

UNA SERIE DE TAREAS ENFOCADAS HACIA LA ENSEÑANZA DE LA  
PROBABILIDAD CLÁSICA Y FRECUENCIAL A ESTUDIANTES  
DE GRADOS 8° Y 9°  
(REVISIÓN Y RÉPLICA)

DEYSI BENAVIDES RAMÍREZ

WILSON RODRÍGUEZ GÁMEZ

JOSÉ TORRES MACÍAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
BOGOTÁ

2012

UNA SERIE DE TAREAS ENFOCADAS HACIA LA ENSEÑANZA DE LA  
PROBABILIDAD CLÁSICA Y FRECUENCIAL A ESTUDIANTES  
DE GRADOS 8° Y 9°  
(REVISIÓN Y RÉPLICA)

DEYSI BENAVIDES RAMÍREZ

WILSON RODRÍGUEZ GÁMEZ

JOSÉ TORRES MACÍAS

Trabajo de grado presentado para optar al título de Especialista en Educación  
Matemática

Asesor

Felipe Fernández Hernández

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA DE TECNOLOGÍA

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2012

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

A nuestros hijos,  
quienes son  
nuestra inspiración  
y felicidad.

## AGRADECIMIENTOS

Fue necesaria la comprensión y apoyo incondicional de varias personas para culminar de manera satisfactoria este trabajo de grado y a las cuales queremos agradecer.

A Dios, por habernos permitido llegar a este momento brindándonos salud para alcanzar nuestros objetivos.

A nuestras familias, por su apoyo moral y ayuda para la realización del presente trabajo.

A nuestro asesor, por su acompañamiento, tiempo y colaboración en el desarrollo del trabajo de grado.

| <b>1. Información General</b> |                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tipo de documento</b>      | Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Educación Matemática                                                                                                                                                      |
| <b>Acceso al documento</b>    | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central                                                                                                                                                                                |
| <b>Título del documento</b>   | Una serie de tareas enfocadas hacia la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial a estudiantes de secundaria (Revisión y Réplica)                                                                                         |
| <b>Autor(es)</b>              | Benavides Ramírez, Deysi Yanira; Rodríguez Gámez, Wilson Hely; Torres Macías, José Efraín                                                                                                                                          |
| <b>Director</b>               | Felipe Fernández Hernández                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Publicación</b>            | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012.                                                                                                                                                                                     |
| <b>Unidad Patrocinante</b>    |                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Palabras Claves</b>        | ESPACIO MUESTRAL; ESTÁNDARES EN EDUCACIÓN; EVENTOS; EVENTOS EQUIPROBABLES; EXPERIMENTO ALEATORIO; FRECUENCIA ABSOLUTA; FRECUENCIA RELATIVA; PROBABILIDAD CLÁSICA; PROBABILITY EXPLORER; PROBABILIDAD FRECUENCIAL; SIMULACIÓN; TICS |

| <b>2. Descripción</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Éste trabajo de grado, es un estudio de profundización en la aplicación de experimentos de enseñanza, en éste caso en particular la enseñanza de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en grado 9°. Basados en la documentación como marco teórico, incluido en ésta una monografía de pregrado en el mismo tema y centrándonos en una actividad en especial, una estructuración muy somera de la referida actividad se presenta a continuación.</p> <p>La actividad está dividida en cuatro partes, a saber:</p> <p>Parte I: Introducción de nociones básicas.</p> <p>Parte II: Sondeo de conocimientos previos (cuestionario).</p> <p>Parte III: Manual de uso del software Probability Explorer.</p> <p>Parte IV: Simulaciones en el software.</p> |

Los hallazgos debidos a la implementación de la actividad anterior están consagrados al final, al igual, que algunas consideraciones.

### 3. Fuentes

Para el desarrollo de éste trabajo se consultaron 4 libros, 2 artículos, 2 páginas internet, 1 revista, 1 trabajo de investigación y 1 trabajo de pregrado. Entre ellos se destacan:

Batanero, C. (2005). Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 247-263.

Blanco, L. (2004). Probabilidad. Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Rincón, J. y Urian, J. (2011). Una Serie de Tareas Enfocadas Hacia la Enseñanza de la Probabilidad Clásica y Frecuencial a Estudiantes de Grados 8° y 9°. Bogotá D.C.: UPN.

### 4. Contenidos

El trabajo de manera general contiene:

1. JUSTIFICACIÓN: Se justifica el uso de las probabilidades en diferentes disciplinas, en cuanto al análisis de la información, la toma de decisiones y capacidad de realizar pronósticos en el comportamiento de un evento. Además, se justifica el uso de la tecnología como herramienta didáctica en el proceso educativo a través de la implementación de los hallazgos del Probability Explorer, en torno a la probabilidad clásica y frecuencial, (tomado del trabajo de pregrado presentado por Rincón y Urian, 2011).

2. DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO: Se busca promover una mejor comprensión de las concepciones de probabilidad Clásica y Frecuencial, a través de una actividad propuesta. Además, se plantea la réplica al trabajo base “Una serie de tareas enfocadas hacia la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial a estudiantes de grados 8° y 9°”.

3. INTENCIONALIDAD U OBJETIVOS: El objetivo global consiste en estudiar una propuesta de enseñanza relativa a las concepciones de probabilidad, con el fin de aplicarla y adecuarla a un grupo de estudiantes de secundaria y reportar los efectos de su implementación. Todo con miras a ampliar el horizonte de estudio.

4. MARCO TEÓRICO: En el cual se exhiben: 1) Una presentación que hace referencia a la teoría que apoya la realización de este trabajo. 2) Los antecedentes históricos relacionando al origen de las probabilidades, sus principales autores, desde Cardano hasta Kolmogorov. 3) Los referentes teóricos:

i) De Probabilidad, en el que se relacionan los cuatro enfoques a) Clásico, b) Frecuencial, c)

Subjetivo y d) Matemático Estructural.

ii) De La Enseñanza, donde se trata la forma como las probabilidades solo se ocupan del enfoque Clásico y Frecuencial, dejando de lado el subjetivo. También se resaltan las acciones de los entes gubernamentales, para el caso de los lineamientos y estándares curriculares.

5. LA ACTIVIDAD: Hace referencia al entorno de la actividad a implementar. Trata la problemática que origina la implementación, el desarrollo de la actividad y la recolección de datos.

6. LA IMPLEMENTACIÓN: En primera instancia se plantean los objetivos de aprendizaje de la actividad, luego la trayectoria hipotética de aprendizaje, posteriormente se hace la descripción general de la actividad y por último la intención de las tareas propuestas.

7. RESULTADOS: Es la parte concluyente de la actividad, donde se parte de la configuración de los resultados, haciendo agrupaciones mediante focos de observación.

8. CONCLUSIONES: En ellas se plasman aspectos relevantes de todo éste escrito a manera de comentarios finales y se plantea una visión prospectiva de los resultados.

### **5. Metodología**

La metodología adaptada para el desarrollo de éste trabajo de grado fue en primera instancia la lectura del trabajo base denominado “Una serie de tareas enfocadas hacia la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial a estudiantes de grados 8º y 9º”, propuesto por los estudiantes de pregrado, Jenny Rincón Tapias y Jonathan Urian Flórez.

Luego, se escogió una de las dos actividades propuestas por ellos (Actividad 1: uso del Probability Explorer) y posteriormente se hicieron las modificaciones consideradas pertinentes para su implementación. Se reportaron los hallazgos mediante un análisis hecho a partir de una configuración de resultados.

### **6. Conclusiones**

Con la actividad propuesta se logró establecer una relación entre la probabilidad clásica y frecuencial mediante la experimentación vía software educativo Probability Explorer. Además, el desarrollo mismo del trabajo permitió un avance en cuanto a nociones y/o conceptos básicos, tales como: Experimento, experimento aleatorio, evento, espacio muestral, simulación y eventos equiprobables.

|                       |                                                                                              |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Elaborado por:</b> | Benavides Ramírez, Deysi Yanira; Rodríguez Gámez, Wilson Hely;<br>Torres Macías, José Efraín |
| <b>Revisado por:</b>  | Felipe Fernández Hernández                                                                   |

|                                              |    |    |      |
|----------------------------------------------|----|----|------|
| <b>Fecha de elaboración del<br/>Resumen:</b> | 12 | 10 | 2012 |
|----------------------------------------------|----|----|------|

## TABLA DE CONTENIDO

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN .....              | 5  |
| 1. ASPECTOS PRELIMINARES.....                     | 17 |
| 1.1 JUSTIFICACIÓN .....                           | 17 |
| 1.2 DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO .....       | 18 |
| 1.3 INTENCIONALIDAD U OBJETIVOS.....              | 19 |
| 1.3.1 Objetivo general.....                       | 19 |
| 1.3.2 Objetivos específicos .....                 | 19 |
| 2. MARCO TEÓRICO.....                             | 20 |
| 2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS.....                  | 20 |
| 2.2 REFERENTES TEÓRICOS .....                     | 23 |
| 2.2.1 De La Probabilidad .....                    | 23 |
| 2.2.2 De la Enseñanza.....                        | 26 |
| 3. ACTIVIDAD.....                                 | 32 |
| 3.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ACTIVIDAD.....      | 32 |
| 3.2 ENTORNO .....                                 | 32 |
| 3.3 ACTIVIDAD A IMPLEMENTAR.....                  | 35 |
| 3.3.1 Objetivos de aprendizaje .....              | 35 |
| 3.3.2 Trayectoria hipotética de aprendizaje ..... | 36 |
| 3.3.3 Intención de las tareas propuestas .....    | 37 |
| 3.3.4 Ideas para las socializaciones .....        | 37 |

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| 3.3.5 Descripción detallada de la actividad..... | 38 |
| 4. RESULTADOS .....                              | 50 |
| 4.1 CONFIGURACIÓN DE RESULTADOS .....            | 50 |
| 4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....                 | 71 |
| 5. CONCLUSIONES.....                             | 73 |
| REFERENCIAS.....                                 | 75 |
| ANEXO.....                                       | 76 |

## LISTA DE CUADROS

|           | pág                                                       |
|-----------|-----------------------------------------------------------|
| Cuadro 1  | Pregunta 1 de la Parte II. Primer Foco de observación 50  |
| Cuadro 2  | Pregunta 1 de la Parte II. Segundo Foco de observación 51 |
| Cuadro 3  | Pregunta 1 de la Parte II. Tercer Foco de observación 51  |
| Cuadro 4  | Pregunta 2 de la Parte II. Primer Foco de observación 52  |
| Cuadro 5  | Pregunta 2 de la Parte II. Segundo Foco de observación 52 |
| Cuadro 6  | Pregunta 2 de la Parte II. Tercer Foco de observación 53  |
| Cuadro 7  | Pregunta 3 de la Parte II. Único Foco de observación 53   |
| Cuadro 8  | Pregunta 4 de la Parte II. Único Foco de observación 54   |
| Cuadro 9  | Pregunta 5 de la Parte II. Primer Foco de observación 54  |
| Cuadro 10 | Pregunta 5 de la Parte II. Segundo Foco de observación 55 |
| Cuadro 11 | Pregunta 5 de la Parte II. Tercer Foco de observación 56  |
| Cuadro 12 | Pregunta 6 de la Parte II. Primer Foco de observación 56  |
| Cuadro 13 | Pregunta 6 de la Parte II. Segundo Foco de observación 57 |
| Cuadro 14 | Pregunta 6 de la Parte II. Tercer Foco de observación 57  |
| Cuadro 15 | Pregunta 7 de la Parte II. Primer Foco de observación 58  |
| Cuadro 16 | Pregunta 7 de la Parte II. Segundo Foco de observación 58 |
| Cuadro 17 | Pregunta 7 de la Parte II. Tercer Foco de observación 59  |

|           |                                                        |    |
|-----------|--------------------------------------------------------|----|
| Cuadro 18 | Pregunta 8 de la Parte II. Primer Foco de observación  | 59 |
| Cuadro 19 | Pregunta 8 de la Parte II. Segundo Foco de observación | 60 |
| Cuadro 20 | Pregunta 8 de la Parte II. Tercer Foco de observación  | 60 |
| Cuadro 21 | Pregunta 8 de la Parte II. Cuarto Foco de observación  | 60 |
| Cuadro 22 | Pregunta 2 de la Parte IV. Único Foco de observación   | 61 |
| Cuadro 23 | Pregunta 3 de la Parte IV. Único Foco de observación   | 62 |
| Cuadro 24 | Primera parte de la pregunta 4 de la Parte IV          | 63 |
| Cuadro 25 | Pregunta 4 de la Parte IV. Primer Foco de observación  | 63 |
| Cuadro 26 | Pregunta 4 de la Parte IV. Segundo Foco de observación | 64 |
| Cuadro 27 | Primera parte de la pregunta 5 de la Parte IV          | 64 |
| Cuadro 28 | Pregunta 5 de la Parte IV. Primer Foco de observación  | 65 |
| Cuadro 29 | Pregunta 5 de la Parte IV. Segundo Foco de observación | 65 |
| Cuadro 30 | Primera parte de la pregunta 6 de la Parte IV          | 66 |
| Cuadro 31 | Pregunta 6 de la Parte IV. Primer Foco de observación  | 66 |
| Cuadro 32 | Pregunta 6 de la Parte IV. Segundo Foco de observación | 67 |
| Cuadro 33 | Pregunta 6 de la Parte IV. Tercer Foco de observación  | 67 |
| Cuadro 34 | Pregunta 7 de la Parte IV. Primer Foco de observación  | 68 |
| Cuadro 35 | Pregunta 7 de la Parte IV. Segundo Foco de observación | 68 |
| Cuadro 36 | Pregunta 7 de la Parte IV. Tercer Foco de observación  | 69 |
| Cuadro 37 | Algunas impresiones de la actividad                    | 70 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                          | pág |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1 Ventana para seleccionar un experimento                                                         | 41  |
| Figura 2 Ventana del experimento “Bag of Marbles”                                                        | 42  |
| Figura 3 Ventana para seleccionar la cantidad de pimpones                                                | 42  |
| Figura 4 Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de simulación)                                  | 43  |
| Figura 5 Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de “Weight”)                                    | 43  |
| Figura 6 Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Base on What’s<br>in the Bag”                         | 43  |
| Figura 7 Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Base on What’s<br>in the Bag” (Show Fraction)         | 44  |
| Figura 8 Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Base on What’s<br>in the Bag” (ícono de Show Percent) | 44  |
| Figura 9 Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Base on What’s<br>in the Bag” (Show Percent)          | 44  |
| Figura 10 Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de LineUp)                                     | 45  |
| Figura 11 Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de Data Table)                                 | 45  |
| Figura 12 Ventana de “Data Table”                                                                        | 45  |
| Figura 13 Barra de tareas del Probability Explorer                                                       | 46  |



## INTRODUCCIÓN

Los autores de éste trabajo de grado, ponen a consideración de los jurados y los lectores en general, éste escrito para optar al título de Especialistas en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. En los siguientes acápite se encuentra el planeamiento y aplicación de una actividad en la enseñanza de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en grado 9°. Basados en una documentación previa y a la vez en un trabajo de pregrado (monografía) en el tema.

Éste trabajo es en esencia de profundización y se encuadra dentro de los lineamientos emanados por el Departamento de Matemáticas, en la facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional.

En un primer capítulo, se describe el objeto de estudio y se trazan las intenciones a seguir, entre estas:

- Profundizar en la conceptualización de las concepciones clásica y frecuencial de la probabilidad.
- Seleccionar y adaptar las tareas de enseñanza propuestas por Rincón y Urian (2011) al contexto de aplicación escolar elegido.
- Analizar los resultados de la implementación llevada a cabo.

En un capítulo siguiente, se evidencia marco teórico, el cual permitió exponer qué partes de la teoría respaldan todo lo aquí planeado y aplicado. También permitió advertir que hay muchos interrogantes que surgen en la medida que se desarrolla la documentación. En suma, éste capítulo sirvió para orientar en gran medida la forma de llevar a cabo el estudio.

Los dos capítulos siguientes son dedicados en su totalidad a la actividad, en cuanto al entorno, las tareas propuestas, la implementación y/o aplicación, la configuración de los resultados y el análisis de los mismos. Éste estudio culmina

con algunas conclusiones a manera de consideraciones, que permiten consolidar la labor de los autores en éste tema. Así se da la bienvenida a usted amigo lector, a un estudio de profundización en una parte de la enseñanza en lo concerniente a la probabilidad.

## 1. ASPECTOS PRELIMINARES

### 1.1 JUSTIFICACIÓN

La estadística –con la probabilidad incluida- se ha convertido en un efectivo método para describir, relacionar y analizar datos económicos, políticos, sociales, biológicos y físicos, entre otros. Pero no solo se trata de reunir y tabular información, sino también de la posibilidad de tomar decisiones acertadas y tener la capacidad de realizar pronósticos del comportamiento de un evento. Es conocido que los experimentos aleatorios no se pueden predecir con exactitud, pues la influencia del azar no hace posible tal predicción y más si se piensa en que los eventos no son periódicos, por consiguiente solo se acercará a una probabilidad de ocurrencia.

De manera que, la estadística es casi siempre promocionada como herramienta de análisis, pero no se ha popularizado en los currículos escolares su enseñanza. Se ha tratado de fomentar el razonamiento estadístico, más que el aprendizaje rutinario y descontextualizado de conceptos y propiedades. En éste sentido la tecnología proporciona la aplicación de la estadística con más facilidad, lo que permite prestar más importancia a las actividades interpretativas que al cálculo rutinario. Batanero y Díaz (2011) sugieren que es muy importante que el estudiante tome conciencia de la trascendencia de elegir un método adecuado y adquiera un lenguaje suficiente, o consultar a un estadístico en los casos en que dude sobre la elección de dicho método (pág. 7). En resumen, se encuentra una excusa en la enseñanza de la estadística para desarrollar el estudio.

Siendo un requisito de grado en la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, se realiza éste trabajo con el ánimo de complementar un trabajo iniciado por estudiantes de pregrado en torno a dos concepciones de la probabilidad: la clásica y la frecuencial (Rincón y Urian, 2011). Además, éste estudio se inicia motivado por el énfasis de la estadística para la

Especialización mencionada, así pues, es claro que la importancia de la estadística es una estimulación más en el desarrollo de éste escrito.

Por otro lado, urge la necesidad de establecer mejoras –si es posible- en el nivel de enseñanza-aprendizaje en Estadística debido a la creciente demanda en el uso de métodos estadísticos cada vez más sofisticados en nuestro país. Por ello, se sabe que se contribuirá con éste estudio a la línea de investigación de Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional implementando los hallazgos del mismo a nivel de educación media en colegios (grado 9°), reforzando el temario a desarrollar que sugiere el Ministerio de Educación establecido en los lineamientos curriculares.

## 1.2 DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

Se pretende abordar en la educación escolar la brecha que existe entre las concepciones de probabilidad desde el punto de vista teórico (probabilidad clásica) y desde el punto de vista experimental (probabilidad frecuencial). Será uno de los propósitos de éste estudio promover una mejor comprensión de estas concepciones y así procurar disminuir la distancia conceptual existente entre dichas concepciones.

El trabajo base realizado por Rincón y Urian (2011) proporciona un marco de entrada en el cual se puede cotejar la conceptualización y características del enfoque Clásico versus el Frecuencial, de manera que, se obtenga conclusiones con respecto al referido cotejo.

Sin embargo, también se debe implementar una de las actividades allí (en el trabajo base) propuestas, como réplica de lo ya hecho o como una primera vez de aplicación, en coherencia con parte del título “Una serie de tareas enfocadas hacia la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial a estudiantes de grados 8° y 9°”.

### 1.3 INTENCIONALIDAD U OBJETIVOS

Los propósitos que orientan éste trabajo de grado se describen a continuación.

#### 1.3.1 Objetivo general

Estudiar una propuesta de enseñanza relativa a las concepciones de probabilidad clásica y frecuencial con el fin de adecuarla y aplicarla a un grupo de estudiantes de secundaria y reportar los efectos de su implementación.

#### 1.3.2 Objetivos específicos

- Profundizar en la conceptualización de las concepciones clásica y frecuencial de la probabilidad.
- Seleccionar y adaptar las tareas de enseñanza propuestas por Rincón y Urian (2011) al contexto de aplicación escolar elegido.
- Analizar los resultados de la implementación llevada a cabo.

## 2. MARCO TEÓRICO

Es necesario en éste segundo capítulo considerar algunos aspectos teóricos, pues, de éste modo se deja ver que hay “trozos<sup>1</sup>” o “pedazos” de la teoría, que apoyan las pretensiones en éste escrito. También es necesidad indagar en otras visiones que tengan relación con el tema principal, ampliando así el espectro central de éste trabajo.

De manera que, a través de la revisión de documentos (documentación) relacionados con la temática, se orientó con respecto al modo de llevar el estudio. Además, ayuda a reparar en algunos aciertos o errores que se advierta con anterioridad en otros trabajos. En efecto, al acudir a los antecedentes históricos y luego a algunos referentes teóricos, se informa de cómo ha sido tratada la problemática específica de éste escrito.

La forma que se ha dado a este marco, debe propiciar de algún modo, extender el horizonte del estudio -evitando sobredimensionamientos-. Debe conducir a la sustentación de la trayectoria hipotética y además –porque no- inspirar nuevos interrogantes de investigación.

En definitiva, éste marco debe servir como ayuda a la interpretación o análisis de los resultados en la actividad implementada. Quedando así, cumplidas todas las expectativas.

### 2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En cuanto a los acontecimientos históricos a los que se hará referencia, son una síntesis extraída de la lectura de los primeros capítulos del libro “Probabilidad” de Blanco, Liliana (2004). Realizando cortes por siglos (los más recientes), esbozando las características y personajes más destacados allí. Se desarrollará de ésta forma la sección, considerando tener mejores contextos y/o explicaciones.

---

<sup>1</sup> Acápites o Tópicos en una teoría.

Se comienza, diciendo que, es difícil encontrar trabajos “serios”<sup>2</sup> en teoría de la probabilidad en la antigüedad, refiriéndose a siglos cercanos después de Cristo. Sin embargo, la humanidad ha relacionado siempre la probabilidad con los juegos de azar y la ha separado de la estadística, a pesar de reconocer una fuerte relación entre ellas. Tal vez, desde el siglo XVI se comienza a formalizar un poco la teoría con el matemático italiano Gerolamo Cardano, quien fue uno de los primeros en tratar el azar y de matematizarlo de alguna manera.

En los siglos XVII y XVIII se hicieron importantes avances, se cree que fue debido en gran parte al desarrollo del cálculo infinitesimal, sobresalen: Ley de los grandes números<sup>3</sup> -Tal vez originando *la primera noción de probabilidad frecuencial*, en el entendido del comportamiento asintótico- y el teorema de DeMoivre\_Laplace de 1733, 1785 y 1812. A pesar de estos aportes, no se contaba con una buena precisión de los conceptos básicos para esa época, *quizá era la subjetividad la que reinaba en la idea que se tenía de probabilidad*. En ese momento ya se conocía la famosa definición de Laplace, del concepto de probabilidad como el cociente de los casos favorables entre los casos posibles, que no es otra cosa que lo que hoy se conoce como la *definición clásica de probabilidad*, sin dejar de anotar, que es bajo el supuesto de equiprobabilidad de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El siglo XIX y comienzos del XX estuvieron marcados por sendas discusiones, con respecto a la equiprobabilidad de los eventos, se dice que el mismo Markov (1912) tuvo problemas al respecto. También, a comienzos del siglo XX, a pesar de haberse ocupado del tema de formalización famosos matemáticos, como Cardano, Fermat, Bernoulli, Laplace, Poisson y Gauss, la teoría de la probabilidad no era reconocida como una disciplina empírica en el medio académico, siendo esto un gran error para dicha teoría, en aras de la expansión a otras ramas del saber. “La teoría de la probabilidad no sólo es atractiva por ser una teoría matemática

---

<sup>2</sup> Hace referencia a trabajos trascendentales.

<sup>3</sup> Ley debida a James Bernoulli

compleja sino por múltiples aplicaciones a otros campos del conocimiento científico. Su amplia gama de aplicaciones abarca tópicos en física, química, genética, ecología, comunicaciones, demografía y finanzas, entre otros muchos.” (Blanco, 2004,p.2)

En 1901 G. Bohlmann, propuso una primera axiomatización, él define la probabilidad de un evento  $E$  como un número no negativo  $p(E)$  para el cual se define:

- Si  $E$  es un evento seguro entonces  $p(E)=1$
- Si  $E_1$  y  $E_2$  son dos eventos, tales que ellos ocurren simultáneamente con probabilidad cero, entonces la probabilidad de que  $E_1$  o  $E_2$  ocurran es igual a  $p(E_1)+p(E_2)$ .

Para 1907 el italiano Ugo Broggi en su obra titulada “*Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung*” (los axiomas del cálculo de probabilidades), consignó una definición difusa de evento, aun así, se considera éste trabajo como el predecesor de los trabajos de Kolmogorov.

Afortunadamente y gracias a los estudios de Fréchet y Caratheodory en teoría de la medida en 1933 el matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) axiomatizó la teoría de la probabilidad, quedando definidos rigurosamente los conceptos de espacio de probabilidad, evento, variable aleatoria, independencia de eventos y de variables aleatorias, probabilidad condicional, entre otros. Con lo anterior no solamente se formalizó el cálculo de probabilidades, sino que, también quedaron los cimientos de la teoría de los procesos estocásticos. De esta manera, se asiste desde entonces a la *estructuración matemática de la teoría de la probabilidad*.

Después del panorama anterior, no se entiende como hubo poco avance de la probabilidad por siglos -a diferencia, por ejemplo de la geometría-, como se refirió

al comienzo de este acápite, *la humanidad siempre ha asociado el concepto de probabilidad al azar y de manera especial a juegos de este tipo.*

## 2.2 REFERENTES TEÓRICOS

2.2.1 De La Probabilidad. Desde los que consideran que probabilidad es lo mismo que suerte, hasta los que con lenguaje muy técnico y apelando a definiciones complejas, explican lo que para ellos es probabilidad, se han reunido en varios enfoques dichas versiones, así se presentan cuatro enfoques, que recogen las diversas posturas.

### *Enfoque Clásico*

“Definición: Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de  $n$  formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si  $n_A$  de estos resultados tienen un atributo  $A$ , la probabilidad de  $A$  es la proporción de  $n_A$  con respecto a  $n$ .” (Canavos, 2001,p.29)

De acuerdo a éste enfoque, es la probabilidad vista de manera apriorística<sup>4</sup>, que permite el cálculo de probabilidades sin realizar pruebas aleatorias. Aunque se enfrenta al problema de decidir cuáles son las formas igualmente probables, discusión que se ha dado en varios escenarios, al respecto Blanco (2004) comenta:

Pero, ¿Qué significaban: “igualmente probables”? en el año de 1892, el matemático alemán Karl Stumpf interpreta esta expresión afirmando que los eventos son igualmente probables, cuando no se tiene ningún conocimiento de cual de los distintos resultados del experimento en cuestión va a ocurrir. En contraposición con este punto de vista, se tiene el del matemático alemán Johann von Kries, quien consideraba que para determinar los resultados igualmente probables de un experimento, era necesario tener un conocimiento objetivo de éste. Así por ejemplo, si sólo sabe que una urna contiene bolas negras y blancas, entonces, según stumpf, para la primera extracción es igualmente probable sacar

---

<sup>4</sup> Se refiere a la concepción antes de la experiencia.

una bola negra o una bola blanca, en tanto que von Kries admitiría este supuesto sólo si se conociera que el número de bolas negras es igual al número de bolas blancas en la urna. (p.4)

Entonces, este enfoque será una disculpa para obtener probabilidades cuando no se haya realizado ningún ensayo de un experimento aleatorio, como por ejemplo saber ahora que la probabilidad clásica de obtener cara en un lanzamiento de una moneda es una de dos ( $1/2$ ).

### *Enfoque Frecuencial*

“Definición: Si un experimento se repite  $n$  veces bajo las mismas condiciones y  $n_B$  de los resultados son favorables a un atributo  $B$ , el límite de  $n_B/n$  conforme  $n$  se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo  $B$  “(Canavos, 2001, p.31).

A diferencia del enfoque anterior, aquí es menester algunas realizaciones de un experimento aleatorio o lo que regularmente se denomina ensayos. Es un enfoque a posteriori<sup>5</sup> basándose en la información obtenida luego de los distintos ensayos. La probabilidad para estos casos es un límite, entonces se hace necesario apelar al cálculo y ver los casos en que haya convergencia, incluso se debe precisar ¿qué debe ser un “ $n$  grande”?

A través de esta concepción de la probabilidad es muy difícil no tener distintos resultados, por ello serán las frecuencias relativas para éste caso, un estimador<sup>6</sup> de la probabilidad.

### *Enfoque Subjetivo*

Canavos (2004) afirma: “En éste contexto, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible. Ésta interpretación de la probabilidad se conoce como subjetiva o personal”. (p.31)

---

<sup>5</sup> Luego de la experimentación.

<sup>6</sup> Expresión cuyo objetivo es obtener estimaciones

Para éste enfoque las situaciones son evaluadas de acuerdo a creencias y/o convicciones personales, otros afirman que las probabilidades aquí son grados personales de creencia acerca de sucesos con incertidumbre<sup>7</sup>.

Quizá, es éste enfoque el que más debate<sup>8</sup> despierte entre los seres humanos, pues, es casi imposible encontrar dos juicios idénticos o por lo menos similares, por ejemplo, la probabilidad de que el siguiente nacimiento en nuestra familia sea niño. Éste enfoque permite medir cualquier tipo de incertidumbre, tal vez por eso haya sido el más común en el transcurso de toda la historia de la humanidad y aún hoy en día.

Éste enfoque no supone ni implica que la conjetura<sup>9</sup> de un individuo sea mejor o peor que la de otro, de allí también el nombre de “probabilidad personal”, aunque las discrepancias sean grandes y radicalmente diferentes. Éste tipo de probabilidades ésta ligada fuertemente con una subjetividad por parte de quien emite los juicios.

Se desconoce porque éste enfoque no goza de popularidad en las escuelas, además, no lo consideran como parte de la teoría, sabiendo que es ampliamente *un enfoque especulativo y por cuanto el estudiante puede iniciarse en el campo de las conjeturas.*

#### *Enfoque Matemático estructural*

La formalización matemático estructural de la probabilidad, obedece a las distintas definiciones a partir de axiomas y teoremas que permiten el cálculo de probabilidades. Ésta estructuración es atribuida a Andrei Kolmogorov (1976) y es similar al desarrollo de la geometría en cuanto a que también subyace allí la parte de la axiomatización.

---

<sup>7</sup> No haber certeza.

<sup>8</sup> Discusiones de diversos tipos.

<sup>9</sup> Una afirmación bajo indicios.

Sirve entonces ésta estructura para de alguna manera explicar los enfoques, luego se debe saber que resulta una estructuración consistente y coherente, de la cual se obtienen reglas para la asignación de probabilidades. Ésta estructura de la probabilidad, es basada fuertemente en la teoría de la medida desarrollada con anterioridad a Kolmogorov, así lo refiere Peña (1988) “La probabilidad se definió en los años 30 axiomáticamente: sus propiedades corresponden a las frecuencias relativas, y se encuadran dentro de la teoría general de la medida.”(p.70)

2.2.2 De la Enseñanza. La enseñanza de la probabilidad históricamente se ha restringido solo a los enfoques clásico y frecuencial, en ocasiones el estructurado, soslayando o dejando de lado el enfoque no menos importante que los anteriores, el subjetivo. También la diversidad de métodos existentes para realizar la enseñanza de la probabilidad, al igual que la inclusión o no en los currículos, son algunos aspectos que dificultan los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad.

No creemos que exista un único método verdadero y certero de enseñar probabilidades que esté esperando a ser descubierto. Más bien hay muchos caminos para introducir los conceptos probabilísticos. Por ejemplo, el modelo de frecuencia relativa trata con datos discretos mientras el modelo de proporción, especialmente la probabilidad geométrica, puede tratar con datos continuos. Si adoptamos una perspectiva de modelización para la enseñanza de la probabilidad, los conflictos entre un enfoque clásico de equiprobabilidad, un enfoque de frecuencia relativa o un enfoque subjetivista, no tienen por qué ser un obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, se debe equipar a profesores y alumnos con representaciones múltiples de probabilidad; es lo que Steinbring (1991) llama situaciones significativas. La estadística en la escuela debe combinar orgánicamente ideas de diferentes tradiciones filosóficas, en particular, la estadística como la matemática de los fenómenos de masas, la estocástica como la lógica de la incertidumbre, la estadística como la técnica que transforma datos en información y la estocástica como teoría de la decisión. (Universidad Autónoma de Madrid, 1987,P.6)

Aún cuando la probabilidad está contemplada en los estándares –para el grado 9° en este caso- del Ministerio de Educación Colombiano, se observa un déficit o

mora en la implementación de ellos y una ausencia de varias lecturas de la probabilidad con excepción de los enfoques clásico y frecuencial.

El Ministerio de Educación Nacional<sup>10</sup> (2006), como encargado de las políticas educativas en todo el territorio colombiano, contempla cinco tipos de pensamiento para la enseñanza de las matemáticas, estos son:

1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas
4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

La probabilidad reposa en el cuarto tipo de pensamiento y de manera especial los enfoques clásico y frecuencial, que a su vez, se encuentran en los siguientes estándares básicos de competencias para el grado 9°:

- Cálculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
- Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

En cuanto a los lineamientos curriculares, es pertinente resaltar algunas apreciaciones del MEN.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos: Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre.

---

<sup>10</sup> Ente gubernamental colombiano, encargado de la educación en toda la nación.

Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

Las investigaciones de Shanghnessy (1985) le han llevado a establecer que en la matemática escolar el desarrollo del pensamiento aleatorio, mediante contenidos de la probabilidad y la estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas. (Ministerio de Educación Nacional., 1998)

Corresponde entonces en éste escrito hacer o implementar estos conceptos (los enfoques citados con anterioridad) en la ruta de la exploración y experimentación.

#### *Implicaciones de la enseñanza de la probabilidad*

De acuerdo a las múltiples conceptualizaciones de la probabilidad, puede ser entonces un requisito en la enseñanza, partir de esas diversas miradas. Los debates permanentes que han acompañado a la probabilidad, han afectado su enseñanza, por ejemplo, hasta 1970 lo único que se enseñaba era el enfoque clásico, basándose en el cálculo combinatorio, resultando difícil de contextualizar para algunos estudiantes.

Se hace necesario más estudios e investigación, que conduzcan a implementar nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje, desde la gran variedad de estilos en educación. Afirma Batanero (2005):

Por tanto, se necesita más investigación que clarifique cuáles son los componentes fundamentales del significado de la probabilidad (y, en general, de cualquier

concepto matemático), así como los niveles de abstracción adecuados en cada componente debe ser enseñado, para ayudar a los estudiantes a superar posibles dificultades. Finalmente, sugerimos tener en cuenta la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, de modo que les ayudemos a superar sus errores y dificultades, muchos de los cuales pueden explicarse en términos semióticos. (p.260)

En consecuencia, se deben crear los espacios de investigación, tal cual hoy lo hacen algunas instituciones en el país.

#### *TIC, los ordenadores*

El desarrollo de nuevas tecnologías informáticas y de la comunicación (TIC), en especial ordenadores, conlleva a que muchos se interesen por la experimentación o simulaciones de cosas reales en un entorno virtual, es así que tanto docentes como estudiantes deben estar preparados para acoger dichas tecnologías. Sin embargo, no basta con lo anterior, pues, para lograr algún entendimiento de la probabilidad es necesario también el estudio formal<sup>11</sup>, en éste sentido *las experiencias virtuales son una herramienta valiosa* en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En cuanto a la experimentación conducente a la conceptualización de la probabilidad en su enfoque clásico y frecuencial, éste trabajo de grado apela al ordenador “Probability Explorer<sup>12</sup>” el cual Rincón y Urian (2011) reseñan así:

Fue desarrollado por Hollylyne Stohl Lee entre 1999 y 2005. Este es un software educativo diseñado para brindar a los estudiantes y profesores una herramienta que permite la simulación de varias situaciones de probabilidad, siendo un entorno abierto en el cual se pueden realizar experimentos aleatorios adecuándolos a las necesidades que se requieran.

Este programa permite establecer los eventos de un experimento por medio de iconos (monedas, dados, balotas, números, gráficos de personas, piedra papel o tijera, estados del clima) que van apareciendo al azar según lo que el usuario

---

<sup>11</sup> Estudio detallado de una teoría.

<sup>12</sup> Encontrar en: [www.probabilityexplorer.com](http://www.probabilityexplorer.com)

escoja, además permite mostrar los datos por medio de tablas que contienen: frecuencias absolutas y relativas, porcentajes, también se puede presentar los datos por medio de gráficas de frecuencias y circulares, que van cambiando a medida que avanza la simulación.

Luego el uso del ordenador referido, constituirá en éste trabajo herramienta central en cuanto su uso.

### *Experimentos en la enseñanza*

Los experimentos en la enseñanza, hacen parte del sentido exploratorio del ser humano, es decir, mediante la reproducción de situaciones repetidas veces se adquieren las nociones de lo que se esté experimentando. Sin embargo, es claro que se debe reconocer con anterioridad el material experimental como: nociones, conceptos, definiciones, situaciones, procedimientos, entre otros. De manera imprescindible se debe reconocer todo este material, si el experimento se lleva a cabo con sistemas virtuales (ordenadores).

Si nos centramos en la probabilidad también los dos métodos tradicionales de enseñanza se basan en el trabajo concreto, uno y en la consistencia, el otro. El enfoque concreto se centra en experimentos y juegos ideales de azar. Para definir la probabilidad se utilizan frecuencias, proporciones numéricas y simetrías. Opuesto de alguna manera a este modo concreto-intuitivo de enseñanza está el método que pone el énfasis en la consistencia interna de los conceptos y en la fundamentación interior del currículum estocástico. Esto significa que el profesor introduce unos cuantos conceptos básicos: resultado, suceso, suceso seguro e imposible, espacio muestral, etc. Se entiende que esos conceptos proporcionan una sólida fundamentación para el desarrollo posterior. La intención específica es dar definiciones claras de conceptos, libres de dudas y ambigüedades. Este método de enseñanza casi siempre usa la noción de probabilidad clásica laplaciana y hace un uso exagerado de la teoría de conjuntos y del álgebra booleana. (Universidad Autónoma de Madrid,1987,p.10)

Ahora, se menciona algunas definiciones<sup>13</sup> necesarias en el trabajo, pues, forman parte del material experimental.

*Experimento:* Prueba o examen práctico que se realiza para probar la eficacia de una cosa o examinar sus propiedades.

*Experimento aleatorio:* Un experimento se dice aleatorio si su resultado NO puede ser determinado de antemano.

*Espacio muestral:* El conjunto  $\Omega$  de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama espacio muestral. Los elementos  $(w)$  pertenecientes a  $\Omega$  son llamados puntos muestrales.

*Evento:* Subconjunto de  $\Omega$ , cuyos elementos que lo conforman cumplen una condición específica.

*Eventos equiprobables:* Si a los eventos A y B se les asigna la misma medida de probabilidad, se dice que A y B son eventos equiprobables.

*Simulación:* Fingimiento, presentación de algo como real.

---

<sup>13</sup> Definiciones obtenidas por consenso al consultar diversos textos.

### 3. ACTIVIDAD

#### 3.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ACTIVIDAD

La actividad está dividida en 4 partes. La primera en la cual se le presenta al estudiante unas nociones de: Experimento, Experimento aleatorio, Espacio muestral, Evento, Simulación y Eventos equiprobables. Los cuales deben estar claros al momento de desarrollar el resto de la actividad.

La segunda parte está diseñada para que el estudiante responda a ciertas preguntas acerca de un experimento aleatorio, teniendo en cuenta las nociones presentadas y sus conceptos intuitivos de probabilidad.

La tercera parte muestra indicaciones particulares a seguir para el uso del software *Probability Explorer*.

En la cuarta parte se cuenta con el software *Probability Explorer* para incorporar las situaciones en el ordenador.

#### 3.2 ENTORNO

La palabra entorno en este escrito, debe entenderse como un sistema coherente de acciones que contextualizan nuestra actividad. De modo que permite ver la actividad propuesta como un articulado de pasos y NO como una serie de cosas disyuntas que no tienen un fin específico.

Se inicia con la enseñanza de la probabilidad en la educación media, la cual ha generado controversia, en cuanto a los requisitos formales para la adquisición de los conceptos, desde el punto de vista clásico. Sin embargo, algunos estudios

como los de (Fischbein, 1975) muestran como la noción de probabilidad puede ser adquirida por los educandos, también desde el punto de vista frecuencial y a partir del nivel elemental, siempre y cuando reciban una enseñanza propicia y de forma experimental.

Se puede decir, que éste es el punto de partida, desde el cual las probabilidades han tomado gran importancia, más aún, teniendo como base el azar y la incertidumbre dentro de los fenómenos cotidianos. Además, los estándares curriculares precisan que los estudiantes en el bachillerato ya deben tener bases suficientes en cuanto al estudio de la probabilidad, no obstante, (Godino, 1989) sostiene que para los estudiantes de bachillerato no es fácil comprender un desarrollo axiomático formal de la teoría de la probabilidad, sobre todo cuando les falta la preparación intuitiva necesaria, originada en la experiencia y en los pre saberes relacionados con el tema.

Partiendo de esta problemática, se han generado propuestas y recomendaciones curriculares para la enseñanza de la probabilidad, con lo cual se busca reducir la brecha entre el enfoque clásico y frecuencial, a través de una metodología que considera la experimentación y la simulación de experimentos aleatorios. Con esto se pretende que el estudiante obtenga datos reales o simulados, que haga comparaciones o predicciones y realice su validación a través de un modelo, que le suministre la información necesaria para confirmar su conocimiento en cuanto a lo probabilístico.

De lo anterior se deduce que, los experimentos de enseñanza en la educación, buscan mejorar el proceso educativo. Por lo tanto, la generación de herramientas que permitan un mejor desarrollo en las actividades de instrucción, se constituye en una nueva metodología cada vez más ligada a las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (Ntic), para mejorar el nivel en el proceso educativo.

En general, las Ntic y los avances tecnológicos, cada vez más complejos, constituyen la herramienta que suministra, no solo para el docente sino para los estudiantes, el elemento complementario en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la actividad, para lograr el objetivo de este trabajo, en el cual se plantea estudiar una propuesta de enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial, se presentan situaciones para que los estudiantes adquieran conocimientos básicos de conceptos y procedimientos tales como: experimento, evento, espacio muestral, puntos muestrales, etc., que les ayuden a integrar las probabilidades como parte de su formación.

En perspectiva, el aporte del software Probability Explorer empleado para el desarrollo de la actividad, radica en la comprobación donde la brecha entre el enfoque clásico y frecuencial se hace cada vez más corto.

Para la realización de la simulación se empleará el modelo de urna, basados en Batanero (2001) en la que se sostiene que:

Es posible asignar un modelo de urnas a la mayor parte de experimentos aleatorios, al menos a aquellos con espacio muestral numerable. Además, no sólo el experimento original puede componerse para formar nuevos experimentos, sino también los modelos de urnas asociados (p.24).

Lo que permite, como ha demostrado Polya, simular procesos aleatorios complejos mediante una secuencia de extracciones de bolas en urnas.

La idea de la urna es fundamental, ya que en estocástica hay unos pocos conceptos firmemente enraizados que desafían toda definición rigurosa, como

"muestreo al azar", que sólo pueden ser descritos concretizándolos en un modelo de urnas. Lo cual se ajusta perfectamente a la actividad a realizar.

En definitiva, lo que busca esta actividad es despertar en el estudiante un mejor razonamiento estadístico y una mejor inferencia en el campo de las probabilidades, que le genere una postura crítica ante la información que está recibiendo desde diferentes escenarios de la enseñanza. Además, basados en las recomendaciones de Confrey y Lachance (2000) para la recolección de datos en un experimento de enseñanza, se hace necesario que el o los experimentos se realicen gran cantidad de veces (varios ensayos) para generar la mayor información posible, con el ánimo de que los estudiantes deduzcan la forma cómo los enfoques probabilísticos se relacionan.

### 3.3 ACTIVIDAD A IMPLEMENTAR

3.3.1 Objetivos de aprendizaje. En concordancia con los objetivos (general y específicos), se pretende que el estudiante para esta actividad, logre reconocer los enfoques clásico y frecuencial. Además, determinar probabilidades de eventos en una situación de juegos de azar imaginada y luego simulada. En otras palabras, asignar probabilidades a dichos eventos desde ambas perspectivas o concepciones y comparar las asignaciones de probabilidades realizadas.

3.3.2 Trayectoria hipotética de aprendizaje. Se parte de una situación imaginada de un juego de azar al introducir 10 pimpanes (de tres colores diferentes) en una urna (no transparente) y luego realizar una(s) extracción(es). Queriendo con esto, en primera instancia, que el estudiante identifique las características de un experimento aleatorio, determine el espacio muestral correspondiente y algunos posibles eventos. Luego, que sea capaz de describir todos los posibles resultados del experimento aleatorio y evidencie que al realizarlo los resultados varían.

Al simular la situación en computador mediante el uso del software, se pretende que el estudiante verifique pronósticos asociados al experimento aleatorio desarrollado en la situación imaginada. Así, con ensayos repetidas veces, se espera que el estudiante identifique patrones en cuanto a la frecuencia de ocurrencia de un evento determinado y pueda justificar de alguna manera lo planteado. Lo anteriormente experimentado debe llevar al estudiante a poder asignar probabilidades a los respectivos eventos que se establezcan y predecir resultados que tienen mayor probabilidad de ocurrir.

Posteriormente de toda la parte experimental en esta actividad también se pretende que el estudiante se encamine en el espacio de las conjeturas, es decir, se atreva a hacer aseveraciones bajo indicios y pueda aproximarse a los resultados esperados en un experimento sin necesidad de realizarlo.

Finalmente y como fruto del ejercicio, el estudiante será capaz de diferenciar entre lo clásico y lo frecuencial en cuanto a probabilidad se refiere.

3.3.3 Intención de las tareas propuestas. La principal intención es buscar el discernimiento por parte del estudiante en situaciones experimentales, juega pues, un papel importante la intuición y el reconocimiento pleno de todo el material experimental, para llegar a inferir al respecto del tema tratado.

En la Parte I consiste en dar a conocer al estudiante algunas nociones para que sea comprensible la terminología utilizada al desarrollar las siguientes partes de la actividad.

En la Parte II es la de realizar un sondeo en el estudiante sobre su conocimiento acerca de la probabilidad clásica por medio de una serie de preguntas. Sondeo que se realizará primero con la lectura de la situación a analizar y luego se procederá a que el estudiante responda preguntas con base en la situación.

En la Parte III es presentarle al estudiante un instructivo de uso sobre el software a utilizar (Probability Explorer) para el desarrollo de la actividad, el cual consta de diez ítems.

Finalmente, en la Parte IV mediante el uso del software, es que el estudiante calcule probabilidades de tipo experimental y establezca algún tipo de relación entre las concepciones de probabilidad clásica y probabilidad experimental.

3.3.4 Ideas para las socializaciones. De ahora en adelante entiéndase *docente* como el estudiante investigador quien dirigirá la actividad.

Para la *socialización 1* se sugiere que el docente mediante el uso del tablero, recursos tecnológicos (video beam, computador,...) y/o cartelera(s) exponga las nociones al curso asegurándose que queden comprendidas por parte del estudiante.

Para la *socialización 2* se recomienda que el docente con ayuda del curso y retomando las respuestas y justificaciones del estudiante, resuma la Parte II de la actividad cuyo objetivo es el cálculo a realizarse para determinar la probabilidad de un evento mediante la forma clásica.

En la *socialización 3* el docente aclarará que a medida que se vaya trabajando la cuarta y última parte de la actividad se identificará fácilmente la aplicación de cada ítem nombrado en la Parte III.

Por ultimo, para la *socialización 4* se recomienda que una vez el estudiante haya desarrollado la Parte IV, se identifique la relación entre las concepciones de probabilidad clásica y probabilidad experimental mediante el direccionamiento del docente a través de preguntas, ideas, justificaciones por parte del estudiante acerca del desarrollo y resultados de la Parte IV de la actividad.

### 3.3.5 Descripción detallada de la actividad. **PARTE I: Nociones**

#### ***Socialización 1***

- Un **experimento** es un procedimiento mediante el cual se trata de comprobar (confirmar o verificar) una o varias hipótesis relacionadas con un determinado fenómeno.
- Un **experimento aleatorio** es aquel del que no se puede predecir su resultado, es decir, que depende de la suerte o azar.
- Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. A cada uno de esos elementos se les denomina punto muestral o muestra.
- Un **evento** es un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un experimento aleatorio, es decir, es un subconjunto del espacio muestral.
- Una **simulación** es una imitación de las operaciones de un sistema o proceso real a lo largo del tiempo.

- Dos eventos son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Antes de iniciar la Parte II, el docente le entregará a cada estudiante un Cuadernillo (ver anexo en físico), el cual consigna información para guiar el trabajo del estudiante que se diligenciará de forma anónima.

## **PARTE II: Planteamiento y cuestionamiento de la situación**

Después de que el docente lea la situación, cada estudiante (o grupo) deberá contestar las preguntas en el cuadernillo.

**Situación a analizar:** Dentro de una urna (no transparente) en donde hay 10 pimpones: 6 de color azul, 3 rojos y 1 verde, una persona extrae un pimpón de la urna y mira de qué color es.

1. ¿En qué consiste el experimento aleatorio descrito en la situación dada y por qué es aleatorio?

---

2. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento propuesto? ¿Por qué cree que es ese?

---

---

3. Si saca un pimpón de la urna, ¿es más probable que sea de color? \_\_\_\_\_, ¿Por qué?

---

4. Si realizara la situación presentada 10 veces, ¿el color que cree que se repite con más frecuencia es el? \_\_\_\_\_, ¿Por qué?

---

5. Suponiendo que se asignara un nombre a cada pimpón de la siguiente manera: las azules (A1, A2, A3, A4, A5, A6), las rojas (R1, R2, R3) y el verde V1.

Escriba la fracción que representa cada pimpón dentro de la urna

| Pimpón   | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | R1 | R2 | R3 | V1 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Fracción |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

*Las anteriores fracciones representan la probabilidad que se tiene de sacar uno de los pimpones. El denominador representa todas las posibilidades que hay dentro del espacio muestral y el numerador representa los casos favorables para un caso específico.*

6. ¿La probabilidad que tiene cada pimpón de ser extraído es la misma?  
¿Por qué?

---

7. Si reúne todos los pimpones azules y suma sus probabilidades ¿Qué número obtiene?, realizar el mismo razonamiento para los pimpones rojos y para el pimpón verde.

---

---

8. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un pimpón azul? ¿Un pimpón rojo? y ¿el pimpón verde?

| Pimpón                     | Rojo | Azul | Verde |
|----------------------------|------|------|-------|
| Probabilidad de extracción |      |      |       |

## ***Socialización 2***

### **PARTE III: Instrucciones de uso del software Probability Explorer**

A medida que el docente vaya leyendo cada ítem de este instructivo, el estudiante lo verificará y/o lo seguirá en el software mediante el uso del computador.

1. Abra el PROBABILITY EXPLORER.

2. Aparecerá un cuadro (ver Figura 1) en donde se debe seleccionar una opción para realizar alguna actividad.

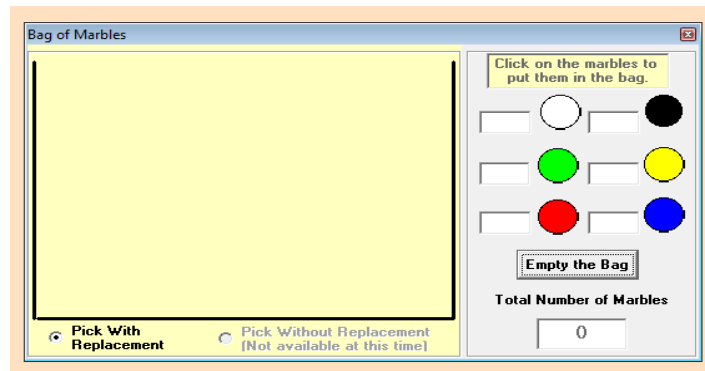
Figura 1. Ventana para seleccionar un experimento.



Por ejemplo, si se selecciona la tercera opción “Marbles in a Bag” (canicas en una bolsa) y se hace clic en OK.

3. Aparecerá una subventana (ver Figura 2).

Figura 2. Ventana del experimento “Bag of Marbles”.

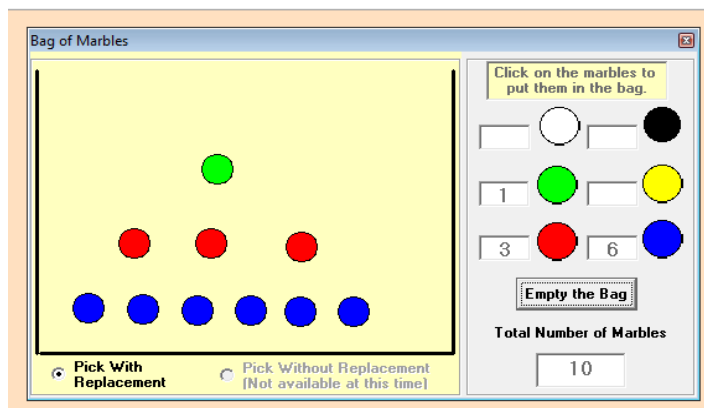


Seleccione en ella “Pick With Replacement” que significa; extraer con reemplazo, es decir, el pimpón extraído vuelve a la urna automáticamente.

En la parte derecha se encuentran los pimpones de colores, seleccione 6 pimpones azules, 3 rojos y 1 verde haciendo un clic sobre la figura por cada pimpón, luego de esto se obtendrá una urna llena como en la Figura 3.

*Nota: Si se equivoca al seleccionar la cantidad de pimpones, debe hacer clic en “Empty the Bag” (desocupar la urna) y volver a comenzar.*

Figura 3. Ventana para seleccionar la cantidad de pimpones.



4. En la barra de la parte superior de la pantalla (ver Figura 4) encuentra un botón que le da la opción de simular la extracción de un pimpón de la urna.

Figura 4. Barra de tareas del Probability Explorer  
(ícono de simulación).



Al hacer clic sobre ésta imagen, sale uno de los pimpones de la urna, luego para hacer la nueva extracción se deben tener las mismas condiciones iniciales, por lo tanto el pimpón que se había sacado debe volver a la urna, claro está que el PROBABILITY EXPLORER está programado para hacer esto automáticamente.

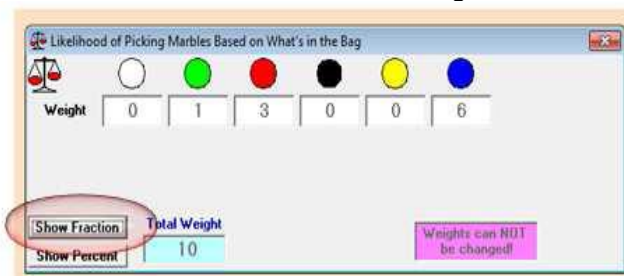
5. También en la parte superior, al hacer clic en la balanza como aparece en la Figura 5.

Figura 5. Barra de tareas del Probability Explorer  
(ícono de "Weight").



Emergerá un cuadro como el de la Figura 6.

Figura 6. Ventana de "Likelihood of Picking Marbles  
Based on What's in the Bag".



Al hacer clic en el botón “Show Fraction” de la misma figura se abre la subventana tal cual aparece en el Figura 7.

Figura 7. Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Based on What’s in the Bag” (Show Fraction).

|              | White | Green | Red | Black | Yellow | Blue |
|--------------|-------|-------|-----|-------|--------|------|
| Weight       | 0     | 1     | 3   | 0     | 0      | 6    |
| Total Weight | 10    | 10    | 10  | 10    | 10     | 10   |

Hide Fraction    Total Weight: 10

Show Percent    Weights can NOT be changed!

6. En el mismo cuadro anterior hay un botón llamado “Show Percent” que muestra los porcentajes al hacer clic sobre él (ver Figuras 8 y 9).

Figura 8. Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Based on What’s in the Bag” (ícono de Show Percent).

|              | White | Green | Red | Black | Yellow | Blue |
|--------------|-------|-------|-----|-------|--------|------|
| Weight       | 0     | 1     | 3   | 0     | 0      | 6    |
| Total Weight | 10    | 10    | 10  | 10    | 10     | 10   |

Hide Fraction    Total Weight: 10

Show Percent    Weights can NOT be changed!

Hasta ahora, si ha seguido juiciosamente las instrucciones, debe estar en su pantalla una subventana central como la mostrada en la Figura 9.

Figura 9. Ventana de “Likelihood of Picking Marbles Based on What’s in the Bag” (Show Percent).

|              | White | Green  | Red    | Black | Yellow | Blue   |
|--------------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|
| Weight       | 0     | 1      | 3      | 0     | 0      | 6      |
| Total Weight | 10    | 10     | 10     | 10    | 10     | 10     |
| Percent      | 0.00% | 10.00% | 30.00% | 0.00% | 0.00%  | 60.00% |

Hide Fraction    Total Weight: 10    Percent Sum: 100.00%

Hide Percent    Weights can NOT be changed!

Allí se exhibe adicional a lo anterior el porcentaje que representa cada color de pimpón dentro de la urna.

7. Nuevamente yendo a la barra superior (ver Figura 10) y al hacer clic en el botón resaltado, el resultado de los ensayos corridos hasta determinado momento saldrá alineado.

Figura 10. Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de LineUp).



8. De otra parte (ver Figura 11) al hacer clic en el botón resaltado se obtiene una configuración de resultados a manera de tabla.

Figura 11. Barra de tareas del Probability Explorer (ícono de Data Table).



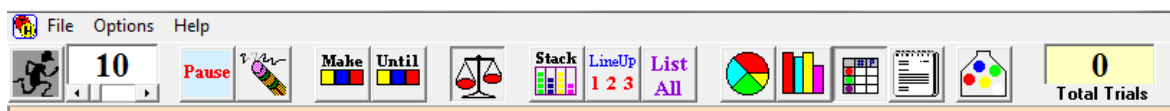
Tal cual se muestra en la Figura 12.

Figura 12. Ventana de "Data Table".

| Data Table                                                                          |       |          |         |         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|----------|---------|---------|
| Copy                                                                                |       |          |         |         |
| Event                                                                               | Count | Fraction | Decimal | Percent |
| 1                                                                                   |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |
|  |       |          |         |         |

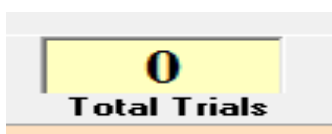
9. Para hacer una simulación de varias extracciones (ver Figura 13), varié el número que aparece en la parte superior izquierda con las flechas laterales. Dando clic en el “muñeco” se da inicio a la simulación.

Figura 13. Barra de tareas del Probability Explorer.



10. En la Figura 14 aparecerá un contador que lleva la suma del número de pruebas o ensayos hasta determinado momento efectuados.

Figura 14. Ícono de “Total Trials”.



### Socialización 3

#### PARTE IV: Uso del Probability Explorer

Haciendo uso del software, simular la situación indicada en la parte II y responder las preguntas.

1. Simule la situación 10 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).

¿Las fracciones que aparecen en el cuadro “Likelihood of Picking Marbles on Based What’s in the Bag” (ícono de la balanza, ítem 5 de instrucciones de uso) corresponden a las que escribió en el numeral 8 de la Parte II de la actividad?

*Esta manera de obtener la probabilidad de un evento se llama “probabilidad clásica o probabilidad a priori”.*

**2.** Desarrolle el ítem 6 de instrucciones de uso. Anote los resultados que aparecen en la fila de “Percent” en el siguiente cuadro

| Pimpón<br>blanco | Pimpón<br>verde | Pimpón<br>rojo | Pimpón<br>negro | Pimpón<br>amarillo | Pimpón<br>azul |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------------|----------------|
|                  |                 |                |                 |                    |                |

**3.** Simule la situación 30 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).

Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.

Mire el resultado de “Data Table” en la columna de “Percent” y anote los valores en la siguiente tabla

| Pimpón<br>blanco | Pimpón<br>verde | Pimpón<br>rojo | Pimpón<br>negro | Pimpón<br>amarillo | Pimpón<br>azul |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------------|----------------|
|                  |                 |                |                 |                    |                |

Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral anterior (2), entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

**4.** Simule la situación 50 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).

Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.

Mire el resultado de “Data Table” en la columna de “Percent” y anote los valores en la siguiente tabla

|                  |                 |                |                 |                    |                |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------------|----------------|
| Pimpón<br>blanco | Pimpón<br>verde | Pimpón<br>rojo | Pimpón<br>negro | Pimpón<br>amarillo | Pimpón<br>azul |
|                  |                 |                |                 |                    |                |

Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

---

**5.** Simule la situación 100 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).

Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.

Mire el resultado de “Data Table” en la columna de “Percent” y anote los valores en la siguiente tabla

|                  |                 |                |                 |                    |                |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------------|----------------|
| Pimpón<br>blanco | Pimpón<br>verde | Pimpón<br>rojo | Pimpón<br>negro | Pimpón<br>amarillo | Pimpón<br>azul |
|                  |                 |                |                 |                    |                |

Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

---

**6.** Simule la situación 200 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).

Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.

Mire el resultado de “Data Table” en la columna de “Percent” y anote los valores en la siguiente tabla

|                  |                 |                |                 |                    |                |
|------------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------------|----------------|
| Pimpón<br>blanco | Pimpón<br>verde | Pimpón<br>rojo | Pimpón<br>negro | Pimpón<br>amarillo | Pimpón<br>azul |
|                  |                 |                |                 |                    |                |

Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

---

7. Si aumentara el número de ensayos considerablemente en una simulación, ¿Qué se esperaría de los porcentajes?

---

Los valores que aparecen en la columna de “Percent” después de hacer, en este caso las 200 extracciones serán las probabilidades de cada color, esta manera de obtener la probabilidad de un evento se llama “*probabilidad frecuencial o probabilidad a posteriori*”.

#### **Socialización 4**

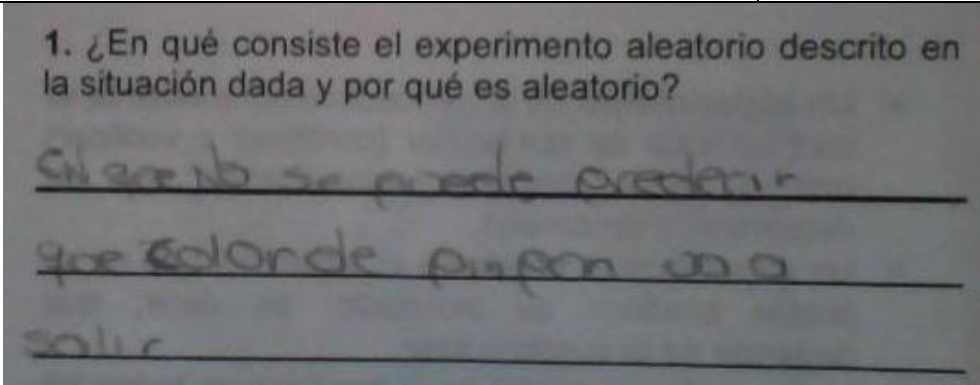
### 3. RESULTADOS

#### 4.1 CONFIGURACIÓN DE RESULTADOS

La actividad se implementó en el Colegio Externado del sur Psicopedagógico San José, ubicado en la localidad cuarta de San Cristóbal en Bogotá, el día 28 de Septiembre de 2012 de 8:12a.m. a 9:22a.m. a 17 estudiantes de grado 9° quienes, según el director de curso, no habían empezado a desarrollar la unidad de estadística del curso. Por lo cual se hizo necesario tomar más tiempo de lo previsto en la Parte I de la actividad.

Según las respuestas dadas por los estudiantes, se dividió cada pregunta (donde se consideró necesario) en focos de observación, entendiéndose como tales una(s) característica(s) prominentes en los cuadernillos, se reporta adjuntamente la frecuencia (cantidad de cuadernillos) en cada foco y se muestra la imagen de una respuesta correspondiente al foco de observación, Todo lo anterior se exhibe a manera de cuadro, de éste modo se logra configurar lo respondido por los estudiantes. A continuación se precisa la configuración referida.

Cuadro 1. Pregunta 1 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                  | Frecuencia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Explica la aleatoriedad.                                                             | 8 cuadernillos<br>(47%) |
|  |                         |

Cuadro 2. Pregunta 1 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                 | Frecuencia              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Explica el experimento aleatorio y confirma su aleatoriedad.                                                                                                                                                                                                        | 6 cuadernillos<br>(35%) |
| <p>1. ¿En qué consiste el experimento aleatorio descrito en la situación dada y por qué es aleatorio?</p> <p><u>El experimento es aleatorio ya que tiene</u><br/> <u>3 posibilidades de color y son impredecibles</u><br/> <u>sus resultados en cada acción</u></p> |                         |

Cuadro 3. Pregunta 1 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                    | Frecuencia              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                         | 3 cuadernillos<br>(18%) |
| <p>1. ¿En qué consiste el experimento aleatorio descrito en la situación dada y por qué es aleatorio?</p> <p><u>-Por que las pelotas son diferentes</u><br/> <u>que las otras.</u></p> |                         |

Cuadro 4. Pregunta 2 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                      | Frecuencia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Reconoce cuál es el espacio muestral.                                                                                                                                    | 8 cuadernillos<br>(47%) |
| <p>2. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento propuesto? ¿Por qué cree que es ese?</p> <p><u>los colores, por que puede</u><br/><u>sacar cualquiera</u></p> |                         |

Cuadro 5. Pregunta 2 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                     | Frecuencia            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Identifica el espacio muestral y justifica por qué es ese.                                                                                                                                                                              | 1 cuadernillo<br>(6%) |
| <p>2. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento propuesto? ¿Por qué cree que es ese?</p> <p><u>El espacio muestral es como uno de</u><br/><u>los pinceles porque son todas las</u><br/><u>resultados del experimento</u></p> |                       |

Cuadro 6. Pregunta 2 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                 | Frecuencia              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                      | 8 cuadernillos<br>(47%) |
| <p>2. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento propuesto? ¿Por qué cree que es ese?</p> <p><u>un evento en si no sabemos o'</u></p> <p><u>pimpon vamos a sacar.</u></p> |                         |

Cuadro 7. Pregunta 3 de la Parte II. Único Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                     | Frecuencia                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Se responde que al sacar un pimpón de la urna es más probable que sea de color azul, ya que la mayoría de los pimpones son de éste color.                                                                               | 17 cuadernillos<br>(100%) |
| <p>3. Si saca un pimpón de la urna es más probable que sea de color <u>Azul</u>, ¿Por qué?</p> <p><u>Hay mayor cantidad de pimpones de</u></p> <p><u>este color por lo tanto hay mas</u></p> <p><u>probabilidad</u></p> |                           |

Cuadro 8. Pregunta 4 de la Parte II. Único Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                              | Frecuencia                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Se responde que el color del pimpón que se repite con más frecuencia al realizar la situación presentada 10 veces es el azul porque hay más pimpones de éste color. Es decir, tiene mayor probabilidad de salir. | 17 cuadernillos<br>(100%) |
| <p>4. Si realizará la situación presentada 10 veces, el color que cree que se repite con más frecuencia es el <u>AZUL</u>, ¿Por qué?<br/><u>tiene mayor probabilidad</u></p>                                     |                           |

Cuadro 9. Pregunta 5 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                               | Frecuencia              |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Escribe la fracción que representa cada pimpón dentro de la urna. | 8 cuadernillos<br>(47%) |

5. Suponiendo que se asignara un nombre a cada pimpón de la siguiente manera: las azules (A1, A2, A3, A4, A5, A6), las rojas (R1, R2, R3) y la verde V1.

Escriba la fracción que representa cada pimpón dentro de la urna

| Pimpón   | A1             | A2             | A3             | A4             | A5             | A6             | R1             | R2             | R3             | V1             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Fracción | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Las anteriores fracciones representan la probabilidad que se tiene de sacar uno de los pimpones. El denominador representa todas las posibilidades que hay dentro del espacio muestral y el numerador representa los casos favorables para un caso específico.

Cuadro 10. Pregunta 5 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                         | Frecuencia              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Asigna la fracción igual a los pimpones del mismo color, tomando como numerador la cantidad total de estos. | 2 cuadernillos<br>(12%) |

5. Suponiendo que se asignara un nombre a cada pimpón de la siguiente manera: las azules (A1, A2, A3, A4, A5, A6), las rojas (R1, R2, R3) y la verde V1.

Escriba la fracción que representa cada pimpón dentro de la urna

| Pimpón   | A1             | A2             | A3             | A4             | A5             | A6             | R1             | R2             | R3             | V1             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Fracción | $\frac{6}{15}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Las anteriores fracciones representan la probabilidad que se tiene de sacar uno de los pimpones. El denominador representa todas las posibilidades que hay dentro del espacio muestral y el numerador representa los casos favorables para un caso específico.

Cuadro 11. Pregunta 5 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                              | Frecuencia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Toma como numerador de la fracción que representa cada pimpón en la urna al número asignado a su nombre, el cual contiene una letra y un número. | 7 cuadernillos<br>(41%) |

5. Suponiendo que se asignara un nombre a cada pimpón de la siguiente manera: las azules (A1, A2, A3, A4, A5, A6), las rojas (R1, R2, R3) y la verde V1.

Escriba la fracción que representa cada pimpón dentro de la urna

| Pimpón   | A1             | A2             | A3             | A4             | A5             | A6             | R1             | R2             | R3             | V1             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Fracción | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Las anteriores fracciones representan la probabilidad que se tiene de sacar uno de los pimpones. El denominador representa todas las posibilidades que hay dentro del espacio muestral y el numerador representa los casos favorables para un caso específico.

Cuadro 12. Pregunta 6 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                         | Frecuencia              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta afirmativa con justificación.                                                                                                                                     | 2 cuadernillos<br>(12%) |
| <p>6. ¿La probabilidad que tiene cada pimpón de ser extraído es la misma?<br/>¿Por qué?</p> <p><u>Si porque todas los pimpones</u><br/><u>tienen igual probabilidad</u></p> |                         |

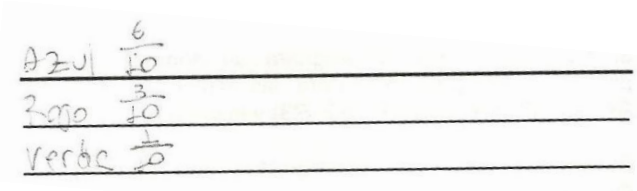
Cuadro 13. Pregunta 6 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                            | Frecuencia              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta negativa con justificación.                                                                                                                                                                          | 6 cuadernillos<br>(35%) |
| <p>6. ¿La probabilidad que tiene cada pimpón de ser extraído es la misma?<br/>¿Por qué?</p> <p><u>No, por que no son los colores de la misma cantidad por lo tanto hay colores con mayor probabilidad.</u></p> |                         |

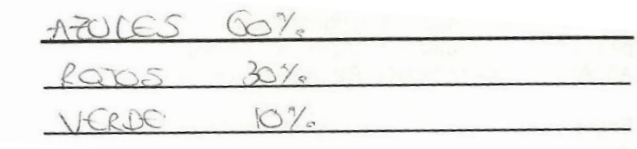
Cuadro 14. Pregunta 6 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                              | Frecuencia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                   | 9 cuadernillos<br>(53%) |
| <p>6. ¿La probabilidad que tiene cada pimpón de ser extraído es la misma?<br/>¿Por qué?</p> <p><u>no porque la probabilidad es diferente</u></p> |                         |

Cuadro 15. Pregunta 7 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Frecuencia              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Escribe la suma de las probabilidades de los pimpones del mismo color en fracción.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 8 cuadernillos<br>(47%) |
| <p>7. Si reúne todos los pimpones azules y suma sus probabilidades ¿Qué número obtiene?, realizar el mismo razonamiento para los pimpones rojos y para el pimpón verde.</p>  <p>A student's handwritten work on lined paper. It shows three fractions stacked vertically and separated by horizontal lines. The first fraction is 'Azul' followed by <math>\frac{6}{10}</math>. The second fraction is 'Rojo' followed by <math>\frac{3}{10}</math>. The third fraction is 'Verde' followed by <math>\frac{1}{10}</math>.</p> |                         |

Cuadro 16. Pregunta 7 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Frecuencia              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Escribe la suma de las probabilidades en porcentaje de los pimpones del mismo color.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 3 cuadernillos<br>(18%) |
| <p>7. Si reúne todos los pimpones azules y suma sus probabilidades ¿Qué número obtiene?, realizar el mismo razonamiento para los pimpones rojos y para el pimpón verde.</p>  <p>A student's handwritten work on lined paper. It shows three percentages stacked vertically and separated by horizontal lines. The first line is 'AZULES' followed by '60%'. The second line is 'ROJOS' followed by '30%'. The third line is 'VERDE' followed by '10%'. The word 'VERDE' is written in all caps.</p> |                         |

Cuadro 17. Pregunta 7 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Frecuencia              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 6 cuadernillos<br>(35%) |
| <p>7. Si reúne todos los pimpones azules y suma sus probabilidades ¿Qué número obtiene?, realizar el mismo razonamiento para los pimpones rojos y para el pimpón verde.</p> <p><i>el razonamiento para los azules es igual a <math>\frac{6}{10}</math>, el del rojo es <math>\frac{3}{10}</math>, y el verde <math>\frac{1}{10}</math></i></p> |                         |

Cuadro 18. Pregunta 8 de la Parte II. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                    | Frecuencia              |        |       |      |       |                            |     |     |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------|-------|------|-------|----------------------------|-----|-----|-----|
| Escribe la probabilidad de extracción de un pimpón de cada color en porcentaje.                                                                                                                                                                                        | 8 cuadernillos<br>(47%) |        |       |      |       |                            |     |     |     |
| <p>8. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un pimpón azul?<br/>¿Un pimpón rojo? y ¿el pimpón verde?</p> <table><tr><th>Pimpón</th><th>Rojo</th><th>Azul</th><th>Verde</th></tr><tr><td>Probabilidad de extracción</td><td>30%</td><td>60%</td><td>10%</td></tr></table> |                         | Pimpón | Rojo  | Azul | Verde | Probabilidad de extracción | 30% | 60% | 10% |
| Pimpón                                                                                                                                                                                                                                                                 | Rojo                    | Azul   | Verde |      |       |                            |     |     |     |
| Probabilidad de extracción                                                                                                                                                                                                                                             | 30%                     | 60%    | 10%   |      |       |                            |     |     |     |

Cuadro 19. Pregunta 8 de la Parte II. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Frecuencia                  |                |                |      |       |                            |                |                |                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------|----------------|------|-------|----------------------------|----------------|----------------|----------------|
| Escribe la probabilidad de extracción de un pimpón de cada color en fracción.                                                                                                                                                                                                                                                                | 6 cuadernillos<br><br>(35%) |                |                |      |       |                            |                |                |                |
| <div>8. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un pimpón azul?<br/>¿Un pimpón rojo? y ¿el pimpón verde?</div> <table><tr><td>Pimpón</td><td>Rojo</td><td>Azul</td><td>Verde</td></tr><tr><td>Probabilidad de extracción</td><td><math>\frac{3}{10}</math></td><td><math>\frac{6}{10}</math></td><td><math>\frac{1}{10}</math></td></tr></table> |                             | Pimpón         | Rojo           | Azul | Verde | Probabilidad de extracción | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |
| Pimpón                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Rojo                        | Azul           | Verde          |      |       |                            |                |                |                |
| Probabilidad de extracción                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\frac{3}{10}$              | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |      |       |                            |                |                |                |

Cuadro 20. Pregunta 8 de la Parte II. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Frecuencia                  |                       |                       |      |       |                            |                       |                       |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|------|-------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Escribe la probabilidad de extracción de un pimpón de cada color en fracción y porcentaje.                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2 cuadernillos<br><br>(12%) |                       |                       |      |       |                            |                       |                       |                       |
| <p>8. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un pimpon azul?<br/>¿Un pimpón rojo? y ¿el pimpón verde?</p> <table><tr><th>Pimpón</th><th>Rojo</th><th>Azul</th><th>Verde</th></tr><tr><td>Probabilidad de extracción</td><td><math>\frac{3}{10} = 30\%</math></td><td><math>\frac{6}{10} = 60\%</math></td><td><math>\frac{1}{10} = 10\%</math></td></tr></table> |                             | Pimpón                | Rojo                  | Azul | Verde | Probabilidad de extracción | $\frac{3}{10} = 30\%$ | $\frac{6}{10} = 60\%$ | $\frac{1}{10} = 10\%$ |
| Pimpón                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Rojo                        | Azul                  | Verde                 |      |       |                            |                       |                       |                       |
| Probabilidad de extracción                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $\frac{3}{10} = 30\%$       | $\frac{6}{10} = 60\%$ | $\frac{1}{10} = 10\%$ |      |       |                            |                       |                       |                       |

Cuadro 21. Pregunta 8 de la Parte II. Cuarto Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                     | Frecuencia            |        |       |      |       |                            |     |      |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|--------|-------|------|-------|----------------------------|-----|------|-----|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                                                                                                          | 1 cuadernillo<br>(6%) |        |       |      |       |                            |     |      |     |
| <p>8. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un pimpón azul?<br/>¿Un pimpón rojo? y ¿el pimpón verde?</p> <table><tr><th>Pimpón</th><th>Rojo</th><th>Azul</th><th>Verde</th></tr><tr><td>Probabilidad de extracción</td><td>50%</td><td>100%</td><td>25%</td></tr></table> |                       | Pimpón | Rojo  | Azul | Verde | Probabilidad de extracción | 50% | 100% | 25% |
| Pimpón                                                                                                                                                                                                                                                                  | Rojo                  | Azul   | Verde |      |       |                            |     |      |     |
| Probabilidad de extracción                                                                                                                                                                                                                                              | 50%                   | 100%   | 25%   |      |       |                            |     |      |     |

Por motivos técnicos, con respecto a los computadores, presentados el día de la implementación en el colegio, no se pudo desarrollar la Parte III y la Parte IV de la forma en que estaba propuesta.

Por esto, se hizo uso del video beam y se unifico estas dos partes socializadas por el docente (estudiante investigador).

Por consiguiente, los datos consignados en los cuadernillos por los estudiantes en las tablas de las preguntas de la Parte IV son los mismos, aunque algunos estudiantes no transcribieron bien los datos en los cuadernillos.

#### Parte IV

Pregunta 1. Esta pregunta no fue contestada por ningún estudiante ya que la socialización realizada por el docente partió de la Pregunta 2.

Cuadro 22. Pregunta 2 de la Parte IV. Único Foco de observación.

| Foco de observación                                                 | Frecuencia                |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Se escribió en cada casilla el valor en porcentaje correspondiente. | 17 cuadernillos<br>(100%) |

2. Desarrolle el ítem 6 de instrucciones de uso. Anote los resultados que aparecen en la fila de "Percent" en el siguiente cuadro

| Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul |
|---------------|--------------|-------------|--------------|-----------------|-------------|
| 0%            | 6,67         | 30%         | 0%           | 0%              | 63,33       |

Cuadro 23. Pregunta 3 de la Parte IV. Único Foco de observación.

| Foco de observación                                                | Frecuencia                |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Se respondió que los porcentajes para cada color son muy cercanos. | 17 cuadernillos<br>(100%) |

3. Simule la situación 30 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).  
 Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.  
 Mire el resultado de "Data Table" en la columna de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla

|               |              |             |              |                 |             |
|---------------|--------------|-------------|--------------|-----------------|-------------|
| Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul |
| 0%            | 6.67%        | 30.0%       | 0%           | 0%              | 63.33%      |

Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral anterior (2), entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

son cercanos No es mucha diferencia

Cuadro 24. Primera parte de la pregunta 4 de la Parte IV.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Frecuencia                |               |              |                 |              |                 |             |    |     |     |    |    |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|----|-----|-----|----|----|-------|
| Se escribió en cada casilla el valor en porcentaje correspondiente.<br>En la imagen se muestra uno de los tres cuadernillos que presentó problemas de transcripción.                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 17 cuadernillos<br>(100%) |               |              |                 |              |                 |             |    |     |     |    |    |       |
| <p>4. Simule la situación 50 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).<br/>Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.<br/>Mire el resultado de "Data Table" en la <u>columna</u> de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla</p> <table><tr><th>Pimpón blanco</th><th>Pimpón verde</th><th>Pimpón rojo</th><th>Pimpón negro</th><th>Pimpón amarillo</th><th>Pimpón azul</th></tr><tr><td>0%</td><td>80%</td><td>18%</td><td>0%</td><td>0%</td><td>64.0%</td></tr></table> |                           | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0% | 80% | 18% | 0% | 0% | 64.0% |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Pimpón verde              | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |    |     |     |    |    |       |
| 0%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 80%                       | 18%           | 0%           | 0%              | 64.0%        |                 |             |    |     |     |    |    |       |

Cuadro 25. Pregunta 4 de la Parte IV. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Frecuencia               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Los porcentajes para cada color son cercanos a los anteriores.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 15 cuadernillos<br>(88%) |
| <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p><u>son mucho mas cercanos que la situación anterior aunque los superan</u></p> <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p><u>si son mas cercanos excepto el rojo</u></p> |                          |

Cuadro 26. Pregunta 4 de la Parte IV. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Frecuencia              |               |              |                 |              |                 |             |    |     |     |    |    |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|----|-----|-----|----|----|-------|
| Los porcentajes para cada color no son cercanos a los anteriores.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2 cuadernillos<br>(12%) |               |              |                 |              |                 |             |    |     |     |    |    |       |
| <p>4. Simule la situación 50 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).<br/>Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.<br/>Mire el resultado de "Data Table" en la <u>columna</u> de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla</p> <table><tr><td>Pimpón blanco</td><td>Pimpón verde</td><td>Pimpón rojo</td><td>Pimpón negro</td><td>Pimpón amarillo</td><td>Pimpón azul</td></tr><tr><td>0%</td><td>80%</td><td>18%</td><td>0%</td><td>0%</td><td>64.0%</td></tr></table> |                         | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0% | 80% | 18% | 0% | 0% | 64.0% |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Pimpón verde            | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |    |     |     |    |    |       |
| 0%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 80%                     | 18%           | 0%           | 0%              | 64.0%        |                 |             |    |     |     |    |    |       |

Cuadro 27. Pregunta 5 de la Parte IV. Único Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Frecuencia                |               |              |                 |              |                 |             |   |   |    |   |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|---|---|----|---|---|----|
| Se escribió en cada casilla el valor en porcentaje correspondiente.<br>En la imagen se muestra el cuadernillo que presentó problemas de transcripción.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 17 cuadernillos<br>(100%) |               |              |                 |              |                 |             |   |   |    |   |   |    |
| <p>5. Simule la situación 100 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).<br/>Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.<br/>Mire el resultado de "Data Table" en la <u>columna</u> de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla</p> <table><tr><td>Pimpón blanco</td><td>Pimpón verde</td><td>Pimpón rojo</td><td>Pimpón negro</td><td>Pimpón amarillo</td><td>Pimpón azul</td></tr><tr><td>0</td><td>9</td><td>26</td><td>0</td><td>0</td><td>76</td></tr></table> <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p><u>No ya se Alegran</u></p> |                           | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0 | 9 | 26 | 0 | 0 | 76 |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Pimpón verde              | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |   |   |    |   |   |    |
| 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 9                         | 26            | 0            | 0               | 76           |                 |             |   |   |    |   |   |    |

Cuadro 28. Pregunta 5 de la Parte IV. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Frecuencia            |               |              |                 |              |                 |             |    |    |     |    |    |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|----|----|-----|----|----|-----|
| Los porcentajes para cada color son cercanos a los anteriores.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1 cuadernillo<br>(6%) |               |              |                 |              |                 |             |    |    |     |    |    |     |
| <p>5. Simule la situación 100 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).<br/>Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.<br/>Mire el resultado de "Data Table" en la <u>columna</u> de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla</p> <table border="1"><thead><tr><th>Pimpón blanco</th><th>Pimpón verde</th><th>Pimpón rojo</th><th>Pimpón negro</th><th>Pimpón amarillo</th><th>Pimpón azul</th></tr></thead><tbody><tr><td>0%</td><td>9%</td><td>20%</td><td>0%</td><td>0%</td><td>71%</td></tr></tbody></table> <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p><u>Si son más cercanos</u></p> |                       | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0% | 9% | 20% | 0% | 0% | 71% |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Pimpón verde          | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |    |    |     |    |    |     |
| 0%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 9%                    | 20%           | 0%           | 0%              | 71%          |                 |             |    |    |     |    |    |     |

Cuadro 29. Pregunta 5 de la Parte IV. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                               | Frecuencia               |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Los porcentajes para cada color no son cercanos a los anteriores. | 16 cuadernillos<br>(94%) |

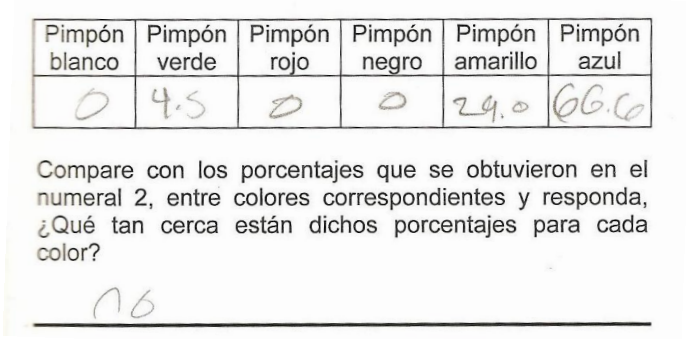
5. Simule la situación 100 veces (ítem 9 de instrucciones de uso).  
 Desarrolle ítem 8 de instrucciones de uso.  
 Mire el resultado de "Data Table" en la columna de "Percent" y anote los valores en la siguiente tabla

|               |              |             |              |                 |             |
|---------------|--------------|-------------|--------------|-----------------|-------------|
| Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul |
| 0%            | 9.0%         | 20%         | 0%           | 0%              | 71.0%       |

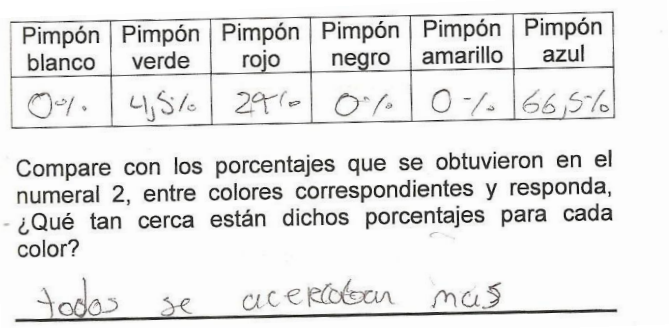
Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?

no están cerca

Cuadro 30. Primera parte de la pregunta 6 de la Parte IV.

| Foco de observación                                                                                                                                    | Frecuencia                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Se escribió en cada casilla el valor en porcentaje correspondiente.<br>En la imagen se muestra el cuadernillo que presentó problemas de transcripción. | 17 cuadernillos<br>(100%) |
|                                                                     |                           |

Cuadro 31. Pregunta 6 de la Parte IV. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                  | Frecuencia              |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Los porcentajes para cada color son cercanos a los anteriores.                       | 6 cuadernillos<br>(35%) |
|  |                         |

Cuadro 32. Pregunta 6 de la Parte IV. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Frecuencia                  |               |              |                 |              |                 |             |     |       |      |     |     |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|-----|-------|------|-----|-----|--------|
| Los porcentajes para cada color no son cercanos a los anteriores.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 9 cuadernillos<br><br>(53%) |               |              |                 |              |                 |             |     |       |      |     |     |        |
| <table><tr><td>Pimpón blanco</td><td>Pimpón verde</td><td>Pimpón rojo</td><td>Pimpón negro</td><td>Pimpón amarillo</td><td>Pimpón azul</td></tr><tr><td>0%.</td><td>4.5%.</td><td>29%.</td><td>0%.</td><td>0%.</td><td>66.5%.</td></tr></table> <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p><u>No está cerca</u></p> |                             | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0%. | 4.5%. | 29%. | 0%. | 0%. | 66.5%. |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Pimpón verde                | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |     |       |      |     |     |        |
| 0%.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 4.5%.                       | 29%.          | 0%.          | 0%.             | 66.5%.       |                 |             |     |       |      |     |     |        |

Cuadro 33. Pregunta 6 de la Parte IV. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Frecuencia              |               |              |                 |              |                 |             |    |      |     |    |    |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|----|------|-----|----|----|-------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2 cuadernillos<br>(12%) |               |              |                 |              |                 |             |    |      |     |    |    |       |
| <table><tr><td>Pimpón blanco</td><td>Pimpón verde</td><td>Pimpón rojo</td><td>Pimpón negro</td><td>Pimpón amarillo</td><td>Pimpón azul</td></tr><tr><td>0%</td><td>4.5%</td><td>29%</td><td>0%</td><td>0%</td><td>66.5%</td></tr></table> <p>Compare con los porcentajes que se obtuvieron en el numeral 2, entre colores correspondientes y responda, ¿Qué tan cerca están dichos porcentajes para cada color?</p> <p>Rojo: Mientras aumentan los intentos se mantienen el %<br/><u>Verde: Aumenta la cantidad disminuyen las posibilidades</u><br/>Azul: Se mantiene dicho %</p> |                         | Pimpón blanco | Pimpón verde | Pimpón rojo     | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul | 0% | 4.5% | 29% | 0% | 0% | 66.5% |
| Pimpón blanco                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Pimpón verde            | Pimpón rojo   | Pimpón negro | Pimpón amarillo | Pimpón azul  |                 |             |    |      |     |    |    |       |
| 0%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 4.5%                    | 29%           | 0%           | 0%              | 66.5%        |                 |             |    |      |     |    |    |       |

Cuadro 34. Pregunta 7 de la Parte IV. Primer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Frecuencia               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Se espera que los porcentajes sean mayores con respecto a los que se están comparando.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 13 cuadernillos<br>(76%) |
| <p>7. Si aumentara el número de ensayos considerablemente en una simulación, ¿Qué se esperaría de los porcentajes?</p> <p><u>Que aumentarían mas los porcentajes.</u></p> <p>Los valores que aparecen en la <u>columna</u> de "Percent" después de hacer, en este caso las 200 extracciones serán las probabilidades de cada color, esta manera de obtener la probabilidad de un evento se llama "<i>probabilidad frecuencial o probabilidad a posteriori</i>".</p> |                          |

Cuadro 35. Pregunta 7 de la Parte IV. Segundo Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Frecuencia             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| No espera nada.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1 cuadernillos<br>(6%) |
| <p>7. Si aumentara el número de ensayos considerablemente en una simulación, ¿Qué se esperaría de los porcentajes?</p> <p><u>Nada por que siguen siendo igual</u></p> <p>Los valores que aparecen en la <u>columna</u> de "Percent" después de hacer, en este caso las 200 extracciones serán las probabilidades de cada color, esta manera de obtener la probabilidad de un evento se llama "<i>probabilidad frecuencial o probabilidad a posteriori</i>".</p> |                        |

Cuadro 36. Pregunta 7 de la Parte IV. Tercer Foco de observación.

| Foco de observación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Frecuencia              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Respuesta confusa y/o no responde la pregunta.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 3 cuadernillos<br>(18%) |
| <p>7. Si aumentara el número de ensayos considerablemente en una simulación, ¿Qué se esperaría de los porcentajes?</p> <p><u>No por que varían por la cantidad</u></p> <p>Los valores que aparecen en la <u>columna</u> de "Percent" después de hacer, en este caso las 200 extracciones serán las probabilidades de cada color, esta manera de obtener la probabilidad de un evento se llama "probabilidad frecuencial o probabilidad a posteriori".</p> |                         |

Al finalizar la actividad, se pidió a los estudiantes que escribieran en la parte final del cuadernillo la(s) impresión(es) que tuvieron de la actividad.

A continuación se enuncian algunas de ellas y se muestran en el Cuadro 37.

- El software utilizado para la actividad fue de agrado. Un estudiante manifestó que le gustaría tener éste programa.
- Se aprendió cosas nuevas.
- La explicación a lo largo de la actividad fue buena y clara.
- La actividad fue instructiva y útil.

Cuadro 37. Algunas impresiones de la actividad.

|               |                                                                                                                                                                                                    |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cuadernillo 1 | <p>Me parecio muy interesante me gusto mucho el programa, es divertido y entendible.</p> <p>Gracias.</p>                                                                                           |
| Cuadernillo 3 | <p>Me parecio muy buena no quedo muy clara todo el expositor sabe darse a entender</p> <p>Muchas Gracias</p>  |
| Cuadernillo 8 | <p>Pues me parecio muy divertida A parte de divertida fue un aprendizaje para mi, sobre cosas increibles de las cuales no sabia. ..</p> <p>Muchas Gracias.</p>                                     |

## 4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Después de realizada la configuración de los resultados como parte de un estudio minucioso de los mismos, solo queda hacer algunas reflexiones como análisis.

A pesar de que el tema de éste escrito es las concepciones clásica y frecuencial de la probabilidad, en la aplicación –al comienzo- se nota el uso subjetivo de la noción de probabilidad por parte de los estudiantes, pues, al momento de la presentación inicial y siendo preguntados por lo que entendían ellos de probabilidad, fue la concepción predominante, algunas respuestas fueron: suerte, es el chance, es el destino, etc. Se ve claro aquí que de alguna manera éste estudio dejó de lado el enfoque subjetivo de la probabilidad, siendo esto un error al momento de enseñar la noción de probabilidad.

En cuanto al enfoque clásico de la probabilidad (tratado en la Parte II de la actividad), los estudiantes se mostraron comprensivos, activos y productivos ya que la mayoría de ellos grabó mentalmente casi la definición (casos favorables sobre la totalidad de casos). Un aspecto que causó curiosidad es que no se cuestionó –por parte de los estudiantes- sobre la equiprobabilidad allí.

Con respecto a el enfoque frecuencial, éste fue discernido por simulación en el software Probability Explorer. De acuerdo a lo planeado sería menester (ver anexo en físico *Cuadernillo*) el adiestramiento a manera de instructivo (mini-manual), cosa que no fue posible por la mala disposición de los equipos para los estudiantes, de manera que no se dio tal adiestramiento, fue necesario entonces ver instructivo y simulación a la vez. En pocas palabras, desarrollando la Parte IV se implementó el mini-manual de la Parte III, *quedando la fuerte sensación en los estudiantes que una estimación buena de algunas probabilidades de eventos, es la frecuencia relativa luego de varias simulaciones.*

En el pregunta a pregunta se observó que en los interrogantes que están compuestos por dos preguntas internamente (ver Cuadros 1 y 2), la mayoría de los estudiantes se enfocaron en una sola de ellas, por lo tanto, se recomienda que

para un mejor entendimiento por parte del estudiante, se separen las preguntas y se formulen en forma individual. Al igual, se recomienda realizar preguntas abiertas, de forma que no se limite la respuesta de los estudiantes. Se debería usar menos -solo en casos necesarios- las preguntas cerradas, cuya respuesta está encasillada en pocas alternativas, lo anterior obedece a la gran participación oral observada en el grupo.

En algunos apartes del cuestionario (ver Cuadros 10 y 11) se encontró que los estudiantes asocian el número asignado como etiqueta de los pimplones de un mismo color, con el numerador de la fracción que representa cada pimplón en la urna, se recomienda que los pimplones sean identificados -etiquetados- con otros símbolos que no involucren números.

En las respuestas consignadas por los estudiantes, en las cuales debían registrar datos en las tablas (ver Cuadros 24, 27 y 30), se detectó problemas de transcripción y confusión al interpretar los mismos, debido a esto, se recomienda realizar una tabla que permita identificar con claridad la forma cómo se debe diligenciar, esto facilitará la interpretación y el análisis de los resultados de la actividad.

Así pues, el anterior análisis es enteramente descriptivo y con algunos matices de retroalimentación para los autores de éste escrito.

## 5. CONCLUSIONES

Éste último acápite contiene conclusiones a manera de comentarios, procurando abarcar todos los temas tratados. En particular, las ideas expresadas por los autores, son basadas en su totalidad en lo encontrado después de la planeación y posterior aplicación de la actividad central. Siendo esto así, las conclusiones aquí consignadas solo serán trascendentes para éste escrito.

Inicialmente se estudió una de las propuestas de enseñanza relativas a la concepción clásica y a la concepción frecuencial de la probabilidad, establecidas por Rincón y Urian (2011). De modo tal que se realizaron modificaciones y adecuaciones pertinentes para su implementación.

Frente a la implementación, y en el caso particular (estudiantes sin conocimiento previo en Probabilidad), los estudiantes identificaron que en muchas situaciones reales y cotidianas ésta implícita la probabilidad; dicha identificación se reflejó en los ejemplos propuestos por ellos mismos y en las respuestas dadas a las preguntas realizadas por el docente.

Durante el manejo del software *Probability Explorer*, el estudiante comparó los resultados de probabilidad, bajo las concepciones clásica y frecuencial resaltando su cercanía a medida que se aumentaba el número de ensayos, así se logro una profundización en éstas dos concepciones de probabilidad.

Al reunir los resultados consignados en los cuadernillos referentes a la actividad, se configuraron y se analizaron, de tal forma que se observó que con una frecuencia considerable, los estudiantes implícitamente “acortaron” la distancia existente entre la concepción clásica y frecuencial (ver Cuadros 28, 31 y 34). También despertó mayor interés, comprensión y entendimiento por el tema, una vez se hace uso de paquetes (software) didácticos, que abren la posibilidad tanto de comprobar resultados, como la creación de nuevas actividades (piedra, papel o

tijera) por parte del estudiante, para reforzar de forma divertida el tema a desarrollar (ver Cuadro 37).

Para finalizar, al haber asistido a la construcción, implementación y resultados de una actividad como la propuesta con anterioridad, los autores ven con claridad la posibilidad de realizar mejores análisis (más completos), en el sentido de extraer de los resultados un poco más, permitiendo de alguna manera mejores inferencias. Tal mejoría no se dio en este estudio, pues, los objetivos del mismo no lo permitieron, ni los tiempos que se requieren para la adaptación. Sería importante e interesante en el futuro incluir en los análisis de resultados de experimentos de enseñanza, herramientas a manera de indicadores, que nos permita tener criterios para cotejar lo alcanzado por los estudiantes y lo propuesto por los investigadores, tal cual lo consagran en su trabajo de investigación Fernández, Andrade y Sarmiento (2010).

## REFERENCIAS

- Batanero, C. (2005). Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, 247-263.
- Blanco, L. (2004). *Probabilidad*. Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.
- Canavos, G. (2001). *Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos*. Madrid: McGRAW-HILL.
- Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento B. (2010). *Experimentos de Enseñanza para el Desarrollo de Razonamiento Estadístico con Estudiantes de Secundaria*. Bogota, D.C.
- Fischbein. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. En fischebein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reiman-Holanda.
- Godino, J. (1989). *Azar y probabilidad. Síntesis*. Madrid.
- Ministerio de Educación Nacional Colombia (MEN). (4 de Febrero de 1998). *Matemáticas - Ministerio de Educación Nacional*. Obtenido de Matemáticas - Ministerio de Educación Nacional: [www.mineducacion.gov.co/cvn/.../articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/.../articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (12 de Marzo de 2006). *Estándares de Competencias en Matemáticas - Eduteka*. Obtenido de Estándares de Competencias en Matemáticas - Eduteka: [www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.php](http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.php)
- Peña, D. (1988). *Estadística Modelos y Métodos*. Madrid: Alianza.
- Rincón, J. y Urian, J. (2011). *Una Serie de Tareas Enfocadas Hacia la Enseñanza de la Probabilidad Clásica y Frecuencial a Estudiantes de Grados 8° y 9°*. Bogotá D.C.: UPN.
- Universidad Autónoma de Madrid. (23 de Octubre de 1987). *Enseñanza de la probabilidad Uam, [DOC] Capitulo 5*. Obtenido de Enseñanza de la probabilidad Uam, [DOC] Capitulo 5: [www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc](http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc)

## ANEXO

Se anexa en físico a éste trabajo de grado el Cuadernillo utilizado para la implementación de la actividad.