UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

Sobre la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana haciendo uso del formalismo matemático de Von Neumann para la enseñanza de la mecánica cuántica

Departamento de Física

Sobre la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana haciendo uso del formalismo matemático de Von Neumann para la enseñanza de la mecánica cuántica

Carlos Germán Cortés Hernández

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C.

2018

Sobre la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana haciendo uso del formalismo matemático de Von Neumann para la enseñanza de la mecánica cuántica

Carlos Germán Cortés Hernández

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Licenciado en Física

Director: M.Sc. Mauricio Rozo Clavijo

Línea de Investigación

La enseñanza de la física y la relación física-matemática

Grupo: Campos y Partículas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C.

2018

Agradecimientos

A mi amadisima esposa:"Siempre he creído en los números, en las ecuaciones y la lógica que llevan a la razón. Pero, después de una vida de búsqueda me digo, ¿Qué es la lógica? ¿Quién decide la razón? He buscado a través de lo físico, lo metafísico, lo delirante, ... y he vuelto a empezar. Y he hecho el descubrimiento más importante de mi carrera, el más importante de mi vida entera. Sólo en las misteriosas ecuaciones del amor puede encontrarse alguna lógica. ... Tú eres mi única razón de ser. Eres todas mis razones..."GRACIAS

(Una mente brillante,2001)

A mi director. Mauricio, infinitas gracias por orientarme y enseñarme el camino de la investigación, por su paciencia y el tiempo dedicado en charlas y discusiones porque me motivaron cada vez más a aprender, a cambiar la manera de pensar, a formarme en los saberes de la mecánica cuántica.

Finalmente, a mi universidad, gracias porque más que formarme como licenciado en física, me educó como persona y me brindo la oportunidad de enriquecer el don de educar.

Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Sobre la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana haciendo uso del formalismo de Von Neumann para la enseñanza de la mecánica cuántica
Autor(es)	Cortés Hernández, Carlos Germán
Director	Rozo Clavijo, Mauricio
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 55 P.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagogica Nacional
Palabras Claves	ENSEÑANZA, MECÁNICA NEWTONIANA, MECÁNICA CUÁNTICA, RELACIÓN FÍSICA – MATEMÁTICA, VON NEUMANN

1. Descripción

A lo largo de los años el hombre se ha interesado por hacer una comprensión de la naturaleza y por buscar explicaciones e interpretar los fenómenos que suceden a su alrededor. En este sentido, muchos pensadores se han preocupado por explicar y brindar herramientas que muestren, ya sea de manera cualitativa o cuantitativa, la articulación de la explicación con el mundo físico.

Este trabajo busca reconocer que las matemáticas son parte constitutiva de la física mostrando la axiomatización de la mecánica newtoniana y permitiendo reflexionar en la importancia y la necesidad de esta formalización al abordar el curso de mecánica cuántica, ya que esto le facilita al estudiante familiarizarse con la estructura matemática de los espacios vectoriales con producto interno, y mejorar su proceso de aprendizaje.

Esta propuesta se hace siguiendo los lineamientos propuestos por Von Neumann, quien mostró una manera de axiomatizar la mecánica cuántica basada en tres elementos claves: la maquinaria analítica (estructura matemática), la interpretación física y los axiomas físicos (postulados). Llevando a cabo esta tarea se le va a permitir al estudiante que cuando se enfrente a esta nueva manera de pensar y de ver el mundo ya este familiarizado con la axiomatización de la mecánica newtoniana y así se le facilite su proceso de aprendizaje al abordar el curso de mecánica cuántica.

2. Fuentes

Para el desarrollo de este trabajo de investigación, las principales fuentes bibliográficas fueron:

[1] Abhang, R. Y. (2005) **Making introductory quantum physics understandable and interisting. Classroom-Resonance**. Journal of Science Education. 63-73.

[2] Ayala, M. (1999) **La enseñanza de la física para la formación de profesores de física**, Tecne Episteme Y Didaxis, Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 4, 6 – 13.

[3] Ayala, M. M. (2006) **Los análisis histórico críticos y la recontextualización de saberes científicos.** Construyendo un nuevo espacio de posibilidades, Pro-Posições, Vol. 17.

[4] Baily C., Finkelstein N. (2009) **Development of quantum perspectives in modern physics**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 9.

[5] Baily C., Finkelstein N. (2010) **Refined characterization of student perspectives on quantum physics**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 11.

[6] Baily C., Finkelstein N. (2010) **Teaching and understanding of quantum interpretation in modern physics courses**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 11.

[7] Baily C., Finkelstein N. (2015) **Teaching quantum interpretation: Revisiting the goals and practices of introductory quantum physics courses**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 11, 1 - 14.

[8] Bao L., Redish E. (2002) **Understanding probabilistic interpretation of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics**, American Journal of physics,70(3), 210 - 217.

[9] Bautista G. H. (2009) **Apuntes de mecánica cuántica (primera parte)**, Preimpresos, No 20, Universidad Pedagógica Nacional.

[10] Carr L., McKagan S. **Graduate quantum mechanics reform**, American Journal of Physics 77(4), 308 - 319.

[11] Cohen G., Moreira M., Herscovitz V. **Implementation of a didactic proposal on fundamental concepts of quantum mechanics with students of a professional master's degree in physics teaching**, Latin American Journal Physics Education, Vol 6, No 4, 519 – 529.

[12] Cohen G., Moreira M., Herscovitz V. **La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica a alumnos de graduación en física**, Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, REIEC Volumen 9 No 1, 22 - 39.

[13] Dennis E. and Norsen T. (2008) **Quantum theory: Interpretation cannot avoid**, Recuperado de: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0408178.pdf, Consultado: 30 Noviembre 2017

[14] Dirac P. A. M. (1958) **The Principles of Quantum Mechanics**, (4a. Edición) Oxford University Press.

[15] Grazer B., Howard R. (2001) **Una mente brillante**, Estados Unidos.

[16] Greca I. M. y Herscovitz, V. E. (2002) **Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario**. Enseñanza de las Ciencias, 20(2), pp. 327-338.

[17] Ireson, G. (2002) *A multivariate analysis of undergraduate physics students' conceptions of* **quantum phenomena**, European Journal of Physics, Volume 20, Number 3.

[18] Krasnoholovets, V. (2003) **On the origin of conceptual difficulties of quantum mechanics. Developments in quantum physics**. Nova Science Publisher. New York. 85-109.

[19] Madrid, C. (2009) **De la equivalencia matemática entre la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria**. La Gaceta. 108-128.

[20] Özcan Ö. (2010) **How do the students describe the quantum mechanics and classical mechanics?** Latin American Journal Physical Education, Vol 4, No 1. 22 - 25.

[21] Pantoja G., Moreira., Herscovitz V. (2013). **La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica cuántica a alumnos de graduación en física**. REIEC Vol. 9. Brasil.

[22] Peña L. (2014) **Introducción a la mecánica cuántica**, Universidad Autónoma de México, Fondo de cultura económica.

[23] Rédei M., Stöltzner M. (2006) **Soft axiomatization: John Von Neumann on method and Von Neumann's method in the physical science in Intuition and the Axiomatic Method**, Edited by Carson E. and Huber R., Springer Netherlands, 235 - 249.

[24] Rozo M., Mendoza D. and Olarte J. A. (2016) **Around the notion of state and the Superposition Principle**. Versión Electrónica, algo más que un estado sólido, Vol. 10, No. 2, 230-236, Julio-Diciembre.

[25] Singh Ch. (2001) **Student understanding of quantum mechanics at the beginning of graduate instruction**, American Journal of Physics 76, 277 - 287.

[26] Singh Ch. (2001) **Student understanding of quantum mechanics**, American Journal of Physics 69, 885 - 895.
[27] Singh Ch., Zhu G. (2009) **Cognitive Issues in learning advanced physics: An example from quantum mechanics**, Physical Education Research Conferences, Edited by Sabella M., Henderson C, Sing Ch.1179, 63 - 66.
[28] Sing Ch., Marshman E. (2010) **Review of student difficulties in upper - level quantum mechanics,** Physical Review Special Topics - Physics Education Research 11, 1 - 24.
[29] Von Neumann, J. (1949) **Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica**. Publicaciones del instituto de Matemáticas "Jorge Juan". Madrid.
[30] Zhu G., Singh C. (2012) **Improving students' understanding of quantum measurement. I. Investigation of difficulties**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 8, 1 - 8.
[31] Zhu G., Singh C. (2012) **Improving students' understanding of quantum measurement. I. Development of research - based learning tools**, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 8, 1 - 13.
[32] Zhu G., Singh C. (2012) **Surveying students's understanding of quantum mechanics in one spatial dimension**, American Journal of Physics 80(3), 252 - 259.

3. Contenidos

En el primer capítulo se aborda las problemáticas alrededor de la enseñanza de la mecánica cuántica mostrando las diferentes dificultades que se presentan en la enseñanza - aprendizaje de esta. Reconociendo esas dificultades se realiza una reflexión sobre la necesidad de axiomatizar la mecánica newtoniana teniendo en cuenta la relación física - matemática y la importancia de la axiomatización de esta, para la enseñanza de la mecánica cuántica, la cual permite mostrar la manera de formalizar en la física, para finalmente darle sentido y significado a la enseñanza de la mecánica cuántica en el currículo de forma más amigable al estudiante.

En el segundo capítulo, se muestra la axiomatización de la mecánica newtoniana iniciando con la construcción de la estructura matemática que decanta en la interpretación física de los fenómenos que se fundamentan en los postulados que encierran todo fenómeno clásico de la naturaleza. Esta manera de proceder se hace siguiendo los lineamientos de axiomatización propuestos por Von Neumann.

Finalmente en el tercer capítulo se expone la axiomatización de la mecánica cuántica, cuyo abordaje se hace teniendo en cuenta: en primer lugar la propuesta de Von Neumann apoyada en su libro "**Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica**" y en segundo lugar reconocer la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana, para darle sentido a la investigación, visibilizando la estructura algebraica de esta como parte constitutiva, la cual permite al estudiante abordar estas dos teorías desde una mirada axiomática y motivar la enseñanza de la mecánica cuántica.

4. Metodología

Los análisis histórico–críticos para la enseñanza de la mecánica cuántica, brindan la posibilidad de realizar una estructuración y organización de los fenómenos a nivel atómico para su explicación, ya que a partir de la recontextualizacion de los saberes se da sentido al contexto en la cual surgieron las diferentes formulaciones en torno a la mecánica cuántica permitiendo la axiomatización de la mecánica newtoniana bajo los lineamientos de Von Neumann para la enseñanza de la mecánica cuántica.

Dada la metodología propuesta se reconoce el dialogo que se hizo con el autor, en este caso con Von Neumann para la formalización de la mecánica newtoniana bajo los espacios vectoriales, lo cual permitió fortalecer el conocimiento y reflexionar alrededor de la forma de enseñar la mecánica cuántica en el aula, ya que muchos textos no muestran la discusión que giró en torno al desarrollo de los conceptos y su formalización. Así que al analizar el texto de Von Neumann, se puede indagar sobre el formalismo matemático de la mecánica cuántica no relativista como un ejemplo de la relación entre las nociones físicas y el desarrollo matemático que posibilita la axiomatización de la mecánica newtoniana y a la vez le facilita al estudiante los abordajes que se dan en el curso de mecánica cuántica.

5. Conclusiones

- Realizar investigaciones en torno a las dificultades que tienen los estudiantes no solo en mecánica cuántica sino también en otras campos de la enseñanza de la física en el contexto colombiano son muy pertinentes y necesitan ser llevadas a cabo, ya que permiten investigar y proponer nuevas didácticas para la enseñanza de la física.
- La importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana familiariza al estudiante con su estructura matemática propia y sustenta que la matemática es parte constitutiva de la física, además sugiriendo que la mecánica cuántica se puede enseñar en los primeros semestres, ya que la base matemática de la mecánica cuántica y la mecánica newtoniana son los espacios vectoriales, eliminando la idea de que la física se debe enseñar de manera lineal y buscando que la física sea contextualizada a los recientes desarrollos tecnológicos y no se enseñe para el pasado sino para el futuro.
- El enfoque axiomático de la mecánica clásica de corte newtoniano a partir del esquema del álgebra lineal familiariza al estudiante con los espacios vectoriales de tal manera que cuando afronta el curso de mecánica cuántica ya cuenta con un andamiaje matemático sólido y se le facilite su transición entre estas dos teorías.
- La manera de conocer del sujeto en la física se consolida en el estudio de sistemas clásicos y cuánticos, llevando al sujeto a construir explicaciones del mundo físico, es decir, formalizando unas nociones, cuyo fin es organizar la experiencia del sujeto para construir conocimiento.
- Este trabajo de investigación motiva a que dicha construcción axiomática que fue propuesta por Von Neumann y la notación de bra y ket, puede ser llevada al contexto de la física clásica, lo cual sugiere que esta notación no es exclusiva de la mecánica cuántica.

Elaborado por:	Cortés Hernández, Carlos Germán
Revisado por:	Rozo Clavijo, Mauricio

Fecha de elaboración del Resumen:	10	05	2018

Tabla de Contenido

Introducción

A lo largo de los años el hombre se ha interesado por hacer una comprensión de la naturaleza y por comprender e interpretar los fenómenos que suceden a su alrededor. En este sentido, muchos pensadores se han preocupado por explicar y brindar herramientas que muestren, ya sea de manera cualitativa o cuantitativa, la articulación de la explicación con el mundo físico.

Como un ejemplo de esa relación entre la física y los conceptos matemáticos, se encuentra la mecánica cuántica, que actualmente se enseña en muchas universidades como componente disciplinar de la física. Cuando se enseña la mecánica cuántica en general se genera una dificultad en los estudiantes ya que los fenómenos cuánticos no son directamente perceptibles a los estudiantes y son contrarios a la intuición que deriva de la percepción. Además de que los estudiantes cuando llegan al curso de mecánica cuántica, están condicionados bajo una única mirada o forma de pensar, la newtoniana, con una deficiencia en el reconocimiento de la estructura matemática de esta.

Enseñar la mecánica cuántica implica formalizar el fenómeno y es ahí donde nacen las primeras dificultades en los estudiantes, ya que la formalización es pensada como el planteamiento de ecuaciones matemáticas. Lograr ver la importancia del formalismo riguroso de la teoría desde el curso de mecánica cuántica es muy importante, ya que permite innovar en nuevas herramientas didácticas que faciliten a los estudiantes la comprensión de una teoría que está inmersa en la mayoría de aparatos tecnológicos actualmente utilizados por la humanidad en su vida cotidiana. Así, la enseñanza de mecánica cuántica debe llevar al estudiante a indagarse por el uso de un formalismo matemático y por el surgimiento de explicaciones alrededor de los fenómenos.

Este trabajo de investigación muestra los estudios realizados en torno a la relación física - matemática y su importancia para la enseñanza de la mecánica cuántica. Para realizar esta investigación se adoptó una metodología histórico - crítica, realizando una recontextualización de saberes donde se estableció un diálogo con uno de los originales del génesis de la mecánica cuántica. El libro que se utilizó como fuente principal del presente trabajo es la version en español del original publicado en Alemán en 1932 por uno de los científicos más influyentes del siglo XX, quien formalizó y presentó de manera elegante el edificio matemático de la mecánica cuántica. Dicho libro fue escrito por el físico - matemático John Von Neumann (1903 - 1957) bajo el título *"Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica"*(Edición traducida al español en 1949 por R. Ortiz, el libro en el idioma original: alemán fue escrito en 1932), el cual en primer lugar da luces a la solución del sexto problema propuesto por David Hilbert en la conferencia de París de 1909, cuyo fin consistía en hacer una presentación de la física de manera axiomática. La intención de escoger este texto recae en la fuente (Von Neumann) que permite establecer la formalización de la física, partiendo de una axiomatización distinta a las conocidas en las matemáticas como por ejemplo la geometría.

En el primer capítulo se aborda las problemáticas alrededor de la enseñanza de la mecánica cuántica presentando las diferentes dificultades que se presentan en la enseñanza - aprendizaje de esta. Reconociendo esas dificultades se realiza una reflexión sobre la necesidad de axiomatizar la mecánica newtoniana teniendo en cuenta la relación física - matemática y la importancia de la axiomatización de esta, para la enseñanza de la mecánica cuántica, la cual permite mostrar la manera de formalizar en la física, para finalmente darle sentido y significado a la enseñanza de la mecánica cuántica en el currículo de forma más amigable al estudiante.

En el segundo capítulo se expone la axiomatización de la mecánica Newtoniana comenzando con la construcción de la estructura matemática de los espacios vectoriales que decanta en la interpretación física de los fenómenos que se sustentan en unos axiomas físicos que permiten explicar cualquier fenómeno clásico de la naturaleza. Esta manera de proceder se hace desde los lineamientos de axiomatización propuestos por Von Neumann.

Finalmente en el tercer capítulo se muestra la axiomatización de la mecánica cuántica, cuyo abordaje se hace teniendo en cuenta: en primer lugar la propuesta de Von Neumann apoyada en su libro "Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica" y en segundo lugar reconocer la importancia de axiomatizar la mecánica newtoniana, para darle sentido a la investigación, visibilizando la estructura algebraica de la mecánica newtoniana como parte constitutiva, la cual permite al estudiante abordar estas dos teorías desde una mirada axiomática y motivar la enseñanza de la mecánica cuántica.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En general, al momento de abordar el aprendizaje de la mecánica cuántica se presentan diferentes dificultades, debido a que su enseñanza requiere de un lenguaje matemático abstracto y en principio difícil. Una de las principales dificultades se fundamenta en que la mecánica cuántica se formaliza con nociones que no tienen su equivalente en el formalismo de la mecánica clásica. Entre las que se destacan la noción de dualidad onda – partícula, la interpretación probabilística de la función de onda de Schrödinger, el principio de incertidumbre de Heisenberg y la teoría de operadores, entre otras. (Krasnoholovets, 2003)

Otro de los grandes obstáculos en términos de la enseñanza – aprendizaje de la mecánica cuántica radica en la estructura matemática que gira en torno a su construcción, debido a que los estudiantes encuentran dificultades en entender como la mecánica matricial de Heisenberg y la ondulatoria de Schrödinger describen la misma física. Además, también se genera dificultad cuando se introducen los espacios de Hilbert, (espacio vectorial complejo con producto interno) los operadores Hermíticos y la física que ellos describen. (Abhang, 2005)

Bajo este contexto, el nivel de abstracción al momento de enseñar es muy difícil, ya que implica que los estudiantes se hagan imágenes mentales de sistemas físicos que no pueden observar, pero que si permite visualizar los efectos al interactuar con otros. Por lo tanto, la enseñanza de la mecánica cuántica, debe llevar a que los maestros innoven en nuevas herramientas que permita a los estudiantes comprender e interpretar el funcionamiento de la naturaleza a nivel micro, a partir de la relación entre la física y la matemática. En consecuencia, hacer un estudio histórico–crítico sobre los orígenes de la mecánica cuántica permite encontrar nuevas miradas a partir de la formalización realizada por Von Neumann, que sirvan de puente entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica.

PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo a través de un estudio histórico-crítico sobre el formalismo de Von Neumann se puede axiomatizar la mecánica newtoniana para la enseñanza de la mecánica cuántica?

OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio histórico-crítico sobre los fundamentos de la mecánica cuántica en torno a los aportes de Von Neumann, de tal manera que permita axiomatizar la mecánica newtoniana para la enseñanza de la mecánica cuántica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer una exploración bibliográfica llevando a cabo un análisis alrededor de las diferentes posturas y dificultades que se presentan en la enseñanza de la mecánica cuántica.

- Realizar la axiomatización de la mecánica newtoniana a partir de la estructura matemática de los espacios vectoriales, desde la mirada axiomática de Von Neumann que permita caracterizar su importancia para la enseñanza de la mecánica cuántica.

- Mostrar la axiomatización de la mecánica cuántica propuesta por Von Neumann a partir de los espacios de Hilbert y los operadores Hermíticos.

CAPÍTULO 1

Sobre la enseñanza de la mecánica cuántica

Diferentes estudios se han realizado acerca de la enseñanza de la mecánica cuántica y una de las dificultades que los investigadores han encontrado recae en el exceso del formalismo matemático y la poca discusión conceptual que se da en las aulas universitarias, generando la percepción de que la física es un conjunto de ecuaciones matemáticas o de forma general solo matemáticas, sin permitir un balance entre lo conceptual y el tratamiento matemático. (Pantoja, Moreira y Herscovitz, 2013)

Si bien, la mecánica cuántica goza de un excelente formalismo matemático y durante casi un siglo diferentes experimentos han mostrado su maravillosa armonía con sus fundamentos, esta teoría ha generado muchas dificultades desde sus inicios y aún mantiene ciertos interrogantes difíciles de comprender que con las investigaciones llevadas desde 1925-1927 no muestran un camino muy claro, ya que, los fenómenos a nivel atómico no son sensibles al ser humano, y es precisamente ahí donde nacen problemas de orden filosófico y demás. Luego se propone como estrategia para contrarrestar las dificultades: primero después de identificar unas dificultades hacer un abordaje histórico crítico, desde uno de los pensadores de ese tiempo quien propuso una manera de formalizar la mecánica cuántica como fue Von Neumann, segundo visualizar como la axiomatización en la física permite derivar el formalismo a partir de postulados que surgen de las explicaciones que da el sujeto a su interacción con los fenómenos físicos y finalmente como esta propuesta de axiomatización de la mecánica cuántica propuesta por Von Neumann permite axiomatizar la mecánica Newtoniana.

Dentro de las grandes dificultades para llevar la mecánica cuántica al aula esta la fuerte importancia que recae en el sentido y significado de la relación entre la física y la matemática, y como esta a lo largo de los años ha permitido que la física disponga de una herramienta que los científicos usan a placer para generar nuevos saberes, ya sea de orden matemático o principalmente dentro del mismo campo de la física en el intento del ser humano por comprender los fenómenos naturales.

Las matemáticas son parte constitutiva de la física y una de las maneras por las cuales surgen las teorías es haciendo uso de esta herramienta a partir de una formalización, la cual se estructura en los intentos de organizar las leyes de la naturaleza comenzando por unos postulados que no requieren de demostración, y de ellos deducir las teorías físicas justificadas en leyes lógicas y aritméticas. Así la axiomatización de la física es una forma de organizar principios generales de manera lógica, que llevan a una formalización de carácter físico - matemático y este fue el logro de Von Neumann con la teoría cuántica, influenciado por David Hilbert. Tal relación entre la matemática y la física es el eje articulador entre el fenómeno y la formalización, cuya manera de proceder se hace presentando la teoría en forma axiomática.

La mecánica cuántica es una de las ramas de la física de mayor dificultad en el proceso de enseñanza - aprendizaje y por ende llevar esos conocimientos al aula y al publico en general es uno de los grandes retos de todo licenciado en física. Pero hay que tener en cuenta que los desarrollos científicos y en general la ciencia es una construcción humana que parte de la experiencia del ser humano al interactuar con la naturaleza buscando lograr entender su manera de comportarse, ya sea implícitamente o explícitamente. Es así que el edificio de la ciencia en principio no es absoluto y esta continuamente avanzando, por ende, estos conocimientos deben ser llevados al aula de forma correcta e integrados bajo un currículo que permita al estudiante comprender el comportamiento de la naturaleza a nivel atómico.

Así, los saberes de la mecánica cuántica deben servir de plataforma a nuevos descubrimientos en la ciencia y por ende su importancia en los currículos, ya que, la historia de la mecánica cuántica sigue su curso y nuevos avances cada día deben llevar al ser humano a interiorizar nuevos conocimientos.

1.1. Dificultades en la enseñanza - aprendizaje de la mecánica cuántica

La enseñanza - aprendizaje es un proceso dentro del cual están implícitamente reunidas las interacciones docente - estudiante y estudiante - estudiante y es en esta dirección que se conciben las dificultades en la enseñanza de la mecánica cuántica. Un escaneo de las diferentes investigaciones que se han realizado en torno a las dificultades en la enseñanza de la física moderna bajo el caso particular de la mecánica cuántica en los centros universitarios, permite encontrar los estudios de:

- **Universidad de Colorado**

(Baily and Finkelstein, 2008); (Carr and McKagan, 2009); (Baily and Finkelstein, 2009); (Baily and Finkelstein, 2010); (Baily and Finkelstein, 2015).

Allí, ellos bajo el liderazgo del grupo de investigación en enseñanza de la física (PER, en ingles) en particular la mecánica cuántica han realizado estudios en dos cursos de física moderna, proponiendo e innovando en nuevos currículos: uno para estudiantes de ingeniería y otro para estudiantes de física con los mismos contenidos y con una población de aproximadamente 75 estudiantes, por varios semestres (desde 2005), bajo el mismo entorno de aprendizaje. La recolección de datos se hizo a partir de entrevistas, encuestas conceptuales, pre test y post test.

Las conclusiones a las que ellos llegaron en torno a las dificultades que los estudiantes encuentran en los cursos de física moderna están: el rol de las interpretaciones en la ciencia a partir de los cursos de mecánica clásica y su experiencia diaria que los llevo a catalogar tres interpretaciones alrededor del experimento de la doble rendija solo para electrones: *realista/estadística: los electrones pasan por una rendija u otra, pero es imposible saber por cual sin destruir el patrón de interferencia; Copenhague/agnóstica:los electrones no son ni partículas ni ondas, la naturaleza dual es una forma de entender el comportamiento de los electrones y materia ondulatoria: la función de onda es físicamente real, es decir, los electrones son ondas deslocalizados cuando se propagan a través de las rendijas e interfieren consigo mismo*, las cuales son las suficientes para ser tratadas en estos cursos, además se enfatiza en que se debe dar importancia al sentido y significado de la interpretación física de las ecuaciones; los problemas en torno a contenido - pedagogía, donde se identifican dificultades con los contenidos del curso, texto de libro, métodos de enseñanza tradicional y herramientas de evaluación; problemas conceptuales tales como: la relación de la densidad de probabilidad con la función de onda, interpretación de la dualidad onda - partícula, se cree que las partículas viajan a través de trayectorias sinusoidales, dificultades en la relación cualitativa entre la función de energía potencial y la amplitud y longitud de onda, entre otras.Finalmente ellos mencionan que más que llevar al aula las tres interpretaciones, se debe tener en cuenta como se hace la transición conceptual de la mecánica clásica y como los estudiantes interpretan los fenómenos naturales y cuales son las limitaciones de esas interpretaciones particulares. Por otro lado los estudiantes al llegar a cursos de posgrado tienen series dificultades alrededor de las problemáticas mencionadas.

- **Grupo Sing**

(Sing, 2001); (Sing , 2008); (Sing y Zhu, 2009); (Sing y Zhu, 2011); (Sing y Zhu, 2012); (Sing y Marshman, 2015).

Los estudios del grupo de Chandralekha Sing de la Universidad de Pittsburgh de Estados Unidos han sido de los más completos en las más recientes investigaciones, ya que han investigado las dificultades de los estudiantes tanto a nivel de pregrado haciendo estudios transversales en seis universidades de los Estados Unidos (Universidad de Pittsburgh, Universidad Carnegie Mellon, Universidad de Illinois Urbana Champaign, Universidad de Boston, Universidad de California

Santa Barbara y la Universidad de Colorado) dentro del curso de mecánica cuántica a 98 estudiantes, bajo diferentes objetivos, como de posgrado,donde la muestra fue de 202 estudiantes del curso de mecánica cuántica de primer año de Maestría en Física de siete universidades de Estados Unidos: Universidad del estado de Ohio, Universidad del estado de New York (SUNNY, Buffalo), Universidad de California (Davis),Universidad de Iowa, Universidad de California (Irvine), Universidad de Pittsburg y Universidad de California (Santa Barbara). Los estudios realizados consistieron en encuestas conceptuales y entrevistas, en las cuales se analizó la comprensión de diferentes conceptos de la mecánica cuántica como: la distinción entre espacio físico y espacio de Hilbert, la medida cuántica, la evolución temporal, formalismo matemático, la importancia de los valores propios de energía o estados estacionarios, el significado de los valores propios de un observable y los cálculos de valores esperados, entre otros.

A las conclusiones que ellos llegaron fue que muchos estudiantes aprenden a resolver la ecuación de Schrodinger en diferentes potenciales, pero tienen errores en la conceptualización con respecto a la medida y la evolución temporal, dificultades en distinguir entre los estados propios de un operador para diferentes observables, la dificultad con posibles resultados de una medida y el valor esperado de una medida. Ellos proponen el experimento de Stern Gerlach para resolver problemas alrededor de la medida, la diferencia entre superposición de estados y mezcla, como la importancia de seleccionar una base, además de tutoriales interactivos de aprendizaje cuántico(QuILT, siglas en inglés). También plantean que antes de integrar los conocimientos previos de la mecánica clásica, se debe primero aprender el formalismo matemático y la parte conceptual de la mecánica cuántica para luego si realizar esa transición y distinguir las diferencias conceptuales y de formalismo.

- **Grupo Hercovitz**

(Greca y Hercovitz, 2002); (Pantoja, Moreira y Hercovitz , 2012); (Pantoja, Moreira y Herscovitz, 2013).

Estos estudios latinoamericanos se han llevado a cabo en Brasil, con propuestas didácticas a 105 estudiantes del curso de física general de cuarto año(mecánica cuántica) en los dos semestres del año 1999 en la Universidad Federal do Río Grande do Sul, bajo un abordaje fenomenológico - conceptual, en el cual los estudiantes se enfrentan a los fenómenos alrededor de experimentos simples que permitan llegar a los conceptos de una manera evidente.

Se propuso un pre test y un pos test en torno a una unidad didáctica para ser desarrollada en 24 horas. Entre los conceptos propuestos a llevar a cabo en la propuesta estuvieron: superposición lineal de estados, principio de incertidumbre (dualidad onda - partícula), distribución de probabilidad y problema de la medida. Entre los escenarios fenomenológicos se mencionan el experimento de Stern Gerlach, el de Young, la paradoja del gato de Schrödinger, computación cuántica y teletransportación.

Los resultados de la propuesta fueron agrupados en cuatro categorías: núcleo de objeto cuántico, donde se encuentran estudiantes que logran establecer diferencias entre las nociones clásicas y cuánticas e interpretan de acuerdo a su nivel de formación las ideas cuánticas; núcleo de objeto cuántico incipiente, aquí los estudiantes lograron interpretar el fenómeno de dualidad onda - partícula, el principio de incertidumbre, como el carácter probabilístico de las mediciones cuánticas, pero no lograron asimilar la superposición lineal de estados; núcleo clásico con elementos cuánticos, los estudiantes tienen dificultades en diferenciar la conceptualización de la mecánica cuántica y se les asocia pre conceptos clásicos que no van en la dirección del significado; indeterminado, a estos estudiantes es difícil asociarle un patrón de aprendizaje acorde con los conceptos cuánticos.

Con el análisis de los resultados de esta investigación, se puede afirmar que es posible innovar en nuevas estrategias de enseñanza y olvidarnos de que la mecánica cuántica se debe seguir enseñando bajo mecanismos tradicionales, donde las analogías clásicas se deben eliminar de este contexto, ya que refuerza ideas clásicas en contra de construir nuevos conocimientos. Esta manera de proceder no se debe confundir con simplificar las teorías, ni mucho menos con reducir conceptos complejos a los simples de la mecánica clásica, sino que dichas propuestas deben ir encaminadas a proponer discusiones conceptuales que muestren en realidad la construcción de manera distinta de los conceptos de la mecánica cuántica.

Otro estudio realizado en la misma universidad pero con una muestra de seis estudiantes de Maestría en en enseñanza de la física fue llevado a cabo en el año 2010, donde se hizo énfasis en los conceptos de sistema físico, variables dinámicas, estado y evolución temporal del sistema físico, bajo la teoría de aprendizaje significativo. La implementación fue llevada a cabo con unidades didácticas en las cuales se realizarón pre test y post test, para evidenciar si hubo cambios alrededor de los conceptos mencionados. En esta ruta de aprendizaje continuo se pudo concluir que los procesos de conceptualización a partir de situaciones permiten diferenciar conceptos tales como probabilidad y amplitud de probabilidad, además de la importancia de conceptos como predictibilidad y causalidad.

- **Varios**

(Ireson , 1999) y (Bao y Redish , 2002).

El estudio de Ireson fue llevado a a cabo con una muestra de 338 estudiantes de segundo y tercer año del pregrado de física de universidades del Reino Unido, a los cuales se les presentó un cuestionario de 40 afirmaciones y de las cuales debía manifestar su grado de acuerdo o desacuerdo, 29 hacían alusión a la comprensión de conceptos cuánticos y las demás 11 a la comprensión conceptual de modelos de la luz dentro de la mecánica cuántica. Tal estudio concluyó que para mejorar la enseñanza de la mecánica cuántica se debe eliminar la referencia a la física clásica, para enseñar el efecto fotoeléctrico se debe comenzar con electrones mas que no con fotones, el tratamiento del átomo de hidrógeno no se debe hacer con el modelo de Bohr. Finalmente se debe eliminar la mirada mecanicista del universo, ya que el mundo real esta inmerso en las leyes de la mecánica cuántica.

La investigación de Bao y Redish resaltan la importancia de la interpretación probabilística de los sistemas físicos en particular en la mecánica cuántica. El estudio se realizo en 1996 y 1998 con estudiantes del curso de física cuántica para ingenieros de la Universidad de Maryland. Las dificultades que encontrarón se resumen en que la mayoría de estudiantes llegan a los cursos de mecánica cuántica con las ideas deterministas demasiado reforzadas y les es difícil cambiar esa manera de pensar cuando se enfrentan a la interpretación probabilística de la mecánica cuántica, la cual cual no tiene un escenario análogo en la mecánica cuántica, ademas de que muchos estudiantes muy raramente son introducidos en los conceptos de probabilidad en la mecánica clásica. Se concluye que las representaciones probabilísticas de los fenómenos físicos deben estar presentes en los diferentes cursos de física, ya que al llegar al curso de mecánica cuántica los estudiantes tienen muchas dificultades en torno a este concepto tan importante para la formalización de la mecánica cuántica.

- **Universidad Pedagógica Nacional**

A partir del escaneo de trabajos en torno a la enseñanza de la mecánica cuántica y las dificultades que se presentan se hace necesario desde esos contextos hacer un estudio empírico en el contexto de la Universidad Pedagógica Nacional, que permita fundamentar las dificultades bajo este contexto y hacer un esfuerzo para enfocar el estado del arte frente a las dificultades y el desafío que implica como futuros docentes llevar estos saberes a otros escenarios.

La mecánica cuántica aún hoy en día es desconocida para muchos y la labor del docente es llevar al aula uno de los saberes de mayor trascendencia para la humanidad a lo largo de más de 100 años de desarrollos científicos. Bajo el campo de la enseñanza - aprendizaje de la mecánica cuántica surgen diferentes inconvenientes en torno a una didáctica correcta en la interacción docente - estudiante y estudiante - estudiante.

En primer lugar el curso de mecánica cuántica esta ubicado en el tercer año de licenciatura en física o física pura en un programa universitario Colombiano. Es así, que cuando el estudiante se enfrenta a estos nuevos saberes debe contar con ciertos conocimientos previos que le brindan la solidez suficiente para comprender esta nueva teoría desde un bagaje matemático especial.

La primera dificultad nace en la transición entendida como una fundamentación donde se diferencian ciertos conceptos particulares de cada una de las teorías alrededor de la mecánica clásica y la mecánica cuántica que no se presenta formalmente, ya que no se da una discusión conceptual y además se reconoce que no se establece un puente entre estas dos teorías de forma correcta.

La construcción en la mecánica clásica parte de la interacción con un espacio *"real"* en el cual las variables físicas que se analizan como velocidad, momento lineal, momento angular, energía, entre otras son en principio medidas de manera determinista y permiten al ser humano predecir los resultados. Caso contrario al de la mecánica cuántica, la cual es una teoría no determinista puntual y no permite establecer un principio de localidad, llevando su conceptualización a una abstracción.

En la base de ese transición esta la diferencia plausible entre el estudio de un sistema clásico y un sistema cuántico no visible al estudiante, donde se parte de construcciones abstractas que debe hacer el estudiante, a partir de una estructura matemática distinta, ademas de las características de orden filosófico y de su interpretación que implican un paradigma en la física.(Özcan, 2010)

Otra de las grandes dificultades, se presentan al momento de llevar la teoría al aula, ya que se parte del conocimiento de que la mecánica cuántica se fundamenta en dos vertientes distintas que llevan a los mismos resultados y que son equivalentes como se mostrará más adelante. Estas dos teorías son la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria. Si bien ambas corrientes se fundamentan en estructuras matemáticas distintas, estas se presentan de algún modo histórico y en función de su construcción son llevadas al aula. Pero hay que hacer hincapié en la importancia de su fundamentación en la mecánica cuántica y en relación al edificio no solo matemático, sino a la relación entre el lenguaje y el sentido y significado en torno al estudio de sistemas físicos. Además, que debido a que las estructuras de estas dos teorías son distintas, se presentan grandes dificultades al momento de conceptualizar la representación de sus elementos como son las matrices y las funciones de onda.(Singh & Marshman, 2015)

Otro problema existente esta en la variedad de diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica y su necesidad al momento de formalizar y la pertinencia de presentarlas en el aula. En principio al estudiante se le presenta la interpretación de Copenhague, pero hay que tener en cuenta que debido a su difícil y contraintuitiva teoría han nacido otras vertientes para lograr dar explicación al comportamiento de los sistemas atómicos. Es decir que no se pueden presentar todas las interpretaciones posibles, además algunos científicos creen que la mecánica cuántica no debe de necesitar una interpretación única, sino que la misma mecánica cuántica es una interpretación bajo una consistencia interna que la brinda su estructura matemática(instrumentalismo). (Dennis & Norsen,2004)

El docente juega un papel primordial en el proceso enseñanza - aprendizaje de la mecánica cuántica, y por ende debe contar con un amplio dominio conceptual para presentar esta teoría de didáctica difícil en principio. Es así que el docente debe ser muy claro en los conceptos para no llevar a los estudiantes a contradicciones y una mala interpretación de estos. Ademas otra de las dificultades en este proceso gira en torno a que muchos estudiantes son instruidos en el uso de una teoría y no en su sentido y significado, y se pierde el trasfondo de los desarrollos matemáticos, dejando de lado la física y la interpretación de los resultados alrededor de los fenómenos a nivel atómico. Luego es muy importante darle importancia al significado y sentido de la operabilidad matemática, direccionando la relación entre la física y la matemática.

Así, la justificación de la enseñanza de la mecánica cuántica no gira en torno a los desarrollos científicos, sino mas bien, en la importancia de comprender el comportamiento de los fenómenos a nivel atómico. Es bien claro que la física ha sido el conocimiento que el hombre ha construido a partir de la observación y estudio de los fenómenos naturales, entre ellos tenemos los que suceden a nivel macroscópico, los cuales son visibles al ser humano y los microscópicos, los cuales se estudian a partir de instrumentos que permiten dar cuenta de ellos en el estudio de interacciones a nivel atómico.

En la mayoría de colegios, la física se enseña de manera fragmentada y mas aún se le evita mostrar la mecánica cuántica a los estudiantes, primero porque piensan que los estudiantes no cuentan con un bagaje suficiente para abordar estos saberes y en segundo lugar porque los estándares de educación en ciencias naturales en Colombia no mencionan entre sus competencias el componente de aproximación a la mecánica cuántica. Hoy en día, la física juega un papel fundamental en el ámbito cultural y demás, donde los conocimientos deben ser posibles de usar en diferentes situaciones y no en unas particulares.

Intentar dar solución a las diferentes dificultades que encuentran los estudiantes alrededor de la enseñanza de la mecánica cuántica es un desafío y por ende se debe promover propuestas que solucionen tales problemáticas. Una de esas dificultades nace en el exceso de un formalismo matemático sin sentido y significado y en consecuencia se propone a partir de una metodología histórico - crítico hacer una revisión al original de uno de los textos donde se muestra la formalización que se estudia actualmente en los centros universitarios. La propuesta bajo la cual nace este estudio gira en torno a la formalizacion matemática realizada por Von Neumann, la cual respondió a una de las dificultades que se tenia en su momento y era el de axiomatizar la física, en particular la mecánica cuántica.

Si bien la enseñanza de la mecánica cuántica esta llena de dificultades, una de las razones es que los estudiantes no tienen buenas bases de su mecánica Newtoniana y es porque muchos conceptos de la mecánica clásica que son usados en mecánica cuántico no se han entendido aun cuando llegan a estos cursos y otros como la noción de estado no se aborda desde el escenario de la mecánica Newtoniana.

1.2. La historia y los procesos de recontextualización para la enseñanza de la mecánica cuántica

Al introducir los análisis histórico–críticos para la enseñanza de la mecánica cuántica, se da la posibilidad de realizar una estructuración y organización de los fenómenos a nivel atómico para su explicación, ya que al hacer una recontextualizacion de los saberes se busca darle sentido al contexto en la cual surgieron las diferentes formulaciones en torno a la mecánica cuántica a raíz de los problemas que no lograba explicar la física clásica en ese momento histórico. La búsqueda de una reconceptualización y de las redefiniciones que nacen a partir de concebir la física no como una teoria inmutable que no puede ser revisada, llevan al maestro a estar en una continua indagación acerca de los procesos de conocimiento de la física en el aula, acordes con el continuo desarrollo científico. (Ayala, 1999)

Luego,la intencionalidad de estudiar el original de un autor, es establecer un dialogo, encaminado a fortalecer el conocimiento y la forma de enseñarlo en el aula, ya que muchos textos no muestran la discusión que giró en torno al desarrollo de los conceptos y su estructuración. Así que al analizar el texto de Von Neumann, se puede indagar sobre el formalismo matemático de la mecánica cuántica no relativista como un ejemplo de la relación entre las nociones físicas y el desarrollo matemático.

La mecánica cuántica puede ser estudiada desde diferentes perspectivas y una de ellas es haciendo uso de la historia. Por lo tanto, siempre es de gran interés para la academia, hacer una revisión de los cimientos de toda teoría, ya que permite entablar una comunicación y dar nuevas miradas a sus construcciones. El escenario del análisis histórico-crítico da lugar a proponer nuevas didácticas para la enseñanza de la física, ya que como futuros maestros se debe mostrar de manera inteligible el conocimiento en concordancia con la experiencia, desmitificando la fragmentación de la ciencia. El estudio histórico-crítico es una herramienta pedagógica que sirve de gran ayuda al momento de enseñar una teoría tan abstracta y no intuitiva para el estudiante, como es la mecánica cuántica. Con estos estudios se logra construir nuevas rutas de aprendizaje a partir de problemáticas que surgen al momento de enseñar la mecánica cuántica, además de caracterizar nuevas formas de aproximación y niveles de explicación (Ayala, 2006). Por lo tanto, estos estudios permiten desarrollar un dialogo, que da lugar a nuevas miradas en torno a las diferentes formulaciones de la teoría cuántica, en especial la que presentó por Von Neumann y que giró en torno a tres construcciones teóricas; la mecánica ondulatoria, la mecánica matricial y la teoría de transformaciones.

El génesis de la mecánica cuántica moderna inicia con los trabajos de Born-Heisenberg-Jordan (1925) desarrollando un esquema matricial y Schrödinger (1926) con un esquema ondulatorio. Dos esquemas completamente distintos desde su construcción pero que permitían llegar a los mismos resultados. Schrödinger fue el primero que intento mostrar la equivalencia entre estos dos esquemas publicando en artículo "*On the relation between the quantum mechanics of Heisenberg, Born, and Jordan and the Schrödinger*.[en] 1926, donde se muestra una equivalencia, pero no en el sentido estricto de la matemática. Sin embargo, su propuesta no respondía a la equivalencia formal que se esperaba, así que solo seis años después de forma contundente desde el punto de vista matemático, Von Neumann muestra la equivalencia aludiendo a un isomorfismo isométrico[1] de las dos teorías. (Madrid, 2009)

Por la misma época (1926) Paul Dirac, un físico británico inspirado en los desarrollos de Heisenberg, Born y Jordan llevo a cabo una correspondencia entre las matrices autoadjuntas junto con el principio de correspondencia y la teoría de Hamilton - Jacobi, estableciendo una relación entre las variables clásicas de acción y las variables cuánticas u operadores haciendo uso de los corchetes de Poisson. Tal correspondencia se denominó el método de transformaciones canónicas como una generalización de la mecánica matricial de Heisenberg - Born - Jordan y la mecánica ondulatoria de Schrödinger que permitió el tratamiento de las variables físicas como operadores hermíticos los cuales en esencia representaban matrices hermíticas infinitas anticonmutativas bajo la multiplicación. Otro de los aportes que no se le reconoció en principio como un gran aporte a la formalización de la mecánica cuántica es la función delta - Dirac, que ya había sido usada en otros contextos y adquirió gran valor con Dirac, pero para Von Neumann no gozaba en su momento del rigor matemático suficiente para ser reconocida como herramienta matemática, ya que esta función impropia no gozaba del rigor matemático para ser usada,donde su uso era mas bien pragmático. En 1950 Shwartz le dió el rigor matemático a la función delta de Dirac, permitiendo ser reconocida como herramienta matemática, ademas de dar surgimiento a la teoría de distribuciones. Finalmente a Dirac también se le reconoce el aporte de la notación de los bra y ket o notación de Dirac, que en la época en que publicó la primera edición de su celebre libro *Principios de la mecánica cuántica, 1930*, todavía no había hecho su aparición formalmente, sino que tuvo que esperar hasta la tercera edición publicada en 1939, para formalmente contar con esta elegante notación, que principalmente nace de la teoría de transformaciones y de los productos de Poisson, al asociarlos a productos internos en un espacio de Hilbert.

A lo largo de la historia la relación entre la física y la matemática ha estado muy ligada y ese vinculo siempre ha estado presente al momento de formalizar una teoría, es en esta dirección que Von Neumann de manera brillante mostró como dotar una teoría física de un edificio matemático que permitiera axiomatizar la mecánica cuántica.

[1] Entiendase como la aplicación lineal biyectiva que se establece entre dos espacios normados bajo una misma métrica

1.3. Necesidad de axiomatizar en la física

El rol que juega la matemática en la física ha estado presente desde los tiempos de Galileo Galilei y su fuerte relación ha permitido grandes desarrollos no solo en la física sino también en la matemática. La necesidad del uso de un lenguaje en la física es muy importante debido a que permite formalizar las teorías. En primer lugar se piensa que el empleo de las matemáticas en la física es de carácter instrumental, pero va mas allá, no solo sirve como herramienta de cálculo sino que establece una relación de interpretación y significado donde se relacionan los conceptos físicos y matemáticos, como por ejemplo velocidad - derivada, campo eléctrico - campo vectorial, grupo de Lorentz - estructura de grupo, entre otras, lo cual muestra la relación de constitución de la matemática en la física. Tal relación no es estática, sino que permite a los científicos navegar entre la física y la matemática de manera continua y dinámica.(Lèvy-Leblond,1984)

Ahora pensar en mecánica cuántica no solo es ver una teoría puramente matemática, sino, que es una formalización o axiomatización de una teoría física, entendida como un proceso que los científicos llevan a cabo con el fin de construir conocimiento de forma organizada partiendo de la interacción con el mundo físico como punto de inicio a una manera de conocer del sujeto, de tal manera que a partir de unos principios se estudian los fenómenos a nivel atómico de manera global, como se menciona en el capítulo II y III. En palabras de la Profesora María Mercedes Ayala

"En este tipo de formalización se construyen principios generales que pueden conectar e implicar diversos principios, que organizan a su vez una variedad de campos fenoménicos, así como definir rangos de validez de los mismos; elaborando con ellos simultáneamente nuevos sistemas teóricos consistentes y campos fenoménicos unificados". (Ayala, 2008).

En concordancia, las explicaciones que da el sujeto desde su experiencia, son el punto de inicio para formalizar el fenómeno y es allí donde este construye unas nociones intuitivas que le permiten edificar una teoría bajo unos principios generales u axiomas, que dan lugar al conocimiento de una variedad de fenómenos clásicos o cuánticos y a la vez muestran la relación entre la física y la matemática, de manera constitutiva.

El método axiomático utilizado por Von Neumann en la mecánica cuántica es reconocido por muchos científicos, como por ejemplo el físico matemático Arthur Wightman:

“Yo no sé si Hilbert consideró el libro de Von Neumann como el cumplimiento del método axiomático aplicado a la mecánica cuántica, pero visto desde lejos es la manera correcta a mi parecer. De hecho, en mi opinión, esta es la mas importante axiomatización de una teoría en nuestros tiempo"(Rédei and Stöltzner, 2006)

La axiomatización realizada por Von Neumann muestra el rigor matemático y una diferencia entre las maneras de plasmar la relación entre la física y la matemática enfocada en los pensamientos de un matemático que se atrevió a presentar una axiomatización de la física en particular de la mecánica cuántica. (Rédei and Stöltzner, 2006)

El trabajo axiomático de Von Neumann influenciado por David Hilbert se centra en tres elementos:

- Postulados
- Maquinaría analítica (Estructura matemática)
- Interpretación física

Esta manera de axiomatizar se caracteriza por considerar unos axiomas físicos o postulados que llevan a formalizar, a partir de la observación y experimentación alrededor del mundo físico y además dota la construcción de explicaciones con un edificio matemático, permite interpretar la relación entre los elementos matemáticos y los conceptos de la física, que llevan bajo leyes lógicas a la construcción de las teorías físicas, tal proceso conduce a que los fenómenos sean caracterizados por la formulación de magnitudes y las diferentes relaciones surgidas de la matematización, donde los fenómenos pueden ser explicados de manera clara, concisa y unificada desde unos principios básicos. Y es en efecto, tanto la maquinaria analítica, como la conceptualización, las principales y necesarias herramientas que permiten que el aprendizaje como de la mecánica cuántica sea inteligible para el estudiante.

El proceso de formalizar bajo la linea de una axiomatización es una manera de mostrar de forma sintetizada las teorías. Si bien la axiomatización propuesta requiere de estos tres elementos esenciales, no implican un único orden, por lo tanto en este trabajo se plantea primero construir la maquinaria analítica, luego la interpretación física y finalmente los axiomas físicos que surgen de la interacción con el fenómeno ya sea directa o indirectamente, los cuales son el resultado de unificar de manera estricta el lenguaje matemático con la interpretación física y decantarlo en una teoría formal.

Si bien la transición conceptual de la mecánica clásica a la mecánica cuántica es una de las grandes dificultades como se mencionó anteriormente, una de las maneras siguiendo el camino allanado por Von Neumann de axiomatización, permite proponer como herramienta didáctica una axiomatización de la mecánica Newtoniana, bajo la misma notación de Dirac.

La importancia de axiomatizar la mecánica clásica, se justifica en solucionar el problema de transición conceptual, además que usando la misma notación, los estudiantes no van a encontrar gran dificultad cuando se enfrenten a esta misma notación bajo un espacio vectorial con cuerpo numérico distinto en la mecánica cuántica.

CAPÍTULO 2

Axiomatización de la mecánica newtoniana

La mecánica newtoniana generalmente no es abordada desde bajo una mirada axiomática de los espacios vectoriales y por ende se hace necesario presentar una nueva mirada de estudiar este campo de la física, resignificando los saberes y enfocándolos en el reconocimiento de una estructura matemática y su importancia en la interpretación física y presentación de los postulados que encierran toda la mecánica clásica.

En 1900 en el segundo congreso internacional de matemáticas realizado en París Francia, David Hilbert propuso una serie de problemas en torno a las matemáticas, más precisamente 23, entre ellos aparecía el de axiomatizar la física, influenciado por *"Los Principios de la Mecánica"* de Hertz y la comunicación que mantenía con su amigo Hermann Minkowksi.

Muchos pensadores quisieron resolver esta tarea, que se había iniciado de alguna manera con los estudios del movimiento de Galileo Galilei. La primera axiomatización de la mecánica clásica la realizó el físico alemán Georg Hamel quien en 1906 escribió su tratado sobre mecánica teórica.

El objeto de estudio de la mecánica Newtoniana son los sistemas mecánicos que bajo la acción de fuerzas externas y a partir de unas condiciones iniciales, se puede dar cuenta completamente de como cambia o evoluciona el sistema con el tiempo. Teniendo en cuenta el estudio de los sistemas mecánicos se puede establecer una relación entre una partícula y una estructura matemática, la cual permite axiomatizar la mecánica Newtoniana y a la vez reconocer a las matemáticas como parte constitutiva de la física.

2.1. Estructuras algebraicas

El esquema de espacio y tiempo en la imagen Newtoniana establece que toda partícula o conjunto de partículas pueden ser ubicados en un espacio y a todo fenómeno de la naturaleza se le asocia una representación en un espacio en principio bidimensional o tridimensional. Así, las estructuras matemáticas que se construirán serán las suficientes y necesarias para axiomatizar la mecánica Newtoniana.

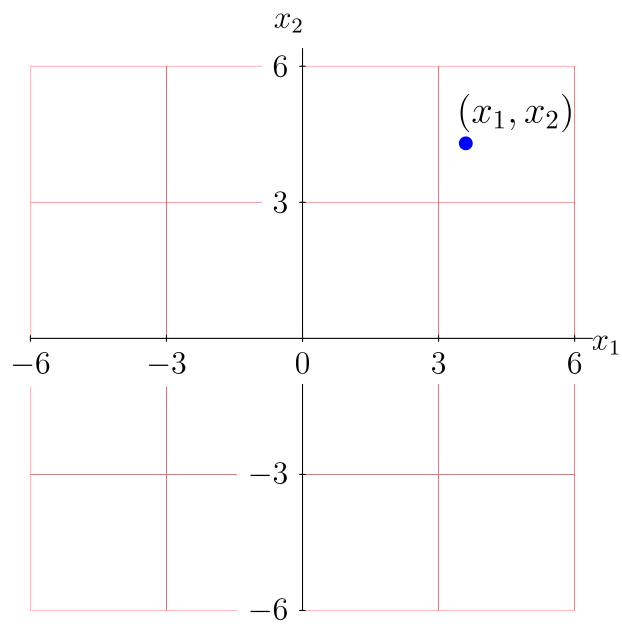

Figura 2.1: *Sistema coordenado en dos dimensiones.*

2.1.1. Espacio afín

La idea de espacio adquiere una relevancia importante en la construcción de la axiomatización de la mecánica Newtoniana, ya que todo punto en un espacio queda determinado por unos valores reales, llamados *coordenadas* del punto y el número de coordenadas para especificar el punto en tal espacio, lleva a asociar la dimensión del espacio.

Definición 2.1.1 *Sea* $x_1, x_2, ..., x_n$ *un conjunto de números reales. Para cada entero positivo* n*, al conjunto ordenado y denotado* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *se le denomina una n - upla y representa uno y solamente un punto asociado al espacio al que pertenece tal punto. A cada* x_i *con* $i = 0, 1, 2, ..., n$ *entero positivo se le denomina coordenada del punto. Si tenemos un espacio en dos dimensiones, a toda partícula se le puede asociar un punto* (x_1, x_2) *en un espacio afín como se visualiza en la figura 2.1.*

En general, todo evento de la naturaleza lleva a establecer una relación entre el fenómeno estudiado y un lenguaje asociado, es decir, la estructura matemática como parte constitutiva de la física, que en primer lugar se fundamenta en una relación biunívoca entre un punto en el espacio y una n - upla que se apoya en la geometría del evento analizado, esto quiere decir que si por ejemplo se esta estudiando un movimiento uniformemente rectilíneo, el número de coordenadas que se necesitan para especificar la posición de la partícula en el espacio será solamente un número real.

Así, se establece la relación entre un sistema coordenado y los eventos de la naturaleza, lo cual se formaliza estableciendo la definición de un *espacio afín* y la noción de punto como elemento del espacio afín, dando lugar a las *coordenadas* del punto.

Definición 2.1.2 *Un espacio afín n - dimensional* $\mathbb{A}^n$ *es la formalización del espacio físico que permite establecer una relación biunívoca entre un punto y una n - upla. A todo elemento del espacio afín -se le denomina punto.*

Para distinguir la ubicación de dos puntos en el espacio afín, se hace necesario definir la distancia entre ellos, es decir se debe introducir una métrica.

Definición 2.1.3 *Sea* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *dos puntos con coordenadas cartesianas del espacio afín asociados a dos partículas de la naturaleza. Se define la distancia entre estos dos puntos como*

$$d^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2 \tag{2.1}$$

cuyo valor es positivo. A dicha métrica se le denomina euclidiana.

Todo espacio afín n - dimensional y con métrica euclidiana se le llama simplemente espacio n - dimensional euclidiano. Ahora a una partícula o cuerpo de la naturaleza se le puede asociar un punto, el cual hace parte de un espacio n - dimensional euclidiano.

2.1.2. Espacio vectorial

En física, se trabaja con dos tipos de cantidades numéricas que formalizan la noción de medir una propiedad intrínseca de la materia; unas que solo necesitan de un número o magnitud para ser especificadas, como por ejemplo el tiempo, la masa, la energía, la temperatura y otras que requieren además de un número, una dirección, como la posición, la velocidad, la fuerza, entre otras. A las primeras se les llama cantidades *escalares* y a las segundas *vectoriales*. Así, tanto las cantidades escalares como las vectoriales necesitan de un valor numérico, es decir de una magnitud, cuyo valor es un número real no necesariamente positivo.

Definición 2.1.4 *Sea el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *el cuerpo numérico asociado al espacio vectorial de la mecánica newtoniana. Bajo el formalismo matemático, se considera un cuerpo, ya que, cumple con los axiomas de cuerpo.*

Siempre la física y la matemática han mantenido un vinculo muy cercano alrededor de la construcción de las diferentes teorías y en primer lugar una herramienta matemática que a partir de William R. Hamilton, ha jugado un papel muy importante en la física es la noción de vector o cantidad vectorial.

Definición 2.1.5 *Un vector o ket se puede definir desde dos escenarios distintos indiferentemente:*

$i)$ ***Geométricamente****: Segmento de línea orientado, como se muestra en la figura 2.2 el ket* $|r\rangle$ *en un espacio en tres dimensiones.*

$ii)$ ***Analíticamente****: Arreglo ordenado de números reales (n-uplas).*

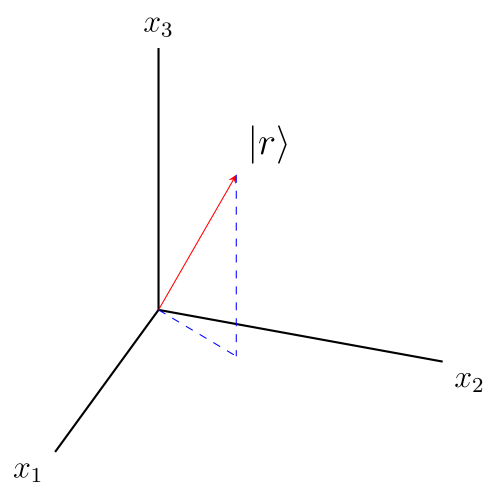

Figura 2.2: *Ket en un espacio vectorial en tres dimensiones.*

En física estas dos definiciones de ket son muy útiles, ya que la mayoría de las variables dinámicas como la posición, momentum lineal, entre otros, se expresan de esta manera y como su definición lo especifica, solo hace referencia a entes matemáticos, mas que a representar de la forma de estar el sistema clásico, que se formaliza en la noción de "*estado clásico*". A partir de estas definiciones de ket se puede ver de fondo como el lenguaje de las matemáticas es una herramienta importante a la hora de formalizar. En los siguientes párrafos,se definirá la estructura algebraica bajo la cual la mecánica newtoniana recae, sin olvidarnos del rol de las matemáticas en la física como parte constitutiva.

Definición 2.1.6 *Un* ***espacio vectorial o de kets V*** *es un conjunto no vacio de elementos* $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \ldots$ *llamados* ***vectores*** *o* ***kets****, bajo dos operaciones llamadas* ***suma de kets*** *y* ***multiplicación por un***

***escalar real**, que cumplen los siguientes axiomas.*

$(S1)$ **Cerradura bajo la suma de kets**: Si $|\alpha_1\rangle \in V$ y $|\alpha_2\rangle \in V$ entonces

$$|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle \in V$$

$(S2)$ **Ley conmutativa para la suma de kets**: Si $|\alpha_1\rangle \in V$ y $|\alpha_2\rangle \in V$ entonces

$$|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle = |\alpha_2\rangle + |\alpha_1\rangle$$

$(S3)$ **Ley asociativa para la suma de kets**: Para todo $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ y $|\alpha_3\rangle$ en V se tiene que

$$(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle) + |\alpha_3\rangle = |\alpha_1\rangle + (|\alpha_1\rangle + |\alpha_3\rangle)$$

$(S4)$ **Existencia del elemento neutro para la suma de kets**: Existe un ket $|0\rangle \in V$ tal que para todo $|\alpha_i\rangle \in V$ se tiene que

$$|\alpha_i\rangle + |0\rangle = |0\rangle + |\alpha_i\rangle = |\alpha_i\rangle$$

$(S5)$ **Existencia del elemento inverso para la suma de kets**: Si $|\alpha_i\rangle \in V$ existe un ket $-|\alpha_i\rangle \in V$ tal que

$$|\alpha_i\rangle + (-|\alpha_i\rangle) = |0\rangle$$

A tal ket $|0\rangle$ se le denomina **ket nulo**.

$(M1)$ **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar**: Si $|\alpha_i\rangle \in V$ y λ es un escalar entonces

$$\lambda |\alpha_i\rangle \in V$$

$(M2)$ **Ley distributiva a derecha**: Si $|\alpha_1\rangle \in V$ y $|\alpha_2\rangle \in V$ y λ es un escalar entonces

$$\lambda(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle) = \lambda |\alpha_2\rangle + \lambda |\alpha_1\rangle$$

$(M3)$ **Ley distributiva a izquierda**: Si $|\alpha_i\rangle \in V$ y λ y η son escalares, entonces

$$(\lambda + \eta) |\alpha_i\rangle = \lambda |\alpha_i\rangle + \eta |\alpha_i\rangle$$

$(M4)$ **Ley asociativa bajo la multiplicación de escalares**: Si $|\alpha_i\rangle \in V$ y λ y η son escalares, se tiene que

$$\lambda(\eta |\alpha_i\rangle) = (\lambda\eta) |\alpha_i\rangle$$

$(M5)$ **Existencia del elemento neutro para la multiplicación por un escalar**: Para cada ket $| \, |\alpha_i\rangle \in V$ existe un escalar 1 tal que

$$1 |\alpha_i\rangle = |\alpha_i\rangle$$

(Ver apéndice A.)

En resumen a las partículas o cuerpo material de la naturaleza se les asocia puntos en un espacio que para la física clásica son espacios vectoriales reales, y dichos puntos los puedo representar a partir de n - uplas o kets, cuando $n > 1$. Teniendo en cuenta la formalización de los espacios vectoriales a partir de las dos operaciones definidas, se pueden construir expresiones que decantan en la siguiente definición.

Definición 2.1.7 *Dado un espacio vectorial V, se dice que un ket $|\alpha\rangle \in V$ es una **combinación lineal** de los kets $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, ... |\alpha_n\rangle \in V$ con coeficientes escalares $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, si*

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i\rangle = \lambda_1 |\alpha_1\rangle + \lambda_2 |\alpha_2\rangle + ... + \lambda_n |\alpha_n\rangle$$

Los kets no siempre se pueden escribir como una combinación lineal de otros kets y en física estos kets son de importancia fundamental porque permite formalizar otras nociones. La generalización de tales kets se expresa en la siguiente definición.

Definición 2.1.8 *Sea A un conjunto de kets de un espacio vectorial V. Se dice que un ket $|\alpha\rangle$ es **linealmente independiente**, si este ket $|\alpha\rangle$ no se puede expresar como una combinación lineal de los demás kets de A.*

Si todo ket de un espacio vectorial lo puedo expresar como combinación lineal de los demás kets del espacio, se dice que estos kets ***generan*** el espacio vectorial V y al conjunto de tales vectores se le denomina *conjunto generador*. Habiendo definido los vectores linealmente independientes y el conjunto generador, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.9 *Un conjunto de vectores B se dice que es una **base** de un espacio vectorial V si cumple las siguientes dos condiciones: $i)$ B genera V y $ii)$ B es un conjunto linealmente independiente. (Ver apéndice A.)*

El número de elementos o dimensión de un espacio vectorial es muy importante, ya que a partir de la interpretación física, lleva a caracterizar el comportamiento de sus elementos de acuerdo al fenómeno observado.

Definición 2.1.10 *Si el espacio vectorial V tiene un número finito de elementos, se dice que el espacio vectorial V es de **dimensión finita**, en caso contrario se dice que la dimensión del espacio vectorial V es de **dimensión infinita**.*

En física para describir la ubicación de una partícula se requiere de un sistema de coordenadas, el cual en concordancia con el espacio afín,permite definir las coordenadas del punto donde se encuentra la partícula en un instante de tiempo particular.

Definición 2.1.11 *Considerando un sistema de referencia el cual consta de dos elementos: un origen y la base del espacio vectorial V,se dice que las **coordenadas** del punto P que pertenece al espacio afín, son las coordenadas del ket $|OP\rangle$ con respecto a la base del espacio vectorial V u origen, es decir que*

$$|OP\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle + \lambda_2 |e_2\rangle + ... + \lambda_n |e_n\rangle$$

siendo n la dimensión del espacio afín A y $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ las coordenadas del punto P.

En el caso de la mecánica clásica por ejemplo se considera el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ con la base canónica $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$, donde el ket $|OP\rangle$ se expresa como una combinación lineal

$$|OP\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle + \lambda_2 |e_2\rangle + \lambda_3 |e_3\rangle$$

y cuyas coordenadas del punto P en el espacio afín son $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Ahora, los sistemas coordenados posibilitan elegir las coordenadas para determinar la ubicación del punto P, según sea el caso.

A las variables físicas en mecánica clásica que requieren además de una magnitud y una dirección se les asocia una cantidad vectorial. Dentro de esas variables físicas encontramos la posición $|r\rangle$, la velocidad $|v\rangle$, la aceleración $|a\rangle$, la fuerza $|F\rangle$, momento lineal $|p\rangle$, momento angular $|L\rangle$, entre otros, que se definirán mas adelante.

2.1.3. Espacio dual

Ahora si V es un espacio vectorial sobre los $\mathbb{R}$, se define una transformación o ***funcional lineal*** $\langle\alpha|$ sobre V como

$$\langle\alpha| : \; V \; \to \mathbb{R}$$
$$\langle\alpha| : |\alpha\rangle \mapsto \langle\alpha|\alpha\rangle \in \mathbb{R}$$

Dichas funcionales lineales reciben el nombre de ***bras***. Generalizando se define el conjunto de bras.

Definición 2.1.12 *Sea V un espacio vectorial lineal. El conjuntos de todas las funcionales lineales sobre V constituyen un espacio vectorial denominado* ***espacio dual*** *y denotado como* V^*

2.1.4. Espacio con producto interno

Definición 2.1.13 *Sea $|\alpha\rangle =, |\beta\rangle \in \mathbb{R}^n$ dos kets. Se define el* ***producto escalar*** *como*

$$\langle\alpha|\beta\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$$

El producto escalar de dos kets n - dimensionales es un número real y a menudo se denomina producto interno, es decir que esta operación de kets es una aplicación bilineal, tal que

$$\langle\alpha|\beta\rangle : |\alpha\rangle\,, |\beta\rangle \in \mathbb{R}^n \mapsto \quad \mathbb{R}$$

El producto escalar de vectores se puede representar como el producto de un vector renglón (bra) o y un vector columna (ket) o , es decir

$$\langle\alpha|\beta\rangle = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$$

A partir de la definición de producto escalar se define una de la noción de longitud o norma de un ket.

Definición 2.1.14 *La **Norma de un Ket** denotado por $|| \, |\alpha\rangle \, ||_E$ es una función bilineal, que toma elementos de un espacio vectorial E y le asigna un número real no negativo, cuyo valor se calcula mediante*

$$|| \, |\alpha\rangle \, || = +\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$$

Además el producto escalar da lugar a la noción de ortonormalidad, dado que dos vectores normalizados $|\alpha\rangle \, , |\beta\rangle \in V$, es decir, con norma 1 y que son ortogonales si $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$, se dice que están ortnormalizados. En general los kets de la base canónica son kets ortonormalizados y cumplen con la relación

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ \\ 0 & i = j \end{cases} \tag{2.2}$$

En física la definición de producto interno, permite caracterizar los kets, ya que todo ket en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal a partir de la base canónica, en la cual los elementos de esta base son ortonormales. Así se puede llegar a construir un nuevo espacio vectorial con esta operación entre kets.

Definición 2.1.15 ***Espacio con producto interno***
Sea V un espacio vectorial, dual, $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, en el cual esta definido un producto interno sobre los reales como función bilíneal con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} i) \quad & \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle \\ ii) \quad & \langle\lambda(x+y)|z\rangle = \lambda \langle x|z\rangle + \lambda \langle y|z\rangle \\ iii) \quad & \langle x|y\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

*A este espacio V sobre el cual esta definido un producto interno definido sobre los reales con estas propiedades se denomina **espacio con producto interno canónico**.*

2.2. El movimiento de los cuerpos

La mecánica clásica es el estudio de todos los fenómenos naturales a nivel macro en relación con el tamaño de los átomos y cuyas velocidades son muy pequeñas en comparación con las de la luz para cualquier objeto en movimiento. En la subsección 2.1.2 se definieron cantidades físicas que son escalares y se representan con un numero y aquellas que requieren además de un número, una dirección. En física, dentro de las magnitudes físicas que solo necesitan de un valor numérico, se encuentran: el tiempo, la temperatura, la densidad, la carga, la masa, la energía, entre otras y las que requieren de una dirección como la velocidad, la fuerza, el momento lineal, entre otras. Hay que aclarar que los kets con los que se trabaja en la mecánica clásica están construidos bajo el cuerpo de los **REALES**, además la magnitud de los kets, definidos bajo el producto interno da como resultado un número real.

2.2.1. Operadores

Teniendo claro la noción de ket, es importante conocer las acciones que se le pueden realizar a estos entes matemáticos. Los operadores se definen como funciones lineales que actúan sobre elementos de un espacio vectorial.

Definición 2.2.1 *Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales. Una transformación lineal* ***T***: $V_1 \to V_2$ *es una aplicación que actúa sobre elementos de un espacio vectorial V_1 y el resultado es un ket del espacio V_2 y cumple con las siguientes propiedades. Sea $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

$$T(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = T|\alpha\rangle + T|\beta\rangle$$
$$T(\lambda|\alpha\rangle = \lambda T|\alpha\rangle$$

Teniendo en cuenta la definición de un operador como una transformación lineal, en la mecánica clásica encontramos operadores como el operador diferencial, el operador integral y algunos operadores vectoriales que se definen a continuación.

Definición 2.2.2 *Sea $|x\rangle \in V$ un elemento de un espacio vectorial. La derivada de un ket esta definida por*

$$|\dot{r}\rangle = \lim_{t \to t_0} \frac{|r(t+t_0)\rangle - |r(t)\rangle}{t_0} = \frac{d|r\rangle}{dt}$$

siempre y cuando el límite exista. Si el ket $|r\rangle = x_1|e_1\rangle + x_2|e_2\rangle + x_3|e_3\rangle$ es un elemento de un *espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, bajo la base canónica, la derivada del ket se define como*

$$|\dot{r}\rangle = \dot{x_1}\,|e_1\rangle + \dot{x_2}\,|e_2\rangle + \dot{x_3}\,|e_3\rangle = \frac{dx_1}{dt}\,|e_1\rangle + \frac{dx_2}{dt}\,|e_2\rangle + \frac{dx_3}{dt}\,|e_3\rangle$$

Otro operador lineal que esta en relación con el operador diferencial es la integral, que se define como:

Definición 2.2.3 *El operador integración que actúa sobre un ket es un proceso de suma, así*

$$|r\rangle = \lim_{\Delta t \to t} \sum_i |\dot{r}(t_i)\rangle\,\Delta t = \int |\dot{r}(t)\rangle\,dt$$

es decir, el operador integración realiza el proceso inverso al operador derivación y por ende, si un operador derivación actúa sobre un operador integral, los dos se anulan.

En mecánica clásica, se encuentran tres operadores vectoriales muy importantes que tienen interpretación física. Para hablar de ellos, primero definiremos el operador nabla en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ como

$$\nabla = |e_1\rangle\,\frac{\partial}{\partial x_1} + |e_2\rangle\,\frac{\partial}{\partial x_2} + |e_3\rangle\,\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2.3}$$

Definición 2.2.4 *El gradiente es un operador vectorial que actúa sobre una función escalar f y cuyo resultado es un ket. Considerando el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la base canónica, el gradiente de f es el ket*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,|e_1\rangle + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,|e_2\rangle + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,|e_3\rangle \tag{2.4}$$

En otras palabras el gradiente de f indica en que dirección crece más rápido f. Es común decir que ∇f es un campo vectorial, ya que a cada punto del dominio de f se le asigna un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, y se conoce como campo vectorial gradiente. Si el dominio de la función escalar f es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces el gradiente de la función se reduce simplemente a derivar la función como se definió en 2.2.1.

Los dos siguientes operadores actúan sobre funciones vectoriales y para su definición se requiere la definición que decanta en una importante noción para la física y es la de campo.

Definición 2.2.5 *El campo vectorial $|F\rangle$ sobre $\mathbb{R}^n$ es una aplicación que toma n - uplas y les asigna un ket en $\mathbb{R}^n$.*

En mecánica clásica se tiene dos campos que dan cuenta de dos de las interacciones fundamentales y son el campo gravitacional y el electromagnético.

Definición 2.2.6 *Sea $|F\rangle = F_1\,|e_1\rangle + F_2\,|e_2\rangle + F_3\,|e_3\rangle$ un campo vectorial en el espacio $\mathbb{R}^3$, la divergencia se define como un producto escalar*

$$div\,|F\rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \tag{2.5}$$

cuyo resultado es un campo escalar y representa la razón de expansión por unidad de volumen.

Dentro de las operaciones que se pueden realizar entre kets, se encuentra el producto de kets, el cual da como resultado un ket respectivamente, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 2.2.7 *Sea $|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $|y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y $\langle x| = (x_1, x_2, x_3)$, $\langle y| = (y_1, y_2, y_3)$ elementos del espacio dual de $\mathbb{R}^3$, se define*

$$|x\rangle \times |y\rangle = (x_2y_3 - x_3y_2)\,|e_1\rangle + (x_3y_1 - x_1y_3)\,|e_2\rangle + (x_1y_2 - x_2y_1)\,|e_3\rangle$$

como el ***producto de kets****.*

El producto de kets es muy importante, ya que permite definir el rotacional, cuyo resultado es un campo de kets.

Definición 2.2.8 *Sea $|F\rangle = F_1\,|e_1\rangle + F_2\,|e_2\rangle + F_3\,|e_3\rangle$ un campo de kets en el espacio $\mathbb{R}^3$, el rotacional se define como el producto de kets.*

$$Rot\,|F\rangle = |\nabla\rangle \times |F\rangle = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)|e_1\rangle + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)|e_2\rangle + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)|e_3\rangle \tag{2.6}$$

y cuyo resultado es un campo de kets, si se considera el campo de velocidades de un solido en rotación, el rotacional es otro campo vectorial, cuya magnitud es la misma en todo punto y dirección esta dada por el eje de rotación.

Finalmente, el operador **Laplaciano** que actúa sobre funciones f se define como una composición de operadores, así

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3} \tag{2.7}$$

2.2.2. Kets de posición y velocidad

Para determinar el movimiento de una partícula se deben conocer su ket de posición y de velocidad. El ket de posición se define como la ubicación de una partícula con respecto a un sistema de referencia que define las coordenadas de tal partícula.

Definición 2.2.9 *Considerando un espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se define el **ket de posición** como*

$$|r >= x_1 |e_1\rangle + x_2 |e_2\rangle + x_3 |e_3\rangle$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $i = 1, 2, 3$ y $|e_i\rangle$ la base canónica.

De acuerdo al espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^3$ si una partícula se mueve de un punto (x_1, x_2, x_3) a otro punto (x_1', x_2', x_3') se define el ket ***desplazamiento*** como $(x_1' - x_1, x_2' - x_2, x_3' - x_3)$. Considerando que esa partícula se mueve en un intervalo de tiempo, se llega a la relación de la velocidad y la aceleración.

Definición 2.2.10 *Sea $|\Delta r\rangle = |r(t + \Delta r)\rangle - |(t)\rangle$ el desplazamiento de una partícula en un intervalo de tiempo Δt. La **velocidad** de una partícula a lo largo de una trayectoria se define como*

$$|v\rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta |r\rangle}{\Delta t} = \frac{d |r\rangle}{dt} = \frac{dx_1}{dt} |e_1\rangle + \frac{dx_2}{dt} |e_2\rangle + \frac{dx_3}{dt} |e_3\rangle = v_{x_1} |e_1\rangle + v_{x_2} |e_1\rangle + v_{x_3} |e_1\rangle$$

cuya magnitud

$$|| \langle v|v\rangle || = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2}$$

*es definida como la **rapidez**.*

De forma similar la aceleración

Definición 2.2.11 *La aceleración*

$$|a\rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta |v\rangle}{\Delta t} = \frac{d |v\rangle}{dt} = \frac{dv_{x_1}}{dt} |e_1\rangle + \frac{dv_{x_2}}{dt} |e_2\rangle + \frac{dv_{x_3}}{dt} |e_3\rangle = a_{x_1} |e_1\rangle + a_{x_2} |e_1\rangle + a_{x_3} |e_1\rangle$$

cuya magnitud

$$|| < a|a > || = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{x_2}^2 + a_{x_3}^2}$$

Se ha definido la velocidad, la aceleración de una partícula moviéndose en tres dimensiones y se ha considerado que los vectores de la base canónica no varían en el tiempo. En la definición 2.2.5, la aceleración se definió como $|a\rangle = \frac{d|r\rangle}{dt}$, ahora se aplica el operador integral a ambos lados de la igualdad, se llega a

$$\int_{v_i}^{v_f} d\,|v\rangle = \int_{t_i}^{t_f} |a\rangle\, dt \tag{2.8}$$

$$|v(t_f)\rangle - |v(t_i)\rangle = \int_{t_i}^{t_f} |a\rangle\, dt \tag{2.9}$$

$$|v_f\rangle = |v_i\rangle + \int_{t_i}^{t_f} |a\rangle\, dt \tag{2.10}$$

Haciendo un proceso similar con la definición de velocidad se llega a

$$\int_{r_i}^{r_f} d\,|r\rangle = \int_{t_i}^{t_f} |v\rangle\, dt \tag{2.11}$$

$$|r(t_f)\rangle - |r(t_i)\rangle = \int_{t_i}^{t_f} |v\rangle\, dt \tag{2.12}$$

$$|r_f\rangle = |r_i\rangle + \int_{t_i}^{t_f} |v\rangle\, dt \tag{2.13}$$

Si la aceleración para una partícula en el espacio es constante y el movimiento inicia en tiempo igual a cero, se tiene a partir de (2.4)

$$|v(t)\rangle = |v_i\rangle + |a\rangle\, t \tag{2.14}$$

y reemplazando (2.8) en (2.7)

$$|r(t)\rangle = |r_i\rangle + \int_0^t (|v_i\rangle + |a\rangle\, t)dt \tag{2.15}$$

$$|r(t)\rangle = |r_i\rangle + |v_i\rangle\, t + \frac{1}{2}t^2\, |a\rangle \tag{2.16}$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.10) permiten encontrar los kets de velocidad y posición para cualquier tiempo cuando la aceleración es constante.

2.3. Dinámica

Newton en 1687 en su libro *”Principios matemáticos de la filosofía natural"*, formalizó la geometría del movimiento de los cuerpos en sus tres leyes y lo que conocemos hoy en día es fruto del trabajo que le fueron dando hombres contemporáneos a Newton como Euler y Mach. Todo el estudio de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas y las masas de los cuerpos recibe el nombre de dinámica. Las leyes del movimiento de los cuerpos son precisamente las tres leyes de Newton. En principio las fuerzas se pueden clasificar en *fuerzas de contacto* como la normal y las *fuerzas de acción a distancia* como la fuerza gravitacional.

2.3.1. Leyes de Newton

El movimiento de los cuerpos macroscopicos se pueden analizar a partir de tres leyes. Estas leyes son:

1) Todo cuerpo que no interactúe con otro, tiende a moverse uniformemente, es decir que tales cuerpos (aislados) se mueven con aceleración cero en un sistema inercial.

Se ha dicho que las fuerzas cambian el movimiento de los cuerpos, pero para analizar tal movimiento se necesita introducir una nueva variable física que da cuenta de la cantidad de movimiento.

Definición 2.3.1 *El momentum o momento líneal $|p\rangle$ de una partícula depende tanto de la masa del objeto como de la velocidad con que se mueve y se define como*

$$|p\rangle = m\,|v\rangle = |mv\rangle = |m\dot{r}\rangle \tag{2.17}$$

Tal definición permite formalizar la segunda ley de Newton.

2) Toda cambio en el movimiento de un cuerpo con masa m, causa una aceleración del mismo. Matemáticamente esto se escribe como

$$|F\rangle = \frac{d\,|p\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,|v\rangle) = m\left(\frac{d\,|v\rangle}{dt}\right) = m\,|a\rangle = |m\ddot{r}\rangle = |\dot{p}\rangle \tag{2.18}$$

3) Toda interacción entre dos objetos, implica una paridad de fuerzas, es decir, la fuerza ejercida (acción) por un cuerpo sobre otro implica que el segundo reaccione a esta fuerza mediante una reacción. La relación de estas fuerzas se da en igual magnitud y dirección contraria y no están sujetas ni al reposo, ni al movimiento causado por la acción de una de ellas sobre el otro cuerpo.

2.3.2. Trabajo y energía

En la naturaleza, cualquier proceso físico implica una transferencia o una transformación de energía. Teniendo en cuenta la definición de producto interior:

Definición 2.3.2 *El **trabajo** W realizado por una fuerza constante se define como*

$$W = \langle F|r\rangle = \langle \dot{p}|r\rangle \tag{2.19}$$

En general, el trabajo es una transferencia de energía. Cuando el trabajo realizado por una fuerza es variable a lo largo de una trayectoria,(2.19) queda como

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \langle F|dr\rangle \tag{2.20}$$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} m\,\langle \frac{dv}{dt}|dr\rangle = \int_{t_i}^{t_f} m\,\langle \frac{dv}{dt}|v\rangle\, dt = \tag{2.21}$$

$$W = m\int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle v|v\rangle\right) dt \tag{2.22}$$

$$W = m\int_{t_i}^{t_f} d\left(\frac{1}{2}\langle v|v\rangle\right) \tag{2.23}$$

$$W = \frac{1}{2}m\left(\langle v_f|v_f\rangle - \langle v_i|v_i\rangle\right) \tag{2.24}$$

La cantidad $K = \frac{1}{2}m\,\langle v|v\rangle = \frac{\langle p|p\rangle}{2m}$ se denomina ***energía cinética***. Por lo tanto (2.24) se puede escribir como

$$W = \Delta K \tag{2.25}$$

A (2.25) se le denomina el teorema de trabajo - energía. Por otro lado, a todo cuerpo con masa se le asocia un campo gravitacional, como ejemplo todo cuerpo en la Tierra esta influenciado por el campo gravitacional. Así, un cuerpo que se encuentre a una distancia del centro de la Tierra almacena una cantidad de energía, denominada energía potencial.

Definición 2.3.3 *La **energía potencial** U es el producto del peso del cuerpo que interactúa con la Tierra por la distancia o altura a la superficie de la Tierra*

$$U = m\,\langle g|r\rangle \tag{2.26}$$

El trabajo neto invertido por el sistema cuerpo - Tierra, implica un cambio en la energía potencial y se escribe como $W_g = m(\langle g|r_i\rangle - \langle g|r_f\rangle) = -\Delta U$. A la suma de la energía cinética y la energía potencial se le denomina energía mecánica y se escribe como

$$E_m = K + U \tag{2.27}$$

$$E_m = \frac{\langle p|p\rangle}{2m} + m\,\langle g|r\rangle \tag{2.28}$$

Teniendo en cuenta (2.14) y el operador gradiente, se deduce que

$$W = -\Delta U = \int_{r_i}^{r_f} \langle F|dr\rangle \tag{2.29}$$

$$U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} \langle F|dr\rangle \tag{2.30}$$

$$dU = -\langle F|dr\rangle \tag{2.31}$$

$$|F\rangle = -\nabla V \tag{2.32}$$

2.3.3. Evolución temporal

Cuando se conocen las condiciones iniciales del sistema, es posible a partir de la segunda ley de Newton (2.18) o de la relación entre la fuerza y el potencial (2.32), encontrar el estado de movimiento del sistema $(|r(t)\rangle\,;|p(t)\rangle$. Dichas ecuaciones son las que permiten caracterizar el estado de movimiento del sistema conociendo las variables dinámicas de de posición y momentum, las cuales son las variables dinámicas reales del sistema. A partir de la ecuación de movimiento $m\frac{d^2|r\rangle}{dt^2} = Interaccin$ y conociendo las condiciones iniciales se puede determinar con toda seguridad el estado futuro del sistema en cualquier instante de tiempo. Por lo tanto, *el* ***estado*** *de un sistema clásico corresponde a las diferentes formas de estar el sistema caracterizado por la formalización de unas variables dinámicas de posición y momentum en un instante de tiempo sin perder el sistema su identidad.*

Ahora, si se mide en un instante de tiempo las misma variable dinámica u observable se obtiene el mismo valor, es decir, al hacer una nueva observación sobre el sistema, este no se ve perturbado y además, los valores que se obtienen de las medidas los podemos considerar como los valores propios del observable que se mide y a los estados de movimiento del sistema asociados a esos valores propios como estados propios de movimiento del sistema, como por ejemplo, al medir la aceleración de un cuerpo en caída libre en la misma posición, el resultado es el mismo siempre, es decir que cualquier resultado de medir en un instante de tiempo es un valor propio.

2.4. Medida clásica

El proceso de medida de una variable dinámica o acción de observar en mecánica clásica lleva al sujeto a usar un instrumento de medida, el cual permite deducir la magnitud de la variable física a medir. En este proceso, el instrumento de medida es una extension del observador y como tal, el observador interpreta el resultado arrojado por el instrumento de medida. y tal interacción entre el sistema y el instrumento de medida no perturba el sistema de una manera apreciable. Luego dentro de este contexto de la mecánica clásica los sistemas tienen asociadas unas variables dinámicas que son propias de este.

Debido a que las mediciones se hacen sobre objetos macróscopicos, la perturbación al momento de medir un observable sobre el sistema es despreciable, y permite diferenciar entre lo grande y lo pequeño, es decir, desde el contexto de la mecánica clásica la naturaleza es independiente del observador. Al ser la mecánica clásica una teoría determinista debido a que en cualquier instante de tiempo futuro se puede conocer el estado del sistema, toda medición realizada sobre el sistema no afecta la medición posterior a esta (relación causal) y además es posible medir simultáneamente la posición y el momento lineal sin que una medición afecte la otra y determinar siempre el estado del sistema.

Paul Dirac en su libro *"Principios de mecánica cuántica"* formaliza la noción de estado de un sistema como los diferentes movimientos del sistema, considerando además que si se tiene un sistema clásico

". . .se podría especificar un estado dando el valor numérico de todas las coordenadas y velocidades de los diversos componentes del sistema en un instante de tiempo, quedando así completamente determinado el movimiento de todo el sistema."(Dirac,1957)

Conociendo las soluciones de la ecuación de movimiento se puede predecir con certeza como evoluciona un sistema en el tiempo o como cambia de estado. Comúnmente se habla de probabilidad para observaciones a futuro, es decir al hacer varias mediciones de una misma variable física, se promedian los resultados, cuyo resultado es un número cualquiera de acuerdo al fenómeno. Debido a que la medición de observables físicas (variables) es determinista, en mecánica clásica toda medición a futuro es posible conocerla de manera puntual, es decir se puede predecir con certeza. Solamente se requiere de la probabilidad en mecánica clásica para hacer análisis de datos experimentales al realizar varias medidas sobre un observable físico y encontrar un valor esperado, como por ejemplo en la teoría cinética de gases.

2.5. Postulados de la mecánica clásica

El concepto de estado, el cual queda caracterizado por los observables de posición y momentum, que son variables dinámicas y describen el sistema juega un papel muy importante en la formalización llevada a cabo, ya que permite caracterizar completamente el sistema en cualquier instante de tiempo futuro, aludiendo que tanto el estado como las variables dinámicas u obsevables, formalizadas por los kets de posición y momentum dependen estrictamente del tiempo, donde el estado del sistema es representado por la pareja ordenada $(|r(t)\rangle\,, |p(t)\rangle$ y por lo tanto se puede determinar la trayectoria del sistema. Para la descripción del sistema, objeto de estudio se hace necesario de un espacio vectorial con producto interno, en el que, el cuerpo numérico de este espacio son los números reales y sus elementos son los kets y además en este espacio vectorial se definen los operadores diferenciales.

Luego, la importancia del espacio vectorial con producto interno en el cuerpo de los reales posibilita que la formalización y la axiomatización para la enseñanza de la mecánica clásica haga visible el reconocimiento de los espacios vectoriales con producto interno real y sus elementos como kets, los cuales representan las variables dinámicas u observables físicas, y fundamenten la noción de estado en todo sistema clásico. A partir de toda la formalización realizada anteriormente, teniendo en cuenta la estructura algebraica y la interpretación física de la maquinaria analítica y siguiendo con la ruta axiomática llevada a cabo por Von Neumann para axiomatizar la mecánica clásica, se presentan los siguientes cuatro axiomas físicos u postulados, los cuales encierran toda la mecánica clásica.

- **POSTULADO DE INERCIA**

Las leyes de la mecánica clásica tienen la misma forma en cualquier sistema inercial, es decir, todos los sistemas inerciales son equivalentes e invariantes.

- **POSTULADO DE CAUSALIDAD**

El acto de observar o realizar una medida a un sistema mecánico clásico, el cual no es perturbado significativamente, permite establecer una relación de causalidad, y dicha relación se articula a partir de las ecuaciones de movimiento, bajo unas condiciones iniciales en un instante de tiempo y unas condiciones en un instante posterior que determina la medición de un observable en un instante de tiempo.

- **POSTULADO DE INTERACCIÓN**

En la naturaleza, toda interacción se da entre dos o más cuerpos y se especifica a partir de la segunda ley de Newton, la cual afirma que las fuerzas cambian el movimiento de un cuerpo y que el momentum es proporcional a la fuerza aplicada.

- **POSTULADO DE SUPERPOSICIÓN**

La relación entre estados de un sistema clásico permite describir un estado como una combinación lineal de estados sin que pierdan su identidad. Además de considerar que aquellas cantidades vectoriales, como la posición, la fuerza, el momentum, se pueden combinar línealmente para obtener un ket resultante como la suma de cada uno de los kets individuales.

A partir de los postulados se construye toda la mecánica clásica, los cuales, junto con la maquinaria analítica (estructura matemática) y la interpretación física constituyen la axiomatización de la mecánica clásica.

CAPÍTULO 3

Axiomatización de la mecánica cuántica

Hasta el momento se ha visto que a la mecánica clásica se le ha dado unas distinciones en torno a su formalización como a su conceptualización, permitiendo generar imágenes mentales de los sistemas allí estudiados. La importancia de haber realizado la axiomatización de la mecánica Newtoniana permite tender un puente entre la axiomatización allí construida y la que se estudia en la mecánica cuántica teniendo en cuenta la estructura matemática donde están los kets y su representación e interpretación para darle sentido y significado y permitir al estudiante una nueva mirada de pensar el mundo, la cual decanta en la construcción de la maquinaria analítica de la mecánica cuántica.

La teoría de la mecánica clásica logra explicar la dinámica de todo cuerpo a nivel macro, ya que el ser humano toda su vida ha tenido una experiencia directa con estos fenómenos, pero no lo es así para sistemas a nivel atómico, donde es casi imposible generar imágenes de estos sistemas. La manera de conocer que debe tener el sujeto para abordar los sistemas a nivel atómico es muy diferente a la manera de conocer que tiene el sujeto desde el contexto clásico. Por esta razón, no se puede establecer una conexión entre un esquema clásico y un esquema cuántico, porque son dos clases de fenómenos cuya naturaleza son muy diferentes.

La mecánica clásica se puede ver como un caso límite de la mecánica cuántica, pero no se puede establecer transiciones conceptuales entre ellas, debido a que la fenomenología y la manera de conocer el sistema, requiere una forma diferente de abordar los sistemas teniendo en cuenta que el aparato matemático bajo el cual están construidas estas dos teorías son similares.Por otro lado, bajo el contexto de la mecánica cuántica un sistema coordenado lleva a problemas, en el sentido de determinar u asignar las coordenadas de una partícula, ya que, bajo este escenario, se presentan dos posibilidades: que una partícula bajo las ideas corpusculares se pueda localizar como un punto exactamente dando sus coordenadas de posición, pero no se conoce su momentum en ese punto, también se puede decir en base a las ideas ondulatorias que no se puede localizar en ningún punto o esta en todos los puntos y es una onda. Bajo este contexto ya no se habla de que la partícula se encuentra en un estado característico, sino en una superposición de estados, cuyo estado resultante no es un estado bien definido y la posición de esa partícula se expresa probabilisticamente.

3.1. Espacio de Hilbert

[1] El aporte en primer lugar de Von Neumann, discípulo de David Hilbert fue establecer la equivalencia formal entre la mecánica matricial de Heisenberg y la mecánica ondulatoria de Schrödinger, además de axiomatizar la mecánica cuántica bajo la estructura matemática de los espacios de Hilbert. El trabajo de Von Neumann se concentra en presentar la base matemática de la mecánica cuántica, en el cual además propone la existencia de variables ocultas abordadas por Max Born en 1926, las cuales intentaban darle causalidad a la mecánica cuántica.

En su formalización Von Neumann estable una relación entre las sucesiones de subíndices de las matrices y las funciones de onda, ambos espacios funcionales, a los cuales se les denominó espacios abstractos de Hilbert (Ver Apéndice E). Dichos espacios constituyen la maquinaria analítica de la mecánica cuántica, y por lo tanto, se fundamentan en una estructura algebraica como tal, haciendo énfasis en que el espacio de Hilbert es un espacio con producto interno bajo el cuerpo de los complejos. Así que en este capitulo no se volverá a definir ni retomar como

[1]En esta sección se utilizó como referencia el texto original de Von Neumann *Fundamentos matemáticos de mecánica cuántica*

tales las definiciones, conceptos y propiedades, sino que más bien se construirá el espacio de Hilbert de forma cuidadosa tanto en el sentido como en el significado a la hora de aplicarlos a sistemas cuánticos.

3.1.1. Caracterización del espacio de Hilbert

Unos de los objetivos de este trabajo es primero visualizar la manera en como la estructura matemática definida en la sección 2.1 sirve de base para construir el espacio de Hilbert abstracto y en segundo lugar mostrar cómo este camino permite a los estudiantes llegar a la mecánica cuántica con nociones matemáticas y físicas de la mecánica clásica que faciliten el transito entre estas dos teorías. Ambas formalizaciones la clásica y la cuántica están apoyadas en un álgebra común que son los espacios vectoriales y la diferencia es que están en cuerpos numéricos distintos.

En la subsección 2.1.4 se definieron los espacios con producto interno, cuyos elementos eran kets asociados a magnitudes físicas y en el cual se definía la operación producto interno entre kets cuyo resultado era un número real. Aquí el espacio de Hilbert abstracto también es un espacio con producto interno, pero con unas características especiales, que se definirán a continuación.

Definición 3.1.1 ***Espacio con producto interno***
Sea V un espacio vectorial complejo, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle \in V$*;* $x \in \mathbb{C}$ *. Se define el producto interno sobre el cuerpo de los complejos* $\mathbb{C}$ *(ver apéndice B) como una función bilíneal con las siguientes propiedades*

$$
\begin{aligned}
i) &\quad \langle\alpha|\beta\rangle : |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in K \mapsto \quad \mathbb{C} \\
ii) &\quad \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \\
iii) &\quad (x(\langle\alpha| + \langle\beta|))|\,|\gamma\rangle = x\,\langle\alpha|\gamma\rangle + x\,\langle\beta|\gamma\rangle \\
ivv) &\quad \langle\alpha|\beta\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

donde $\langle\beta|\alpha\rangle^*$ *denota el complejo conjugado de* $\langle\alpha|\beta\rangle$*. A este espacio V sobre el cual esta definido un producto interno definido sobre los complejos con estas propiedades se denomina* ***espacio con producto interno****.*

3.1.2. Generalidades del espacio de Hilbert

La definición de los espacios de Hilbert abstractos que se denotará de ahora en adelante como **E** requieren de dotar los espacios de Hilbert de unas características especiales que se mencionaran a continuación.

a) **E** es un espacio líneal.

Esta propiedad, significa que es un espacio vectorial complejo, cuya multiplicación por un escalar se da bajo el cuerpo de los complejos.

b) **E** es un espacio con producto interno complejo.

A cada par de elementos del espacio se les hace corresponder un número complejo, el cual cumple con las condiciones dadas en la definición 3.1.1. y se le denomina espacio con producto interno complejo. La construcción de este espacio es muy importante, ya que permite definir la distancia entre dos elementos del espacio.

c) De acuerdo a la dimension del espacio **E** existirán tantos vectores linealmente independientes.

Si la dimensión del espacio es finita, es decir n, entonces existirán exactamente n kets linealmente independientes o dicho de otra manera todos los vectores del espacio son linealmente independientes. Ahora si el espacio es de dimensión infinita, entonces existen en este espacio un infinidad de kets linealmente independientes.

d) **E** es completo.

Un espacio es completo si sus elementos cumplen con la condición de convergencia de Cauchy, es decir, considérese una sucesión $f_1, f_2, \dots f_n$ de elementos del espacio **E**, dado un $\epsilon > 0$ existe un N tal que $m, n \geq N$ y $\|f_m - f_n\| < \epsilon$, o dicho de otra manera $\|f_m - f_n\| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$.

e) **E** es un espacio separable.

Existe una sucesión densa (todo elemento del espacio es un punto de acumulación, es decir es un límite de la sucesión) en dicho espacio.

Definición 3.1.2 *A todo espacio vectorial complejo que cumpla con las propiedades **a** - **e** se le denomina un **espacio de Hilbert abstracto***

3.1.3. Operadores en la mecánica cuántica

En la sección 2.2.1 se definió un operador como una transformación lineal, para la mecánica clásica. Sin embargo los operadores de la mecánica cuántica tienen unas propiedades adicionales que se definen a continuación.

Definición 3.1.3 ***Propiedades de los operadores cuánticos***

Sea $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ elementos de un espacio de Hilbert ε, $T_1, \ldots, T_k$ operadores y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

OQ1 $T : \varepsilon \to \varepsilon$, *es decir* $T|\alpha\rangle = |\beta\rangle$

OQ2 $(T_1 \pm T_2)|\alpha\rangle = T_1|\alpha\rangle \pm T_2|\alpha\rangle$, $(\lambda T_1)|\alpha\rangle = \lambda(T_1|\alpha\rangle)$, $(T_1T_2)|\alpha\rangle = T_1(T_2|\alpha\rangle)$, $(T_1T_2)|\alpha\rangle \neq (T_2T_1)|\alpha\rangle$; $T_k^n = \underbrace{T_k \ldots T_k}_{n}$

OQ2 *Un operador cuántico es lineal, es decir,* $T_k(x_1|\alpha_1\rangle + \ldots + x_k|\alpha_k\rangle) = x_1T_k|\alpha_1\rangle + \ldots + x_kT_k|\alpha_k\rangle$

OQ3 *Si T es un operador entonces el operador $T^\dagger$ se denomina operador "dagger". Cuando $T = T^\dagger$, dicho operador recibe el nombre de operador autoadjunto, es decir*

$$\hat{X}|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|\hat{X}^\dagger$$

$$\langle\alpha|T^\dagger|\beta\rangle = \langle\alpha|T|\beta\rangle^*$$

OQ4 *Un operador es hermítico, si es autoadjunto, es decir sus valores propios son números reales.*

OQ5 *Un operador es unitario, si $TT^* = T^*T = \mathbf{1}$*

A todo operador que cumpla con estas propiedades OQ1 - OQ5 se le denominara operador hermítico y se denotará como $\hat{A}$. Además este tipo de operadores son reversibles.

Todo ket $|\alpha\rangle$ de un espacio de HIlbert, se puede expresar como una combinación lineal de los kets de la base, es decir

$$|\alpha\rangle = \sum_k a_k |\alpha_k\rangle \tag{3.1}$$

donde a_k son las coeficientes del ket $|\alpha\rangle$. Si se premultiplica la ecuación 3.1 por un bra del espacio dual, se obtiene

$$\langle\alpha_j|\alpha\rangle = \sum_k a_k \langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \sum_k a_k \delta_{jk} = \begin{cases} a_k & j \neq k \\ 0 & j = k \end{cases} \tag{3.2}$$

Si se reemplaza la ecuación 3.2 en 3.1 para $j \neq k$

$$|\alpha\rangle = \sum_k |\alpha_k\rangle \langle\alpha_j|\alpha\rangle = \left\{ \sum_k |\alpha_k\rangle \langle\alpha_j| \right\} |\alpha\rangle$$

el termino encerrado entre llaves es uno de las nociones claves de la mecánica cuántica

$$\hat{\mathbf{1}} = \sum_k |\alpha_k\rangle \langle\alpha_j| \tag{3.3}$$

y recibe el nombre de **relación de completez o clausura**.

Como se mostró en la propiedad OQ2 los operadores se pueden operar, caso particular el de la multiplicación de operadores, decanta en una de las propiedades de mayor trascendencia en la mecánica cuántica y es la conmutatividad de los operadores bajo la multiplicación y da lugar a la siguiente definición.

Definición 3.1.4 *Sean $\hat{T}$ y $\hat{S}$ operadores. Se denomina **conmutador** a la cantidad*

$$[\hat{T}, \hat{S}] = \hat{T}\hat{S} - \hat{S}\hat{T}$$

*Si $[\hat{T}, \hat{S}] = 0$, se dice que los operadores **conmutan**, es decir que los operadores comparten una base común de eigenkets.*

3.1.4. Vectores y valores propios

Tanto en la sección 2.2.1 como en la anterior se definió un operador como la acción que realiza sobre un ket, además de mostrar que el operador es un ente que está a la espera de actuar y es cuando adquiere sentido. Otra propiedad importante que parte de la definición surge a raíz del resultado de la acción realizada de un operador sobre el ket es otro ket del espacio de Hilbert, así se puede plantear la siguiente ecuación

$$\hat{H}\,|\alpha\rangle = \lambda\,|\alpha\rangle \tag{3.4}$$

la cual recibe el nombre de **ecuación de valores propios**, donde $\hat{H}$ es un operador hermítico asociado a la función de Hamilton, $|\alpha\rangle$ un elemento del espacio de Hilbert ε denominado **ket propio** y λ un número real que recibe el nombre de **valor propio** del operador, el cual es real debido a que el operador es hermítico. Es decir la ecuación 3.1, indica que la acción del operador $\hat{H}$ sobre el ket $|\alpha\rangle$ es multiplicarlo por una constante, llamada valor propio. El conjunto de valores propios es el conjunto de todos los posibles valores de medida de un observable física.

Dicha ecuación es muy importante para la mecánica cuántica, ya que permite analizar los resultados de una medida, como se verá más adelante. Los operadores hermíticos cumplen con unas propiedades que se listan a continuación.

OH1 Los eigenvalores (valores propios) de un operador hermítico son reales.

OH2 Si un operador hermítico posee dos kets propios correspondientes a dos valores propios distintos, dichos kets propios son ortogonales.

OH3 Si el espacio de Hilbert ε es de dimensión finita N, entonces un operador hermítico tiene exactamente N eigenkets linealmente independientes, y este operador puede ser diagonalizable, donde los eigenvalores son los elementos matriciales de la diagonal.

OH4 Si el conjunto de eigenkets es ortonormal y forman una base del espacio (deben cumplir con la relación de completez y deben ser ortonormales), dicho operador recibe un nombre adicional **Observable**.

3.2. Nociones cuánticas

Habiendo formalizado los espacio de Hilbert y de llegar al concepto de operadores hermíticos, se procede a mostrar como toda esa maquinaria analítica es la necesaria para explicar los fenómenos a nivel atómico, haciendo hincapié en las contribuciones de Von Neumann en torno a la equivalencia de la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria. Para empezar se requiere definir un sistema cuántico.

Definición 3.2.1 *Un sistema cuántico es aquel al cual se le perturba incontrolablemente al ser medido. La constante de Planck* $h = 6,63 \times 10^{34} J.s$ *es uno de los elementos que permiten decidir cuando se esta hablando de sistema cuántico. Todo sistema en el que las variables dinámicas tomen valores del orden de la constante de Planck, se denomina* ***sistema cuántico***

La noción de estado, la cual formaliza la noción de cualidad, es aplicable a cualquier sistema físico, como se mostró en el segundo capitulo, ya sea clásico o cuántico. Esta noción fue presentada y formalizada por Paul Dirac en sus principios de mecánica cuántica. A diferencia de un estado clásico donde el movimiento del sistema quedaba caracterizado completamente bajo unas variables de posición y momentum en un tiempo dado, en la mecánica cuántica va mucho más allá.

Definición 3.2.2 *El estado de un sistema cuántico se distingue por un ket de estado de un espacio de Hilbert que permite conocer el sistema, y adquiere un carácter probabilistico, es decir desde el escenario de la física, el estado de un sistema cuántico es una suma de elementos en los que está implícita la probabilidad de que al realizar una medición, el sistema se encuentre en un estado particular y desde el punto de vista matemático es un ket de un espacio vectorial complejo, el cual se puede expresar como una combinación lineal de kets linealmente independientes.*

El espacio de Hilbert se conoce como el **espacio de estados** K o de kets y tanto los espacios de subíndices de matrices como los espacios de funciones de onda son espacios funcionales que corresponden a espacios de Hilbert abstractos, es decir

$$|x_\nu\rangle, |y_\nu\rangle \in F_z$$

$$|\psi_1(q_1,\ldots,q_k)\rangle\,,|\psi_2(q_1,\ldots,q_k)\rangle \in F_\Omega$$

de tal manera que

$$\begin{array}{ccccc} K & \equiv & F_z & \equiv & F_\Omega \\ |\alpha\rangle & \equiv & |x_\nu\rangle & \equiv & |\psi(q_1,\ldots,q_k)\rangle \end{array}$$

donde F_z representa el espacio de subíndices de las matrices definidas en la mecánica matricial de Heisenberg - Born - Jordan y F_Ω representa el espacio de funciones de onda definidas en la mecánica ondulatoria de Schrödinger son equivalentes (Ver Apéndices C y D) El producto interno, como se definió en la sección 2.1.13 de dos kets es un número real en la mecánica clásica, pero para la mecánica cuántica es un número **COMPLEJO**, es decir

$$\langle\alpha|\beta\rangle : |\alpha\rangle\,,|\beta\rangle \in K \mapsto \quad \mathbb{C} \tag{3.5}$$

$$\langle x_\nu|y_\nu\rangle : |x_\nu\rangle\,,|y_\nu\rangle \in F_Z \mapsto \quad \mathbb{C} \tag{3.6}$$

$$\langle\psi_1(q_1,\ldots,q_k)|\psi_2(q_1,\ldots,q_k)\rangle : |\psi_1(q_1,\ldots,q_k)\rangle\,,|\psi_2(q_1,\ldots,q_k)\rangle \in F_\Omega \mapsto \quad \mathbb{C} \tag{3.7}$$

Los kets en la mecánica cuántica adquieren un significado físico muy importante y es que al momento de formalizar se establece una relación entre un ket y el estado cuántico que representa, caso distinto a la mecánica clásica, en donde los ket solo representaban cantidades u variables físicas correspondientes a observables. Otra importante noción de la mecánica cuántica se da a partir de la definición de estado cuántico y es el principio de superposición.

Definición 3.2.3 *En mecánica cuántica el principio de superposición se caracteriza por ser una combinación lineal de estados bien definidos de acuerdo a la dimension del espacio de Hilbert y además, ya no son contribuciones como se veía en la mecánica clásica sino que los coeficientes que acompaña cada estado bien definido describe una amplitud de probabilidad y a partir de estos se deriva, la probabilidad de que el sistema se encuentre en ese estado particular.*

3.3. Observables

Los observables físicos en la mecánica cuántica están íntimamente ligados a los operadores hermíticos o matrices de densidad como se mencionó antes, pero la interpretación física implica una conceptualizacion diferente a la de la mecánica Newtoniana, donde las observables físicas (variables dinámicas) son kets (cantidades numéricas con dirección), mientras que en la mecánica cuántica se establece una relación entre las variables dinámicas y operadores hermíticos o matrices autodjuntas.

A los observables físicos se le asocia la cualidad física de ser medible, es decir ser una variable física, pero caso contrario a la mecánica clásica, ya no son kets reales, sino que en la mecánica cuántica, dichos observable físicos se representa por operadores o funciones que actúan sobre los kets de estado, cuyo resultado es otro ket de estado del mismo espacio de Hilbert, si el ket de estado resultante es factor del ket del estado original donde actuó el operador, se dice que dicho ket de estado original es un **estado propio** y el factor de proporcionalidad el **valor propio** asociado a ese ket propio. Un caso particular es la noción de fuerza en la mecánica cuántica, en la que por ser una teoría en la que intervienen los campos que son generados por sistemas cuánticos, allí no ocurren acciones a distancia instantáneas como en la mecánica clásica donde la fuerza se concibe como acciones instantáneas, en la cuántica no. Entre los operadores que encontramos en la mecánica cuántica están:

Posición	$\hat{X}$	x
Momento lineal	$\hat{P}$	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}$
Momento angular	$\hat{L}$	$i\hbar(\mathbf{r}\times\nabla)$
Energía	$\hat{E}$	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
Energía cinética	$\hat{T}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$
Hamiltoniano	$\hat{H}$	$\hat{T}+\hat{V}$

Tabla 3.1: *Operadores cuánticos (Peña, 2014).*

Ahora la medición en la mecánica cuántica requiere de especial atención, donde a diferencia de la mecánica clásica es netamente subjetiva, ya que el resultado de medir una variable física es un valor propio, el cual es real debido a que los observables son operadores hermíticos, y no cualquier valor real como en la mecánica clásica. El resultado de una medición, caso contrario a la mecánica clásica de ser un número cualquiera real, en la mecánica cuántica, el resultado es un valor propio asociado a un ket propio o al estado en el que queda el sistema después de ser medido,en donde la precisión con que se mide ya no es con certeza como en la mecánica Newtoniana sino probabilistica.

3.4. Postulados de la mecánica cuántica

Las contribuciones a la construcción de la mecánica cuántica por parte de Heisenberg - Born - Jordan con la mecánica matricial, Schrödinger con su mecánica ondulatoria y a los importantes trabajos de Von Neumann en la formulación matemática permiten que la formalización de esta teoría se pueda resumir en el siguiente conjunto de postulados de la mecánica cuántica, los cuales encierran todo fenómeno a nivel atómico.

- **POSTULADO DEL ESTADO CUÁNTICO**

A todo sistema cuántico se le asocia un elemento (vectores de estado, funciones de onda) de un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita separable, que describe completamente el sistema.

- **POSTULADO DEL OPERADOR**

Existe una correspondencia uno a uno entre los observables físicos y los operadores autoadjuntos (Hermíticos, lineales y acotados) sobre el espacio de Hilbert.

- **POSTULADO DE LA MEDIDA**

Después de realizar una medición de un observable sobre el sistema, este queda en un estado caracterizado por un valor propio en un eigenestado.

- **POSTULADO DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL**

La evolución temporal de un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es única y viene determinada por la ecuación $i\hbar\frac{d|\psi_i\rangle}{dt} = \hat{H}\,|\psi_i\rangle$, donde el Hamiltoniano es el operador de evolución , $|\alpha_i\rangle$ los vectores propios y E_i los valores propios de energía.

- **POSTULADO DE LA PROBABILIDAD**

Si A es un observable con eigenvalores a_i y eigenvectores ,$|\alpha_i\rangle$, dado un sistema en el estado , $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener como resultado a_i de una medida de A es $p(a_i) = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, o la traza de la matriz de densidad.

3.5. Síntesis de las axiomatizaciones de la mecánica Newtoniana y la mecánica cuántica

La importancia de la axiomatización de la mecánica Newtoniana facilita la formalización que se aborda en la mecánica cuántica, donde la estructura matemática son los espacios vectoriales con producto interno y cuyo cuerpo numérico son los números complejos.

Teniendo en cuenta la formalizacion de los espacios vectoriales bajo el cuerpo numérico de los reales, lugar donde viven los vectores y demás elementos que se abordan desde la mecánica Newtoniana, permite que los estudiantes se familiaricen con esta maquinaria matemática, de tal manera que cuando aborda el curso de mecánica cuántica, el estudiantes ya posee unas bases sólida que le facilitan su proceso de aprendizaje.

Es así que esta propuesta se sintetiza en la tabla 3.2, y da cuenta cómo desde la mecánica Newtoniana se facilita la transición a la mecánica cuántica brindando otra manera de presentar al estudiante la física sin fragmentaciones, donde cada una se caracteriza con su estructura matemática y los elementos claves para axiomatizar cada una de ellas haciendo uso del formalismo de Von Neumann, reconociendo una maquinaria analítica, una interpretación física y unos postulados que posibilitan el estudio de todo sistema físico mecánico clásico y cuántico.

Luego es importante axiomatizar la mecánica Newtoniana, ya que familiariza al estudiante con la estructura de los espacios vectoriales desde la mecánica Newtoniana que estudia los cuerpos y sistemas a nivel macro, para luego brindar herramientas de entrada al curso de mecánica cuántica que estudia cuerpos y sistemas a nivel atómico, donde esta nueva manera de mirar del mundo replantea una nueva forma de pensar holisticamente y brindar nuevas estrategias didácticas que muestren otras maneras de formalizar, de ver y pensar el mundo.

	MECÁNICA NEWTONIANA	MECÁNICA CUÁNTICA
Estructura Matemática	Espacio vectorial REAL con producto interno	Espacio vectorial COMPLEJO con producto interno (Hilbert)
Operadores	Diferencial, Integral, Gradiente, Divergencia, Rotacional , entre otros.	Operadores Hermíticos – OBSERVABLES FÍSICAS
Probabilidad	Teoría cinética de gases y ERRORES	Integral /Sumatoria amplitudes de probabilidad al cuadrado
Evolución Temporal	Ecuación de Newton	Ecuación de Schrödinger
Estado	Formas de estar / Cualidad / No pierde su identidad el sistema	Se distingue por un ket de un espacio de Hilbert y tiene carácter probabilístico.
Principio de Superposición	Combinación lineal de estados sin perder su identidad	Combinación lineal de estados BIEN DEFINIDOS donde los coeficientes que acompañan los estados son amplitudes de probabilidad.
Medida y valores propios	El resultado de una medida clásica es cualquier número real positivo. (OBJETIVA)	Los ÚNICOS posibles resultados de una medida de un observable son los VALORES PROPIOS
Postulado	Inercia, Causalidad, Interacción y Superposición.	Estado/KET, Observable/OPERADOR, Medida, Evolución temporal, Probabilidad.

Tabla 3.2: Comparación entre la mecánica Newtoniana y la mecánica cuántica.

Conclusiones

- Realizar investigaciones en torno a las dificultades que tienen los estudiantes no solo en mecánica cuántica sino también en otros campos de la enseñanza de la física en el contexto colombiano son muy pertinentes y necesitan ser llevadas a cabo, ya que permiten investigar y proponer nuevas didácticas para la enseñanza de la física.

- La importancia de formalizar y axiomatizar la mecánica newtoniana familiariza al estudiante con su estructura matemática propia y sustenta que la matemática es parte constitutiva de la física, además sugiriendo que la mecánica cuántica se puede enseñar en los primeros semestres, ya que la base matemática de la mecánica cuántica y la mecánica newtoniana son los espacios vectoriales, eliminando la idea de que la física se debe enseñar de manera lineal y buscando que la física sea contextualizada a los recientes desarrollos tecnológicos y no se enseñe para el pasado sino para el futuro.

- El enfoque axiomático de la mecánica clásica de corte newtoniano a partir del esquema del álgebra lineal familiariza al estudiante con los espacios vectoriales de tal manera que cuando afronta el curso de mecánica cuántica ya cuenta con un andamiaje matemático sólido y se le facilite su transición entre estas dos teorías.

- La manera de conocer del sujeto en la física se consolida en el estudio de sistemas clásicos y cuánticos, llevando al sujeto a construir explicaciones del mundo físico, es decir, formalizando unas nociones, cuyo fin es organizar la experiencia del sujeto para construir conocimiento.

• Este trabajo de investigación motiva a que dicha construcción axiomática que fue propuesta por Von Neumann y la notación de bra y ket, puede ser llevada al contexto de la física clásica, lo cual sugiere que esta notación no es exclusiva de la mecánica cuántica.

Bibliografía

[1] Abhang, R. Y. (2005) *Making introductory quantum physics understandable and interisting*. Classroom-Resonance. Journal of Science Education. 63-73

[2] Ayala, M. (1999) *La enseñanza de la física para la formación de profesores de física*, Tecne Episteme Y Didaxis, Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 4, 6 – 13.

[3] Ayala, M. M. (2006) *Los análisis histórico críticos y la reconstextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades*, Pro-Posições, Vol. 17.

[4] Baily C., Finkelstein N. (2009) *Development of quantum perspectives in modern physics*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 9.

[5] Baily C., Finkelstein N. (2010) *Refined characterization of student perspectives on quantum physics*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 11.

[6] Baily C., Finkelstein N. (2010) *Teaching and understanding of quantum interpretation in modern physics courses*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 6, 1 - 11.

[7] Baily C., Finkelstein N. (2015) *Teaching quantum interpretation: Revisiting the goals and practices of introductory quantum physics courses*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 11, 1 - 14.

[8] Bao L., Redish E. (2002) *Understanding probabilistic interpretation of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics*, American Journal of physics,70(3), 210 - 217.

[9] Bautista G. H. (2009) *Apuntes de mecánica cuántica (primera parte)*, Preimpresos, No 20,

Universidad Pedagógica Nacional.

[10] Carr L., McKagan S. *Graduate quantum mechanics reform*, American Journal of Physics 77(4), 308 - 319.

[11] Cohen G., Moreira M., Herscovitz V. *Implementation of a didactic proposal on fundamental concepts of quantum mechanics with students of a professional master's degree in physics teaching*, Latin American Journal Physics Education, Vol 6, No 4, 519 - 529

[12] Cohen G., Moreira M., Herscovitz V. *La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica a alumnos de graduación en física*, Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, REIEC Volumen 9 No 1, 22 - 39.

[13] Dennis E. and Norsen T. (2008) *Quantum theory: Interpretation cannot avoid*, Recuperado de: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0408178.pdf, Consultado: 30 Noviembre 2017

[14] Dirac P. A. M. (1958) *The Principles of Quantum Mechanics*, (4a. Edición) Oxford University Press.

[15] Grazer B., Howard R. (2001) *Una mente brillante*, Estados Unidos.

[16] Greca I. M. y Herscovitz, V. E. (2002) *Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario*. Enseñanza de las Ciencias, 20(2), pp. 327-338.

[17] Ireson, G. (2002) *A multivariate analysis of undergraduate physics students' conceptions of quantum phenomena*, European Journal of Physics, Volume 20, Number 3.

[18] Krasnoholovets, V. (2003) *On the origin of conceptual difficulties of quantum mechanics. Developments in quantum physics*. Nova Science Publisher. New York. 85-109.

[19] Madrid, C. (2009) *De la equivalencia matemática entre la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria*. La Gaceta. 108-128.

[20] Özcan ö. (2010) *How do the students describe the quantum mechanics and classical mechanics?* Latin American Journal Physical Education, Vol 4, No 1. 22 - 25.

[21] Pantoja G., Moreira., Herscovitz V. (2013). *La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica cuántica a alumnos de graduación en física*. REIEC Vol. 9. Brasil.

[22] Peña L. (2014) *Introducción a la mecánica cuántica*, Universidad Autónoma de México, Fondo de cultura económica.

[23] Rédei M., Stöltzner M. (2006) *Soft axiomatisation: John Von Neumann on method and Von Neumann's method in the physical science in Intuition and the Axiomatic Method*, Edited by Carson E. and Huber R., Springer Netherlands, 235 - 249.

[24] Rozo M., Mendoza D. and Olarte J. A.(2016) *Around the notion of state and the Superposition Principl*. Versión Electrónica, algo más que un estado sólido, Vol. 10, No. 2, 230-236, Julio-Diciembre.

[25] Singh Ch. (2001) *Student understanding of quantum mechanics at the beginning of graduate instruction*, American Journal of Physics 76, 277 - 287.

[26] Singh Ch. (2001) *Student understanding of quantum mechanics*, American Journal of Physics 69, 885 - 895.

[27] Singh Ch., Zhu G. (2009) *Cognitive Issues in learning advanced physics: An example from quantum mechanics*, Physical Education Research Conferences, Edited by Sabella M., Henderson C, Sing Ch.1179, 63 - 66.

[28] Sing Ch., Marshman E. (2010) *Review of student difficultis in upper - level quantum mechanics*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 11, 1 - 24.

[29] Von Neumann, J. (1949) *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica*. Publicaciones del instituto de Matemáticas "Jorge Juan". Madrid.

[30] Zhu G., Singh C. (2012) *Improving students' understanding of quantum measurement. I. Investigation of difficulties*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 8, 1 - 8.

[31] Zhu G., Singh C. (2012) *Improving students' understanding of quantum measurement. I. Development of research - based learning tools*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research 8, 1 - 13.

[32] Zhu G., Singh C. (2012) *Surveying students's understanding of quantum mechanics in one spatial dimension*, American Journal of Physics 80(3), 252 - 259.

APÉNDICE A

El espacio $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio afín n - dimensional euclidiano

$$V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \quad para \quad i = 1, 2, ..., n \right\}$$

donde se define la suma de **kets** como $|x\rangle + |y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ tal que $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., n$ y la multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como $\lambda |x\rangle = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ constituye un espacio vectorial. Al elemento cuyas coordenadas son cero se le llama **vector nulo u origen**.

De donde se deduce que: $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales o linea real; $\mathbb{R}^2$ es el plano euclidiano y $\mathbb{R}^3$ el espacio real euclidiano o tridimensional.

Base de $\mathbb{R}^3$

Considérese el siguiente conjunto de kets linealmente independientes

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el conjunto $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ constituye la ***base canónica*** de $\mathbb{R}^3$, y todo punto del espacio afín euclidiano, se puede expresar como combinación lineal de los vectores **canónicos** $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ y $|e_3\rangle$.

APÉNDICE B

Números complejos

Definición B.0.1 *Todo número de la forma $\lambda = x_1 + ix_2$ es un número **complejo**, donde x_1 x_2 son números reales e $i = \sqrt{-1}$ o dicho de otra forma $i^2 = -1$.*

A dicho conjunto de números que nacieron como solución de la ecuación $x^2+1=0$ se denotara por $\mathbb{C}$ y en consecuencia $\lambda \in \mathbb{C}$. Además a x_1 se le denomina parte real y a ix_2 parte compleja.Es claro que el conjunto de los número reales es un subconjunto de los complejos si en la definición de números complejos $x_2 = 0$, o dicho de otro manera, los números complejos son una extensión de los reales.

El conjunto de los complejos cumple con unas propiedades características, que se describen en seguida

Definición B.0.2 ***Propiedades de los números complejos***
Sea $\lambda = x_1 + ix_2, \eta = x_3 + ix_4$ números complejos con $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, entonces

$i)$ $\lambda^* = x_1 - ix_2,\ y\ \lambda = \lambda^*\ si\ y\ solamente\ si\ x_2 = 0\ (\lambda \in \mathbb{R})$ ***congugación compleja***

$ii)$ $(\lambda + \eta)^* = \lambda^* + \eta^*$

$iii)$ $(\lambda\eta)^* = \lambda^*\eta^*$

$iv)$ $|\lambda| = \sqrt{\lambda^*\lambda}$

Con la definición del cuerpo sobre el cual se caracterizan los espacios en la mecánica cuántica, cuyos elementos son kets **Complejos**, se extiende la definición de producto interno bajo el cuerpo de los números complejos.

Definición B.0.3 *Sea $\mathbb{C}^n$ el espacio de n - uplas euclidiano complejo. Si* $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *entonces*

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^*$$

APÉNDICE C

Mecánica matricial

[1] La base sobre la cual se fundamentó el desarrollo de la mecánica cuántica giro en torno a resolver problemas que surgían del estudio del átomo tales como: calcular probabilidades de transición de los electrones, determinar los niveles de energía posibles, conocer los estados estacionarios, entre otros. Estos municionamientos llevaron a que Heisenberg intentara encontrar frecuencias de transición, proponiendo en principio soluciones para sistemas con un grado de libertad.

Heisenberg presentó en su paper una regla de multiplicación de variables físicas $pq - qp$ (donde $p(m, n; t) = p(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t}$ y $q(m, n; t) = q(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t}$ representan la posición y el momento lineal del sistema y $\nu(n, m)$ la frecuencia asociada con la transición entre estados bajo la condición de $h\nu(n, m) = E_n - E_m$, y que sirvió de base para la contribución de Born y Jordan, que fue, asignar a tales variables físicas una representación matricial, cuyos elementos de tal multiplicación son $\frac{h}{2\pi i}$, donde h representa la acción de Planck.

Dichas matrices son muy características, ya que son matrices hermíticas, es decir, si a_{mn} son las

[1]En esta apéndice se utilizó como referencia el texto original de Von Neumann *Fundamentos matemáticos de mecánica cuántica*

entradas de una matriz cuadrada $A(nm)$, las cuales son complejas, entonces

$$a_{mn} = \overline{a_{nm}} \tag{C.1}$$

$$A = A^* \tag{C.2}$$

donde A^* denota la matriz transpuesta.

En general, para comprender la dinámica de tal sistema, se plantea la función de Hamilton

$$H(q_1, \ldots, q_k; p_1 \ldots, p_k) \tag{C.3}$$

donde k son los grados de libertad del sistema y conociendo los valores de estas k coordenadas se puede determinar el estado del sistema. Ahora la energía, que es una función cuadrática de la derivadas temporales de q_k se escribe como

$$E = L(q_1, \ldots, q_k; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k) \tag{C.4}$$

Teniendo en cuenta que a partir de

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \ldots, p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{C.5}$$

se encuentran los impulsos conjugados, los cuales dependen línealmente de los q_k, se deduce

$$E = L(q_1, \ldots, q_k; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k) = H(q_1, \ldots, q_k; p_1 \ldots, p_k) \tag{C.6}$$

de tal manera que dicha función de Hamilton permita conocer el comportamiento del sistema.

Como se dijo anteriormente, la regla de multiplicación asocia matrices que representan variables físicas, luego para resolver dichos problemas, se considera un sistema de $2k$ matrices, $Q_1, \ldots, Q_k; P_1 \ldots, P_k$ infinitas, de tal manera que:

1) Cumplan las siguientes reglas de conmutación

Sea $m, n = 1, \ldots, k$

$$Q_m Q_n - Q_n Q_m = 0 \tag{C.7}$$

$$P_m P_n - P_n P_m = 0 \tag{C.8}$$

$$P_m Q_n - Q_n P_m = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ -i\hbar \mathbf{I} & m = n \end{cases} \tag{C.9}$$

2) Dicha matriz $W = H(Q_1, \ldots, Q_k; P_1, \ldots, P_k)$ es una matriz hermítica y diagonalizable, cuyos elementos de la diagonal representan los niveles de energía del sistema y recibe el nombre de matriz Hamiltoniana.

La matriz W queda determinada por la función de Hamilton independiente del tiempo, desde la mecánica clásica

$$H(q_1, \ldots, q_k; p_1 \ldots, p_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2m_j} \mathbf{p}_j^2 + V(q_1, \ldots, q_k) \tag{C.10}$$

y las $Q_1, \ldots, Q_k$ y $P_1, \ldots, P_k$, observables físicos, que desde la mecánica cuántica no conmutan.

Dichas reglas sientan la base de la nueva teoría cuántica propuesta por Heisenberg, Born y Jordan. Además dichas reglas de conmutación fueron el punto de partida de Paul Dirac para establecer el vinculo entre los conmutadores cuánticos y las ecuaciones de la mecánica clásica junto con los corchetes de Poisson.

APÉNDICE D

Mecánica ondulatoria

[1] El trabajo titulado *"Cuantización como un problema de valores propios"* fue el primero de una serie de cinco artículos que dieron la base de la mecánica ondulatoria presentados por Erwin Schrödinger en 1926.

Al igual que en la mecánica matricial todo inicia con la función de Hamilton

$$H(q_1, \ldots, q_k; p_1, \ldots, p_k)$$

Considerando un átomo de Hidrógeno no relativista y no perturbado y tratando de dar una conexión entre una función $\psi(q_1, \ldots, q_k)$ (funciones de onda) definida sobre el espacio de estados y los procesos de vibración del átomo se decanta en la siguiente ecuación diferencial

$$H\left(q_1, \ldots, q_k; \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\psi(q_1, \ldots, q_k) = \lambda\psi(q_1, \ldots, q_k) \tag{D.1}$$

donde claramente se tiene que $p_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k}$. De acuerdo a la ecuación (A.10)

$$H\psi = H(q_1, \ldots, q_k; p_1 \ldots, p_k)\psi = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2m_j}(-i\hbar)^2\frac{\partial\psi^2}{\partial q_j^2} + V(q_1, \ldots, q_k)\psi = \lambda\psi \tag{D.2}$$

[1]En esta apéndice se utilizó como referencia el texto original de Von Neumann *Fundamentos matemáticos de mecánica cuántica*

La ecuación (B.2) tiene similitud con la ecuación de ondas, además representa la ecuación característica de valores propios, en la cual λ se concibe como los valores propios desde el punto de vista matemático y desde el punto de vista físico como los niveles de energía posibles y la función ψ la funciones propias complejas matemáticamente y físicamente se refieren a estados estacionarios.

Si la función es no estacionaria y depende del tiempo, se tiene que el sistema evoluciona conforme a

$$H\left(q_1, \ldots, q_k; \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\psi(q_1, \ldots, q_k; t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q_1, \ldots, q_k; t) \tag{D.3}$$

Así las variables físicas son representadas por operadores que actúan sobre funciones de onda.

APÉNDICE E

Equivalencia de la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria

[1] La teoría atómica se edifico bajo estas dos enfoques los cuales en primer lugar la mecánica matricial contó con la publicación de cinco artículos, de los cuales tres son debido a Heisenberg, Born y Jordan y otros dos a Paul Dirac, el cual junto con Jordan fueron los precursores de la teoría de transformaciones, en segundo lugar la mecánica ondulatoria nació de la publicación de cinco artículos por parte de Schrödinger.

Si bien estas dos teorías lograban explicar los fenómenos a nivel atómico desde dos estructuras matemáticas distintas, las dos concluían en los mismos resultados. Pero tener dos teorías que explicaran el comportamiento de la naturaleza a escalas atómicas no agradaba del todo a los físicos del momento y empezó la búsqueda por intentar buscar una equivalencia entre ellas.

Como anécdota histórica es importante mencionar que Born y Heisenberg tuvieron en sus manos, la idea de la mecánica ondulatoria en una reunión que sostuvieron con David Hilbert, el cual les dio unas ideas en como edificar la teoría atómica a partir de funciones de onda, tratando

[1] En esta apéndice se utilizó como referencia el texto original de Von Neumann *Fundamentos matemáticos de mecánica cuántica*

de resolver un problema de valores propios de las ecuaciones diferenciales de donde surgían tales matrices, pero Born y Heisenberg no comprendieron el consejo de Hilbert y mas tarde se daría cuenta que hubiera podido ser el creador de dos teorías en torno al comportamiento de la naturaleza a nivel atómico.(Madrid, 2006)

E.3.1 Teoría de transformaciones

En el apéndice D se afirmó que se podía establecer una relación biunívoca entre las matrices hermíticas u operadores desde el punto de vista de Schrödinger con los observables (magnitudes) físicos, y que además se podía construir la matriz Hamiltoniana. Al momento de construir la matriz Hamiltoniana, no siempre resulta diagonal, por lo tanto, se requiere diagonalizar dicha matriz de la siguiente manera:

Para cualesquiera matrices $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k; \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_k$,existen matrices S de tal manera que $SS^{-1} = S^{-1}S = I$, luego

$$Q_1 = S^{-1}\bar{Q}_1 S, \ldots, Q_k = S^{-1}\bar{Q}_k S \quad ; \quad P_1 = S^{-1}\bar{P}_1 S, \ldots, P_k = S^{-1}\bar{P}_k S \tag{E.1}$$

Tal transformación (***transformación unitaria canónica***) permite que $Q_1, \ldots, Q_k; P_1, \ldots, P_k$ herede las relaciones de permutación (A.7, A.9 y A.10) de $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k; \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_k$.

Por otro lado, sean $\alpha_{\mu\nu}$ elementos de $\bar{H}$, $s_{\mu\nu}$ elementos de la matriz S y w_μ elementos diagonales de la matriz H (los demás son 0). Por lo tanto teniendo

$$H = S^{-1}\bar{H}S \tag{E.2}$$

que también se puede escribir como

$$SH = \bar{H}S$$

se deduce a partir de las reglas de conmutación que

$$\sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu} s_{\nu\rho} = w_\rho s_{\mu\rho} \tag{E.3}$$

La ecuación (D.3) es claramente una ecuación de valores propios, donde w_ρ son los eigenvalores y las matrices columna $s_{k\rho}, k = 1, 2, \ldots$ son los eigenvectores y son las únicas soluciones de tales problemas de valores propios, es decir, se deben encontrar x_μ y λ a partir de

$$\sum_\nu \alpha_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \tag{E.4}$$

tales que si hay tantas soluciones $x_1, x_2, \ldots$, necesariamente habrán tantas λ en la sucesión $w_1, w_2, \ldots$. Similarmente como la ecuación (C.2)

E.3.2 Espacios de Hilbert

Dicha equivalencia entre una teoría cuyo espacio Z de subíndices ν es discreto y un espacio continuo de estados de un sistema Ω implica serias dificultades matemáticas entre ellos. Mas bien lo que se intenta es establecer la equivalencia a partir de las sucesiones $x_1, x_2, \ldots$, al cual se denotará por F_Z y representa el espacio de dichas sucesiones y el espacio de funciones de onda denotado como F_Ω.

Tanto en la mecánica matricial como en la mecánica ondulatoria se consideran las siguientes relaciones de finitud, las cuales condicionan a tales funciones F_z y F_Ω

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{\Omega} |\psi(q_1, q_1, \ldots, q_k)|^2 dq_1, \ldots, dq_k = 1 \tag{E.5}$$

$$\sum_\nu |x_\nu|^2 = 1 \tag{E.6}$$

Para establecer la equivalencia entre los espacios de funciones F_Z y F_Ω se hace necesario utilizar el teorema de Fischer - Riesz, el cual afirma

Teorema E.0.1 *Sean F_Z y F_Ω, espacios de funciones, luego existe un **isomorfos - isométrico - lineal** entre ellos, es decir que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre ellos, tal que sea lineal y la norma se conserve.*

Por lo tanto se justifica que (C.5) y (C.6) deben ser iguales, además:

Sea $x_1, x_2, \ldots ; x_1, x_2, \ldots \in F_z$ y $\phi(q_1, q_1, \ldots, q_k); \psi(q_1, q_1, \ldots, q_k)$ F_Ω, luego

$$\sum_\nu x_\nu \overline{y_\nu} = \underbrace{\int \ldots \int}_{\Omega} \psi(q_1, q_1, \ldots, q_k)\phi(\overline{q_1, q_1, \ldots, q_k}) dq_1, \ldots, dq_k \tag{E.7}$$

En consecuencia, los espacios F_Z y F_Ω son isomorfos, lo que significa que poseen una estructura algebraica similar y donde se respeta la linealidad y la no variación de sus longitudes. También es importante considerar que tal isomorfismo decanta en la correspondencia entre la matriz

$$\bar{H} = H(Q_1, Q_2, \ldots, Q_K; P_1, P_2, \ldots, P_K)$$

y los operadores

$$\bar{H} = H(q_1, q_2, \ldots, q_K; -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2}, \ldots, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k})$$

Por lo tanto se establece, como los observables físicos se pueden representar matemáticamente, ya sea como matrices u operadores hermíticos. Tales espacios F_Z y F_Ω son ***espacios de Hilbert***.

$$F_z = l^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_\nu); \sum_\nu |x_\nu|^2 = \sum_\nu x_\nu x_\nu^* = 1 \right\} \tag{E.8}$$

$$F_\Omega = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \underbrace{\int \ldots \int}_{\Omega} |\psi(q_1, q_1, \ldots, q_k)|^2 dq_1, \ldots, dq_k = \right.$$

$$\left. \underbrace{\int \ldots \int}_{\Omega} \psi(q_1, q_1, \ldots, q_k)\phi(\overline{q_1, q_1, \ldots, q_k})dq_1, \ldots, dq_k = 1 \right\} \tag{E.9}$$