

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA
INTERPRETACIÓN ORTODOXA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
VERSUS LA REALISTA, CONSIDERANDO ESTADOS ENREDADOS
DE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS POR MEDIO DE UN
ALGORITMO EN MONTE CARLO

RAÚL SANTIAGO MORENO RINCÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
BOGOTÁ D.C.

2012

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA
INTERPRETACIÓN ORTODOXA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
VERSUS LA REALISTA, CONSIDERANDO ESTADOS ENREDADOS
DE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS POR MEDIO DE UN
ALGORITMO EN MONTE CARLO

RAÚL SANTIAGO MORENO RINCÓN

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Física

Director
Alberto Monroy Cañon

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
BOGOTÁ D.C.

2012

Nota de aceptación

Firma

Nombre:

Presidente del jurado

Firma

Nombre:

Jurado

Firma

Nombre:


Jurado

BOGOTÁ D.C., 3 de diciembre de 2012

*A Lucre por su paciencia y su apoyo;
A Nestin porque me enseñó a multiplicar y a dividir;
Y a Teresita, mi profesora de cuarto y quinto grado, porque es modelo a seguir en la
labor docente.*

AGRADECIMIENTOS


Un sincero agradecimiento al profesor Alberto Monroy, quien dirigió este trabajo de grado y siempre estuvo pendiente en el desarrollo de éste; al profesor Néstor Méndez por permitir llevar a cabo la implementación en su curso de “Métodos Numéricos y C++”; por último, a Réne Camacho, estudiante de doctorado de la universidad “Mississippi State”, quien colaboró en la búsqueda de información de los temas trabajados en este documento.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realidad en Formación</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 07-11-2012	Página 1 de 3

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una propuesta para la enseñanza de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica versus la realista considerando estados enredados de espines de dos partículas por medio de un algoritmo en Monte Carlo.
Autor(es)	Moreno Rincón, Raúl Santiago
Director	Monroy Cañón, Ignacio Alberto
Publicación	Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2012. 62 página
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ENSEÑANZA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA, INTERPRETACIÓN ORTODOXA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA, PARADOJA DE EPR, CORRELACIÓN ENTRE ESPINES, MÉTODO DE MONTE CARLO, SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

2. Descripción
<p>Se presenta una propuesta de enseñanza sobre la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica versus la realista para un sistema de estados enredados de espines de dos partículas. Se hace el uso de una herramienta computacional implementado un algoritmo con el método de Monte Carlo. A partir del algoritmo se obtiene la magnitud $E(\alpha)$ – índice de correlación – la cual determina la correlación de espines de las dos partículas para la interpretación ortodoxa versus la realista. Se presenta los resultados de la implementación de esta metodología en un curso del departamento de física de la UPN. Se compara los resultados de esta metodología con la tradicional.</p>

3. Fuentes
<p>Aspect, A., Grangier, P., & Roger, G. (1981). Experimental Test of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. <i>Physical Review Letters</i> (49), 460-463.</p> <p>Barbosa, L. (2008). Los Experimentos Discrepantes en el aprendizaje activo de la Física. <i>Lat. Am. J. Phys. Educ.</i> 2 (3), 246-252.</p> <p>Bell, J. (1964). On The Eintein Podolsky Rosen Paradox. <i>Physics</i> (1), 195-200.</p> <p>Bohm, D. (1979). <i>Quantum Theory</i>. New York: Dover Publications, Inc.</p> <p>Çahskan, S., Sezgin Selçuk, G., & Erol, M. (2009). Student Understanding of Some Quantum. <i>Lat. Am. J. Phys</i> , 3 (2).</p> <p>de la Torre, A. C. (2000). <i>Física Cuántica para Filo-sofos</i>. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.</p> <p>Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? <i>Physical Review</i> (47), 777-780</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 07-11-2012	Página 2 de 3

Kuttner, F., & Rosenblum, B. (2010). Bell's Theorem and Eistein's `Spooky Actions'from a Simple Thought Experimnt. *Phys. Teach.* , 124-130.

Laloë, F. (2001). Do we really understand quantum mechanics? Satrange correlations, paradoxes, and theorems. *American Journal Physics* , 655-701.

Scherer, P. (2010). *Computational Physics: Simulation of Classical and Quantum Systems*. München: Springer-Verlag

4. Contenidos

Partiendo de una problemática en la enseñanza de la mecánica cuántica, se propone trabajar en un simulación de correlación entre espines de dos partículas con la ayuda del método de Monte Carlo como una herramienta computacional para le enseñanza de la mecánica cuántica, específicamente en la interpretación ortodoxa.

1. INTERPRETACIÓN ORTODOXA Y REALISTA: LA PARADOJA DE EPR

La base teórica de la mecánica cuántica se apoya en la idea de probabilidad, idea originada de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica. La interpretación ortodoxa fue un conjunto de ideas acerca de la naturaleza y el comportamiento de la luz y la materia a nivel atómico, y los cuales tuvieron como retractares a los realistas quienes veían en las ideas ortodoxas una falta de realidad física, y por ende, a la teoría cuántica como incompleta.

De esta rivalidad nace la paradoja de EPR, un experimento mental realizado por Einstein, Podolsky y Rosen, cuyo planteamiento era poner en duda el formalismo de la teoría cuántica que se apoyaba en la ideas ortodoxas. De esta paradoja surge el problema de las correlaciones.

2. MÉTODO DE MONTECARLO

Es un método estadístico numérico, contenido en una serie de algoritmos computacionales que depende de repetidos muestreos aleatorios para calcular sus resultados. La física es uno de los campos en donde más se ven aplicaciones de este método, principalmente en sistemas estocásticos. En este capítulo se puede ver la realización de un algoritmo para el problema de las correlaciones entre espines de dos partículas.


3. PROPUESTA PEDAGÓGICA

Después de desarrollar las simulaciones correspondientes a las correlaciones entre espines de dos partículas, éstas se llevaron al aula de clase para observar qué tan eficiente son en la enseñanza de la mecánica cuántica. Se muestra una análisis de los resultados obtenidos durante el trabajo de implementación.

5. Metodología

Como primera medida, se realizaron las simulaciones de las correlaciones entre los espines. Para esta primera parte se realizó un estudio de las correlaciones entre espines; seguido de esto, hizo un reconocimiento del método de Monte Carlo para lograr identificar sus características y así poder generar las simulaciones. Para observar que tan eficaz es el método de Monte Carlo la simulación de estas correlaciones, se compara los resultados obtenidos en cada simulación la teoría.

En la segunda parte, usando la metodología de indicadores del profesor Barbosa (Barbosa, 2008), se determina el desempeño de los estudiantes entorno a esta temática. Para este trabajo se tomaron los

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 07-11-2012	Página 3 de 3	

siguientes indicadores: Preguntas casuales, Motivación, búsqueda de información, aprendizaje colaborativo y argumentación. Se observó el comportamiento de estos indicadores en una clase tradicional y en una clase con la herramienta computacional, para finalmente hacer una comparación de los resultados obtenidos entre la clase tradicional y la metodología presentada en la propuesta.

6. Conclusiones

- Se obtuvo una gráfica de la Correlación para la interpretación realista y ortodoxa para un sistema enredado de espines de dos partículas a partir del algoritmo en Monte Carlo.
- En cuanto al método de desempeño de los estudiantes, se puede evidenciar, tanto en tabla como en el gráfico, que los indicadores muestran un mayor porcentaje a favor de la herramienta computacional. De acuerdo a esto se puede decir que el método computacional estimula más el interés del estudiante por la temática que se estudia que el método tradicional.

Elaborado por:	Raúl Santiago Moreno Rincón
Revisado por:	Ignacio Alberto Monroy Cañón

Fecha de elaboración del Resumen:	07	11	2012
--	----	----	------

ÍNDICE

	Pág.
INTRODUCCIÓN	11
1.. INTERPRETACIÓN ORTODOXA Y REALISTA: LA PARADOJA DE EPR	14
1.1.. Interpretación Ortodoxa	14
1.2.. Interpretación Realista	16
1.3.. Paradoja de EPR	17
1.3.1.. Paradoja de EPR (Einstein, Podolsky & Rosen).	17
1.3.2.. Paradoja de EPR-Bomh y variables ocultas	19
1.3.3.. Desigualdades de Bell	20
1.4.. Correlación	24
1.4.1.. Correlación Realista	25
1.4.2.. Correlación Ortodoxa	26
2.. MÉTODO DE MONTE CARLO	28
2.1.. Números Aleatorios	30
2.2.. Ejemplos	31
2.2.1.. Decaimiento Radiactivo	31
2.2.2.. Partículas en una caja	33

2.3..	Correlación entre espines de dos partículas	35
2.3.1..	Correlación Realista	36
2.3.2..	Correlación Ortodoxa	37
3..	PROPUESTA PEDAGÓGICA	38
3.1..	Módulo de Implementación	38
3.2..	Análisis	42
	CONCLUSIONES	45
	BIBLIOGRAFÍA	46
	ANEXOS	49
A..	CORRELACIÓN ENTRE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS: PUNTO DE VISTA REALISTA	50
B..	CORRELACIÓN ENTRE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS: PUNTO DE VISTA ORTODOXO	53
C..	MONTE CARLO EN C++: DECAIMIENTO DE NÚCLEOS TIPO X	59
D..	MONTE CARLO EN C++: CAJA DE PARTÍCULAS	60
E..	MONTE CARLO EN C++: CORRELACIÓN REALISTA	61
F..	MONTE CARLO EN C++: CORRELACIÓN ORTODOXA	62

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
1. Ejemplo de onda-corpúsculo. En (a) se ve una onda viajando a través de la cuerda, mientras que en (b) se ve un pulso que viaja a través de la cuerda.	15
2. Decaimiento del mesón pi neutro en un positrón (e^+) y un electrón (e^-).	19
3. Orientación de los detectores. El detector con orientación \mathbf{a} mide el espín de e^+ y el detector con orientación \mathbf{b} mide el espín de e^-	21
4. Orientación de los detectores. Arreglo experimental para $P(\mathbf{a}, \mathbf{c})$	22
5. Orientación de los detectores. Arreglo experimental para $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$	23
6. Si se midiera el espín de e^+ se conocería el espín de e^- . En la figura se ve un haz de electrones y un haz de positrones; en realidad, el cambio de dirección del haz de electrones sólo ocurrirá si se coloca un detector en la misma dirección del detector del haz de positrones	24
7. Detectores para e^- y e^+ . (a) No solo se mide el espín de e^+ , detector a, sino también el espín de e^- , detector b. La dirección del detector b es diferente a la dirección del detector a. (b) Ángulos de los detectores con respecto al eje z	25
8. Diagrama lógico del método de Monte Carlo	29
9. Decaimiento de núcleos de tipo X. Número inicial de núcleos es 1000 con un tiempo de vida media de 7,2 y un $dt = 0,1$	33
10. Caja dividida en dos partes iguales en donde se tiene un número inicial de partículas en el lado A mientras que el lado B esta vacío.	34

11.	Caja dividida en dos partes iguales. Número inicial de partículas en la parte izquierda de es 1000.	35
12.	Simulación de la correlación entre espines de dos partículas según el pensamiento realista en Monte Carlo.	36
13.	Simulación de la correlación entre espines de dos partículas según el pensamiento ortodoxo en Monte Carlo.	37
14.	Gráfico Tradicional v.s. Herramienta Computacional. En este gráfico se puede ver una comparación entre los métodos tradicional y computacional de una manera mucho más fácil.	44

ÍNDICE DE CUADROS

	Pág.
1. Plan Estrategia de Aula	40
2. Datos obtenidos durante la implementación. La columna “Tradicional” corresponde a la primera sesión y la columna “Heramienta Computacional” corresponde a la segunda sesión.	43

INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica es una teoría probabilística de la física que estudia los fenómenos de la materia y la luz. Sus ideas se encuentran apoyadas en 5 postulados, donde el cuarto postulado hace evidente la naturaleza probabilística de la teoría cuántica. Debido a esta naturaleza probabilística, la teoría cuántica fue objeto de discusión por la comunidad científica, puesto que para algunos científicos la naturaleza no jugaba con el azar, y ponían en duda la realidad física y la completitud de las descripciones de los sistemas físicos en dicha teoría.

Como consecuencia de esto, surgieron experimentos mentales cuyo objetivo era poner en “jaque” las bases de la teoría. El experimento más conocido es el planteado por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) (Einstein, Podolsky, & Rosen, 1935), comúnmente llamado paradoja de EPR, donde se planteaba la contradicción con el principio de incertidumbre para un sistema compuesto por dos partículas, llevando a la comunidad científica a debatir sobre este tema durante gran parte del siglo XX y cuya solución favoreció a la teoría cuántica (se mostrará con más detalle en los siguientes capítulos)

En el ámbito de la enseñanza, la mecánica cuántica no ha tenido un papel importante debido a que son muy pocos los trabajos que se encuentran comparados con la enseñanza en otros campos de la física (Çahskan, Sezgin Selçuk, & Erol, 2009). Junto a esto, los trabajos de enseñanza que se han hecho son de tópicos muy específicos como el concepto de estado cuántico, la dualidad onda partícula, el principio de superposición, etc. Además, se encuentran muchas dificultades para su aprendizaje debido a varios factores los cuales se mencionarán más adelante.

En busca de hacer una contribución a la enseñanza de la mecánica cuántica, se ha pensado en una propuesta entorno a la enseñanza del pensamiento ortodoxo, debido a la importancia en el desarrollo de su teoría misma y a su vez porque es uno de los ejes fundamentales de ésta. Se plantea la siguiente **pregunta problema**:

¿Cómo llevar a cabo un trabajo sobre la enseñanza de la representación ortodoxa de la mecánica cuántica?

Para responder a esto, se pretende trabajar en la enseñanza de la mecánica cuántica, específicamente en el pensamiento ortodoxo partiendo de la idea de correlaciones no locales con ayuda de una simulación computacional, más específicamente, el método de Monte Carlo.

Ya que el pensamiento ortodoxo de la mecánica cuántica es el más aceptado por la comunidad científica y los libros sobre mecánica cuántica son escritos con base a sus ideas. Sin embargo, la comprensión de estas ideas trae muchas dificultades, puesto que tienen un sentido probabilístico y respaldan la idea indeterminista de la teoría. La idea de las correlaciones no locales surgen como solución de un problema sugerido por Einstein, Podolsky y Rosen del pensamiento ortodoxo. En los textos, tales como el Griffiths, el Balentine, el Basdevant, entre otros, se aborda el tema de correlaciones no locales de una forma tradicional, sucede igual cuando se intenta llevar este tema al aula de clase. La metodología tradicional es criticada debido a que no ofrece imágenes mentales apropiadas para la asimilación de conceptos por parte de los estudiantes (Fernandez, González, & Solbes, 2005; Organista, Gómez, & Rodríguez, 2007) Basado en esto, se ha hecho un estado de arte en la enseñanza de la mecánica cuántica alterna a la tradicional.

Lo que se ha encontrado es que los trabajos de enseñanza de mecánica cuántica han sido pocos comparados con la enseñanza en otros campos de la física (Çahskan et al, 2009) Además, se encuentran muchas dificultades para su aprendizaje debido a varios factores, entre ellos: el estudiante es formado con teorías clásicas, las cuales se fundamenta en ideas deterministas, teniendo dificultades para comprender las ideas probabilísticas de la mecánica cuántica; su contenido matemático es muy abstracto, siendo la representación matricial de Heisenberg y la ecuación de Schrödinger herramientas matemáticas muy diferentes y con un nivel matemático avanzado para la descripción de los sistemas físicos a escala atómica; los modelos y conceptos no son evidentes en la cotidianidad, y en algunos casos estos no son los adecuados (Çahskan et al, 2009; Hobson, 1996; Ladj, Oldache, Khiari, & Belarbi, 2010; Akarsu, 2010; Zhu & Singh, 2011) Pese a esto no se encuentran suficientes estudios en este campo de la enseñanza que ayude a superar estos percances.

Una metodología alterna a la tradicional es el uso de herramientas computacionales;

se tiene evidencias de que esta alternativa ha tenido resultados favorables para la enseñanza de la física en general, ya que el estudiante se convierte en objeto activo de su propio aprendizaje (Hobson, 1996; Ladj et al, 2010), lo que lleva a pensar en la necesidad de hacer uso de algún tipo de herramienta computacional como ayuda para el tema de interés. En busca de hacer una contribución a la enseñanza de la mecánica cuántica, se ha pensado en una propuesta entorno a la enseñanza del pensamiento ortodoxo con ayuda de una simulación computacional.

En este trabajo, la meta principal es abordar el problema de la enseñanza del pensamiento ortodoxo de la mecánica cuántica a partir de las correlaciones tomando en cuenta las ideas ortodoxas y realistas de la mecánica cuántica para un sistema de espines enredados implementando una herramienta computacional. Para tal, vamos a tener en cuenta los siguientes objetivos:

- Elaborar una simulación computacional, con ayuda del método de Monta Carlo, para la correlación de espines de dos partículas, teniendo en cuenta las interpretaciones ortodoxa y realista de la mecánica cuántica, como una ayuda para la comprensión de la mecánica cuántica.
- Comparar la simulación computacional con el método tradicional en el ambito de la enseñanza de la mecánica cuántica.

De acuerdo a las palabras de Thomas Goldsmith Jr. y Estle Ray Mann “ Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos”. En pocas palabras, una simulación es una técnica que ayuda a obtener información de manera digital de sistemas complejos reales.

Teniendo en cuenta este criterio de simulación podemos apoyarnos en éste para justificar la finalidad de este trabajo, ya que no se cuentan con las técnicas adecuadas para la realización experimental de correlaciones. De esta manera, la simulación de correlaciones entre espines de dos partículas ayudarían a solucionar esta precaria situación, y no sólo eso, sino también, a partir de una estrategia de aula, explicar ciertos aspectos de la mecánica cuántica.

1.. INTERPRETACIÓN ORTODOXA Y REALISTA: LA PARADOJA DE EPR

Al revisar los postulados de mecánica cuántica, uno observaría que dicha teoría está basada en la idea de probabilidad, respaldando así la interpretación ortodoxa. Algunos físicos, entre ellos Einstein, no compartían esta idea pues la naturaleza no podía tener características probabilísticas, de ahí, el origen de la famosa frase “...*Dios no juega a los dados...*”

Debido al desacuerdo entre Einstein, y sus seguidores, con la idea probabilística de la teoría cuántica, nace la interpretación realista en cuyos planteamientos eliminan la idea de probabilidad. De este desacuerdo, Einstein, con la ayuda de Podolsky y Rosen, plantearía la famosa paradoja de EPR.

1.1.. INTERPRETACIÓN ORTODOXA

Fue en 1927, durante una conferencia en Como, Italia, donde Bohr presenta la postura que él y otros colegas tenían acerca de la mecánica cuántica y que es conocida como la interpretación Ortodoxa o de Copenhagen (Gribbin, 1986). Esta postura se basa en ideas tales como la probabilidad y la complementariedad, las cuales no fueron bien aceptadas por algunos físicos.

Bohr y sus colaboradores le dieron un sentido probabilístico – aunque la idea originalmente fue de Born, quien también hizo parte de este trabajo – a la función de onda Ψ , perdiendo así todo aspecto físico debido a que sólo daba cuenta de los posibles resultados que se pueden obtener en un arreglo experimental (Gribbin, 1986; Laloë, 2001). Esta idea iba después a entrar en conflicto con lo que pensaban algunos físicos acerca de la naturaleza, como lo haría Einstein cuando lleva a cabo, con Podolsky y

Rosen, un experimento mental el cual se discutirá más adelante.

La idea de complementariedad surge en defensa del principio de incertidumbre y cuyo planteamiento se centra en que la onda y el corpúsculo son características de las partículas subatómicas, las cuales, onda y corpúsculo, se complementan el uno al otro; siendo estas características determinadas por el observador. Esto quiere decir que al observar características corpusculares toda idea de onda se elimina, lo mismo ocurre cuando se observan características ondulatorias pues elimina toda idea de corpúsculo (Bohr, 1935); ninguna de las dos características se pueden manifestar de manera simultáneamente cuando en sistema físico es observado.

Para evidenciar la idea de complementariedad, Griffiths (Griffiths, 1995) plantea el siguiente experimento: imagine una onda viajando en una cuerda, como se ve en la parte (a) de la Figura 1 : si nos preguntáramos ¿dónde se encuentra la onda?, la respuesta sería incierta ya que es difícil localizar la onda en un punto específico, pero ocurre todo lo contrario si nos preguntáramos acerca de la longitud de la onda, la cual podemos conocer con certeza. Ahora imaginemos un pulso viajando en la cuerda, en lugar de una onda como se ve en en la parte (b) la Figura 1: si la pregunta acerca de la posición se vuelve hacer, no habría problema alguno, pues podemos localizar fácilmente el pulso, sin embargo, el conocimiento de la longitud de onda es difusa pues este pulso no es periódico, es decir, no hay otros pulsos que acompañen al primero.

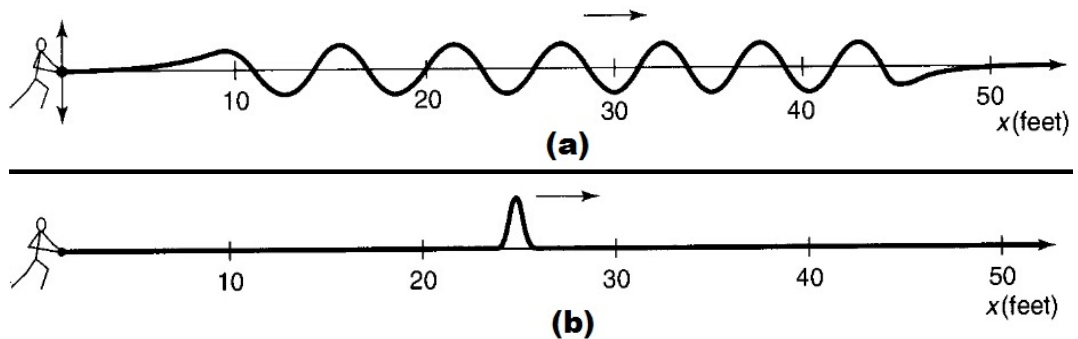


Figura 1. Ejemplo de onda-corpúsculo. En (a) se ve una onda viajando a través de la cuerda, mientras que en (b) se ve un pulso que viaja a través de la cuerda.

Tomando la relación de De Broglie* se puede evidenciar que para el primer caso no se conoce la posición pero sí la longitud de onda lo que conduce a conocer el momento; en el segundo caso, se conoce la posición pero se desconoce la longitud de onda, y por lo tanto, se desconoce el momento. De esta manera se puede deducir el principio de incertidumbre.

Queda una cuestión por resolver: ¿si la naturaleza de una partícula sólo se conoce de acuerdo al arreglo experimental que se haga, entonces qué son cuando no son observadas? Para la escuela de Conpenhagen, la partícula resulta no ser nada mientras que no manifieste ser onda o corpúsculo cuando interactúa con el observador. Algo similar se puede ver a la hora de hacer mediciones, ya que los aparatos de medida afectan al sistema, lo que lleva a desconocer toda realidad física de los sistemas antes de hacer tal medición; para los realistas esto resultó ser una piedra en el zapato.

1.2.. INTERPRETACIÓN REALISTA

A causa de la falta de realidad en la interpretación Ortodoxa debido al problema de la medición, surge otra interpretación que se opone a las ideas de la escuela de Copenhagen. La interpretación Realista no concibe la idea de desconocer las características de los sistemas físicos y mucho menos la idea de la probabilidad. Para Einstein este formalismo es incompleto (Einstein et al, 1935), debido a que los sistemas físicos se encuentran en un estado determinado antes y después de la medición, llamada elemento de realidad, y que su estado, antes y después, no es determinado por la medición. Dando a entender que la medición no tiene por qué afectar los sistemas físicos.

Para los realistas, las probabilidades no son una causa natural sino una causa de nuestra ignorancia ya que el observador desconoce la interacción que puede tener el sistema con externos externos a éste, entonces, el vector de estado no es una representación completa del sistema físico (Einstein et al, 1935), haciendo necesaria más información que nos ayude a completar el vector de estado – lo que más tarde introduciría Bohm como variables ocultas (Bohm, 1951) argumentando la similitud que existía entre el

* $p = h/\lambda$; donde h es la constante de Planck, λ es la longitud de onda y p es el momento.

estudio de los sistemas físicos en la teoría cuántica y el estudio de los sistemas físicos en termodinámica.

1.3.. PARADOJA DE EPR

La paradoja de EPR, diseñada por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) en 1935, puso en problemas la teoría cuántica desarrollada varios años atrás. Einstein y sus colaboradores empiezan una discusión sobre qué tan completa era la descripción que daba la teoría. Más tarde se unió a ellos D. Bohm, rediseñando tal paradoja para hacerla un poco más práctica y más fácil de comprender defendiendo lo propuesto por EPR con el argumento que se desconocían variables que hacían parte de los sistemas físicos, a lo que él llamo “variables ocultas”. Basándose en estas variables ocultas, J. Bell (Bell, 1964) desarrolló una desigualdad que sería una pieza clave para los experimentos que llevó Aspect (Aspect, Grangier & Rogier, 1981), como veremos más adelante, evidenciando que la teoría cuántica estaba en lo correcto y eliminando el concepto de localidad en los sistemas cuánticos.

1.3.1.. Paradoja de EPR (Einstein, Podolsky & Rosen).

En un artículo de 1935, titulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?”, EPR dan argumentos para justificar la falta de completitud en el formalismo cuántico, para eso ellos tomaron a priori el siguiente criterio de realidad:

“Si, sin perturbar un sistema, podemos predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a uno) el valor de una realidad física correspondiente a su cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física asociado a esta cantidad física.”(Einstein et al, 1935).

Partiendo de este criterio de realidad, EPR diseñó un experimento en donde muestra la falta de completitud de la teoría cuántica a partir de la violación del principio de incertidumbre. Para entender este experimento se desarrollará la forma en que lo

muestra de la Torre (de la Torre, 2000). Él toma cinco componentes que hacen parte del argumento de EPR los cuales designa con los siguientes símbolos:

- **LC**: Es el conjunto de las reglas correctas a partir de la lógica Aristotélica.
- **FMQ**: Son las hipótesis por las cuales el formalismo de la mecánica cuántica permite ser comprobada experimentalmente.
- **REA**: Es el criterio de realidad tomado por EPR.
- **COM**: Designa la afirmación de que el formalismo de mecánica cuántica es completo.
- **SEP**: Un sistema S que contiene dos subsistemas, S_1 y S_2 , los cuales interactúan, pierden esta interacción después en el momento en que se encuentra muy distante de la otra. Este sistema es separable si al modificar S_1 , por ejemplo, S_2 no es perturbada por tal modificación. Este símbolo designara la separabilidad.

Entonces el argumento de EPR es demostrar que **LC** es falsa o **FMQ** es falso o **REA** es falsa o **COM** es falso o **SEP** falso, la intención de EPR es mostrar que **COM** es falso. En principio **LC** es verdadera (de la Torre, 2000).

Ahora, tomando un sistema que está compuesto por dos partículas, s_1 y s_2 , que inicialmente interactúan y que después de un tiempo dejan tal interacción distanciándose una de la otra, esta distancia relativa entre s_1 y s_2 es $X = X_2 - X_1$ (X_1 es la posición de s_1 y X_2 es la posición de s_2) y el momento total del sistema es $P = P_1 + P_2$ (P_1 es el momento de s_1 y P_2 es el momento de s_2). Teniendo este sistema, se procede a mostrar la falsedad de **COM**.

1. Al medir la posición de s_1 , X_1 , se puede predecir la posición de s_2 con exactitud de acuerdo con $X_2 = X + X_1$. Si **SEP** es válido, entonces dicha predicción puede hacerse sin perturbar a s_2 , por lo tanto, X_2 será un elemento de realidad de acuerdo con **REA**.
2. Se puede conocer el momento de s_2 de forma similar. Con sólo conocer P_1 se obtiene P_2 con exactitud a partir de $P_2 = P - P_1$. Si **SEP** es válido, entonces dicha predicción puede hacerse sin perturbar a s_2 , por lo tanto, P_2 será un elemento de realidad de acuerdo con **REA**.
3. De acuerdo con **FMQ** no se puede conocer el momento y la posición de forma simultánea, hecho que se presenta en s_1 . Si **SEP** es válido, las observaciones de s_1 para X_1 o P_2 no perturbaran s_2 , lo que implica que X_2 y P_2 son elementos de

realidad física.

4. Como consecuencia del punto anterior, **FMQ** no puede ser completo ya que no se cumple para s_2 , lo que lleva a concluir que **COM** es falso.

De esta manera es como de la Torre logra dar una mayor comprensión acerca de la paradoja de EPR. Aunque, esta falta de completitud se asocia más a la función de onda, dado que para EPR, las cantidades física tienen que tener su contraparte en la teoría (Einstein et al, 1935).

1.3.2.. Paradoja de EPR-Bohm y variables ocultas

Debido a la complejidad que tiene la realización del experimento planteado por EPR, a causa del manejo de las variables posición y momento a la hora de realizar dicho experimento, Bohm hace un planteamiento un poco menos complejo. Bohm toma el mismo sistema físico planteado, pero en lugar de hacer uso de la posición y el momento, éste utiliza la medición de espines de partículas.

Suponga el decaimiento del mesón pi neutro en un electrón (e^-) y un positrón (e^+) (Griffiths, 1995), ver Figura 2. Antes del decaimiento, el mesón llevaba un spin igual a cero, para conservar el momento angular del mesón, e^- y e^+ tienen espines con direcciones opuestas y un valor igual $\hbar/2$, es decir, $\hat{S}_{e^-} + \hat{S}_{e^+} = 0$.

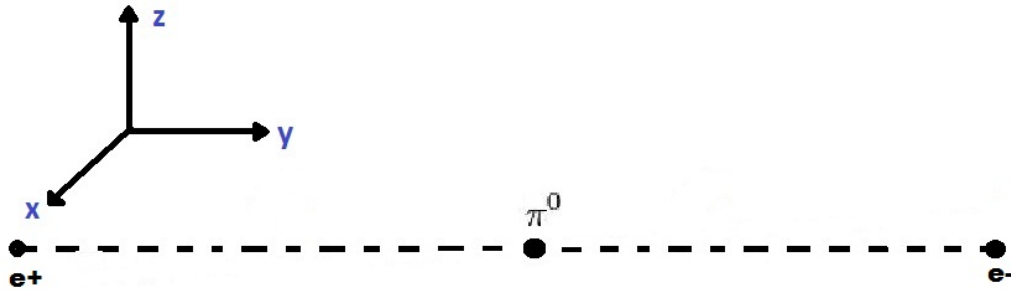


Figura 2. Decaimiento del mesón pi neutro en un positrón (e^+) y un electrón (e^-).

Se puede tomar el mismo orden para demostrar la paradoja de EPR, como se demostró en el acápite anterior, para los espines de dos partículas. Entonces, si se tomara los observables de los espines en el eje x (\hat{S}_{xe^-} para e^- y \hat{S}_{xe^+} para e^+) y el eje y (\hat{S}_{ye^-} para e^- y \hat{S}_{ye^+} para e^+), se tomarían las siguientes consideraciones:

1. Al medir el espín proyectado en el eje x de e^- , \widehat{S}_{xe^-} , se puede predecir el espín proyectado en el eje x de e^+ con exactitud de acuerdo con $\widehat{S}_{xe^+} = -\widehat{S}_{xe^-}$. Si **SEP** es válido, entonces dicha predicción puede hacerse sin perturbar a e^+ , por lo tanto, \widehat{S}_{xe^+} será un elemento de realidad de acuerdo con **REA**.
2. Se puede conocer el espín proyectado en el eje y de e^+ de forma similar. Con sólo conocer \widehat{S}_{ye^-} se obtiene \widehat{S}_{ye^+} con exactitud a partir de $\widehat{S}_{ye^+} = -\widehat{S}_{ye^-}$. Si **SEP** es válido, entonces dicha predicción puede hacerse sin perturbar a e^+ , por lo tanto, \widehat{S}_{ye^+} será un elemento de realidad de acuerdo con **REA**.
3. De acuerdo con **FMQ** no se puede conocer el espín proyectado en el eje x y el espín proyectado en el eje y de forma simultánea, hecho que se presenta en e^- . Si **SEP** es válido, las observaciones de e^- para \widehat{S}_{xe^-} o \widehat{S}_{ye^-} no perturbarán e^+ , lo que implica que \widehat{S}_{xe^+} y \widehat{S}_{ye^+} son elementos de realidad física.
4. Como consecuencia del punto anterior, **FMQ** no puede ser completo ya que no se cumple para e^+ , lo que lleva a concluir que **COM** es falso.

con esta nueva forma de ver la paradoja de EPR, el argumento inicial no sufrió ningún cambio. Este no sería el único trabajo de Bohm, pues él introduciría una nueva interpretación de la teoría cuántica considerando que las probabilidades surgían de la imposibilidad de controlar los sistemas cuánticos en los experimentos. Estas imposibilidades se deben a variables desconocidas presentes en aquellos sistemas, las cuales reciben el nombre de “variables ocultas” (Bohm, 1979). Más tarde, en 1964, John Bell se basaría en la teoría de variables ocultas para formular un teorema en terminos de una desigualdad acompañada de un arreglo experimental donde, si lo sugerido por Bohm es correcto, la desigualdad se haría evidente en el tal experimento.

1.3.3.. *Desigualdades de Bell*

Bell desarrolló un teorema que permitió, un tiempo después, a los experimentadores mostrar cual de las partes de este problema tenía la razón, si EPR o la escuela de ortodoxa. Para llegar a tal teorema, Bell toma la posición de EPR-Bohm e hizo uso de las variables ocultas y la separabilidad.

Bell sugiere que en el experimento de Bohm sean colocados dos detectores*, uno medirá el espín de e^- y el otro medirá el espín de e^+ (Bell, 1964). Estos detectores pueden rotar con plena libertad, añadiendo dos variables vectoriales, \mathbf{a} y \mathbf{b} , que representan las orientaciones de cada uno de los detectores, como se puede ver en la Figura 3 (\mathbf{a} componente de la medición del e^+ y \mathbf{b} componente de la medición del e^-).

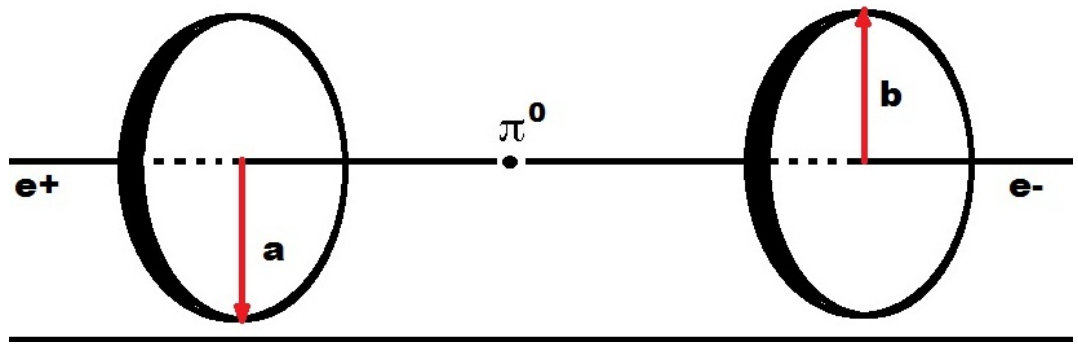


Figura 3. Orientación de los detectores. El detector con orientación \mathbf{a} mide el espín de e^+ y el detector con orientación \mathbf{b} mide el espín de e^-

Registrando los espines de las partículas en cada decaimiento, Bell propone calcular el valor promedio del producto entre los espines de e^- y e^+ , dado que, siendo las direcciones arbitrarias, la teoría cuántica predice que el promedio del producto entre los espines es

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

como \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores unitarios, entonces

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos(\beta) \tag{1}$$

β es el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . El resultado de la ecuación (1) está en desacuerdo con una teoría de variables ocultas (Bell, 1964) ya que la teoría de variables ocultas niega la existencia de las correlaciones.

El argumento es el siguiente: Suponiendo que el estado del sistema electrón-positrón está caracterizado por una variable oculta λ , la cual varía, pero no podemos controlarla ni sabemos nada acerca de ésta, además, los resultados obtenidos por la medición del espín de e^- dependen solo de la dirección del vector \mathbf{a} , por lo tanto, no se van a

*Estos son detectores de Stern-Gerlach, es decir, están basados en el experimento de Stern-Gerlach.

ver influenciados ni alterados por la dirección del vector \mathbf{b} . Los resultados de estas mediciones van a estar representados por $A(\mathbf{a}, \lambda)$ para e^+ y $B(\mathbf{b}, \lambda)$ para e^- , cuyos valores sólo serán $+1$ y -1 . El valor promedio en la teoría local de variables ocultas es

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \rho(\lambda)A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)d\lambda \quad (2)$$

$\rho(\lambda)$ es la densidad de probabilidad de la variable oculta λ ; $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sería el valor promedio para un arreglo experimental similar al de la Figura 3. Cuando $A(\mathbf{a}, \lambda) = B(\mathbf{b}, \lambda)$, entonces $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int \rho(\lambda)A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda)d\lambda \quad (3)$$

Si se adiciona un nuevo vector unitario \mathbf{c} , se tiene

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda)[A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

$P(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ sería el valor promedio para un arreglo experimental similar al de la Figura 4.

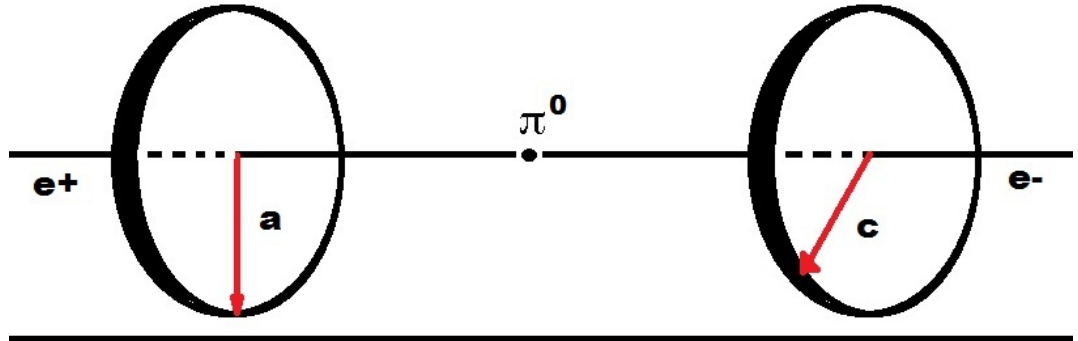


Figura 4. Orientación de los detectores. Arreglo experimental para $P(\mathbf{a}, \mathbf{c})$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda)[A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

suponiendo que $[A(\mathbf{b}, \lambda)]^2 = 1$, entonces

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda)[A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda)A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda)[1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \int \rho(\lambda)A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda)[1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

como $A(\mathbf{a}, \lambda)$ y $A(\mathbf{b}, \lambda)$ está entre -1 y 1 , y $\rho(\lambda)[1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)] \geq 0$, como último se tiene

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)]d\lambda$$

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (4)$$

$P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ sería el valor promedio para un arreglo experimental similar al de la Figura 5.

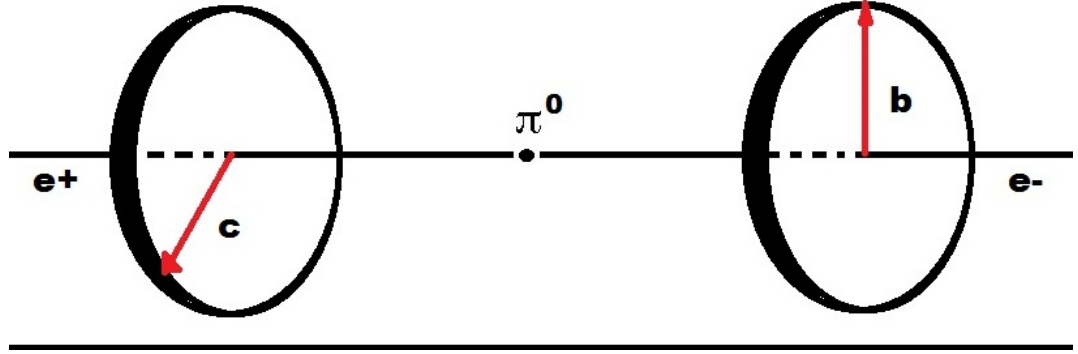


Figura 5. Orientación de los detectores. Arreglo experimental para $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$

Esto se conoce como la desigualdad de Bell, que, de acuerdo a éste, si al momento de analizar los datos obtenidos en dicho experimento se encuentran evidencias que validen la desigualdad, no sólo la teoría cuántica es incompleta sino que es incorrecta; si, por el contrario, no existe ningún veredicto a favor de la desigualdad, la teoría cuántica seguirá siendo correcta.

Fue entonces a mediados de los 70's cuando Clauser llevó a cabo el primer experimento que pudiera dar evidencia de los aspectos contradictorios de la naturaleza microscópica, los cuales serían confirmados, más tarde, por Aspect a inicios de la década de los 80's. De esta manera, la teoría cuántica rompe con las nociones de localidad y separabilidad. Aunque la no-localidad y la no-separabilidad son causadas por la instantaneidad, esta instantaneidad no es del transporte de energía ni de información sino del colapso de la función de onda (Griffiths, 1995).

1.4.. CORRELACIÓN

De acuerdo al formalismo de la mecánica cuántica, en el sistema electrón-positrón existe una correlación. La palabra correlación hace referencia a la dependencia de una variable física de un sistema con otra variable física de otro o del mismo sistema (Bohm, 1979).

Si se toma el sistema electrón-positrón con un estado igual a*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \quad (5)$$

según este estado, la medición del espín de una de las partículas, digamos e^+ , no sólo decide la dirección del espín de e^+ sino también la dirección del espín e^- . A este hecho se le llama correlación, ya que el resultado en e^- depende del resultado de e^+ , ver Figura 6.

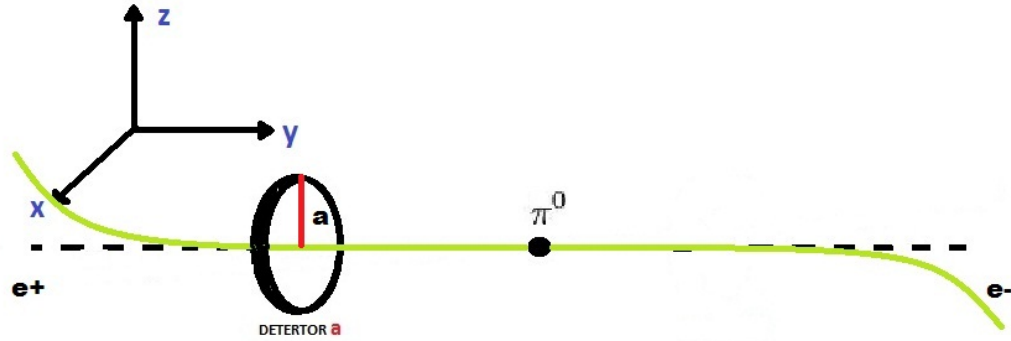


Figura 6. Si se midiera el espín de e^+ se conocería el espín de e^- . En la figura se ve un haz de electrones y un haz de positrones; en realidad, el cambio de dirección del haz de electrones sólo ocurrirá si se coloca un detector en la misma dirección del detector del haz de positrones

Para saber cómo es el comportamiento de tales correlaciones, se hace uso del coeficiente de correlación, que de acuerdo con la estadística, es

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle \hat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \hat{S}_{e^-, \beta} \rangle - \langle \hat{S}_{e^+, \alpha} \rangle \langle \hat{S}_{e^-, \beta} \rangle}{\sqrt{\langle \hat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle \langle \hat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle}} \quad (6)$$

*Este estado es de acuerdo al formalismo de la mecánica cuántica

donde $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ es el valor esperado del producto entre los espines de e^- y los espines de e^+ , $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle$ y $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ son los valores esperados de los espines de e^+ y e^- , y $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle$ y $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle$ son los valores esperados de los cuadrados de los espines de e^- y los espines de e^+ ; $\widehat{S}_{e^+, \alpha}$ es el observable del detector a y $\widehat{S}_{e^-, \beta}$ es el observable del detector b; α es el ángulo del detector a con respecto al eje z y β es el ángulo del detector b con respecto al eje z, ver la parte (b) de la Figura 7.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, primero se tomará el estado del sistema desde el punto de vista de la interpretación realista

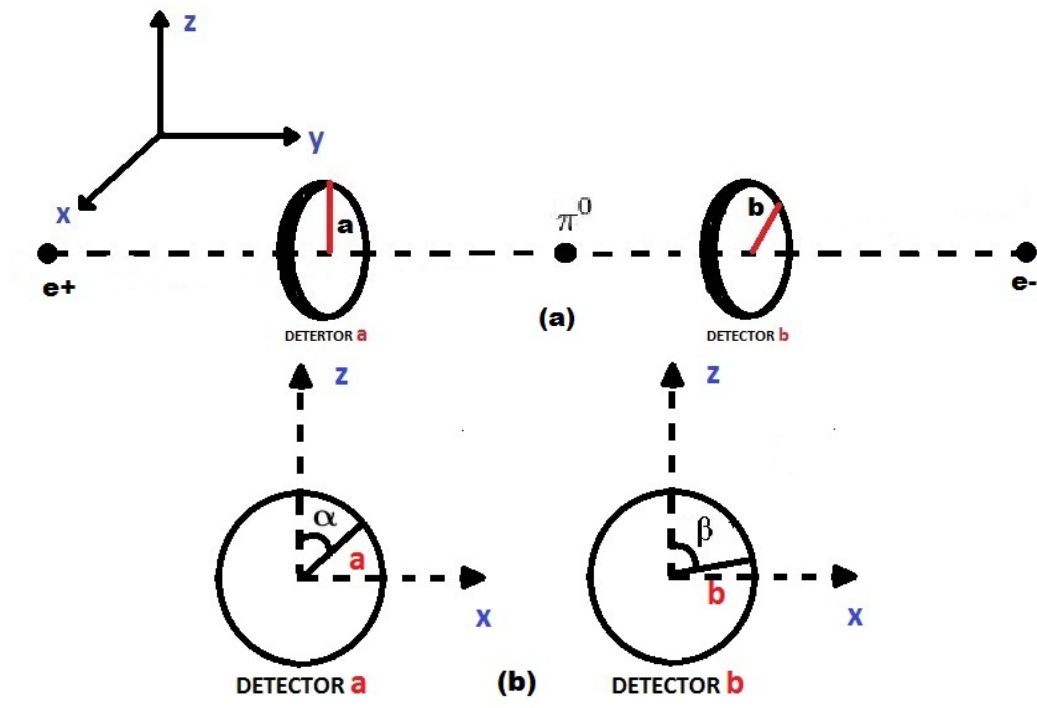


Figura 7. Detectores para e^- y e^+ . (a) No solo se mide el espín de e^+ , detector a, sino también el espín de e^- , detector b. La dirección del detector b es diferente a la dirección del detector a. (b) Ángulos de los detectores con respecto al eje z

1.4.1.. Correlación Realista

De acuerdo con las ideas de la interpretación realista, el estado del sistema electrón-positrón está determinado por

$$|\psi\rangle = |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle \quad (7)$$

, e^- y e^+ tienen sus espines bien definidos antes y después de las mediciones, es decir, antes y después de la medición e^- tiene un espín hacia arriba y e^+ tiene un espín hacia abajo ya que, según los realistas, los espines de e^- y e^+ son realidades físicas y no pueden ser perturbados por la medición (ver desarrollo en el Anexo A).

De acuerdo con $|\psi\rangle$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \cos \beta \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

reemplazando en (6), se obtiene la correlación entre los espines de e^- y e^+ de acuerdo al pensamiento realista

$$\begin{aligned}E(\alpha, \beta) &= \frac{-\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha \cos \beta - (\frac{\hbar}{2} \cos \alpha)(-\frac{\hbar}{2} \cos \beta)}{\sqrt{\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle \langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle}} \\ E(\alpha, \beta) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

la ecuación (8) niega la existencia de una correlación, por lo que se puede concluir que desde el punto de vista de los realistas no hay correlación entre el espín de e^- y el espín de e^+ , en términos más generales, que en los sistemas físicos, que en algún momento interactuaron y han dejado de interactuar, no tiene porque existir una dependencia entre los resultados de cada sistema.

1.4.2.. Correlación Ortodoxa

Para las ideas ortodoxas, el estado sistema electrón-positrón está dado por la ecuación (5). Para este estado se tiene que (ver desarrollo en el Anexo B).

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= 0 \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= 0 \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha - \beta \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

reemplazando en (6), se obtiene la correlación entre los espines de e^- y e^+ de acuerdo al pensamiento ortodoxo

$$E(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta) \quad (9)$$

La ecuación (9) hace evidente la correlación entre los espines según las ideas ortodoxas, aunque esta correlación se pierde cuando la dirección de los detectores es perpendicular. Comparando este resultado con los datos experimentales obtenidos por Aspect se llega a la conclusión de que la interpretación ortodoxa no se equivoca con la descripción que hace de la naturaleza microscópica.

2.. MÉTODO DE MONTE CARLO

Es un método estadístico, contenido en una serie de algoritmos computacionales que dependen de repetidos muestreos aleatorios para calcular sus resultados. Es usado para hacer aproximaciones de expresiones matemáticas complejas y con gran dificultad para ser evaluado. Su aplicación es de gran importancia en campos como la física, la química, la biología y la ingeniería.

El origen de este método se da en los casinos de la ciudad de Monte Carlo con Karl Pearson en 1892. Sin embargo, no sería sino hasta 1949 cuando este tiene su primera aplicación en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en Estado Unidos, cuyos autores fueron Fermi, Ulam y Von Neuman cuando consideraron los valores singulares de la ecuación de Schrödinger (Sóbol, 1983).

Para generar un algoritmo en Monte Carlo, se tiene que tomar en cuenta las siguientes reglas:

- Una función de distribución de probabilidades que caracteriza al sistema que se está estudiando.
- Un número aleatorio entre 0 y 1 para una cantidad N de muestreos.
- Una regla de muestreo.

la figura 8 muestra un diagrama lógico del proceso del método de Monte Carlo.

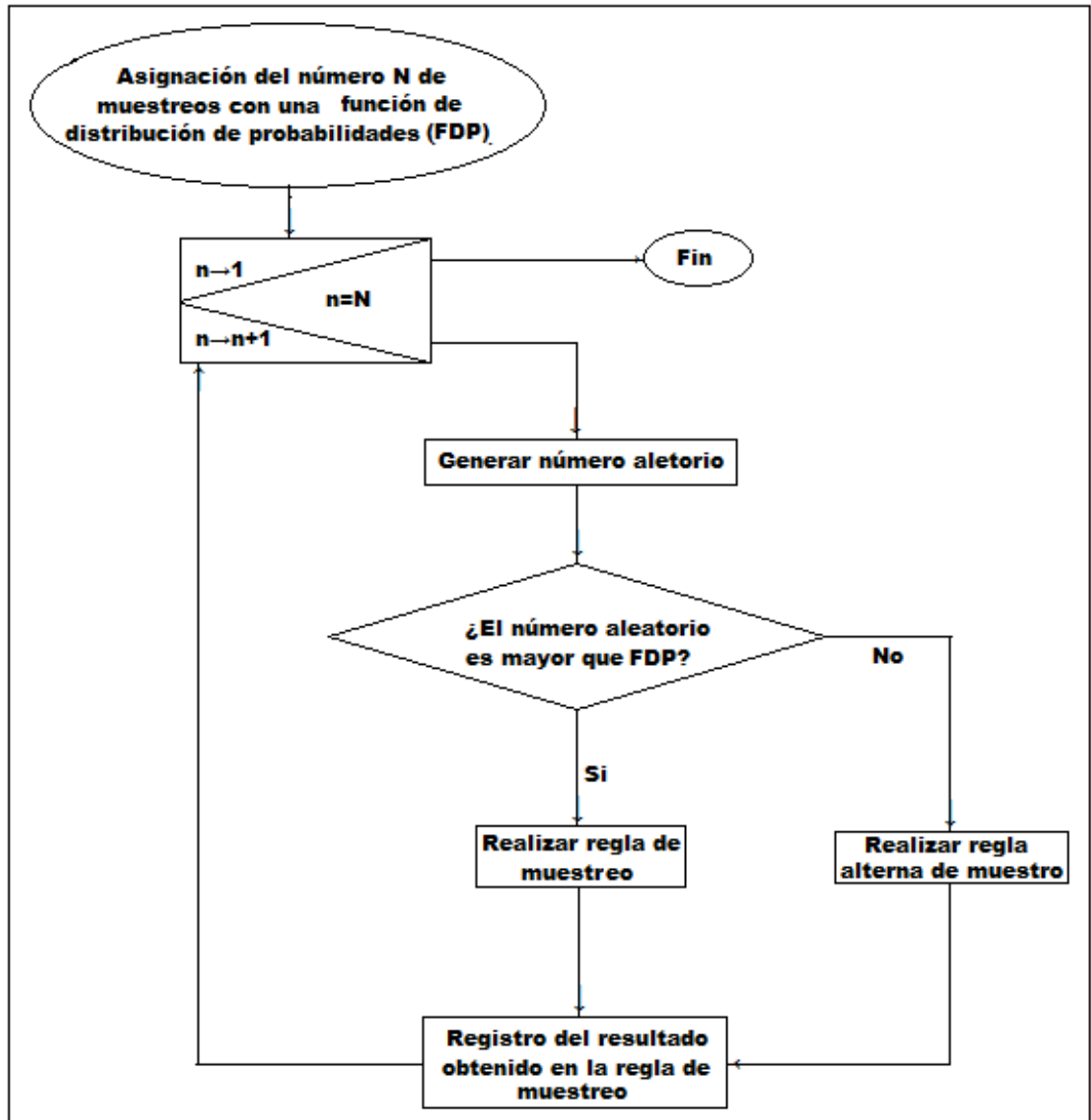


Figura 8. Diagrama lógico del método de Monte Carlo

2.1.. NÚMEROS ALEATORIOS

Hay dos maneras de obtener números aleatorios:

- **Independientes:** Cada número es obtenido por casualidad y no tiene ninguna relación con otros números.
- **Distribución específica:** Cada número tiene una probabilidad específica de que salga y el cual pertenece a un rango determinado. La más común es la distribución uniforme en donde todos los números tienen la misma probabilidad, por ejemplo un dado.

El método más común para generar números aleatorios, es el método de congruencias. Considere la siguiente secuencia

$$x_{n+1} = (a \times x_n + c) \% b \quad (10)$$

$\%$ es el módulo entre $(a \times x_n + c)$ y b ; a , c y b son enteros, que la mayoría de los casos, son primos. Para entender como se genera un número aleatorio, sean $a = 7$, $b = 9$, $c = 2$ y $x_0 = 0$

$$x_1 = (7 \times 0 + 2) \% 9 = 2 \% 9 = 2$$

$$x_2 = (7 \times 2 + 2) \% 9 = 16 \% 9 = 7$$

$$x_3 = (7 \times 7 + 2) \% 9 = 51 \% 9 = 6$$

$$x_4 = (7 \times 6 + 2) \% 9 = 44 \% 9 = 8$$

y así se seguirá hasta la cantidad de números aleatorios que se desee. Sin embargo, los números obtenidos por esta secuencia, y por muchas otras, se repetirán de nuevo con el mismo orden, lo que lleva a considerar que los números generados en las computadoras son pseudo-aleatorias (Scherer, 2010). Existen otros métodos tales como:

- **Secuencia de fibonacci:**

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \% b \quad (11)$$

b es un entero primo.

- **Distribución de Poisson**

$$\int_{-\infty}^{-y=f(x)} \rho(y') dy' = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx' \quad (12)$$

y' es un número en función de la variable x' cuyo intervalo es $[0, 1]$, $\rho(y')$ y $\rho(x')$ son funciones de distribución de probabilidades.

- **Distribuciones generales:**

$$\lambda = \frac{\int_{x_i}^x \rho(x) dx}{\int_{x_i}^{x_f} \rho(x) dx} \quad (13)$$

$\rho(x)$ es la función de distribución de probabilidades para una variables entre $[x_i, x_f]$.

2.2.. EJEMPLOS

La principal idea del desarrollo del método de Monte Carlo fue solucionar sistemas físicos no lineales que dependían de probabilidades. Sin embargo, este método con el tiempo empezó hacer una herramienta útil en la química, la biología, las matemáticas, la especulación financiera, entre otros. En esta sección se mostraran dos ejemplos del método de Monte Carlo, los cuales ayudaron a construir el algoritmo de correlaciones entre espines de dos partículas.

2.2.1.. *Decaimiento Radiactivo*

En un tiempo $t = 0$ se tiene $N(0)$ núcleos de tipo X que pueden decaer radiactivamente. Un tiempo después, el número de núcleos decrecerá a $N(t)$. Con una probabilidad ω de que decaiga, se tiene la siguiente ecuación

$$dN(t) = -\omega N(t) dt$$

$$N(t) = N(0)e^{-\omega t}$$

siendo el tiempo de vida media de la partícula igual a

$$\tau = \frac{1}{\omega}$$

la solución teórica es

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Ahora, tomado encuenta las reglas para generar un algoritmo en Monte Carlo, entonces:

- La función de distribución de probabilidad del sistema es dt/τ .
- Un número r aleatorio entre $[0, 1]$
- Si $r < dt/\tau$, entonces se le resta uno al número $N(t)$ de partículas.

se tomó un número inicial $N(0) = 1000$ núcleos, un tiempo de vida medio $\tau = 7,2$ días y un $dt = 0,1$ días (ver código de la rutina en C++ en el Anexo C). La Figura 9 da cuenta del comportamiento de este sistema en Monte Carlo y se compara con la predicción teórica.

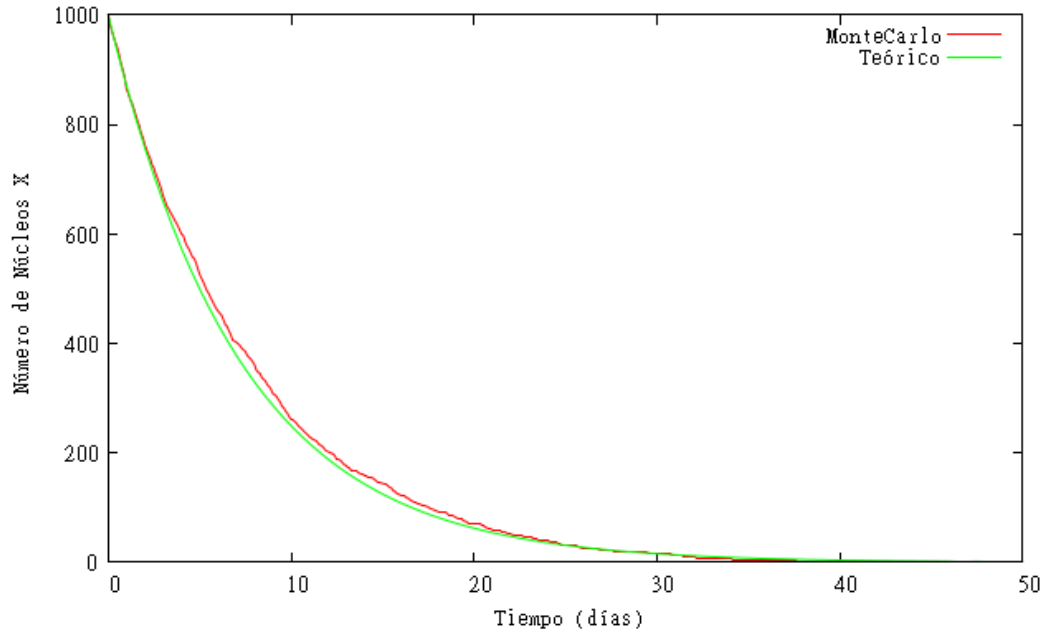


Figura 9. Decaimiento de núcleos de tipo X. Número inicial de núcleos es 1000 con un tiempo de vida media de 7,2 y un $dt = 0,1$

En la Figura 9 se puede ver que el Monte Carlo tiene un ajuste casi perfecto con la predicción teórica.

2.2.2.. Partículas en una caja

Para un segundo ejemplo se tomó una caja que está dividida en dos partes iguales por un tabique como se ve en la Figura 10. En el tiempo $t = 0$ se tiene que en el lado A hay un número $N_i(0)$ de partículas mientras que el lado B está vacío. Ahora, si al tabique se le hace un agujero, una partícula pasaría a través de éste en una unidad de tiempo hasta que un tiempo después el sistema se encuentra en equilibrio con $N_i(0)/2$ tanto en el lado A como en el lado B. El modelo teórico de la parte de la izquierda de la caja es

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = 1 - \frac{2N_i(t)}{N(0)}$$

la solución teórica es

$$N_i(t) = \frac{N(0)}{2} (1 + e^{2t/N(0)}) \quad (15)$$

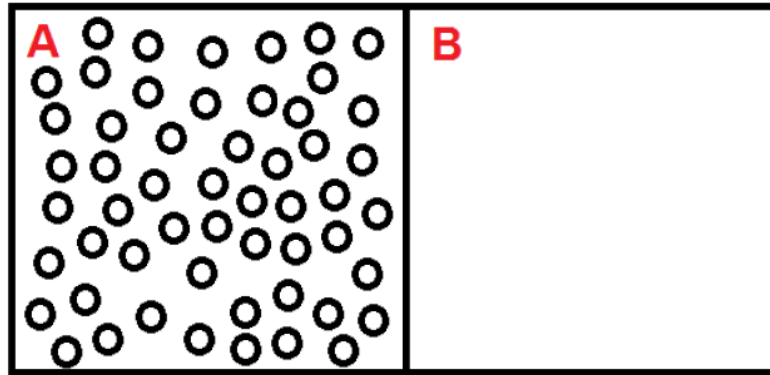


Figura 10. Caja dividida en dos partes iguales en donde se tiene un número inicial de partículas en el lado A mientras que el lado B esta vacío.

Ahora, tomados encuentras las reglas para generar un algoritmo en Monte Carlo, entonces:

- La función de distribución de probabilidad del sistema es $N_i/N(0)$.
- Un número r aleatorio entre $[0, 1]$
- Si $r < N_i/N(0)$, entonces se le resta uno al número N_i de partículas, sino, entonces que se le suma uno.

Para el caso de la Figura 11, el número inicial de partículas en la parte izquierda de la caja es de 1000 y se estudia el sistema hasta un tiempo de 4000 seg (ver código de la rutina en C++ en el Anexo D). La Figura 11 muestra el comportamiento del sistema con el Monte Carlo, añadiendo la gráfica teórica donde se observa que el Monte Carlo se ajusta a ésta, sin embargo, cuando se supone que el sistema llega al equilibrio el Monte Carlo sigue variando, esto pasa porque físicamente el sistema no llega a un equilibrio total ya que algunas partículas salen y entran de la parte izquierda.

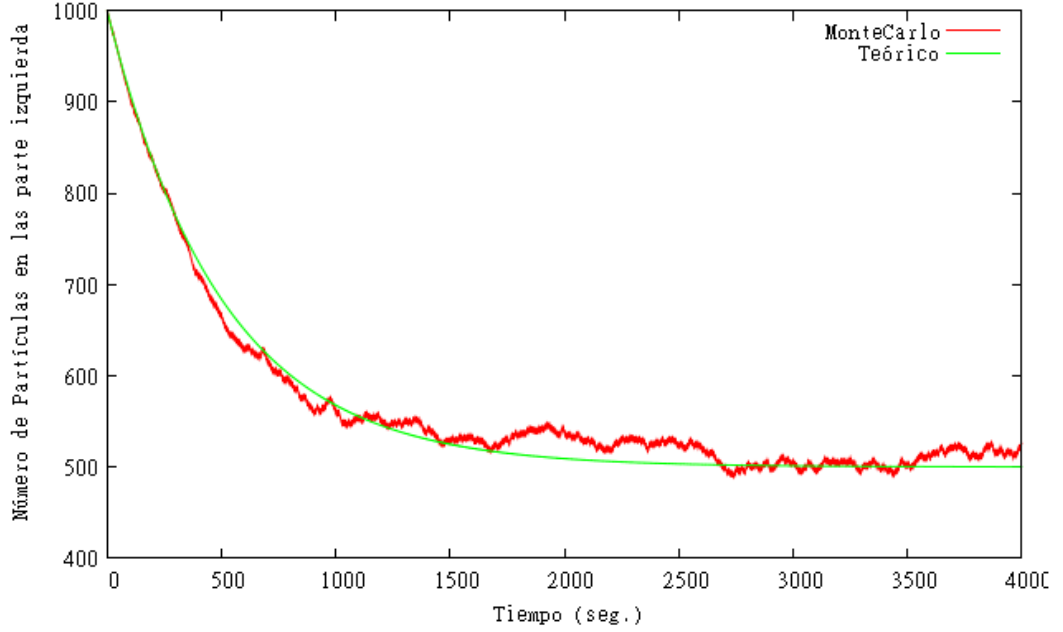


Figura 11. Caja dividida en dos partes iguales. Número inicial de partículas en la parte izquierda de es 1000.

2.3.. CORRELACIÓN ENTRE ESPINES DE DOS PARÍCULAS

Uno de los objetivos de este trabajo es realizar una simulación en Monte Carlo para la correlación de espines de partículas, para esto se realizaron dos simulaciones, una desde el criterio de los realistas y otra desde el criterio de los ortodoxos vistos en la sección 1.4.

Antes de empezar, los factores de la ecuación (6) se hallarán de la siguiente manera

$$\langle \hat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \sum \frac{sp}{N}$$

$$\langle \hat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle = \sum \frac{sp^2}{N}$$

$$\langle \hat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \sum \frac{se}{N}$$

$$\langle \hat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \sum \frac{se^2}{N}$$

$$\langle \hat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \hat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \sum \frac{sp \times se}{N}$$

sp y se es el espín del positrón y del electrón.

2.3.1.. Correlación Realista

Las reglas para generar el algoritmo en Monte Carlo son:

- La función de distribución de probabilidad del sistema es 0.5.
- Dos números aleatorios, a y b , entre $[0, 1]$; a para el espín del positrón y b para el espín del electrón, ya que se supone que no existe correlación.
- Si $a < 0,5$, entonces $sp = \cos \alpha$, sino, entonces, $sp = \sin \alpha$; Si $b < 0,5$, entonces $se = \sin \beta$, sino, entonces $se = \cos \beta$ (se y sp se toman de acuerdo al Anexo A).

el número de muestreos es 1000 pares de partículas electrón-positrón (ver código de la rutina en C++ en el Anexo E). La Figura 12 muestra la gráfica obtenida en la simulación donde se evidencia un ajuste casi perfecto del Monte Carlo con la ecuación (8).

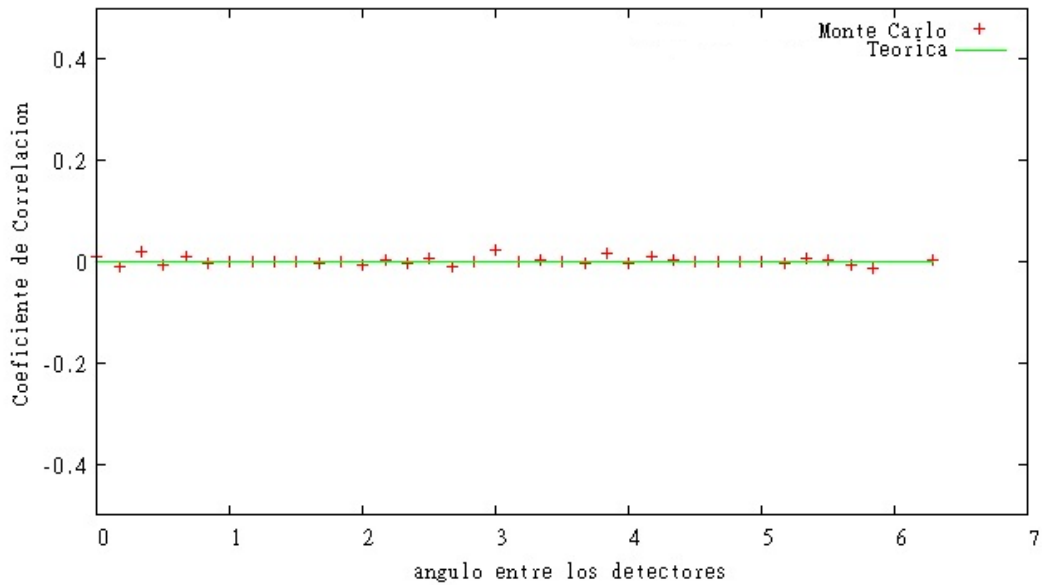


Figura 12. Simulación de la correlación entre espines de dos partículas según el pensamiento realista en Monte Carlo.

2.3.2.. Correlación Ortodoxa

Las reglas para generar el algoritmo en Monte Carlo son:

- La función de distribución de probabilidad del sistema es 0.5.
- Un número aleatorio, a , entre $[0, 1]$, ya que supone la existencia de una correlación.
- Si $a < 0,5$, entonces $sp = \cos \alpha + \sin \alpha$ y $se = -\cos \beta + \sin \beta$, si no, entonces $sp = -\cos \alpha + \sin \alpha$ y $se = \cos \beta + \sin \beta$ (se y sp se toman de acuerdo al Anexo B).

el número de muestreos es 1000 pares de partículas electrón-positrón (ver código de la rutina en C++ en el Anexo F). La Figura 13 muestra la gráfica obtenida en la simulación donde se evidencia un ajuste casi perfecto del Monte Carlo con la ecuación (9).

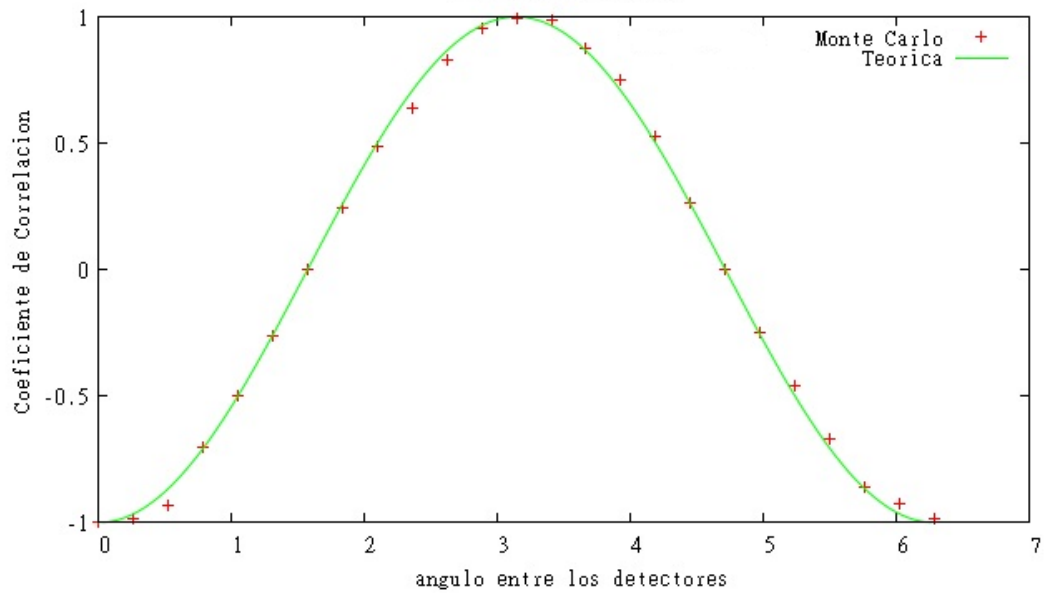


Figura 13. Simulación de la correlación entre espines de dos partículas según el pensamiento ortodoxo en Monte Carlo.

3.. PROPUESTA PEDAGÓGICA

3.1.. MÓDULO DE IMPLEMENTACIÓN

IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

El siguiente plan de trabajo se ejecutó en el curso de Métodos Numéricos y C++. Curso electivo que pertenece al ciclo de profundización del departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional, con 3 créditos y 4 horas semanales. Esto debido a que la simulación es desarrollada en C++ y, como es un curso avanzado del pregrado, ya se tiene ideas claras acerca de la mecánica cuántica.

DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

El curso de Métodos Numéricos y C++ es tomado por 17 estudiantes con edades entre los 20 y 25 años, donde 11 son hombre y 6 son mujeres. Este curso es un topico del ciclo de profundización, por lo tanto, se encuentran estudiantes de séptimo semestre en adelante.

PLAN DE TRABAJO

Objetivo

Recrear una simulación con el método de Monte Carlo de correlaciones de espines como una herramienta computacional alterna a la metodología tradicional para la enseñanza de la interpretación Ortodoxa de la Mecánica Cuántica.

Descripción de la actividad

Para mirar que tan eficiente es la simulación de correlaciones entre espines de partículas en la enseñanza de la mecánica cuántica, se toma la propuesta que hace el profesor

Barbosa. Para esto se realizaron dos sesiones en el curso de Métodos Numéricos y C++. En la primera sesión se llevó el tema de las Interpretaciones Ortodoxa y Realista de la mecánica cuántica y los conflictos entre éstas de forma tradicional, donde el estudiante es un ente pasivo; y en la segunda sesión se llevó la simulación en Monte Carlo, donde el estudiante es un ente activo.

Antes de empezar las actividades planteadas, se tuvieron en cuenta que los estudiantes debían conocer mínimo tres conceptos de la mecánica cuántica, para no provocar frustración ni desinterés en el estudiante debido al lenguaje.

1ra sesión: En la primera sesión se abordó el tema interpretaciones ortodoxa y realista de la mecánica cuántica de forma tradicional y una pequeña introducción al método de Monte Carlo. Para esto, los ítems a seguir son los siguientes:

- Interpretación Ortodoxa y Realista
- Paradoja de EPR-Bohm
- Desigualdades de Bell
- Experimento de Alan Aspect

Al finalizar esta sesión se hizo una introducción al método de monte carlo, realizando una rutina en C++.

2da sesión: En la segunda sesión se tomó el caso de las correlaciones con la simulación en monte carlo. Se hizo una explicación de las correlaciones y los problemas de la localidad y se realizó la rutina de correlaciones según la mecánica cuántica con el método de monte carlo en C++.

En cuadro 1 se muestra el plan de estrategia de aula, en donde las actividades 1 y 2 se realizaron durante la primera sesión mientras que las actividades 3, 4 y 5 se realizaron en la segunda sesión.

ACTIVIDADES	OBJETIVOS	MATERIALES	TIEMPO	EXPECTATIVAS	RESULTADOS
Act. 1: Contextualización	Exponer las interpretaciones ortodoxa y realista de la teoría cuántica, la paradoja de EPR y las correlaciones desde punto de vista de cada interpretación con el método tradicional.	<ul style="list-style-type: none"> • Tablero • Diapositivas 	40 minutos	Se espera que el estudiante comprenda las posturas de cada interpretación, la paradoja de EPR como un conflicto entre éstas y el tema de las correlaciones.	Poca comprensión de los temas expuestos.
Act. 2: Introducción al método de Monte Carlo	Hacer una introducción al método de Monte Carlo y los elementos que están involucrados en la simulación. A partir de un ejemplo.	<ul style="list-style-type: none"> • Computador 	20 minutos	Se espera que el estudiante comprenda las reglas más simples del Monte Carlo y cómo operan.	El estudiante maneja números aleatorios y puede relacionarlos con un fenómeno físico.
Act. 3: Proyecto del decaimiento del pión a partir del Monte Carlo	Asociar las variables físicas de espines del experimento con el lenguaje computacional.	<ul style="list-style-type: none"> • Computador 	40 minutos	Que el estudiante haga una imagen del experimento e identifique las variables físicas en el Monte Carlo	El estudiante asocian los números aleatorios a los posibles valores de espines de cada partícula.
Act. 4: Simulación Correlación desde el punto de vista ortodoxo.	Desarrollar con el estudiante la simulación de correlaciones considerando el punto de vista ortodoxo.	<ul style="list-style-type: none"> • Computador 	20 minutos	Se espera que el estudiante, con ayuda de la simulación, comprenda ciertos aspectos de la interpretación ortodoxa.	Dudas acerca en algunas ideas de la interpretación ortodoxa.
Act. 5: Simulación Correlación desde el punto de vista realista.	Desarrollar con el estudiante la simulación de correlaciones considerando el punto de vista realista.	<ul style="list-style-type: none"> • Computador 	20 minutos	Se espera que el estudiante, con ayuda de la simulación, comprenda ciertos aspectos de la interpretación realista.	Dudas acerca en algunas ideas de la interpretación realista.
Act. 6: Confrontación de dudas generadas.	Solución a las preguntas y dudas de los estudiantes después de realizar las simulaciones.	<ul style="list-style-type: none"> • 	15 minutos	Aclarar las dudas presentadas durante el desarrollo de las actividades 3 y 4.	

Cuadro 1. Plan Estrategia de Aula.

Materiales de recurso

El único material de recurso que se usó fue el computador, ya que la simulación se realizó con la ayuda de C++ y gnuplot. C++ es un lenguaje computacional que brinda herramientas para desarrollar simulaciones y aparte de eso cuenta con la asignación de variables aleatorias, y gnuplot es un graficar que se puede vincular con C++ y el cual nos ayuda obtener graficas de dichas simulaciones.

Otros materiales fueron el tablero y diapositivas para realizar la primera actividad del cuadro 2.

Descripción de la metodología

La metodología que empleó es la misma que emplea el Profesor Barbosa (Barbosa, 2008) para comparar la metodología tradicional versus los experimentos discrepantes, pero en este caso la comparación va ser entre la metodología tradicional versus la herramienta computacional. Se hizo uso de indicadores que ayudaron a hacer una fácil comparación del método tradicional y la herramienta computacional.

Indicadores: Para evidenciar eficiencia de la herramienta computacional, se tomaron en cuenta los siguientes indicadores:

- Preguntas casuales: Este indicador nos contabilizará el número de estudiantes que realicen preguntas durante las actividades.
- Motivación: Este indicador mide el número de estudiantes que de manera voluntaria participaron en las actividades.
- Búsqueda de Información: Este indicador mide el número de estudiantes que preguntaron información acerca del tema o tenían ideas acerca del tema.
- Trabajo Cooperativo: Este indicador mide el número de estudiantes que se colaboraron durante las actividades.
- Comprensión de ideas: El número de estudiantes que lograron dar una respuesta adecuada a la preguntada dada durante las sesiones.

Estos indicadores fueron tomados en cuenta en las actividades realizadas para después comparar y analizar los datos obtenidos, y concluir qué tan eficaz es la simulación como una herramienta para la enseñanza de la interpretación ortodoxa. Se aclara que esto no mide la comprensión que logró el estudiante cuando se trabaja con la ayuda de una

herramienta computacional, como en el caso de una simulación, sino que tan eficaz puede ser esta herramienta para la motivación y el interés del estudiante (Barbosa, 2008).

3.2.. ANÁLISIS

Después de la realización de las actividades que fueron propuestas para cada sesión, se obtuvo los siguientes datos: En la primera sesión participaron 14 estudiantes, 5 mujeres y 9 hombres, con edades entre los 20 y 25 años; se obtuvieron los siguientes resultados:

Preguntas Casuales: 0 estudiantes
Motivación: 10 estudiantes
Búsqueda de la Información: 0 estudiantes
Trabajo Cooperativo: 2 estudiantes
Comprensión de ideas: 3 estudiantes

En la segunda sesión participaron 11 estudiantes, 4 mujeres y 7 hombres, con edades entre los 20 y 25 años; se obtuvieron los siguientes resultados:

Preguntas Casuales: 4 estudiantes
Motivación: 9 estudiantes
Búsqueda de la Información: 2 estudiantes
Trabajo Cooperativo: 4 estudiantes
Comprensión de ideas: 6 estudiantes

De los siguientes datos vamos a tomar los porcentajes debido a la cantidad de estudiantes que participaron es diferente, por tal motivo, es más fácil hacer la comparación entre el método tradicional y el método computacional a partir de porcentajes. Tales datos están consignados en el Cuadro 2.

Haciendo una comparación para cada indicador tenemos que:

- En Preguntas Casuales se obtuvo un 0% con el método tradicional mientras que

Indicador	Tradicional	Herramienta Computacional
Preguntas Casuales	0 %	36,36 %
Motivación	71,42 %	81,81 %
Búsqueda de la Información	0 %	18,18 %
Trabajo Cooperativo	14,28 %	72,72 %
Comprensión de ideas	21,42 %	54,54 %

Cuadro 2. Datos obtenidos durante la implementación. La columna “Tradicional” corresponde a la primera sesión y la columna “Herramienta Computacional” corresponde a la segunda sesión.

con la simulación se obtuvo un 36,36 %, mostrando una diferencia de 36,36 % mayor para la simulación.

- En Motivación se obtuvo un 71,42 % con el método tradicional mientras que con la simulación se obtuvo un 81,81 %, mostrando una diferencia de 10,39 % mayor para la simulación.
- En Búsqueda de Información se obtuvo un 0 % con el método tradicional mientras que con la simulación se obtuvo un 18,18 %, mostrando una diferencia de 18,18 % mayor para la simulación.
- En Trabajo Cooperativo se obtuvo un 14,28 % con el método tradicional mientras que con la simulación se obtuvo un 72,72 %, mostrando una diferencia de 58,44 % mayor para la simulación.
- En Comprensión de ideas se obtuvo un 21,42 % con el método tradicional mientras que con la simulación se obtuvo un 54,54 %, mostrando una diferencia de 33,12 % mayor para la simulación.

En la figura 14 se puede ver la comparación gráfica de los métodos tradicional y computacional para cada indicador.

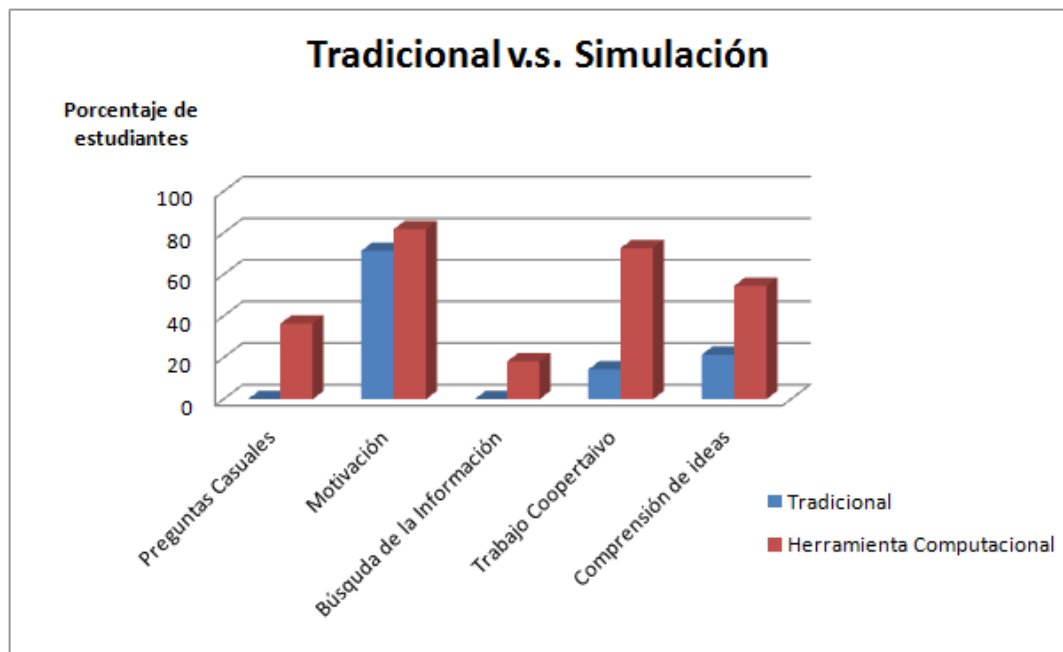


Figura 14. Gráfico Tradicional v.s. Herramienta Computacional. En este gráfico se puede ver una comparación entre los métodos tradicional y computacional de una manera mucho más fácil.

CONCLUSIONES

- De acuerdo con las gráficas realizadas a partir de los datos obtenidos, podemos ver que el algoritmo en Monte Carlo se ajusta a lo predicho por la teoría. Los puntos rojos de la de la gráfica de correlación de Einstein (ver Figura 12) se ajustan a las predicciones hechas desde punto de vista realístico, donde no existe ninguna correlación entre los espines de e^- y e^+ . Lo mismo ocurre en la gráfica de la correlación cuántica (ver Figura 13) cuyos puntos rojos se ajustan a las predicciones hechas por el pensamiento ortodoxo en donde sí existe una correlación entre los espines de e^- y e^+ .
- Se puede evidenciar en la Figura 14 que los indicadores muestran un mayor porcentaje a favor de la herramienta computacional. De acuerdo a esto se puede decir que el método computacional estimula más el interés del estudiante por la temática estudiada que el método tradicional. Sin embargo, cabe aclarar que no se pretende que con la ayuda de esta herramienta el estudiante logre una comprensión total, sino más bien, que desarrolle un interés por cierta temática, siendo éste el principal motivo por el cual el estudiante puede llegar a una mejor comprensión.

BIBLIOGRAFÍA

Akarsu, B. (2010). Einstein's Redundant Triumph Quantum Physics: An extensive Study of Teaching /Learning Quantum Mechanics in College. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* , 4 (2).

Arqueros, F., & Montesinos, G. (2003). A simple algorithm for the transport of gamma rays in a medium. *Am. J. Phys* , 71 (1), 38-45.

Aspect, A., Grangier, P., & Roger, G. (1981). Experimental Test of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. *Physical Review Letters* (49), 460-463.

Barbosa, L. (2008). Los Experimentos Discrepantes en el aprendizaje activo de la Física. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* , 2 (3), 246-252.

Bell, J. (1964). On The Eintein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* (1), 195-200.

Bohm, D. (1979). *Quantum Theory*. New York: Dover Publications, Inc.

Bohr, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* , 696-702.

Buzzo Garrao, R. (2007). Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* , 1 (1).

Çahskan, S., Sezgin Selçuk, G., & Erol, M. (2009). Student Understanding of Some Quantum. *Lat. Am. J. Phys* , 3 (2).

Cohen-Tannoudji, C., Laloë, F., & Diu, B. (1977). *Quantum Mechanics*. París: John Wiley & Sons, Inc.

de la Torre, A. C. (2000). *Física Cuántica para Filósofos*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Dirac, P. (1958). *Principios de Mecánica Cuántica*. Oxford: Oxford University Press.

Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* (47), 777-780.

Fanaro, M. d., & Otero, M. (2008). Basics Quantum Mechanics teaching in Secondary. *Lat. Am. J. Phys.* , 2 (2).

Fernandez, P., González, E., & Solbes, J. (2005). Evolución de las Representaciones Docentes en la Física Cuántica. *VII Congreso Internacional de Enseñanza de Ciencias* .

Finkelstein, N., Adams, W., Keller, C., Kohl, P., Perkins, K., Podolefsky, N., et al. (2005). When learning about the real world is better done virtually: A study of substituting computer simulations for laboratory equipment. *PHYSICAL REVIEW SPECIAL TOPICS - PHYSICS EDUCATION RESEARCH* , 1-8.

Freedman, S., & Clauser, J. (1972). Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letter* , 938-941.

Gribbin, J. (1986). *En Busca del Gato de Schrödinger*. Barcelona: Salvat Editores, S.A.

Griffiths, D. (1995). *Introduction to the Quantum Mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Hobson, A. (1996). Teaching Quantum Theory in the Introductory course. *Phys. Teach.* , 34.

Kuttner, F., & Rosenblum, B. (2010). Bell's Theorem and Eistein's 'Spooky Actions'from a Simple Thought Experimnt. *Phys. Teach.* , 124-130.

Ladj, R., Oldache, M., Khiari, C., & Belarbi, T. (2010). On students' misunderstanding of the basic concepts of Quantum Mechanics: case of Algerian Universities. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* , 4 (2).

Laloë, F. (2001). Do we really understand quantum mechanics? Satrange correlations, paradoxes, and theorems. *American Journal Physics* , 655-701.

Organista, O., Gómez, V., & Rodríguez, J. (2007). Una Idea Profunda de la Comprensión del Mundo Físico: El Principio de Superposición de Estados. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* , 1 (1).

Scherer, P. (2010). *Computational Physics: Simulation of Classical and Quantum Systems*. Munich: Springer-Verlag.

Sóbol, I. (1983). *Método de Monte Carlo*. Moscú: MIR.

Tsai, S.-H., & Landau, D. (2008). Computer simulations: A window on the static and dynamic properties of simple spin models. *Am. J. Phys* , 76 (4), 445-452.

Zhu, G., & Singh, C. (2011). Improving students' understanding of quantum mechanics via the Stern-Gerlach experiment. *Am. J. Phys.* , 79.

ANEXOS

**A.. CORRELACIÓN ENTRE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS:
PUNTO DE VISTA REALISTA**

El estado del sistema, según la visión realista, es

$$|\psi\rangle = |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle \quad (16)$$

de la parte (b) de la Figura 7 la matriz que representa al observable del espín de e^- es

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{e^-, \beta} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos \beta + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \beta + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{S}_{e^-, \beta} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sin \beta \\ \sin \beta & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{S}_{e^-, \beta} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

se hace lo mismo para la matriz que representa al observable del espín de e^+ , en últimas se tiene

$$\widehat{S}_{e^+, \alpha} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (18)$$

Después de obtener estas matrices se hallan los factores de la ecuación (6). El valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \langle \psi | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | \psi \rangle \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \widehat{S}_{e^+, \alpha} (|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle) \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle \end{aligned}$$

$\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle$ es igual a uno, entonces solo queda $\langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \cos \alpha\end{aligned}\tag{19}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle$ es

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \langle \psi | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 | \psi \rangle \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 | e^+ \downarrow \rangle\end{aligned}$$

$\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle$ es igual uno, entonces solo queda $\langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 | e^+ \downarrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}\tag{20}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ es

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle \psi | \widehat{S}_{e^-, \beta} | \psi \rangle \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \widehat{S}_{e^-, \beta} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} | e^- \uparrow \rangle\end{aligned}$$

$\langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle$ es igual a uno, entonces solo queda $\langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} | e^- \uparrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \beta \quad (21)$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle \psi | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 | \psi \rangle \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 | e^- \uparrow \rangle \end{aligned}$$

$\langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle$ es igual uno, entonces solo queda $\langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 | e^- \uparrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (22)$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle \psi | \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} | \psi \rangle \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} | e^- \uparrow \rangle \end{aligned}$$

usando las ecuaciones (19) y (21) tenemos que

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha \cos \beta \quad (23)$$

Reemplazando todos estos valores en la ecuación (6)

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= \frac{-(\hbar^2/4) \cos \alpha \cos \beta - [(\hbar/2) \cos \alpha][-(\hbar/2) \cos \beta]}{\sqrt{(\hbar^2/4)(\hbar^2/4)}} \\ E(\alpha, \beta) &= \frac{-(\hbar^2/4) \cos \alpha \cos \beta + (\hbar^2/4) \cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{(\hbar^2/4)(\hbar^2/4)}} \\ E(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

**B.. CORRELACIÓN ENTRE ESPINES DE DOS PARTÍCULAS:
PUNTO DE VISTA ORTODOXO**

El estado del sistema, según la visión ortodoxa, es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \quad (25)$$

de la parte (b) de la Figura 7 la matriz que representa al observable del espín de e^- es (17) y la matriz que representa al observable del espín de e^+ es (18) Ahora, el valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle$ es

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \langle \psi | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | \psi \rangle$$

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) \right] \widehat{S}_{e^+, \alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) (\widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - \widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle)$$

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle - \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle - \langle e^- \uparrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \uparrow \rangle + \langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \uparrow \rangle)$$

$\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle$ y $\langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle$ son iguales a uno, $\langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle$ y $\langle e^- \uparrow | e^- \downarrow \rangle$ son iguales a 0. Entonces solo queda $\langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \downarrow \rangle$ y $\langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} | e^+ \uparrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] \\
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar}{2} \cos \alpha + \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \right] \\
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^3 \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle$ es

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) \right] \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \\
&\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle - |e^- \downarrow \rangle \otimes |e^+ \uparrow \rangle) \right] \\
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle &= \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) (\widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle \\
&\quad - \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^- \downarrow \rangle \otimes |e^+ \uparrow \rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \downarrow \rangle - \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \downarrow \rangle \\
&\quad - \langle e^- \uparrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \uparrow \rangle + \langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \uparrow \rangle)
\end{aligned}$$

$\langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle$ y $\langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle$ son iguales a uno, $\langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle$ y $\langle e^- \uparrow | e^- \downarrow \rangle$ son iguales a 0, la matriz de $\widehat{S}_{e^+, \alpha}^2$ es la matriz identidad como se pudo ver en el anexo anterior. Entonces solo queda $\langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \downarrow \rangle$ y $\langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 |e^+ \uparrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \right) \\ \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}\tag{27}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ es

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow | \rangle \right] \widehat{S}_{e^-, \beta} \\ &\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle - |e^- \downarrow \rangle \otimes |e^+ \uparrow \rangle) \right] \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow | \rangle \left(\widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow \rangle \otimes |e^+ \uparrow \rangle \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle e^+ \uparrow | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow \rangle - \langle e^+ \downarrow | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle e^+ \uparrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow \rangle + \langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow \rangle \right)\end{aligned}$$

$\langle e^+ \uparrow | e^+ \uparrow \rangle$ y $\langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle$ son iguales a uno, $\langle e^+ \downarrow | e^+ \uparrow \rangle$ y $\langle e^+ \uparrow | e^+ \downarrow \rangle$ son iguales a 0. Entonces solo queda $\langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow \rangle$ y $\langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow \rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}\langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar}{2} \cos \beta - \frac{\hbar}{2} \cos \beta \right] \\ \langle \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= 0\end{aligned}\tag{28}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle$ es

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) \right] \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) (\widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle)$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle e^+ \uparrow | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \downarrow\rangle - \langle e^+ \downarrow | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \downarrow\rangle - \langle e^+ \uparrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \uparrow\rangle + \langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 |e^- \uparrow\rangle)$$

$\langle e^+ \uparrow | e^+ \uparrow \rangle$ y $\langle e^+ \downarrow | e^+ \downarrow \rangle$ son iguales a uno, $\langle e^+ \downarrow | e^+ \uparrow \rangle$ y $\langle e^+ \uparrow | e^+ \downarrow \rangle$ son iguales a 0, la matriz de $\widehat{S}_{e^-, \beta}^2$ es la matriz identidad como se puede ver en el anexo anterior. Entonces solo queda $\langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \alpha}^2 |e^- \downarrow\rangle$ y $\langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \alpha}^2 |e^- \uparrow\rangle$, reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{29}$$

El valor de $\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle$ es

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow | \rangle \right] \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \right]$$

$$\langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle = \frac{1}{2} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow | \rangle (\widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle)$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^+, \alpha} \otimes \widehat{S}_{e^-, \beta} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^+ \uparrow\rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow\rangle - \\ &\langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^+ \uparrow\rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \downarrow\rangle - \langle e^+ \uparrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^+ \downarrow\rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow\rangle \\ &+ \langle e^+ \downarrow | \widehat{S}_{e^+, \alpha} |e^+ \downarrow\rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \widehat{S}_{e^-, \beta} |e^- \uparrow\rangle) \end{aligned}$$

reemplazando esto por matrices se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \\ &- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \\
&- \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \\
&- \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\
&+ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \\
\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{4} [-\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \cos \alpha] \\
\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4} [\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \alpha] \\
\langle \widehat{S}_{e^-, \beta}^2 \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha - \beta \tag{30}
\end{aligned}$$

Reemplazando todos estos valores en la ecuación (6)

$$\begin{aligned}
E(\alpha, \beta) &= \frac{-(\hbar^2/4) \cos(\alpha - \beta) - 0 \cdot 0}{\sqrt{(\hbar^2/4)(\hbar^2/4)}} \\
E(\alpha, \beta) &= \frac{-(\hbar^2/4) \cos(\alpha - \beta)}{(\hbar^2/4)} \\
E(\alpha, \beta) &= -\cos \alpha - \beta \tag{31}
\end{aligned}$$

C.. MONTE CARLO EN C++: DECAIMIENTO DE NÚCLEOS TIPO

X

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;
int main ()
{
    srand(time(NULL));
    double l;//vida media de la partícula
    double dt, t, T, r, n, nT;
    int n0, i;
    ofstream h("Metodo de Montecarlo.txt"), c ("comando");

    cout<<"Número Inicial de Partículas=";
    cin>>n0;

    cout<<"Valor de Vida Media de la Partícula=";
    cin>>l;

    cout<<"Delta de Tiempo=";
    cin>>dt;

    cout<<"Tiempo máximo=";
    cin>>T;

    t=0;
    n=n0;
    h<<t<<" "<<n<<endl;
    while(t<=T){
        t+=dt;

        for(i=1; i<=n; i++){
            r=double(rand())/RAND_MAX;//número aleatorio

            if(r<dt/l)n--;//número de partículas (valor MonteCarlo)

        }

        h<<t<<" "<<n<<endl;

    }
    h.close();
    c<<"set xlabel 'Tiempo (días)'"<<endl;
    c<<"set ylabel 'Número de Núcleos X'"<<endl;
```

```
c<<"plot 'Metodo de Montecarlo.txt' u 1:2 w l t 'MonteCarlo', 1000*exp(-x/  
c.close();  
system("gnuplot<comando");  
system("pause");  
return 0;  
}
```

D.. MONTE CARLO EN C++: CAJA DE PARTÍCULAS

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;
int main (){
    srand(time(NULL));
    int i, t, x;
    double r, N, ni,nd;
    ofstream p("Montecarlo.txt"),j("Teorico.txt"),c("comando");

    cout<<"Introduzca el numero de particulas=";
    cin>>N;
    cout<<"Introduzca un tiempo mayor al numero de particulas=";
    cin>>t;

    ni=N;

    for(i=0; i<=t; i++){
        r= (rand()/((double)RAND_MAX));//generar número aleatorio

        p<<i<<" "<<ni<<endl;
        nd=(N/2)*(1+exp(-2*i/N));
        j<<i<<" "<<nd<<endl;
        if(r <= (ni/N)){
            ni -= 1;
        }
        else{
            ni += 1;
        }
    }

    p.close();
    c<<"set xlabel 'Tiempo (seg.)'"<<endl;
    c<<"set ylabel 'Número de Partículas en la parte izquierda'"<<endl;
    c<<"plot 'Montecarlo.txt' u 1:2 w l t 'MonteCarlo', 'Teorico.txt' w l t 'Teórico'\n pa
    c.close();
    system ("pgnuplot<comando");
    system ("pause");
    return 0;}
```

E.. MONTE CARLO EN C++: CORRELACIÓN REALISTA

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;

const int No=1000;
const double ALP=2*(M_PI); //maximo valor de alp
const double dphi=30*(M_PI)/360; //variacion de alp
ofstream d("espines.txt"),c("comando");

//declaración de funciones
double sp(double & alp,double & beta, double & a); //espin del positron
double se(double & alp,double & beta, double & b); //espin del electron
void correlacion(double & beta, double & alp, double & a,double & b,double & E); //correlac

//definicion de funciones
double sp(double & alp,double & beta, double & a){

    if(a>2*dphi){
        return cos(alp);
    }
    else{
        return sin(alp);
    }
}

double se(double & alp,double & beta, double & b){

    if(b>2*dphi){
        return sin(beta);
    }
    else{
        return cos(beta);
    }
}

void correlacion(double & beta, double & alp, double & a,double & b,double & E){
    double Se, Se2; //promedios del electron
    double Sp, Sp2; //promedios del positron
    double S; //promedios del producto
    int N;
```

```

for(N=1 ; N<=No; N++){
    a=(rand()/((double)RAND_MAX));//número aleatorio entre 0 y 1
    Sp+= sp(alp,beta,a);
    Sp2+= sp(alp,beta,a)*sp(alp,beta,a);
    b=(rand()/((double)RAND_MAX));
    Se+= se(alp,beta,b);
    Se2+= se(alp,beta,b)*se(alp,beta,b);
    S+= se(alp,beta,b)*sp(alp,beta,a);
}

Sp = Sp/No;
Se=Se/No;
Sp2=Sp2/No;
Se2=Se2/No;
S=S/No;
E=(S - Sp*Se)/sqrt(Se2*Sp2);
}

int main(void){
    srand(time(NULL));
    double a,b;
    double alp, beta, E;

    beta=0.0;
    alp=0.0;
    cout<<dphi;

    while(alp<=ALP){
        correlacion(beta,alp,a,b,E);
        d<<alp-beta<<" "<<E<<endl;
        alp+=dphi;
    }

    d.close();
    c<<"set xrange [-1:1.05]"<<endl;
    c<<"plot 'espines.txt',-cos(x)\n pause -1\n";
    c.close();
    system("pgnuplot<comando");
    system("pause");
    return 0;
}

```

F.. MONTE CARLO EN C++: CORRELACIÓN ORTODOXA

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;

const int No=1000;
const double ALP=2*(M_PI);//maximo valor de alp
const double dalp=30*(M_PI)/360;//variacion de alp
ofstream d("espines.txt"),c("comando");

//declaración de funciones
double sp(double & alp,double & beta, double & a);//espin del positron
double se(double & alp,double & beta, double & a);//espin del electron
void correlacion(double & beta, double & alp, double & a,double & E);//correlacion

//definicion de funciones
double sp(double & alp,double & beta, double & a){

    if(a<2*dalp){
        return sin(alp)+cos(alp);
    }
    else{
        return -cos(alp)+sin(alp);
    }
}

double se(double & alp,double & beta, double & a){

    if(a<2*dalp){
        return sin(beta)-cos(beta);
    }
    else{
        return cos(beta)+sin(beta);
    }
}

void correlacion(double & beta, double & alp, double & a,double & E){
    double Se, Se2;//promedios del electron
    double Sp, Sp2;//promedios del positron
    double S;//promedios del producto
    int N;
```

```

for(N=1 ; N<=No; N++){
    a=(rand()/(double)RAND_MAX);//número aleatorio entre 0 y 1
    Sp+= sp(alp,beta,a);
    Se+= se(alp,beta,a);
    Sp2+= sp(alp,beta,a)*sp(alp,beta,a);
    Se2+= se(alp,beta,a)*se(alp,beta,a);
    S+= se(alp,beta,a)*sp(alp,beta,a);
}

Sp = Sp/No;
Se=Se/No;
Sp2=Sp2/No;
Se2=Se2/No;
S=S/No;
E=(S - Sp*Se)/(Se2*Sp2);
}

```

```

int main(void){
    srand(time(NULL));
    double a;
    double alp, beta, E;

    beta=0.0;
    alp=0.0;
    cout<<dphi;

    while(alp<=ALP){
        correlacion(beta,alp,a,E);
        d<<alp-beta<<" "<<E<<endl;
        alp+=dphi;
    }

    d.close();
    c<<"set yrange [-1:1.05]"<<endl;
    c<<"plot 'espines.txt',-cos(x)\n pause -1\n";
    c.close();
    system("pgnuplot<comando");
    system("pause");
    return 0;
}

```