# ¡PÁRELE BOLAS A LA TANGENCIA CON PARÁBOLAS!

**Jeimy Tatiana Guatibonza Cárdenas**
**Héctor Mauricio Mendoza Dávila**

**Universidad Pedagógica Nacional**
**Facultad de Ciencia y Tecnología**
**Departamento de Matemáticas**
**Licenciatura en Matemáticas**
**Bogotá, Colombia**
**2020 - I**

# ¡PÁRELE BOLAS A LA TANGENCIA CON PARÁBOLAS!

**Jeimy Tatiana Guatibonza Cárdenas**
**cod. 2014240024**
**Héctor Mauricio Mendoza Dávila**
**cod. 2014140059**

**Director del trabajo:**
**María Nubia Soler Álvarez**

**Trabajo para obtener el título de:**
**Licenciados en Matemáticas**

**Universidad Pedagógica Nacional**
**Facultad de Ciencia y Tecnología**
**Departamento de Matemáticas**
**Licenciatura en Matemáticas**
**Bogotá, Colombia**
**2020 - I**

# ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"¡PÁRELE BOLAS A LA TANGENCIA CON PARÁBOLAS!"**, elaborado por los estudiantes **JEIMY TATIANA GUATIBONZA CÁRDENAS**, identificada con el Código **2014240024** y Cédula **1014268973** y **HÉCTOR MAURICIO MENDOZA DÁVILA**, identificado con el Código **2014140059** y Cédula **1026581454**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y seis** (**46**) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los dieciséis (16) días del mes de octubre de 2020.

María Nubia Soler

Mg. María Nubia Soler Álvarez
Asesora del Trabajo de grado

Mg. ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ
Jurado del Trabajo de grado

Orlando Aya C.

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR
Jurado del Trabajo de grado

# Resumen

En este documento se presentan las construcciones solución asociadas a nueve problemas de tangencia con parábolas, estos problemas surgen variando la cantidad de elementos dados para encontrar la parábola tangente o que los contenga según sea el caso; dichos elementos pueden ser puntos o rectas. Para llegar a las soluciones, fue necesario recurrir a sistemas teóricos de geometría euclidiana, geometría analítica y geometría proyectiva, a su vez fue importante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, ya que este permitió estudiar de manera particular la teoría y además permitió dar solución a los problemas propuestos.

Este trabajo, parte de la idea de dar solución a problemas relacionados con tangencia en cónicas dados cinco elementos, entre puntos, rectas y circunferencias, partiendo del trabajo "Del Problema de Apolonio a problemas de tangencias en otras secciones cónicas", Henao y Rincón (2017). Durante el estudio de este tema, se evidenció que las soluciones aludían a elipses e hipérbolas, dejando como interrogante ¿Por qué no aparecen soluciones vinculadas a parábolas?, por esta razón se decidió trabajar sobre problemas de tangencia con parábolas.

Cabe agregar que para el desarrollo de este trabajo de grado empezamos por plantear tres tipos de problemas relacionados a la tangencia con parábolas; el primero está vinculado a encontrar al menos una parábola que contenga o sea tangente a un elemento, el segundo problema está relacionado con encontrar al menos una parábola que contenga o sea tangente a dos elementos y el tercero está vinculado a encontrar al menos una parábola que contenga o sea tangente a tres elementos.

Así mismo, en este trabajo contamos detalladamente la manera en que fueron abordados cada uno de los problemas, con sus respectivas representaciones gráficas y soluciones, además se hace mención de los inconvenientes presentados durante la búsqueda de las soluciones.

# Contenido

# Índice de Figuras

# PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

## La anécdota de nuestra travesía

Todo comenzó por nuestro interés en desarrollar un trabajo de grado asociado a las matemáticas, debido a que el programa de la Licenciatura en Matemáticas nos da la oportunidad de elegir esta linea de trabajo.
En relación con nuestro deseo de explorar el campo de las matemáticas, teníamos tres ideas para nuestro trabajo de grado. En primer lugar estaba la multiplicación de números complejos de manera gráfica; esta idea surgió en una práctica pedagógica de enseñanza y aprendizaje del cálculo, en la cual debíamos explicar las operaciones con números complejos, particularmente queríamos estudiar la manera gráfica para sumar y restar dichos números. En nuestra búsqueda no encontramos un método gráfico para multiplicar números complejos, en consecuencia, empezamos a realizar posibles construcciones que nos permitieran explicar la multiplicación de dichos números, encontrando una manera de hacerlo. De ahí surgió la intención de profundizar sobre dicho hallazgo, como tema de trabajo de grado.

El segundo tema estaba asociado a la proporcionalidad, ya que en experiencias de práctica pedagógica, evidenciamos las dificultades y errores que presentaban la mayoría de los estudiantes al momento de abordar este tema debido a la forma como este se enseña, puesto que los estudiantes asociaban la proporcionalidad estrictamente a la aplicación sin significado de la denominada "regla de tres simple". En tanto, apareció la inquietud de abordar el mencionado tema de manera distinta.

Por último, conocimos el trabajo de grado de Henao y Rincón (2017) "Del trabajo de Apolonio a problemas de tangencias en otras secciones cónicas", en este trabajo de grado los autores propusieron una modificación al enunciado de los diez problemas de Apolonio; que consistía en hallar una circunferencia tangente o que contuviera a tres de estos elementos: punto, recta y circunferencia. Teniendo en cuenta este enunciado, los autores modificaron el enunciado "Encontrar una circunferencia tangente" por el enunciado

"Encontrar una cónica tangente o que contuviera estos tres elementos", sin embargo, se dieron cuenta que para garantizar la existencia de una cónica, era necesario tener cinco elementos, recurriendo al principio existente "cónica puntual" ; por tal motivo el enunciado lo modificaron para encontrar: una cónica tangente o que contuviera cinco elementos entre puntos, rectas y circunferencias.

Con esta modificación a los problemas de Apolonio, surgieron veintiún problemas de los cuales los autores lograron dar solución a seis de estos, los asociados únicamente a puntos y rectas; dejando abierta la investigación sobre posibles soluciones a los quince problemas restantes. Teniendo en cuenta lo anterior, se nos ocurrio inicialmente que nuestro trabajo de grado podria orientarse a solucionar uno de estos problemas, ya que respondía a nuestro interés de trabajar con construcciones geométricas.

Para empezar a relacionarnos con este tema, recordamos lo que habíamos estudiado en cursos anteriores de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, respecto a conceptos como: recta tangente, parábola, elipse, hipérbola, circunferencia y sus respectivas propiedades y elementos que las componen. Luego de esto, construimos en GeoGebra soluciones de los problemas de Apolonio y las soluciones que Henao y Rincón habían encontrado en su trabajo de grado.

Al empezar a trabajar dichos documentos, nos permitió ver propiedades y relaciones que no conociamos sobre las secciones cónicas. Una característica que identificamos en las construcciones realizadas por Henao y Rincón (2017), era que las cónicas que aparecían en la mayoría de construcciones eran elipses o hipérbolas; quedando como inquietud ¿por qué no aparecen parábolas?, sin embargo, empezamos a trabajar en uno de los problemas faltantes, "Cónica que contiene cuatro puntos y es tangente a una circunferencia (PPPPC)", para dicho problema, hicimos un acercamiento a la solución usando la herramienta "rastro" de GeoGebra; logrando visualizar las posibles soluciones al problema en cuestión. A pesar de que reconocíamos la existencia de al menos dos soluciones, luego de mucho explorar, no encontramos una ruta que nos llevara a encontrarlas formalmente.

Otro método que utilizamos para intentar dar solución a dicho problema, consistía en partir de la circunferencia y la tangente en un punto de ella, para encontrar la elipse tangente a esa misma recta, con el fin de caracterizar los puntos que determinaban la elipse respecto a la circunferencia dada; Aunque creíamos que era un buen camino, no logramos dar solución al problema planteado.

Como nuestro propósito era presentar algún avance en relación con los asuntos que se abordaban en este trabajo de grado y no logramos encontrar alguna solución para los problemas faltantes, optamos por considerar otras opciones para nuestro trabajo de grado. Esta vez consideramos la característica mencionada con anterioridad: la mayoría de las construcciones eran elipses o hipérbolas.

Inicialmente, hicimos un acercamiento a las posibles formas de construcción de una parábola, así como las propiedades: simétrico del foco respecto a una tangente, proyección ortogonal de un punto de la parábola respecto a la directriz, entre otras, además las posibles relaciones de los elementos que componen la parábola, para ello indagamos en distintas fuentes, encontrando un documento titulado "Construcción de cónicas", que se encuentra en la página: https://amontes.webs.ull.es/geogebra/master/conicas.html#IPt_PC_p, en este encontramos distintas formas de construir una cónica; el segundo referente teórico fue el trabajo de grado ya expuesto. El estudio de estos documentos permitió dar comienzo a las posibles construcciones solución de problemas como "Encontrar una parábola que sea tangente ó que contenga los siguientes elementos":

| [HTML]33CCCC Número de Elementos | Elemento(s) |
|---|---|
| [HTML]33CCCC Un Elemento<br>[HTML]33CCCC | Punto |
| | Recta |
| [HTML]33CCCC<br>[HTML]33CCCC Dos Elementos | Dos Puntos |
| | Dos Rectas |
| | Punto y Recta |
| [HTML]33CCCC<br>[HTML]33CCCC Tres Elementos<br>[HTML]33CCCC<br>[HTML]33CCCC | Tres Puntos |
| | Tres Rectas |
| | Dos Puntos y una Recta |
| | Dos Rectas y un Punto |

**Tabla** 1: Problemas de Tangencia.

Al tener planteado estos posibles casos (Tabla. 1.), empezamos a realizar exploraciones haciendo uso de GeoGebra que nos permitieran dar solución a los problemas. En primera instancia, tuvimos encuenta las propiedades básicas de la parábola para buscar la solución a los problemas "Parábola que pasa por un punto $(P)$(2.1) o es tangente a una recta $(R)$(2.2)", donde resulta la solución dado un punto $P$ existe al menos una parábola que lo contiene, puesto que al construir una circunferencia con centro en $P$ y radio $r > 0$ y dos puntos cualesquiera $F$ y $P_1$ de la circunferencia, garantizamos que la distancia del punto $P$ al punto $F$ y a la tangente $d$ de la circunferencia por $P_1$ es la misma, garantizando además que $F$ es el foco y la tangente $d$ la directriz de dicha parábola, cumpliendo la definición de Parábola (Definición. 1.1.2).

Por otro lado, para la solución del caso "dada una recta $t$ existe al menos una parábola tangente a dicha recta"; para ello empleamos un razonamiento análogo del caso anterior, construimos una recta $e$ cualquiera no paralalela a la recta dada y un punto $F$ en dicha recta, luego trazamos el simétrico $F'$ de $F$ respecto a la recta $t$, que por la propiedad punto simétrico respecto a cualquier tangente (Propiedad. 1.2.1), dicho punto $F'$ pertenece a la directriz de la parábola a construir dado el foco y la directriz; por tal razón se construye una recta $d$ perpendicular a $e$ por $F'$, que será la directriz y $F$ foco de una parábola solución.

En relación a las construcciones solución para los problemas "Parábola que es tangente o contiene dos elementos entre rectas o puntos", pensamos en relacionar las construcciones solución de los casos anteriores, de esta manera para el caso de dos puntos $(PP)(3.1)$ se construyeron dos circunferencias con centro en los puntos $P$ y $P_1$ respectivamente de tal manera que se intersecaran donde dichas intersecciones serían los focos y las rectas tangentes a dichas circunferencias serían las rectas directriz de la parábola solución, cumpliendo al igual que en el primer caso la defineión de Parábola (Definición. 1.1.2).

Para el caso "Parábola tangente a dos rectas $(RR)(3.2)$", hicimos uso de la segunda construcción solución $(R.2.2)$ para hacer un razonamiento análogo, teniendo en cuenta la misma propiedad. De esta manera se ubicó un punto arbitrario $F$ que no perteneciera a ninguna de las rectas dadas, luego hallamos los puntos simétricos $F_1'$ y $F_2'$ de $F$ respectivamente con cada una de las rectas, así obtuvimos la recta directriz $d$, siendo $d$ la recta que contiene los puntos simétricos $F_1'$ y $F_2'$; por último, construimos la parábola con foco $F$ y directriz $d$ que es tangente a las rectas dadas.

Para el último caso de los problemas asociados a dos elementos dados, es decir, para el enunciado "Parábola tangente a una recta dada y que contiene un punto dado $(RP)(3.3)$", relacionamos los casos anteriores, teniendo en cuenta una nueva propiedad, la cual nos permitió hallar el foco de la parábola solución (Propiedad.1.2.3), en primer lugar trazamos como en el caso anterior $(R.2.2)$, una recta cualquiera $l$ que no contenga al punto $P$ y que interseque a la recta $t$, luego se traza la recta simetrica $l'$ de $l$ respecto a la recta $t$, tuvimos encuenta que la recta $l$ sería el eje de la parábola solución; luego construimos la recta paralela $f$ por el punto $P$ y marcamos el punto medio entre la intersección de $l$ con $t$ y $f$ con $t$, de esta forma hallamos la recta tangente $g$ por el punto $P$ a la parábola solución, esto teniendo en cuenta la propiedad tangente por proyección ortogonal (Propiedad. 1.2.6).

Finalmente, trazamos la recta $f'$ simétrica de $f$ respecto a $g$ y el punto de intersección de las rectas $f'$ y $l'$ nos determina el foco de la parábola solución teniendo encuenta la propiedad anterior, ahora para encontrar la directriz $d$, utilizamos como en el caso RR ($RR$.3.2) la propiedad simétrico del foco respecto a las rectas tangentes (Propiedad. 1.2.1), de esta manera encontramos la parábola solución al problema, teniendo el foco y la directriz.

Cabe resaltar que para llegar a esta solución, hicimos distintas exploraciones en GeoGebra teniendo presente el problema $P$ ($P$.2.1) y $PP$($PP$.3.1), ya que en estos problemas tuvimos en cuenta la distancia de cada objeto al foco y a la directriz de la parábola solución, por lo cual para dar solución al problema $RP$ se intentó construir una circunferencia de tal manera que fuese tangente a la recta dada y que ademas contuviera el punto dado, siendo el centro de esta circunferencia el foco de la parábola; sin embargo, nos dimos cuenta que al realizar dicha construcción estabamos condicionando los objetos dados, debido a que obtendríamos un caso particular.

Por otra parte, para el caso en el que empleamos tres elementos, pensamos en implementar las anteriores construcciones o razonamientos, sin embargo, no encontramos una ruta que nos permitiera dar solución a estos problemas. Para el caso "Parábola que contiene tres puntos ($PPP$)(4.1)", decidimos realizar la construcción solución a partir de tres circunferencias con centro en los puntos dados $P_1$, $P_2$ Y $P_3$, de tal manera que dichas circunferencias se intersecaran, al igual que en el segundo caso $PP$ ($PP$.3.1), pero no fue posible dicha solución, puesto que no había una recta que fuese tangente a las tres circunferencias. Indagando en los documentos que teníamos como base encontramos una solución a este problema, haciendole unas pequeñas modificaciones; en la solución encontrada partían de los mismos elementos (tres puntos) sin embargo, sólo se encontraban tres parábolas que contenían dichos puntos.

Luego de hacer algunas exploraciones, moviamos algunos objetos que permitieran observar si habían más de tres soluciones o si podríamos garantizar que fuesen más de tres; efectivamente logramos hacer algunas modificaciones de tal manera que se evidenciaran las dichas parábolas solución que pasan por los tres puntos dados. (Figura. 4.10).

Para el segundo caso "Parábola tangente a tres rectas ($RRR$)($RRR$.4.2)", tuvimos en cuenta el trabajo de Henao y Rincón (2017), puesto que en uno de los problemas que los autores plantearon, hallaron la cónica tangente a cinco rectas; para la solución buscaron los puntos de tangencia en cada una de las rectas dadas, para posteriormente utilizar la construcción de la cónica que contiene cinco puntos. Haciendo un razonamiento análogo, lo primero que se intentó fue hallar los tres puntos de tangencia respectivamente; dandonos cuenta que estos puntos de tangencia van a depender de la dirección, de manera similar pasaba al ubicar un punto de tangencia en una de las rectas dadas, para posteriormente hallar la dirección de la parábola para así recurrir al caso anterior ($PPP$. 4.1), teniendo finalmente la construcción solución a este problema con todas las posibles parábolas solución.

La solución del problema anterior surgió luego de realizar varias exploraciones en GeoGebra, estas consistían en hallar el foco de la posible parábola solución para luego hallar la directriz mediante la propiedad "Punto simétrico respecto a cualquier tangente (Propiedad.1.2.1)", pero observamos que dicha construcción proporcionaba únicamente tres parábolas solución, puesto que para hallar el foco teníamos en cuenta las rectas perpendiculares a cada una de las rectas dadas por los puntos de intersección entre estas, limitando las soluciones.

En cuanto al caso "Parábola que contiene un punto y es tangente a dos rectas" ($PRR$) ($PRR$.4.3), partimos de la idea de retomar las construcciones anteriores para dar solución a este nuevo problema, en el caso anterior, veíamos que podíamos hallar los puntos de tangencia dadas tres rectas; para este caso iniciamos apartir del punto dado siendo este un punto de tangencia, por consiguiente construimos una recta que contuviera el punto dado y a su vez que intersecara las rectas dadas; de esta manera recurríamos al caso anterior ($RRR$.4.2) para obtener la solución del problema, obteniendo distintas parábolas solución. Conviene subrayar, que para llegar a la solución de este problema, realizamos otra construcción asociada a este problema (Construcción.4.3.1) en la que se evidencian únicamente cuatro soluciones, además, si el punto dado está ubicado en ciertas partes del plano no existe solución; en consecuencia consideramos hacer una construcción que no limitara las soluciones y lograramos utilizar el caso RRR como ya habíamos hecho mención.

En relación con el caso "Parábola que contiene dos puntos y es tangente a una recta ($PPR$)(4.4)", asociamos los dos puntos dados al problema "dados tres puntos encontrar la parábola que los contiene ($PPP$.4.1)", sin embargo, hacia falta un tercer punto que debía estar en la recta dada, el cual sería el punto de tangencia; en los casos anteriores evidenciamos la necesidad de encontrar la dirección de las parábolas solución, puesto que no cualquier dirección servia para encontrar la parábola que contuviera los dos puntos dados y el punto en la recta tangente. En consecuencia, hallamos las correspondientes direcciones de las parábolas solución para recurrir al caso $PPP$ ($PPP$.4.1), de igual manera encontramos distintas soluciones al mover el punto en la recta tangente.

Cabe resaltar que para los problemas ya mencionados (Tabla. 1), hicimos uso de GeoGebra con el cual logramos encontrar al menos una solución a cada problema, de manera particular en el primer caso, si movemos el punto $P_1$ se podrá evidenciar las parábolas solución, de igual manera al mover algún objeto en cada construcción se podrán evidenciar dichas soluciones; Conviene subrayar que la elaboración de estas construcciones, resultaban algo engorrosas debido a la cantidad de elementos que se tenían en cuenta para las construcciones; razón por la cual, decidimos emplear el uso de distintos colores que facilitaron la visualización y entendimiento de las construcciones tanto para nosotros, como para los lectores; realizando convenciones entre los colores y elementos empleados en las construcciones, por ejemplo, los elementos iniciales (dados) permanecen de color rojo y los nuevos elementos en cada paso de las construcciones aparecen de color verde y luego aparecen de color negro, dando lugar a un nuevo paso de dicha construcción. Por otra parte, haciendo uso de la opción crear nueva herramienta en GeoGebra, creamos herramientas que permitían simplificar los pasos en las nuevas construcciones solución.

Finalmente, se dio solución a los nueve problemas planteados (Tabla. 1) y descubrimos algunas propiedades (Propiedades.1.2) mientras realizábamos las construcciones solución; Las demostraciones de estas propiedades quedan como preguntas abiertas para futuros trabajos de grado. Lo anterior permitió cumplir el objetivo de realizar aportes a la línea de trabajo propuesta por Henao y Rincón y explorar en el campo de las matemáticas.(Tabla.**??**).

# OBJETIVOS

Los objetivos que a continuación se presentan, fueron propuestos para abordar la realización de este trabajo de grado.

**Objetivo General**

Presentar construcciones geométricas que permitan encontrar parábolas que sean tangentes o que pasen por uno, dos o tres elementos entre puntos y rectas.

**Objetivos Específicos**

- Estudiar material vinculado a la "Tangencia de Cónicas" en libros y páginas web, que nos aportará elementos teóricos para plantear los problemas relacionados con Parábolas.
- Realizar exploraciones mediante GeoGebra de construcciones referentes a la tangencia en cónicas, para obtener posibles relaciones entre las cónicas y sus rectas tangentes.
- Enmarcar una ruta para encontrar las posibles construcciones solución que nos permitan resolver los problemas planteados.

# SÍMBOLOS

A continuación presentamos los símbolos más usados para representar los objetos matemáticos a lo largo del documento.

| [HTML]33CCCC Elementos | Notación asociada |
|---|---|
| $k$ | Parábola |
| $d$ | Directriz |
| $F$ | Foco |
| $f$ | Dirección de la parábola<br>(recta paralela al eje de simetría<br>y perpendicular a la directriz) |
| $t$, $t_1, t_2,..., t_k$. | Rectas Tangentes a la parábola |
| $P$, $P_1$, $P_2$,..., $P_K$. | Puntos de la parábola |
| $e$ | Eje simetría |
| $\odot$ | Circunferencia |
| $l, k, m$ | Rectas Auxiliares |
| $F'$,$F'_1$,...,$F'_k$ | Puntos simétricos del foco respecto<br>a las tangentes de una parábola |
| $V$ | Vértice de la parábola |
| $A$, $B$, $C$ | Puntos auxiliares |
| $M$ | Punto medio |
| $m$ | Mediatriz |

# Capítulo 1

# NOCIONES PRELIMINARES

En este capítulo, se presentan definiciones, propiedades y teoremas relacionados con tangente de rectas a parábolas, los cuales permitieron la realización del trabajo expuesto en este documento.

## 1.1. DEFINICIONES

A continuación haremos mención de las definiciones, que fueron base para el desarrollo de nuestro trabajo.

### 1.1.1. Cónica

Dada una recta fija $d$ y un punto fijo $F$ no contenido en dicha recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto $P$ en el mismo plano de tal manera que la razón de su distancia del punto $P$ a $F$ y la distancia del punto $P$ a la recta $d$ es siempre igual a una constante positiva. La recta $d$ se llama directriz y el punto $F$ foco, y la constante positiva $\varepsilon$ excentricidad de la cónica; en la ecuación $(1-\varepsilon^2)x^2 \; -2px + y^2 + p^2 = 0$ cuando $\varepsilon = 1$ se obtiene una parábola, con $\varepsilon > 1$ una hipérbola y si $\varepsilon < 1$ una elipse. Desde el punto de vista analítico se puede definar cónica como la curva que responde a la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, los valores que toman A,B,C,D,F determinan el tipo de cónica y su posición en el plano.

### 1.1.2. Parábola

#### Parábola como lugar geométrico

Es el lugar geométrico de un punto $P$ que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija $d$ situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo $F$ foco en el plano y que no pertenece a la recta $d$ directriz, con una constante positiva $\varepsilon = \frac{PF}{Pd} = 1$,es decir, el cociente entre las distancias $PF$ y $Pd$. (Figura 1.1).

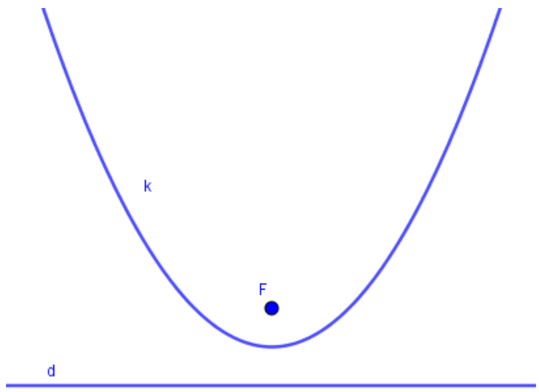


**Figura** 1.1: Parábola.

### Características de las Ecuaciones de la parábola

A continuación se presentarán algunos casos asociados a la ubicación de la parábola teniendo en cuenta el sistema cartesiano.

- Cuando el vértice es el origen del sistema cartesiano: Sea una parábola definida como lugar geométrico con vértice en el origen, pueden ocurrir dos casos, el primero hace referencia a la directriz cuando es paralela al eje $x$ cuya ecuación es $y = -p$ y el foco tiene coordenadas $(p, 0)$; el segundo caso, hace referencia a la directriz paralela al eje $y$ cuya ecuación es $x = p$ y el foco tiene coordenadas $(0, p)$. En el siguiente cuadro se presentan las ecuaciones asociadas a lo mencionado con anterioridad. (Figura 1.2)

| Directriz paralela al eje $x$ |
|---|
| $PF = Pd$<br>$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\lvert y+p\rvert$<br>$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$<br>$x^2=y^2+2py+p^2-y^2+2py-p^2$<br>$x^2=4py$ |
| **Directriz paralela al eje $y$** |
| $PF = Pd$<br>$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\lvert x+p\rvert$<br>$(x-p)^2+(y)^2=(x+p)^2$<br>$y^2=x^2+2px+p^2-x^2+2px-p^2$<br>$y^2=4px$ |

**Figura** 1.2: Ecuaciónes de la parábola vértice en el origen

A continuación se presentan las parábolas con directriz paralela al eje $x$ y al eje $y$ respectivamente. (Figura 1.3), (Figura 1.4).

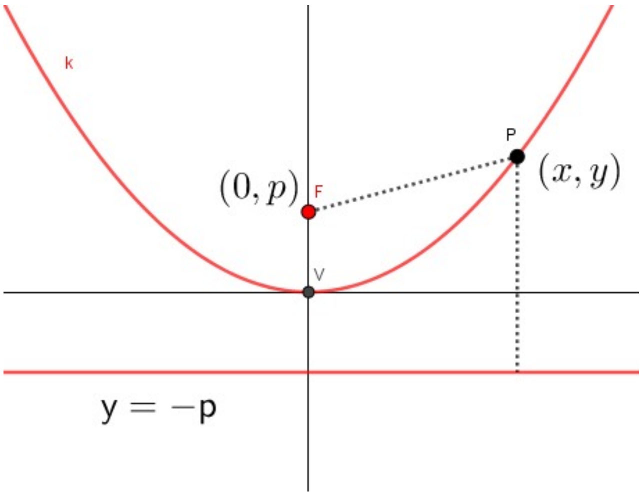


**Figura** 1.3: Parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$.

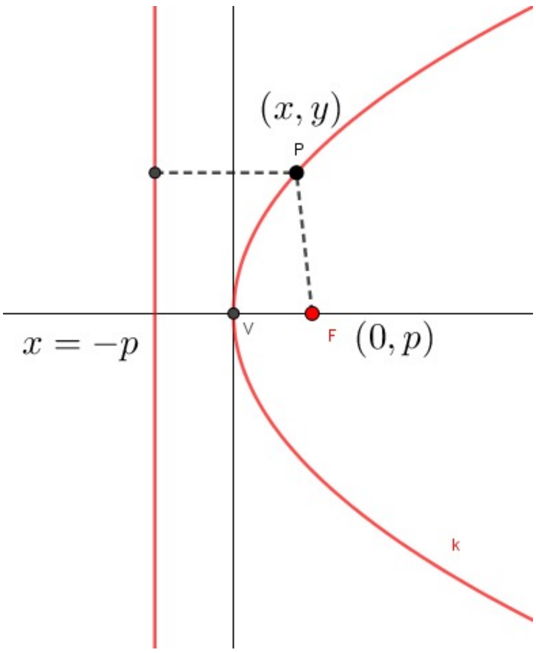


**Figura** 1.4: Parábola cuya ecuación es $y^2 = 4px$.

- Cuando el vértice no esta en el origen del sistema cartesiano: Sea una parábola definida como lugar geométrico con vértice diferente al origen, las coordenadas del vértice son $(h, k)$ y se pueden determinar los ejes coordenados $x'$ y $y'$, de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el vértice de la parábola. Para determinar las coordenas de un punto en el nuevo sistema coordenado, tenemos en cuenta el siguiente cambio de coordenadas: $x' = x - h$, $y' = y - k$ (ecuaciones de traslación), es decir, que el punto $(x, y)$ que está en el sistema coordenado original, en el nuevo sistema coordenado será $(x - h, y - k)$.

Teniendo en cuenta lo anterior y la ecuación de la parábola $x^2 = 4py$ para el caso en que la directriz es paralela al eje $x$ en el sistema original, la ecuación resultante del cambio de coordenadas en el nuevo sistema coordenado será $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y la ecuación de la parábola $y^2 = 4px$ para el caso en que la directriz es paralela al eje $y$ en el sistema original, la ecuación resultante del cambio de coordenadas en el nuevo sistema coordenado será $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

A continuación se presentan las parábolas con directriz paralela al eje $x'$ y al eje $y'$ respectivamente. (Figura 1.5), (Figura 1.6).

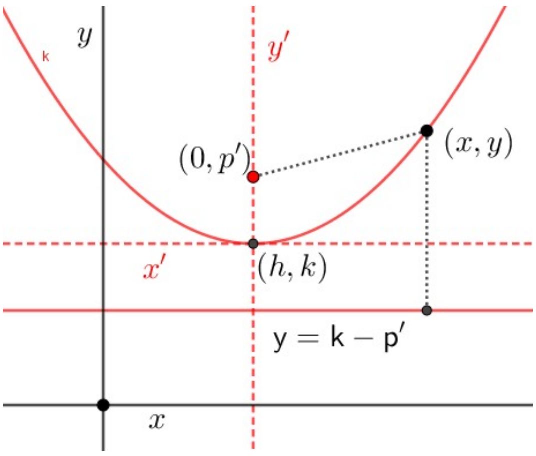


**Figura** 1.5: Parábola cuya ecuación es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

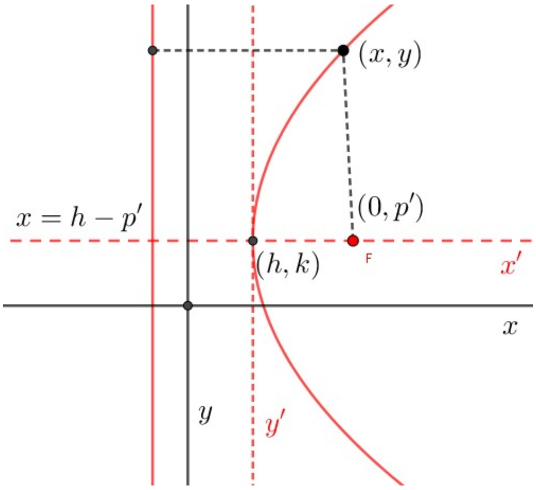


**Figura** 1.6: Parábola cuya ecuación es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

- Cuando la directriz no es paralela a ninguno de los dos ejes: Sea una parábola definida como lugar geométrico con directriz no paralela a ningun eje coordenado, se debe realizar una rotación del sistema coordenado original un ángulo $\alpha$ teniendo como eje de rotación el origen. (Figura.1.7)

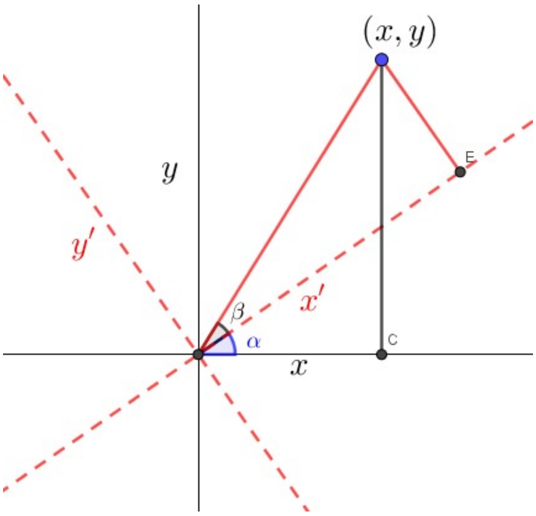


**Figura** 1.7: Rotación de los ejes coordenados

Para determinar las coordenadas de un punto en el nuevo sistema coordenado (rotado), tenemos en cuenta el siguiente cambio de coordenadas:

$x' = xcos(\alpha) + ysen(\alpha)$, $y' = -xsen(\alpha) + ycos(\alpha)$.

Si se tiene la gráfica de una ecuación $f(x,y)=0$ y se quiere determinar la ecuación en el nuevo sistema coordenado (rotado), tenemos en cuenta las siguientes sustituciones: $x = x'cos(\alpha) - y'sen(\alpha)$, $y = x'sen(\alpha) + y'cos(\alpha)$, determinando la ecuación $f(x',y')=0$.

por lo anterior la ecuación de la parábola con directriz no paralela a ningún eje coordenado y teniendo en cuenta la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, obtenemos la ecuación $(x'-h')^2 = 4p(y'-k')$ de la parábola con directriz paralela al eje $x'$ y la ecuación $(y'-k')^2 = 4p(x'-h')$ de la parábola con directriz paralela al eje $y'$. (Figura.1.8),(Figura1.9).

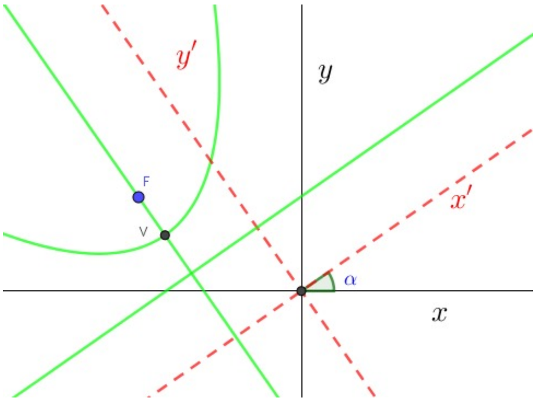


**Figura** 1.8: Parábola cuya ecuación es $(x'-h')^2 = 4p(y'-k')$

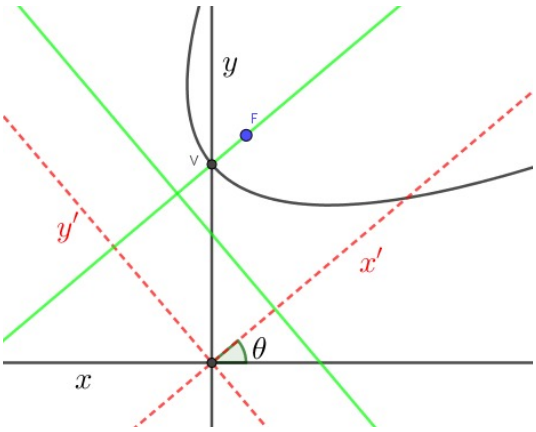


**Figura** 1.9: Parábola cuya ecuación es $(y'-k')^2 = 4p(x'-h')$

### 1.1.3. Eje de la Parábola

La recta $e$ que pasa por el foco $F$ y es perpendicular a la recta directriz $d$ se llama eje de la parábola. (Figura 1.10).

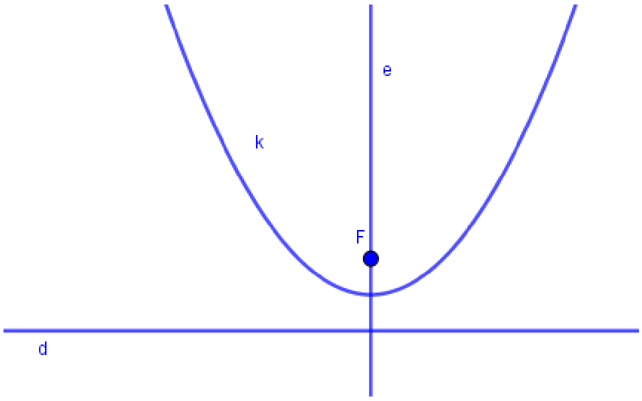


**Figura** 1.10: Eje de la Parábola.

### 1.1.4. Vértice de la Parábola

El punto $V$ es vértice de la parábola $k$ si:

- $F$ foco de la parábola $k$
- Rectas $d$ directriz y $e$ eje de la parábola
- $A \in d \cap e$
- Segmento $AF$

Entonces $V$ es punto medio del segmento $AF$ y está sobre la parábola por definición de parábola (Definición. 1.1.2), siendo el vértice de la parábola $k$. (Figura 1.11).

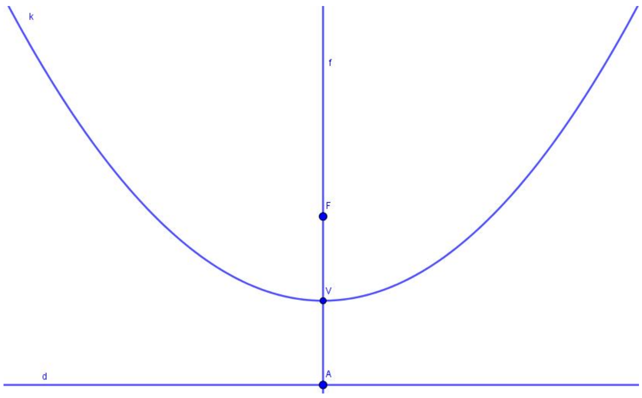


**Figura** 1.11: Vértice de la parábola.

### 1.1.5. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Es la recta perpendicular $p$ por un punto $P$ externo a la recta dada, el punto de intersección $T$ entre dichas rectas es la proyección ortogonal del punto sobre la recta. (Figura 1.12).

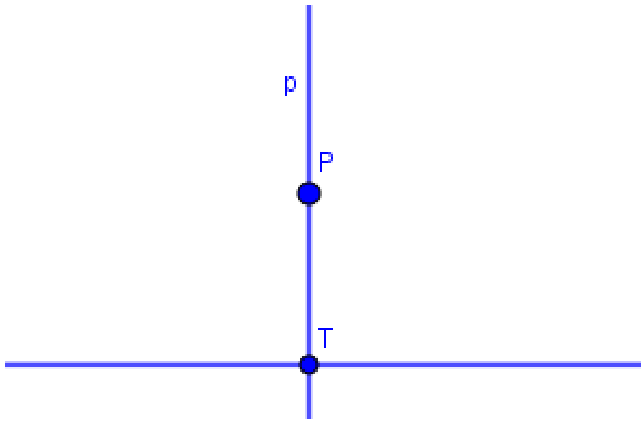


**Figura** 1.12: Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

### 1.1.6. Dirección de una parábola

La dirección de una parábola corresponde a cualquier recta perpendicular a la directriz de una parábola. (Figura 1.13).

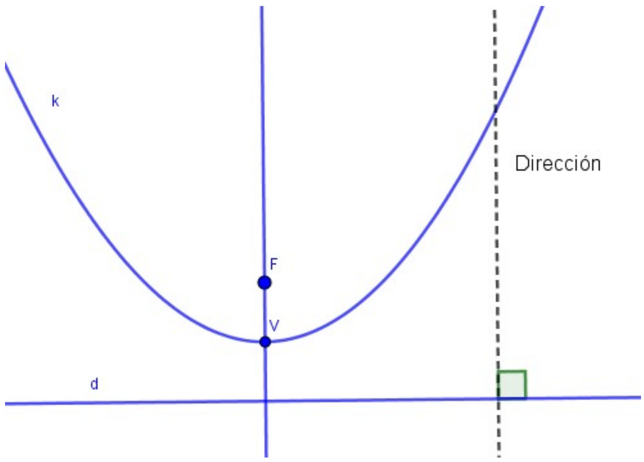


**Figura** 1.13: Dirección de una parábola.

## 1.2. PROPIEDADES DE RECTAS TANGENTES A PARÁBOLAS

En esta sección se presentan las propiedades relacionadas con rectas tangentes en parábolas.

### 1.2.1. Punto simétrico respecto a cualquier tangente

El Punto $F'$ simétrico del foco $F$ de una parábola $k$ respecto a cualquier tangente $t$, está en la directriz $d$, siendo a su vez la proyección ortogonal del punto de tangencia $P$. (Figura 1.14).

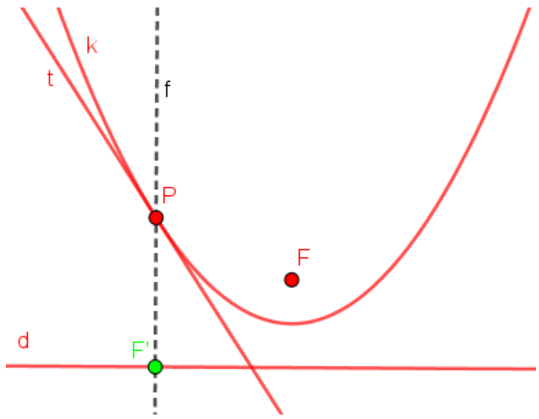


**Figura** 1.14: $F'$ proyección ortogonal de $P$.

### 1.2.2. Intersección rectas tangentes en punto medio

En una parábola $k$ con foco $F$ y directriz $d$ si:

- $P_1$ y $P_2$ pertenecen a la parábola $k$ siendo $P_2 \neq P_1$
- Recta $f$ perpendicular a $d$ por $P_1$
- $A$ pertence a la intersección de la recta $f$ y $t_2$
- $M$ punto medio de $\overline{P_2A}$

Entonces la tangente $t_1$ corta a la tangente $t_2$ en el punto $M$. (Figura 1.15).

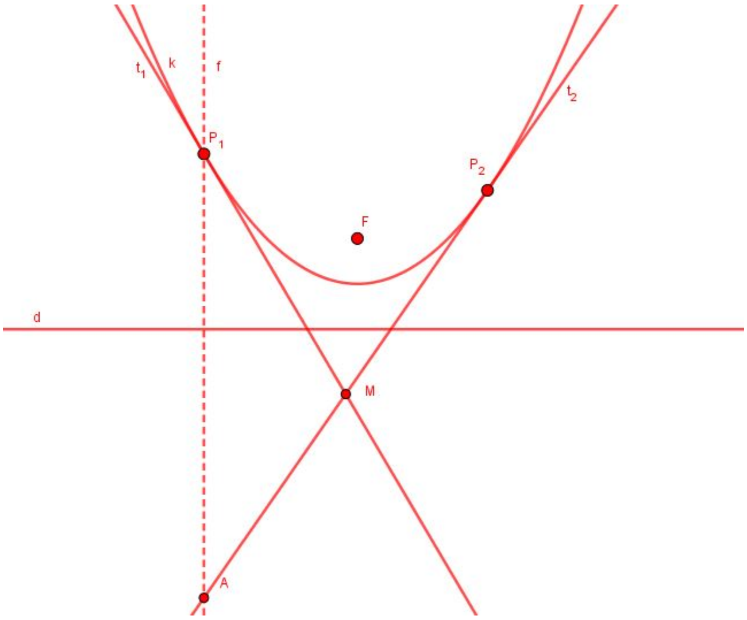


**Figura** 1.15: Tangente $t_1$ y tangente $t_2$.

### 1.2.3. Rectas tangentes simetría foco

En una parábola $k$ y su directriz $d$, si:

- $t$ y $t_1$ rectas tangentes a $k$
- $f$ y $f_1$ perpendiculares a $d$
- $f'$ y $f_1'$ rectas simétricas de $f$ y $f_1$ en relación a $t$ y $t_1$ respectivamente

Entonces el punto $F$ pertenece a la intersección de $f'$ y $f_1'$, siendo $F$ el foco de la parábola. (Figura.1.16).

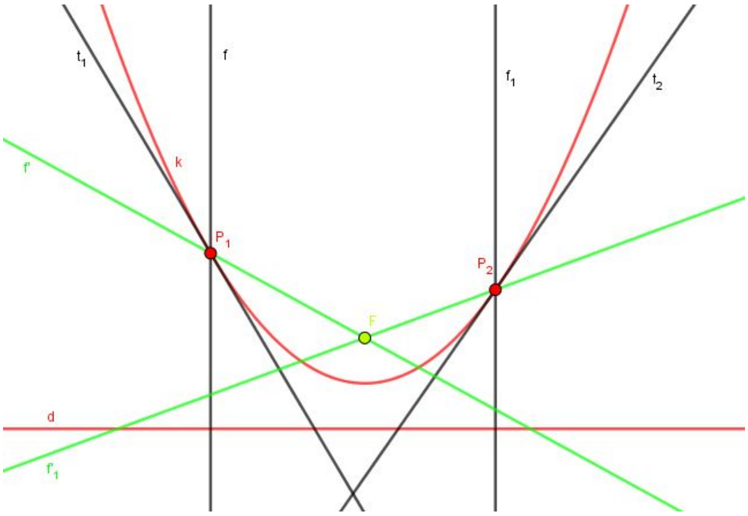


**Figura** 1.16: Foco simetría rectas tangentes.

### 1.2.4. Tangente por punto medio

En una parábola $k$ con foco $F$ y directriz $d$, si:

- $P$ pertenece a $k$
- La recta $t$ tangente a $k$ por $P$
- $F'$ proyección ortogonal de $P$ sobre $d$
- $M$ punto medio de $\overline{F'F}$

entonces el punto $M$ pertenece a la recta tangente $t$. (Figura 1.17).

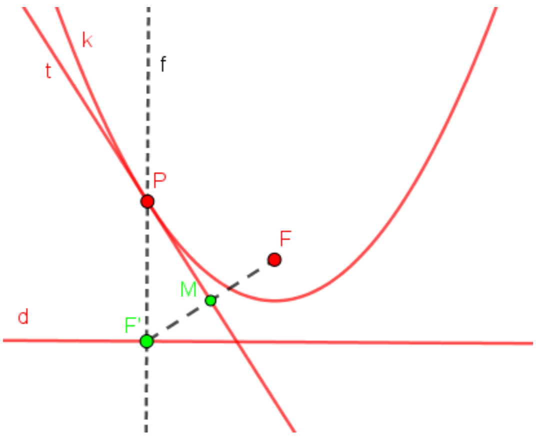


**Figura** 1.17: Punto $M$ pertenece a la recta tangente $t$.

### 1.2.5. Tangente por vértice

En una parábola $k$ con foco $F$ y directriz $d$, si:

- Recta $t_1$ tangente a $k$ por $P$
- $F'$ simétrico de $F$ respecto a $t_1$
- El punto $M$ pertenece a la intersección de la tangente $t_1$ con el $\overline{F'F}$
- $V$ vértice de la parábola

entonces $\overleftrightarrow{MV}$ es tangente a la parábola por $V$ (Figura 1.18), de manera reciproca tenemos $V$ vértice de la parábola $k$ si:

- $t_2$ paralela a $d$ por $m$
- $e$ eje de la parábola
- $t_2 \cap e$
- $V$ vértice de la parábola

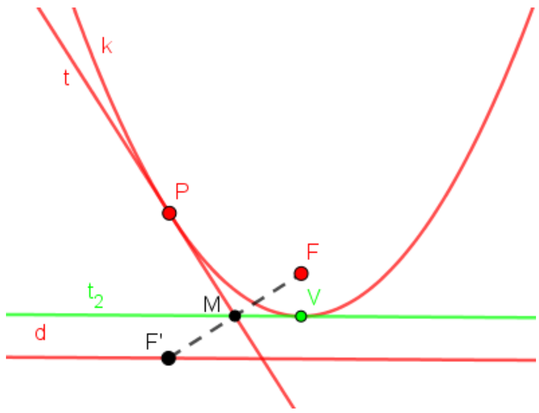


**Figura** 1.18: Recta $\overleftrightarrow{MV}$ tangente a la parábola.

### 1.2.6. Tangente por proyección ortogonal

Dada una parábola $k$ con foco $F$ y directriz $d$, si:

- $P_2$ y $P_1$ pertenecen a $k$
- $t$ tangente a $k$ por $P_1$
- La recta $f \perp d$ por $P_2$
- $A$ es la intersección de la recta $t$ y $f$

- $M$ punto medio de $\overline{P_1A}$

entonces $\overleftrightarrow{MP_2} = t_2$ es tangente a $k$ por $P_2$. (Figura 1.19).

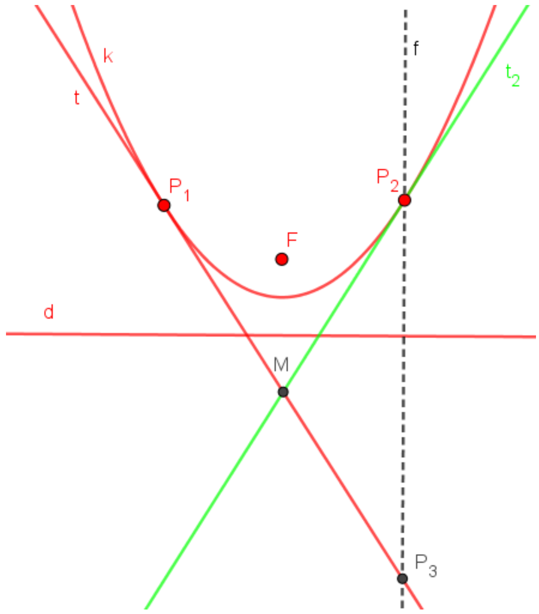


**Figura** 1.19: Recta $\overleftrightarrow{MP_2} = t_2$ tangente a $k$.

### 1.2.7. Tangente por directriz

Sea $k$ parábola con foco $F$ y directriz $d$, si:

- $t$ tangente a $k$ por $P_1 \neq Vvertice$
- $A \in t \cap d$
- Recta $f \perp d$ por $A$
- $P_3 \in f \cap k$
- $M$ punto medio $\overline{P_1A}$

Entonces $\overleftrightarrow{MP_3} = t_1$ tangente a $k$ por $P_3$. (Figura 1.20).

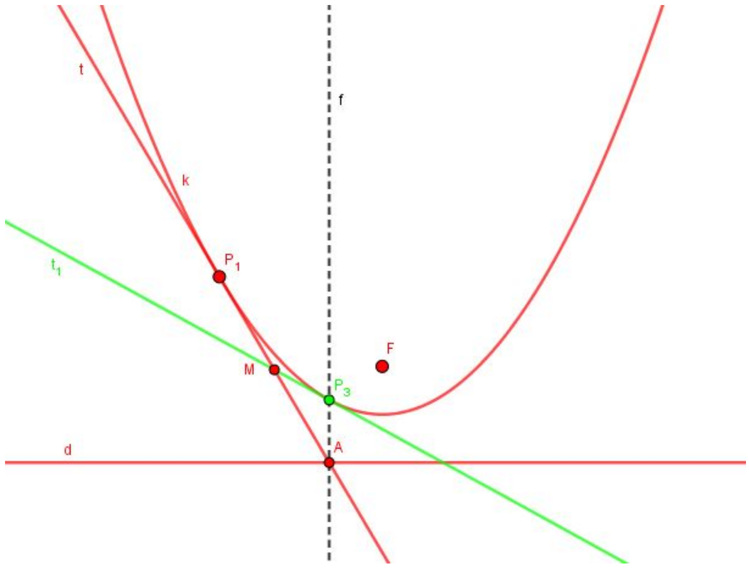


**Figura** 1.20: Recta $\overleftrightarrow{MP_3}$ tangente a $k$.

### 1.2.8. Parábola como lugar geométrico

Dada una recta fija $d$ y punto $F$ que no pertenece a $d$ si:

- $A$ pertenece a $d$
- Recta $f \perp d$ por $A$
- $m$ mediatriz del segmento $AF$
- $P_2$ intersección de $f$ y $m$

Entonces una parábola es el lugar geométrico de todos puntos $P_1$ respecto a todos los puntos que pertenecen a la recta $d$. (Figura 1.21).

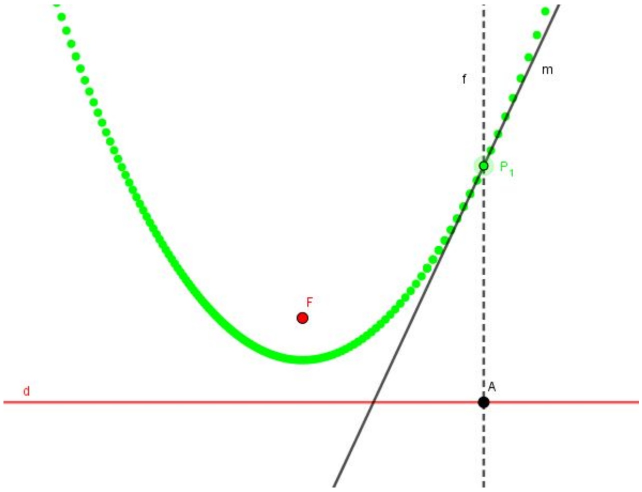


**Figura** 1.21: Lugar geométrico de todos puntos $P_2$.

### 1.2.9. Tangente de una parábola-bisectriz

Sea $k$ parábola con foco $F$ y directriz $d$, si:

- Recta $t$ tangente por $P_1$ a $k$
- Punto $F'$ proyección ortogonal de $P_1$

Entonces $t$ es bisectriz del $\angle F'P_1F$. (Figura 1.22).

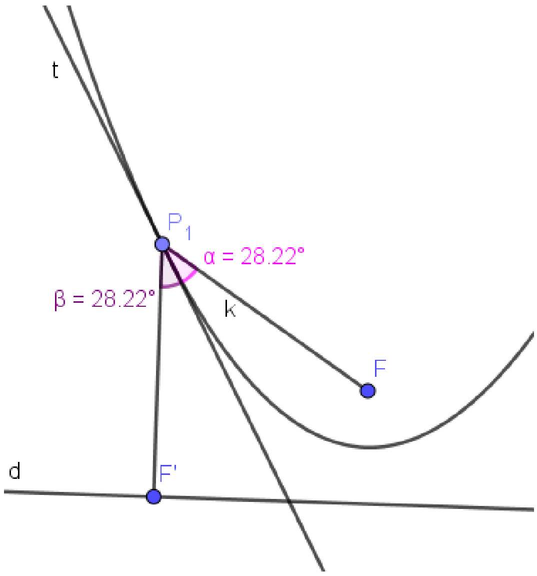


**Figura** 1.22: Tangente de una parábola-bisectriz.

## 1.3. CONSTRUCCIONES

En este capítulo se presentarán algunas construcciones alternas que se tuvieron en cuenta en la solución a los problemas que se resuelven en este trabajo de grado.

### 1.3.1. Circunferencia por tres puntos

Dados tres puntos $A$, $B$, $C$ no colineales, existe una circunferencia que los contiene. (Figura 1.23).

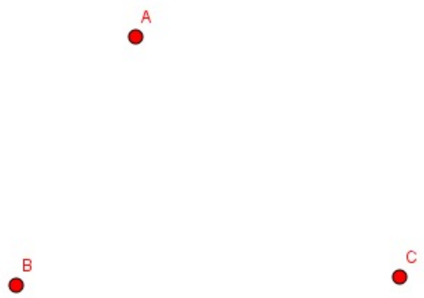


**Figura** 1.23: Puntos $A$, $B$, $C$ no colineales.

Trazamos $m_1$ mediatriz del $\overline{BC}$, $m_2$ mediatriz del $\overline{AB}$ y $m_3$ mediatriz del $\overline{AC}$. (Figura 1.24).

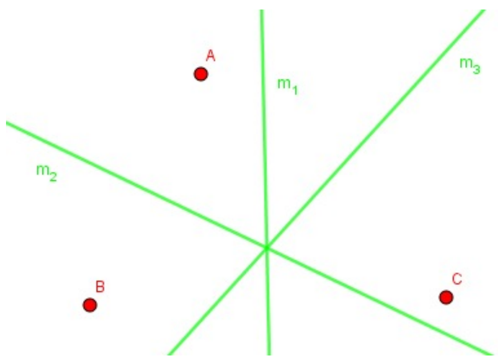


**Figura** 1.24: Mediatrices $m_1$, $m_2$ y $m_3$.

Marcamos el punto $O$ de intersección entre las rectas $m_1$ y $m_2$. Luego, construimos la $\odot O_{BO}$, entonces la $\odot O_{BO}$ contiene los puntos $A$, $B$ y $C$. (Figura 1.25).

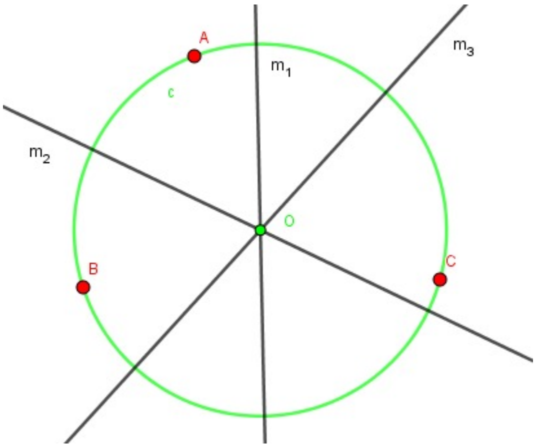


**Figura** 1.25: Circunferencia que contiene los puntos $A$, $B$ y $C$.

### 1.3.2. Tangente a dos circunferencias

Dadas $\odot O_{1,r}$ y $\odot O_{2,s}$, tal que la suma de sus radios es igual a la distancia de sus centros ó la distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios, existen al menos una recta tangente a las circunferencias $\odot O_{1,r}$ y $\odot O_{2,s}$. (Figura 1.26).


**Figura** 1.26: $\odot O_{1,r}$ y $\odot O_{2,s}$.

Sea M punto medio de $\overline{O_1O_2}$. (Figura 1.27).

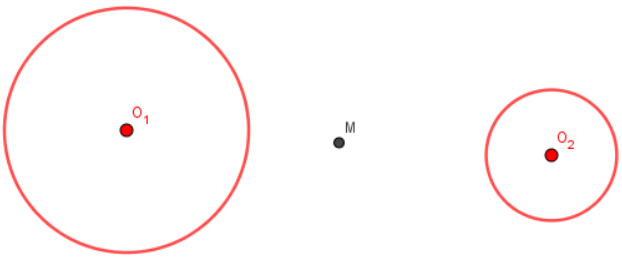


**Figura** 1.27: M punto medio de $\overline{O_1O_2}$.

Se traza la $\odot M,_{M\ O_1}$. (Figura 1.28).

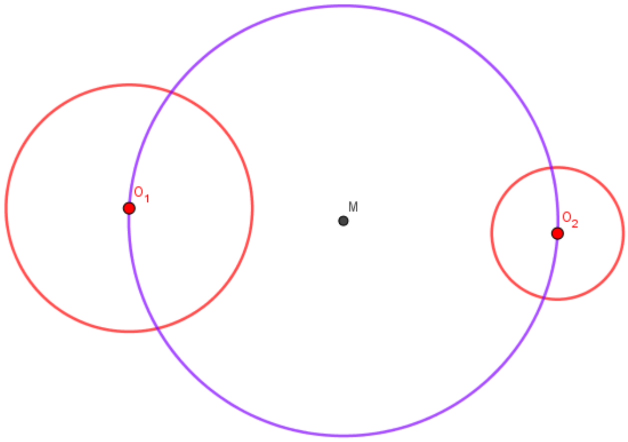


**Figura** 1.28: $\odot M_{,M\ O_1}$.

Sea un radio cualquiera en $\odot O_{1,r}$. (Figura 1.29).

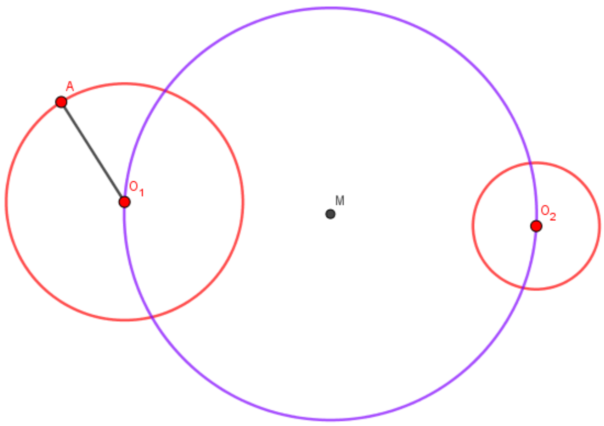


**Figura** 1.29: $r$ radio de $\odot O_{1,r}$.

Luego, se construye $\odot A_{,s}$. (Figura 1.30).

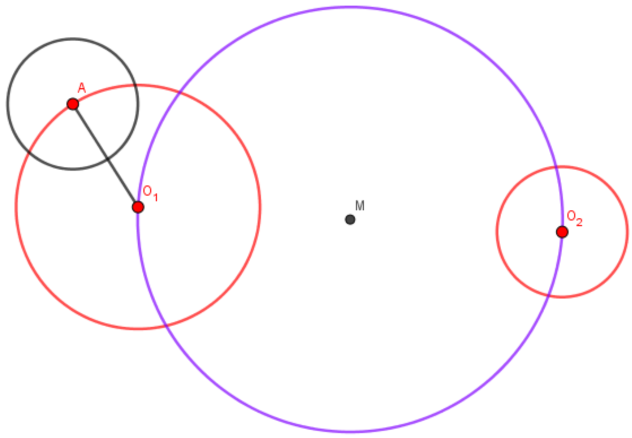


**Figura** 1.30: $\odot A_{,s}$.

Sea $H$ la intersección de radio con $\odot A_{,s}$. (Figura 1.31).

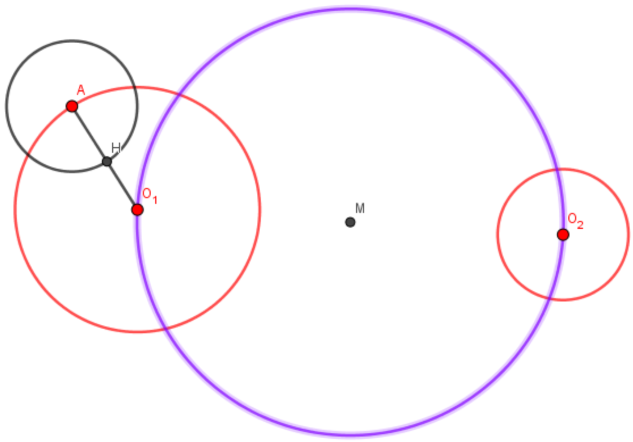


**Figura** 1.31: Punto de intersección $H$.

Se construye $\odot O_{1,O_{1H}}$ y se marcan las intersecciones $P_1$ y $P_2$. (Figura 1.32).

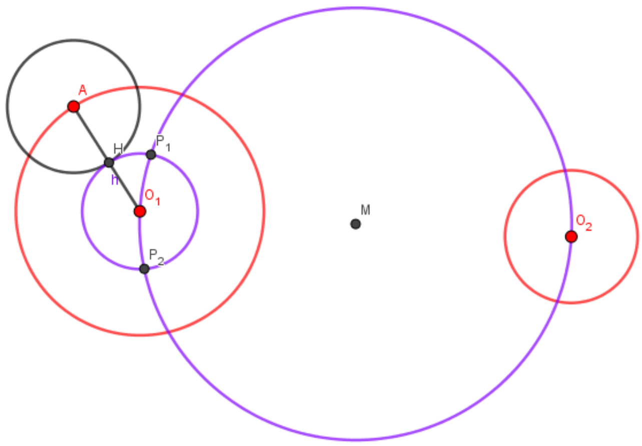


**Figura** 1.32: $\odot O_{1,O_1H}$.

Luego, se halla $T_1 \in \overleftrightarrow{O_1P_1} \cap \odot O_{1,r}$ y $T_2 \in \overleftrightarrow{O_1P_2} \cap \odot O_{1,r}$ puntos de tangencia. (Figura 1.33).

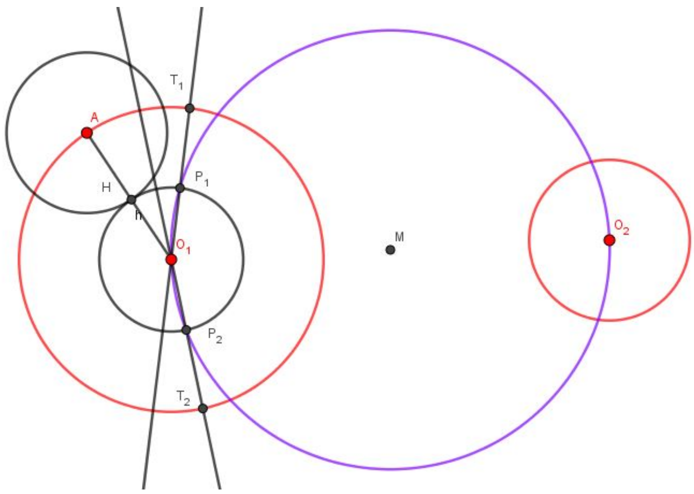


**Figura** 1.33: $T_1$ y $T_2$ puntos de tangencia.

Finalmente, se trazan las rectas paralelas a $\overleftrightarrow{O_1P_1}$ y $\overleftrightarrow{O_1P_2}$ por $O_2$ respectivamente, siendo los puntos $T_3$ y $T_4$ entre las rectas paralelas y la circunferencia $\odot O_{2,s}$. (Figura 1.34).

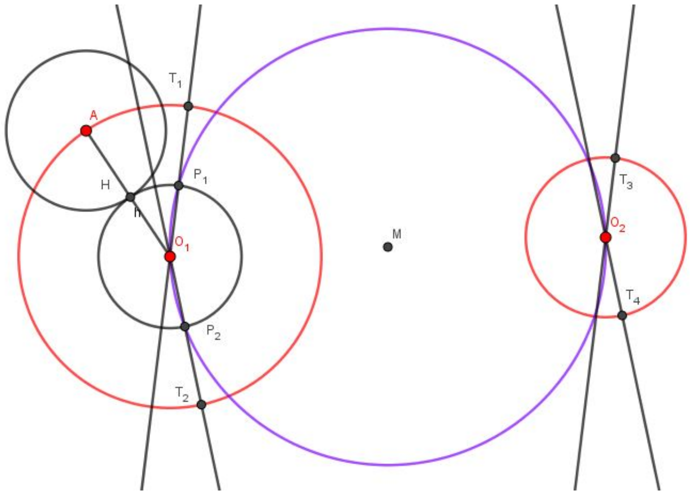


**Figura** 1.34: Puntos $T_3$ y $T_4$.

Ahora, se tienen $\overleftrightarrow{t_1t_3}$ y $\overleftrightarrow{t_2t_4}$ rectas tangentes a dos circunferencias. (Figura 1.35).

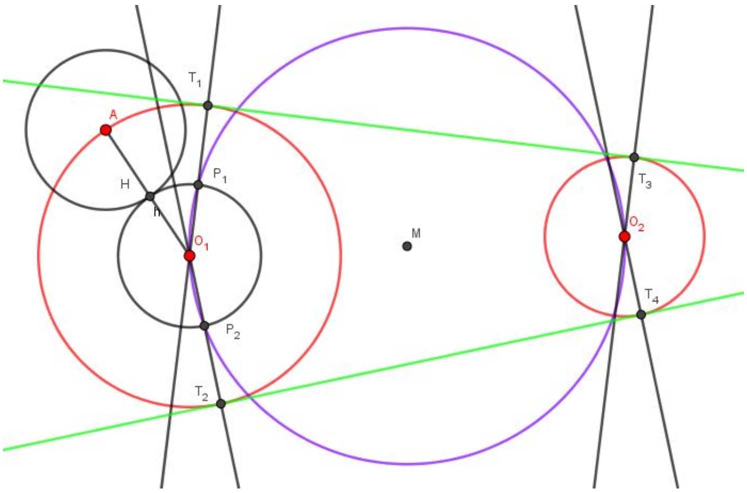


**Figura** 1.35: Rectas tangentes a dos circunferencias.

### 1.3.3. Parábola dado el eje y dos puntos

Dado el eje $e$ y $P_1$, $P$ Puntos, existe una parábola que contiene los puntos $P_1$, $P$ y su eje es $e$. (Figura 1.36).

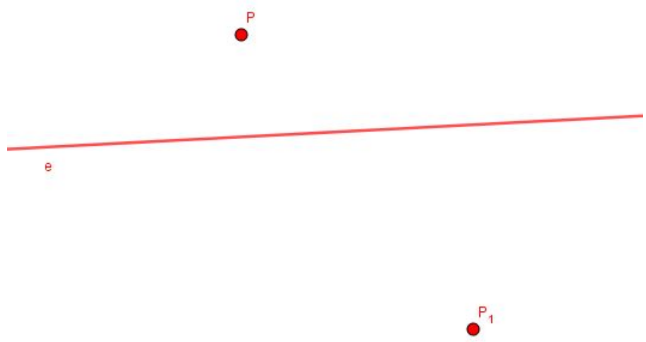


**Figura** 1.36: Eje $e$ y $P_1$, $P_2$ Puntos.

Sea $P'$ el simétrico de $P$ respecto a $e$. (Figura 1.37).

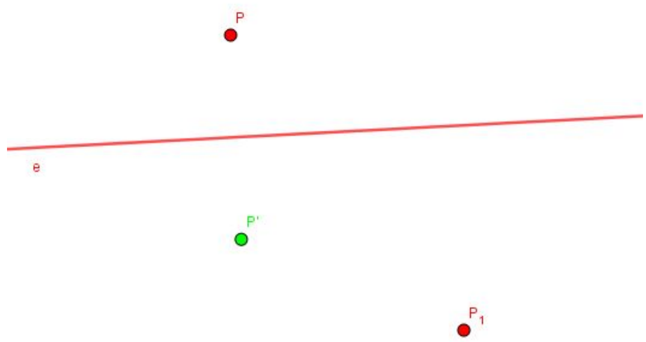


**Figura** 1.37: $P_1'$ el simétrico de $P_1$.

Sean las rectas $m \parallel e$ por $P_1'$ y $n \parallel e$ por $P_1$. (Figura 1.38).

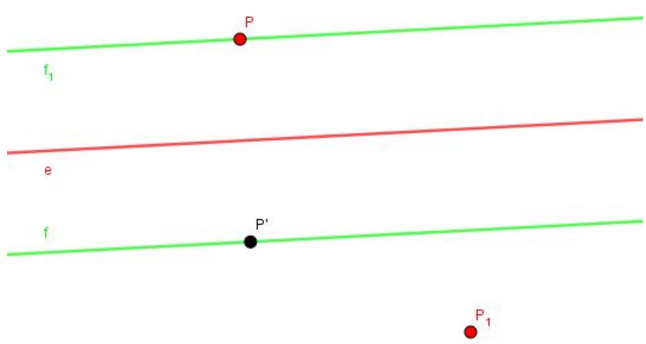


**Figura** 1.38: Rectas $n \parallel e$ y $m \parallel e$.

Ahora, trazamos las $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ y $\overleftrightarrow{P_2P_1'}$. (Figura 1.39).

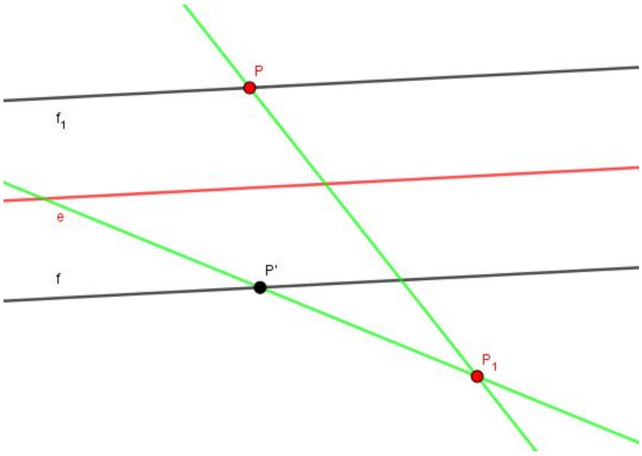


**Figura** 1.39: $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ y $\overleftrightarrow{P_2P_1'}$.

$\overleftrightarrow{P_1'P_2} \cap n = C$, $r \parallel \overleftrightarrow{P_2P_1}$ por $C$, $r$ recta de Pascal. (Figura 1.40).

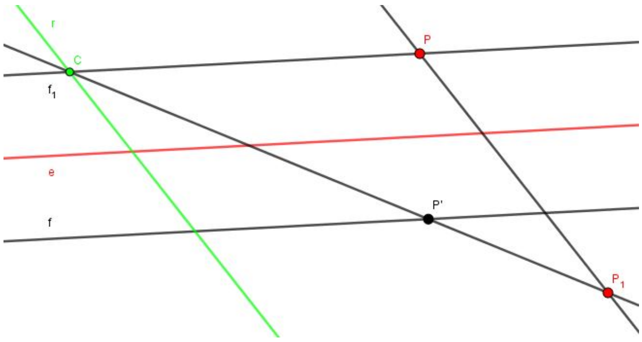


**Figura** 1.40: Recta de Pascal.

$r \cap m = T$, $\overleftrightarrow{TP_1} = t$ siendo una tangente de la parábola. (Figura 1.41).

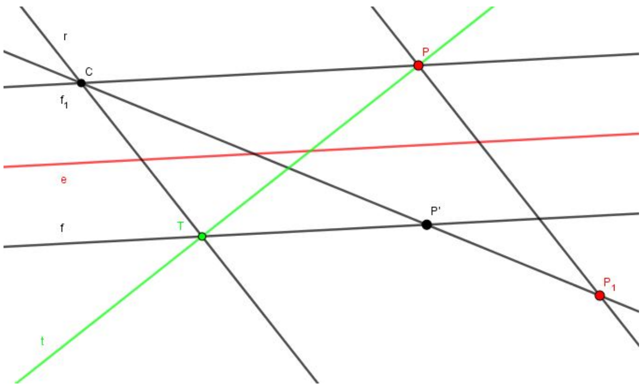


**Figura** 1.41: Recta $\overleftrightarrow{TP_1}$ tangente de la parábola.

Recta $n'$ simétrica de $n$ respecto a $\overleftrightarrow{TP_1}$ y $F = n' \cap e$. (Figura 1.42).

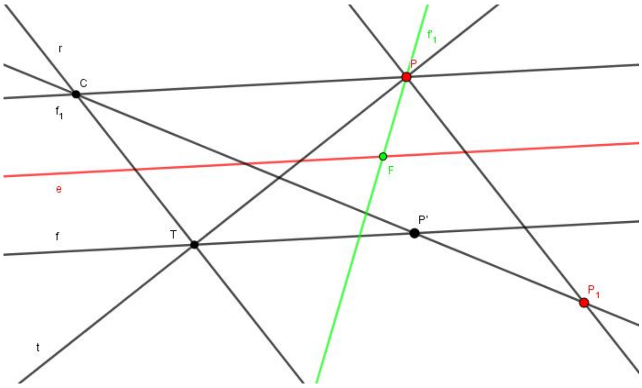


**Figura** 1.42: Recta $n'$ y punto $F$.

$F'$ simétrico de $F$ respecto a $\overleftrightarrow{TP_1}$ y $d \perp e$ por $F'$. (Figura 1.43).

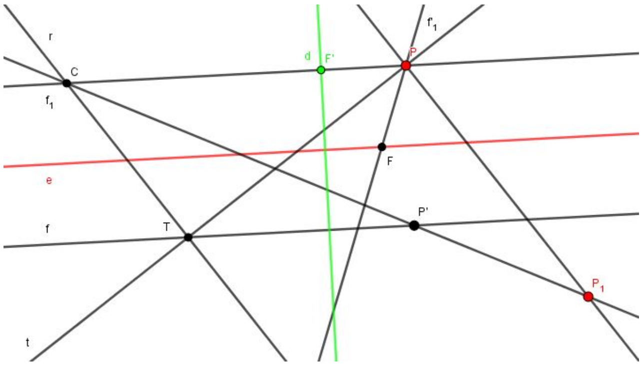


**Figura** 1.43: Recta $d \perp e$ por $F'$.

Por directriz $d$ y foco $F$ construimos $k$ parábola. (Figura 1.44).

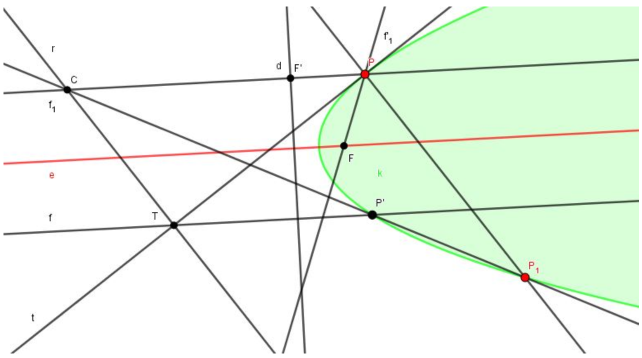


**Figura** 1.44: $k$ parábola.

### 1.3.4. Tangentes a una parábola

A continuación se presentarán las construcciones solución al problema "dada una parábola $k$, encontrar una recta tangente $t$ a ella por un punto interno o externo".

#### Punto que pertenece a la parábola

Dada la parábola $k$ con foco $F$, directriz $d$ y un punto $P$ que pertenece a la parábola, existe una recta $t$ tangente a $k$, tal que $P$ pertenece a $t$. (Figura 1.45).

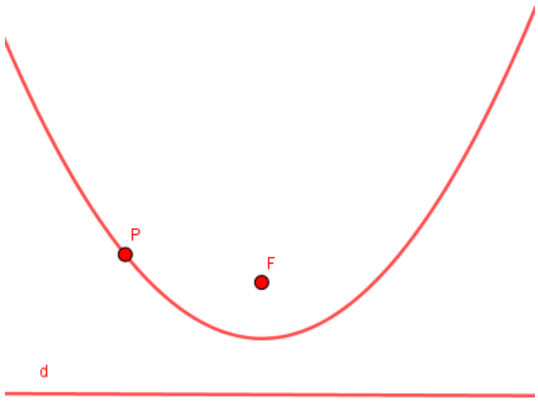


**Figura** 1.45: Parábola $k$ con foco $F$, directriz $d$.

Sea $A$ la proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $d$. (Figura 1.46).

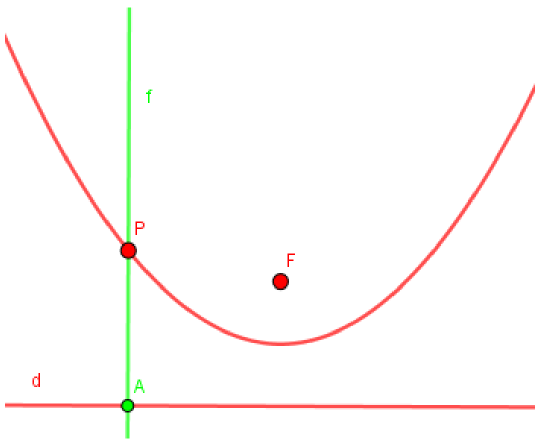


**Figura** 1.46: $A$ la proyección ortogonal del punto $P$.

Ahora trazamos $\overline{AF}$ y $M$ punto medio del segmento. (Figura 1.47).

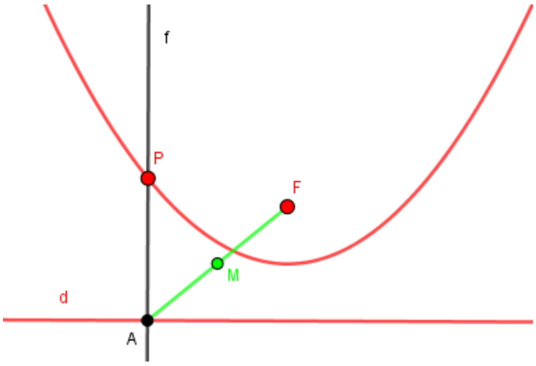


**Figura** 1.47: $M$ punto medio del $\overline{AF}$.

Luego construimos la recta $\overleftrightarrow{PM} = t$. (Figura 1.48).

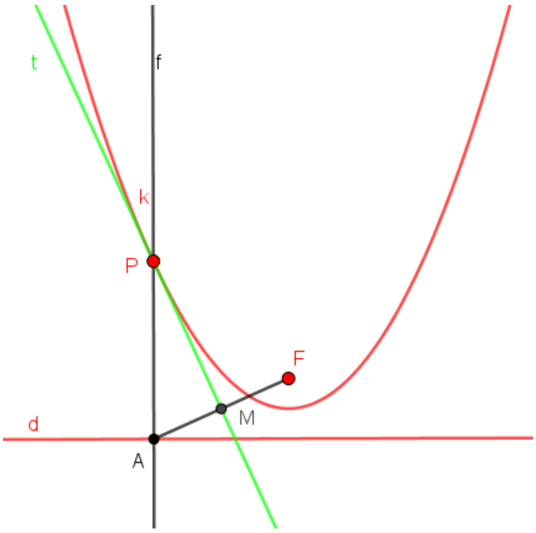


**Figura** 1.48: Recta $\overleftrightarrow{PM}$.

Creamos los triángulos $\triangle APM$ y $\triangle FPM$ que serán congruentes por el criterio de congruencia $LLL$, ya que:

- $\overline{AP} \cong \overline{PF}$ por definición de parábola la distancia del punto al foco y a la directriz es la misma.
- $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia.
- $\overline{AM} \cong \overline{MF}$ por definición de punto medio

Por tanto $\triangle APM \cong \triangle FPM$, en consecuencia, $\angle APM \cong \angle FPM$ por definición de triángulos congruentes. Entonces, la recta $t$ biseca el segmento $\overline{AM}$ y es bisectriz del ángulo $\angle APF$, por consiguiente, $t$ es tangente a la parábola $k$. (Figura 1.49).

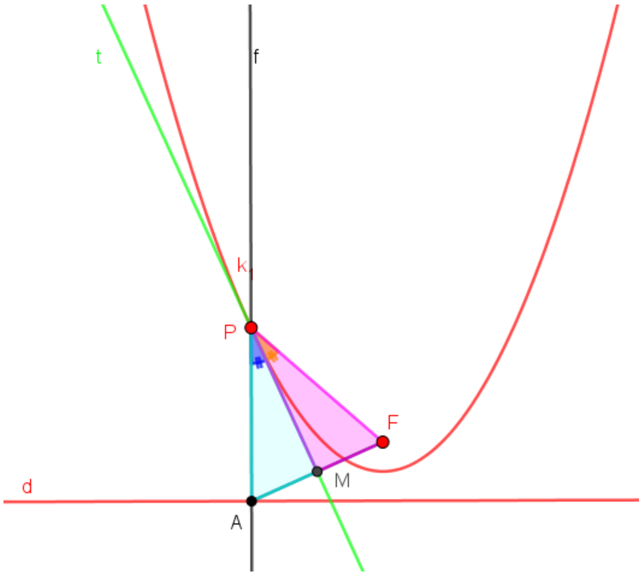


**Figura** 1.49: Recta tangente a $k$ por $P$.

### Punto Externo

Dada la parábola $k$ con foco $F$, directriz $d$ y un punto $P$ que no pertenece a la parábola, tal que $PF > Pd$, existen las rectas $t$ y $t_1$ tangentes a $k$, tal que $P$ pertenece a dichas rectas. (Figura 1.50).

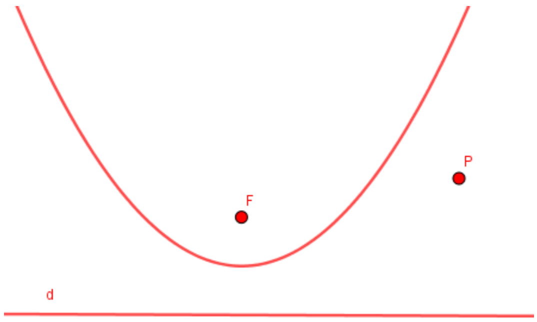


**Figura** 1.50: Parábola $k$ con foco $F$, directriz $d$.

Construimos la circunferencia $\odot P_{PF}$ (sea $PF = r$) y marcamos las intersecciones $A$ y $B$ puntos de intersección con la recta $d$. (Figura 1.51).

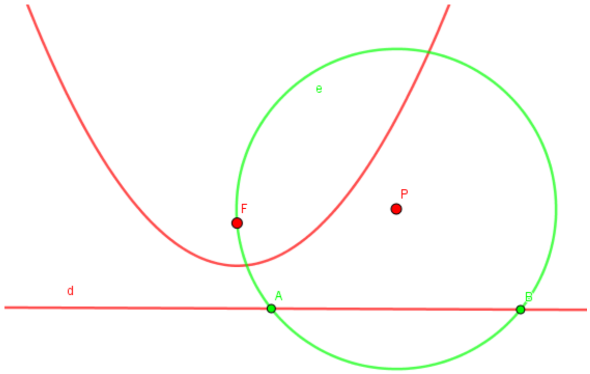


**Figura** 1.51: $\odot P_{PF}$ y puntos de intersección $A$ y $B$.

Ahora trazamos $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$. (Figura 1.52).

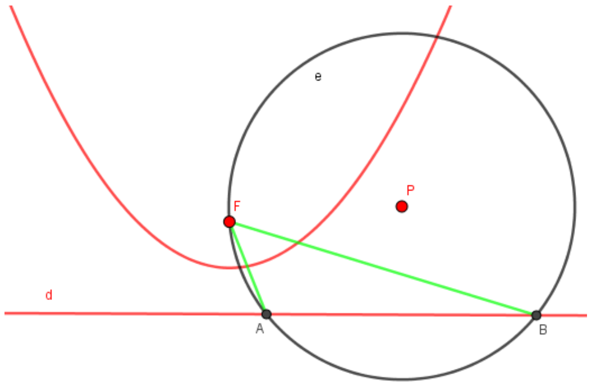


**Figura** 1.52: $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$.

Luego, creamos las mediatrices $m$ y $n$ de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$ respectivamente. (Figura 1.53).

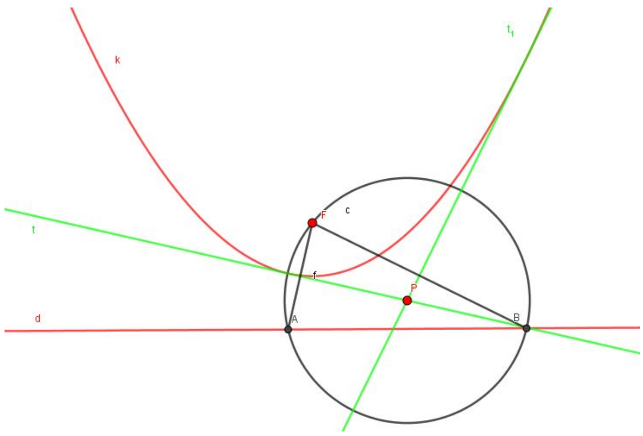


**Figura** 1.53: Mediatrices $t$ y $t_1$ de los $\overline{AF}$ y $\overline{BF}$.

En consecuencia, las rectas $t$ y $t_1$ son tangentes a $k$ parábola por $P$.

### 1.3.5. Simetría

#### Simétrico de un punto respecto a una recta

Dada un punto $B$ y una recta, se traza una recta perpendicular a la recta dada por $B$ y ubicamos el punto $B'$ en la recta $l$ de tal manera que $AB = AB'$. (Figura 1.54).

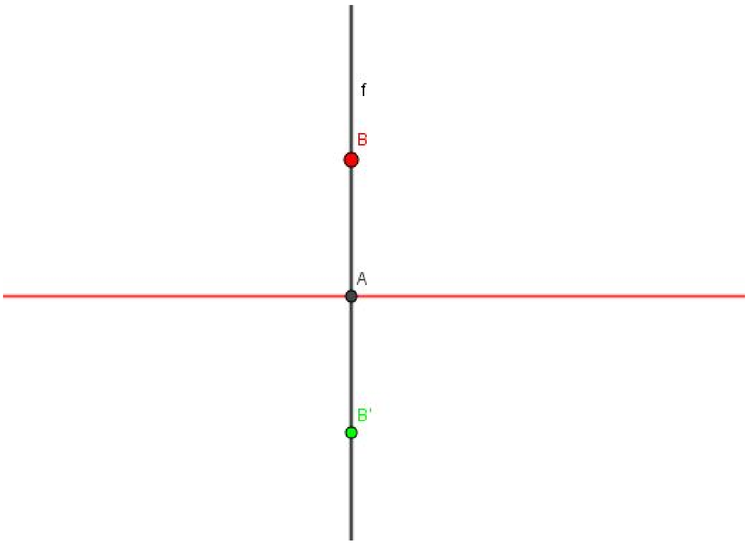


**Figura** 1.54: $B'$ simétrico de $B$.

#### Simétrico de una recta respecto a una recta

Dadas las rectas $n$ y $m$, para obtener la recta simétrica de $m$ respecto a $n$, donde se hace un proceso análogo al simétrico de un punto, ya que la recta $m$ se puede ver como un conjunto de puntos. (Figura 1.55).

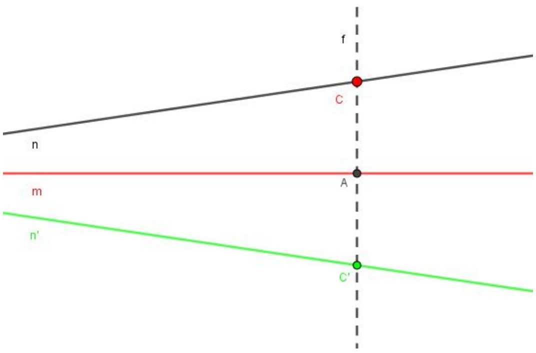


**Figura** 1.55: Rectas $d$, $f$ y $f'$.

# Capítulo 2

# PARÁBOLA QUE CONTIENE UN PUNTO O ES TANGENTE A UNA RECTA

En este capitulo se presentan las soluciones correspondientes al problema "construir una parábola dado un elemento", es decir parábola que contiene un punto o es tangente a una recta dada.

## 2.1. Parábola que contiene un punto dado $(P)$

Sea $P$ punto entonces, existe al menos una parábola $k$ tal que $P \in k$

Dado un punto $P$. (Figura 2.1).

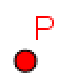


**Figura** 2.1: (P). Punto.

Construimos una circunferencia $\odot$ $P_{PF}$. (Figura 2.2).

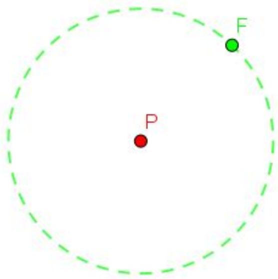


**Figura** 2.2: (P). Circunferencia $\odot P_{PF}$.

Sea $B \neq F$, tal que $B \in \odot P_{PF}$. (Figura 2.3).

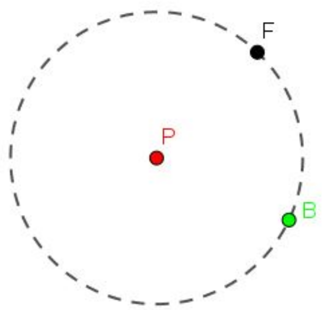


**Figura** 2.3: (P). $B \in \odot P_{PF}$.

Luego, construimos una recta $d$ tangente a $\odot P_{PF}$ por $B$. (Figura 2.4).

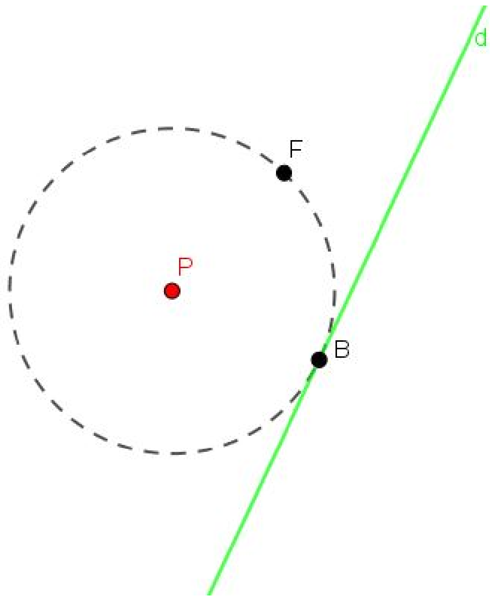


**Figura** 2.4: (P). Tangente a $\odot$ $P_{PF}$.

La parábola $k$ cuya directriz es $d$ y $F$ el foco, contiene el punto $P$. Esto se debe a que la distancia entre $P$ y el foco y la distancia entre $P$ y la directriz es la misma. (Figura 2.5).

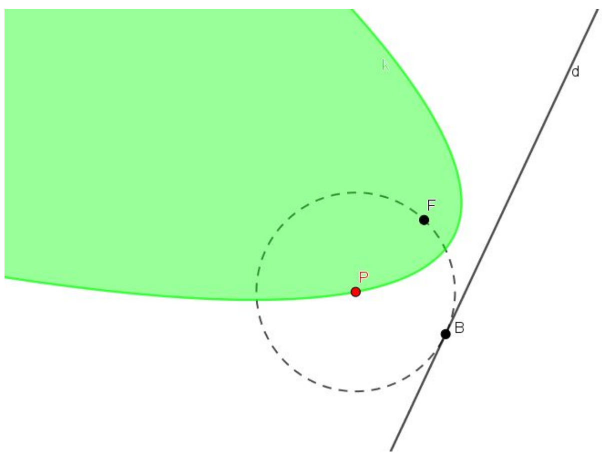


**Figura** 2.5: (P). Parábola $k$ que contiene el punto $P$

Este problema tiene más de una solución, para evidenciar estas soluciones creamos una aplicación en Geogebra (Aplicativo. 5.1),en la que movemos el punto $B$ a lo largo de la $\odot$ $P_{PF}$ para observar dichas soluciones, cumpliendo con la condición que $P$ pertenezca a estas parábolas. (Figura.2.6).

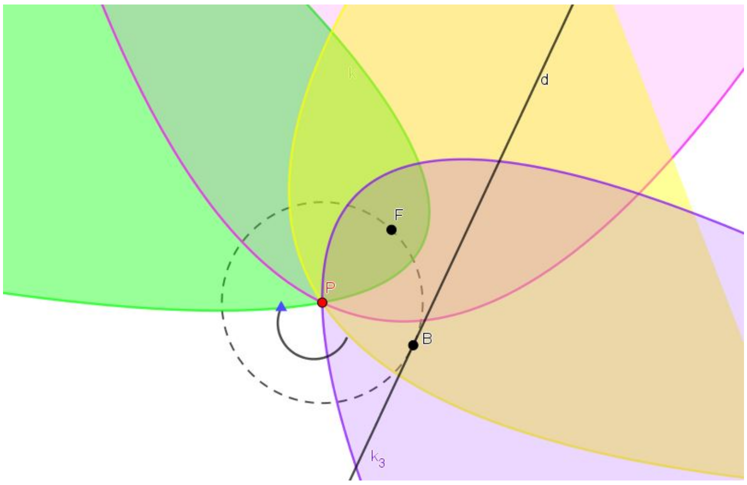


**Figura** 2.6: (P). Parábolas solución.

## 2.2. Parábola tangente a una recta ($R$)

Dada una recta $t$, existe al menos una parábola $k$, tal que $t$ es tangente a $k$. (Figura 2.7).

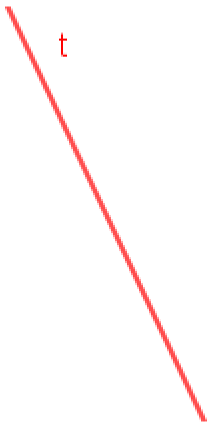


**Figura** 2.7: (R). Recta.

Sea un punto $A$, tal que $A \notin t$. (Figura 2.8).

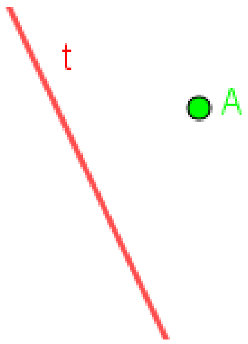


**Figura** 2.8: (R). Punto.

Construimos una recta $e$ por $A$, con la condición de $e \nparallel t$. (Figura 2.9).

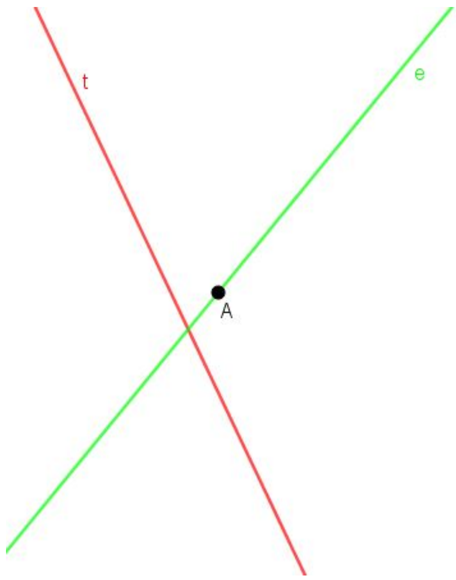


**Figura** 2.9: (R). Recta $e$.

Ahora, $F \in e$ con $F \neq A$ y $F \notin t$. (Figura 2.10).

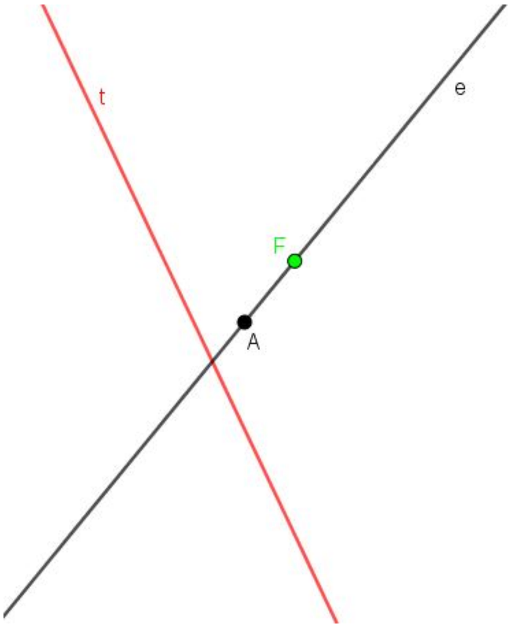


**Figura** 2.10: (R). $F \in e$.

Luego, marcamos $F'$ simétrico de $F$ respecto a $t$. (Figura 2.11).

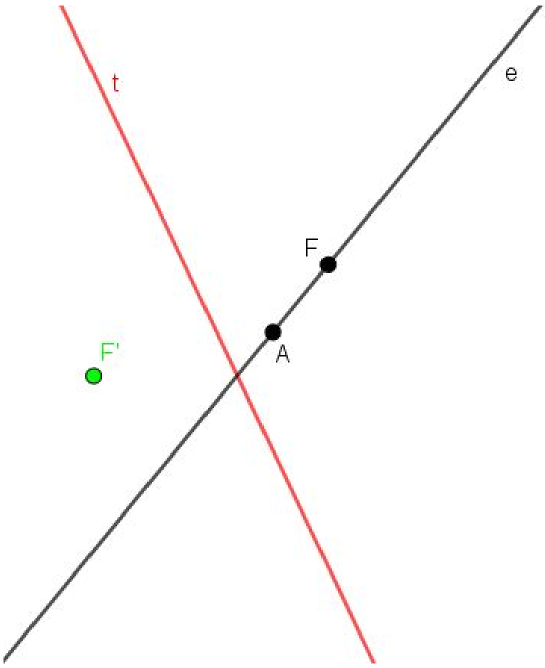


**Figura** 2.11: (R). $F'$ simétrico de $F$.

Ahora, trazamos $d$ recta perpendicular a $e$ por $F'$. (Figura 2.12).

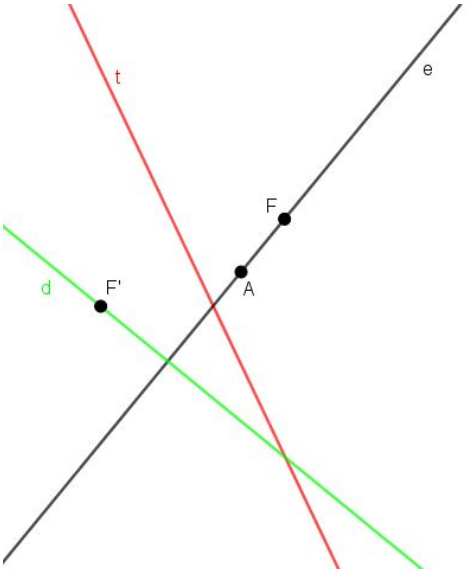


**Figura** 2.12: (R). Recta $d$ perpendicular a $e$.

Construimos la parábola $k$, cuyo foco es $F$ y la directriz $d$, la recta $t$ es tangente a la parábola $k$, porque inicialmente tomamos la recta $t$ como una tangente de la parábola a construir, cumpliendo la propiedad 1.2.1. (Figura 2.13).

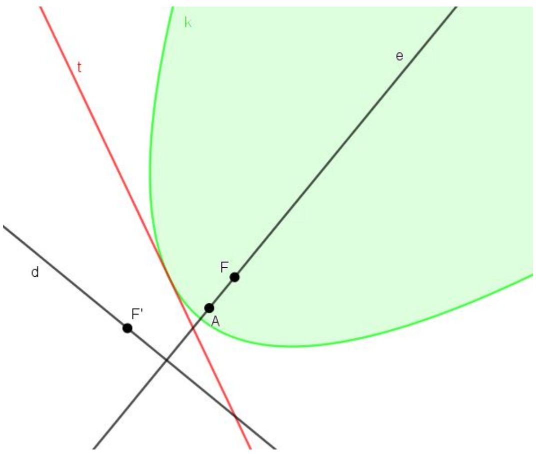


**Figura** 2.13: (R). Parábola k tangente a $t$.

La construcción hecha indica que la recta $t$ es la mediatriz del $\overline{FF'}$, donde $F$ es el foco de la parábola y $F'$ su simétrico respecto a $t$. Por tanto, $t$ es tangente a la parábola. Este problema tiene varias soluciones, para observar estas soluciones se creó una aplicación en GeoGebra (Aplicativo.5.2); para evidenciar dichas soluciones movemos $F$ a lo largo de la recta $e$. (Figura 2.14).

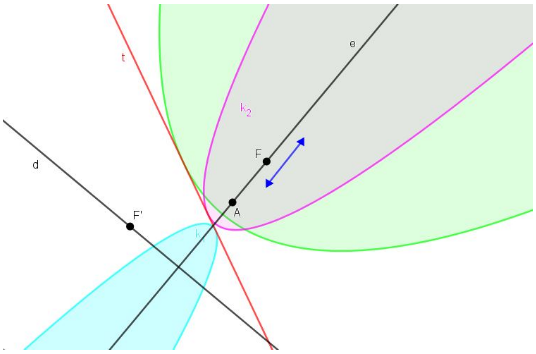


**Figura** 2.14: (R). Parábolas solución.

# Capítulo 3

# PARÁBOLA QUE ES TANGENTE O CONTIENE DOS ELEMENTOS ENTRE RECTAS O PUNTOS

En esta sección se presentan las soluciones al problema "Construir una parábola tangente a o que contiene dos elementos", junto con algunas construcciones alternas para algunos casos.

## 3.1. Parábola que pasa por dos puntos (PP)

Dados dos puntos $P_1$ y $P_2$, existe al menos una parábola $k$, tal que $P_1$ y $P_2$ pertenecen a $k$. (Figura 3.1).


**Figura** 3.1: (PP). Puntos $P_1$ y $P_2$.

Construimos dos circunferencias $c$ y $c_1$ con centro en $P_1$ y $P_2$ respectivamente, cuyos radios sean mayores a cero de tal manera que se intersequen. (Figura 3.2).

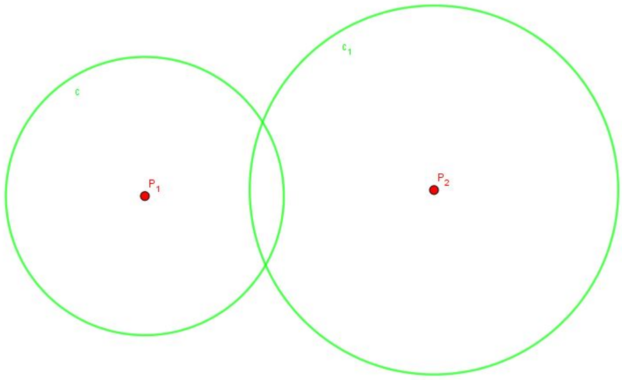


**Figura** 3.2: (PP). Circunferencias por $P_1$ y $P_2$.

Trazamos las rectas $d_1$ y $d_2$ tangentes al mismo tiempo a las dos circunferencias $c$ y $c_1$. (Figura 3.3).

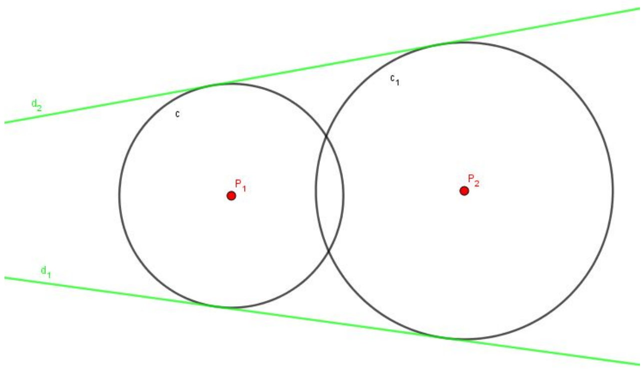


**Figura** 3.3: (PP). Rectas $d_1$ y $d_2$ tangentes a las circunferencias.

Ahora marcamos las intersecciones $F_1$ y $F_2$ entre las circunferencias $c$ y $c_1$. (Figura 3.4).

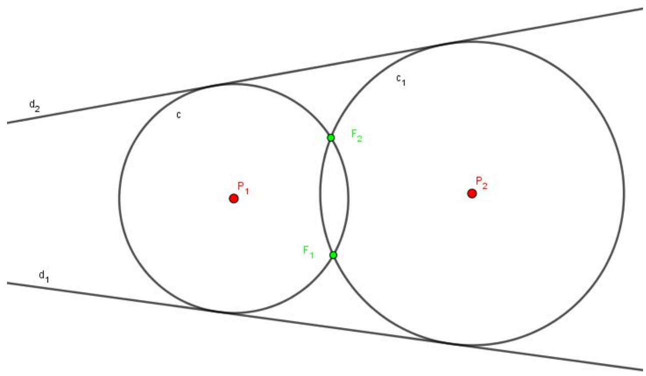


**Figura** 3.4: (PP). Intersecciones $F_1$ y $F_2$ entre las circunferencias.

Construimos $k_1$ parábola con foco $F_1$ y $d_1$ directriz. (Figura 3.5).

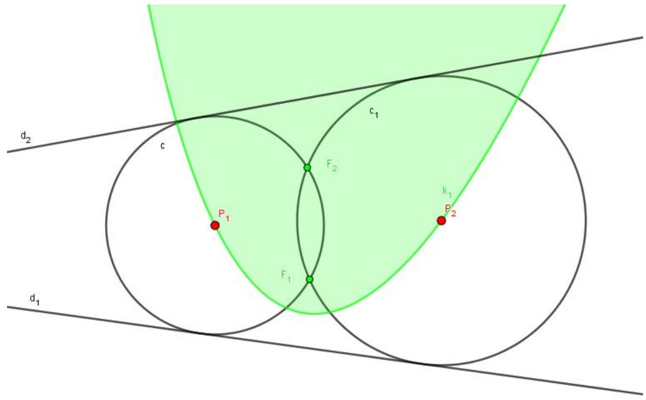


**Figura** 3.5: (PP). Parábola $k_1$.

De manera análoga, se obtiene $k_2$, $k_3$ y $k_4$ parábolas cuyos focos $F_1$, $F_2$ y las rectas $d_1$, $d_2$ directrices respectivamente. (Figura 3.6).

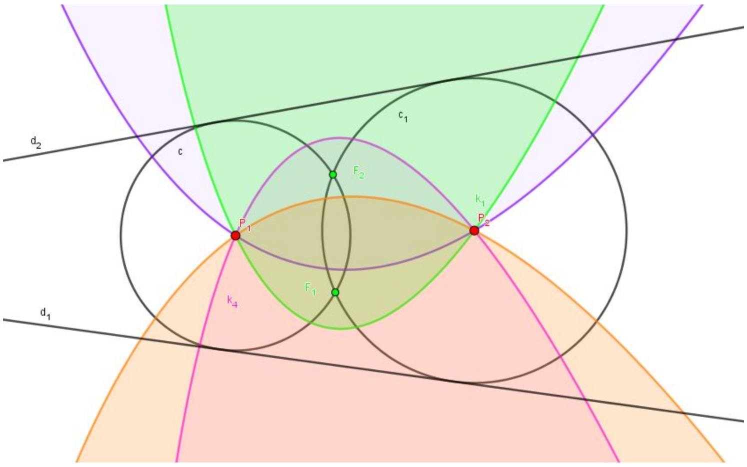


**Figura** 3.6: (PP). Parábolas $k_2$, $k_3$ y $k_4$.

Los puntos $P_1$ y $P_2$ pertenecen a las parábolas construidas, puesto que la distancia de dichos puntos es la misma al foco y a la directriz. De manera particular, en la parábola $k_1$ la distancia del punto $P_1$ al punto $F_1$ (foco) es la misma distancia de $P_1$ a la recta $d_1$ (directriz) y de igual manera la distancia del punto $P_2$ al punto $F_1$ (foco) es la misma distancia de $P_2$ a la recta $d_1$ (directriz). De manera análoga se garantiza que los puntos $P_1$ y $P_2$ pertenecen a las parábolas $k_2$, $k_3$, $k_4$.

Cabe resaltar que se pueden encontrar distintas parábolas que contengan los puntos dados, creamos una aplicación en GeoGebra (Aplicativo.5.3), estas soluciones se pueden evidenciar modificando el radio de las circunferencias con centro en $P_1$ y centro en $P_2$, radios mayores a cero, con la condición de que dichas circunferencias tengan puntos de intersección; en el caso en que las circunferencias sean tangentes existen al menos dos soluciones. Cabe resaltar que para que estas dos soluciones existan, el punto de tangencia entre las circunferencias no puede ser el mismo punto de tangencia de la recta tangente.

### 3.1.1. Otra solución al problema PP

Dados dos puntos $P_1$ y $P_2$, existe al menos una parábola $k$, tal que $P_1$ y $P_2$ pertenecen a $k$. (Figura 3.7).


**Figura** 3.7: (PP). Puntos $P_1$ y $P_2$.

Marcamos el punto medio $M$ del segmento $P_1P_2$. (Figura 3.8).

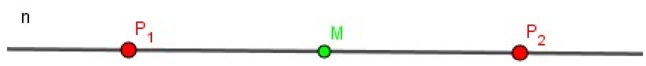


**Figura** 3.8: (PP). Punto medio segmento $P_1P_2$.

Trazamos la recta $m$ perpendicular a la recta $n$ por $M$. (Figura 3.9).

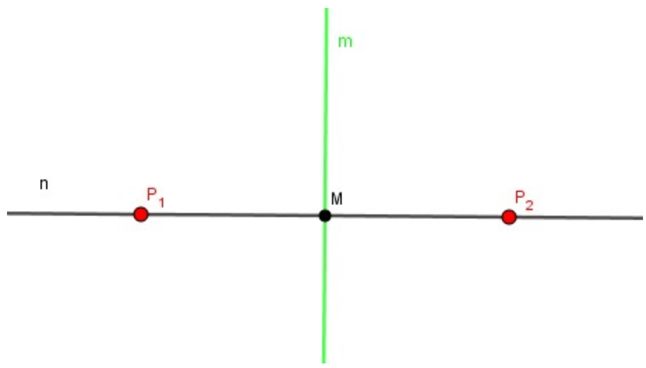


**Figura** 3.9: (PP). recta $m$ perpendicular a la recta $n$.

Construimos la $\odot M_{P1M}$. (Figura 3.10).

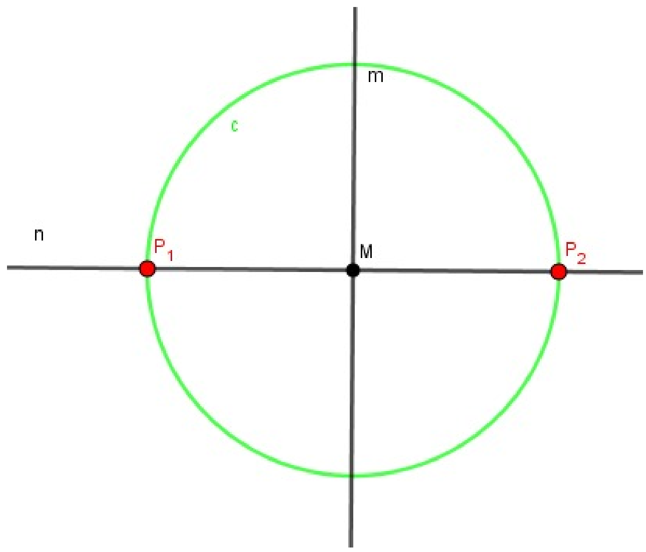


**Figura** 3.10: (PP). $\odot M_{P1M}$.

Hallamos el punto $V$ de intersección de la $\odot M_{P1M}$ con la recta $m$ y la recta tangente a la $\odot M_{P1M}$ por el punto $V$. (Figura 3.11).

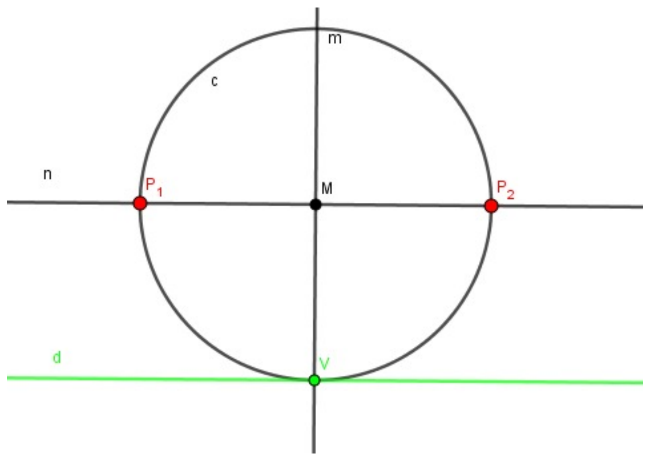


**Figura** 3.11: (PP). Punto $V$ y recta tangente a la $\odot M_{P1M}$ por el punto $V$.

Sea la parábola $k$ con foco $M$ y directriz $d$. (Figura 3.12).

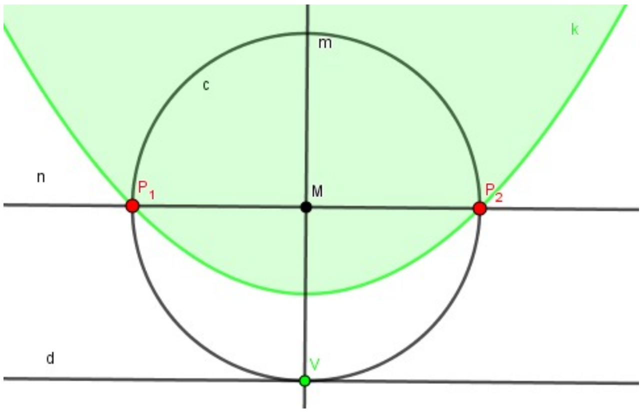


**Figura** 3.12: (PP). Parábola $k$.

De manera análoga, se obtiene $k_1$ parábola cuyo foco es $M$ y directriz $d_1$. (Figura 3.13).

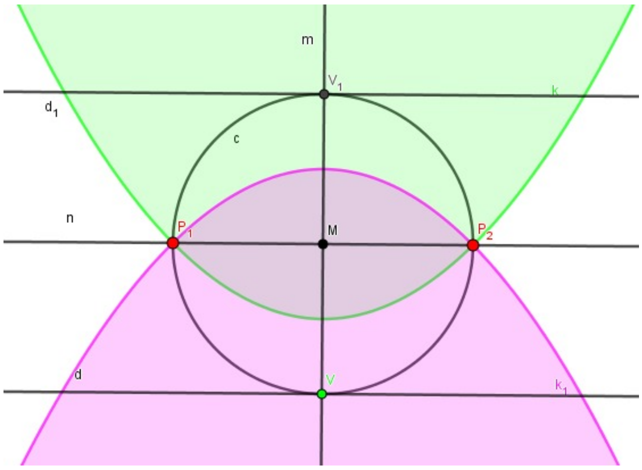


**Figura** 3.13: (PP). Parábola $k_1$.

Los puntos $P_1$ y $P_2$ pertenecen a las parábolas construidas, puesto que la distancia de dichos puntos es la misma al foco y a la directriz.

## 3.2. Parábola tangente a dos rectas (RR)

Dadas las rectas $t_1$ y $t_2$, no paralelas, existe al menos una parábola $k$ tal que $t_1$ y $t_2$ son tangentes a $k$.

Dadas las rectas $t_1$ y $t_2$, no paralelas. (Figura 3.14).

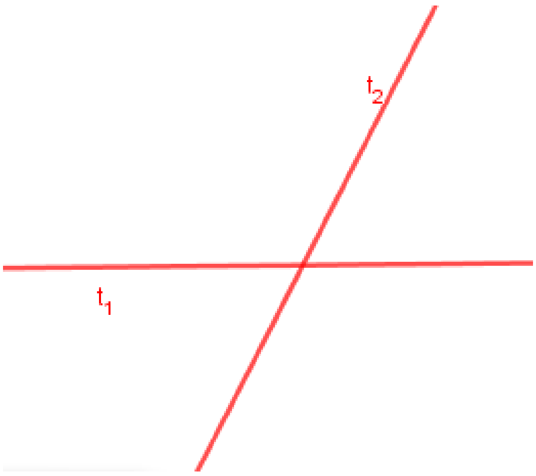


**Figura** 3.14: (RR). Rectas $t_1$ y $t_2$.

Sea un punto $F$ que no pertenezca a las rectas $t_1$ y $t_2$. (Figura 3.15).

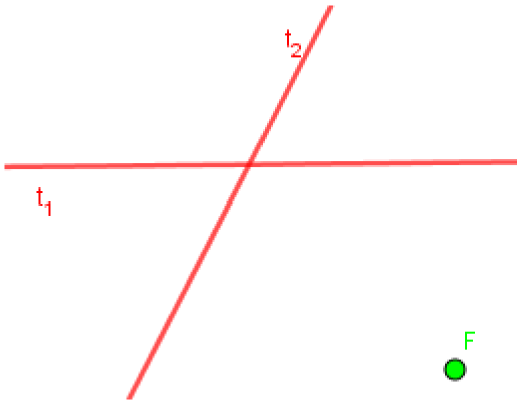


**Figura** 3.15: (RR). Punto $F$.

Ahora, marcamos los puntos $F'$ y $F''$ simétricos de $F$ respecto a las rectas $t_1$ y $t_2$ respectivamente y se construye $\overleftrightarrow{F'F''} = d$. (Figura 3.16).

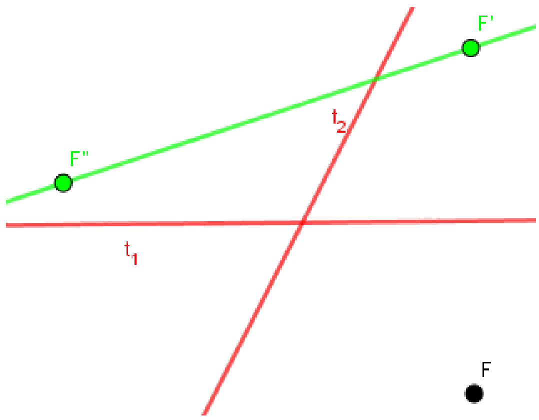


**Figura** 3.16: (RR). Puntos $F'$ y $F''$ simétricos de $F$ respecto a las rectas $t_1$ y $t_2$.

Luego, se construye la parábola $k$ cuyo foco es $F$ y directriz $d$. (Figura 3.17).

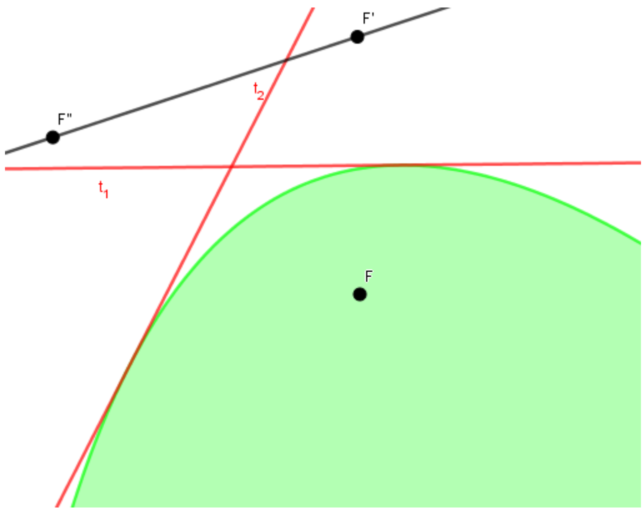


**Figura** 3.17: (RR). Parábola $k$ tangente a $t_1$ y $t_2$.

Para verificar que $k$ parábola es tangente a las rectas dadas, se realiza la siguiente construcción auxiliar:

- Se traza una recta $g$ perpendicular por $F''$ a la recta directriz $\overleftrightarrow{FF''}$
- Sea $J$ punto de intersección de las rectas $g$ y $t_2$
- Construimos $\overline{FF''}$
- $K$ punto de intersección de la recta $t_2$ y $\overline{FF''}$

- $\triangle F''KJ$ y $\triangle FKJ$ congruentes debido a que:
  - $\overline{F''K} \cong \overline{KF}$ por definición de simetría,
  - $\overline{JK} \cong \overline{JK}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia y
  - $\angle F''KJ \cong \angle FKJ$ porque la recta $t_2$ es mediatriz del segmento $\overline{F''F}$ por definición de simetría axial, por tanto, los ángulos son rectos.
- $\angle F''JK \cong \angle FJK$ por definición de triángulos congruentes.

Al ser los $\angle F''JK \cong \angle FJK$ garantizamos que la recta $t_2$ es mediatriz del $\overline{FF''}$ y la recta $t_2$ biseca a dichos ángulos. De manera análoga sucede para la recta tangente $t_1$. (Figura 3.18).

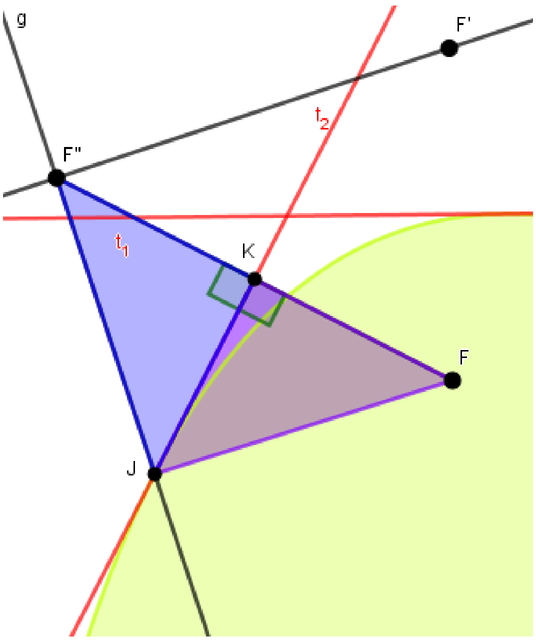


**Figura** 3.18: Construcción auxiliar (RR).

Al mover el punto $F$ por el plano se obtienen varias parábolas tangentes a las rectas dadas, para ello creamos una aplicación en GeoGebra. (Aplicativo. 5.4).

Las rectas dadas no pueden ser paralelas, puesto que al hacer un razonamiento análogo las rectas

Para el caso en que las rectas dadas $t$ y $t_1$ fuesen paralelas, ubicamos un punto $F$ tal que $F$ no pertenece a ninguna de las rectas dadas, luego trazamos los puntos de simetría del punto $F$ a cada una de las rectas $t$ y $t_1$, obteniendo $F'$ y $F''$, trazamos la recta por los puntos $F'$ y $F''$. Luego, construimos la parábola $k$ con foco $F$ y directriz la recta $F'F''$. Por la definción de simetría los puntos $F$, $F''$, $F'$ son colineales, en consecuencia no es posible construir la parábola dadas dos rectas paralelas que fuesen tangentes a la parábola, puesto que el foco pertenece a la directriz. Ademas se contradice la propiedad punto simétrico respecto a cualquier tangente (1.2.3, ya que esta garantiza que el simétrico del foco respecto a toda tangente de una parábola pertenece a la directriz de esta.(Figura 3.19).

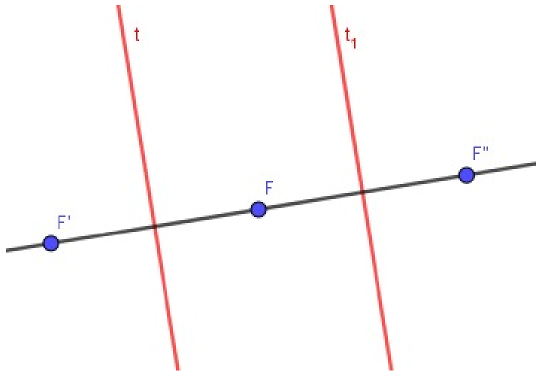


**Figura** 3.19: (RR). Rectas paralelas.

## 3.3. Parábola tangente a una recta dada y que contiene un punto dado (RP)

Dada una recta $t$ y un punto $P$, existe al menos una parábola $k$, tal que $t$ es tangente a $k$ y $k$ contiene el punto $P$.

Dada una recta $t$ y un punto $P$. (Figura 3.20).

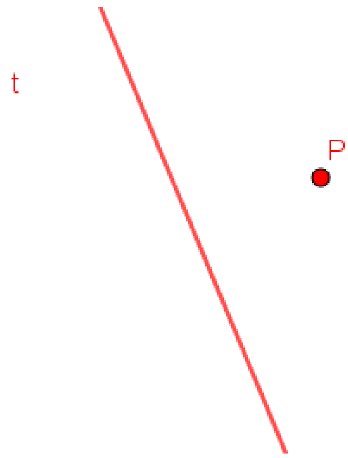


**Figura** 3.20: (RP). Recta $t$ y punto $P$.

Sea un punto $B$ que pertenece a la recta $t$, se traza $\overleftrightarrow{AB} = l$, tal que $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. (Figura 3.21).

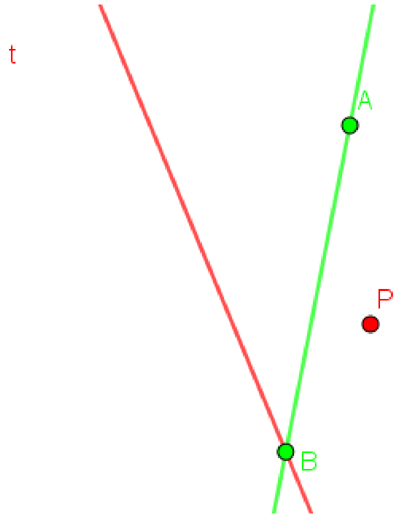


**Figura** 3.21: (RP). Punto $B$ y $\overleftrightarrow{AB}$.

Ahora se traza la recta $l'$ simétrica a $l$ con respecto a $t$. (Figura 3.22).

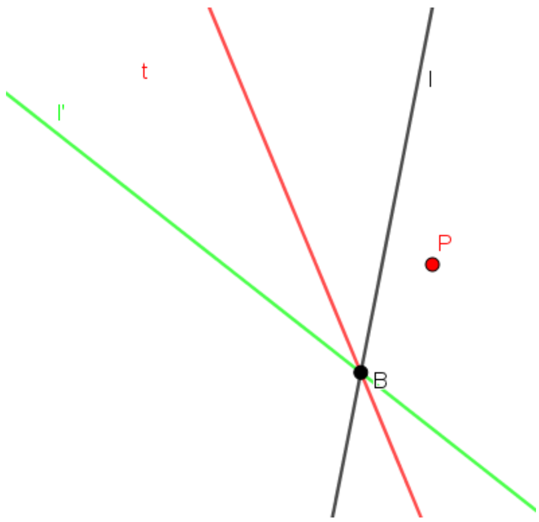


**Figura** 3.22: (RP). Recta $l'$ simétrica a $l$.

Luego, se traza una recta $f$ paralela a $l$ por $P$ y se determina el punto de intersección $C$ entre las rectas $f$ y $t$. (Figura 3.23).

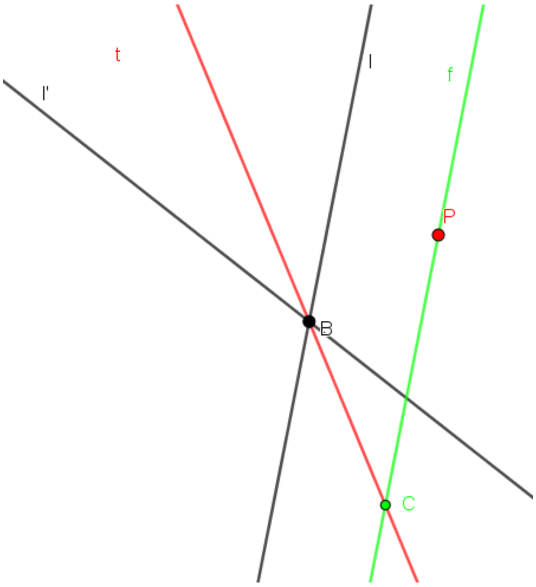


**Figura** 3.23: (RP). Recta $f$ paralela a $l$ por $P$.

Se determina $M$ punto medio del $\overline{BC}$ y se traza la $\overleftrightarrow{PM}$=$g$. (Figura 3.24).

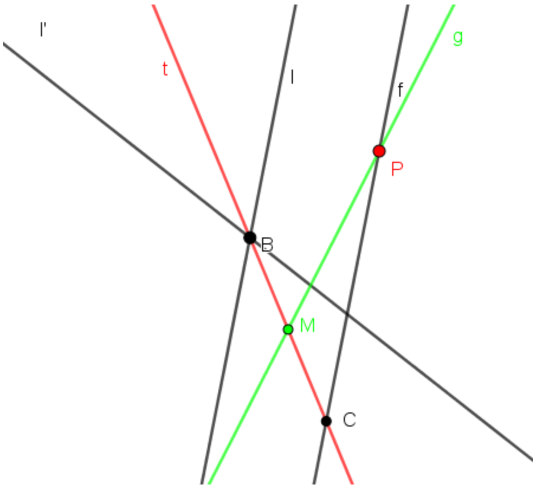


**Figura** 3.24: (RP). $M$ punto medio del $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PM}$.

Seguidamente, se traza la recta $f'$ siendo la recta simétrica de $f$ respecto a $g$. (Figura 3.25).

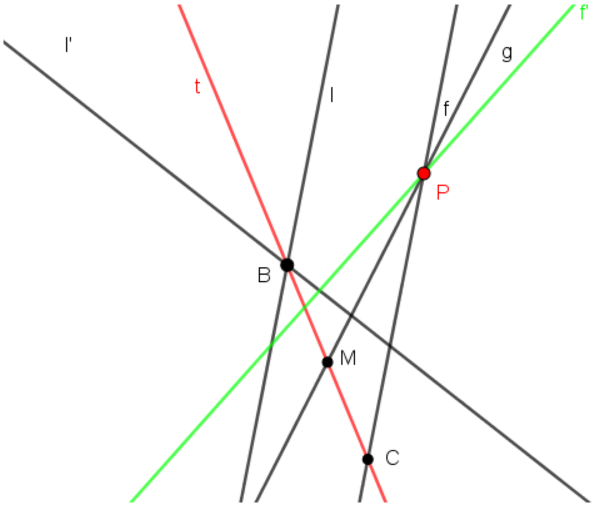


**Figura** 3.25: (RP). Recta $f'$ simétrica de la recta $f$.

Después, se marca el punto de intersección $F$ entre las rectas $f'$ y $l'$; a su vez se determinan los puntos $F'$ y $F''$ simétricos de $F$ respecto a las rectas $t$ y $g$ respectivamente. (Figura 3.26).

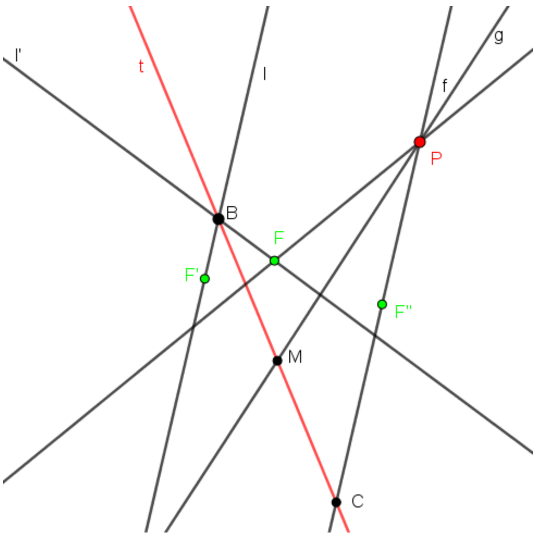


**Figura** 3.26: (RP). Puntos $F'$ y $F''$ simétricos de $F$.

Finalmente, se traza una recta $F'F'' = d$. (Figura 3.27).

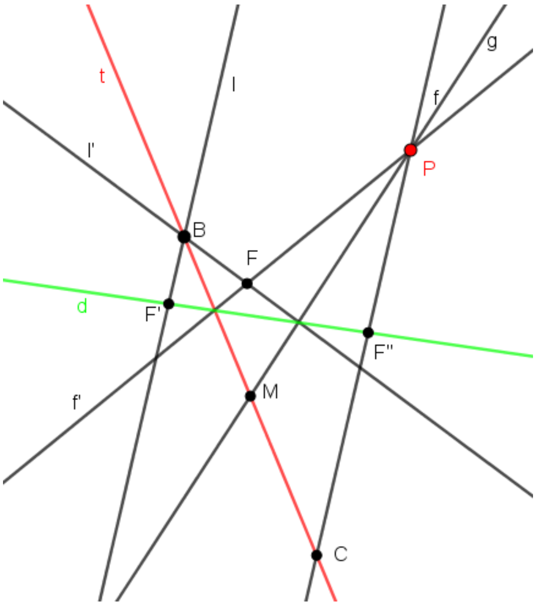


**Figura** 3.27: (RP). Recta $F'F''$.

Luego, construimos la parábola $k$ cuyo foco es el punto $F$ y directriz la recta $d$. (Figura 3.28).

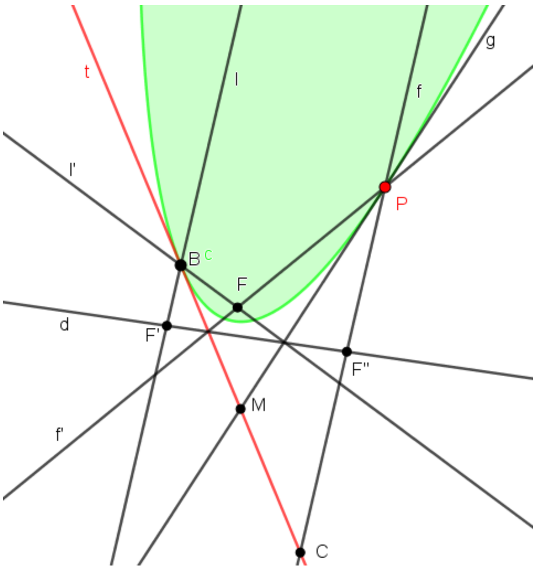


**Figura** 3.28: (RP). Parábola $k$ tangeNte a $t$ y contiene el punto $P$.

Para garantizar que $k$ es tangente a la recta dada, se realiza la siguiente construcción auxiliar:

- Se traza el segmento $F'F$

- Sea S punto de intersección de las rectas $t$ y $\overline{F'F}$
- $\triangle F'BS$ y $\triangle FBS$ congruentes debido a que:
  - $\overline{F'S} \cong \overline{SF}$ por definición de simetría,
  - $\overline{BS} \cong \overline{BS}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia y
  - $\angle F'SB \cong \angle FSB$ porque la recta $t$ es mediatriz del segmento $\overline{F'F}$ por definición de simetría axial, por tanto, los ángulos son rectos.
  - Por el teorema $LAL$ dichos triángulos son congruentes.
- $\angle F'BS \cong \angle FBS$ por definición de triángulos congruentes, en consecuencia, la recta $t$ biseca a dichos ángulos, entonces la recta $t$ es tangente a la parábola.
  (Figura 3.29).

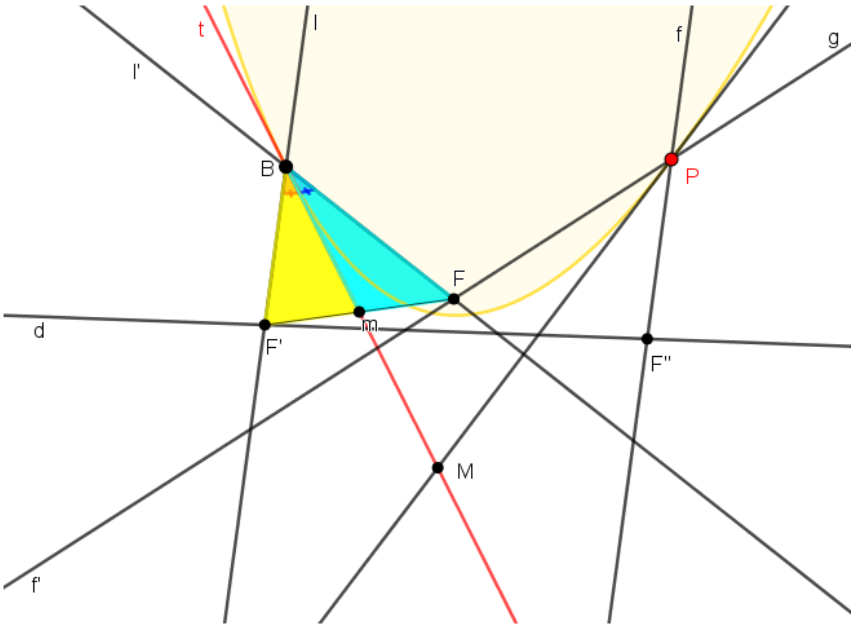


**Figura** 3.29: (RP). Parábola $k$ tangente a $t$.

Por otra parte, para garantizar que $P$ pertenece a la parábola, se realiza la siguiente construcción auxiliar:

- Se traza el segmento $FF''$
- Sea $D$ punto de intersección de la recta $g$ y $\overline{F''F}$
- $\triangle F''DP$ y $\triangle FDP$ congruentes debido a que:
  - $\overline{F''D} \cong \overline{DF}$ por definición de simetría,

- $\overline{PD} \cong \overline{PD}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia y
- $\angle F''DP \cong \angle FDP$ porque la recta $t$ es mediatriz del segmento $\overline{F''F}$ por definición de simetría axial, por tanto, los ángulos son rectos.
- por el teorema $LAL$ dichos triángulos son congruentes.

- $\overline{F''P} \cong \overline{FP}$ por definición de triángulos congruentes, en consecuencia, la distancia de $P$ al foco $F$ es la misma de $P$ a la directriz $d$, por tanto $P$ pertenece a la parábola $k$. (Figura 3.30).

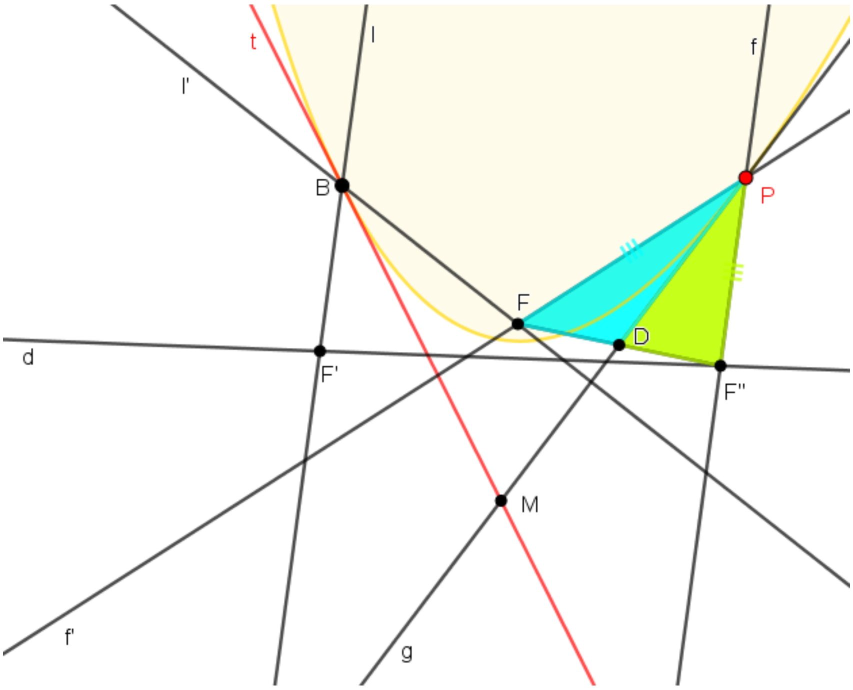


**Figura** 3.30: (RP). Parábola $k$ que contiene el punto $P$.

Existen varias soluciones, para ello creamos una aplicación en Geogebra (Aplicativo.5.5), en la cual se pueden evidenciar las parábolas solución al mover el punto $B$ sobre la recta $t$. (Figura.3.31).

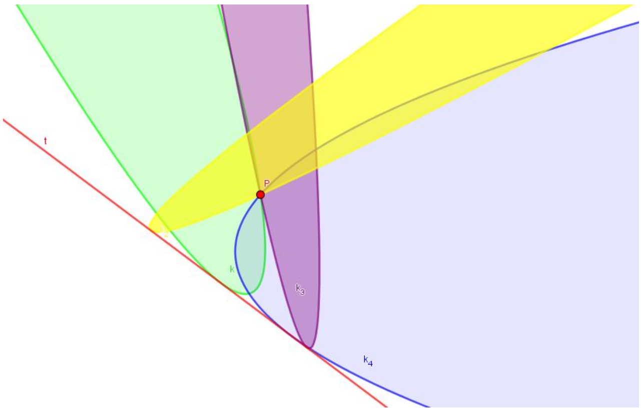


**Figura** 3.31: (RP). Parábolas solución.

# Capítulo 4

# PARÁBOLA QUE PASA O ES TANGENTE A TRES ELEMENTOS ENTRE RECTAS O PUNTOS

En este capítulo se presentarán las distintas construcciones vinculadas al problema "dados tres elementos encontrar la parábola que los contenga o es tangente a ellos", a su vez algunas otras construcciones solución.

## 4.1. Parábola que contiene tres puntos (PPP)

Dados $P_1$, $P_2$, $P_3$ no colineales, existe al menos una parábola $k$ tal que $P_1$, $P_2$, $P_3$ pertenecen a $k$.

Dados $P_1$, $P_2$, $P_3$ no colineales. (Figura 4.1).

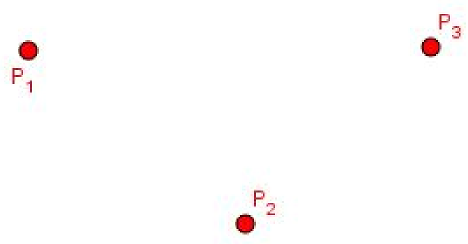


**Figura** 4.1: (PPP). Puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$.

Trazamos la recta $f$ tal que $P_1$, $P_2$, $P_3$ no pertenecen a ella, siendo $f$ la dirección. (Figura 4.2).

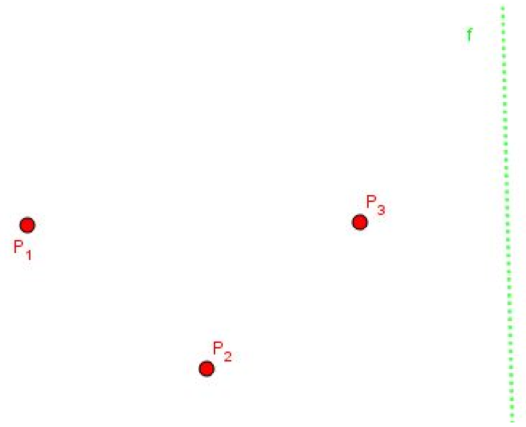


**Figura** 4.2: (PPP). $f$ dirección.

Construimos las rectas $\overleftrightarrow{P_1P_2} = h$ y $\overleftrightarrow{P_2P_3} = m$. (Figura 4.3).

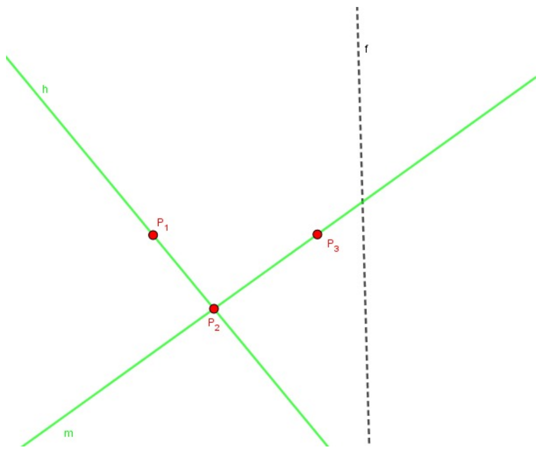


**Figura** 4.3: (PPP). Rectas $h$ y $m$.

Ahora trazamos las rectas $f_1$ y $f_2$ paralelas a la dirección por $P_1$ y $P_3$ respectivamente. (Figura 4.4).

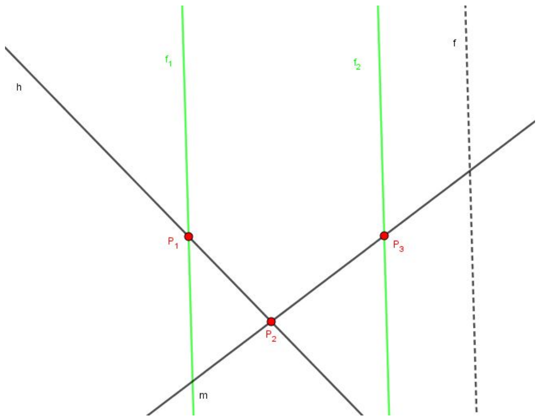


**Figura** 4.4: (PPP). Rectas $f_1$ y $f_2$ paralelas a la dirección.

Luego, marcamos el punto $A$ intersección de las rectas $f_1$ y $m$, seguidamente construimos una recta $g$ paralela a $h$ por $A$. (Figura 4.5).

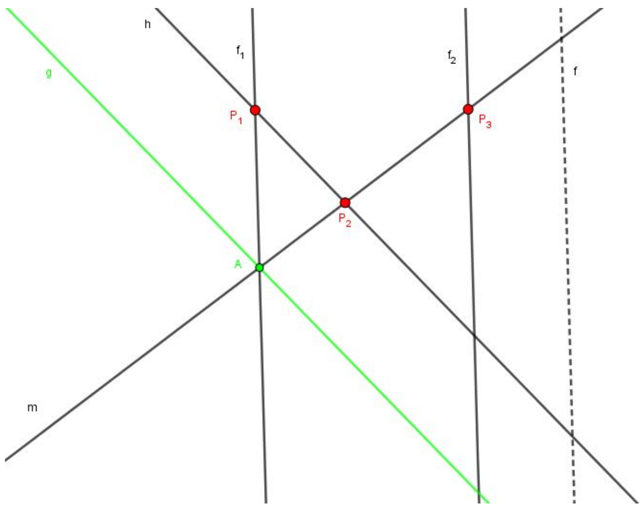


**Figura** 4.5: (PPP). Recta $g$ paralela a $h$.

Sea $B$ punto de intersección de las rectas $g$ con $f_2$, después construimos $\overleftrightarrow{P_1B} = t_1$. (Figura 4.6).

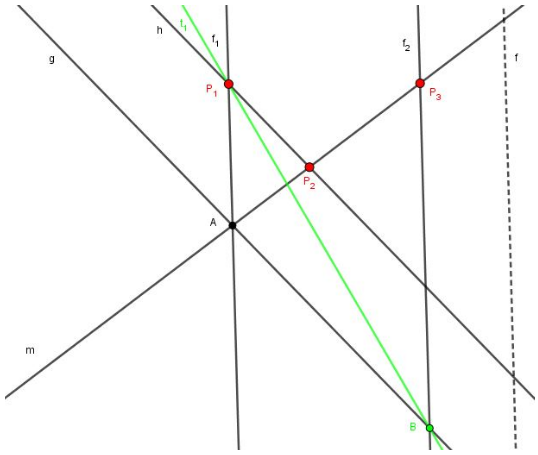


**Figura** 4.6: (PPP). $\overleftrightarrow{P_1B}$.

Luego $M_1$ punto medio de $\overline{P1B}$, después construimos la recta $\overleftrightarrow{P_3M_1} = t_2$. (Figura 4.7).

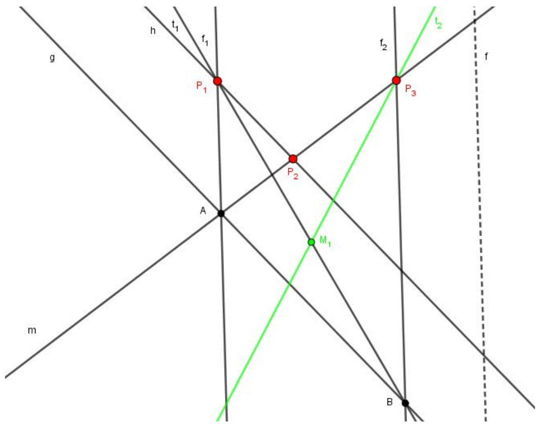


**Figura** 4.7: (PPP). $M$ punto medio de $\overline{P1B}$.

Ahora construimos las rectas $f_2'$ y $f_1'$ simétricas respecto a las rectas $t_1$ y $t_2$ respectivamente y $F$ punto de intersección entre las rectas simétricas. (Figura 4.8).

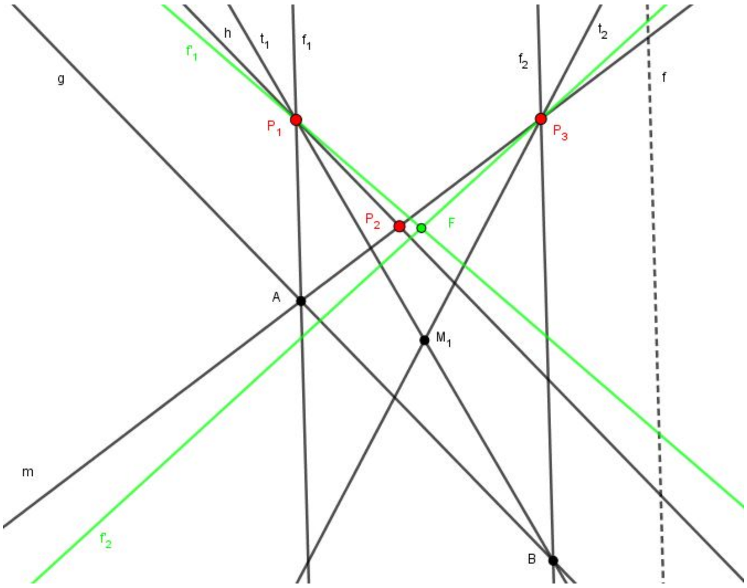


**Figura** 4.8: (PPP). Rectas $f_1'$ y $f_2'$ simétricas a las rectas $t_1$ y $t_2$.

Construimos los puntos simétricos $F'$ y $F''$ de $F$ respecto a las rectas $t_1$ y $t_2$ y a su vez la recta $\overleftrightarrow{F'F''} = d$. (Figura 4.9).

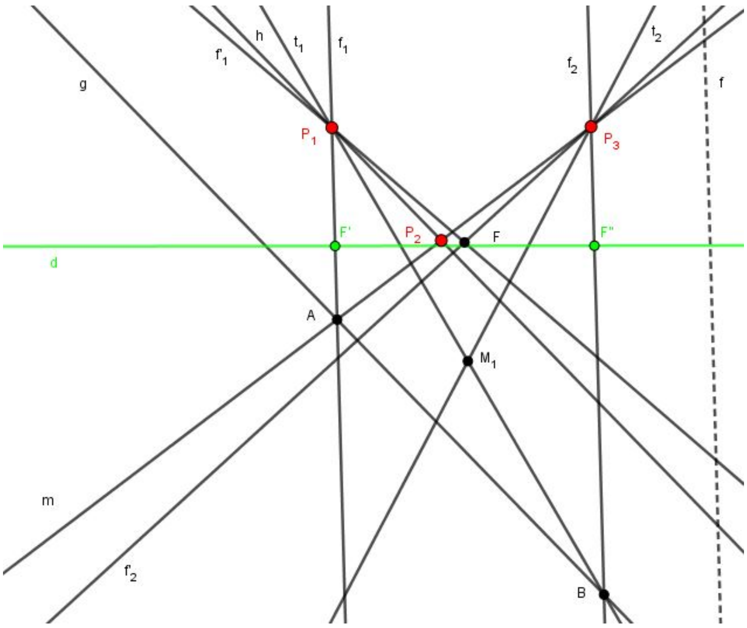


**Figura** 4.9: (PPP). Recta $\overleftrightarrow{F'F''}$.

Luego, construimos la parábola $k$ cuyo foco es $F$ y directriz $d$.(Figura 4.10).

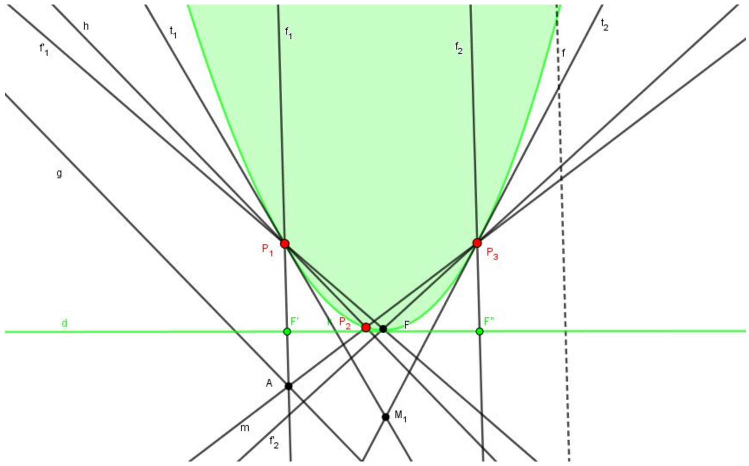


**Figura** 4.10: (PPP). Parábola $k$ que contiene a los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$.

Para verificar que $k$ parábola contiene los puntos dados, se realiza la siguiente construcción auxiliar:

- Construimos el $\overline{FF'}$
- $M_2$ punto medio del $\overline{FF'}$, $M_2 \in t_1$ por definición de simetría axial
- Por simetría axial tenemos $\overline{M_2F''} \cong \overline{FM_2}$
- $\overline{M_2P_1} \cong \overline{M_2P_1}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia
- $\angle F'M_2P_1 \cong \angle P_1M_2F$ porque la recta $t_1$ es mediatriz del segmento $\overline{F'F}$ por definición de simetría axial los ángulos son rectos.
- $\triangle F'M_2P_1$ y $\triangle FM_2P_1$ congruentes por el criterio de congruencia $LAL$, por tanto,
- $\overline{F'P_1} \cong \overline{FP_1}$ por definición de triángulos congruentes, entonces la distancia del punto $P_1$ a $F$ es igual a la distancia de $P_1$ a la directriz $d$, por lo tanto $P_1$ pertenece a la parábola $k$ cuyo foco es $F$ y directriz $d$. (Figura 4.11).

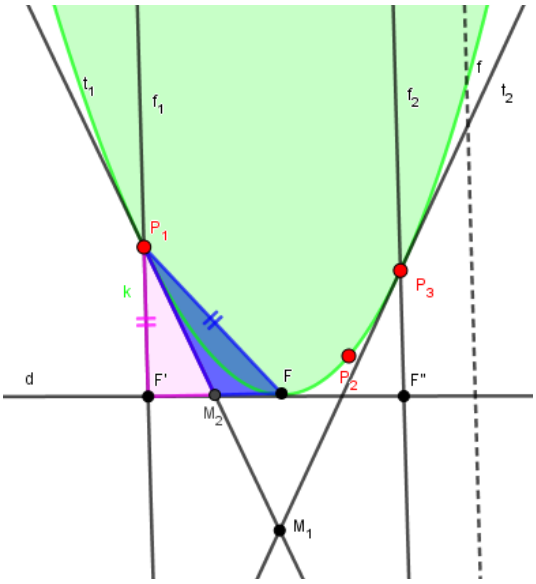


**Figura** 4.11: (PPP). Parábola $k$ que contiene el punto $P_1$.

Haciendo un razonamiento análogo tenemos que $P_2$ pertenece a la parábola $k$ cuyo foco es $F$ y directriz $d$. (Figura 4.12).

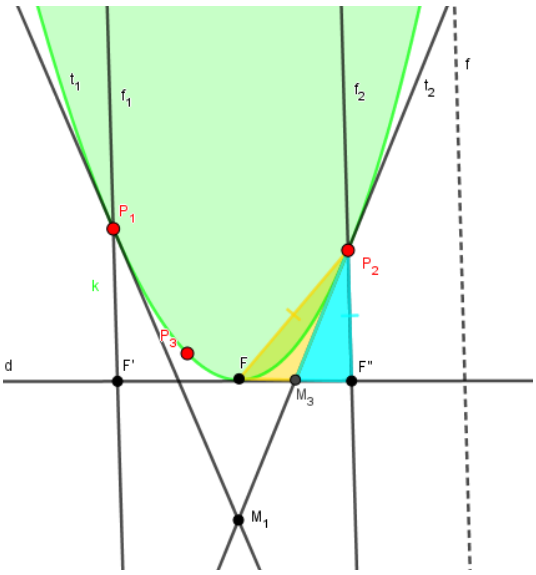


**Figura** 4.12: (PPP). Parábola $k$ que contiene el punto $P_2$.

Para ver las distintas soluciones, creamos una aplicación en GeoGebra (Aplicativo. 5.6), en la cual al mover la dirección $f$, se pueden observar las parábolas solución, cabe aclarar que cada una de las parábolas que se observan en la figura 4.13 tienen su propia dirección. (Figura 4.13).

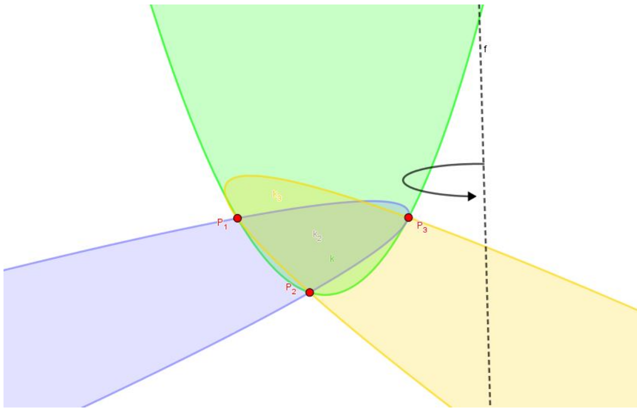

**Figura** 4.13: (PPP). Parábolas solución.

### 4.1.1. Otra solución al problema PPP

Dados $P_1$, $P_2$, $P_3$ no colineales, existe al menos una parábola $k$ tal que $P_1$, $P_2$, $P_3$ pertenecen a $k$.

Dados $P_1$, $P_2$, $P_3$ no colineales. (Figura 4.14).

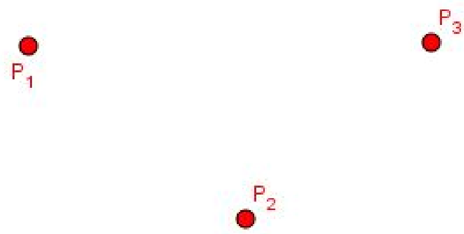


**Figura** 4.14: (PPP). Puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$ no colineales.

Trazamos la recta $f$ tal que $P_1$, $P_2$ y $P_3$ no pertenecen a ella.

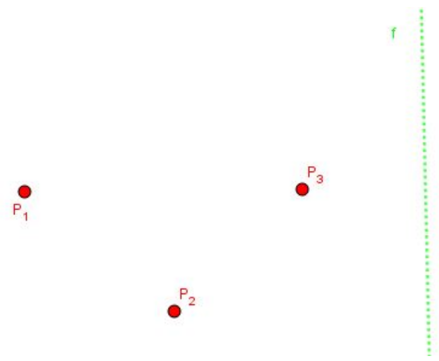


**Figura** 4.15: (PPP). dirección $f$.

Sean los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$. (Figura 4.16).

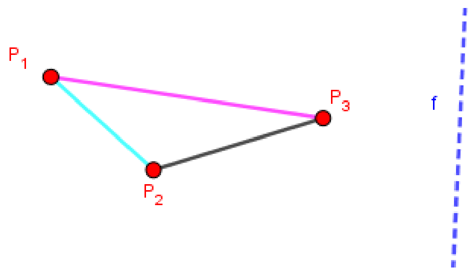


**Figura** 4.16: (PPP). $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$.

Construimos las rectas $a \parallel \overleftrightarrow{P_2P_3}$ por $P_1$, $b \parallel \overleftrightarrow{P_1P_3}$ por $P_2$ y $c \parallel \overleftrightarrow{P_2P_1}$ por $P_3$. (Figura 4.17).

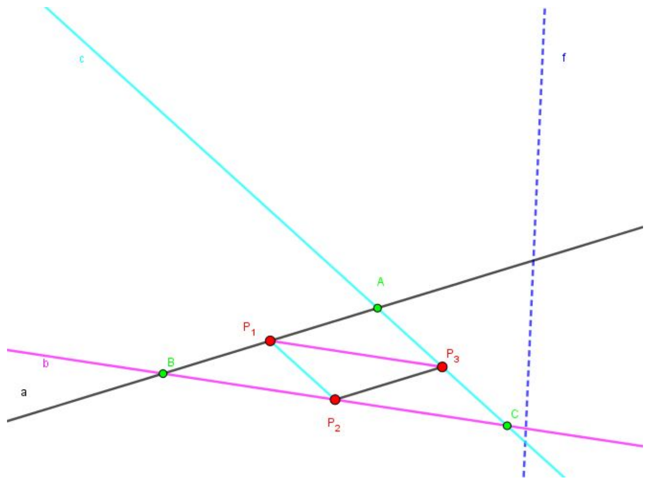


**Figura** 4.17: (PPP). Rectas $a \parallel \overleftrightarrow{P_2P_3}$, $b \parallel \overleftrightarrow{P_1P_3}$ y $c \parallel \overleftrightarrow{P_2P_1}$.

Marcamos los puntos de intersección $A$, $B$ y $C$ entre las rectas $a$, $b$ y $c$ respectivamente,, trazamos la recta $f_1$ paralela a $f$. (Figura 4.18).

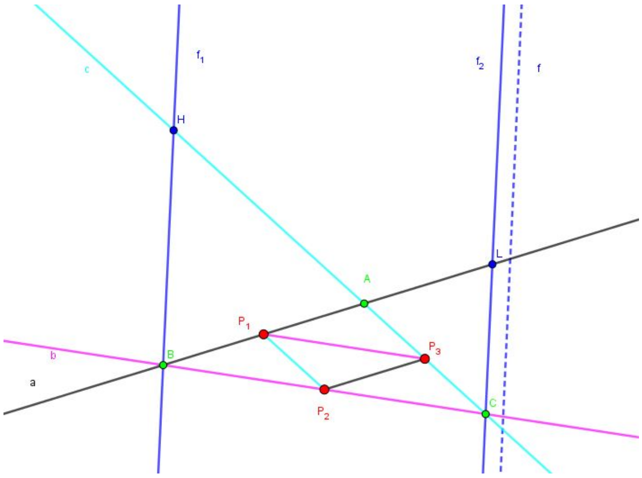


**Figura** 4.18: (PPP). Puntos de intersección $A$, $B$, $C$.

Luego se construyen las rectas $m$ y $n$ paralelas a la recta $f$ por $P_1$ y $P_3$ respectivamente y ubicamos los puntos $H$ y $L$ intersección entre las rectas creadas con las rectas $a$ y $c$. (Figura 4.19).

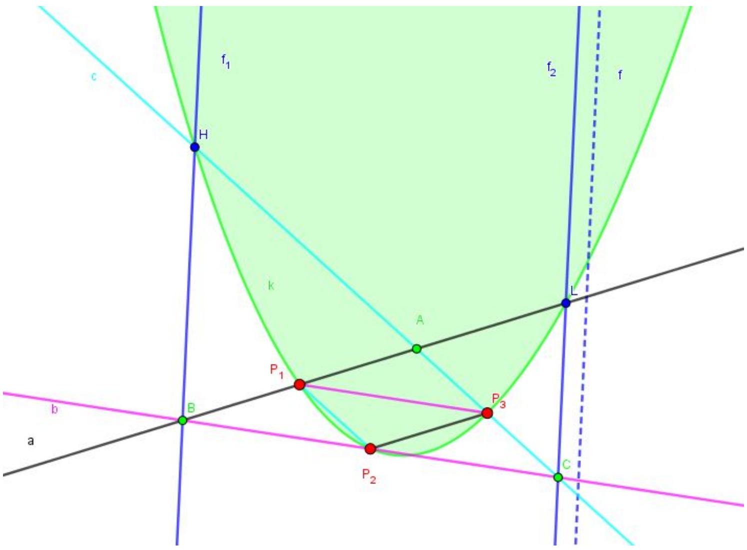


**Figura** 4.19: (PPP). Rectas $m$ y $n$ paralelas a la recta $f$ por $P_1$ y $P_3$.

Por el teorema cónica puntual, creamos la cónica por los puntos $H$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $L$. (Figura 4.20).

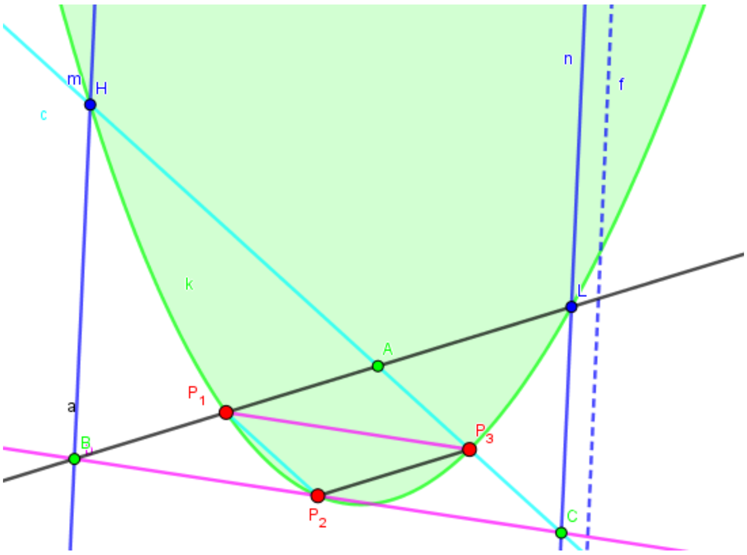


**Figura** 4.20: (PPP). Cónica que contiene los puntos $H$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ y $L$.

Para evidenciar las diferentes parábolas solución movemos la dirección $f$, cabe aclarar que para identificar cada parábola, estas se construyeron a partir de la herramienta creada en GeoGebra en la que se tiene en cuenta una dirección para cada parábola solución.

## 4.2. Parábola tangente a tres rectas (RRR)

Dadas las rectas $t_1$, $t_2$, $t_3$ no paralelas dos a dos, existe al menos una parábola $k$, tal que $t_1$, $t_2$, $t_3$ son tangentes a $k$.

Dadas las rectas $t_1$, $t_2$, $t_3$ no paralelas dos a dos. (Figura 4.21).

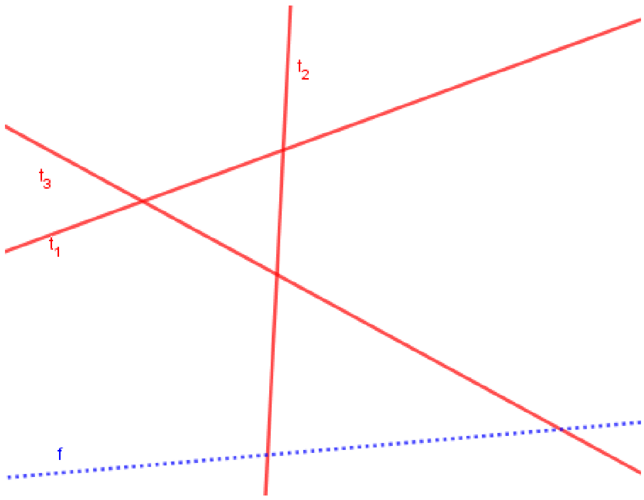


**Figura** 4.21: (RRR). Rectas $t_1$, $t_2$, $t_3$.

Sea $A = t_1 \cap t_2$ y $B = t_2 \cap t_3$ y la recta $f$ dirección. (Figura 4.22).

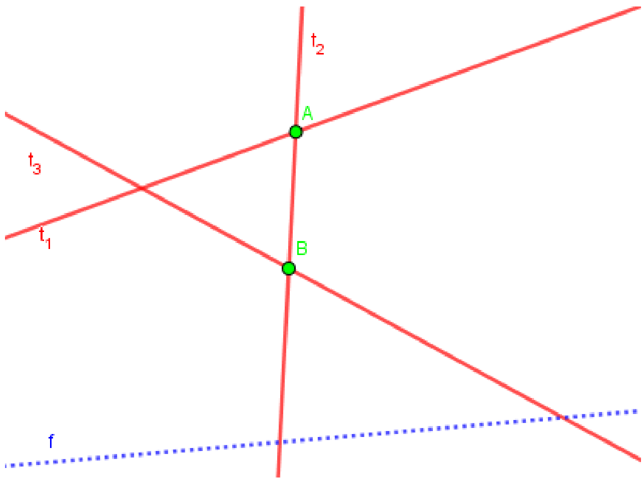


**Figura** 4.22: (RRR). Puntos de intersección $A$ y $B$.

Ahora, trazamos las rectas $g \parallel t_3$ y $h \parallel t_1$, marcamos $C$ punto de intersección entre $h$ y $g$. (Figura 4.23).

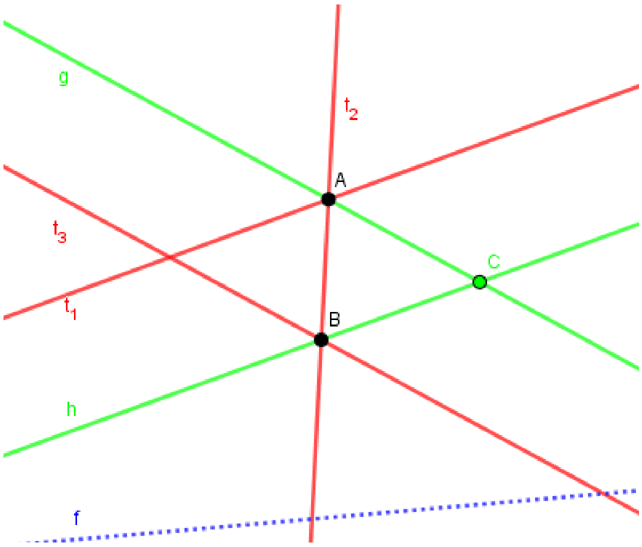


**Figura** 4.23: (RRR). Rectas $g \parallel t_3$ y $h \parallel t_1$.

Construimos la recta $f_1$ paralela a $f$, luego $T_2$ intersección entre las rectas $f_1$ y $t_2$. (Figura 4.24).

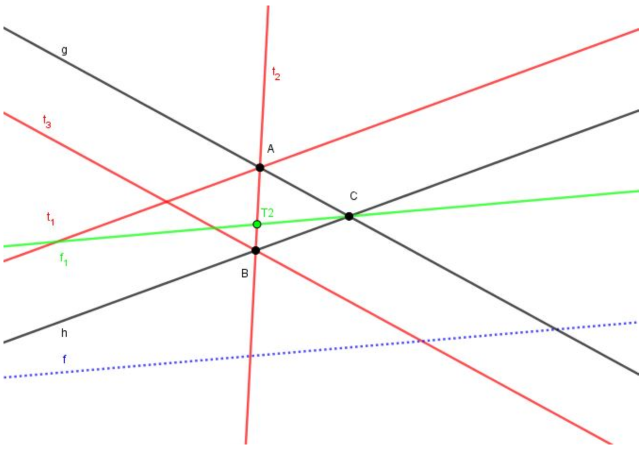


**Figura** 4.24: (RRR). Punto $T_2$ intersección entre las rectas $f_1$ y $t_2$.

Trazamos la recta $f_2 \parallel f$ por $A$, marcamos $K$ punto de intersección entre las rectas $f_2$ y $h$. (Figura 4.25).

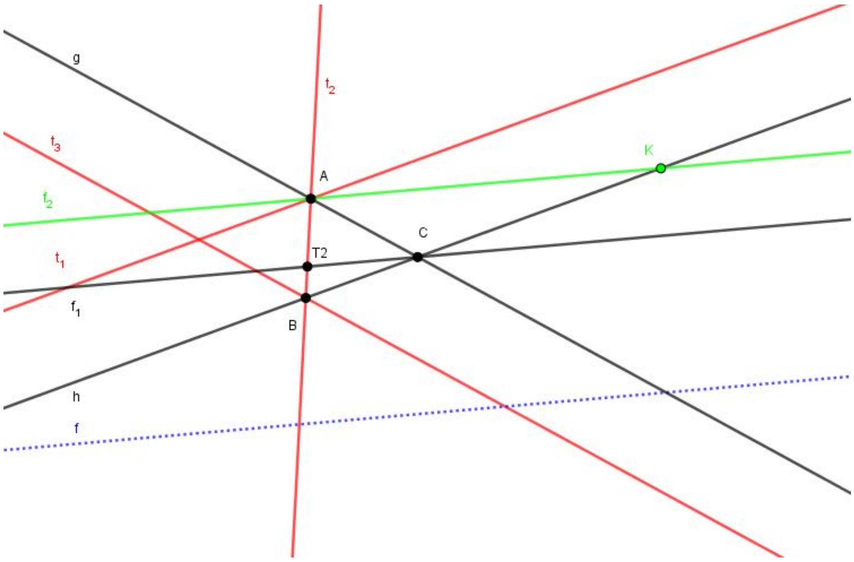


**Figura** 4.25: (RRR). Recta $f_2 \parallel f$ por $A$.

Creamos una recta $k$ paralela a $g$ por $K$ y se halla el punto de intersección $T_1$ entre las rectas $k$ y $t_1$. (Figura 4.26).

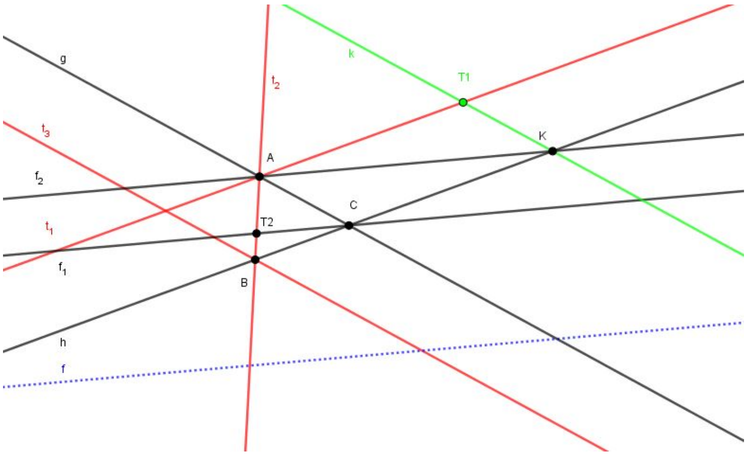


**Figura** 4.26: (RRR). Recta $k$ paralela a $g$ por $K$.

Ahora construimos la recta $f_3 \parallel f$ por $B$ y ubicamos el punto $I$ siendo la intersección de la recta $f_3$ y $g$. (Figura 4.27).

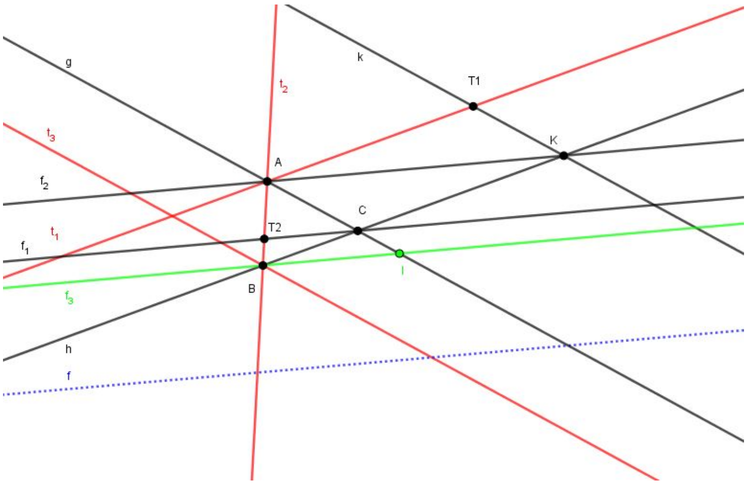


**Figura** 4.27: (RRR). Recta $f_3 \parallel f$ por $B$.

Luego, trazamos la recta $o \parallel t_1$ por $I$ y marcamos $T_3$ punto de intersección entre las rectas $o$ y $g$. (Figura 4.28).

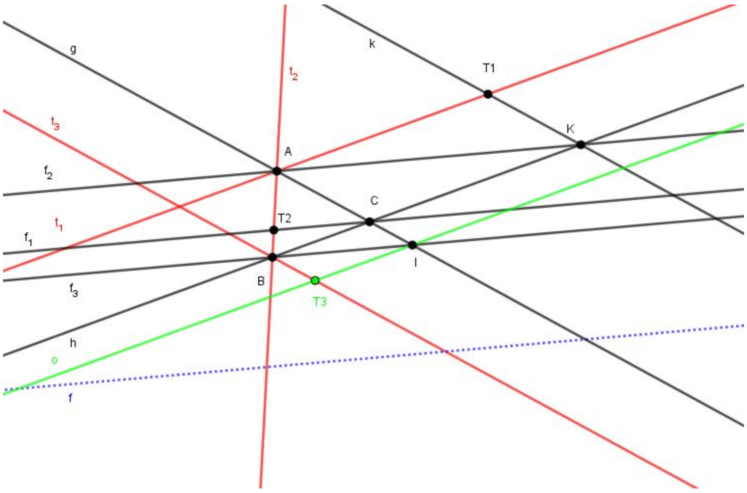


**Figura** 4.28: (RRR). Recta $o \parallel t_1$ por $I$.

Recurriendo al caso anterior (PPP. 4.1), construimos la parábola $k$ por tres puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$ y la dirección $f$. (Figura 4.29).

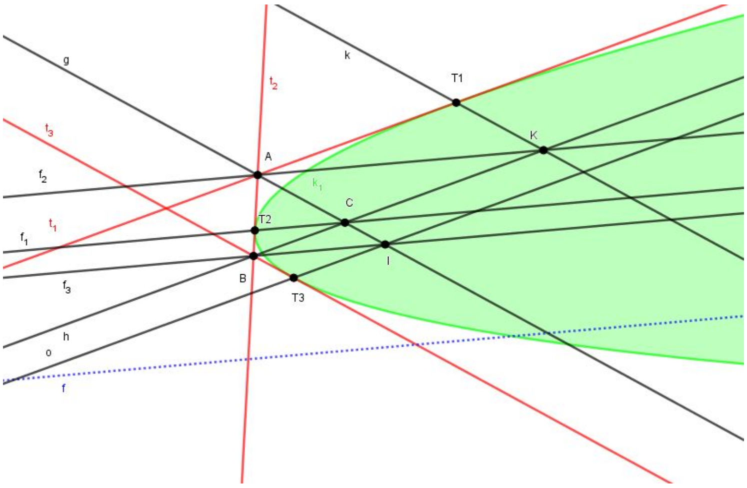


**Figura** 4.29: (RRR). Parábola $k$ tangente a las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$.

Cabe aclarar que para este caso existen diferentes soluciones, para observar dichas soluciones creamos una aplicación en GeoGebra (Aplicativo.5.7), en la cual al mover la dirección $f$ se pueden evidenciar las parábolas solución, en la figura 4.32, se evidencian tres parábolas tangentes a las rectas dadas, se aclara que cada una de ellas tiene su dirección. (Figura 4.32).

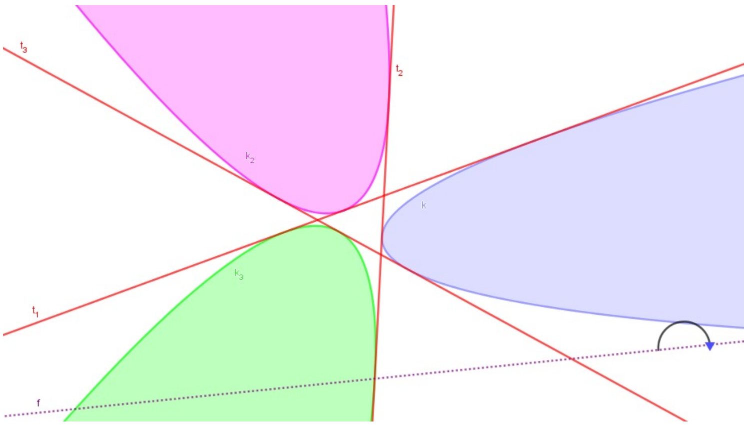


**Figura** 4.30: (RRR). Parábolas tangentes a las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$.

### 4.2.1. Otra solución al problema RRR

Dadas las rectas $t_1$, $t_2$, $t_3$, existe al menos una parábola $k$ tal que $t_1$, $t_2$, $t_3$ son tangentes a $k$.

Dadas las rectas $t_1$, $t_2$, $t_3$. (Figura 4.31).

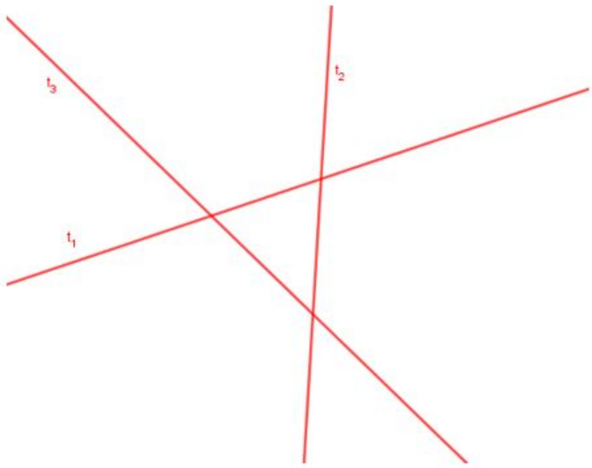


**Figura** 4.31: (RRR). Rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$.

Sean $A = t_1 \cap t_2$ y $B = t_2 \cap t_3$

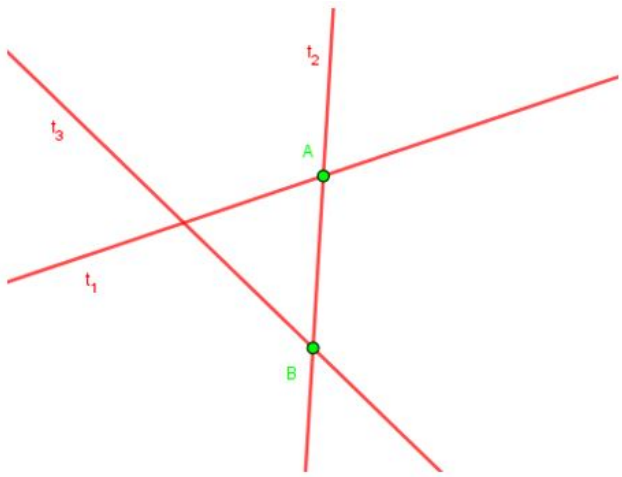


**Figura** 4.32: (RRR). Puntos $A = t_1 \cap t_2$ y $B = t_2 \cap t_3$

Ahora, trazamos la recta $g \parallel t_3$ y $h \parallel t_1$, marcamos el punto $C$ de intersección entre $h$ y $g$. (Figura 4.33).

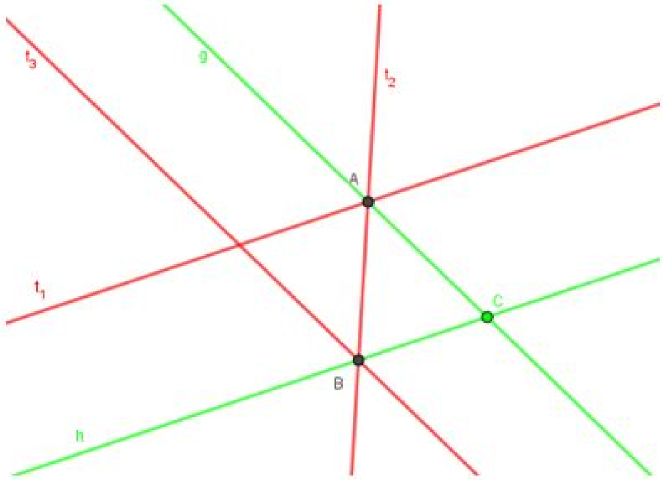


**Figura** 4.33: (RRR). Punto $C$ de intersección entre $h$ y $g$

Construimos la recta $k_1 \parallel t_3$, luego $T_1$ intersección entre las rectas $k_1$ y $t_2$. (Figura 4.34).

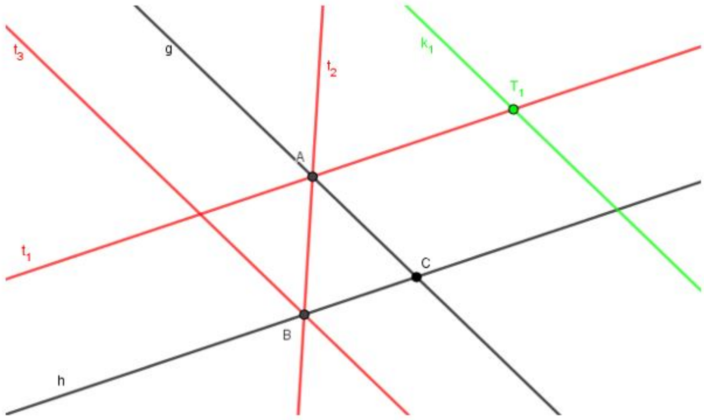


**Figura** 4.34: (RRR). $T_1$ intersección entre las rectas $k_1$ y $t_2$

Trazamos la recta $j = \overleftrightarrow{AK}$, siendo $K$ punto de intersección entre las rectas $k_1$ y $h$. (Figura 4.35).

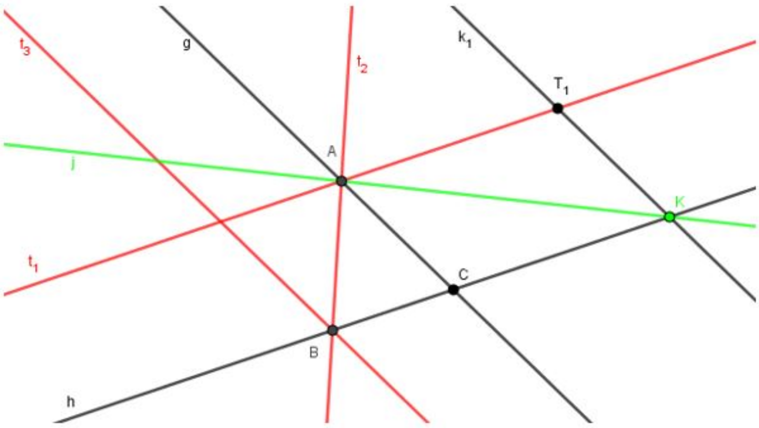


**Figura** 4.35: (RRR). $K$ punto de intersección entre las rectas $k_1$ y $h$

Creamos una recta $i$ paralela a $j$ por $C$ y se halla el punto de intersección $T_2$ entre las rectas $t_2$ e $i$. (Figura 4.36).

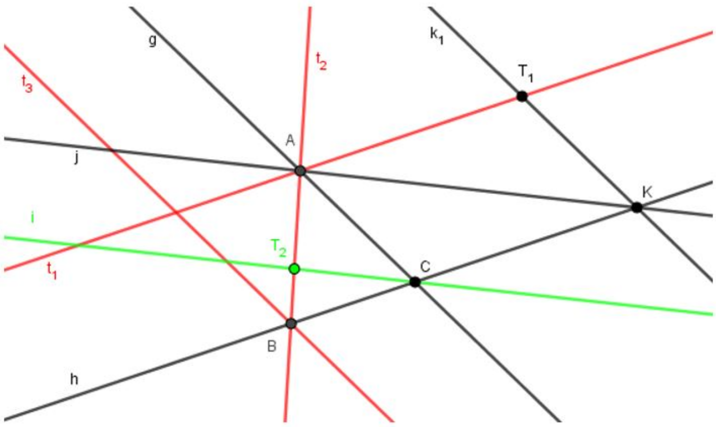


**Figura** 4.36: (RRR). Punto de intersección $T_2$ entre las rectas $t_2$ e $i$

Ahora construimos la recta $l \parallel f$ por $B$ y ubicamos el punto $I$ en la intersección de la recta $l$ y $g$. (Figura 4.37).

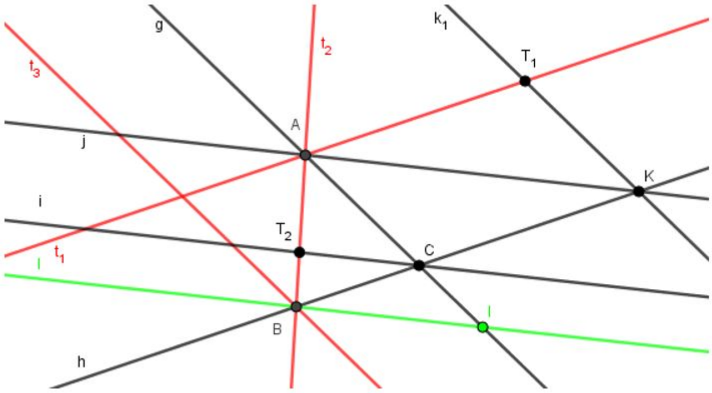


**Figura** 4.37: (RRR). Punto $I$ de intersección de las rectas $l$ y $g$

Luego trazamos la recta $o \parallel t_1$ por $I$ y marcamos $T_3$ punto de intersección entre las rectas $o$ y $t_3$. (Figura 4.38).

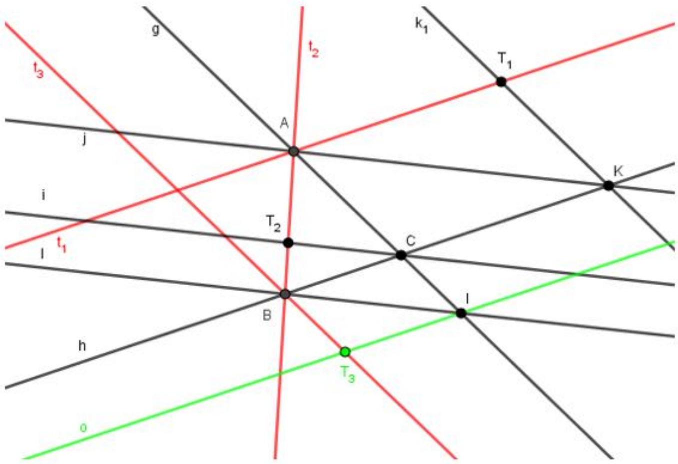


**Figura** 4.38: (RRR). $T_3$ punto de intersección entre las rectas $o$ y $t_3$

Utilizando el caso anterior PPP construimos la parábola $k$ por tres puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$ y la dirección $j$. (Figura 4.39).

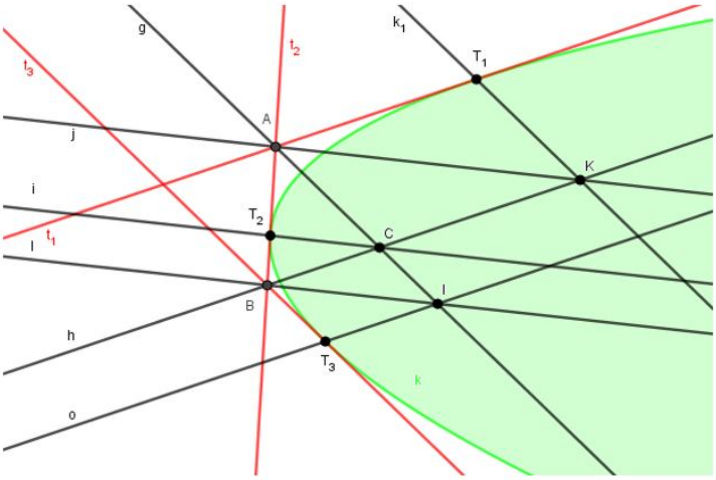


**Figura** 4.39: (RRR). Parábola $k$ por tres puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$ y la dirección $j$ .

Cabe aclarar que existen distintas parábolas solución al animar el punto $T_1$ sobre la recta $t_1$, para evidenciar dichas soluciones creamos una aplicación en GeoGebra (Aplicativo.5.7.1).

## 4.3. Parábola que contiene un punto y es tangente dos rectas (PRR)

Dado el punto $P$ y las rectas $t_1$ y $t_2$, con $P \notin \mathrm{t}_1$ y $t_2$, existe al menos una parábola $k$, tal que $k$ contiene el punto $P$ y $t_1$ y $t_2$ son tangentes a esta.

Dado el punto $P$ y las rectas $t_1$ y $t_2$, con $P \notin \mathrm{t}_1$ y $t_2$. (Figura 4.40).

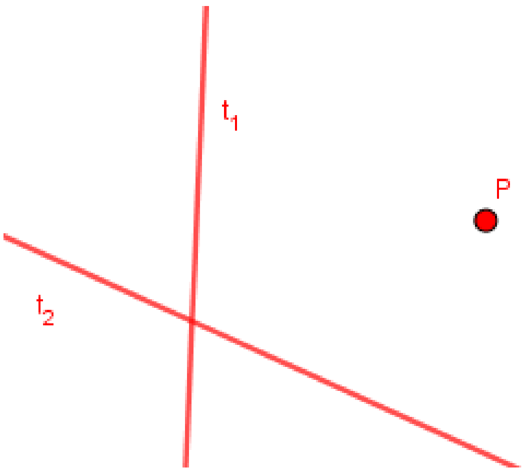


**Figura** 4.40: (PRR). Punto $P$ y rectas $t_1$ y $t_2$.

Sea una circunferencia $\odot \mathrm{P}_{r>0}$. Ubicamos $A$ en la circunferencia $\odot \mathrm{P}_{r>0}$. (Figura 4.41).

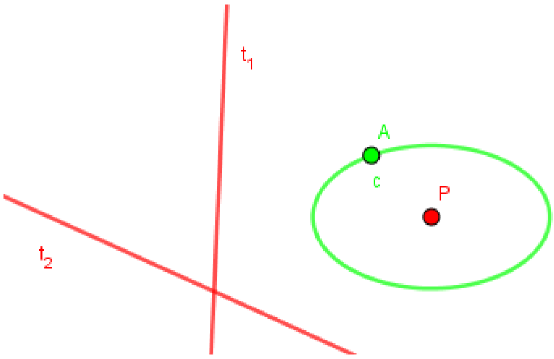


**Figura** 4.41: (PRR). $A \in \odot P_{r>0}$

Ahora trazamos la recta $\overleftrightarrow{AP} = t_3$ de manera que interseque a las dos rectas dadas y marcamos las intersecciones $B$ y $C$ respectivamente con las rectas $t_2$ y $t_3$. (Figura 4.42).

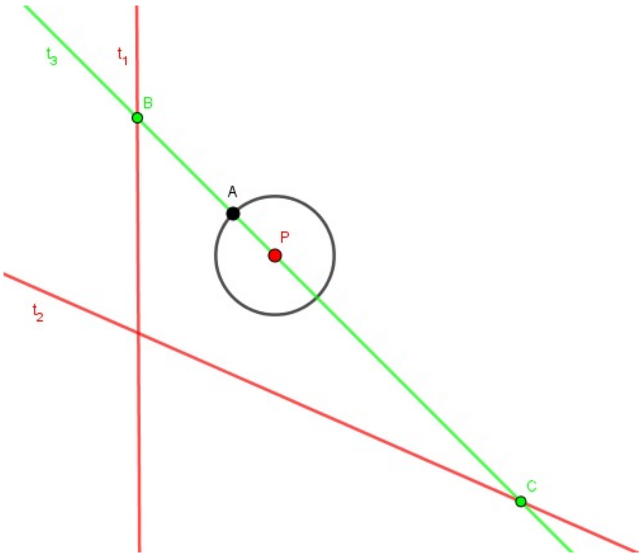


**Figura** 4.42: (PRR). Recta $\overleftrightarrow{AP} = t_3$.

Construimos las rectas $i \parallel t_2$ por $B$ y $h \parallel t_1$ por $C$. (Figura 4.43).

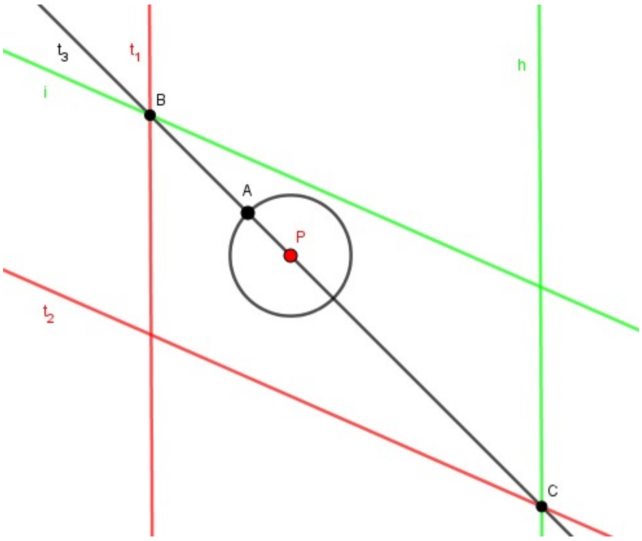


**Figura** 4.43: (PRR). Rectas $i \parallel t_2$ y $h \parallel t_1$.

Ubicamos el punto $D$ de intersección de las rectas $i$ y $h$, luego creamos la recta $\overleftrightarrow{DP} = f$. (Figura 4.44).

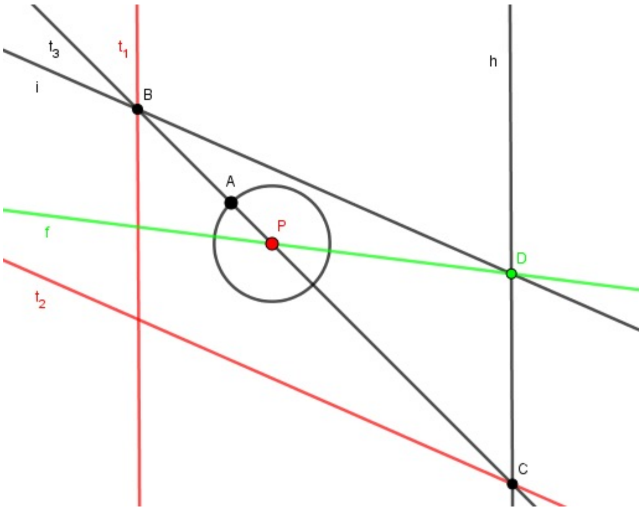


**Figura** 4.44: (PRR). $\overleftrightarrow{DP} = f$.

Seguidamente trazamos la recta $j \parallel f$ por $B$ y señalamos el punto $E$ como intersección de las rectas $j$ y $h$. (Figura 4.45).

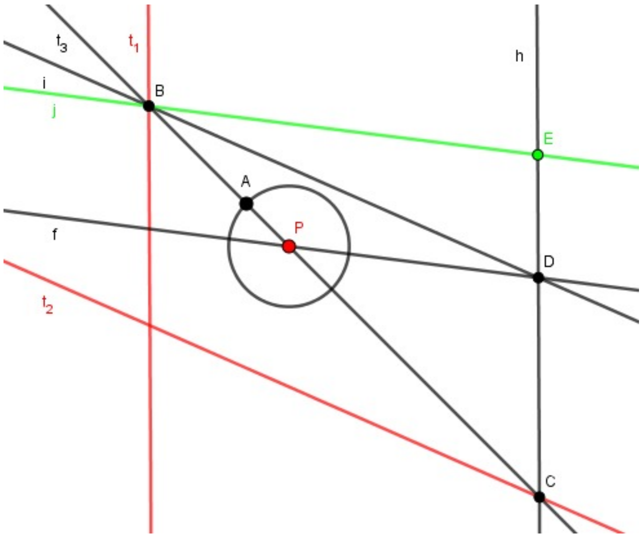


**Figura** 4.45: (PRR). Recta $j \parallel f$.

Construimos la recta $k \parallel t_2$ y encontramos el punto de intersección $T_2$ entre las rectas $t_1$ y $k$. (Figura 4.46).

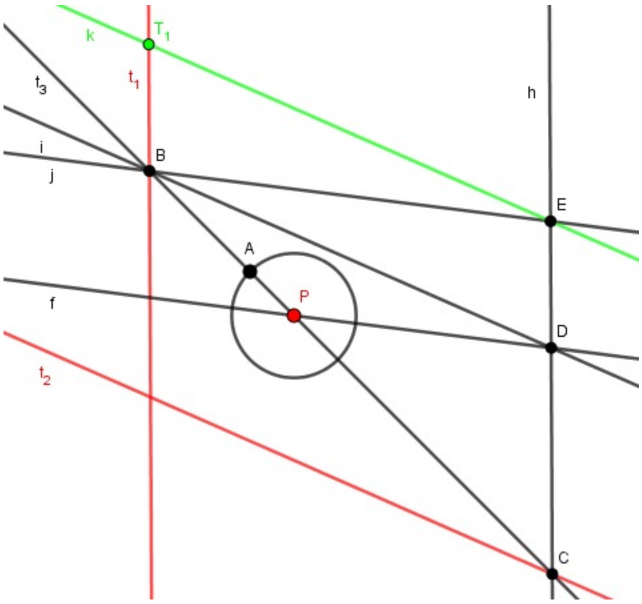


**Figura** 4.46: (PRR). Recta $k \parallel t_2$.

De igual manera, construimos la recta $g \parallel f$ por $C$, marcamos el punto de intersección $G$ entre las rectas $i$ y $g$, luego creamos la recta $p \parallel t_1$ por $G$ y también se determina el punto de intersección $T_2$ de las rectas $t_2$ y $p$. (Figura 4.47).

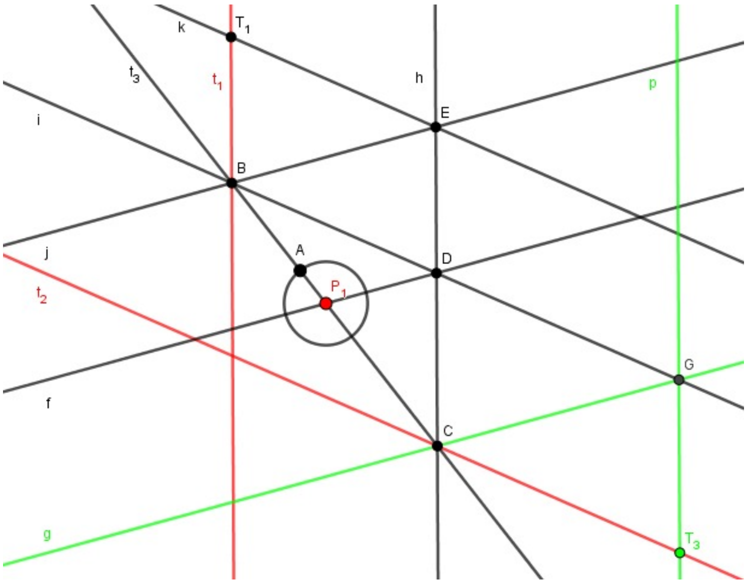


**Figura** 4.47: (PRR). Rectas $g \parallel f$ por $C$.

Finalmente, recurrimos al caso $PPP$ construimos la parábola $k$ por $T_1$, $P$ y $T_2$ y dirección la recta $f$, también podríamos emplear cualquiera de los dos casos: $RRR$ siendo las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$ y el punto de tangencia $P$; o $RRR$ con las mismas rectas y la dirección $f$.

En este ejemplo usamos el primer caso. (Figura 4.48).

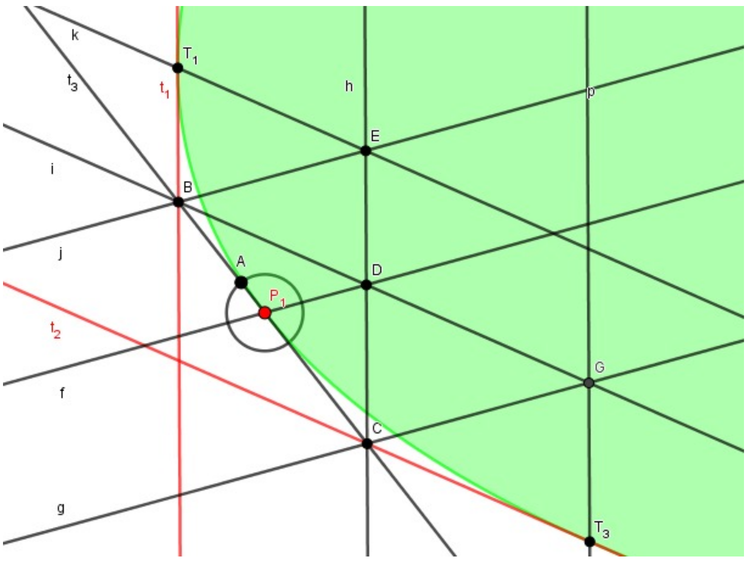


**Figura** 4.48: (PRR). Parábola $k$ tangente a $t_1$, $t_2$ y contiene el punto $P$.

Es posible ver las diferentes soluciones moviendo el punto $A$ sobre la circunferencia $c$. Para ello creamos un aplicación en GeoGebra. (Aplicativo.5.8.1).

### 4.3.1. Otra solución al problema (PRR)

Dado el punto $P$ y las rectas $t_1$ y $t_2$, con $P \notin$ t$_1$ y $t_2$, existe al menos una parábola $k$, tal que $t_1$ y $t_2$ son tangentes a $k$ y contiene a $P$.

Dado el punto $P$ y las rectas $t_1$ y $t_2$, con $P \notin$ t$_1$ y $t_2$. (Figura 4.49).

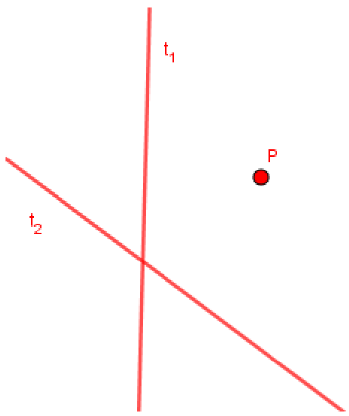


**Figura** 4.49: (PRR). Punto $P$ y rectas $t_1$ y $t_2$.

Sea $A$ el punto de intersección entre las rectas $t_1$ y $t_2$, construimos la recta $a$ perpendicular a $t_2$ por $A$. (Figura 4.50).

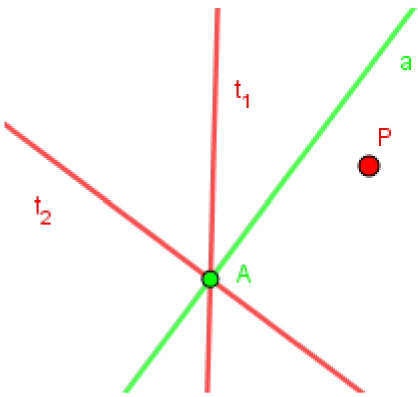


**Figura** 4.50: (PRR). Recta $a$ perpendicular a $t_2$ por $A$.

Ubicamos el punto $B \neq A$ sobre la recta $a$ y $C$ la proyección ortogonal de $B$ en la recta $t_1$. (Figura 4.51).

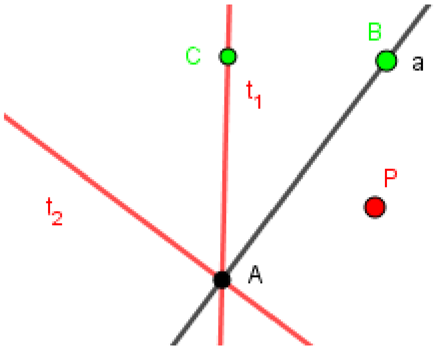


**Figura** 4.51: (PRR). Punto $C$ proyección ortogonal de $B$ en la recta $t_1$.

De igual manera, marcamos la proyección ortogonal de $P$ en la recta $t_1$ y se halla $M$ punto medio de $\overline{CD}$. (Figura 4.52).

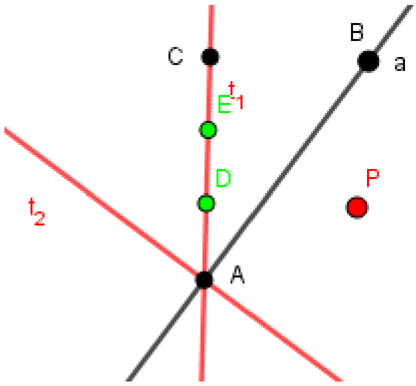


**Figura** 4.52: (PRR). $M$ punto medio de $\overline{CD}$.

A partir de los puntos $A$, $B$ y $E$ construimos una circunferencia $c$ que pasa por dichos puntos. (Figura 4.53).

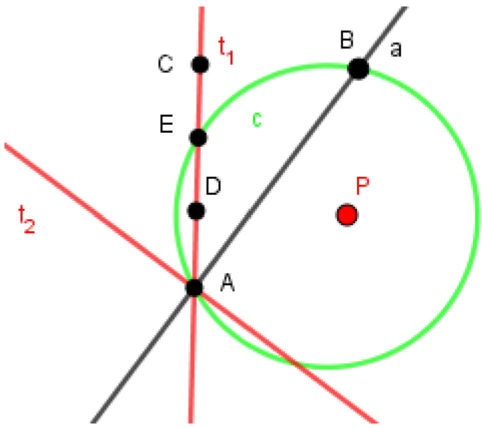


**Figura** 4.53: (PRR). Circunferencia que pasa por los puntos $A$, $B$ y $E$.

Ahora trazamos $\overleftrightarrow{EP} = b$ y marcamos el punto $L \neq E$, punto de intersección con la circunferencia $c$. (Figura 4.54).

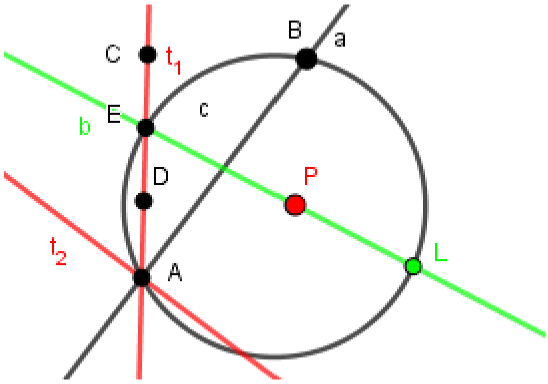


**Figura** 4.54: (PRR). $\overleftrightarrow{EP}$.

Luego ubicamos $N$ punto de intersección entre las rectas $a$ y $\overleftrightarrow{DP}$, después construimos la circunferencia $d$ que pasa por tres puntos $L$, $P$, $N$. (Figura 4.55).

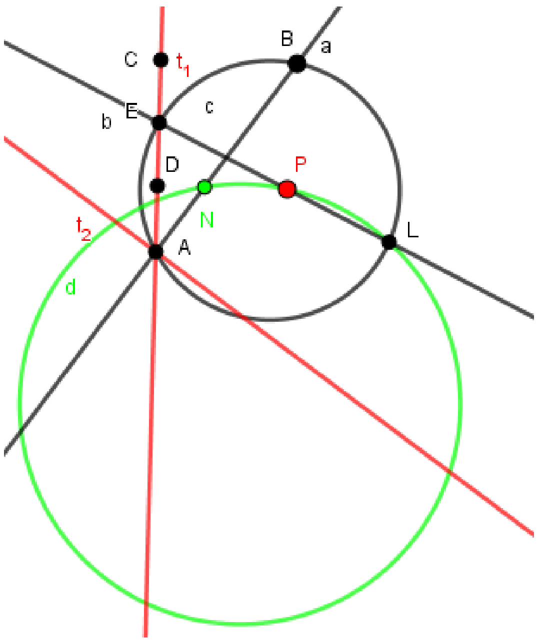


**Figura** 4.55: (PRR). Circunferencia $d$.

Esta circunferencia $d$ nos determina dos puntos de intersección con la recta $t_2$, $U$ y $V$. (Figura 4.56).

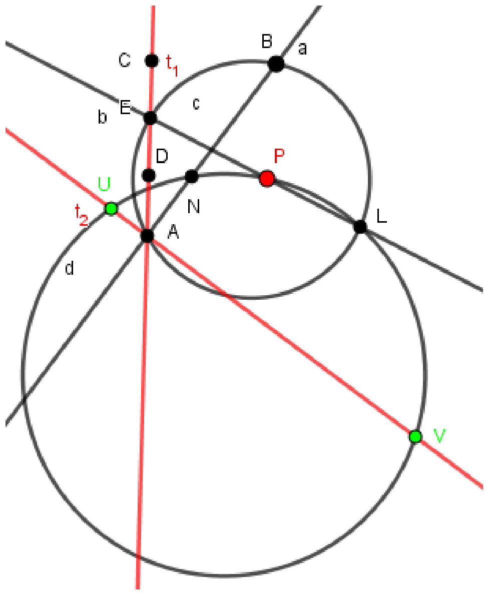


**Figura** 4.56: (PRR). Puntos de intersección $U$ y $V$.

Seguidamente trazamos las rectas $\overleftrightarrow{UP} = h$ y $\overleftrightarrow{VP} = j$ y los puntos $G$, $H$ las intersecciones con $t_1$ respectivamente. (Figura 4.57).

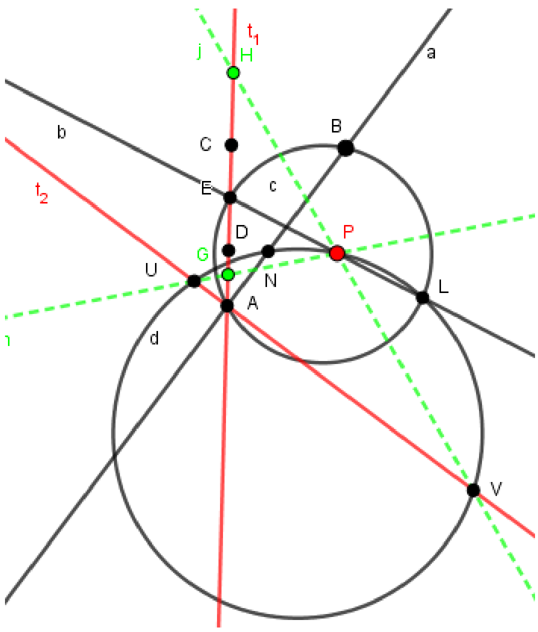


**Figura** 4.57: (PRR). Rectas $\overleftrightarrow{UP}$ y $\overleftrightarrow{VP}$.

Creamos $\odot H_{HD} = e$ y determinamos el punto de intersección $I \neq D$ con la recta $t_1$. (Figura 4.58).

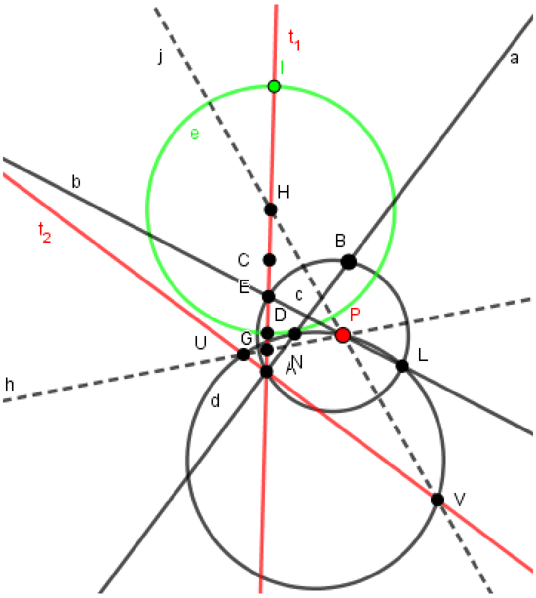


**Figura** 4.58: (PRR). $\odot$ $H_{HD}$.

Construimos la recta $k$ perpendicular a $t_1$ por $I$ y ubicamos el punto $F_1$ en la intersección de las rectas $k$ y $a$. (Figura 4.59).

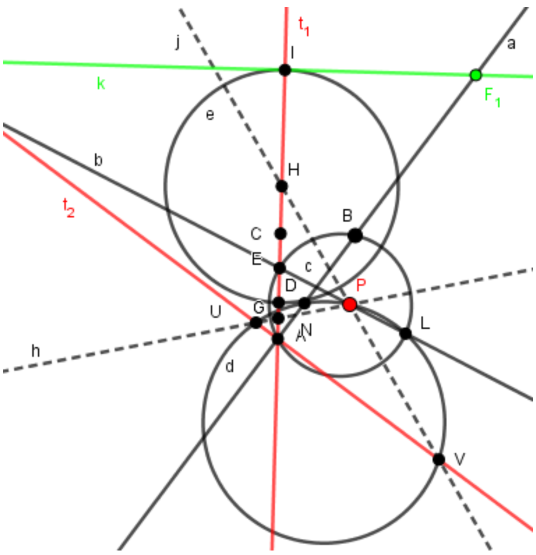


**Figura** 4.59: (PRR). Recta $k$ perpendicular a $t_1$.

Después marcamos $F'_1$ punto simétrico de $F_1$ respecto a la recta $t_1$ y trazamos la recta $d$ perpendicular a la recta $k$. (Figura 4.60).

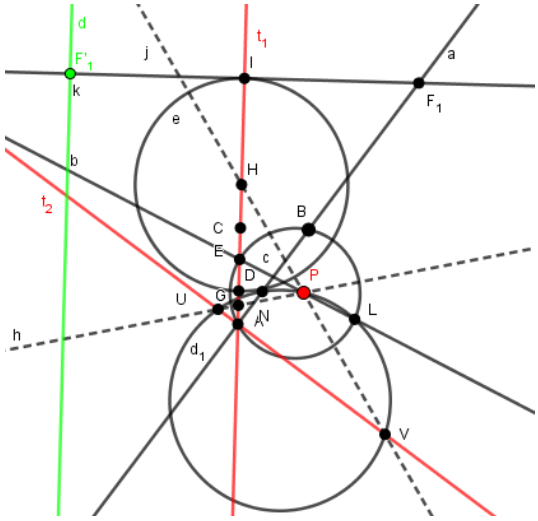


**Figura** 4.60: (PRR). Recta $d$ perpendicular a la recta $k$.

Luego, construimos la parábola $k_1$ con foco $F_1$ y directriz $d$. (Figura 4.61).

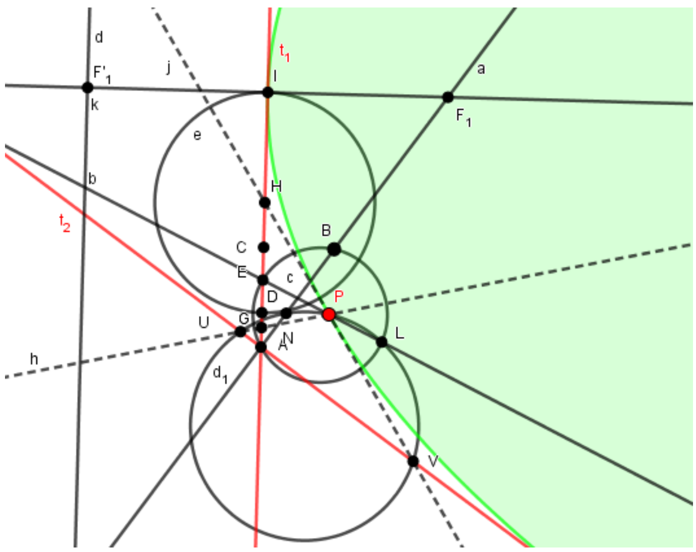


**Figura** 4.61: (PRR). Parábola $k_1$ tangente a $t_1$, $t_2$ y contiene el punto $P$.

De igual manera, creamos $\odot\ G_{GD} = r$ y se determina el punto de intersección $K \neq D$ con la recta $t_1$. (Figura 4.62).

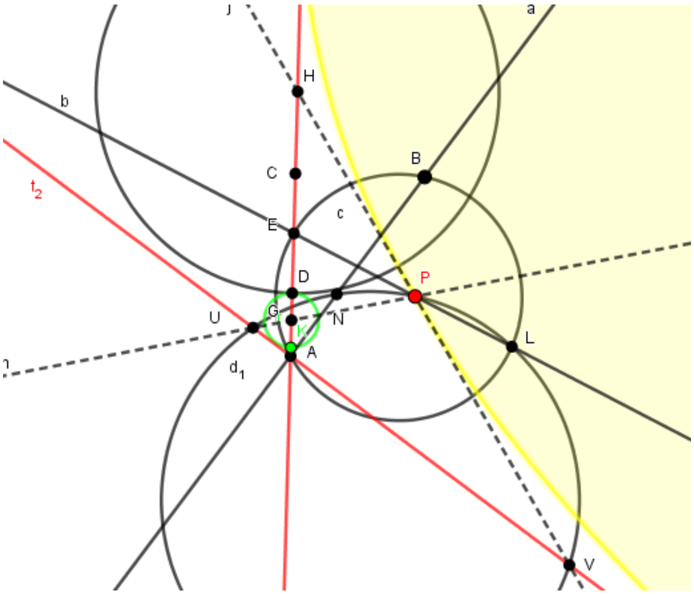


**Figura** 4.62: (PRR). $\odot\ G_{GD}$.

Construimos la recta $m$ perpendicular a $t_1$ por $K$ y ubicamos el punto $F_2$ en la intersección entre las rectas $m$ y $a$. (Figura 4.63).

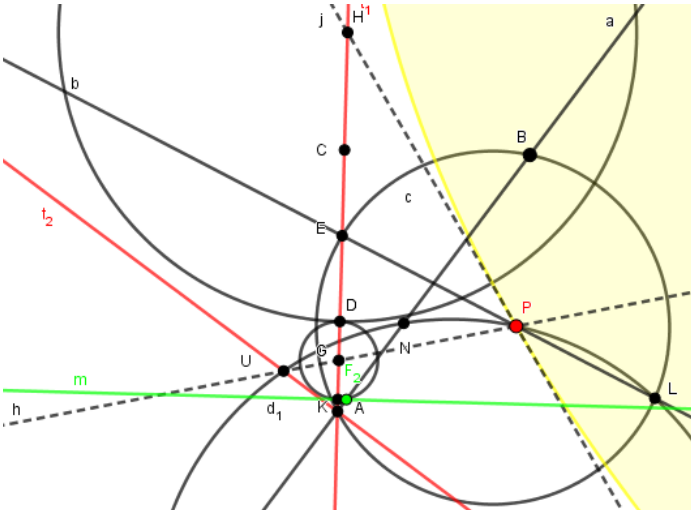


**Figura** 4.63: (PRR). Recta $m$ perpendicular a $t_1$.

Marcamos el punto $F'_2$ simétrico a $F_2$ respecto a la recta $t_1$ y trazamos la recta $d_1$ perpendicular a la recta $m$. (Figura 4.64).

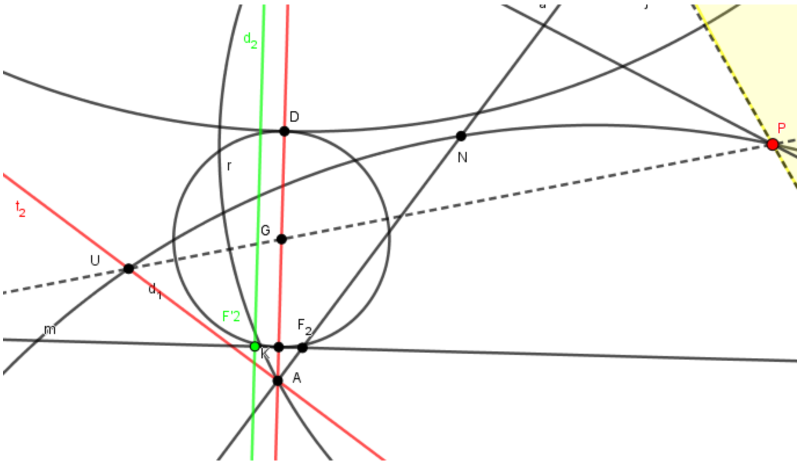


**Figura** 4.64: (PRR). Recta $d_1$ perpendicular a la recta $m$.

Construimos la parábola $k_2$ con foco $F_2$ y directriz $d_2$. (Figura 4.65).

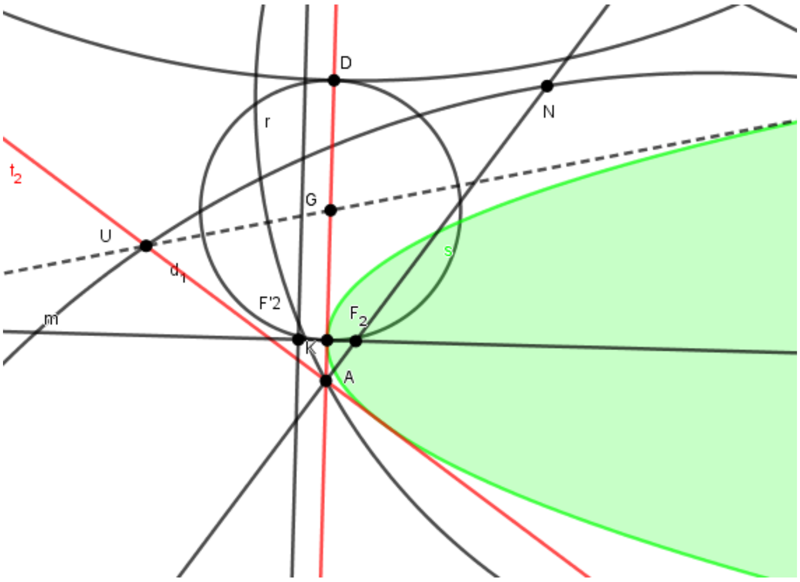


**Figura** 4.65: (PRR). Parábola $k_2$ tangente a $t_1$, $t_2$ y contiene el punto $P$.

De manera análoga, se construyen las parábolas $k_3$ y $k_4$ partiendo de la recta perpendicular a la recta $t_1$ por el punto $A$ de intersección entre las rectas $t_1$ y $t_2$. (Figura 4.66).

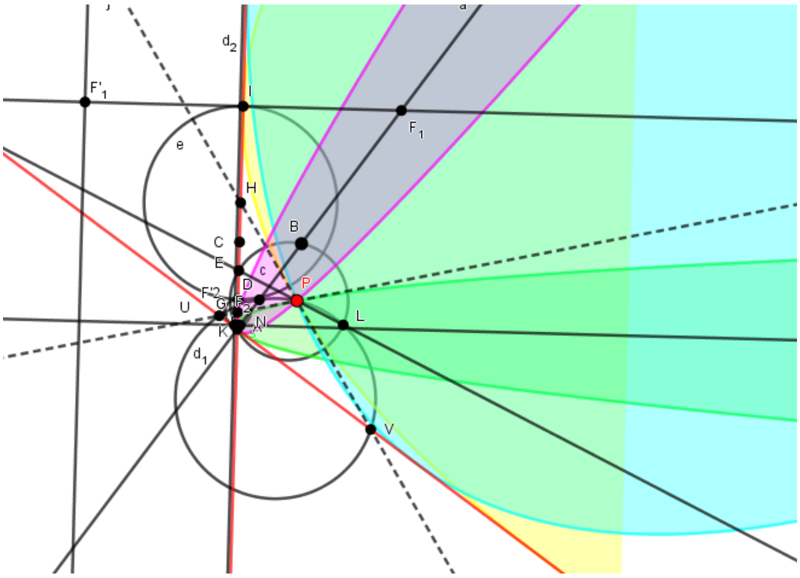


**Figura** 4.66: (PRR). Parábolas $k_3$ y $k_4$.

Con el proposito de obtener una mejor visualización de las soluciones, ocultamos los elementos construidos, como se observa en la Figura 4.67.

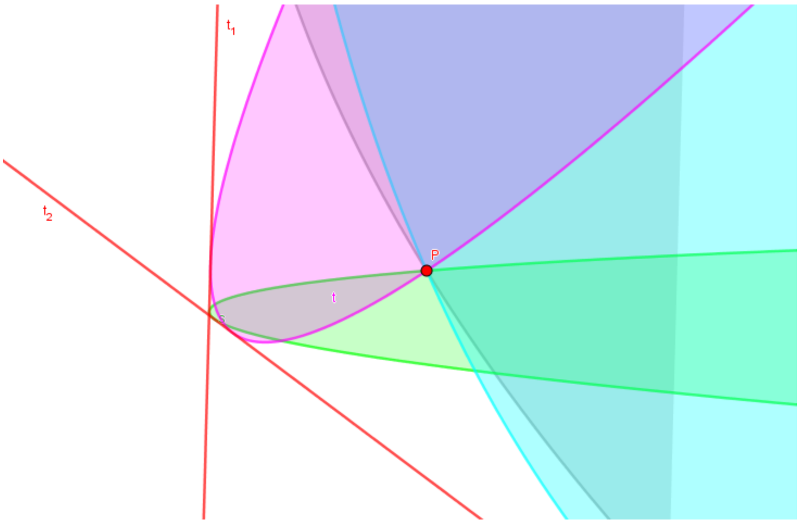


**Figura** 4.67: (PRR). Parábolas $k_1$, $k_2$, $k_3$ y $k_4$.

## 4.4. Parábola que contiene dos puntos y es tangente a una recta (PPR)

Dados los puntos $P_1$, $P_2$ y la recta $t_3$, con $P_1$ y $P_2$ pertenecen al mismo semiplano determinado por la recta $t_3$, existe al menos una parábola, tal que

$t_3$ es tangente a $k$ y contiene a $P_1$, $P_2$.

Dados los puntos $P_1$, $P_2$ y la recta $t_3$, con $P_1$ y $P_2$ pertenecen al mismo semiplano determinado por la recta $t_3$. (Figura 4.68).

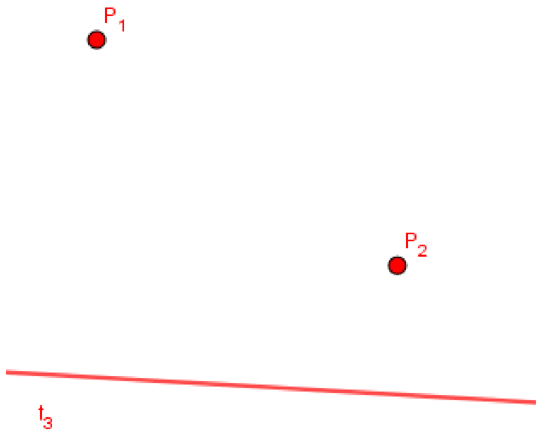


**Figura** 4.68: (PPR). Puntos $P_1$, $P_2$ y la recta $t_3$.

Sea $P_3$ un punto en la recta $t_3$, construimos la recta por dos puntos $\overleftrightarrow{P_1P_3} = h$. (Figura 4.69).

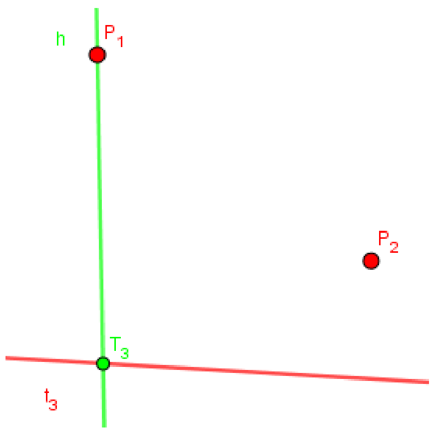


**Figura** 4.69: (PPR). $\overleftrightarrow{P_1P_3}$.

Creamos la recta $\overleftrightarrow{P_1P_2} = i$ y la recta $j \parallel i$ por $T_3$. (Figura 4.70).

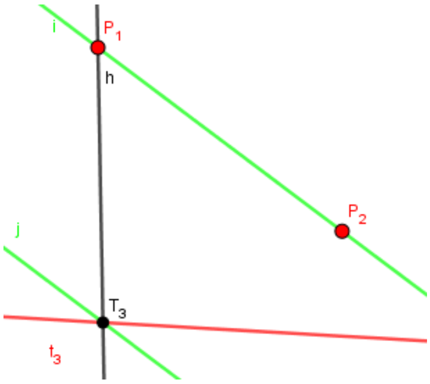


**Figura** 4.70: (PPR). Rectas $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ y recta $j \parallel i$.

Apartir de los puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$ se construye una circunferencia $c$ que los contenga. (Figura 4.71).

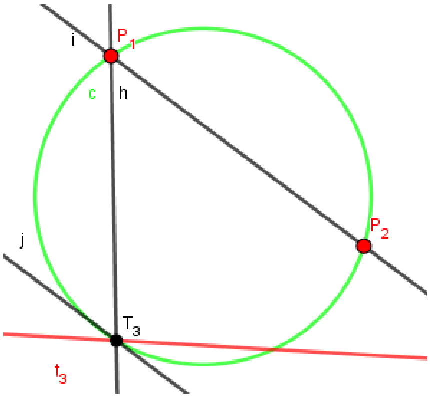


**Figura** 4.71: (PPR). Circunferencia que contiene los puntos $T_1$, $T_2$ y $T_3$.

Determinamos los puntos de intersección $C$ y $D$ de la circunferencia $c$ con las rectas $j$ y $t_3$ de manera correspondiente. (Figura 4.72).

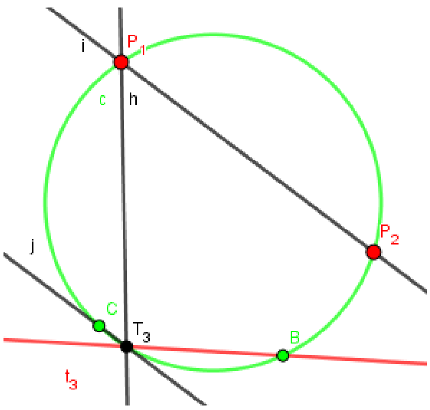


**Figura** 4.72: (PPR). Puntos de intersección $C$ y $D$.

Ahora, trazamos las rectas $\overleftrightarrow{P_1B} = l$ y $\overleftrightarrow{P_2C} = m$ y el punto de intersección $D$ de estas dos rectas. (Figura 4.73).

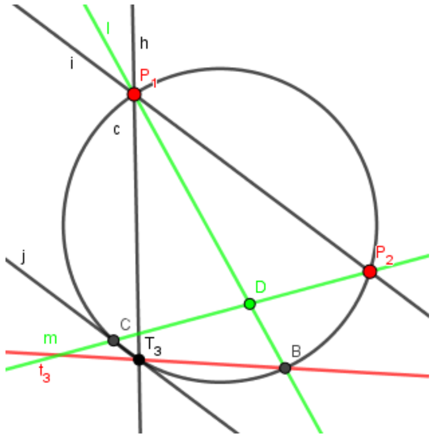


**Figura** 4.73: (PPR). Rectas $\overleftrightarrow{P_1B}$ y $\overleftrightarrow{P_2C}$.

Luego, construimos las rectas $\overleftrightarrow{P_1C} = p$ y $\overleftrightarrow{P_2B} = n$ con el punto de intersección $E$ entre estas rectas. (Figura 4.74).

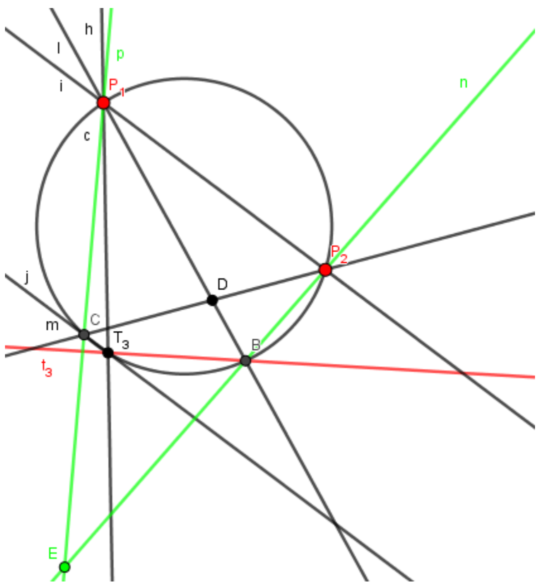


**Figura** 4.74: (PPR). Rectas $\overleftrightarrow{P_1C}$ y $\overleftrightarrow{P_2B}$.

Seguidamente, creamos la recta $\overleftrightarrow{ED} = q$, siendo la recta que determina dos puntos de intersección $M$ y $L$ con la circunferencia $c$, los cuales van a determinar las posibles direcciones que va a tener las parábolas solución. (Figura 4.75).

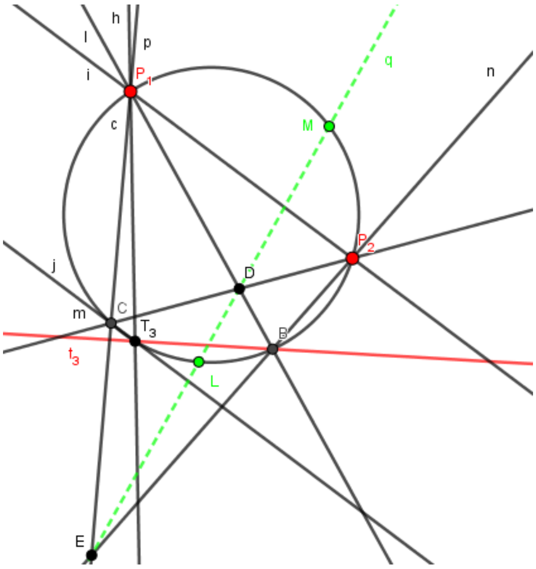


**Figura** 4.75: (PPR). Recta $\overleftrightarrow{ED}$.

Trazamos las rectas $\overleftrightarrow{MT_3} = f_1$ y $\overleftrightarrow{LT_3} = f_2$. (Figura 4.76).

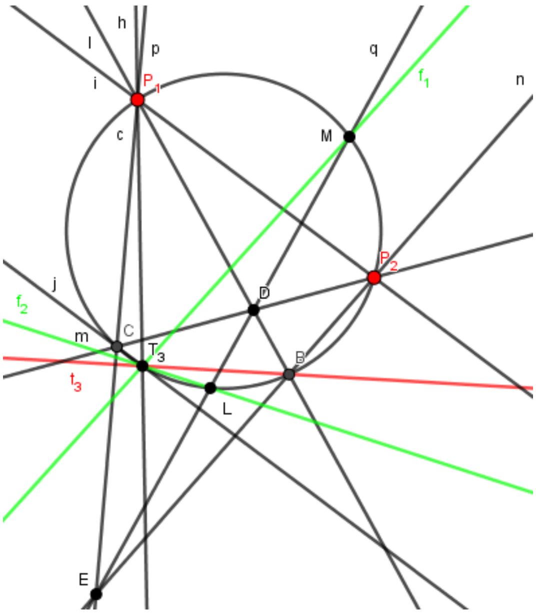


**Figura** 4.76: (PPR). Rectas $\overleftrightarrow{MT_3}$ y $\overleftrightarrow{LT_3}$.

Finalmente, construimos la parábola $k_1$ que pasa por los puntos $P_1$, $P_2$, $T_3$ y con dirección $f_1$ y $k_2$ parábola por $P_1$, $P_2$ y $T_3$ y dirección $f_2$. (Figura 4.77).

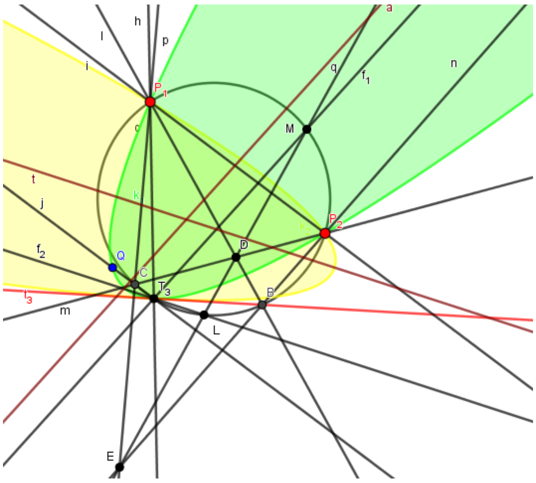


**Figura** 4.77: (PPR). Parábolas $k_1$ y $k_2$ tangentes a la recta $t_3$ y contienen los puntos $P_1$, $P_2$.

Para este caso existen distintas parábolas solución moviendo $T_3$ sobre la recta $t_3$, para evidenciar dichas soluciones creamos una aplicación en GeoGebra. (Aplicativo.5.9).

# Capítulo 5

# UN PASO A LA INFINIDAD CON GEOGEBRA

El software interactivo GeoGebra nos permitió tener una visualización amplia y acertada para la solución de los problemas propuestos, posibilitando la conjeturación de los posibles casos solución de dichos problemas. Por otra parte, mediante este software logramos mostrar que hay muchas soluciones que cubren el plano donde se encuentran los elementos y por lo tanto intuimos que hay infinitas soluciones en cada caso, haciendo uso de la opción animación de un objeto geométrico contenido en otro. Dado lo anterior, en este capítulo mostraremos cada una de las aplicaciones creadas con este software y su respectiva animación para evidenciar las soluciones respectivamente.

## 5.1. Aplicativo Punto (P)

Para la solución a este problema se realizaron los pasos de construcción anteriormente mencionados (2.1) creando la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/acthq47v , en esta se pueden observar las parábolas solución que contienen el punto dado $P$, para evidenciar estas soluciones movemos $B$ en la $\odot \mathrm{P}_{PF}$, cumpliendo que $P$ pertenezca a dichas parábolas. (Figura. 5.1).

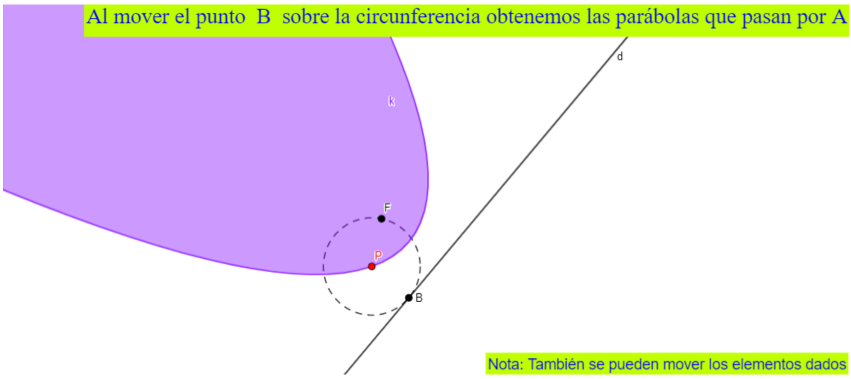


**Figura** 5.1: (P).Aplicativo Parábolas solución

## 5.2. Aplicativo Recta (R)

La solución a este problema se dió mediante la construcción anteriormente mencionada (R.2.2), creando la aplicación que se encuentra en la pagina: https://www.geogebra.org/m/pckezgdb en esta se pueden observar las parábolas solución que son tangentes a la recta dada $t$. Para evidenciar estas soluciones animamos $F$ sobre la recta $e$. (Figura 5.2).

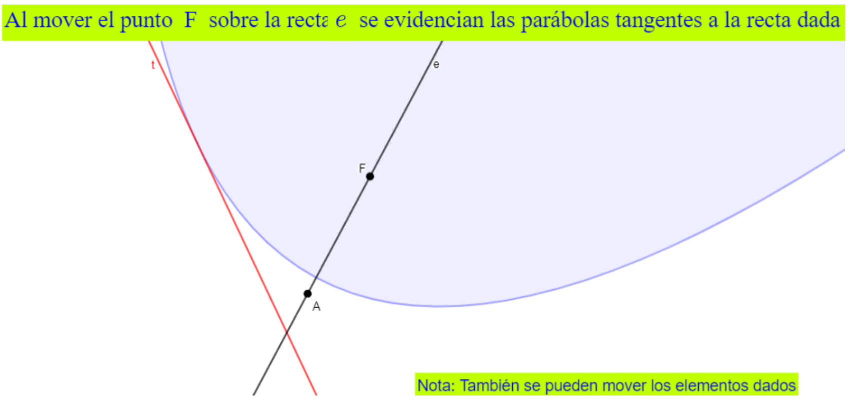


**Figura** 5.2: (R).Aplicativo Parábolas solución

## 5.3. Aplicativo dos Puntos (PP)

Teniendo en cuenta los pasos de la construcción (PP.3.1) para la solución a este problema, se creó la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/cxtgtjkm, en esta se pueden observar las parábolas solución que contienen los puntos $P_1$ y $P_2$, para ello se modifica el radio de las circunferencias con centro en $P_1$ y $P_2$ respectivamente, movimiento los deslizadores que se encuentran en la construcción. (Figura 5.3).

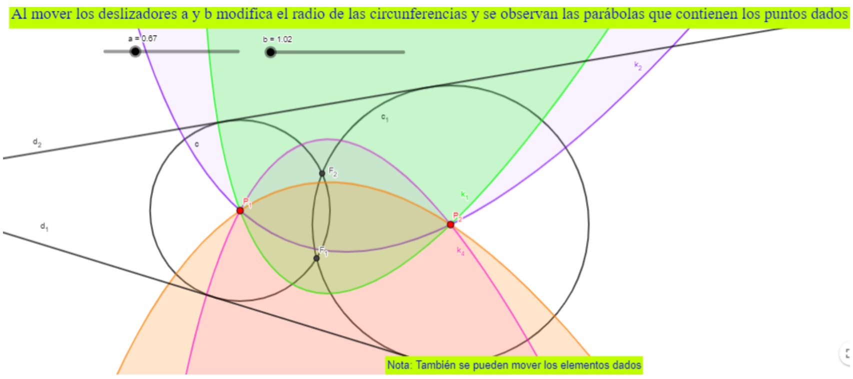


**Figura** 5.3: (PP).Aplicativo Parábolas solución

## 5.4. Aplicativo dos Rectas (RR)

En este problema (RR. 3.2), se realizó la construcción solución mencionada con anterioridad, para esta se creó la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/pqpsfdwj, en ella se pueden observar las parábolas solución que son tangentes a las rectas $t_1$ y $t_2$. Para evidenciar las parábolas solución que son tangentes a las rectas dadas, movemos el punto $F$. (Figura 5.4).

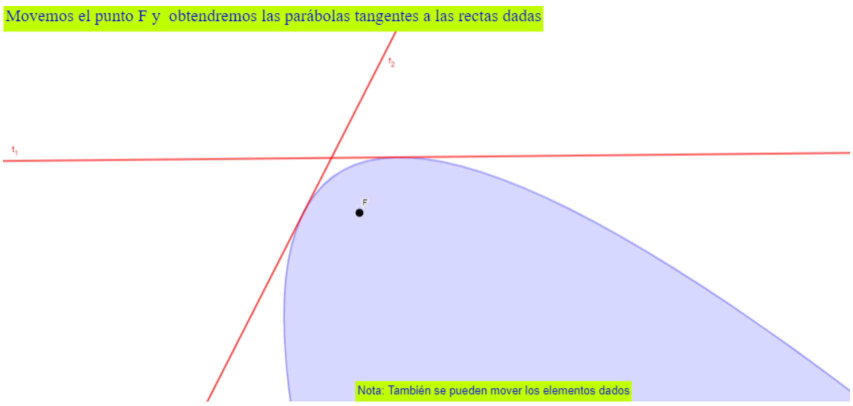


**Figura** 5.4: (RR).Aplicativo Parábolas solución

## 5.5. Aplicativo un Punto, una Recta (RP)

Para la solución a este problema se realizaron los pasos de construcción anteriormente mencionados (RP. 3.3) creando la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/jrb59z9p , en esta se pueden observar las parábolas solución que contienen el punto dado $P$ y la recta $t$;

para evidenciar estas soluciones movemos el punto $B$, sobre la recta $t$. (Figura 5.5).

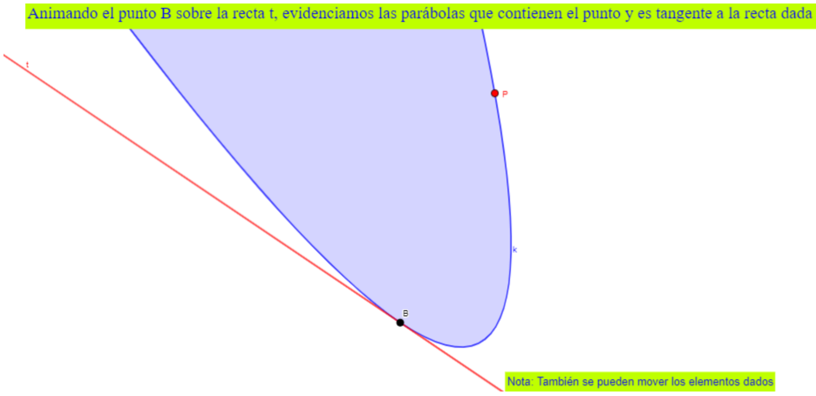


**Figura** 5.5: (PR).Aplicativo Parábolas solución

## 5.6. Aplicativo tres Puntos (PPP)

La solución a este problema se dió mediante la construcción que se mencionó con anterioridad (PPP. 4.1) creando la aplicación que se encuentra en la pagina: https://www.geogebra.org/m/wwd5aktd, en esta se pueden observar las parábolas solución que contienen los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$. Para evidenciar estas soluciones movemos la dirección $f$. (Figura 5.6).

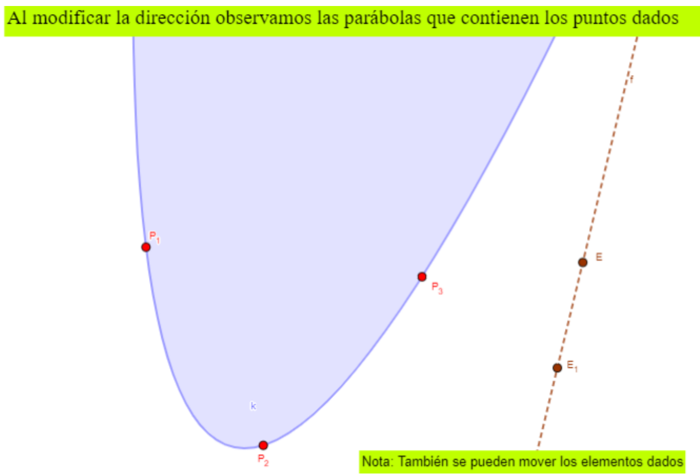


**Figura** 5.6: (PPP).Aplicativo Parábolas solución

## 5.7. Aplicativo tres Rectas (RRR)

Teniendo en cuenta la construcción que realizamos para encontrar solución al problema RRR.4.2, creamos una aplicación que se encuentra en la pagina: https://www.geogebra.org/m/frvt2bgk, en ella se pueden observar las parábolas que son tangentes a las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$, para evidenciar dichas soluciones movemos la dirección $f$.(Figura 5.7).

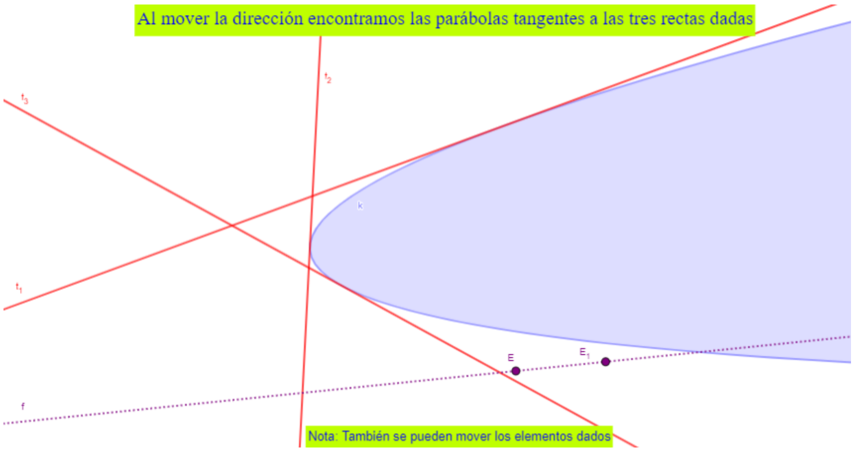


**Figura** 5.7: (RRR).Aplicativo Parábolas solución

### 5.7.1. Aplicativo construcción alterna tres Rectas (RRR)

Dada la construcción alterna que realizamos para encontrar solución al problema RRR.4.2, creamos una aplicación que se encuentra en la pagina: https://www.geogebra.org/m/pjzpmgda, en ella se pueden observar las parábolas que son tangentes a las rectas $t_1$, $t_2$ y $t_3$, para evidenciar las parábolas solución movemos el punto $T_1$ sobre la recta $t_1$.(Figura 5.8).

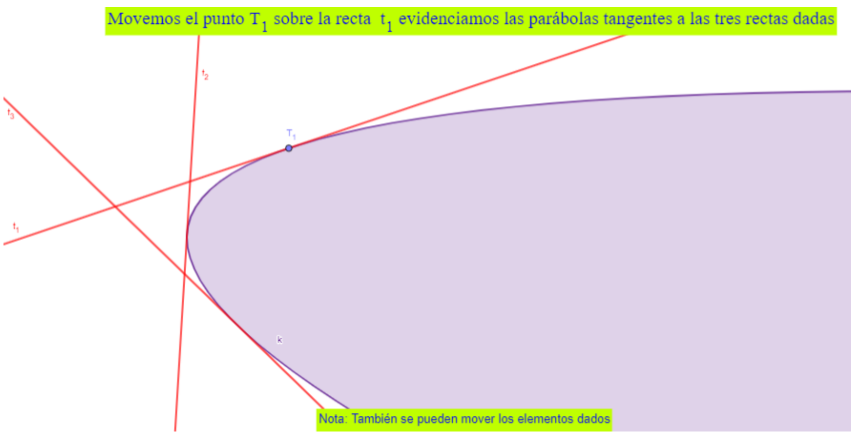


**Figura** 5.8: (RRR).Aplicativo Parábolas solución

## 5.8. Aplicativo dos Rectas y un Punto (PRR)

Para la solución a este problema se realizaron los pasos de la construcción mencionada con anterioridad (4.3) creando la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/jpbbkp6q, en esta se pueden observar las parábolas que contienen el punto dado $P$ y son tangentes a las rectas $t_1$ y $t_2$, para evidenciar estas soluciones movemos el punto $A$ sobre la circunferencia $c$. (Figura 5.9).

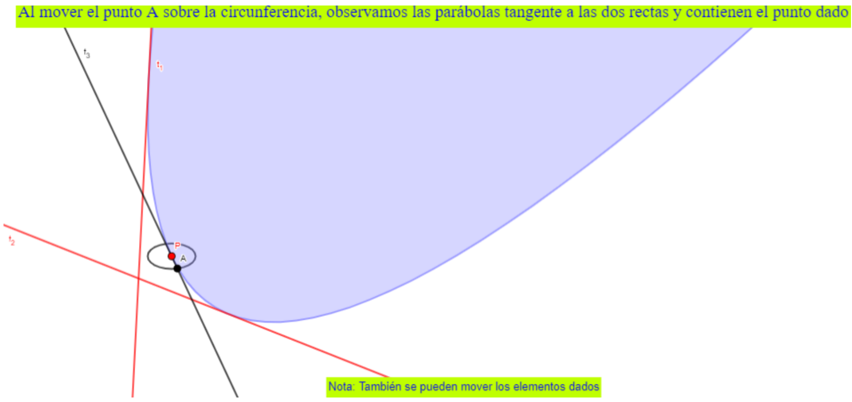


**Figura** 5.9: (PRR).Aplicativo Parábolas solución

### 5.8.1. Aplicativo Construcción alterna dos rectas y un punto (PRR)

Teniendo en cuenta los pasos de la construcción (PRR.4.3) para la solución a este problema, se creó la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/mfyjcu5c, en esta se pueden observar cuatro parábolas solución que contienen el punto $P$ y son tangentes a las rectas $t_1$ y $t_2$.(Figura 5.10).

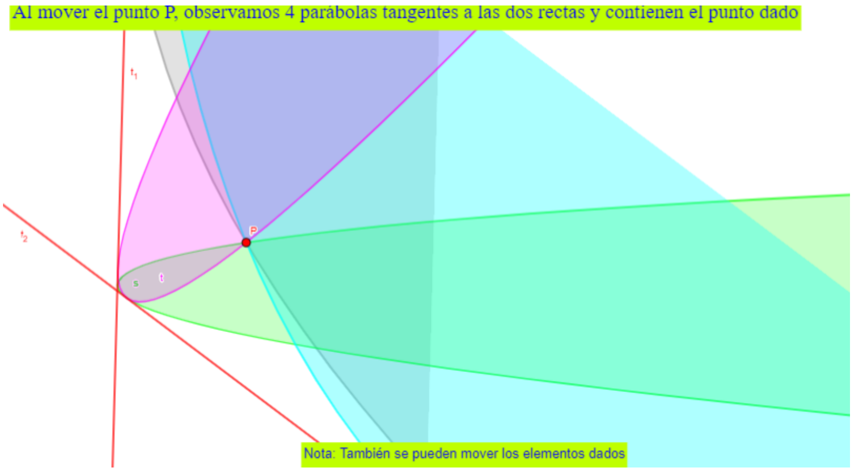


**Figura** 5.10: (PRR).Aplicativo cuatro Parábolas solución construcción alterna

## 5.9. Aplicativo dos Puntos, una Recta (PPR)

Para la solución a este problema tuvimos encuenta los pasos de la construcción PPR.4.4, de esta manera creamos la aplicación que se encuentra en la página: https://www.geogebra.org/m/dbhyzxnh, en esta se pueden observar las parábolas que contienen los puntos $P_1$, $P_2$ y la recta $t_3$; para evidenciar estas soluciones movemos $T_3$ sobre la recta $t_3$.(Figura 5.11).

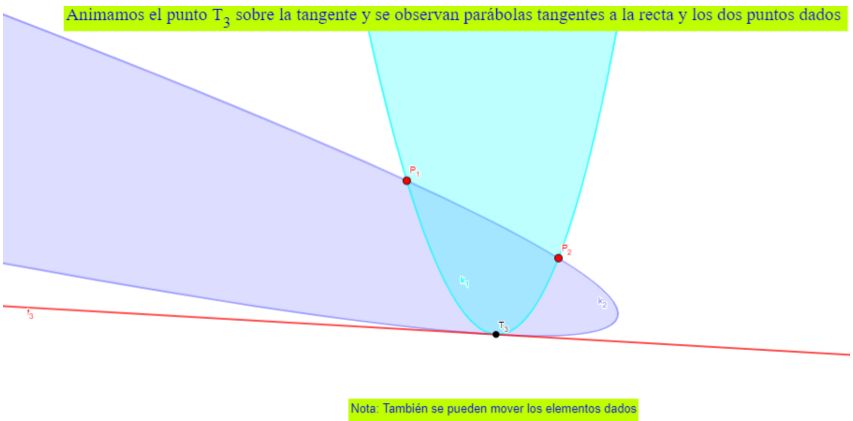


**Figura** 5.11: (PPR).Aplicativo Parábolas solución

# CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En este trabajo logramos cumplir con nuestro objetivo general de encontrar las parábolas solución a los nueve problemas planteados (Tabla. 1), logrando así cumplir con nuestro primer obejtivo especifico de adquirir nuevo conocimiento sobre tangencia en parábolas apartir del estudio de algunos referentes teóricos como los problemas de Apolonio y el trabajo de Henao y Rincón, estos dieron pie al planteamiento de nuestro trabajo de grado, puesto que en dichos documentos empleaban puntos y rectas, como elementos dados para encontrar la cónica que contenga o sea tangente a estos; sin embargo, decidimos variar la cantidad de elementos dados.

A medida que se fue desarrollando el trabajo, se evidenciaron dificultades para la comprensión y elaboración de algunas construcciones solución en GeoGebra, debido a la gran cantidad de objetos que se empleaban en cada construcción, sin embargo, estas situaciones fueron superadas al establecer un convenio de colores, permitiendo caracterizar algunos elementos con un mismo color, como lo era los elementos dados que se mantenían de color rojo, ya que de esta manera se lograban identificar claramente para las construcciónes y lograr evidenciar que las soluciones encontradas cumplieran las condiciones dadas; De esta manera se cumplió con nuestro segundo objetivo especifico de realizar exploraciones mediante GeoGebra que nos permitieron establecer relaciones como las mencionadas. También fue importante el uso de la simbología, puesto que permitía asociar los elementos de acuerdo a su significado, por ejemplo, al construir las diferentes rectas tangentes se nombraban como $t$, $t_1$, $t_2$, etc, permitiendo identificar en la construcción dichas rectas tangentes; por lo anterior la implementación de colores y simbologia para caracterizar distintos procesos es un buen método para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el campo de las matemáticas muchas veces nos enfrentamos a constantes frustraciones, puesto que no vemos con facilidad la salida o en su defecto la solución a los problemas planteados, como en el desarrollo de este trabajo de grado, ya que en principio no encontrabamos una posible construcción solución a los problemas planteados (Tabla. 1) sin embargo, la actividad investigativa nos permitió llegar a las construcciones solución estableciendo nuevas rutas de trabajo, por ejemplo, en el problema dados tres puntos (Problema. 4.1), en principio buscamos dar solución de manera análoga al problema dados dos puntos, pero carecíamos de elementos para hallar una misma recta tangente a tres circunferencias, en tanto, buscamos otros caminos que nos permitieran dar solución a este problema, logrando cumplir con nuestros tercer objetivo especifico.

Por otra parte, los cursos de geometría que tomamos en la universidad nos dieron herramientas para el desarrollo del trabajo de grado; tales herramientas fueron: conceptos asociados a parábolas, conjeturación de problemas y justificación de los mismos, entre otros; lo anterior permitió cumplir los objetivos planteados.

Logramos evidenciar que la formación académica brindada por parte de la Universidad Pedagógica Nacional, permite profundizar en contenidos matemáticos que no han sido objeto de estudio durante la carrera, además la Universidad permite trabajar con el software GeoGebra en los distintos cursos brindados en la licenciatura, en estos podemos caracterizar y representar objetos matemáticos, a su vez realizar conjeturas apartir de dichas representaciones.

A continuación, presentamos los problemas y resultados obtenidos, de este trabajo de grado.

| Cantidad de elementos | Problema | Condiciones de los elementos dados | Condiciones de la construcción solución | Número de soluciones |
|---|---|---|---|---|
| Un elemento | Dado un punto encontrar la parábola que lo contenga | NA | El punto dado no puede ser el foco de la parábola solución | Infinitas |
| | Dada una recta encontrar la parábola tangente a ella | NA | La recta dada no puede ser la directriz de la parábola y la recta construida $e$ no puede ser paralela a recta dada | Infinitas |
| Dos elementos | Dados dos puntos encontrar la parábola que los contenga | Los puntos deben ser diferentes | Ninguno de los puntos dados puede ser el foco y las circunferencias creadas con centro en los puntos dados se deben intersecar | Infinitas |
| | Dadas dos rectas encontrar la parábola tangente a ellas | Las rectas no pueden ser paralelas | El punto cualquiera $F$ en la construcción no puede pertenecer a las rectas dadas | Infinitas |
| | Dado un punto y una recta encontrar la parábola tangente a la recta y que contenga el punto dado | El punto no puede pertenecer a la recta | El punto dado no puede pertenecer a la recta auxiliar $\overline{AB}$ de la construcción | Infinitas |
| Tres elementos | Dados tres puntos encontrar la parábola que los contenga | Los puntos deben ser no colineales | NA | Infinitas |
| | Dadas tres rectas encontrar la parábola tangente a ellas | Las rectas no pueden ser paralelas dos a dos | NA | Infinitas |
| | Dado un punto y dos rectas encontrar la parábola que contenga el punto y sea tangente a las rectas dadas | Las rectas dadas no pueden ser paralelas | El punto dado no puede pertenecer a las rectas dadas | Infinitas |
| | Dados dos puntos y una recta encontrar la parábola que contenga los dos puntos y sea tangente a la recta dada | Los puntos deben ser diferentes | Los puntos dados deben pertenecer al mismo semiplano determinado por la recta dada | Infinitas |

# Bibliografía


[1] Almeida, R., Espinosa, E., Guzman, E., Montesdeoca, A., Noda, J. (2015). Construcción de cónicas. Obtenido de: https://amontes.webs.ull.es/geogebra/master/conicas.html#IPt_PC_p

[2] Euclides. (1991, trad.). Elementos. Libros I- IV (María Luisa Puertas, Tr.; con introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

[3] Henao, N. y Rincon, F. (2017). Del Problema de Apolonio a problemas de tangencias en otras secciones cónicas. Bogota, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

[4] Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. México.

[5] Samper, C. y Molina, O. (2013). Geometría plana un espacio de aprendizaje. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.


.