtraron aquellas más

relevantes para los objetivos del trabajo. Lo mencionado anteriormente proporcionó una base sólida y especializada respaldando así el desarrollo del proyecto, fortaleciendo su relevancia académica y práctica.

Posteriormente, en las sesiones de asesorías se inició otra etapa, la de poder indagar sobre la circunferencia desde la perspectiva euclidiana en los libros III y IV de *Elementos*, hacer un estudio de los problemas planteados y por sobre todo poder entender las proposiciones propuestas por Euclides. Durante esas revisiones fuimos vivenciando la resolución de varias de ellas, todas propuestas por nuestro asesor, en las que nosotros a la par de ir estudiando y resolviendo los problemas, identificamos las dificultades presentes en la comprensión de las proposiciones y formas de resolución, lo que es claro, que un futuro profesor de matemáticas debería conocer para enseñar.

Continuando con la misma temática, estudiamos La Geometría de Descartes en sus dos primeros libros, indagando la geometría cartesiana, su razonamiento analítico que se caracteriza por trabajar con *lo dado* y con *lo desconocido como supuestamente conocido*. En ese contexto vimos la manera en que Descartes utiliza la circunferencia para resolver operaciones, como sacar la raíz cuadrada y resolver ecuaciones cuadráticas; además, el trabajo se caracteriza por utilizar símbolos en la representación y resolución. Por, sobre todo, el análisis de la resolución del problema de Pappus que fue un desafío interesante para nosotros por la complejidad de este, tratar de comprender su resolución, son conocimientos que creemos que un futuro profesor de matemáticas debe manejar, quizás no en su totalidad, pero, entender la analiticidad que conlleva su resolución.

Cabe recalcar, que, en todas las resoluciones de los problemas de geometría sintética y analítica utilizamos GeoGebra. Esta herramienta de la geometría dinámica nos permitió visualizar propiedades que habrían sido difíciles de reconocer utilizando solo lápiz y papel.

En este trabajo resaltamos que el conocimiento matemático y tecnológico sobre la circunferencia se promueve a través de abordar experiencias de estudio de al menos dos aproximaciones a la geometría, en este caso, la sintética –representada en Elementos de Euclides– y la analítica –expuesta en La Geometría de Descartes–. Este estudio ofrece la posibilidad de construir comparaciones en los tratamientos matemáticos de un mismo objeto y reconocer el uso que se hace del GeoGebra como apoyo a los procesos de comprensión de las propiedades geométricas, constructivos y demostrativos. Estos asuntos son fundamentales en la formación de un futuro profesor de matemáticas.

El diseño de tareas profesionales y el uso de tecnologías contemporáneas, como GeoGebra, podrían contribuir con el desarrollo de competencias de los futuros profesores que no solo se reduzcan a la resolución de problemas geométricos, sino también a la aplicación de conocimientos pedagógicos en el aula. Las tareas propuestas fomentan que los futuros profesores tomen el control de su propio proceso de aprendizaje, es decir, aprenden haciendo relacionado con la historia de la matemática, lo cual es importante para una enseñanza en un entorno educativo, en el que hoy por hoy se requiere una adaptación constante a las necesidades tecnológicas y pedagógicas actuales. El trabajo subraya la importancia de integrar teoría y práctica en la formación docente, mostrando cómo las tecnologías digitales pueden enriquecer la enseñanza de conceptos geométricos fundamentales como la circunferencia.

Además, el trabajo final de grado muestra cómo los futuros profesores de matemáticas pueden sacar beneficio del uso de GeoGebra, no solo al visualizar construcciones geométricas

dinámicas, sino también al formular conjeturas, realizar argumentos, verificar resultados, y comprender de manera intuitiva los principios subyacentes. Este enfoque promueve un aprendizaje basado en la experimentación y exploración, lo que facilita una transición natural entre la teoría y la práctica.

En el mismo orden, es importante mencionar que las tareas profesionales fueron cuidadosamente elaboradas, de tal manera que permita a los futuros profesores de matemáticas a enfrentar retos en tareas, que ayuden a profundizar el objeto matemático en estudio desde la perspectiva euclidiana como cartesiana. La metodología implementada ha demostrado en nuestra vivencia, que, al involucrar a los profesores en la creación y resolución de tareas respaldadas por herramientas tecnológicas, se potencia su capacidad para adaptar la enseñanza a las necesidades particulares de los estudiantes y a los contextos específicos de su desempeño.

Por todo lo manifestado anteriormente, se logra afirmar que se cumplió con el objetivo general. Su aplicación podría acarrear reflexiones y cambios en los futuros profesores de matemáticas, en relación con su conocimiento profesional sobre la circunferencia como objeto y como asunto matemático.

Debe señalarse, que, aunque se pudieron cumplir los objetivos propuestos en este trabajo de grado, quedaron algunos asuntos sin resolver, como ser la de enfocar las tareas desde la perspectiva de la teoría de TPACK (Koehler y Mishra, 2008), y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008), estos podrían ser objeto de estudio en posteriores trabajos, que por la premura del tiempo no se pudo profundizar.

4.2 Reflexiones y consideraciones finales

En este apartado de reflexiones, es fundamental destacar la impresión que nos deja la realización de este trabajo final de grado. Para nosotros, los autores, un aspecto fundamental es la

experiencia adquirida en el proceso de llevar a cabo una investigación. Si bien no se trató de una investigación en el sentido más riguroso, fue una aproximación significativa a ella a través de la profundización en el tema abordado. En ese mismo orden de ideas, la experiencia deja huellas importantes en el aprendizaje, por ejemplo: el haber conocido en profundidad las obras del Libro III y IV de Euclides; el conocimiento que nos aportó Descartes en sus dos primeros libros de La Geometría; el poder hacer búsquedas de literaturas de una manera sistemática; el reconocer la existencia de un amplio campo de investigación en la educación matemática; realizar tareas con sentido profesional para futuros profesores de matemáticas; y manejar de manera más acabada la herramienta GeoGebra. Lo anterior nos ayudó a identificar áreas de estudio y problemáticas que podrían ser abordadas en nuestra práctica docente, ampliando así, nuestras perspectivas profesionales.

Sin duda, lo más importante y que merece ser reconocido es haber tenido una experiencia compartida con nuestro asesor del trabajo final de grado; pudimos debatir entre colegas sobre conjeturas, argumentos, resolución y pareceres (salvando la diferencia de trayectoria y conocimiento entre el director y nosotros, los autores). Desde lo vivenciado, esas experiencias nos aportaron elementos indispensables para el crecimiento profesional, como personal. Fruto de ello, el trabajo final de grado nos amplió el panorama de conocimientos sobre la circunferencia desde lo sintético y analítico.

Tuvimos un proceso de divulgación de los avances durante la elaboración del trabajo, lo que nos permitió tener esa experiencia en distintas formas de participación en la comunidad académica de la Educación Matemática de este país. En primer lugar, la participación como ponentes en la categoría de Comunicaciones en el 26° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, el cual es un evento académico de carácter internacional organizado por la

Universidad Pedagógica Nacional. Nuestra comunicación tuvo el privilegio de ser publicada en las Memorias del evento. También la participación en el 10° Encuentro Distrital de Educación Matemática que reúne a profesores, investigadores y estudiantes de Educación Matemática del distrito, organizado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el que se presentó un taller, seleccionado para ser publicado en las Memorias del evento. Y, por último, la participación en el 1° Simposio Orinoquense de Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas (SOMEM), que reunió a importantes investigadores y profesores de Colombia, realizado por la Universidad de los Llanos, en este último, se participó en la modalidad de Póster, publicada también en las Memorias del evento.

Los eventos mencionados, junto con las conclusiones alcanzadas, respaldan la relevancia del trabajo realizado. Este proceso formativo en la maestría nos motiva a impulsar la creación de comunidades de aprendizaje en nuestro país, en las que se promueva el debate en torno a temas relacionados con las matemáticas y la Educación Matemática, fomentando espacios de reflexión y desarrollo profesional continuo.

Referencias

- Abaurrea, J., Oiarbide, A. L., y Wilhelmi, M. R. (2017). Momentos de exploración e ilustración en la determinación de circunferencias en futuros docentes de educación matemáticas (na: *Revista de Educación Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral*, (11), 87-104.
- Acosta, C., Páez, F. y Guacaneme, É. (2024). ¿Heurísticas –sintética y analítica– en la solución de un problema en geometría? En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 99-106. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Medellín: Universidad de Medellín*, 764-777.
- Aké, L. P., y López-Mojica, J. M. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de Matemáticas. *Páginas de Educación*, 13(1), 58-81.
- Akyuz, D. (2016). Prácticas matemáticas en un entorno tecnológico: un experimento de investigación de diseño para la enseñanza de las propiedades del círculo. *Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas*, 14, 549-573.
- Álvarez, J. A. M., Arnold, E. G., Burroughs, E. A., Fulton, E. W., y Kercher, A. (2020). The design of tasks that address applications to teaching secondary mathematics for use in undergraduate mathematics courses. *Journal of Mathematical Behavior*, 60, 100814. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100814>
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407

- Bonaviña, R. J. G., Payá, A. L., García, M. D. C. R., y García, A. M. Z. (2021). Modelización matemática con GeoGebra: colocación de circunferencias y esferas. *Pensamiento Matemático*, 11(1), 3.
- Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer-Verlag.
- Breen, S., y O'Shea, A. (2018). *Designing mathematical thinking tasks*. *Primus*, 29(1), 9-20.
<https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1396567>
- Cardeñoso, J. M.; Flores, P. y Azcárate, C. (2001), “El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación”, en: P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.
- Cerizola, N. R., Martínez, R. L., y Miní, M. A. (2006). Desarrollo del Pensamiento geométrico en el futuro Profesor de Matemática. *Revista de Educación Matemática*, 21(1).
- Cotic, N. S. (2012). GeoGebra na formação docente. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1(1), CCXXX-CCXL.
- Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (18), 59-69.
- Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. (Quintás, G, Trad.). Círculo de Lectores S.A. (Trabajo original publicado en 1637).
- Dockendorff, M., y Solar, H. (2018). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 66-84.

- Echevarría A, J. A. (2015). *Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria*. [Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio de Tesis PUCP.
- Edwards, J. A., y Jones, K. (2006). Linking geometry and algebra with GeoGebra. *Mathematics Teaching, 194*, 28-30.
- Fernández-Mosquera, E., Mejía-Palomino, M.F. y Chaves-Beltrán, A. (2017). Diseño de tareas en Geometría Dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad de Nariño. In *II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe*.
- Fontes, M. M., y Fontes, D. J. S. (2010). El Software GeoGebra como herramienta en las clases de geometría. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 23*, 201-210.
- García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática, 17(2)*, 153-166.
- García-Lázaro, D., y Martín-Nieto, R. (2023). Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra. *ALTERIDAD. Revista de Educación, 18(1)*, 85-98.
- García, M. M., y Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido: El caso de la prueba matemática. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 105-122). Síntesis.
- Gavilán, J., García, M., y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25(2)*, 157–170.

- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 90-113.
- González, F.G., (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación*, 65, 161-172.
- Grossman, P., Hammerness, K., y McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 15(2), 273-289.
- Guacaneme, E., y Mora, L. (2011). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES*, 4(7), 102-109.
- Guacaneme, E., y Mora, L. (2014). La Educación del Profesor de Matemáticas: ¿Una tendencia investigativa en Educación Matemática? *Coloquio nacional sobre Problemas y Tendencias de Investigación en Educación Matemática, Bogotá DC*, 1-9.
- Hohenwarter, M., y Lavicza, Z. (2007). The influence of dynamic geometry software on learning mathematics. *ZDM*, 39(3), 32-45. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0034-2>
- Instituto Nacional de Estadística. (2023). *Proyecciones de población por sexo y edad*. https://www.ine.gov.py/Publicaciones/Proyecciones%20por%20Departamento%202023/05_Caaguazu_2023.pdf
- João, B. M., y Ovigli, D. F. B. (2023). Empleo del GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática (Sumbe, Angola). *Revista Educação e Humanidades*, 4(2), 6-38.
- Koehler, M. J., y Mishra, P. (2008). Introducing TPACK. In American Association of Colleges for Teacher Education Committee on Innovation & Technology (Eds.), *Handbook for technological pedagogical content knowledge* (pp. 3-29). New York: Routledge.

- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.
- Li, Q. (1997). Angles, Lines and Circles: An Alternative Approach to Teaching Geometry. *Mathematics in School*, 26(2), 2-4. <http://www.jstor.org/stable/30211811>
- Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 5-16.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas: Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 53-62.
- Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 30-43.
- López Fernández, J. M. (2010). La tecnología y el desarrollo del pensamiento en la geometría. *Revista Alternativa* 22 1-13.
- Malagón, M. R. (2018). Concepciones sobre el aprendizaje y su relación con las prácticas pedagógicas. *Informador Técnico*. 82(1), 108-119.
- Ministerio de Educación y Cultura. (2004). *El Desarrollo de la Educación. Informe Nacional de Paraguay*. Ministerio de Educación y Cultura.
- Ministerio de Educación y Ciencias. (2020). *Diseño Curricular del Profesorado del área de matemática para el 3° ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media*. MEC.
- Morales-López, Y. (2019). Conocimientos que evidencian los futuros profesores cuando realizan una tarea que involucra geometría, enseñanza y uso de tecnologías. *Acta Scientiae*, 21(2), 75-92. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5081>

- Moreno, L. (2002). Evolución y Tecnología. En Colombia-MEN. *Incorporación de nuevas tecnologías en el currículo de la educación media en Colombia* (pp. 67-80). MEN.
- Ortiz, A. (2020). Inmersión del software GeoGebra en la formación inicial de futuros profesores. [conferencia]. *II Congreso Internacional de Educaciones, Pedagogías y Didácticas. Mediaciones Educativas con Tecnología*, Tunja, Colombia.
<https://repositorio.uptc.edu.co/server/api/core/bitstreams/79347847-2858-4e91-9767-9ea379bc1aa6/content>
- Planas, N. (2003). El contrato social en el aula de matemáticas: episodios en torno a la noción de estatus. *Boletim GEPEN*, (41).
- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 71-98.
- Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Editorial Gredos S.A.
- Rendón, C. G., Mora, L. C., y Morales, N. (2023). Tareas con sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas: Algunos asuntos conceptuales. En P. Caraballo Gracia (Ed.) *Memorias del IV Encuentro Internacional de Investigación e Innovación en Educación Matemática*. (pp. 60-61). Sincelejo: Editorial Unisucre.
- Rojas-Bello, R. (2020). Introducción del GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Geometría a docentes en formación. *Revista Caribeña de Investigación Educativa (RECIE)*, 4(1), 124-134. <https://doi.org/10.32541/recie.2020.v4i1.pp124-134>
- Ruiz, M., Ávila, P., y Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En Córdoba, F. y Cardeño, J. (Eds.), *Desarrollo y uso*

didáctico de GeoGebra. *Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (pp. 446-454). Fondo Editorial ITM.

Sánchez, M. (2011), A review of research trends in mathematics teacher education. PNA, *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 5(4), pp. 129-145.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. Ashgate Publishing.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 71-94.

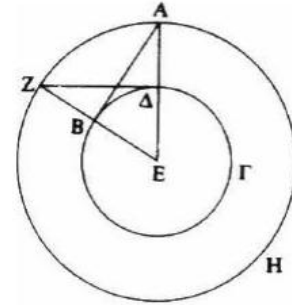
Tirosh, D., y Wood, T. (2008). Tools and processes in mathematics teacher education. *The international handbook of mathematics teacher education*, 2, 1-11.

Torres, J. (2013). La justicia curricular y la formación del profesorado. *Revista Asociación de enseñantes con Gitanos*, 30, 85-94.

Proposición 17

Desde un punto dado trazar una línea recta tangente a un círculo dado.

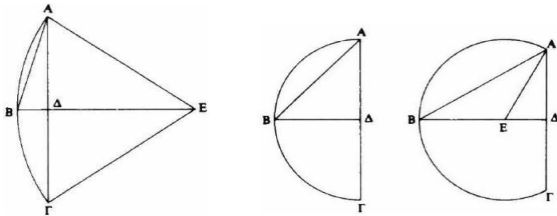
En este problema al tener un círculo $B\Delta\Gamma$ y punto dado A fuera del círculo, se traza una recta tangente al círculo dado, para ello se traza un segmento con el centro E y el punto A entonces ahí se tiene otra circunferencia AZH de radio AE concéntrica en E , entonces teniendo dos círculos $B\Delta\Gamma$ y AZH , se forma dos triángulos, el triángulo ΔEZ es igual al triángulo EBA , y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes; por lo tanto, el ángulo $E\Delta Z$ es igual al ángulo EBA . Pero el ángulo $E\Delta Z$ es recto; luego el ángulo EBA también es recto, ahora bien, la recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el mismo toca el círculo; por tanto, AB es tangente al círculo $B\Delta\Gamma$.



2 Proposición 2, Libro III

Proposición 25

Dado un segmento de círculo completar el trazado del círculo del que es segmento.



3 Proposición 25, Libro III

Esta proposición establece cómo completar el trazado de un círculo cuando se tiene un segmento de círculo dado, en este caso, $AB\Gamma$. La idea principal es dividir el segmento en dos partes iguales, construir un ángulo igual al ángulo formado por el segmento, y luego utilizar un punto específico para trazar el círculo completo:

1. Se toma el segmento de círculo dado, $AB\Gamma$.
2. Se divide el segmento en dos partes iguales en el punto Δ .
3. Desde Δ , se traza una recta ΔB formando ángulos

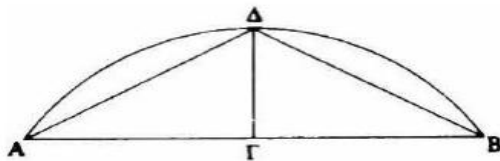
rectos con $A\Gamma$, y se completa el triángulo ΔAB .

4. Se construye en la recta BA y en su punto A un ángulo BAA igual al ángulo ABA .
5. Se prolonga ΔB hasta E , de manera que BE sea igual a EA .
6. Se demuestra que las tres rectas $AE, EB, E\Gamma$ son iguales entre sí.
7. Se concluye que el círculo descrito con el centro E y como distancia una de las rectas $AE, EB, E\Gamma$ pasará por los puntos A, B , y Γ , completando así el trazado del círculo.

La demostración muestra que el trazado del círculo se puede completar de manera única, y la posición del centro del círculo, en este caso, el punto E depende de la relación entre los ángulos ABA y BAA . En función de esta relación, el segmento $AB\Gamma$ puede ser menor, igual o mayor que un semicírculo.

Proposición 30

Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada



4 Proposición 30, Libro III

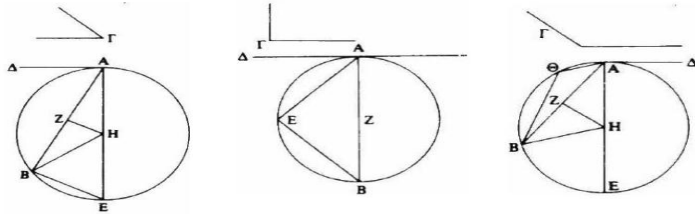
Teniendo una circunferencia $A\Delta B$, hay que dividirla en dos partes iguales, para lo cual se traza un segmento entre los puntos AB , se halla la mediatriz y se traza una recta $\Delta\Gamma$ perpendicular a la recta AB , para formar ángulos rectos con la misma, luego se traza segmentos ΔB y ΔA , al tener dos ángulos rectos iguales y como las rectas iguales cortan circunferencias iguales la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor; y cada una de las circunferencias $A\Delta, \Delta B$

es menor que un semicírculo; por tanto, la circunferencia $A\Delta$ es igual a la circunferencia ΔB . Por lo tanto, queda dividido en dos partes iguales por el punto Δ la circunferencia.

Proposición 33

Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Este problema Euclides resuelve a partir de una recta dada AB y un ángulo rectilíneo (agudo, recto y obtuso) donde pueda trazar un círculo y este admita ángulos iguales a los ángulos rectilíneos. Se logra resolver el problema trazando en cada círculo el ángulo rectilíneo dado.

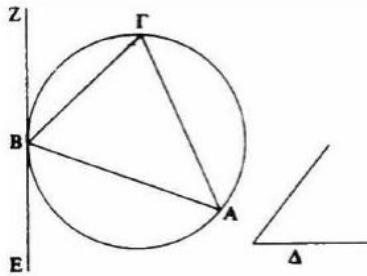


5 Proposición 33, Libro III

Proposición 34

A partir de un círculo dado cortar un segmento que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Se traza el segmento EZ tangente al círculo $AB\Gamma$ en el punto B , en la recta ZB se construye el ángulo $ZB\Gamma$ igual al ángulo Δ .



Por lo tanto, a partir del círculo dado $AB\Gamma$ se ha cortado el segmento $B\Gamma$ que admite un ángulo igual al ángulo rectilíneo dado correspondiente a Δ .

6 Proposición 34, Libro III

Libro IV

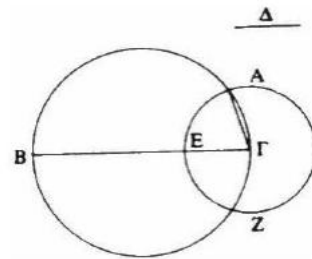
Proposición 1

Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.

Se describe un proceso geométrico para adaptar una recta dada, representada por Δ , a un círculo dado con centro en Γ y diámetro $B\Gamma$. El objetivo es lograr que la longitud de la recta dentro del círculo sea igual a la longitud de $B\Gamma$.

El procedimiento se divide en dos casos:

1. Si la longitud de $B\Gamma$ es igual a la longitud de Δ , entonces no es necesario hacer ninguna adaptación adicional, ya que la recta ya se ajusta al círculo.
2. Si la longitud de $B\Gamma$ es mayor que la longitud de Δ , se traza un punto E de modo que ΓE sea igual a Δ . Luego, con centro en Γ y radio ΓE , se describe un círculo EAZ . Se traza la línea ΓA , que conecta el centro Γ con el punto A en la circunferencia de este nuevo círculo. De esta manera, se logra que la longitud de la recta dentro del círculo representada por ΓA sea igual a la longitud de Δ .

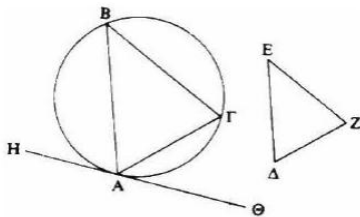


7 Proposición 1, Libro IV

Proposición 2

Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.

Se describe el proceso para inscribir en un círculo dado $AB\Gamma$ un triángulo ΔEZ con ángulos iguales a los de otro triángulo dado.



8 Proposición 2, Libro IV

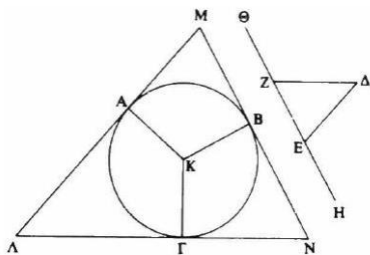
El procedimiento se realiza de la siguiente manera:

1. Se traza la tangente $H\Theta$ al círculo $AB\Gamma$ en el punto A .
2. En la recta $A\Theta$, se construye un ángulo $\Theta A\Gamma$ igual al ángulo ΔEZ .
3. En la recta AH , se construye un ángulo HAB igual al ángulo ΔZE .
4. Se traza la línea AB .

Se argumenta que, dado que la recta $A\Theta$ toca el círculo en A , el ángulo $\Theta A\Gamma$ es igual al ángulo $AB\Gamma$ en el segmento alterno del círculo. Como se ha construido $\Theta A\Gamma$ igual al ángulo ΔEZ y HAB igual al ángulo ΔZE , se concluye que los ángulos del triángulo ΔEZ son iguales a los correspondientes ángulos en el triángulo inscrito en el círculo.

Proposición 3

Circunscribir en torno a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado



9 Proposición 3, Libro IV

Se describe el proceso para circunscribir alrededor de un círculo dado $AB\Gamma$ un triángulo cuyos ángulos son iguales a los de otro triángulo dado ΔEZ . El procedimiento se realiza de la siguiente manera:

1. Se prolonga la línea EZ en ambos sentidos hasta los puntos H y Θ .
2. Se toma el centro K del círculo $AB\Gamma$.
3. Se traza una recta cualquiera KB .
4. En la recta KB , se construye un ángulo BKA igual al ángulo ΔEH y un ángulo $B\Gamma K$ igual al ángulo $\Delta Z\Theta$.
5. Se trazan las líneas tangentes ΛAM , MBN , $N\Gamma A$ desde los puntos A , B y Γ hasta el círculo $AB\Gamma$.
6. Se argumenta que los ángulos correspondientes a los puntos A , B y Γ en el cuadrilátero $AMBK$ son rectos, ya que las tangentes al círculo forman ángulos rectos con los radios que van al punto de tangencia.
7. Se demuestra que los ángulos AKB y AMB son iguales a los ángulos ΔEH y ΔEZ , respectivamente.
8. Similarmente, se demuestra que el ángulo ΛNB es igual al ángulo ΔZE .
9. Se concluye que el triángulo ΛMN es circunscrito alrededor del círculo $AB\Gamma$ y tiene ángulos iguales a los del triángulo ΔEZ .

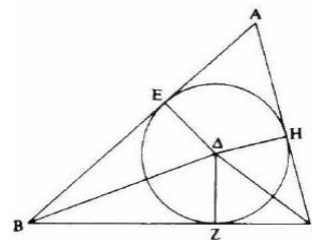
Utilizando construcciones geométricas específicas y propiedades de tangencias y cuadriláteros, se ha circunscrito alrededor del círculo un triángulo cuyos ángulos son iguales a los de otro triángulo dado.

Proposición 4

Inscribir un círculo en un triángulo dado.

Se describe la manera para inscribir un círculo en un triángulo dado $AB\Gamma$ de la siguiente manera:

1. Se dividen en dos partes iguales los ángulos $AB\Gamma$ y $A\Gamma B$ con las rectas $B\Delta$ y $\Gamma\Delta$ respectivamente, encontrando el punto de intersección Δ .
2. Se trazan las perpendiculares ΔE , $\Delta\Gamma$ y ΔH desde el punto Δ hasta las rectas AB , $B\Gamma$, ΓA respectivamente.
3. Se argumenta que los triángulos EBA y $ZB\Delta$ tienen dos ángulos iguales y un lado común, por lo que son triángulos semejantes y los lados restantes ΔE y ΔZ son iguales. De manera similar, ΔH es igual a $\Delta\Gamma$.
4. Se concluye que las tres rectas ΔE , ΔZ , ΔH son iguales entre sí.
5. Se describe un círculo con centro en Δ y radio igual a ΔE (o ΔZ , o ΔH), asegurando que este círculo toca las rectas AB , $B\Gamma$, ΓA , ya que los ángulos correspondientes en ΔE , ΔZ , ΔH son rectos.
6. Se nombra al círculo inscrito como ZHE .



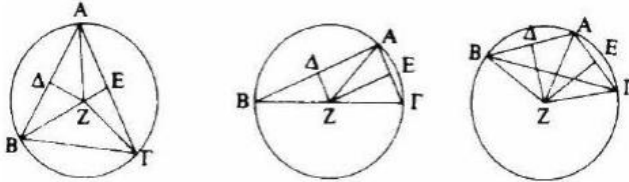
10 proposición 4, Libro

Se demuestra así que se puede inscribir un círculo en el triángulo dado $AB\Gamma$ por medio de la construcción de perpendiculares desde el punto de intersección Δ a los lados del triángulo utilizando propiedades geométricas que garanticen la tangencia del círculo a los lados del triángulo dado en los puntos específicos.

Proposición 5

Circunscribir un círculo en torno a un triángulo dado.

Para circunscribir un círculo alrededor de un triángulo dado $AB\Gamma$, el procedimiento se realiza considerando tres



11 Proposición 5, Libro IV

casos:

Caso 1 (Primer Dibujo): Los puntos Δ y E , donde se dividen en dos partes iguales las rectas AB y $A\Gamma$ respectivamente, coinciden dentro del triángulo. Se trazan las perpendiculares ΔZ y EZ , y se concluye que el círculo circunscrito con centro en Z y distancia a $ZA, ZB, Z\Gamma$ pasa por los puntos

restantes del triángulo.

Caso 2 (Segundo Dibujo): Los puntos $\Delta\Gamma$ y EZ coinciden sobre la recta $B\Gamma$. Se demuestra que Z es el centro del círculo circunscrito al triángulo $AB\Gamma$.

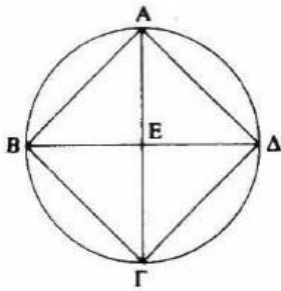
Caso 3 (Tercer Dibujo): Los puntos ΔZ y EZ coinciden fuera del triángulo. Se trazan las perpendiculares $\Delta Z, AZ, BZ,$ y ΓZ . Se demuestra que el círculo circunscrito con centro en Z y distancia $ZA, ZB, Z\Gamma$ pasa por los puntos restantes del triángulo.

Se demostró así que es posible circunscribir un círculo alrededor de un triángulo dado, y se proporciona una relación entre la posición del centro del círculo y el ángulo BAG del triángulo.

Proposición 6

Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

Para inscribir un cuadrado en el círculo $AB\Gamma\Delta$ se realiza lo siguiente:



12 Proposición 6, Libro IV

1. Se trazan dos diámetros $A\Gamma$ y $B\Delta$ del círculo $AB\Gamma\Delta$, formando ángulos rectos entre sí.
2. Se trazan los lados del cuadrado conectando los puntos A, B, Γ y Δ .
3. Se argumenta que BE es igual a $E\Delta$ porque E es el centro del círculo y EA es un radio que forma ángulos rectos, entonces la base AB es igual a la base $A\Delta$. De manera similar, se demuestra que cada uno de los lados del cuadrado ($B\Gamma, \Gamma\Delta$) es igual a cada uno de los lados opuestos ($AB, A\Delta$).
4. Se concluye que el cuadrilátero $AB\Gamma\Delta$ es equilátero debido a la igualdad de sus lados.
5. Se demuestra que el cuadrilátero también es rectangular ya que $B\Delta$ es un diámetro del círculo, el ángulo $BA\Delta$ es recto. Además, al ser $B\Delta$ un semicírculo, los ángulos $AB\Gamma, B\Gamma\Delta$ y $\Gamma\Delta A$ también son rectos.

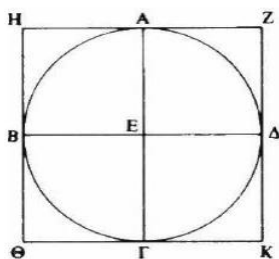
6. Se concluye que, dado que el cuadrilátero es equilátero y rectangular, es un cuadrado según la definición de cuadrado.

7. Finalmente, se afirma que este cuadrado está inscrito en el círculo $AB\Gamma\Delta$.

En conclusión, es posible inscribir un cuadrado en el círculo dado $AB\Gamma\Delta$ utilizando las propiedades de los diámetros y los ángulos rectos dentro del círculo.

Proposición 7

Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado.



13 Proposición 7, Libro IV

Para circunscribir un cuadrado alrededor de un círculo dado $AB\Gamma\Delta$ procede de la siguiente manera:

1. Se trazan dos diámetros $A\Gamma$ y $B\Delta$ del círculo $AB\Gamma\Delta$, formando ángulos rectos entre sí.
2. Se trazan las tangentes ZH , $H\Theta$, ΘK , KZ desde los puntos A , B , Γ y Δ hasta el círculo $AB\Gamma\Delta$.
3. Se argumenta que, como ZH toca el círculo y EA se ha trazado desde el centro E hasta el punto de contacto A , los ángulos correspondientes a A son rectos. De manera similar, se demuestra que los ángulos correspondientes a B , Γ y Δ también son rectos.
4. Se establece que $H\Theta$ es paralela a $A\Gamma$, y debido a la simetría, $A\Gamma$ es paralela a ZK . Se demuestra de manera similar que cada una de las rectas HZ , ΘK es paralela a $BE\Delta$. Por lo tanto, los segmentos HK , $H\Gamma$, AK , ZB , BK son paralelogramos.
5. Se concluye que el cuadrilátero $ZH\Theta K$ es equilátero ya que $A\Gamma$ es igual a $B\Delta$, y las rectas $H\Theta$, ZK son iguales.
6. Se demuestra que $ZH\Theta K$ es también rectangular, ya que $HBEA$ es un paralelogramo y el ángulo AEB es recto. Esto implica que el ángulo AHB también es recto. De manera similar, se demuestra que los ángulos correspondientes a Θ , K y Z son rectos.
7. Se concluye que $ZH\Theta K$ es un cuadrado que está circunscrito alrededor del círculo $AB\Gamma\Delta$.

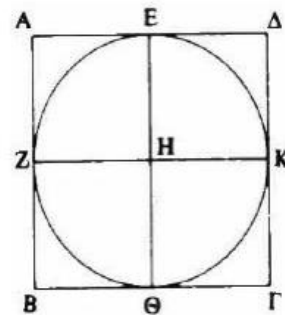
Utilizando propiedades de tangencia y simetría se demostró que es posible circunscribir un cuadrado alrededor de un círculo.

Proposición 8

Inscribir un círculo en un cuadrado dado.

Para inscribir un círculo en un cuadrado dado $AB\Gamma\Delta$ se realiza lo siguiente:

1. Se divide en dos partes iguales cada una de las rectas $A\Delta$ y AB por los puntos E y Z , respectivamente.
2. Se trazan las líneas $E\Theta$ y ZK paralelas a una de las dos rectas AB , $\Gamma\Delta$, y a una de las dos rectas $A\Delta$, $B\Gamma$, respectivamente.
3. Se demuestra que cada una de las figuras AK , KB , $A\Theta$, $\Theta\Delta$, AH , $H\Gamma$, BH , $H\Delta$ es un paralelogramo, y los lados opuestos son iguales.
4. Se argumenta que, dado que $A\Delta$ es igual a AB y AE es la mitad de $A\Delta$, mientras que AZ es la mitad de AB , entonces AE es igual a AZ . De manera similar, se demuestra que ZH es igual a HE , y cada una de las rectas $H\Theta$ y HK es igual a cada una de las rectas ZH y HE .
5. Se concluye que las cuatro rectas HE , HZ , $H\Theta$, HK son iguales entre sí.
6. Se describe un círculo con centro en H y como radio una de las rectas HE , HZ , $H\Theta$, HK , asegurando que el círculo tocará las rectas AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA por ser rectos los ángulos correspondientes a E , Z , Θ , K .
7. Se demuestra que el círculo no cortará las rectas AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , ya que la línea trazada formando ángulos rectos con el diámetro del círculo desde un extremo caería dentro del círculo, lo cual es absurdo [III, 16].
8. Se concluye que el círculo está inscrito en el cuadrado $AB\Gamma\Delta$.

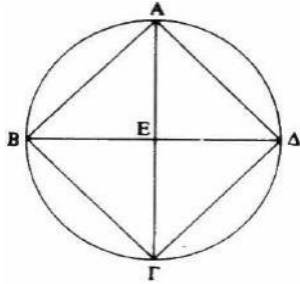


14 Proposición 8, Libro IV

Se puede inscribir un círculo en un cuadrado utilizando propiedades de paralelogramos y propiedades de tangencias para garantizar que el círculo es tangente a los lados del cuadrado en ángulos rectos.

Proposición 9

Circunscribir un círculo en torno a un cuadrado dado.



15 Proposición 9, Libro IV

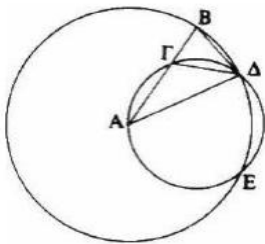
El proceso para circunscribir un círculo alrededor de un cuadrado dado $AB\Gamma\Delta$ se realiza de la siguiente manera:

1. Se trazan los dos diámetros AF y BD del cuadrado, y se cortan en el punto E .
2. Se demuestra que cada uno de los ángulos ΔAF , $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ y $\Gamma\Delta A$ ha sido dividido en dos partes iguales por las rectas AF y ΔB .
3. Se demuestra que el ángulo ΔAB es igual al ángulo $AB\Gamma$, y que el ángulo EAB es la mitad del ángulo ΔAB , y el ángulo EBA es la mitad del ángulo $AB\Gamma$. Por lo tanto, el ángulo EAB es igual al ángulo EBA .
4. Se demuestra que las rectas EA y EB son iguales, al igual que las rectas EA y EF , y las rectas EA y ED .
5. Se concluye que las cuatro rectas EA , EB , EF , ED son iguales entre sí.
6. Se describe un círculo con centro en E y radio igual a cualquiera de las rectas EA , EB , EF , ED , y se argumenta que este círculo tocará los puntos restantes del cuadrado $AB\Gamma\Delta$.
7. Se concluye que el círculo circunscrito en torno al cuadrado tiene como centro el punto E y como radio una de las rectas EA , EB , EF , ED .

Se ha demostrado que es posible circunscribir un círculo alrededor de un cuadrado dado utilizando propiedades geométricas y la división de ángulos en el cuadrado.

Proposición 10

Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos de la base sea el doble del restante.



16 Proposición 10, Libro

La construcción del triángulo isósceles $AB\Delta$ con ángulos de la base ΔB siendo el doble del ángulo restante se realiza de la siguiente manera:

1. Tomar una recta AB y cortarla en el punto Γ de manera que el rectángulo formado por AB , $B\Gamma$ sea igual al cuadrado de ΓA
2. Con el centro en A y la distancia AB , dibujar el círculo $B\Delta E$.
3. Adaptar a este círculo $B\Delta$ una recta $B\Delta$ igual a la recta $A\Gamma$, que no sea mayor que el diámetro del círculo.
4. Trazar $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, y circunscribir alrededor del triángulo $A\Gamma\Delta$ el círculo $A\Gamma\Delta$.

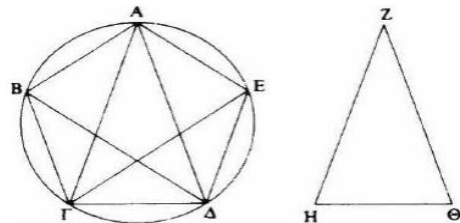
Siguiendo estos pasos, se obtiene un triángulo isósceles $AB\Delta$ donde los ángulos de la base ΔB son el doble del ángulo restante, cumpliendo con la construcción.

Proposición 11

Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

La construcción de un pentágono equilátero y equiángulo inscrito en un círculo dado, se realiza de la siguiente manera:

1. Toma el círculo dado $AB\Gamma\Delta E$.
2. Construye un triángulo isósceles $ZH\theta$, donde cada ángulo correspondiente a H , θ es el doble del correspondiente ángulo a Z .
3. Inscribe en el círculo $AB\Gamma\Delta E$ el triángulo $A\Gamma\Delta$ de manera que el ángulo $\Gamma A\Delta$ sea igual al ángulo correspondiente a Z , y los ángulos correspondientes a H , θ sean iguales a los ángulos $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, respectivamente.
4. Divide en dos partes iguales cada uno de los ángulos $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ mediante las rectas ΓE y ΔB , respectivamente.
5. Trazar las rectas AB , $B\Gamma$, ΔE , EA .



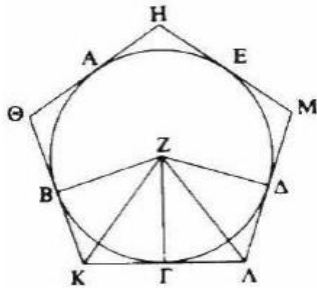
17 Proposición 11, Libro IV

El resultado es un pentágono $AB\Gamma\Delta E$ que es equilátero y equiángulo. Este pentágono cumple con la propiedad de tener todos sus lados y ángulos iguales, y está inscrito en el círculo dado $AB\Gamma\Delta E$.

Proposición 12

Circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno a un círculo dado.

La construcción de un pentágono equilátero y equiángulo circunscrito a un círculo dado, se realiza de la siguiente manera:



18 Proposición 12, Libro IV

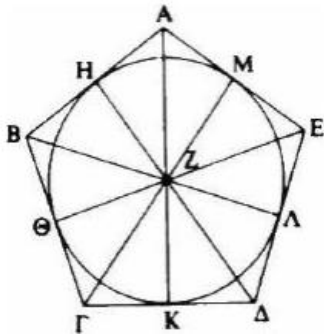
1. Tomar el círculo dado $AB\Gamma\Delta E$.
2. A través de los puntos A, B, Γ, Δ, E , trazar las tangentes $H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda M, MH$ al círculo.
3. Tomar el centro Z del círculo.
4. Trazar las líneas $ZB, ZK, Z\Gamma, Z\Lambda, Z\Delta$.
5. Demostrar que el pentágono $H\Theta K\Lambda M$ es equilátero y equiángulo.

En el proceso de demostración, se utilizan propiedades geométricas y teoremas. El argumento principal se basa en la igualdad de ciertos ángulos y longitudes en el pentágono inscrito y en la relación entre las circunferencias de los arcos correspondientes. Con estos resultados, se concluye que el pentágono es equilátero y equiángulo, y, además, está circunscrito al círculo dado.

Proposición 13

Inscribir un círculo en un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

La construcción para inscribir un círculo en un pentágono dado ($AB\Gamma\Delta E$) que es equilátero y equiángulo, se realiza de la siguiente manera:



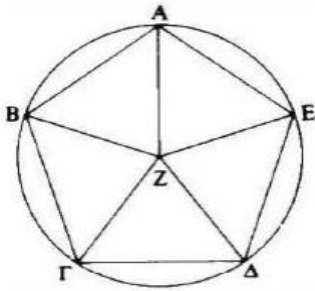
19 Proposición 13, Libro IV

1. Dividir en dos partes iguales los ángulos $B\Gamma\Delta$ y $\Gamma\Delta E$ con las rectas ΓZ y ΔZ , respectivamente.
2. Desde el punto de intersección Z de las rectas ΓZ y ΔZ , trazar las rectas ZB, ZA y ZE .
3. Demostrar que los ángulos $ABZ, B\Gamma Z, \Gamma\Delta Z, \Delta EZ$, y EAZ son iguales.
4. Desde el punto Z , trazar las perpendiculares $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ a las rectas $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$, respectivamente.
5. Demostrar que las perpendiculares $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ son iguales entre sí.
6. Describir un círculo con centro en Z y radio igual a la longitud de cualquiera de las perpendiculares $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$.

La demostración se basa en propiedades geométricas, como la igualdad de ángulos y la igualdad de lados de triángulos. La construcción asegura que el círculo inscrito sea tangente a los lados del pentágono en sus puntos respectivos, cumpliendo así con las condiciones de ser equilátero y equiángulo.

Proposición 14

Circunscribir un círculo en torno a un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.



20 Proposición 14, Libro IV

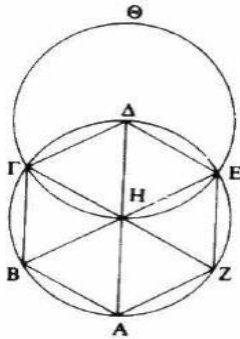
La demostración se basa en propiedades geométricas, como la igualdad de ángulos y la igualdad de lados de triángulos. La construcción asegura que el círculo circunscrito toque los vértices del pentágono en sus puntos respectivos, cumpliendo así con las condiciones de ser equilátero y equiángulo.

La construcción para circunscribir un círculo alrededor de un pentágono dado $AB\Gamma\Delta E$ que es equilátero y equiángulo, según la descripción proporcionada, se realiza de la siguiente manera:

1. Dividir en dos partes iguales los ángulos $B\Gamma\Delta$ y $\Gamma\Delta E$ con las rectas ΓZ y ΔZ , respectivamente.
2. Desde el punto de intersección Z de las rectas ΓZ y ΔZ , trazar las rectas ZB , ZA y ZE .
3. Demostrar que los ángulos ΓBA , BAE , $AE\Delta$ han sido divididos en dos partes iguales por las rectas ZB , ZA , ZE , respectivamente.
4. Demostrar que las rectas $Z\Gamma$, ZB , ZA , ZE son todas iguales entre sí.
5. Describir un círculo con centro en Z y radio igual a la longitud de cualquiera de las rectas $Z\Gamma$, ZB , ZA , ZE .

Proposición 15

Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado



21 Proposición 15, Libro IV

La construcción para inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado se realiza de la siguiente manera:

1. Trácese el diámetro $A\Delta$ del círculo $AB\Gamma\Delta EZ$.
2. Tómese el centro H del círculo y con centro en Δ y radio ΔH , describese el círculo $EH\Gamma\theta$.
3. Trace las rectas EH y ΓH hasta los puntos B y Z .
4. Con los puntos B y Z , trácese el hexágono inscrito $AB\Gamma\Delta EZ$.

La demostración se basa en la propiedad de que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales, y en que los ángulos inscritos en un círculo subtendidos por el mismo arco son iguales. Además, se utiliza el hecho de que las circunferencias iguales subtenden ángulos iguales.

El resultado es un hexágono cuyos ángulos y lados son todos iguales, cumpliendo así con la condición de ser equilátero y equiángulo.

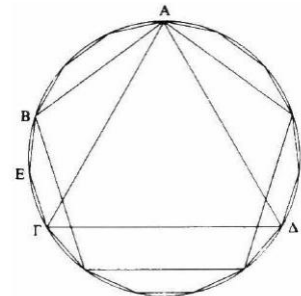
Proposición 16

Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

La construcción para inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo se realiza de la siguiente manera:

1. Inscribe en el círculo $AB\Gamma\Delta$ el lado $A\Gamma$ de un triángulo equilátero y el lado AB de un pentágono equilátero.
2. Divide el arco $B\Gamma$ en dos partes iguales mediante un punto E .
3. Luego, adapta sucesivamente a la circunferencia $AB\Gamma\Delta$ rectas iguales a las circunferencias BE y $E\Gamma$.

Con este procedimiento, se habrá inscrito un pentadecágono equilátero y equiángulo en el círculo $AB\Gamma\Delta$. La explicación se fundamenta en la división del círculo en segmentos iguales mediante el trazado de líneas desde el centro hasta puntos específicos en la circunferencia. La simetría del triángulo equilátero y del pentágono equilátero permite realizar esta construcción.



22 Proposición 16, Libro IV

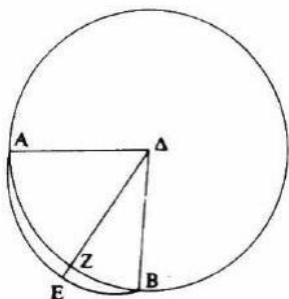
Planteamientos y demostración de teoremas de Euclides con relación a la circunferencia

Ahora describimos los teoremas presentados por Euclides en su libro III, cabe aclarar que en su libro IV no presenta ningún teorema, solo problemas.

Libro III

Proposición 2

Si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos caerá dentro del círculo.



23 Proposición 2, Libro III

La demostración establece que, al tomar dos puntos al azar A y B en la circunferencia de un círculo, la recta que une estos dos puntos AB caerá dentro del círculo siguiendo los siguientes pasos:

1. Se parte de la suposición de que la recta AB cae fuera del círculo, creando así un triángulo externo AEB .
2. Se toma el centro del círculo como Δ , y se trazan las líneas ΔA y ΔB , prolongando ΔBE .
3. Se demuestra que el ángulo ΔEB es mayor que el ángulo ΔBE .
4. Se utiliza la propiedad de que el lado opuesto al ángulo mayor es mayor en un triángulo para concluir que ΔZ es mayor que ΔE , lo cual es imposible.
5. Por lo tanto, se concluye que la recta AB no puede caer fuera del círculo.
6. Se afirma que de manera similar se podría demostrar que la recta AB

tampoco puede caer sobre la circunferencia.

7. La conclusión es que la recta AB caerá dentro del círculo.

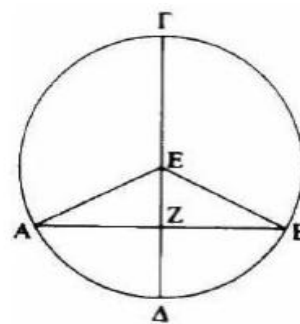
La demostración utiliza propiedades geométricas para mostrar que la recta que une dos puntos aleatorios en la circunferencia de un círculo siempre caerá dentro del círculo.

Proposición 3

Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

La demostración establece que, en un círculo, si una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, entonces la corta también formando ángulos rectos. Además, si corta la recta formando ángulos rectos, entonces también la divide en dos partes iguales. El procedimiento utilizado es:

1. Se considera un círculo con centro en E y una recta $\Gamma\Delta$ trazada a través del centro que divide en dos partes iguales a la recta AB no (trazada) a través del centro en el punto Z .
2. Se demuestra que los triángulos AZE y BZE tienen ángulos rectos (AZE y BZE son rectángulos) debido a que AZ es igual a ZB y EA es igual a EB .
3. Se afirma que cuando una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, entonces cada uno de los ángulos iguales es recto.
4. Se concluye que la recta $\Gamma\Delta$ (trazada) a través del centro, al dividir en dos partes iguales a AB , también corta formando ángulos rectos.
5. Luego, se asume que la recta $\Gamma\Delta$ corta AB formando ángulos rectos.
6. Se demuestra que, en este caso, AZ es igual a ZB utilizando la propiedad de que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



24 Proposición 3, Libro III

En resumen, se establece que si la recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta, entonces corta también formando ángulos rectos, y viceversa.

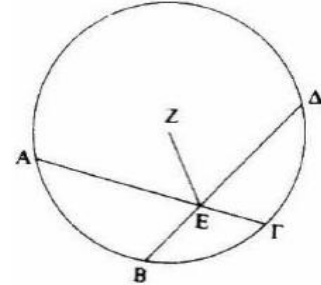
Proposición 4

Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales.

La demostración establece que, en un círculo, si dos rectas que no pasan por el centro se cortan entre sí, entonces no se dividen entre sí en dos partes iguales demostrado de la siguiente manera:

1. Se considera un círculo con centro en Z y dos rectas $A\Gamma$ y $B\Delta$ que no pasan por el centro. Estas rectas se cortan en el punto E .
2. Se asume, para argumentar en contra, que las rectas $A\Gamma$ y $B\Delta$ se dividen entre sí en dos partes iguales, de modo que AE sea igual a ET y BE sea igual a $E\Delta$.
3. Se toma el centro del círculo como Z y se traza la recta ZE .
4. Se utiliza el hecho de que una recta que pasa por el centro ZE divide en dos a otra recta que no pasa por el centro $A\Gamma$, la corta formando ángulos rectos.
5. Similarmente, se utiliza el hecho de que ZE divide en dos a $B\Delta$, también la corta formando ángulos rectos.
6. Se concluye que ambos ángulos ZEA y ZEB son rectos.
7. Se argumenta que ZEA es igual a ZEB , lo cual es imposible ya que uno es menor que el otro.
8. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que las rectas $A\Gamma$ y $B\Delta$ no se dividen entre sí en dos partes iguales.

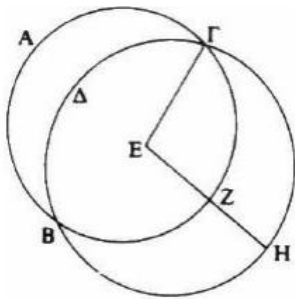
Se demuestra así que, si dos rectas que no pasan por el centro se cortan entre sí en un círculo, entonces no se dividen en dos partes iguales.



25 Proposición 4, Libro III

Proposición 5

Si dos círculos se cortan entre sí, su centro no será el mismo.



26 Proposición 5, Libro III

La demostración establece que, si dos círculos se cortan entre sí, entonces sus centros no son el mismo. Los pasos seguidos son:

1. Se consideran dos círculos, $AB\Gamma$ y $\Gamma\Delta H$, que se cortan entre sí en los puntos B y Γ .
 2. Se asume, para argumentar en contra, que ambos círculos comparten el mismo centro y se designa este centro como E .
 3. Se traza $E\Gamma$ desde el supuesto centro E hasta el punto de intersección Γ .
 4. Se argumenta que, como E es el centro del círculo $AB\Gamma$, la distancia $E\Gamma$ es igual a la distancia desde E hasta el punto donde se cortan los círculos $AB\Gamma$ y $\Gamma\Delta H$ en Γ .
 5. Además, se argumenta que, como E es el centro del círculo $\Gamma\Delta H$, la distancia $E\Gamma$ es igual a la distancia desde E hasta el punto de intersección donde se cortan los círculos en Γ .
 6. Se concluye que EZ es igual a EH , ya que ambas son iguales a $E\Gamma$.
 7. Se señala que EZ es menor que EH , lo cual es imposible si ambas son iguales.
 8. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que el punto E no puede ser el centro de ambos círculos.
- Con eso se demuestra que, si dos círculos se cortan entre sí, entonces sus centros no pueden ser el mismo punto.

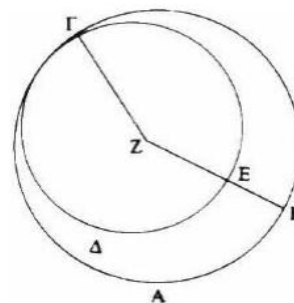
Proposición 6

Si dos círculos se tocan uno a otro, su centro no será el mismo.

En esta demostración, se establece que, si dos círculos se tocan entre sí, entonces sus centros no son el mismo. Aquí está el resumen de la demostración:

1. Se consideran dos círculos, $AB\Gamma$ y $\Gamma\Delta E$, que se tocan entre sí en el punto Γ .
2. Se asume, para argumentar en contra, que ambos círculos comparten el mismo centro y se designa este centro como Z .
3. Se traza $Z\Gamma$ desde el supuesto centro Z hasta el punto de contacto Γ .
4. Se argumenta que, como Z es el centro del círculo $AB\Gamma$, la distancia $Z\Gamma$ es igual a la distancia desde Z hasta el punto donde los círculos se tocan en Γ .
5. Además, se argumenta que, como Z es el centro del círculo $\Gamma\Delta E$, la distancia $Z\Gamma$ es igual a la distancia desde Z hasta el punto donde los círculos se tocan en Γ .
6. Se concluye que ZB es igual a ZE , ya que ambas son iguales a $Z\Gamma$.
7. Se señala que ZE es menor que ZB , lo cual es imposible si ambas son iguales.
8. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que el punto Z no puede ser el centro de ambos círculos.

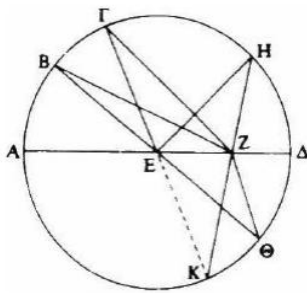
Se demuestra así que, si dos círculos se tocan entre sí, entonces sus centros no pueden ser el mismo punto.



27 Proposición 6, Libro III

Proposición 7

Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la restante y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.



28 Proposición 7, Libro III

En esta demostración se establece que, si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no es el centro del círculo, y desde ese punto se trazan rectas hacia el círculo, entonces:

1. La mayor de esas rectas será aquella que pasa por el centro del círculo ZA .
2. La menor será la recta restante ZD .
3. Entre las demás rectas $ZB, Z\Gamma, ZH$, la más cercana a la que pasa por el centro ZA será siempre mayor que la más lejana.
4. Solo dos rectas iguales pueden caer del punto Z al círculo a uno y otro lado de la más pequeña ZD .

Entonces la demostración es el siguiente:

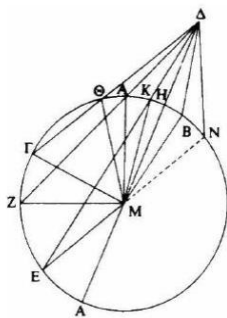
1. Se toma un punto Z en el diámetro AD de un círculo con centro en E , y se trazan rectas desde Z hasta el círculo $ZB, Z\Gamma, ZH$.
2. Se demuestra que ZA es la mayor, ZD es la menor, y entre las demás ZB es mayor que $Z\Gamma$, y $Z\Gamma$ es mayor que ZH .
3. Se establece que solo dos rectas iguales pueden caer del punto Z al círculo a uno y otro lado de la más pequeña ZD .

En conclusión, se describen las propiedades de las rectas que van desde un punto en el diámetro de un círculo hacia el círculo, en función de la posición del punto respecto al centro del círculo.

Proposición 8

Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se trazan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más cercana a la que pasa por el centro es mayor a la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más cercana a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Se establecen varias propiedades en esta demostración sobre las rectas trazadas desde un punto exterior a un círculo:



29 Proposición 8, Libro III

1. Si una recta pasa por el centro del círculo, entonces es la mayor de todas las rectas trazadas desde el punto exterior al círculo.
2. Entre las rectas que caen en la parte cóncava del círculo, la que pasa por el centro es la mayor. Además, la recta más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana.
3. Entre las rectas que caen en la parte convexa del círculo, la que está entre el punto y el diámetro es la menor. Además, de las demás rectas, la más cercana a la menor es siempre menor que la más lejana.
4. Solo caerán dos rectas iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la recta más pequeña.

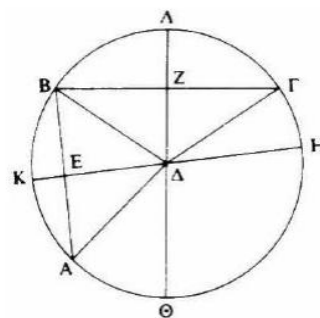
La demostración describe cómo varían las longitudes de las rectas trazadas desde un punto exterior al círculo en función de su posición relativa al centro del círculo y al diámetro.

Proposición 9

Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.

En esta demostración se establece que, si se toma un punto dentro de un círculo y desde ese punto caen más de dos rectas iguales al círculo, entonces el punto tomado es el centro del círculo. Los pasos de la demostración son los siguientes:

1. Se toma un círculo con centro en algún punto O y se elige un punto Δ dentro del círculo.
2. Se trazan tres rectas desde Δ hasta la circunferencia del círculo: ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$.
3. Se trazan las líneas AB y $B\Gamma$, dividiéndolas en dos partes iguales en los puntos E y Z , respectivamente.
4. Se trazan líneas $E\Delta$ y $Z\Delta$, y se prolongan hasta los puntos H , K , Θ , A .
5. Se argumenta que los ángulos $AE\Delta$ y $BE\Delta$ son rectos, dividiendo la línea AB en dos partes iguales con ángulos rectos en HK .
6. Se concluye que, según un porisma, si una recta divide en dos a otra formando ángulos rectos, entonces el centro del círculo está en la recta que corta.
7. Se establece que el centro del círculo $AB\Gamma$ está en las líneas HK y ΘA .
8. Se concluye que el único punto común a HK y ΘA es el punto Δ .
9. Por lo tanto, se demuestra que el punto Δ es el centro del círculo $AB\Gamma$ si desde él caen más de dos rectas iguales al círculo.

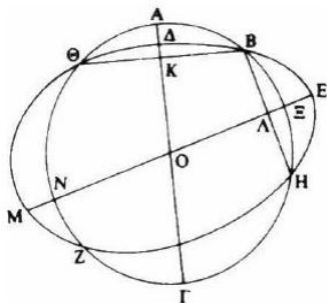


30 Proposición 9, Libro III

La demostración muestra cómo la existencia de más de dos rectas iguales desde un punto dentro del círculo indica que ese punto es el centro del círculo.

Proposición 10

Un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos.



31 Proposición 10, Libro III

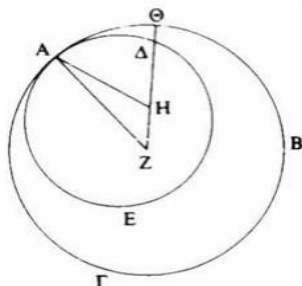
En esta demostración se establece que un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos:

1. Se asume que el círculo $AB\Gamma$ corta al círculo ΔEZ en más de dos puntos: B, H, Z, Θ .
2. Se trazan las líneas $B\Theta$ y BH , dividiéndolas en dos partes iguales en los puntos K y Λ .
3. Se trazan las líneas $K\Gamma$ y ΛM , formando ángulos rectos con $B\Theta$ y BH , y se prolongan hasta los puntos A y E .
4. Se argumenta que, en el círculo $AB\Gamma$, la línea $A\Gamma$ divide en dos partes iguales a $B\Theta$ formando ángulos rectos, por lo que el centro del círculo $AB\Gamma$ está en $A\Gamma$.
5. De manera similar, se argumenta que, en el círculo $AB\Gamma$, la línea NE divide en dos partes iguales a BH formando ángulos rectos, por lo que el centro del círculo $AB\Gamma$ está en NE .
6. Se concluye que el centro del círculo $AB\Gamma$ está tanto en $A\Gamma$ como en NE , y el único punto en el que ambas líneas se encuentran es el punto O .
7. Se argumenta que de manera análoga se puede demostrar que el centro del círculo ΔEZ también es O .
8. Se llega a una contradicción ya que O no puede ser el centro de ambos círculos $AB\Gamma$ y ΔEZ al mismo tiempo, lo cual es imposible.
9. Por lo tanto, se concluye que un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos.

La demostración utiliza argumentos sobre la división de líneas y la existencia de ángulos rectos para llegar a la conclusión de que dos círculos no pueden cortarse en más de dos puntos.

Proposición 11

Si dos círculos se tocan uno a otro por dentro, y se toman sus centros, la recta que une sus centros prolongada caerá sobre el punto de contacto de los círculos.



32 Proposición 11, Libro III

En esta demostración se establece que, si dos círculos se tocan uno dentro del otro, y se toman sus centros, entonces la recta que une los centros prolongada caerá sobre el punto de contacto de los círculos:

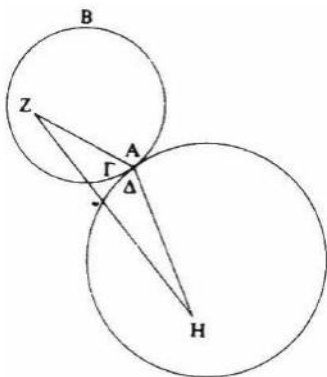
1. Se consideran dos círculos, $AB\Gamma$ y $A\Delta E$, que se tocan uno dentro del otro en el punto A .
2. Se toman los centros de los círculos: Z para el círculo $AB\Gamma$ y H para el círculo $A\Delta E$.
3. Se supone que la recta trazada desde H hasta Z , prolongada, no caerá sobre el punto de contacto A .
4. Se trazan las líneas AZ y AH .
5. Se argumenta que AH y HZ son mayores que ZA , es decir, que $Z\Theta$.
6. Se quita ZH de cada una de las líneas AH y HZ , obteniendo la línea $H\Theta$.
7. Se concluye que $H\Delta$ (la restante AH) es mayor que $H\Theta$, pero AH es igual a $H\Delta$.
8. Se llega a una contradicción, ya que $H\Delta$ no puede ser mayor que $H\Theta$ si ambas son iguales.
9. Además, se concluye que la recta trazada desde Z hasta H no puede caer fuera, por lo que debe caer sobre el punto de contacto A .

En resumen, la demostración utiliza argumentos sobre las longitudes de las líneas y llega a una contradicción para demostrar que la recta que une los centros prolongada cae sobre el punto de contacto de los círculos.

Proposición 12

Si dos círculos se tocan uno a otro por fuera, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto.

Esta demostración establece que, si dos círculos se tocan uno fuera del otro, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto. Los pasos de la demostración son:



33 Proposición 12, Libro III

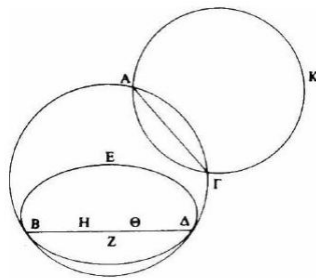
1. Se consideran dos círculos, $AB\Gamma$ y $A\Delta E$, que se tocan por fuera en el punto A .
2. Se toman los centros de los círculos: Z para el círculo $AB\Gamma$ y H para el círculo $A\Delta E$.
3. Se supone que la recta trazada desde Z hasta H no pasa por el punto de contacto A .
4. Se trazan las líneas AZ y AH .
5. Se argumenta que ZA es igual a $Z\Gamma$, ya que Z es el centro del círculo $AB\Gamma$, y que HA es igual a $H\Delta$, ya que H es el centro del círculo $A\Delta E$.
6. Se concluye que ZA y AH son iguales a $Z\Gamma$ y $H\Delta$, respectivamente, por lo que la recta entera ZH es mayor que las líneas ZA y AH .
7. Se llega a una contradicción al afirmar que ZH es tanto mayor como menor que ZA y AH , lo cual es imposible.
8. Se concluye que la recta trazada desde Z hasta H debe pasar por el punto de contacto A .

La demostración utiliza argumentos sobre las longitudes de las líneas y llega a una contradicción para demostrar que la recta que une los centros pasa a través del punto de contacto de los círculos.

Proposición 13

Un círculo no toca a otro círculo en más de un punto, ya sea por dentro o por fuera.

Esta demostración establece que un círculo no toca a otro círculo ni por dentro ni por fuera en más de un punto:



34 Proposición 13, Libro III

1. Supongamos que es posible que un círculo, por ejemplo, $AB\Gamma\Delta$, toque otro círculo, $EBZ\Delta$, por dentro en más de un punto, como Δ y B .
2. Se toma el centro H del círculo $AB\Gamma\Delta$ y el centro Θ del círculo $EBZ\Delta$.
3. Se traza la recta desde H hasta Θ .
4. Se argumenta que la recta trazada desde H hasta Θ debe pasar sobre B y Δ , ya que es una recta que une los centros de ambos círculos, y, por lo tanto, debe pasar por los puntos de contacto.
5. Se demuestra que BH es igual a $H\Delta$, ya que H es el centro del círculo $AB\Gamma\Delta$. Luego se concluye que BH es mayor que $\Theta\Delta$.
6. Se llega a una contradicción al afirmar que $B\Theta$, siendo igual a $\Theta\Delta$, es mayor que $\Theta\Delta$.
7. Se concluye que un círculo no puede tocar a otro círculo por dentro en

más de un punto.

La demostración utiliza argumentos lógicos y de geometría para llegar a la conclusión de que un círculo no puede tocar a otro círculo en más de un punto, ya sea por dentro o por fuera.

Proposición 14

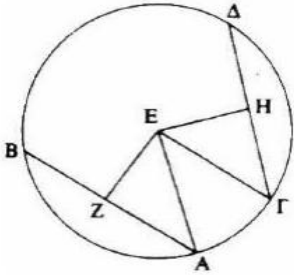
En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí.

Esta demostración establece dos propiedades importantes en un círculo:

- a) Si dos rectas en un círculo son iguales, entonces están a la misma distancia del centro del círculo.
- b) Si dos rectas en un círculo están a la misma distancia del centro del círculo, entonces son iguales entre sí.

Los pasos de la demostración son:

1. Se toma un círculo con centro en E y se trazan las rectas perpendiculares EZ y EH a las rectas AB y $\Gamma\Delta$, respectivamente.



35 Proposición 14, Libro III

2. Se argumenta que, dado que EZ y EH son perpendiculares a las rectas AB y $\Gamma\Delta$ y pasan por el centro E , dividen esas rectas en dos partes iguales.
3. Se demuestra que AZ es igual a ZB y que $\Gamma\Delta$ es igual a ΓH .
4. Se argumenta que, como AZ es igual a ZB y $\Gamma\Delta$ es igual a ΓH , entonces AB es el doble de AZ y $\Gamma\Delta$ es el doble de ΓH .
5. Se utiliza la propiedad de los triángulos rectángulos en el círculo para establecer que los cuadrados de las longitudes de las rectas están relacionados de manera específica.
6. Se concluye que, dado que los cuadrados de AZ y ZE son iguales a los cuadrados de EH y $H\Gamma$, entonces AZ es igual a ΓH .
7. Se argumenta que, como AB es el doble de AZ y $\Gamma\Delta$ es el doble de ΓH , entonces AB es igual a $\Gamma\Delta$.

8. Se concluye que, en un círculo, si dos rectas son iguales, entonces están a la misma distancia del centro, y si están a la misma distancia del centro, entonces son iguales entre sí.

Esta demostración utiliza propiedades geométricas y algebraicas para establecer las relaciones entre las longitudes de las rectas en un círculo.

Proposición 15

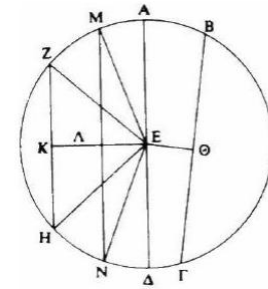
En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más cercana al centro es siempre mayor que la más lejana.

Esta demostración establece dos propiedades importantes en un círculo:

- a) El diámetro de un círculo es la recta más larga en el círculo.
- b) De las demás rectas que no son el diámetro, la más cercana al centro del círculo es siempre mayor que la más lejana.

Los pasos de la demostración son:

1. Se toma un círculo con centro en E y se selecciona su diámetro $A\Delta$.
2. Se trazan las rectas perpendiculares $E\theta$ y $E\kappa$ desde el centro E hasta las rectas $B\Gamma$ y ZH , respectivamente.
3. Se argumenta que, dado que $B\Gamma$ es más cercana al centro que ZH , la recta $E\kappa$ perpendicular a $B\Gamma$ es mayor que la recta $E\theta$, perpendicular a ZH .
4. Se construye una recta adicional AM perpendicular a $E\kappa$ y que forma ángulos rectos con EN , trazada desde el centro E hasta N .
5. Se establece que $E\theta$ es igual a $E\lambda$ y, por lo tanto, $B\Gamma$ es igual a MN donde MN es la base de AM .
6. Se demuestra que $A\Delta$ es igual a ME , EN .
7. Se argumenta que, dado que ME , EN son mayores que MN , que a su vez es igual a $B\Gamma$, entonces $A\Delta$ es mayor que $B\Gamma$.
8. Se establece que, como los lados ME , EN son iguales a los lados ZE , EH , y el ángulo MEN es mayor que el ángulo ZEH , entonces la base MN es mayor que la base ZH .
9. Se concluye que el diámetro $A\Delta$ es la recta mayor en el círculo, y que $B\Gamma$ (la más cercana al centro) es mayor que ZH (la más lejana).

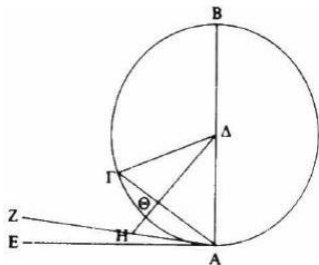


36 Proposición 15, Libro III

Esta demostración combina argumentos geométricos y propiedades de las rectas perpendiculares para establecer las relaciones entre las longitudes de las rectas en un círculo.

Proposición 16

La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.



37 Proposición 16, Libro III

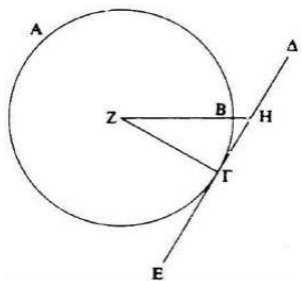
Esta demostración establece varias propiedades interesantes sobre la relación entre la recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo que forma ángulos rectos con el diámetro y la circunferencia del círculo. Los pasos de la demostración son:

1. Se toma un círculo con centro en Δ y un diámetro AB .
2. Se supone que la recta trazada por el extremo A del diámetro formando ángulos rectos con AB cae dentro del círculo, y se llega a una contradicción mostrando que no es posible.
3. Se argumenta que tampoco caerá sobre la circunferencia del círculo, llegando a la conclusión de que caerá fuera del círculo.
4. Se demuestra que en el espacio entre la recta AE y la circunferencia no se interpondrá otra recta.
5. Se afirma que el ángulo del semicírculo comprendido por la recta BA y la circunferencia es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo, y el restante comprendido por la circunferencia y la recta AE es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.
6. Se presenta un porisma que establece que la recta trazada por el extremo del diámetro formando ángulos rectos toca el círculo.

Estas propiedades resaltan características geométricas específicas de la relación entre el diámetro, la circunferencia y las rectas que forman ángulos rectos en un círculo.

Proposición 18

Si una recta toca un círculo, y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la (recta) trazada será perpendicular a la tangente.



38 Proposición 18, Libro III

Esta demostración establece que, si una recta toca un círculo y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, entonces la recta trazada será perpendicular a la tangente en el punto de contacto. Los pasos de la demostración son:

1. Se considera una recta ΔE que toca el círculo $AB\Gamma$ en el punto de contacto Γ .
2. Se toma el centro del círculo como Z y se traza una recta $Z\Gamma$ desde el centro hasta el punto de contacto.
3. Se supone, por contradicción, que hay otra recta perpendicular a ΔE desde el centro Z , por ejemplo, ZH .
4. Se argumenta que si ZH fuera perpendicular, entonces el ángulo $Z\Gamma H$ sería agudo (menor a 90 grados) según las propiedades de los ángulos en un triángulo rectángulo.
5. Se muestra que esto lleva a una contradicción, ya que $Z\Gamma$ es igual a ZB (ya que ambos son radios del círculo), y ZB no puede ser mayor que ZH y, al mismo tiempo, igual a $Z\Gamma$. Esto contradice las propiedades de los tamaños relativos de los lados en un triángulo rectángulo.
6. Se concluye que no puede haber otra recta perpendicular a ΔE desde el centro Z , excepto $Z\Gamma$.

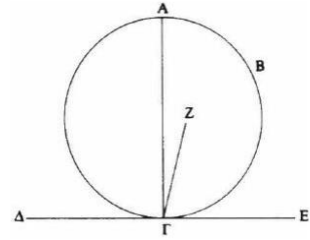
La recta trazada desde el centro hasta el punto de contacto es única y perpendicular a la tangente en el punto de contacto.

Proposición 19

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará en la recta trazada.

La demostración establece que, si una recta toca un círculo y se traza una línea recta desde el punto de contacto formando ángulos rectos con la tangente, entonces el centro del círculo estará en la recta trazada:

1. Se considera una recta ΔE que toca el círculo $AB\Gamma$ en el punto de contacto Γ .
2. Se traza una línea recta ΓA desde el punto de contacto Γ formando ángulos rectos con la tangente ΔE .
3. Se supone, por contradicción, que el centro del círculo no está en la línea ΓA , y se asume que el centro es Z .
4. Según las propiedades de tangencias y radios en un círculo, $Z\Gamma$ es perpendicular a ΔE .
5. Se argumenta que, si Z fuera el centro, el ángulo $Z\Gamma E$ sería recto, ya que $Z\Gamma$ es perpendicular a ΔE .
6. Se muestra que esto lleva a una contradicción, ya que el ángulo $Z\Gamma E$ sería igual al ángulo $A\Gamma E$, pero $A\Gamma E$ es recto, y $Z\Gamma E$ no puede ser igual a un ángulo recto y, al mismo tiempo, menor que él.
7. Se concluye que Z no puede ser el centro del círculo $AB\Gamma$, y, por lo tanto, el centro debe estar en la línea trazada ΓA .

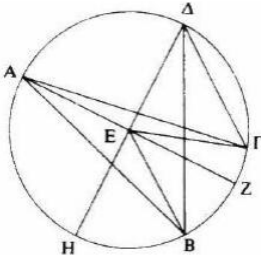


39 Proposición 19, Libro III

La demostración establece que el centro del círculo debe estar en la línea trazada desde el punto de contacto, formando ángulos rectos con la tangente.

Proposición 20

En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.



40 Proposición 20, Libro III

La demostración establece que, en un círculo, el ángulo correspondiente al centro (como $BE\Gamma$) es el doble del ángulo correspondiente a la circunferencia (como $BA\Gamma$), cuando ambos ángulos tienen como base la misma circunferencia $B\Gamma$. Los pasos para demostrar son:

1. Se considera un círculo con centro en B y se trazan dos radios, BA y BE , que comparten la misma base $B\Gamma$.
2. Se traza una recta AE y se prolonga hasta el punto Z .
3. Debido a que EA es igual a EB , los ángulos EAB y EBA son iguales.
4. Por lo tanto, los ángulos EAB y EBA son ambos el doble de EAB .
5. Según la propiedad de la circunferencia, el ángulo BEZ es igual a la suma de EAB y EBA .
6. Por lo tanto, el ángulo BEZ es el doble de EAB .
7. De manera similar, el ángulo $ZE\Gamma$ es el doble del ángulo EAF .
8. Por lo tanto, el ángulo completo $BE\Gamma$ es el doble del ángulo completo $BA\Gamma$.
9. La demostración se realiza de manera análoga para otro ángulo $B\Delta\Gamma$ y su correspondiente ángulo central $HE\Gamma$, demostrando que $BE\Gamma$ es el doble de $B\Delta\Gamma$.

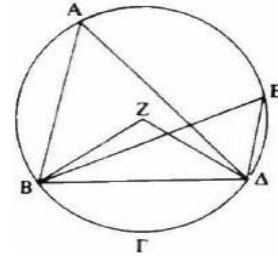
Concluyendo, en un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del ángulo correspondiente a la circunferencia cuando ambos ángulos tienen la misma circunferencia como base.

Proposición 21

En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí.

La demostración establece que, en un círculo, los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí. La explicación paso a paso es la siguiente:

1. Se considera un círculo con centro en Z y se toma un segmento $BAE\Delta$ en la circunferencia.
2. Se traza la recta BZ desde el centro hasta el punto B y se traza también la recta $Z\Delta$ hasta el punto Δ .
3. Se observan los ángulos BAA y $BE\Delta$ en el mismo segmento $BAE\Delta$.
4. Se utiliza la propiedad de que el ángulo central BZA es el doble del ángulo inscrito BAA cuando ambos tienen como base la misma circunferencia $B\Gamma\Delta$.
5. Por lo tanto, el ángulo BZA es el doble de BAA , y también el ángulo BZA es el doble de $BE\Delta$.
6. Al ser el ángulo BZA igual al ángulo $B\Gamma\Delta$, se concluye que BAA es igual a $BE\Delta$.

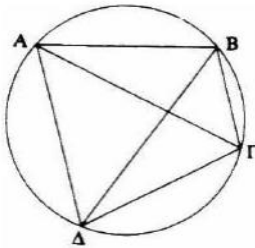


41 Proposición 21, Libro III

En consecuencia, en un círculo, los ángulos en el mismo segmento (en este caso, $BAE\Delta$) son iguales entre sí.

Proposición 22

Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos.



42 Proposición 22, Libro III

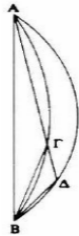
La demostración establece que, en un cuadrilátero inscrito en un círculo, los ángulos opuestos son iguales a dos rectos:

1. Se considera un cuadrilátero inscrito en un círculo $AB\Gamma\Delta$.
 2. Se trazan las diagonales del cuadrilátero, $A\Gamma$ y $B\Delta$.
 3. Se utiliza la propiedad de que, en todo triángulo, la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos.
 4. Se observa el triángulo $AB\Gamma$ y se concluye que la suma de los ángulos ΓAB , $AB\Gamma$, y $B\Gamma A$ es igual a dos rectos.
 5. Se establece que el ángulo ΓAB es igual al ángulo $B\Delta\Gamma$ debido a que están en el mismo segmento $BA\Delta\Gamma$.
 6. El ángulo $A\Gamma B$ es igual al ángulo $A\Delta B$ porque están en el mismo segmento $A\Delta\Gamma B$.
 7. Se concluye que el ángulo entero $A\Delta\Gamma$ es igual a la suma de los ángulos $B\Delta\Gamma$ y $A\Gamma B$.
 8. Añadiendo el ángulo $AB\Gamma$ a ambos lados, se obtiene que la suma de los ángulos $AB\Gamma$, $B\Delta\Gamma$, y $A\Gamma B$ es igual a la suma de los ángulos $AB\Gamma$ y $A\Delta\Gamma$.
 9. Como se estableció previamente que la suma de los ángulos $AB\Gamma$, $B\Delta\Gamma$, y $A\Gamma B$ es igual a dos rectos, se concluye que los ángulos $AB\Gamma$ y $A\Delta\Gamma$ son también iguales a dos rectos.
 10. De manera similar, se puede demostrar que los ángulos BAA y $\Delta\Gamma B$ también son iguales a dos rectos.
- En consecuencia, los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en un círculo son iguales a dos rectos.

Proposición 23

Sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado.

La demostración establece que no es posible construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado de una recta. Los pasos de la explicación son:



43 Proposición 23, Libro III

Los pasos de la explicación son:

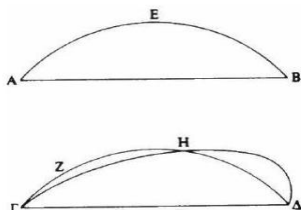
1. Se supone que es posible construir dos segmentos circulares sobre la misma recta AB : $A\Gamma B$ y $A\Delta B$, que son semejantes y desiguales.
2. Se traza la línea $A\Gamma\Delta$ que conecta los extremos de los dos segmentos circulares.
3. Se trazan las líneas ΓB y ΔB desde los puntos $A\Gamma$ y $A\Delta$ hacia B .
4. Debido a que los segmentos $A\Gamma B$ y $A\Delta B$ son semejantes, los ángulos correspondientes $A\Gamma B$ y $A\Delta B$ deben ser iguales.
5. Se concluye que el ángulo externo $A\Gamma B$ es igual al ángulo interno $A\Delta B$, lo cual es una contradicción.
6. Dado que se llega a una contradicción, se concluye que la suposición inicial de construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado de una recta es falsa.

Por lo tanto, sobre la misma recta no se pueden construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado.

Proposición 24

Los segmentos circulares semejantes que están sobre rectas iguales son iguales entre sí.

La demostración establece que, si dos segmentos circulares semejantes están sobre rectas iguales, entonces esos segmentos son iguales entre sí:



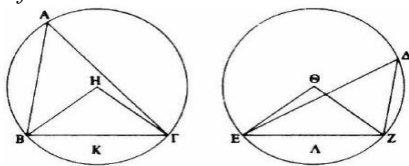
44 Proposición 24, Libro III

1. Se consideran dos segmentos circulares semejantes, AEB y ΓZA , que están sobre las rectas iguales AB y $\Gamma\Delta$, respectivamente.
2. Se supone que el segmento AEB no es igual al segmento ΓZA .
3. Se aplica el segmento AEB sobre el segmento ΓZA , poniendo el punto A sobre el punto Γ y la recta AB sobre la recta $\Gamma\Delta$.
4. Dado que AB y $\Gamma\Delta$ son iguales, el punto B coincidirá con el punto Δ .
5. Si el segmento AEB no coincidiera con el segmento ΓZA , tendría que caer dentro de él, fuera de él o desviarse de alguna manera, generando así una contradicción.
6. La contradicción surge porque la coincidencia de la recta AB con la recta $\Gamma\Delta$ no puede ocurrir sin que coincidan también los segmentos AEB y ΓZA .

7. Se concluye que la suposición inicial de que el segmento AEB no es igual al segmento ΓZA es falsa. Por lo tanto, se confirma que los segmentos circulares semejantes sobre rectas iguales son iguales entre sí.

Proposición 26

En los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya estén en los centros o en las circunferencias.



45 Proposición 26, Libro III

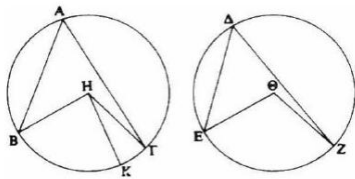
La demostración establece que, en círculos iguales, si hay ángulos iguales ya sea en los centros o en las circunferencias, entonces las circunferencias que los contienen son iguales entre sí. Los pasos de la demostración son:

1. Se consideran dos círculos iguales, $AB\Gamma$ y AEZ , con ángulos iguales $BH\Gamma$ y $E\Theta Z$ en los centros, y ángulos iguales $BA\Gamma$ y $E\Delta Z$ en las circunferencias.
2. Se trazan las rectas $B\Gamma$ y EZ , que son los radios de los círculos respectivos.
3. Debido a que los círculos $AB\Gamma$ y ΔEZ son iguales, los radios BH y $H\Gamma$ son iguales a los radios $E\Theta$ y ΘZ , respectivamente.
4. Dado que los ángulos correspondientes $BH\Gamma$ y $E\Theta Z$ son iguales, según la propiedad de la semejanza de triángulos, la base $B\Gamma$ es igual a la base EZ .
5. Además, debido a que el ángulo correspondiente a A en el círculo $AB\Gamma$ es igual al ángulo correspondiente a Δ en el círculo ΔEZ , los segmentos $BA\Gamma$ y $E\Delta Z$ son semejantes.
6. Ya que estos segmentos semejantes están sobre rectas iguales $B\Gamma$ y EZ , según otra propiedad de la semejanza de segmentos circulares, los segmentos $BA\Gamma$ y $E\Delta Z$ son iguales.
7. Como el círculo $AB\Gamma$ entero es igual al círculo ΔEZ entero, se concluye que la circunferencia restante $B\Gamma$ es igual a la circunferencia $E\Delta Z$.

Por lo que se demuestra que, en círculos iguales, los ángulos iguales ya sea en los centros o en las circunferencias están sobre circunferencias iguales.

Proposición 27

En los círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias.



46 Proposición 27, Libro III

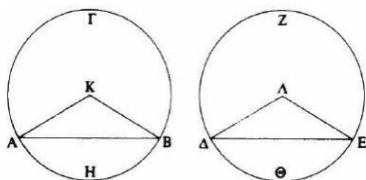
La demostración establece que, en círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales, ya sea en los centros o en las circunferencias, son iguales entre sí:

1. Se consideran dos círculos iguales, $AB\Gamma$ y ΔEZ , con ángulos iguales BHG y $E\Theta Z$ en los centros H y Θ , respectivamente, y ángulos iguales BAG y $E\Delta Z$ en las circunferencias.
2. Se supone que el ángulo BHG no es igual al ángulo $E\Theta Z$. Se asume que BHG es mayor.

3. Se construye en la recta BH y en su punto H el ángulo BHK igual al ángulo $E\Theta Z$. Esto es posible debido a que dos ángulos iguales están sobre circunferencias iguales cuando están en los centros (propiedad de la igualdad de ángulos centrales en círculos iguales).
 4. Ahora, se observa que la circunferencia BK es igual a la circunferencia EZ debido a que EZ es igual a $B\Gamma$.
 5. Sin embargo, esto lleva a una contradicción, ya que la circunferencia BK es igual a la circunferencia EZ , pero $B\Gamma$ es menor que EZ . Esto es imposible.
 6. Por lo tanto, la suposición de que el ángulo BHG es mayor que $E\Theta Z$ es falsa.
 7. Concluimos que los ángulos BHG y $E\Theta Z$ no son desiguales, por lo que son iguales.
 8. Luego, se utiliza la propiedad de que, en círculos iguales, el ángulo correspondiente a un arco es la mitad del ángulo central, y se demuestra que el ángulo correspondiente a A es igual al ángulo correspondiente a Δ .
- Finalmente, se establece que, en círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias.

Proposición 28

En los círculos iguales las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor.



47 Proposición 28, Libro III
AK, KB, ΔΛ, y ΔE.

La demostración establece que, en círculos iguales, las rectas iguales que cortan las circunferencias generan circunferencias iguales. Los pasos de la demostración son:

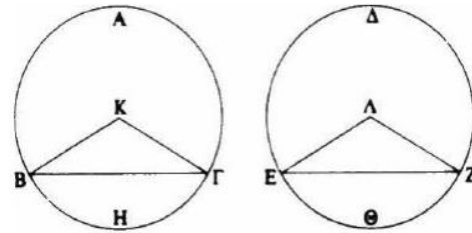
1. Se consideran dos círculos iguales, $AB\Gamma$ y ΔEZ , con rectas iguales AB y ΔE que cortan como circunferencias mayores $A\Gamma B$ y ΔZE , y como circunferencias menores AHB y $\Delta\Theta E$.
 2. Se toman los centros de los círculos como K y Λ , y se trazan las rectas AK , KB , $\Delta\Lambda$, y ΔE .
 3. Dado que los círculos son iguales, los radios son iguales. Por lo tanto, los dos lados AK y KB son iguales a los dos lados $\Delta\Lambda$ y ΔE , y la base AB es igual a la base ΔE .
 4. En el triángulo AKB y el triángulo $\Delta\Lambda E$, los lados y la base son iguales, por lo que el ángulo AKB es igual al ángulo $\Delta\Lambda E$.
 5. Debido a que los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales cuando están en los centros (propiedad de igualdad de ángulos centrales en círculos iguales), se concluye que la circunferencia AHB es igual a la circunferencia $\Delta\Theta E$.
 6. Además, se establece que el círculo entero $AB\Gamma$ es igual al círculo entero ΔEZ , por la premisa de que los círculos son iguales.
 7. Por lo tanto, la circunferencia restante $A\Gamma B$ es igual a la circunferencia restante AZE .
- Finalizando, en los círculos iguales, las rectas iguales que cortan las circunferencias generan circunferencias iguales, siendo la mayor ($A\Gamma B$) igual a la mayor (AZE) y la menor (AHB) igual a la menor ($\Delta\Theta E$).

Proposición 29

En los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales.

La demostración establece que, en círculos iguales, las rectas iguales que subtienden circunferencias generan circunferencias iguales:

1. Se consideran dos círculos iguales, $AB\Gamma$ y ΔEZ , con circunferencias iguales $BH\Gamma$ y $E\Theta Z$, y se trazan las rectas $B\Gamma$ y EZ .
2. Se toman los centros de los círculos como K y Λ , y se trazan las rectas $BK, K\Gamma, E\Lambda$, y ΛZ .
3. Debido a que las circunferencias $BH\Gamma$ y $E\Theta Z$ son iguales, el ángulo $BK\Gamma$ es igual al ángulo $E\Lambda Z$.
4. Dado que los círculos $AB\Gamma$ y ΔEZ son iguales, los radios $BK, K\Gamma$ y $E\Lambda, \Lambda Z$ son iguales.
5. Los segmentos de recta $BK, K\Gamma$ son iguales a los segmentos de recta $E\Lambda, \Lambda Z$, y ambos conjuntos comprenden ángulos iguales.
6. Por lo tanto, la base $B\Gamma$ es igual a la base EZ .

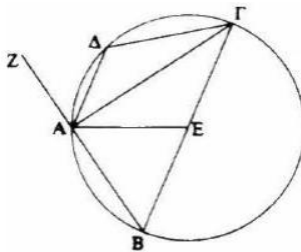


48 Proposición 29, Libro III

En conclusión, en los círculos iguales, las rectas iguales $B\Gamma$ y EZ que subtienden circunferencias generan circunferencias iguales.

Proposición 31

En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menor que un recto, el (ángulo) en el segmento menor es mayor que un recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto.



49 Proposición 31, Libro III

Esta demostración establece varias propiedades interesantes de los ángulos en un círculo:

1. Ángulo en el Semicírculo $B\Gamma$. El ángulo formado por la recta en un semicírculo es recto. Esto se demuestra observando que los ángulos ABE y $A\Gamma E$ son iguales, y como BAE y ΓAE son también iguales, el ángulo $B\Gamma$ es igual al ángulo $Z\Gamma$. Dado que el ángulo exterior $Z\Gamma$ es recto, entonces $B\Gamma$ también es recto.
2. Ángulo en el Segmento Mayor $AB\Gamma$: El ángulo en el segmento mayor $AB\Gamma$ es menor que un recto. Esto se deriva de la propiedad de que la suma de los ángulos $AB\Gamma$ y $BA\Gamma$ es igual a un ángulo recto, y como $BA\Gamma$ es recto, entonces $AB\Gamma$ debe ser menor que un recto.
3. Ángulo en el Segmento Menor $A\Delta\Gamma$: El ángulo en el segmento menor $A\Delta\Gamma$ es mayor que un recto. Esto se debe a que, en el cuadrilátero $AB\Gamma\Delta$, el ángulo $AB\Gamma$ es menor que un recto, y los ángulos opuestos de un cuadrilátero en un círculo suman dos rectos. Por lo tanto, el ángulo $A\Delta\Gamma$ debe ser mayor que un recto.
4. Ángulo del Segmento Mayor, Mayor que un Recto: El ángulo del segmento mayor, formado por la circunferencia $AB\Gamma$ y la recta $A\Gamma$, es mayor que un recto. Esto se deduce al observar que el ángulo formado por las rectas BA y $A\Gamma$ es recto.
5. Ángulo del Segmento Menor, Menor que un Recto: El ángulo del segmento menor, comprendido por la circunferencia $A\Delta\Gamma$ y la recta $A\Gamma$, es menor que un recto. Esto se establece al notar que el ángulo formado por las rectas $A\Gamma$ y AZ es recto.

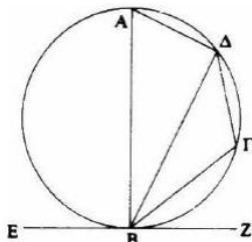
Además, se menciona un porisma interesante al final: si un ángulo de un triángulo es igual a los otros dos, el ángulo es recto, ya que el ángulo exterior es igual a la suma de los otros dos ángulos.

Proposición 32

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo.

La demostración establece que, si una recta toca un círculo y desde el punto de contacto se traza una recta que corta el círculo, entonces los ángulos que forma esta recta con la tangente son iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo. Los pasos de la demostración son:

1. Sea EZ la tangente al círculo $AB\Gamma\Delta$ en el punto B . Desde B , trácese la recta $B\Delta$ que corta el círculo $AB\Gamma\Delta$ en el punto Δ .



50 Proposición 32, Libro III

2. Se toma un punto arbitrario Γ en la circunferencia $B\Delta$, y se trazan las rectas $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, y ΓB .

3. Dado que EZ es tangente al círculo en B , y se trazó BA formando ángulos rectos con la tangente, entonces el centro del círculo $AB\Gamma\Delta$ está en BA . Esto implica que BA es un diámetro del círculo.

4. Debido a que $A\Delta B$ es un ángulo en un semicírculo (ya que BA es un diámetro), entonces el ángulo $A\Delta B$ es recto.

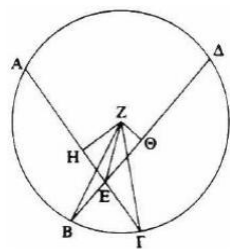
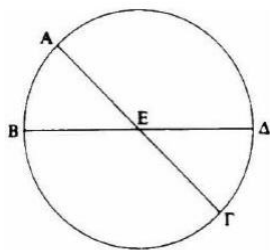
5. Los ángulos $B\Delta A$ y $AB\Delta$ suman un recto. Como ABZ es recto (ya que es un ángulo entre una tangente y el radio en el punto de tangencia), entonces el ángulo ABZ es igual a los ángulos $B\Delta A$ y $AB\Delta$.

6. Restando el ángulo $AB\Delta$ de ambos lados de la igualdad, se obtiene que el ángulo ΔBZ es igual al ángulo $B\Delta A$ en el segmento alterno del círculo.
7. Debido a que $AB\Gamma\Delta$ es un cuadrilátero en un círculo, sus ángulos opuestos suman dos rectos. Los ángulos ΔBZ y ABE también suman dos rectos, por lo tanto, el ángulo $\Delta B E$ es igual al ángulo $\Delta \Gamma B$ en el segmento alterno del círculo.

Los ángulos que forma $B\Delta$ con la tangente EZ (ΔBZ) son iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo, es decir, al ángulo $B\Delta A$ y al ángulo $\Delta \Gamma B$.

Proposición 35

Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra.



51 Proposición 35, Libro III

La demostración establece que, si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra:

1. En el círculo $AB\Gamma\Delta$, se cortan las dos rectas $A\Gamma$ y $B\Delta$ en el punto E .
2. Se toma el centro del círculo como Z y se trazan desde Z las perpendiculares ZH y $Z\Theta$ a las rectas $A\Gamma$ y $B\Delta$, respectivamente. Se trazan también las líneas ZB , $Z\Gamma$, y ZE .
3. Se observa que AH es igual a $H\Gamma$, ya que la recta que pasa por el centro HZ corta en ángulo recto a la recta que

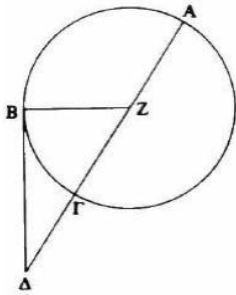
pasa por el centro $A\Gamma$, dividiéndola en dos partes iguales.

4. Como $A\Gamma$ se corta en partes iguales en H y en desiguales en E , el rectángulo comprendido por AE y $E\Gamma$, junto con el cuadrado de EH , es igual al cuadrado de $H\Gamma$.
5. Se añade el cuadrado de HZ a ambos lados de la igualdad, y se obtiene que el rectángulo comprendido por AE y $E\Gamma$, junto con los cuadrados de EH y HZ , es igual a los cuadrados de ΓH y HZ .
6. Se utiliza el hecho de que el cuadrado de ZE es igual a los cuadrados de EH y HZ , y el cuadrado de $Z\Gamma$ es igual a los cuadrados de ΓH y HZ .
7. Se concluye que el rectángulo comprendido por AE y $E\Gamma$, junto con el cuadrado de ZE , es igual al cuadrado de $Z\Gamma$. Además, se llega a la misma conclusión para el rectángulo comprendido por ΔE y $E B$.
8. Restando el cuadrado de ZE de ambos lados de ambas ecuaciones, se obtiene que el rectángulo comprendido por AE y $E\Gamma$ es igual al rectángulo comprendido por ΔE y $E B$.

Por lo tanto, si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra.

Proposición 36

Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.



52 Proposición 36, Libro III

La demostración establece que, si se toma un punto exterior a un círculo y desde él caen dos rectas al círculo, una cortándolo y la otra tocándolo, entonces el rectángulo comprendido por la secante completa y la parte exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente a la circunferencia.

La demostración se divide en dos casos:

Caso 1: La recta secante pasa por el centro del círculo Z.

1. Se traza la tangente desde el punto Δ al punto de tangencia B y se forma el triángulo rectángulo $ZB\Delta$, donde ZB es el radio del círculo.
2. Utilizando propiedades de triángulos rectángulos, se demuestra que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de ZB , es igual al cuadrado de $Z\Delta$.
3. Se concluye que el rectángulo mencionado es igual a los cuadrados de ZB y $B\Delta$, y al restar el cuadrado de ZB de ambos lados de la ecuación, se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de la tangente AB .

Caso 2: La recta secante no pasa por el centro del círculo.

1. Se toma el centro del círculo como E y se trazan las perpendiculares desde E a $A\Gamma$ y $B\Delta$.
2. Se demuestra que AZ es igual a $Z\Gamma$, y utilizando propiedades de triángulos rectángulos en el triángulo rectángulo $EZ\Gamma$, se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de ZE , es igual al cuadrado de $Z\Delta$.
3. Añadiendo el cuadrado de ZE a ambos lados de la ecuación y utilizando propiedades de cuadrados, se obtiene que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$, junto con el cuadrado de EB , es igual al cuadrado de $E\Delta$.
4. Se demuestra que el cuadrado de $E\Gamma$ es igual a los cuadrados de $Z\Gamma$ y ZE .
5. Al restar el cuadrado de EB de ambos lados de la ecuación, se concluye que el rectángulo comprendido por $A\Delta$ y $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de AB .

Por lo tanto, en ambos casos, se establece que el rectángulo comprendido por la secante completa y la parte exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.

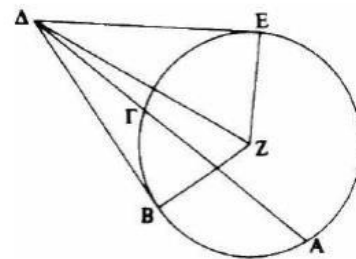
Proposición 37

Si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo, y la otra cae (sobre él), y además el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomado entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, la (recta) que cae tocará el círculo.

Esta proposición establece que, si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, una de las cuales corta el círculo y la otra cae sobre él, y además el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, entonces la recta que cae tocará el círculo.

La demostración se realiza mediante la construcción de una tangente al círculo desde el punto exterior y utilizando propiedades geométricas. Los pasos de la demostración son:

1. Se toma un punto Δ fuera del círculo $AB\Gamma$, y se dejan caer dos rectas desde Δ al círculo, $\Delta\Gamma A$ y ΔB .
2. Se traza una tangente ΔE al círculo desde el punto Δ , y se toma el centro del círculo como Z . Se trazan las líneas ZE , ZB , y $Z\Delta$.
3. Se demuestra que el ángulo $ZE\Delta$ es recto, ya que ΔE toca el círculo y $\Delta\Gamma A$ lo corta.



53 Proposición 37, Libro III

4. Dado que el rectángulo comprendido por AD y DF es igual al cuadrado de DE (por la hipótesis), se llega a la conclusión de que DE es igual a DB .
5. Se observa que ZE es igual a ZB , y al considerar el triángulo $\triangle EZ$ y el triángulo $\triangle BZ$, se demuestra que son congruentes.
6. Se concluye que DB toca el círculo, ya que el ángulo $\angle DBZ$ es recto, y la recta trazada formando ángulos rectos con el diámetro de un círculo en un extremo toca el círculo.

La demostración muestra que, bajo las condiciones establecidas, la recta que cae tocará el círculo.

$$\textcircled{1} \frac{CS}{CF} = \frac{2}{c} \Rightarrow CS = \frac{2}{c} + 2x \Rightarrow CS = 2 + \frac{d_1 + d_2}{2} = y_2 + d_1 + d_2 \quad \textcircled{1}$$

$$CF = \frac{E_1 \cdot c}{2} \Rightarrow \left(y_2 + \frac{d_1 + d_2}{2} \right) \cdot \frac{c}{2} = \frac{c y_2}{2} + \frac{d_1 c}{2} + \frac{d_2 c}{2} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \frac{EG}{BT} = \frac{2}{F} \Rightarrow EG = \frac{2}{F} - AB \Rightarrow EG = 2 - x \quad \textcircled{3}$$

$$BT = \frac{d_1 \cdot F}{2} \Rightarrow (2 - x) \cdot \frac{F}{2} \Rightarrow \frac{2F - Fx}{2} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \frac{TC}{CH} = \frac{2}{y} \Rightarrow TC = \frac{2}{y} + BT \Rightarrow TC = y + \frac{2F - Fx}{2} \Rightarrow TC = \frac{2y + 2F - Fx}{2} \quad \textcircled{5}$$

$$CH = \frac{TC \cdot y}{2} \Rightarrow \frac{c \cdot (2y + 2F - Fx)}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{3}{2} y^2 + \frac{F y}{2} - \frac{F y x}{2}$$

$$BR = \frac{b \cdot x}{2}$$

$$CR = \frac{y + b x}{2}$$

$$CD = \frac{E_2}{2} + \frac{b c x}{2c}$$

$$BE = K + x$$

$$BS = \frac{d_1 c + d_2 x}{2}$$

$$CS = \frac{y_2 + d_1 + d_2}{2}$$

$$CF = \frac{E_1 y_2 + d_1 c + d_2 c x}{2}$$

$$EG = 2 - x$$

$$BT = \frac{2F - Fx}{2}$$

$$TC = \frac{2y + 2F - Fx}{2}$$

$$CH = \frac{3}{2} y^2 + \frac{F y}{2} - \frac{F y x}{2}$$

$$C_3 + C_4 = C_3 + C_4$$

$$1. \frac{cx^2 + dek + dex}{z^2} = \left(\frac{c_2}{z} + \frac{bc_1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z} + \frac{f_2}{z} - \frac{f_1}{z}$$

$$\frac{cx^2 + dek + dex}{z^2} = \left(\frac{c_2 + bc_1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z} + \frac{f_2}{z} - \frac{f_1}{z}$$

$$z^2(dx^2 + dek + dex) = c_2 y^2 z^2 + c_1 z f_2 - c_2 z f_1 + bc_1 z f_2 - bc_1 z f_1$$

$$z^2(dx^2 + dek + dex) - c_2 y^2 z^2 - c_1 z f_2 + c_2 z f_1 - bc_1 z f_2 + bc_1 z f_1$$

$$(z^2 dx^2 - c_2 y^2 z^2) + bc_1 z f_1 + (bc_1 z f_2 - c_1 z f_2 + dex^2 z^2) + (-c_2 z f_1 + dex^2 z^2)$$

$$z^2(dx^2 - c_2 y^2) + bc_1 z f_1 - xy(bc_1 z - c_1 z - dex^2) + z(-c_2 z f_1 + dex^2 z^2) - bc_1 z f_1$$

$$(c_2^2 - c_1^2)z^2 - bc_1 z f_1 + (bc_1 z - c_1 z - dex^2)xy + (c_2 z f_1 - dex^2 z^2)y + bc_1 z f_1 = 0$$

$$A = (c_2^2 - c_1^2) \quad B = bc_1 z \quad C = (bc_1 z - c_1 z - dex^2) \quad D = (c_2 z f_1 - dex^2 z^2)$$

$$E = bc_1 z \quad F = 0$$