

Análisis discursivo del aprendizaje de las isometrías del plano mediante teselas artísticas

Laura Valentina Barbosa Correa

Sandra Milena Villamil Garro

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D. C.

2024

Análisis discursivo del aprendizaje de las isometrías del plano mediante teselas artísticas

Laura Valentina Barbosa Correa

Sandra Milena Villamil Garro

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciadas en Matemáticas

Asesor:

Prof. Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D. C.

2024

Agradecimientos

A nuestra asesora de trabajo de grado Leonor, por su honestidad, compromiso y disposición para enseñarnos, guiarnos y escucharnos; siempre resaltando lo positivo de nuestras propuestas y valorando nuestro trabajo.

A nuestro tutor de práctica Alberto, por motivarnos, apoyarnos y darnos el espacio de su clase para desarrollar nuestra propuesta; por sus consejos y críticas constructivas al finalizar cada una de nuestras intervenciones. A nuestro asesor de práctica Diego, por las orientaciones que nos brindó para la propuesta de tareas.

A nuestros amigos y compañeros de la Licenciatura Camila R., Camilo B., Paola P. y Miguel M., quienes siempre estuvieron interesados por nuestro proceso.

“Si en verdad te aprecias, estudia. Bien harás en practicar lo aprendido.”

Proverbios 19:8

A Dios, por recordarme lo que quería hacer cuando terminara el colegio y por darme todo lo necesario espiritual y materialmente para cumplir este sueño. También por recordarme que los tiempos de él son perfectos. A mis hijas Kelly y Sofía por su amor, comprensión y por haberme motivado a cumplir este sueño. A mis padres Claudia y John por su apoyo incondicional. A mis hermanos por estar pendientes de mi proceso. A Laura, mi compañera y amiga por su compromiso y paciencia.

Sandra

A mis padres Sandra y Rosendo, por siempre apoyarme, por siempre creer en mí y brindarme apoyo siempre que lo necesito, porque sin ellos nada de esto hubiera sido posible. A mi hermano Juan David y a Don Alex, por alentarme en mi transcurso por la Licenciatura y preocuparse por mis estudios. A Sammy, mi gata, por siempre acompañarme en las madrugadas de estudio. A Sandra, mi amiga, por siempre compartirme sus conocimientos, por su honestidad y tolerancia.

Laura

Resumen

Este documento de trabajo de grado vinculado con nuestra práctica educativa, describe el ejercicio investigativo que realizamos. En el que, pretendíamos identificar los aprendizajes que los estudiantes de grado undécimo del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED) adquirieron sobre las isometrías del plano (traslación, rotación y simetría axial). Para ello, construimos e implementamos un conjunto de tareas, que usamos para obtener producciones escritas y gráficas de los estudiantes; producciones que posteriormente utilizamos para analizar los aprendizajes de los estudiantes, a la luz del enfoque comunicacional de Sfard. Además, reflexionamos sobre la pertinencia de las tareas y sobre la gestión en el aula.

Índice

RESUMEN.....	4
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1 CONTEXTUALIZACIÓN.....	3
1.1 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO	3
1.1.1 <i>Relación entre la Práctica en Aula y el Trabajo de Grado</i>	3
1.1.2 <i>Importancia del Desarrollo del Pensamiento Espacial Aprovechando el Contexto del Arte</i>	4
1.1.3 <i>Relevancia de Aprender Acerca de las Isometrías del Plano</i>	5
1.1.4 <i>Por Qué Nos Enfocamos en el Aprendizaje y Cómo lo Hacemos</i>	6
1.2 OBJETIVOS.....	7
1.2.1 <i>Objetivo General</i>	7
1.2.2 <i>Objetivos Específicos</i>	7
1.3 REVISIÓN DE LA LITERATURA	7
1.3.1 <i>Trabajos Investigativos que Emplean el Contexto Artístico para Enseñar Isometrías del Plano</i> ...	8
1.3.2 <i>Trabajos Investigativos que se Valen de la Propuesta de Sfard para Examinar el Aprendizaje</i>	9
CAPÍTULO 2 MARCO DE REFERENCIA	12
2.1 MARCO MATEMÁTICO.....	12
2.1.1 <i>Generalidades de las Transformaciones del Plano</i>	12
2.1.2 <i>Traslación</i>	14
2.1.3 <i>Simetría axial</i>	16
2.1.4 <i>Rotación</i>	21
2.2 MARCO DIDÁCTICO	24
2.2.1 <i>El Aprendizaje de las Isometrías desde el Enfoque Comunicacional</i>	24
2.2.2 <i>Adaptaciones para el Tratamiento Matemático de las Isometrías a Nivel Escolar</i>	26
2.2.3 <i>Las Teselas Artísticas como Contexto para la Enseñanza de las Isometrías</i>	27

2.3 MARCO CURRICULAR	31
2.3.1 <i>Lineamientos Curriculares (MEN, 1998)</i>	31
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	31
Proceso de Comunicación	32
2.3.2 <i>Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006)</i>	33
2.3.3 <i>Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016)</i>	34
CAPÍTULO 3 EXPERIENCIA DE AULA.....	35
3.1 PANORÁMICA GENERAL DE LA EXPERIENCIA.....	35
3.1.1 <i>Contexto Institucional</i>	35
3.1.2 <i>Contexto Estudiantil</i>	36
3.2 TAREAS QUE CONSTITUYERON LA EXPERIENCIA.....	38
3.2.1 <i>Tarea 1: Introducción a la Traslación</i>	40
3.2.1.1 Enunciado de la Tarea 1.....	40
3.2.1.2 Descripción de la Tarea 1.....	40
3.2.1.3 Aprendizajes Esperados en la Tarea 1.....	41
3.2.2 <i>Tarea 2: Introducción a la Simetría axial</i>	41
3.2.2.1 Enunciado de la Tarea 2.....	41
3.2.2.2 Descripción de la Tarea 2.....	42
3.2.2.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 2.....	42
3.2.3 <i>Tarea 3: Introducción a la Rotación</i>	43
3.2.3.1 Enunciado de la Tarea 3.....	43
3.2.3.2 Descripción de la Tarea 3.....	43
3.2.3.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 3.....	44
3.2.4 <i>Tarea 4: Traslación</i>	44
3.2.4.1 Enunciado de la Tarea 4.....	44
3.2.4.2 Descripción de la Tarea 4.....	45
3.2.4.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 4.....	46
1.2.4.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 4.....	46

3.2.5 Tarea 5: <i>Simetría axial</i>	47
3.2.5.1 Enunciado de la Tarea 5.....	47
3.2.5.2 Descripción de la Tarea 5.....	48
3.2.5.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 5.....	49
3.2.5.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 5.....	49
3.2.6 Tarea 6: <i>Rotación</i>	50
3.2.6.1 Enunciado de la Tarea 6.....	50
3.2.6.2 Descripción de la Tarea 6.....	51
3.2.6.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 6.....	52
3.2.6.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 6.....	52
3.2.7 Tarea 7: <i>Aplicación de lo Aprendido</i>	53
3.2.7.1 Enunciado de la Tarea 7.....	53
3.2.7.2 Descripción de la Tarea 7.....	53
3.2.7.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 7.....	54
3.2.7.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 7.....	54
CAPÍTULO 4 ESTRATEGIA ANALÍTICA.....	56
4.1 PRODUCCIONES ANALIZADAS.....	56
4.2 REGISTRO DE LA INFORMACIÓN.....	57
4.3 PROCESO DE ANÁLISIS.....	57
CAPÍTULO 5 ANÁLISIS DE LOS RASGOS DISCURSIVOS.....	59
5.1 TAREA 1: INTRODUCCIÓN A LA TRASLACIÓN.....	59
5.1.1 <i>Términos Empleados</i>	60
5.1.2 <i>Frases Construidas por los Estudiantes</i>	62
5.2 TAREA 4: TRASLACIÓN.....	65
5.2.1 <i>Términos Empleados</i>	66
5.2.2 <i>Frases Construidas por los Estudiantes</i>	67
5.2.3 <i>Rutinas: Numeral 1</i>	69

5.2.4 Rutinas: Numeral 3	70
5.3 TAREA 3: INTRODUCCIÓN A LA ROTACIÓN	72
5.3.1 Términos Empleados	73
5.3.2 Frases Construidas por los Estudiantes	76
5.5.3 Mediadores Visuales	83
5.4 TAREA 6: ROTACIÓN	84
5.4.1 Sintaxis	85
5.4.2 Términos Empleados	86
5.4.3 Frases Construidas por los Estudiantes	90
5.4.4 Narrativas.....	95
5.4.5 Rutinas: Numeral 2	96
5.5 TAREA 7: APLICACIÓN DE LO APRENDIDO.....	101
5.5.1 Sintaxis	101
5.5.2 Vocabulario.....	102
CAPÍTULO 6: DISCUSIÓN Y RESULTADOS	107
6.1 APRENDIZAJES LOGRADOS POR LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO	107
6.2 SOBRE EL CONJUNTO DE TAREAS IMPLEMENTADAS.....	115
6.2.1 Respecto a las Tareas 1 y 4 (Traslación).....	116
6.2.2 Respecto a las Tareas 3 y 6 (Rotación).....	117
6.2.3 Respecto a las Tareas 2 y 5 (Simetría axial)	118
6.2.4 Respecto a la Tarea 7 (Aplicación de lo Aprendido).....	120
6.3 Reflexión Docente Sobre el Hacer Docente y el Aprendizaje de las Isometrías del Plano.....	121
CONCLUSIONES	126
REFERENCIAS.....	128
ANEXOS.....	131

ANEXO 1. SISTEMA TEÓRICO	131
ANEXO 2. CONCEPTOS, RELACIONES Y PROPIEDADES GEOMÉTRICAS INVOLUCRADAS	133
ANEXO 3. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 1.....	134
ANEXO 4. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 4 (NUMERAL 1)	138
ANEXO 5. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 4 (NUMERAL 3)	139
ANEXO 6. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 3.....	141
ANEXO 7. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 6 (NUMERAL 1)	143
ANEXO 8. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 6 (NUMERAL 3)	146
ANEXO 9. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 7.....	150
ANEXO 10. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 2.....	168
ANEXO 11. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 5 (NUMERAL 1)	171
ANEXO 12. PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES: TAREA 5 (NUMERAL 2)	176
ANEXO 13. ANÁLISIS DE LAS TAREA 2 Y 5	181

Índice de Ilustraciones

ILUSTRACIÓN 1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DOS ISOMETRÍAS EQUIVALENTES.....	13
ILUSTRACIÓN 2. REPRESENTACIÓN DEL SENTIDO DEL VECTOR $\overrightarrow{PP'}$	13
ILUSTRACIÓN 3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL VECTOR DE TRASLACIÓN $\overrightarrow{PP'}$	14
ILUSTRACIÓN 4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE $T_a(P)$	14
ILUSTRACIÓN 5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA “TODA TRASLACIÓN ES UNA ISOMETRÍA”	16
ILUSTRACIÓN 6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE $S_e(P) = P'$	17
ILUSTRACIÓN 7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 1	18
ILUSTRACIÓN 8. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 2	18
ILUSTRACIÓN 9. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 3	18
ILUSTRACIÓN 10. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE $G(C, \angle\alpha)(P) = P'$	22
ILUSTRACIÓN 11. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE $G(C, -\angle\alpha)(P) = P'$	22
ILUSTRACIÓN 12. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA “TODA ROTACIÓN ES UNA ISOMETRÍA”	24
ILUSTRACIÓN 13. TESELA UNICORNIOS, AUTOR M. C. ESCHER	29
ILUSTRACIÓN 14. REPRESENTACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS QUE TESELAN EL PLANO CON UN UNICORNIO.....	29
ILUSTRACIÓN 15. TESELA MARIPOSAS, AUTOR M. C. ESCHER.....	30
ILUSTRACIÓN 16. REPRESENTACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS QUE TESELAN EL PLANO CON UNA MARIPOSA	30
ILUSTRACIÓN 17. TESELA PECES, AUTOR M. C. ESCHER	31
ILUSTRACIÓN 18. REPRESENTACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS QUE TESELAN EL PLANO CON UN PEZ	31
ILUSTRACIÓN 19. TESELADO USADO PARA LA TAREA 1	40
ILUSTRACIÓN 20. PLANTILLA DEL UNICORNIO USADA PARA LA TAREA 1.....	40
ILUSTRACIÓN 21. TESELADO USADO PARA LA TAREA 2	42
ILUSTRACIÓN 22. ESPEJO USADO PARA LA TAREA 2	42
ILUSTRACIÓN 23. TESELADO USADO PARA LA TAREA 3	43
ILUSTRACIÓN 24. PLANTILLA DE LAS ALAS DE LA MARIPOSA USADA PARA LA TAREA 3	43

ILUSTRACIÓN 25. PLANTILLA DE LA MITAD DE UN PESCADO USADA PARA TESELAR EL PLANO.....	53
ILUSTRACIÓN 26. EJEMPLO DE LA TESELACIÓN DEL PLANO	55
ILUSTRACIÓN 27. REPRESENTACIÓN DE LOS VECTORES DE TRASLACIÓN POR P10.....	69
ILUSTRACIÓN 28. CONSTRUCCIÓN DE P9	70
ILUSTRACIÓN 29. CONSTRUCCIÓN DE P14	70
ILUSTRACIÓN 30. CONSTRUCCIÓN DE P10	71
ILUSTRACIÓN 31. CONSTRUCCIÓN DE P11	71
ILUSTRACIÓN 32. CONSTRUCCIÓN DE P17	71
ILUSTRACIÓN 33. REPRESENTACIÓN DEL CENTRO DE GIRO (VÉRTICE) DE P13	75
ILUSTRACIÓN 34. VISUALIZACIÓN DE LOS EJES DEL PLANO CARTESIANO EN LA TESELA.....	75
ILUSTRACIÓN 35. PROPUESTA DE NUEVAS POSICIONES POR LOS ESTUDIANTES	78
ILUSTRACIÓN 36. REPRESENTACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DESCRITOS POR P17.....	78
ILUSTRACIÓN 37. REPRESENTACIÓN DE LAS DOS ROTACIONES QUE PERMITEN PASAR DE LA POSICIÓN 1 A LA 2.....	822
ILUSTRACIÓN 38. MARCA DEL CENTRO DE GIRO HECHA POR ALGUNOS ESTUDIANTES	83
ILUSTRACIÓN 39. REPRESENTACIÓN DEL CENTRO DE GIRO DE P15.....	84
ILUSTRACIÓN 40. CONSTRUCCIÓN DE LOS LADOS DEL \angle AGA POR P8.....	89
ILUSTRACIÓN 41. IMAGEN PROTOTÍPICA DE LA REPRESENTACIÓN DEL CUADRADO Y DEL ROMBO	94
ILUSTRACIÓN 42. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LO QUE INFERIMOS DEL DISCURSO DE P14 CON LA PALABRA “SENTIDO”	95
ILUSTRACIÓN 43. SEÑALIZACIÓN DEL SENTIDO DEL ÁNGULO DE ROTACIÓN DE P3	98
ILUSTRACIÓN 44. USO DE LA FLECHA PARA INDICAR EL SENTIDO DEL ÁNGULO DE GIRO POR P1	98
ILUSTRACIÓN 45. CONSTRUCCIÓN DE LAS MEDIATRICES PARA HALLAR EL CENTRO DE GIRO POR P8	99
ILUSTRACIÓN 46. CONSTRUCCIÓN DE LAS MEDIATRICES PARA HALLAR EL CENTRO DE GIRO POR P6	99
ILUSTRACIÓN 47. REPRESENTACIÓN DEL CENTRO DE GIRO POR P9.....	100
ILUSTRACIÓN 48. REPRESENTACIÓN DE LAS MEDIATRICES Y EL ÁNGULO DE ROTACIÓN POR P7	100
ILUSTRACIÓN 49. TESELA ARTÍSTICA CONSTRUIDA POR P10	104
ILUSTRACIÓN 50. TESELA ARTÍSTICA CONSTRUIDA POR P13	106
ILUSTRACIÓN 51. TESELA ARTÍSTICA CONSTRUIDA POR P8	106

ILUSTRACIÓN 52. PROPUESTA DE MEJORA DEL NUMERAL 1 DE LA TAREA 5.....	120
ILUSTRACIÓN 53. DIFICULTAD EN EL MANEJO DEL TRANSPORTADOR	122
ILUSTRACIÓN 54. DIFICULTAD EN EL MANEJO DEL COMPÁS	122
ILUSTRACIÓN 55. REGIÓN INDICADA POR EL TÉRMINO NORESTE Y LAS RECTAS CONTENIDAS EN ESTA	124
ILUSTRACIÓN 56. RECTA m SOBRE LA QUE SE TRASLADA EL OBJETO	124

Índice de Tablas

TABLA 1. DEMOSTRACIÓN DE “TODA TRASLACIÓN ES UNA ISOMETRÍA”	15
TABLA 2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA “DADA UNA SIMETRÍA AXIAL S_E SE TIENE QUE $S_E(P) = P'$ SI Y SÓLO SI EL EJE DE SIMETRÍA E ES LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO $\overline{PP'}$ ”	17
TABLA 3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 1.....	18
TABLA 4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 2.....	19
TABLA 5. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA “TODA SIMETRÍA AXIAL ES UNA ISOMETRÍA” CASO 3.....	20
TABLA 6. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA “TODA ROTACIÓN ES UNA ISOMETRÍA”	23
TABLA 7. DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE RELACIONADOS CON LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO	34
TABLA 8. TÉRMINOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA TRASLACIÓN	60
TABLA 9. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA TRASLACIÓN	62
TABLA 10. TÉRMINOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN AL VECTOR DE TRASLACIÓN	66
TABLA 11. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN AL VECTOR DE TRASLACIÓN	67
TABLA 12. TÉRMINOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA ROTACIÓN.....	73
TABLA 13. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA ROTACIÓN	76
TABLA 14. USO DEL TÉRMINO “DESPLAZAMIENTO” DE P8.....	79
TABLA 15. TÉRMINOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA ROTACIÓN.....	86
TABLA 16. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES QUE ALUDEN A LA ROTACIÓN.....	90
TABLA 17. DISCURSOS DE P5 Y P15	93
TABLA 18. NARRATIVAS EXPRESADAS POR P10, P12 Y P14	95
TABLA 19. DESCRIPCIÓN DE LAS ISOMETRÍAS POR P10.....	103
TABLA 20. DESCRIPCIÓN DE DOS TRASLACIONES POR P11	104
TABLA 21. DESCRIPCIÓN DE LAS ISOMETRÍAS POR P4.....	105
TABLA 22. TÉRMINOS USADOS POR LOS ESTUDIANTES PARA REFERIRSE A LA TRASLACIÓN (TAREAS 1, 4 Y 7)	107
TABLA 23. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES PARA REFERIRSE A LA TRASLACIÓN (TAREAS 1, 4 Y 5)	109

TABLA 24. TÉRMINOS USADOS POR LOS ESTUDIANTES PARA REFERIRSE A LA ROTACIÓN (TAREAS 3, 6 Y 7)	111
TABLA 25. FRASES CONSTRUIDAS POR LOS ESTUDIANTES PARA REFERIRSE A LA ROTACIÓN (TAREAS 3, 6 Y 7)	112

Introducción

En este documento de trabajo de grado, reportamos un ejercicio investigativo ligado a nuestra práctica educativa (en adelante Práctica en Aula) que hace parte esencial de nuestra formación como profesoras de matemáticas de básica secundaria y media. El ejercicio tuvo el propósito de ahondar, a la luz de la teoría comunicacional de Sfard, en algunos aprendizajes de estudiantes de undécimo grado del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED), sobre las isometrías del plano, logrados al trabajar una unidad de enseñanza en la que promovimos un trabajo sobre traslación, rotación y simetría axial, en el plano, usando teselas artísticas.

Más allá de revisar el cumplimiento de las tareas y verificar algunos desempeños generales logrados por ellos en relación con el tema, que es lo que alcanzamos a hacer durante nuestra Práctica en Aula, nos interesamos por reflexionar sobre sus aprendizajes, desde el punto de vista discursivo, haciendo un rastreo cuidadoso a las representaciones gráficas y verbalizaciones que registraron en las producciones que entregaron. También nos interesamos por reflexionar acerca de la pertinencia de las tareas que propusimos, tiempo después de su implementación, en busca de optimizarlas en futuras implementaciones.

El trabajo está organizado en seis capítulos. A continuación, hacemos una descripción sintética de estos.

En el Capítulo 1, presentamos las razones que nos llevaron a hacer esta investigación, los objetivos que nos propusimos y los referentes teóricos que tuvimos en cuenta.

En el Capítulo 2, exponemos el marco de referencia dividido en: matemático, didáctico y curricular. Exponemos nuestro acercamiento a las isometrías del plano, describimos en qué nos apoyamos para analizar los aprendizajes de los estudiantes y presentamos referentes oficiales que

enmarcan el estudio de las isometrías del plano en la educación básica primaria, básica secundaria y media.

En el Capítulo 3, describimos aspectos de la Práctica en Aula que sirvió de escenario para el desarrollo de nuestro trabajo de grado. También presentamos el conjunto de tareas que usamos en la unidad de enseñanza y que fueron la fuente de producciones de los estudiantes, las cuales usamos en el análisis.

En el Capítulo 4, explicamos la estrategia investigativa que usamos para analizar el aprendizaje. Describimos los criterios que usamos para escoger a las parejas de estudiantes de las que analizamos sus producciones, explicamos los anexos que construimos y que hacen parte de este trabajo de grado e ilustramos las convenciones que adoptamos para referirnos a cada pareja, resaltar los términos y las frases que analizamos.

En el Capítulo 5, presentamos el análisis de las producciones de los estudiantes, a la luz del enfoque comunicacional de Sfard. Inferimos los rasgos discursivos característicos de las representaciones gráficas y verbalizaciones de los estudiantes e identificamos algunos de sus avances discursivos.

En el Capítulo 6, realizamos una discusión que sintetiza el análisis. Nos referimos a los aprendizajes de los estudiantes, la pertinencia del conjunto de tareas y las reflexiones que nos suscitó este ejercicio investigativo ligado a nuestra Práctica en Aula.

Capítulo 1

Contextualización

En este capítulo describimos la contextualización del estudio que realizamos. Para ello, dividimos el capítulo en tres partes. En la primera, justificamos la importancia del estudio; en la segunda, presentamos los objetivos que nos planteamos; en la tercera, exponemos la revisión de la literatura que enmarca el trabajo.

1.1 Justificación del Estudio

Organizamos la justificación en cuatro secciones: primero, nos referimos a la relación entre los espacios de Práctica en Aula y Trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; segundo, mencionamos la importancia del desarrollo del pensamiento espacial, aprovechando el contexto del arte; tercero, aludimos a la relevancia de aprender acerca de las isometrías del plano; cuarto, abordamos el por qué nos enfocamos en analizar el aprendizaje y cómo lo hacemos.

1.1.1 Relación entre la Práctica en Aula y el Trabajo de Grado

Nuestro trabajo de grado está asociado a la práctica educativa de inmersión total “Practica en Aula” que desarrollamos en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED) en el grado undécimo, durante el segundo semestre de 2023. El profesor-tutor a cargo de este grado nos dio la posibilidad de abordar el estudio de objetos matemáticos geométricos. Esto dado que durante el año escolar no se había procurado desarrollar el pensamiento espacial; además, los estudiantes tenían deficiencias en sus conocimientos de geometría, que venían de años atrás.

Teniendo en cuenta lo anterior y que en la práctica debíamos diseñar e implementar un conjunto de tareas, decidimos hacerla promoviendo el aprendizaje de las isometrías del plano, mediante las teselaciones artísticas. En el marco de este ejercicio académico surgió nuestra motivación por hacer el trabajo de grado ligado a la práctica, mediante el cual pudiéramos hacer un estudio detallado del aprendizaje de los estudiantes.

1.1.2 Importancia del Desarrollo del Pensamiento Espacial Aprovechando el Contexto del Arte

Decidimos enfocar nuestra Práctica en Aula y el desarrollo del trabajo de grado en geometría, por considerar que es un área de las matemáticas fundamental en la educación de niños y jóvenes. Según Gardner, (citado en MEN, 1998), el pensamiento espacial es importante para el desarrollo en cualquier profesión u oficio. Este autor considera que las disciplinas y profesiones científicas y técnicas requieren personas que tengan alto desarrollo de la inteligencia espacial para la resolución de problemas de ubicación, orientación y distribución espacial.

Pese a su importancia, Uribe et al. (2014) afirman que, en países como Colombia, el pensamiento espacial se ha dejado de lado en los procesos de enseñanza. Esto lo evidenciamos, por ejemplo, al revisar los cuadernillos que diseñó, en 2023, el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED) y que aplicó en el marco de las Olimpiadas Matemáticas Institucionales. En estos, identificamos que hay pocas preguntas de geometría y estas se enfocan en el cálculo de áreas y perímetros de polígonos, no exactamente en asuntos relativos a formas geométricas, orientación espacial o al estudio de las isometrías del plano.

Un contexto interesante para trabajar geometría es el arte. Particularmente, el uso de la geometría puede observarse en los distintos movimientos artísticos. A modo de ejemplo, podemos resaltar las obras artísticas de Maurits Cornelis Escher. Las obras de Escher ayudan a comprender algunos aspectos de la geometría hiperbólica, la geometría esférica y la geometría

euclídea. En esta última, cobran importancia los teselados (Corrales, 2005), que consisten en recubrimientos del plano que no dejan huecos ni hay solapamiento de figuras.

Los teselados son un contexto ideal para trabajar en geometría a nivel escolar. Según Mejía (2008), las teselaciones posibilitan contextos de aprendizaje llamativos, permitiendo conocer obras de artistas que a su vez motivan a los estudiantes a aprender geometría y hacer sus propias creaciones.

1.1.3 Relevancia de Aprender Acerca de las Isometrías del Plano

Tomamos como objeto de estudio las isometrías del plano ya que es un tema incluido en el currículo de matemáticas que se trabaja poco en las escuelas y que es de suma importancia. El conocimiento de las isometrías permite un acercamiento de las matemáticas a contextos que están al alcance de los estudiantes de secundaria. Las isometrías destacan por su presencia en el ámbito natural (animales y plantas), artístico (pinturas y esculturas), arquitectónico (edificaciones y construcciones) y cultural (danza y artesanías), como lo mencionan Khier y Marques (2019).

El aprendizaje de las isometrías permite a los estudiantes ampliar sus conocimientos geométricos que según Uribe et al. (2014) “se limitan casi siempre a memorizar algunas clasificaciones de elementos de la geometría euclidiana [...] e interpretar ciertos conceptos relacionados con polígonos [...] y sólidos [...]” (p. 136).

Adicionalmente, notamos que en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) se indica que este tema se debe trabajar con los estudiantes, para contribuir a desarrollar competencias matemáticas. Según lo que nos indicó el profesor-tutor esto no se ha hecho en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED). Por ejemplo, uno de los estándares del

pensamiento espacial y sistemas geométricos dice “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) [...] sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.” (MEN, 2006, p. 84). Agregado a lo anterior, al realizar una revisión de las cartillas de la prueba Saber 11 del año 2022, encontramos preguntas que involucran este objeto matemático.

1.1.4 Por Qué Nos Enfocamos en el Aprendizaje y Cómo lo Hacemos

En nuestra Práctica en Aula nos enfocamos en diseñar y gestionar un conjunto de tareas en las que los estudiantes puedan estudiar las isometrías del plano en el contexto de las teselas artísticas, pudiendo recopilar información que nos permite realizar un análisis detallado del aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, en el marco de la práctica no tuvimos oportunidad de detenernos a realizar un rastreo detallado al respecto. Analizar el aprendizaje de los estudiantes nos permite reconocer la evolución discursiva de ellos, evaluar si las tareas que sugerimos son pertinentes y promover nuestra reflexión docente respecto a la gestión de la comunicación en el aula.

Por lo anterior, en el trabajo de grado tomamos la información obtenida en algunas de las clases gestionadas durante la práctica para detenernos a mirar, de manera sistemática, qué aprendieron los estudiantes. Tomamos como referencia para el análisis, lo mencionado por el MEN (1998): “la enseñanza debe proporcionar oportunidades para dar sentido a las matemáticas a través del discurso” (citado en Perry et al., 2021, p. 88). En ese sentido, pretendemos estudiar el aprendizaje según el enfoque comunicacional de Sfard (citado en Perry et al., 2021) el cual consiste en mirar cómo evoluciona el discurso de los estudiantes, teniendo en cuenta los rasgos externos del discurso matemático: vocabulario, mediadores visuales, narrativas y rutinas.

Por lo expuesto previamente, nuestro trabajo se centra en analizar el aprendizaje de algunos aspectos de las isometrías del plano de estudiantes de grado undécimo del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED), examinando sus producciones en algunas de las tareas que implementamos en nuestra Práctica en Aula, a la luz de los planteamientos de Anna Sfard.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Analizar el aprendizaje sobre las isometrías del plano, resultado de tareas en las que se aprovecha el contexto de teselas artísticas, de los estudiantes del grado undécimo del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED) a la luz del enfoque comunicacional de Sfard.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Ilustrar el uso del enfoque comunicacional de Sfard para identificar evidencias de aprendizaje de estudiantes de educación media sobre las isometrías del plano.
- Evaluar la pertinencia de un conjunto de tareas para el aprendizaje de las isometrías del plano usando el contexto de teselas artísticas.
- Reflexionar sobre el aprendizaje de las isometrías del plano y aspectos a tener en cuenta en nuestra gestión como profesoras de matemáticas.

1.3 Revisión de la Literatura

A continuación, presentamos la revisión de la literatura que tomamos como base para fundamentar la planeación de las tareas y nuestro trabajo de grado. Decidimos dividir esta sección en dos partes. En la primera, describimos tres documentos consultados, en los que se emplean las teselas como contexto de enseñanza de las isometrías del plano. En la segunda, nos

referimos a tres documentos leídos, en los que se emplea el enfoque discursivo para analizar el aprendizaje de los estudiantes.

1.3.1 Trabajos Investigativos que Emplean el Contexto Artístico para Enseñar Isometrías del Plano

Un primer documento que nos inspiró para proponer las tareas en un contexto artístico fue el de Domínguez et al. (2016). Estos investigadores propusieron un taller para estudiantes de secundaria en el que articulaban las teselaciones y las isometrías del plano. Producto de este trabajo, los investigadores señalan que esta articulación permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento espacial y la creatividad.

En el taller propuesto, los investigadores pedían a los estudiantes aplicar isometrías del plano a regiones de un polígono para construir un motivo¹ que permitiera teselar el plano. En nuestro caso, lo que pretendimos es que los estudiantes aplicaran las isometrías del plano a una unidad patrón para teselar el plano. Este documento nos permite reconocer que el contexto de las teselaciones fomenta el interés de los estudiantes, y que, aunque en este no se usan las teselaciones para estudiar las isometrías del plano de manera rigurosa, los estudiantes reconocen algunos invariantes de cada isometría.

Mencionamos ahora un segundo documento, propuesto por Mejía (2008), que también nos inspiró para el diseño las tareas. Esta investigadora propone el uso de las teselaciones de Escher como recurso didáctico para estudiar los movimientos rígidos en el plano. Ella afirma que las formas, los detalles y los colores en las teselas de Escher, generan motivación en los estudiantes y promueven la creatividad.

¹ Según Boule (2005) “un motivo es una superficie mínima que permite constituir el teselado” (p. 120).

Además de la creación de teselaciones en cartulina, Mejía propone un trabajo que consiste en elaborar una tesela con polígonos cóncavos en el software Cabri Géomètre II Plus, el cual permite hacer rotaciones y aplicar simetría axial. Nosotras al igual que Mejía, propusimos el uso de las teselaciones de Escher con la intención de motivar a los estudiantes y como recurso didáctico para estudiar la simetría axial, la rotación y la traslación como isometrías del plano.

Un tercer documento que nos inspiró para la construcción de las tareas que propusimos en nuestra práctica fue el de Morales y Rubio (2020). En este documento los investigadores realizan una experiencia en aula dirigida a docentes. El objetivo de los investigadores era que los docentes construyeran teselados regulares y semirregulares a partir de un motivo, aplicando a este las herramientas de transformaciones isométricas del programa GeoGebra.

Nosotras, a diferencia de estos, no usamos el programa de GeoGebra, debido a que, infortunadamente, en el colegio donde realizamos nuestra práctica no se cuenta con los recursos tecnológicos para garantizar que los estudiantes tengan acceso a un dispositivo electrónico con GeoGebra. Por lo anterior, decidimos emular el ambiente de GeoGebra para hacer un acercamiento estático a la simetría axial y dinámico a la traslación y a la rotación. Decidimos que en una de las tareas se pidiera a los estudiantes teselar el plano a partir de un motivo, aplicando a este las isometrías del plano, haciendo uso de instrumentos de medición (regla, escuadra, transportador) y de trazo (compás).

1.3.2 Trabajos Investigativos que se Valen de la Propuesta de Sfard para Examinar el

Aprendizaje

Un primer documento que nos ayudó a enmarcar con qué enfoque queríamos analizar el aprendizaje de los estudiantes fue el de Roperó (2021). En esta tesis, la investigadora realiza un

análisis del discurso oral de unos estudiantes de secundaria cuando intentan definir un objeto geométrico tridimensional. Para ello, se basa en el enfoque comunicacional de Sfard.

Para analizar el discurso de nuestros estudiantes, nosotras también optamos por el enfoque comunicacional de Sfard. Sin embargo, a diferencia de Ropero, realizamos el análisis de los discursos escritos de los estudiantes. Ninguno de estos discursos corresponde a la transcripción de audio de lo que dijeron debido a que no contábamos con la infraestructura necesaria para grabar las intervenciones en las sesiones de clase. Adicionalmente, a diferencia de Ropero, no nos enfocamos en examinar si en los discursos de los estudiantes hay respuestas correctas o incorrectas, sino en cómo los estudiantes modifican su discurso a lo largo de la intervención.

Un segundo documento que nos inspiró fue el documento de Camargo y Perry (2020). En este artículo las investigadoras presentan el análisis realizado a los discursos de tres estudiantes en una sesión de clase de geometría en la que se promovió un espacio de diálogo, en relación al concepto de intersección. En este análisis, ellas se apoyan del enfoque comunicacional de Sfard para identificar los rasgos discursivos de los estudiantes.

Nosotras, a diferencia de las investigadoras, centramos nuestra atención en analizar las producciones escritas de los estudiantes por medio de los rasgos discursivos de Sfard, para ver su posible evolución. Sin embargo, no nos enfocamos en identificar si los discursos de los estudiantes promueven o aportan a la construcción colectiva de significado.

Un tercer documento que influyó para que decidiéramos realizar los análisis discursivos de los estudiantes mediante el enfoque comunicacional de Sfard fue el de Perry et al. (2021). En este artículo los investigadores analizan producciones verbales de estudiantes de educación

básica secundaria, en relación con la semejanza de triángulos. Hicieron esto con el objetivo de contrastar una hipótesis que sostiene que rara vez los discursos de los estudiantes en clases de matemáticas son útiles para avanzar en el desarrollo del tema.

Nosotras, al igual que los investigadores, escogimos algunas parejas de estudiantes en cada uno de los cursos de undécimo grado; esto con el propósito de acotar las producciones escritas a analizar, que, en nuestro caso, aludieran a los invariantes de cada isometría del plano y fueran representativas del discurso de la mayoría. A diferencia de los investigadores, decidimos organizar la información en tablas para facilitar el análisis, de gran cantidad de expresiones.

Capítulo 2

Marco de Referencia

En este capítulo presentamos los fundamentos conceptuales del trabajo de grado. Estos los dividimos en tres apartados. El primero, corresponde al marco matemático, en el que exponemos nuestro acercamiento a las isometrías del plano; el segundo corresponde al marco didáctico, en el que exponemos en qué nos apoyamos para analizar los aprendizajes de los estudiantes y; el tercero corresponde al marco curricular, en el que presentamos los referentes oficiales que enmarcan el estudio de las isometrías del plano en la educación básica primaria, básica secundaria y media.

2.1 Marco Matemático

En este apartado presentamos algunas definiciones y teoremas sobre las isometrías del plano, cuyos enunciados fueron tomados principalmente del libro de Jaime y Gutiérrez (1996). Para la demostración de los teoremas aplicamos el método aprendido en los cursos de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Este método consiste en hacer afirmaciones y justificarlas haciendo uso de razones (postulados, definiciones y teoremas) que se encuentran en los sistemas teóricos consolidados durante los cursos de geometría (Anexo 1).

2.1.1 Generalidades de las Transformaciones del Plano

Para empezar, nosotras tomamos la definición de transformación del plano que mencionan Jaime y Gutiérrez (1996): Una transformación se denomina una aplicación biyectiva del plano en sí mismo. En otras palabras, una transformación relaciona a cada punto del plano con un único punto de este y cada punto del plano es imagen solo de un punto. Son

transformaciones del plano, las homotecias, las inversiones, las traslaciones, las rotaciones y las simetrías; las últimas tres son isometrías del plano. Isometría viene del griego *ισομετρία*, el prefijo *iso* (*ισο*) significa igual y *metría* (*μετρία*) simboliza medida o medición. Las isometrías del plano son transformaciones del plano que conservan las magnitudes de ángulos, longitudes y superficies de figuras que pertenecen al plano.

En cuanto a isometría Jaime y Gutiérrez (1996) mencionan que: una isometría del plano es una transformación del plano " $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$ " (p. 22).

Esto hace referencia a que si tenemos dos puntos P y Q en el plano, al aplicar una transformación $f(P) = P'$ y $f(Q) = Q'$, esta es una isometría si se cumple que la distancia de P a Q es igual a la distancia de $f(P)$ a $f(Q)$.

Así mismo, dos isometrías son equivalentes si a cada punto P del plano le corresponde el mismo punto P' por ambas isometrías (Ilustración 1) y su definición es la siguiente: Dos isometrías f y g son equivalentes cuando " $f(P) = g(P) \forall P \in \mathbb{R}^2$ " (p. 22).

Ilustración 1

Representación gráfica de dos isometrías equivalentes

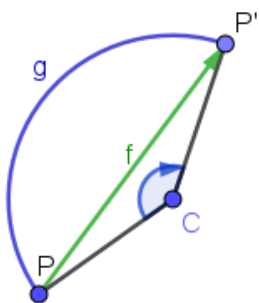
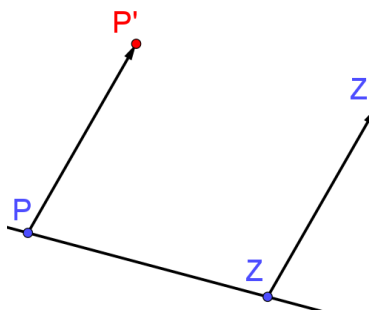


Ilustración 2

Representación del sentido del vector $\overrightarrow{PP'}$



2.1.2 Traslación

Antes de abordar el concepto de traslación, establecemos qué es un vector de traslación, tomando como referencia a Grossman y Stanley (2008): $\vec{a} = \overrightarrow{PP'}$, es un segmento de recta orientado, en el que P es el punto inicial y P' el punto final.

Decimos que el vector tiene tres componentes: la magnitud que es la distancia entre P y P' ; la dirección que es la medida del ángulo determinado por la recta que contiene al vector y la recta de referencia, generalmente horizontal; el sentido (Ilustración 2), el cual según Molina (comunicación personal), se puede definir así: Dado un vector $\overrightarrow{ZZ'}$ tal que $\overrightarrow{ZZ'} \parallel \overrightarrow{PP'}$, el sentido del vector $\overrightarrow{PP'}$ se determina por $S_{\overrightarrow{ZP}, Z'}$ ² dado que $P' \in S_{\overrightarrow{ZP}, Z'}$.

En la Ilustración 3 presentamos una representación gráfica del vector de traslación \vec{a} y dirección α .

Ilustración 3

Representación gráfica del vector de traslación $\overrightarrow{PP'}$

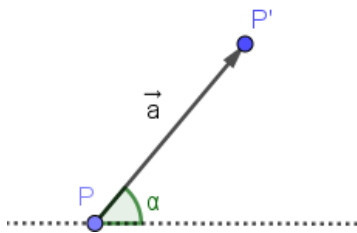
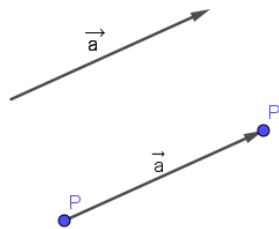


Ilustración 4

Representación gráfica de $T_a(P)$



Una traslación de un punto se determina mediante un vector \vec{a} que nos indica la magnitud, el sentido y la dirección en la que se encuentra la imagen del punto. El vector $\overrightarrow{PP'}$ tiene los mismos valores de los componentes del vector \vec{a} . Teniendo en cuenta lo anteriormente

² Esta notación se lee como “el semiplano determinado por \overrightarrow{ZP} , al que pertenece Z' ”.

mencionado, definimos traslación como: dado un vector libre \vec{a} , llamamos traslación de vector \vec{a} a la transformación “ $T_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_a(P) = P'$ si y sólo si $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}, \forall P \in \mathbb{R}^2$ ” (p. 23).

En la Ilustración 4, mostramos una representación de la traslación del punto P mediante el vector \vec{a} , entonces P' es la imagen por traslación de P .

A continuación, como mencionamos al inicio de este apartado, presentamos y demostramos algunos teoremas relacionados con la traslación. Uno de los teoremas dice: Toda traslación es una isometría.

En la Tabla 1 se encuentra la demostración realizada por nosotras y en la Ilustración 5 presentamos un apoyo visual de la demostración.

Tabla 1

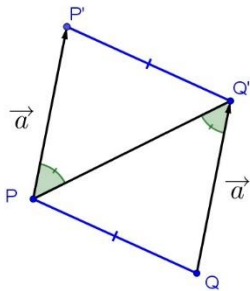
Demostración de “toda traslación es una isometría”

Afirmación	Razón
1. Sea T_a una traslación y $P \neq Q$	Dato
2. $T_a(P) = P'$ y $T_a(Q) = Q'$	Definición de Traslación (1)
3. $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$ $\overrightarrow{QQ'} = \vec{a}$	Definición de Traslación (1)
4. $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$	Propiedad Transitiva (3)
5. Sean $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (4)
6. $\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$	Característica del Vector Libre (3, 5)
7. $\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (6)
8. Sean \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (1)
9. $PP'Q'Q$ es un cuadrilátero	Definición de Cuadrilátero (6, 8)
10. Sea $\overline{PQ'}$ tal que $\overline{PQ'}$ es diagonal del cuadrilátero $PP'Q'Q$	Definición de Diagonal del cuadrilátero (9)
11. $\overline{PQ'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (10)
12. $\{P\} = \overline{PP'} \cap \overline{PQ'}$ $\{Q'\} = \overline{QQ'} \cap \overline{PQ'}$	Teorema Intersección de rectas (7, 11)
13. $\overline{PQ'}$ es secante de $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$	Definición Secante (7, 11, 12)

14. $\angle P'PQ'$ y $\angle PQ'Q$ son alternos internos	Definición de Ángulos alternos internos (7, 9, 13)
15. $\angle P'PQ' \cong \angle PQ'Q$	Teorema PAI (7, 13, 14)
16. $\overline{PQ'} \cong \overline{P'Q}$	Propiedad Reflexiva
17. $\overline{PP'} \cong \overline{QQ'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (4)
18. Sean $\triangle PP'Q'$ y $\triangle Q'QP$	Definición de Triángulo (1, 2)
19. $\triangle PP'Q' \cong \triangle Q'QP$	Postulado LAL (15, 16, 17)
20. $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$	Definición de Triángulos Congruentes (19)
21. $d(P, Q) = d(P', Q')$	Definición de Congruencia (20)
22. T_a es una isometría	Definición de Isometría ³ (1, 21)

Ilustración 5

Representación gráfica del teorema “*toda traslación es una isometría*”



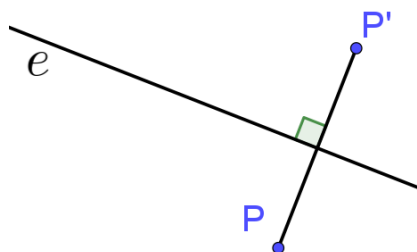
2.1.3 Simetría axial

Definimos simetría axial (Ilustración 6) como: Dada una recta e , llamamos simetría axial de eje e a la transformación “ $S_e(P) = P'$ si y sólo si $\overline{PP'} \perp e$ y $d(e, P) = d(e, P') \forall P \in \mathbb{R}^2$ ” (p. 27).

³ Una isometría del plano es una transformación del plano “ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$ ”.

Ilustración 6

Representación gráfica de $S_e(P) = P'$



En la definición se puede observar que el eje de simetría es una recta e , que pasa por el punto medio de $\overline{PP'}$ y es perpendicular a este, por lo que se puede afirmar que la recta e es la mediatriz de $\overline{PP'}$ y da lugar al siguiente teorema que demostramos en la Tabla 2: dada una simetría axial S_e se tiene que $S_e(P) = P'$ si y sólo si el eje de simetría e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Tabla 2

Demostración del teorema “dada una simetría axial S_e se tiene que $S_e(P) = P'$ si y sólo si el eje de simetría e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ ”

Afirmación	Razón
1. Sea $S_e(P) = P'$	Dato
2. $\overline{PP'} \perp e$ y $d(e, P) = d(e, P')$	Definición de Simetría Axial (1)
3. e es mediatriz del $\overline{PP'}$	Definición de Mediatriz (2)

En las Tablas 3, 4 y 5 se encuentra la demostración del siguiente teorema: toda simetría axial es una isometría.

Para la demostración de este teorema debemos contemplar tres casos: que el punto P o el punto Q pertenezcan al eje de simetría (Tabla 3 e Ilustración 7); que los puntos P y Q estén en el

mismo semiplano H determinado por el eje de simetría (Tabla 4 e Ilustración 8); que los puntos P y Q estén en distintos semiplanos determinados por el eje de simetría (Tabla 5 e Ilustración 9).

Ilustración 7

Representación gráfica del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 1

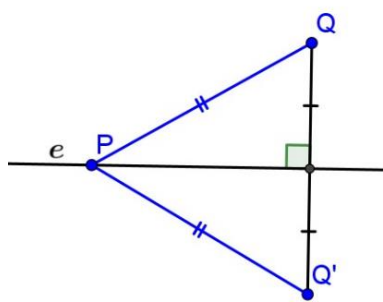


Ilustración 8

Representación gráfica del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 2

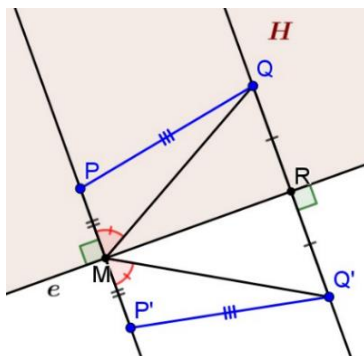


Ilustración 9

Representación gráfica del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 3

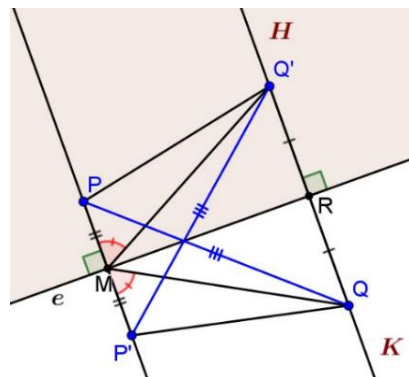


Tabla 3

Demostración del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 1

Afirmación	Razón
1. Sea S_e una simetría axial, $P \neq Q$	Dato
2. Caso 1: $P \in e$ o $Q \in e$ Caso 2: P y $Q \in H$; (H semiplano determinado por la recta e) Caso 3: $P \in H$ y $Q \in K$; (H y K semiplanos determinados por la recta e)	Hipótesis
3. $P \in e$ o $Q \in e$	Caso 1 (3)

4. $S_e(P) = P$ $S_e(Q) = Q'$	Teorema (i) ⁴ (4)
5. $e \perp \overline{QQ'}$ y $d(Q, e) = d(e, Q')$	Definición de Simetría axial (5)
6. e es mediatriz $\overline{QQ'}$	Teorema ⁵
7. $d(P, Q) = d(P, Q')$	Definición de Mediatriz (4, 6)
8. S_e es una isometría	Definición de Isometría (1, 4, 5, 8)

Tabla 4

Demostración del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 2

Afirmación	Razón
10. P y $Q \in H$ (H semiplano determinado por la recta e)	Caso 2 (2)
11. $S_e(P) = P'$ $S_e(Q) = Q'$	Definición de Simetría axial (1, 10)
12. $e \perp \overline{PP'}$ y $d(P, e) = d(e, P')$ $e \perp \overline{QQ'}$ y $d(Q, e) = d(e, Q')$	Definición de Simetría axial (11)
13. $e \perp \overline{PP'}$; $e \perp \overline{QQ'}$	Teorema Recta - rayo - segmento (12)
14. Sea M tal que $\{M\} = e \cap \overline{PP'}$ Sea R tal que $\{R\} = e \cap \overline{QQ'}$	Definición de Perpendicularidad y Teorema de intersección de rectas (13)
15. $M \in e$ y $M \in \overline{PP'}$ $R \in e$ y $R \in \overline{QQ'}$	Definición de Intersección (13)
16. $d(M, Q) = d(M, Q')$ $d(R, Q) = d(R, Q')$	Definición de Mediatriz (15)
17. Sea $\triangle QRM$ Sea $\triangle Q'RM$	Definición de triángulo (1, 11, 15)
18. $\overline{MQ} \cong \overline{MQ'}$ $\overline{RQ} \cong \overline{RQ'}$	Definición de Congruencia (16)
19. $\overline{RM} \cong \overline{MR}$	Propiedad Reflexiva

⁴ Dada una simetría S_e , tiene que: i. Los puntos invariantes son los que pertenecen al eje de simetría: $S_e(P) = P$ si y sólo si $P \in e$. ii. La única recta invariante puntual es el eje de simetría. iii. Las rectas invariantes globales son las perpendiculares al eje de simetría: Dada $R \neq e$, $S_e(R) = R$ si y sólo si $R \perp e$. (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 28).

⁵ “Dada una simetría axial S_e se tiene que $S_e(P) = P'$ si y sólo si el eje de simetría e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ ”.

20. $\triangle QRM \cong \triangle Q'RM$	Teorema LLL (18, 19)
21. $\angle MQR \cong \angle MQ'R$	Definición de Triángulos congruentes (20)
22. e es mediatriz $\overline{PP'}$	Teorema ⁶ (12)
23. $d(P, M) = d(P', M)$	Definición de Mediatriz (22)
24. $\overline{PM} \cong \overline{P'M}$	Definición de Congruencia (23)
25. $\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$	Teorema Perpendicularidad - paralelismo (13)
26. $\overline{MQ}, \overline{MQ'}$ y \overline{MR}	Teorema Recta - rayo - segmento (18, 19)
27. $\overline{PP'} \cap \overline{MQ} = \{M\}$ $\overline{QQ'} \cap \overline{MQ} = \{Q\}$ $\overline{PP'} \cap \overline{MQ'} = \{M\}$ $\overline{QQ'} \cap \overline{MQ'} = \{Q'\}$	Definición de Intersección (15, 26)
28. \overline{MQ} es secante a $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ $\overline{MQ'}$ es secante a $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$	Definición de Secante (25, 26, 27)
29. $\angle MQR$ y $\angle QMP$ son alternos internos $\angle MQ'R$ y $\angle Q'MP'$ son alternos internos	Definición de Ángulos alternos internos (25, 27, 28)
30. $\angle MQR \cong \angle QMP$ $\angle MQ'R \cong \angle Q'MP'$	Teorema PAI (28, 29)
31. $\angle QMP \cong \angle Q'MP'$	Propiedad Transitiva (21, 30)
32. Sean $\triangle QMP$ y $\triangle Q'MP'$	Definición de Triángulo (1, 11, 14)
33. $\triangle QMP \cong \triangle Q'MP'$	Postulado LAL (18, 24, 31)
34. $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$	Definición de Triángulos congruentes (33)
35. $d(P, Q) = d(P', Q')$	Definición de Congruencia (34)
36. S_e es una isometría	Definición de Isometría (1, 10, 11, 35)

Tabla 5

Demostración del teorema “toda simetría axial es una isometría” caso 3

Afirmación	Razón
36. $P \in H$ y $Q \in K$; (H y K semiplanos determinados por la recta e)	Caso 3 (3)
37. \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$	Postulado Dos puntos – recta (1, 11)

⁶ “dada una simetría axial S_e se tiene que $S_e(P) = P'$ si y sólo si el eje de simetría e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ ”.

38. $\overline{PQ'}$ y $\overline{P'Q}$	Teorema Recta – rayo – segmento (37)
39. Sea $PQ'QP'$ un cuadrilátero	Definición de Cuadrilátero (12, 38)
40. Sean $\triangle MRQ'$ y $\triangle MRQ$	Definición Triángulos (11, 14, 36)
41. Sea \overline{MR} igual a e	Teorema Recta – dos puntos (15)
42. $\overline{MR} \perp \overline{QQ'}$ y $\overline{MR} \perp \overline{PP'}$	Definición de Simetría axial (14, 41)
43. $\angle MRQ'$ y $\angle MRQ$ son rectos	Definición de Perpendicularidad (42)
44. $\angle MRQ' \cong \angle MRQ$	Teorema Ángulos rectos (43)
45. $\triangle MRQ' \cong \triangle MRQ$	Postulado LAL (18, 19, 44)
46. $\overline{MQ'} \cong \overline{MQ}$	Definición de Triángulos congruentes (45)
47. Sean $\triangle Q'MP$ y $\triangle QMP'$	Definición de triángulo (11, 14, 36)
48. $\angle RQ'M$ y $\angle PMQ'$ son alternos internos $\angle P'MQ$ y $\angle MQR$ son alternos internos	Definición de Ángulos alternos internos (25, 27, 28)
49. $\angle RQ'M \cong \angle PMQ'$ $\angle P'MQ \cong \angle MQR$	Teorema PAI (28, 48)
50. $\angle PMQ' \cong \angle P'MQ$	Propiedad Transitiva (21, 49)
51. $\triangle Q'MP \cong \triangle QMP'$	Postulado LAL (24, 46, 50)
52. $\overline{PQ'} \cong \overline{P'Q}$	Definición de Triángulos congruentes (51)
53. El cuadrilátero $PQ'QP'$ es trapecio isósceles	Definición de Trapecio isósceles (25, 39, 52)
54. \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$ son diagonales del cuadrilátero $PQ'QP'$	Definición de Diagonal del cuadrilátero (39)
55. $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$	Teorema Diagonales del trapecio isósceles (53, 54)
56. $d(P, Q) = d(P', Q')$	Definición de Congruencia (55)
57. S_e es una isometría	Definición de Isometría (1, 11, 46 y 56)

2.1.4 Rotación

Antes de definir la rotación vamos a establecer la conceptualización de ángulo y ángulo orientado. Un ángulo es la abertura formada por dos rayos que no están en la misma recta y se intersecan en el origen; su intersección se llama “vértice” y los rayos se llaman “lados del

ángulo”. Los ángulos de rotación⁷ son orientados: cuando el ángulo de rotación es positivo, la rotación se debe realizar en sentido contrario a las manecillas del reloj (Ilustración 10), por el contrario, cuando el ángulo de rotación es negativo, la rotación debe realizarse a favor de las manecillas del reloj (Ilustración 11).

Ilustración 10

Representación gráfica de $G(C, \angle\alpha)(P) = P'$

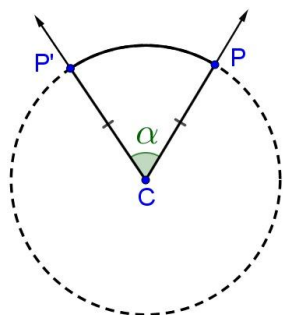
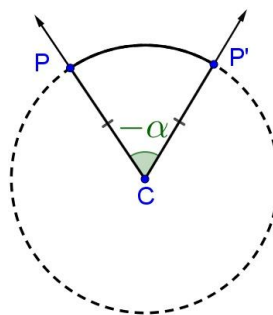


Ilustración 11

Representación gráfica de $G(C, -\angle\alpha)(P) = P'$



Teniendo en cuenta lo anterior, definimos rotación como: Dados un punto $C \in \mathbb{R}^2$ y un ángulo orientado $\angle\alpha$, llamamos rotación de centro y ángulo a la transformación

“ $G(C, \angle\alpha): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $G(C, \angle\alpha)(P) = P'$ si y sólo si $d(C, P) = d(C, P')$ y $\angle PCP' = \angle\alpha \forall P \in \mathbb{R}^2$ ” (p. 25).

Dada la definición de rotación, ahora vamos a mencionar algunos teoremas y sus respectivas demostraciones. El siguiente teorema hace referencia a que la rotación pertenece al grupo de las isometrías del plano: Toda rotación es una isometría.

⁷ A lo largo de este trabajo, también vamos a usar las expresiones “centro de giro”, “ángulo de giro” y “sentido de giro” por tres razones: 1) porque a lo largo de enseñanza, en algunas ocasiones empleamos el término “giro” para aludir a la rotación; 2) porque la fundamentación está tomada de Jaime y Gutiérrez (1996) y ellos usan este término; y 3) para evitar repetición de términos en algunos párrafos.

La demostración de este teorema se encuentra en la Tabla 6 y su representación gráfica en la Ilustración 12.

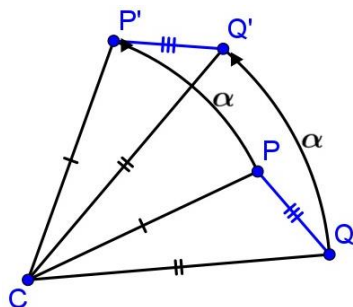
Tabla 6

Demostración del teorema “Toda rotación es una isometría”

Afirmación	Razón
1. Sea $G(C, \angle\alpha)$ una rotación, P, C y Q no colineales y $P \neq Q$	Dato
2. $G(C, \angle\alpha)(P) = P'$ $G(C, \angle\alpha)(Q) = Q'$ $m\angle\alpha = m\angle PCP'$ $m\angle\alpha = m\angle QCQ'$	Definición de Rotación (1)
3. $d(C, P) = d(C, P')$ $d(C, Q) = d(C, Q')$	Definición de Rotación (2)
4. Sean $\triangle PCQ$ y $\triangle P'CQ'$	Definición de Triángulo (1, 2)
5. $\overline{CP} \cong \overline{CP'}$ $\overline{CQ} \cong \overline{CQ'}$	Definición de Congruencia (3, 4)
6. $\angle PCQ; \angle P'CQ'; \angle P' C Q$	Definición de Ángulos (1, 4)
7. $m\angle PCQ = m\angle\alpha - m\angle QCP'$ $m\angle P'CQ' = m\angle\alpha - m\angle QCP'$	Propiedad de los reales (2, 6)
8. $m\angle PCQ = m\angle P'CQ'$	Propiedad Transitiva (7)
9. $\angle PCQ \cong \angle P'CQ'$	Definición de Ángulos congruentes (8)
10. $\triangle PCQ \cong \triangle P'CQ'$	Postulado LAL (5, 9)
11. $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$	Definición Triángulos congruentes (10)
12. $PQ = P'Q'$ $d(P, Q) = d(P', Q')$	Definición de Congruencia (11)
13. $G(C, \angle\alpha)$ es una isometría	Definición de Isometría (12)

Ilustración 12

Representación gráfica del teorema “toda rotación es una isometría”



2.2 Marco Didáctico

2.2.1 El Aprendizaje de las Isometrías desde el Enfoque Comunicacional

Teniendo en cuenta que el principal objetivo de nuestro trabajo de grado es analizar el aprendizaje sobre las isometrías del plano a la luz del enfoque comunicacional de Sfard, en este apartado presentamos: lo qué significa aprender matemáticas y los rasgos discursivos que se pueden encontrar en las producciones de los estudiantes como signo de su aprendizaje, los cuales son objeto de nuestro análisis.

Como lo menciona Sfard (2008; citado en Camargo y Perry, 2020) el lenguaje y la comunicación son importantes en el proceso de aprendizaje. El lenguaje matemático es el medio para aprender, reconocer el aprendizaje y una forma de comunicación con el otro y con uno mismo sobre las matemáticas.

Aprender matemáticas es adquirir habilidades discursivas que permitan comunicar ideas a integrantes de una comunidad que dialoga sobre matemáticas (Sfard, 2008). En el caso de nuestro trabajo decimos que un estudiante aprendió acerca de las isometrías del plano si puede comunicar ideas a otros integrantes de la comunidad matemática del aula sobre este tema. Sfard (2008) resalta que “pensar es un caso especial de la actividad de comunicar” (p. 45) y esto se

puede considerarse como comunicarse con uno mismo. Como los pensamientos incluyen imágenes, símbolos, argumentos, preguntas etc., aprender a pensar matemáticamente es equivalente a ser partícipe del discurso matemático.

Consideramos el discurso como cualquier forma de comunicación (Sfard, 2008). En Morgan y Sfard (2016; citado en Camargo y Perry, 2020, p. 997) se menciona que en cualquier discurso matemático los rasgos discursivos que los caracterizan son: vocabulario y sintaxis, mediadores visuales, rutinas y narrativas.

El vocabulario y la sintaxis se refieren a las palabras y el modo en las que se usan y combinan para referirse a objetos matemáticos; estas pueden ser coloquiales o matemáticas. Camargo y Perry (2020) sugieren dos evidencias de aprendizaje con relación a ese rasgo:

(i) la especialización del lenguaje, que depende de la inclusión de palabras, frases u oraciones propias de las matemáticas, de la construcción gramatical empleada y del uso dado al lenguaje especializado; (ii) la complejidad lógica discursiva, en términos del tipo y la frecuencia de uso de cuantificadores o conectivos lógicos. (p. 997)

Los mediadores visuales son objetos visibles (señas, gestos, dibujos) que usan los estudiantes para comunicar sus ideas con la intención de dejar claro a qué se refieren (citado en Camargo y Perry, 2020).

Las rutinas son acciones matemáticas que realizan los estudiantes de forma repetida y que respetan algunas reglas o algoritmos matemáticos. Según Morgan y Sfard (citado en Camargo y Perry, 2020) en las rutinas eventualmente se encuentran otros rasgos discursivos.

Las narrativas son descripciones que hacen los estudiantes para referirse a objetos matemáticos de forma general y no particular. Estas se pueden caracterizar, según Camargo y Perry (2020) por los recursos expresivos que empleen:

(i) por el uso de sustantivos matemáticos para encapsular acciones y procesos en objetos (en lugar, por ejemplo, del uso de deícticos, adjetivos o adverbios); (ii) en el protagonismo dado a los objetos matemáticos por encima de las acciones personales; (iii) en la explicitación o denominación de objetos matemáticos presentes en acto durante la comunicación; (iv) en los modificadores gramaticales que indican el grado de certidumbre que se tiene sobre lo dicho (p. 998).

2.2.2 Adaptaciones para el Tratamiento Matemático de las Isometrías a Nivel Escolar

Es evidente para nosotras que, en el estudio de las isometrías del plano a nivel escolar, y particularmente en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED), es poco productivo emplear las definiciones y teoremas que comentamos en la Sección 2.1. Por lo tanto, es imprescindible hacer un acercamiento didáctico a las isometrías del plano, como lo proponen Jaime y Gutiérrez (1996). Entonces definimos para el ambiente escolar las isometrías del plano de la siguiente manera.

- **Traslación:** Dado un vector libre \vec{a} , llamamos traslación de un punto P según el vector \vec{a} al movimiento de P en el plano de forma que este se desplaza en línea recta hasta el punto P' de tal forma que $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$.

- **Simetría axial:** Una simetría axial S_e de eje de recta e , es una correspondencia⁸ en el plano tal que, dado un punto P existe un único punto P' , situado de manera que $\overline{PP'} \perp e$ y $d(e, P) = d(e, P')$.
- **Rotación:** La rotación $R(C, \alpha)$ del centro en el punto C y ángulo α es un movimiento en el plano tal que un punto P gira sobre una circunferencia de centro C hasta el punto P' de tal forma que $\angle PCP' = \alpha$.

Consideramos que no es pertinente enseñar a estudiantes de educación media el sentido de la traslación de manera formal como lo explicitamos en la Sección 2.1.2. Por este motivo, decidimos referirnos al sentido de la traslación con los puntos cardinales y los puntos cardinales secundarios.

2.2.3 Las Teselas Artísticas como Contexto para la Enseñanza de las Isometrías

Existen diversos trabajos en los que se exponen propuestas de enseñanza de las isometrías del plano mediante el uso de teselas artísticas (ver Sección 1.3). Las teselas artísticas brindan la posibilidad de estudiar las isometrías del plano, y otros objetos matemáticos, desde la educación inicial hasta la educación media (Boule, 2005).

Nosotras tomamos la definición de teselado como “un recubrimiento del plano con figuras, de tal manera que ninguna porción del plano queda sin cubrir y ninguna queda cubierta dos o más veces” (Ángel et al, 2008, p. 16). En este apartado, presentamos brevemente un contexto sobre las teselas artísticas de Escher y mostramos cómo, mediante las isometrías del plano, se pueden reproducir tres de las teselas artísticas de Escher que usamos en nuestra práctica, para el desarrollo de las tareas que propusimos a los estudiantes. La primera y la

⁸ Jaime y Gutiérrez (1996) sugieren no hacer un acercamiento mediante movimiento de reflexión porque este se sale del plano.

segunda tesela las usamos en la tarea de introducción a las isometrías, y la tercera tesela la usamos en la tarea de aplicación de lo aprendido; los estudiantes debían teselar un cartón aplicándole isometrías a una plantilla dada.

Escher (1898-1972) fue un artista holandés. Sus obras se enfocaron en las teselaciones del plano, usando figuras en forma de pájaros, peces, ángeles y otras formas animadas. Sus obras eran realizadas en grabados sobre madera y litografías (Corrales, 2005).

En la Ilustración 13 mostramos la tesela artística que usamos para la Tarea 1 (ver Sección 3.2.1). Esta toma como motivo a un unicornio. Para teselar este plano se puede hacer uso de traslaciones y simetrías axiales. En la Ilustración 14, mostramos un posible procedimiento para teselar el plano: para obtener la posición 2, realizamos una traslación del unicornio de la posición 1 mediante el vector de traslación \vec{v} (azul); para obtener la posición 4, realizamos una traslación del unicornio de la posición 2 mediante el vector de traslación \vec{w} (rojo), posteriormente aplicamos una simetría axial al unicornio de la posición 3 respecto a el eje de simetría f que está representado por la recta negra punteada; para obtener la posición 5, realizamos una traslación del unicornio de la posición 1 mediante el vector de traslación \vec{a} (morado).

Ilustración 13

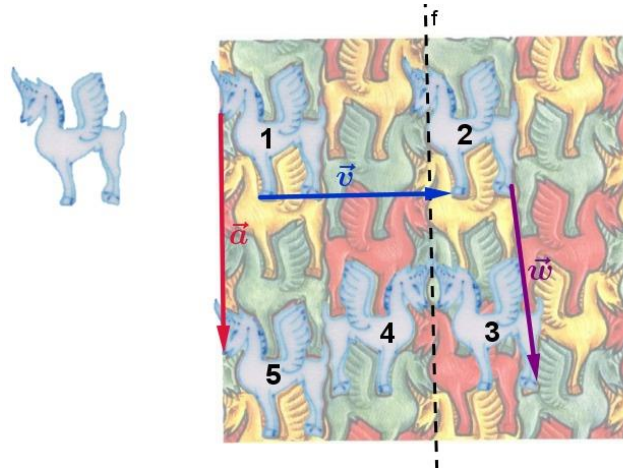
Tesela unicornios,
Autor M. C. Escher



Nota. Recuperado de [teselados de escher unicornios - Bing images](#)

Ilustración 14

Representación de las isometrías que teselan el plano con un unicornio



En la Ilustración 15 mostramos la tesela artística que usamos para las Tareas 2 y 3 (ver Secciones 3.2.2 y 3.2.3). Esta toma como motivo dos alas de una mariposa. Para teselar el plano se puede hacer uso de traslaciones, rotaciones y simetrías axiales. En la Ilustración 16, mostramos un posible procedimiento para teselar el plano: para obtener la posición 2, realizamos una traslación de las alas de la mariposa de la posición 1 mediante el vector de traslación \vec{v} (rojo); para obtener la posición 3, realizamos una traslación de las alas de la mariposa de la posición 2 mediante el vector de traslación \vec{w} (naranja); para obtener la posición 4, realizamos una simetría axial de las alas de la mariposa de la posición 3 respecto a el eje de simetría g que está representado por la recta negra punteada; y para obtener la posición 5, realizamos una rotación de 180° de las alas de la mariposa de la posición 3 con centro de giro en L .

Ilustración 15

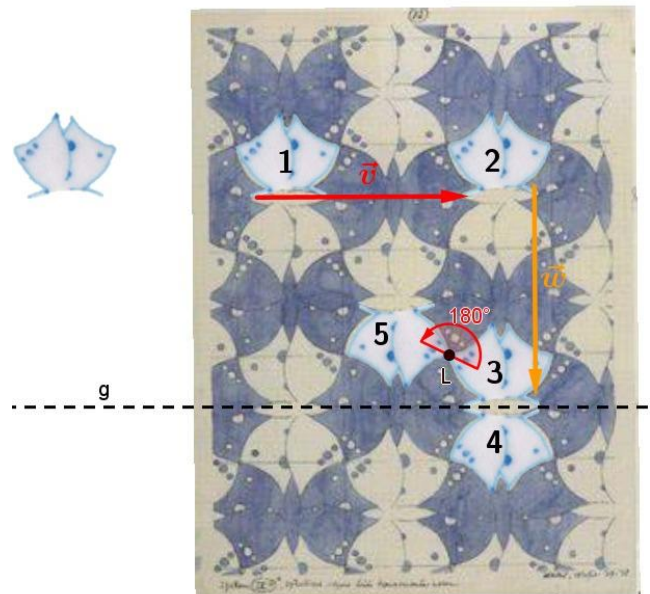
Tesela mariposas, Autor M. C. Escher



Nota. Recuperado de [teselados de escher mariposas](#)
- [Bing images](#)

Ilustración 16

Representación de las isometrías que teselan el plano con una mariposa.

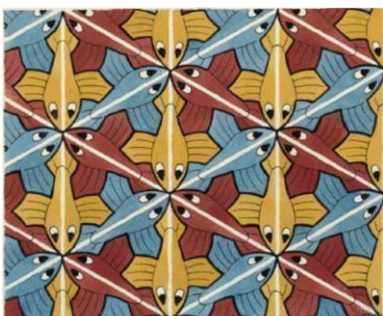


En la Ilustración 17 mostramos la tesela artística que intentaron replicar los estudiantes en la Tarea 7. Esta toma como motivo la mitad de un pescado. Para teselar el plano se puede hacer uso de traslaciones, rotaciones y simetrías axiales. En la Ilustración 18, mostramos un posible procedimiento para teselar el plano: para obtener la posición 2, realizamos una traslación de la mitad del pescado de la posición 1 mediante el vector de traslación \vec{u} (rojo); para obtener la posición 3, aplicamos una simetría axial a la mitad del pescado de la posición 2 respecto al eje de simetría f que está representado por la recta negra punteada; para obtener la posición 4, realizamos una rotación de -120° de la mitad del pescado de la posición 3 con centro de giro en P ; para obtener la posición 5, realizamos una traslación de la mitad del pescado de la posición 1

mediante el vector de traslación \vec{v} (verde); y, para obtener la posición 6, realizamos una rotación de 240° de la mitad del pescado de la posición 5 con centro de giro en M .

Ilustración 17

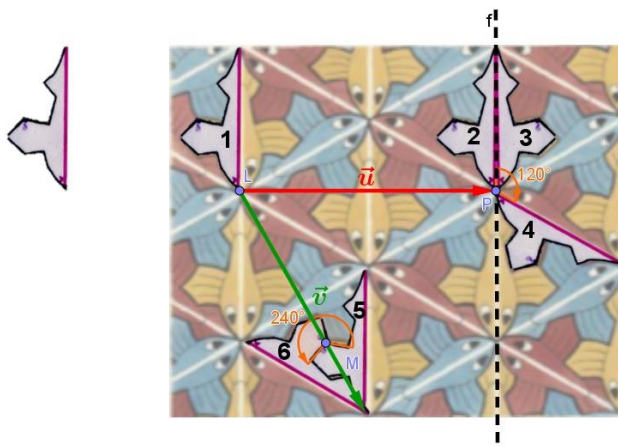
Tesela peces, Autor M. C. Escher



Nota. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH#material/Se9fxftB>

Ilustración 18

Representación de las isometrías que teselan el plano con un pez



2.3 Marco Curricular

2.3.1 Lineamientos Curriculares (MEN, 1998)

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

Para introducir el estudio de las transformaciones del plano, en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se sugiere que los estudiantes representen los movimientos con su propio cuerpo o con objetos y luego los imaginen con ayuda de materiales como espejos, láminas semitransparentes o dibujos en el plano. Además, se propone una geometría activa, que consiste en incentivar a los estudiantes a hacer cosas como moverse, dibujar, construir, producir y explorar. Con base en estas experiencias se procura conceptualizar las nociones geométricas. Estas, inicialmente, pueden ser interpretadas con gestos, señas y palabras del lenguaje no

matemático; posteriormente, los estudiantes tendrán la capacidad de proponer o evaluar definiciones y simbolismos formales. Estos planteamientos dejan ver la relevancia del contenido curricular de las isometrías y sugieren algunas formas de abordaje.

Proceso de Comunicación

Teniendo en cuenta que el análisis de los aprendizajes sobre las isometrías del plano lo realizamos a la luz de la teoría de Sfard, el proceso que principalmente promovimos en nuestra práctica fue la comunicación.

La habilidad de comunicarnos es una necesidad que tenemos los seres humanos. Esta habilidad es necesaria en nuestras actividades cotidianas y profesionales. En el siglo XXI, se han planteado retos para todas las profesiones científicas y técnicas; entre ellos están expresar ideas de manera verbal y escrita a partir de las inferencias visuales; y, comprender y analizar ideas expuestas de manera oral, verbal o visual.

Por tanto, “se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los estudiantes y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas.” (MEN, 1998. p. 94). Aunque se señala que la comunicación es uno de los procesos más importantes al aprender matemáticas, en el aula de matemáticas no se le ha prestado tanta atención por falta de tiempo, o porque se cree que esta habilidad solo debe desarrollarse en otras asignaturas.

En los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se menciona que este proceso permite a los estudiantes vincular sus nociones intuitivas con el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Adicional a ello, que la comunicación permite a los estudiantes relacionar ideas matemáticas en distintas representaciones como la gráfica, pictórica, simbólica y física.

2.3.2 Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006)

Respecto a la comunicación, los Estándares Básicos de Competencias afirman que, aunque las matemáticas no son únicamente un lenguaje estas “se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan” (MEN, 2006, p. 54) por lo que es importante promover en los estudiantes la adquisición y el dominio de los lenguajes propios de las matemáticas.

Respecto al estudio de las isometrías del plano, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, proponen los siguientes estándares⁹:

- “Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura” (p. 80).
- “Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño” (p. 80).
- “Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio” (p. 80).
- “Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas” (p. 82)
- “Conjeturo y verifiqué los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (p. 82).
- “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) [...] sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte” (p. 84).
- “Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica” (p. 84).

⁹ En el currículo colombiano se habla de simetría y reflexión de forma no muy consistente como se debería, no obstante, nosotras solo exponemos textualmente los Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje que hacen referencia a la enseñanza de estos objetos matemáticos.

2.3.3 Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016)

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia propone tres Derechos Básicos de Aprendizaje para los estudiantes de grado tercero, cuarto y séptimo respectivamente los cuales se relaciona con el estudio de las isometrías del plano; estos los presentamos en la Tabla 7.

Tabla 7

Derechos Básicos de Aprendizaje relacionados con las isometrías del plano

Grado	Derecho	Evidencia de Aprendizaje
3°	“Formula y resuelve problemas que se relacionan con la posición, la dirección y el movimiento de objetos en el entorno” (p. 26).	“Identifica y describe patrones de movimiento de figuras bidimensionales que se asocian con transformaciones como: reflexiones, traslaciones y rotaciones de figuras” (p. 26) “Identifica las propiedades de los objetos que se conservan y las que varían cuando se realizan este tipo de transformaciones” (p. 26) “Plantea y resuelve situaciones en las que se requiere analizar las transformaciones de diferentes figuras en el plano” (p. 26)
4°	“Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación- reducción)” (p. 34)	“Aplica movimientos a figuras en el plano” (p. 34)
7°	“Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones” (p. 55)	“Representa objetos tridimensionales cuando se transforman” (p. 55)

Capítulo 3

Experiencia de Aula

En este capítulo presentamos aspectos de la experiencia en nuestra Práctica en Aula. Hacemos una descripción de la población estudiantil con la que trabajamos. Presentamos las tareas que propusimos a los estudiantes y realizamos comentarios reflexivos relacionados con estas.

3.1 Panorámica General de la Experiencia

En este apartado describimos el contexto institucional del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED) y el contexto estudiantil de los estudiantes de los tres cursos de grado undécimo del segundo semestre del 2023; recordamos que este trabajo de grado está asociado a nuestra práctica de inmersión total “Práctica en Aula”.

3.1.1 Contexto Institucional

Esta experiencia de aula se desarrolló en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED). Este está ubicado en la localidad de Ciudad Bolívar, en el barrio Meissen. Ofrece educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media técnica. Esta última está articulada con el SENA. La media técnica cuenta con tres especialidades, una por curso; estas especialidades son: Agroindustria Alimentaria, Contabilidad y Finanzas, Electromecánica y Diseño. El colegio adelanta un proyecto titulado “Matemáticas que fortalecen proyectos de vida en el área técnica en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED)” en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El proyecto les permite a los futuros educadores matemáticos de la UPN conocer el ambiente de una institución, realizar pruebas diagnósticas y, por medio del análisis de estas identificar debilidades o fortalezas de tipo matemático de los

estudiantes, para que, a su vez, puedan proponer actividades y planes de mejoramiento que contribuyan al fortalecimiento del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

3.1.2 Contexto Estudiantil

Realizamos la experiencia de aula con estudiantes de grado undécimo, específicamente de los cursos 1101, 1102 y 1103. Las edades de ellos están comprendidas entre los 15 y 18 años. Debíamos desarrollar la experiencia en ocho sesiones de clase, cada una de ellas con una duración de 90 minutos. No obstante, en los cursos 1101 y 1103 perdimos entre 15 y 20 minutos cada clase, debido a que los estudiantes debían tomar el desayuno. Adicionalmente, a causa de un lunes festivo, perdimos una sesión de clase con los cursos 1102 y 1103, lo que conllevó a que no pudiéramos realizar el estudio del movimiento de traslación con estos estudiantes. Las siete tareas que propusimos se desarrollaron así: dos de ellas para las tareas de introducción a las isometrías, una para la tarea de traslación (en 1101), dos para la tarea de simetría axial, dos para la tarea de rotación y una para la tarea de aplicación de lo aprendido.

En el transcurso de las sesiones de clase, además de los estudiantes, estaban tres personas: Sandra, Laura y el profesor titular. Sandra era la profesora practicante a cargo de los grados undécimos; por ello, fue quien dirigió las clases y resolvió dudas de los estudiantes; Laura, fue quien hizo anotaciones de lo observado en las clases y resolvió dudas que presentaban los estudiantes; el profesor-tutor, estaba presente en todas las sesiones de clase apoyando con entregar material de clase y resolviendo posibles dudas de los estudiantes. Además, fue quien se encargó del manejo de grupo en casos particulares de indisciplina.

El curso 1101 estaba conformado por 35 estudiantes, los cuales pertenecían a la especialidad Contabilidad y Finanzas. En general, los estudiantes estuvieron activos durante la clase de matemáticas, hacían preguntas al profesor, mostraban interés por las actividades

propuestas, tenían buena comunicación entre pares y con el profesor. La mayoría de los estudiantes contaban con los instrumentos de medida (regla, escuadra y transportador) e instrumentos de trazo (compás) necesarios para el desarrollo de las tareas. Ellos reconocían sus debilidades en cuanto al manejo de los instrumentos y pedían explicaciones o ayuda a otros compañeros o a los profesores cuando no sabían cómo resolver alguna tarea.

El curso 1102 estaba conformado por 32 estudiantes, los cuales pertenecían a la especialidad de Agroindustria Alimentaria. Algunos de ellos no mostraron interés especial en las tareas propuestas durante las clases de matemáticas. Además, una gran parte de estudiantes no contaban con instrumentos, principalmente con el compás. Esto causó dificultades para el desarrollo de las tareas, debido a que los estudiantes tenían que esperar a que otros compañeros terminaran la tarea para que les prestaran los instrumentos. Al preguntarles el por qué no tenían instrumentos, algunos decían “ya pa’ lo que queda, no voy a comprar”.

El curso 1103 estaba conformado por 28 estudiantes, los cuales pertenecían a la especialidad de Electromecánica y Diseño. La mayoría de los estudiantes mostraron desinterés por la clase de matemáticas. Algunos de ellos se dormían y otros hablaban constantemente interrumpiendo así las clases. Para captar la atención de estos estudiantes, el profesor-tutor solía poner una gran cantidad de ejercicios para que los estudiantes resolvieran en sus cuadernos, y de esto obtener una nota. Aunque en este curso había que insistir a los estudiantes para que desarrollaran las tareas, fue el curso más “calmado”; casi no se paraban del puesto y no hacían ruido excesivo, sin embargo, se tomaron más tiempo del necesario para desarrollar las tareas a pesar de que la mayoría contaba con los instrumentos de medida y de trazo.

3.2 Tareas que Constituyeron la Experiencia

En este apartado describimos las siete tareas que propusimos a los estudiantes para estudiar las isometrías del plano. En el Anexo 2 presentamos un listado de las definiciones y los teoremas de los conceptos geométricos involucrados.

Las Tareas 1, 2 y 3 tienen como objetivo conocer las nociones iniciales de los estudiantes sobre las tres isometrías, acercarlos de manera estática a la simetría axial, y de manera dinámica a la traslación y a la rotación. Para el desarrollo de estas tareas, usamos dos teselas artísticas impresas sobre papel fotográfico, a las cuales agregamos números o líneas con el objetivo de señalar las posiciones en las que los estudiantes debían ubicar la plantilla o el espejo. Una de ellas se usó para la traslación (Ilustración 19), y la otra para la simetría axial y la rotación (Ilustración 21). Adicionalmente, para el estudio de la traslación y la rotación utilizamos una plantilla del motivo de la tesela correspondiente: en el caso de la traslación, un unicornio (Ilustración 20); en el caso de la rotación, dos alas de una mariposa (Ilustración 24). Estas plantillas son calcadas sobre papel pergamino y plastificadas con papel contact para que resistan la manipulación de los estudiantes. Para el estudio de la simetría axial, usamos espejos rectangulares con cinta transparente en sus bordes para evitar accidentes en el aula y que, a su vez, no obstruya la visualización.

Para la gestión de estas tareas, decidimos que la profesora previamente presentara a los estudiantes ejemplos de las isometrías apoyándose en los recursos de GeoGebra, específicamente los que se refieren a los teselados de Escher. En estos se encuentran simulaciones, en las que a partir de aplicaciones de las isometrías del plano a un motivo se puede teselar el plano. Además, mientras que los estudiantes desarrollaban las tareas, la profesora observaba los movimientos que

realizaban los estudiantes con las plantillas para evitar que ellos despegaran la plantilla de la tesela o la movieran de manera no deseada.

Las Tareas 4, 5 y 6 tienen como objetivo estudiar las isometrías del plano haciendo uso de instrumentos de medición (regla, escuadra, transportador) y de trazo (compás). Previo al desarrollo de estas tareas, la profesora introdujo cada isometría del plano especificando los invariantes de cada una. Adicionalmente, procuró que los estudiantes supieran cómo manejar los instrumentos de medida y de trazo. Para el desarrollo de estas tareas, les entregamos por parejas, los enunciados de las tareas de manera impresa.

La Tarea 7 tiene como objetivo aplicar lo aprendido de las isometrías para recrear una tesela artística de Escher. para el desarrollo de esta tarea, la profesora pidió a los estudiantes traer por parejas $1/8$ de cartón paja e instrumentos de medición y de trazo. Adicionalmente, la profesora entregó, por parejas, el enunciado impreso y una plantilla de la mitad de un pescado que fue calcado sobre papel pergamino y plastificada con papel contact (Ilustración 25). En la plantilla, trazamos una línea roja y dos puntos, el punto P que se encuentra en un vértice del ala del pescado y el punto A que se encuentra en la cabeza del pescado; el propósito de resaltar la línea y los puntos en la plantilla, es que los estudiantes puedan describir las isometrías del plano tomando como referencia los puntos o el eje (línea roja).

Durante el desarrollo de las tareas fue importante el acompañamiento que hicimos a los estudiantes, para orientarlos acerca del uso adecuado de los instrumentos de medida y de trazo. Organizamos a los estudiantes en parejas para generar espacios de discusión y que ellos pudieran llegar a acuerdos, para promover el proceso de comunicación.

3.2.1 Tarea 1: Introducción a la Traslación

3.2.1.1 Enunciado de la Tarea 1

Introducción a las Isometrías: Traslación

1. Ubiquen la plantilla en la posición uno, luego, sin despegar la plantilla del plano, deslícenla desde la posición uno hasta la posición dos.
 - a. Con sus propias palabras describan cómo es el movimiento que realizaron con la plantilla.
 - b. ¿La plantilla coincidió con el unicornio de la posición dos? Sí o no, expliquen.
 - c. ¿Al deslizar la plantilla de la posición uno a la posición dos tuvieron que moverla para que coincidiera? Sí o no, expliquen.
2. Ubiquen la plantilla de en la posición dos, luego, sin despegar la plantilla del plano deslícenla desde la posición dos hasta la posición tres.
 - a. Con sus propias palabras describan cómo es el movimiento que realizaron con la plantilla.
3. ¿Qué tienen en común estos desplazamientos? ¿Qué diferencias y similitudes hay entre los deslizamientos?

Ilustración 19

Teselado usado para la Tarea 1



Ilustración 20

Plantilla de unicornio usada para la Tarea 1



3.2.1.2 Descripción de la Tarea 1

Con esta tarea pretendemos conocer los significados iniciales que tienen los estudiantes acerca del movimiento de traslación y a su vez, realizar un acercamiento dinámico a este movimiento mediante la manipulación de la plantilla sobre la tesela artística. Además, con las

preguntas e instrucciones, esperamos que los estudiantes muevan la plantilla y describan el movimiento que les permitió pasar esta de una posición a la otra. Los estudiantes deben ubicar la plantilla sobre la tesela en la posición 1 y por medio de un solo movimiento en línea recta llevarla hasta la posición 2, luego, ubicar la plantilla sobre la tesela en la posición 2 y por medio de un solo movimiento en línea recta llevarla hasta la posición 3.

3.2.1.3 Aprendizajes Esperados en la Tarea 1

- Describir las características del movimiento de traslación.
- Identificar que la traslación es una isometría.

3.2.2 Tarea 2: Introducción a la Simetría axial

3.2.2.1 Enunciado de la Tarea 2

Introducción a las Isometrías: Simetría axial

1. Ubiquen el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta m de tal manera que se vea la parte de atrás (sin reflejo). Con sus propias palabras describan qué parte de las mariposas (gris y azul) pueden ver.
2. Ubiquen el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta m (con reflejo). Escriban y expliquen qué observan respecto a las mariposas y qué parte de las mariposas pueden ver.
3. Ubiquen el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta n (con reflejo). Escriban y expliquen qué observan respecto a las mariposas y qué parte de las mariposas pueden ver.
4. ¿Consideran que la posición de la recta puede influir en lo que se reflejó en el espejo? Expliquen.

Ilustración 21

Teselado usado para la Tarea 2

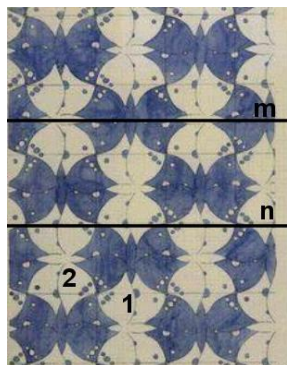
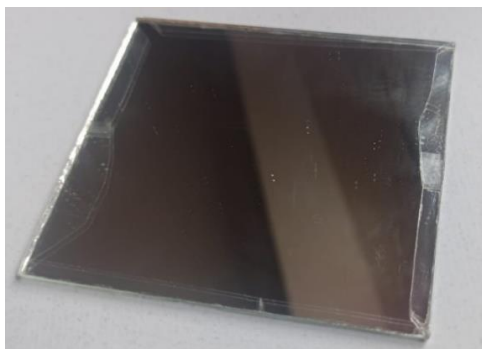


Ilustración 22

Espejo usado para Tarea 2



3.2.2.2 Descripción de la Tarea 2

Con esta tarea pretendemos conocer los significados iniciales que pueden tener los estudiantes acerca de la simetría axial y a su vez, realizar un acercamiento estático a este mediante la ubicación de un espejo sobre algunas rectas (ejes de simetría) trazadas sobre la tesela. Además, con las preguntas e instrucciones, buscamos que los estudiantes describan lo que ven en el espejo junto con un objeto del plano que está en posición especular. Los estudiantes deberán ubicar el espejo de manera perpendicular al plano sobre la recta indicada por el profesor.

3.2.2.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 2

- Describir las características de la simetría axial.
- Identificar que la simetría axial es una isometría.

3.2.3 Tarea 3: Introducción a la Rotación

3.2.3.1 Enunciado de la Tarea 3

Introducción a las Isometrías: Rotación

Ubiquen la plantilla de las alas de la mariposa en la posición 1, luego, sin despegar la plantilla del plano, con un solo movimiento llévenla desde la posición 1 hasta la posición 2.

- ¿Cómo fue el movimiento?
- ¿Hay algún punto de la plantilla que se mantuvo en el mismo lugar?

Ilustración 23

Teselado usado para la Tarea 3¹⁰

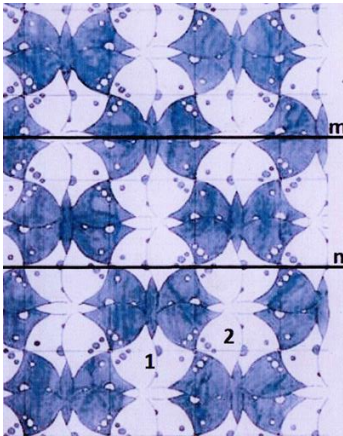


Ilustración 24

Plantilla de las alas de la mariposa usada para la Tarea 3



3.2.3.2 Descripción de la Tarea 3

Con esta tarea pretendemos conocer los significados que pueden tener los estudiantes acerca del movimiento de rotación y a su vez, realizar un acercamiento dinámico a este movimiento mediante la manipulación de la plantilla sobre la tesela artística. Además, con las preguntas e instrucciones, esperamos que los estudiantes giren la plantilla y describan el movimiento que les permitió pasar esta de una posición a la otra. Los estudiantes deberán ubicar

¹⁰ Las rectas m y n que aparecen en esta tesela se usaron para la Tarea 2, en consecuencia, en la Tarea 3 no juegan ningún papel.

la plantilla sobre la tesela en la posición 1 y por medio de un solo movimiento llevarla a la posición 2.

3.2.3.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 3

- Identificar que la rotación es una isometría.
- Describir las características de la rotación.

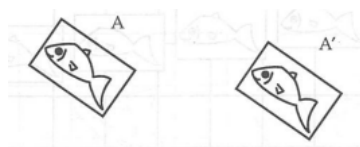
3.2.4 Tarea 4: Traslación

Esta tarea la implementamos luego de que la profesora explicara las características y componentes del vector de traslación y relacionara estos con los invariantes de la traslación.

3.2.4.1 Enunciado de la Tarea 4

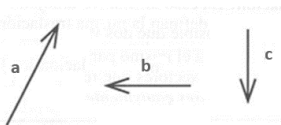
Isometrías: Traslación

1. En la siguiente imagen, la figura A se ha trasladado hasta A' . Unan con flechas los vértices correspondientes por traslación, después, escriban qué tienen en común las flechas y en qué se diferencian.



Nota. Adaptado de *El Grupo de las Isometrías del Plano* (p. 106), por Jaime y Gutiérrez, 1996.

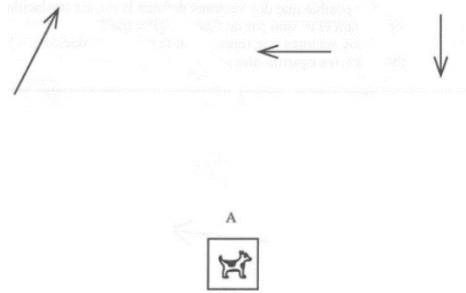
2. A continuación, se encuentra la representación de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} que indican una traslación.



Caractericen cada vector de traslación teniendo en cuenta la siguiente tabla:

Vector de traslación	Magnitud (cm)	Sentido	Dirección α
\vec{a}			
\vec{b}			
\vec{c}			

3. Obtengan las imágenes de A por las traslaciones con \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .



Nota. Adaptado de *El Grupo de las Isometrías del Plano* (p. 108), por Jaime y Gutiérrez, 1996.

3.2.4.2 Descripción de la Tarea 4

Con el desarrollo del numeral 1, pretendemos que los estudiantes identifiquen que los vectores de traslación tienen los mismos componentes independientemente de cuál sea su origen, es decir, que la magnitud, el sentido y la dirección es la misma. Además, buscamos que los estudiantes identifiquen que estos vectores son paralelos entre sí. Los estudiantes deberán representar el vector de traslación que corresponde a la traslación de la Figura A a la Figura A' ; para ello, los estudiantes tendrán que unir mediante una flecha los vértices del cuadrilátero de la Figura A con los vértices correspondientes por traslación.

En el numeral 2, esperamos que los estudiantes caractericen cada uno de los componentes de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} dada su representación gráfica. Los estudiantes deberán usar los instrumentos de medición (regla, escuadra, transportador); para hallar la magnitud, tendrán que medir la longitud del vector en centímetros (cm); para el sentido, deben hacer uso de los puntos cardinales y puntos cardinales secundarios; para la dirección, deben trazar una recta horizontal respecto a cada uno de los vectores y posteriormente medir el ángulo que está comprendido entre la recta horizontal y el vector.

En el numeral 3, pretendemos que los estudiantes trasladen la Figura A mediante los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , los cuales se caracterizaron en el numeral 2. Los estudiantes deberán, primero, trazar una recta horizontal que contenga cada uno de los vértices del cuadrilátero de la Figura A o prolongar los segmentos horizontales de esta; segundo, trazar un rayo tal que su origen sea un vértice del cuadrilátero de la Figura A , y que, junto con la recta horizontal, representen un ángulo cuya medida corresponda a la dirección del vector que se quiera representar; tercero, sobre este rayo tendrán que marcar un punto tal que la distancia entre el origen del rayo y este sea la magnitud del vector; finalmente, deberá unir cada uno de los puntos que se construyeron para obtener la figura por traslación de la Figura A .

3.2.4.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 4

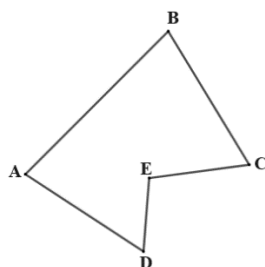
- Reconocer puntos correspondientes por traslación de una figura dada.
- Establecer la relación de paralelismo entre los vectores de traslación.
- Identificar y explicitar los componentes de los vectores (magnitud, sentido y dirección) a partir de su representación gráfica.
- Usar instrumentos de medida o trazo para construir la imagen por traslación de una figura dada la representación de un vector de traslación.

1.2.4.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 4

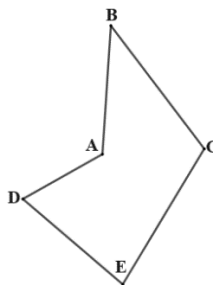
Previo al desarrollo de esta tarea, recomendamos al profesor explicar o recordar a los estudiantes qué es un vector y cuáles son sus componentes para evitar confusiones entre términos coloquiales como la “dirección” y el “sentido”. Además, se puede pedir a los estudiantes que reconozcan cuáles son los componentes de un vector a partir de su representación gráfica; con esto, pueden surgir otras aclaraciones pertinentes para este tema de estudio, por ejemplo,

2. Construyan la imagen del polígono que se le entregó (opción 1 u opción 2) por simetría axial, tomando como eje de simetría el dobléz de la hoja que realizó la profesora.¹¹

Opción 1



Opción 2



3.2.5.2 Descripción de la Tarea 5

Con el desarrollo del numeral 1, pretendemos que los estudiantes usen la definición de eje de simetría y relacionen este con la definición y construcción de la mediatriz para verificar si un par de figuras son correspondientes por simetría axial. Los estudiantes, para el primer par de figuras (triángulos isósceles), podrán construir los segmentos que unen un punto y su posible imagen por simetría axial y construir la mediatriz de estos para verificar si esta coincide o no con la recta dada; para el segundo par de figuras (cuadrados), ellos podrán utilizar el hecho de que la simetría axial no altera el tamaño ni la forma de los objetos; en el tercer par de figuras (triángulos rectángulos), pueden aludir a la equidistancia de los vértices y sus imágenes por simetría axial respecto al eje de simetría; para el cuarto par de figuras (rombos), pueden aludir al hecho de que la recta dada no está en medio de las figuras, por tanto, la recta dada no es eje de simetría.

En el numeral 2, esperamos que los estudiantes construyan la imagen por simetría axial del polígono respecto al eje de simetría representado por el dobléz de la hoja que realice el profesor. Los estudiantes deberán trazar rectas perpendiculares al eje de simetría que contengan cada uno de los vértices del polígono dado; luego, con ayuda del compás podrán tomar la

¹¹ Para cada pareja, la profesora realizó un dobléz diferente.

distancia del vértice al eje de simetría y copiarla al otro lado del eje en el que se quiere trazar la imagen por simetría axial del polígono sobre la recta perpendicular; por último, tendrán que trazar los segmentos que unen los puntos imagen por simetría axial.

Los estudiantes podrán usar una construcción alterna: deberán trazar una de las perpendiculares al eje de simetría tal que este pase por uno de los vértices del polígono; luego, trazarán rectas paralelas a esta tal que pasen por los otros vértices del polígono, acudiendo al hecho de que los todos los segmentos que unen un vértice y su imagen por simetría axial son paralelos entre sí; después, podrán tomar las distancias de los vértices al eje de simetría y copiarla al otro lado del eje sobre la recta paralela en el que se quiere trazar la imagen del polígono; por último, tendrán que trazar los segmentos que unen los puntos imagen por simetría axial.

3.2.5.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 5

- Usar los invariantes y características de la simetría axial para verificar si una recta dada es o no eje de simetría de un par de figuras.
- Usar instrumentos de medida o trazo para construir las mediatrices de los segmentos cuyos extremos son un vértice de la figura y su imagen por simetría axial.
- Usar instrumentos de medida o trazo para construir la imagen por simetría axial de una figura dada.

3.2.5.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 5

Previo al desarrollo de esta tarea, recomendamos al profesor enseñar a los estudiantes el método de construcción de la mediatriz y sus propiedades, mencionando que el eje de simetría cumple con las mismas propiedades de la mediatriz. Adicionalmente, sugerimos al profesor, que

en el numeral 2, realice un acompañamiento a los estudiantes debido a que ellos podrían doblar la hoja y calcar el polígono; este procedimiento dificulta que se puedan desarrollar los aprendizajes esperados de la tarea.

3.2.6 Tarea 6: Rotación

Esta tarea la implementamos luego de que la profesora explicara los invariantes de la rotación.

3.2.6.1 Enunciado de la Tarea 6

Isometrías: Rotación

1. En la siguiente imagen se encuentra el cuadrado $ABCD$, el cual realizó un movimiento de rotación.

Nota. Adaptado de *Traslaciones Giros y Simetrías en el Plano* (p. 24), por Gutiérrez y Jaime, 1986.

Respondan las siguientes preguntas:

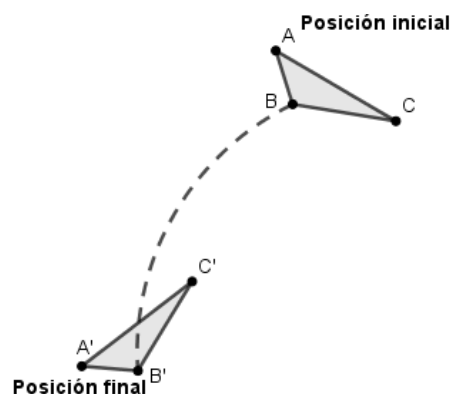
- ¿Qué cambios tuvo el cuadrado $ABCD$ al moverse de la posición inicial a la final? ¿el tamaño del cuadrado cambió? ¿la forma del cuadrado cambió?
- ¿Cuánto giró el cuadrado $ABCD$ respecto al centro de giro (punto G)?
- ¿Cuál es la distancia desde el centro de giro al vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición inicial? ¿Cuál es la distancia desde el centro de giro al vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición final? Compare las distancias y dé una explicación geométrica a lo sucedido.

2. El triángulo de la posición inicial ha realizado una rotación para ponerse en la posición final. Encuentre el centro de giro y el ángulo de giro, para ello, siga la siguiente instrucción.

Instrucción

Dibuje las circunferencias sobre las que se movieron cada uno de los vértices.

Nota: El centro de la circunferencia se puede hallar al construir dos mediatrices, la intersección entre estas será el centro.



3.2.6.2 Descripción de la Tarea 6

Con el desarrollo del literal (a) en el numeral 1, pretendemos que los estudiantes reconozcan el hecho de que, al ser la rotación una isometría, esta conserva el tamaño y la forma de la figura que realiza el movimiento. Los estudiantes podrán hacer uso del hecho de que la rotación no altera el tamaño ni la forma de los objetos, pero sí su posición relativa.

Para el literal (b), pretendemos que los estudiantes caractericen y expliciten el ángulo y el sentido de rotación del cuadrado $ABCD$ para pasar de la posición inicial a la final. Los estudiantes deberán escoger uno de los vértices del cuadrado $ABDC$ en la posición inicial y su correspondiente en la posición final; luego, tendrán que trazar los segmentos que unen estos puntos con el centro de giro G ; por último, con ayuda del transportador, medir el ángulo de rotación.

Con el literal (c), esperamos que los estudiantes reconozcan que el movimiento de rotación deja un “rastro” de circunferencia. Los estudiantes deberán usar la regla/escuadra para medir las distancias desde el centro de giro al vértice B del cuadrado $ABCD$ de la posición inicial y final, para compararlas entre sí y relacionarlas con radios de circunferencia.

El propósito del numeral 2, es que los estudiantes apliquen el método de construcción de la mediatriz para hallar del centro de giro de la rotación del triángulo ABC al pasar de la posición inicial a la posición final; además, pretendemos que los estudiantes caractericen los invariantes de esta rotación. Los estudiantes deberán construir al menos dos de los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen por rotación; luego, deberán hallar la mediatriz de estos segmentos; después, deberán marcar la intersección entre las mediatrices; posteriormente, tendrán que trazar los lados del ángulo de rotación; por último, usar el transportador para medir el ángulo de rotación.

3.2.6.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 6

- Identificar que la rotación es una isometría.
- Comparar la definición de circunferencia con el “rastro” que deja el movimiento de rotación.
- Reconocer los invariantes de la rotación.
- Usar los instrumentos de medida y de trazo para construir las mediatrices de dos de los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen por rotación.
- Usar la definición de intersección entre dos rectas para hallar el centro de giro.
- Construir una circunferencia dados dos puntos que pertenecen a esta y su centro.

3.2.6.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 6

Sugerimos al profesor, que en el numeral 2, realice un acompañamiento a los estudiantes debido a que es posible que los estudiantes no tomen el segmento cuyos extremos sean un vértice y su correspondiente por rotación para hallar la mediatriz.


3.2.7 Tarea 7: Aplicación de lo Aprendido

Esta tarea la implementamos luego de que los estudiantes resolvieran las Tareas 4, 5 y 6.

3.2.7.1 Enunciado de la Tarea 7

Teselados y Movimientos Rígidos en el Plano

1. Ubiquen la plantilla como se muestra en la figura, luego, dibujen la silueta de esta sobre el cartón paja y numeren esta como 1.

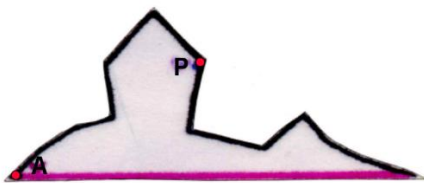


2. Apliquen a esta los movimientos rígidos del plano para generar la tesela sobre el cartón paja. Para ello, enumeren la figura generada por la plantilla en el cartón en el orden en que vayan aplicando los movimientos.
3. A continuación, se presenta una tabla en la cual deberán registrar cada uno de los movimientos que realicen con la plantilla para recrear la teselación de M. C. Escher del plano

Posición	Movimiento	Descripción
De la 1 a la 2		

Ilustración 25

Plantilla de la mitad de un pescado usada para teselar el plano



3.2.7.2 Descripción de la Tarea 7

Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que los estudiantes usen sus aprendizajes sobre las isometrías del plano para teselar 1/8 de cartón paja haciendo uso de una plantilla.

Además, buscamos que los estudiantes describan y caractericen cada uno los movimientos que le aplicaron a esta. Para empezar a teselar el cartón, los estudiantes deberán tomar la plantilla dada y tendrán que ubicarla sobre el cartón como se indica en el numeral 1; posteriormente, tendrá que dibujar la silueta de la plantilla con el número 1, e ir enumerando la silueta de la plantilla sobre el cartón después de aplicar a esta una de las isometrías estudiadas, como se indica en el numeral 2. Luego, los estudiantes deben registrar en la tabla qué tipo de movimiento realizaron con la plantilla al hacer un cambio de posición, además, describir y caracterizar este movimiento explicitando sus invariantes, como se indica en el numeral 3. En esta tarea, los estudiantes no siguen un paso a paso para construir la tesela; en cambio, son ellos los que deciden qué tipos de movimientos realizar para teselar el plano.

3.2.7.3 Aprendizajes Esperados de la Tarea 7

- Reconocer y diferenciar los invariantes que caracterizan cada isometría del plano.
- Explicitar los invariantes de las isometrías del plano para describir y caracterizar el cambio de posición de una figura dada.
- Construir una tesela artística aplicando las isometrías del plano a una plantilla.

3.2.7.4 Orientaciones para la Gestión de la Tarea 7

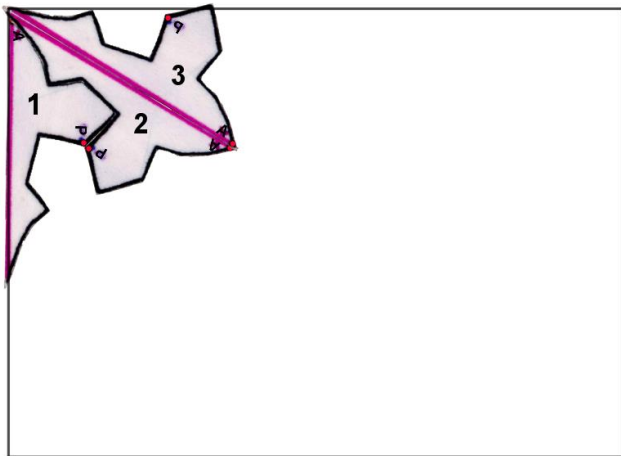
Previo al desarrollo de esta tarea, recomendamos al profesor mostrar de manera impresa o digital a los estudiantes ejemplos de algunos teselados artísticos. Para ello, puede hacer uso de algunas teselas creadas por Escher, esto, con el objetivo de mencionar a los estudiantes qué es una tesela. Adicionalmente, sugerimos al profesor recordar junto con los estudiantes cuáles son las isometrías del plano y cuáles son sus invariantes. Como para esta tarea los estudiantes deben usar una plantilla, el profesor puede realizar ejemplos sobre cómo se realiza cada movimiento

rígido del plano usando una plantilla de mayor tamaño y sobreponiéndola en el tablero o en la pared.

Con el propósito de que los estudiantes comprendan el procedimiento que deben realizar para teselar el plano usando la plantilla, se puede dar a los estudiantes las siguientes instrucciones, a manera de ejemplo (Ilustración 26): a partir de la posición 1, roten la plantilla con centro de giro en P y un ángulo de 120° , luego marquen la silueta de la plantilla en esa posición y numérenla con el número 2; con la plantilla ubicada en la posición 2, apliquen una simetría axial a la plantilla respecto a la recta l (línea roja), luego marquen la silueta de la plantilla en esa posición y enumérenla con el número 3.

Ilustración 26

Ejemplo de la teselación del plano



Capítulo 4

Estrategia Analítica

En este capítulo presentamos una descripción del tratamiento dado a la información registrada para analizar el aprendizaje. También informamos cómo hicimos el análisis de los rasgos discursivos identificados en las producciones de los estudiantes.

4.1 Producciones Analizadas

Como mencionamos en el Capítulo 3, la experiencia de práctica se desarrolló con estudiantes de los cursos 1101, 1102 y 1103 en nuestra Práctica en Aula. Para realizar el análisis de los aprendizajes de los estudiantes, decidimos seleccionar algunas parejas de estudiantes teniendo en cuenta los siguientes criterios: primero, que la pareja hubiera trabajado en la mayoría de las tareas propuestas; segundo, que las producciones de la pareja fueran ricas discursivamente; esto significa, que en las respuestas no escribieran palabras sueltas o incomprensibles y no se limitaran a repetir la pregunta; tercero, que las producciones de las parejas seleccionadas tuvieran diferencias entre sí, pero fueran representativas del trabajo hecho por otros estudiantes; cuarto, que la producción fuera legible.

Luego de hacer el proceso de depuración de las producciones, aplicando los criterios que mencionamos en el párrafo anterior, escogimos las producciones de 17 parejas. En adelante, para referirnos a una pareja específica usamos la letra P y el número de la pareja. Por ejemplo, P1 hace referencia a la pareja 1. Seis de las parejas son del curso 1101: P9, P10, P11, P12, P14 y P17. Siete de las parejas son del curso 1102: P1, P3, P4, P5, P6, P15 y P16. Cuatro de las parejas son del curso 1103: P2, P7, P8 y P13.

4.2 Registro de la Información

Llamamos “producciones” a los escritos y representaciones gráficas realizadas por los estudiantes al resolver las tareas propuestas. Las producciones las organizamos en las tablas presentadas en los Anexos del 3 al 12. En estas, explicitamos los enunciados de las tareas, el material usado, las representaciones gráficas (escaneadas) y las producciones escritas (transcritas al pie de la letra).

El Anexo 3 corresponde a la Tarea 1. Los Anexos 4 y 5 corresponden a la Tarea 4, primera y tercera parte respectivamente. El Anexo 6 corresponde a la Tarea 3. Los Anexos 7 y 8 corresponden a la Tarea 6, primera y tercera parte respectivamente. El Anexo 9 corresponden a la Tarea 7. El Anexo 10 corresponde a la Tarea 2. Los Anexos 11 y 12 corresponden a la Tarea 5, primera y segunda partes respectivamente.

Aclaremos que, debido a la extensión del documento del trabajo de grado, decidimos excluir del cuerpo del trabajo el análisis de los rasgos discursivos de los estudiantes que identificamos en las Tareas 2 y 5. Estos análisis se encuentran en los Anexos 13.

4.3 Proceso de Análisis

Leímos la información registrada en las tablas de los Anexos 3, 4, 6, 7, 9,10 y 11, subrayando y colocando en negrita las palabras usadas por los estudiantes para referirse al movimiento o correspondencia en el plano. Con azul, destacamos las frases alusivas a la isometría. Cuando la frase contenía una palabra que consideramos importante de resaltar, la subrayamos y la ponemos en negrita. Cuando en la respuesta hay frases seguidas que hacen alusión a distintas características de la isometría, las separamos por una barra diagonal (/). Presentamos dos ejemplos del ejercicio, que se enmarcan en el movimiento de traslación:

“Diferencias: distancia del movimiento, **dirección**. Similitudes: desplazamiento en un segmento lineal. **Sentido**” (P11).

“El objeto hace un movimiento rectilíneo / hacia las coordenadas noreste” (P11)

En los Anexos 4, 5, 8, 9, 11 y 12 consignamos las imágenes que escaneamos de las construcciones que realizaron los estudiantes, para solucionar algunos numerales de las tareas propuestas. Para el análisis de las producciones registradas en el Anexo 11, resaltamos con verde los términos matemáticos usados por los estudiantes.

A partir de las palabras y frases resaltadas, creamos las tablas que presentamos en el Capítulo 5. Clasificamos las producciones teniendo en cuenta los rasgos discursivos de Sfar. Es decir, de las producciones escritas, analizamos el vocabulario (términos empleados y frases construidas), la sintaxis o las narrativas; de las representaciones gráficas analizamos los mediadores visuales y las rutinas empleadas.

Capítulo 5

Análisis de los Rasgos Discursivos

Este capítulo corresponde al análisis de las producciones discursivas de 17 parejas de estudiantes. Sin embargo, debido a que la Tarea 4 solo se pudo aplicar en el curso 1101, el análisis de las Tareas 1 y 4 las realizamos solo con las parejas que pertenecían a este curso (P9, P10, P11, P14 y P17). Cabe aclarar que nuestro propósito no es identificar o rastrear respuestas correctas o incorrectas. El objetivo es identificar el aprendizaje de los estudiantes, en términos de los rasgos discursivos, según el enfoque comunicacional propuesto por Sfard.

A continuación, presentamos el análisis de las Tareas 1, 4, 3, 6 y 7. Hacemos el análisis en este orden para contrastar los discursos sobre cada isometría. El análisis de las Tareas 2 y 5, correspondientes a la simetría axial, se encuentra en el Anexo 13. No lo incluimos en el cuerpo del trabajo por cuestiones de espacio.

5.1 Tarea 1: Introducción a la Traslación

Como mencionamos en el Capítulo 4, para el análisis de la Tarea 1 usamos la tabla del Anexo 3. Con base en la tabla del Anexo 3, generamos dos tablas, en las que sintetizamos la información obtenida. En la Tabla 8 listamos los términos empleados y en la Tabla 9 registramos las frases construidas por las parejas para referirse al movimiento. Para organizar la información, ubicamos los términos y frases en filas, que se refieren a los invariantes y descriptores centrales del movimiento, tal como los estudiantes aluden a estos: cómo se refieren al movimiento (fila 2), qué dicen de los invariantes del movimiento (filas 3, 4 y 5), cuál es el efecto del movimiento sobre la posición relativa del objeto y su imagen (fila 6) y por qué el movimiento no altera la forma ni el tamaño del objeto trasladado (fila 7).

Para realizar el análisis, nos referimos primero a los términos empleados, luego a las frases construidas por los estudiantes. En el análisis de la Tarea 1 no aludimos a rutinas ni a narrativas porque hasta ahora comienza el aprendizaje del discurso correspondiente y no tenemos indicios de ninguno de esos dos rasgos.

5.1.1 Términos Empleados

Tabla 8

Términos empleados por los estudiantes que aluden a la traslación

	Términos
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazó / desplazamiento (P9, P10, P11, P14, P17).
Magnitud	<ul style="list-style-type: none"> • Distancia / distancias (P11, P17).
Dirección	<ul style="list-style-type: none"> • Diagonal (P9, P14). • Dirección (P9, P11).
Sentido	<ul style="list-style-type: none"> • Izquierda / Derecha (P9). • Noroeste / Noreste (P11, P14).
Posición relativa	Ninguna pareja
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Coincide / Coincidió (P9, P11, P14, P17).

Aunque los estudiantes no habían estudiado en grados anteriores las isometrías del plano, vemos que ellos tienen una idea intuitiva del movimiento de traslación, al que se refieren haciendo uso de las palabras “desplazó” o “desplazamiento”. Es posible que el uso de estas palabras haya surgido del hecho de que, al resolver la tarea, ellos manipularon la plantilla sobre la tesela, trabajando la traslación como un movimiento o una acción.

P9, P10, P11, P14, y P17 hicieron uso de la palabra “desplazamiento” con la que hacen referencia a un movimiento de un objeto (en este caso la plantilla) sobre un plano para cambiar

de una posición a otra. Nos parece curioso el hecho de que los estudiantes relacionaran el término “desplazamiento” con un movimiento en línea recta (porque así lo efectuaron) y que ninguna pareja expresara que este movimiento podría ser curvo; puede que esto sea porque cuando vamos de un lugar a otro, intuitivamente lo hacemos en línea recta para llegar más “rápido”.

A continuación, realizamos el análisis del vocabulario que usaron los estudiantes para referirse a los invariantes de la traslación: magnitud, dirección y sentido. Cabe resaltar que solo P11 dio una descripción de la traslación usando palabras que hacen alusión a las tres invariantes de este movimiento.

Sobre la magnitud, solo P11 y P17 usaron el término “distancia(s)” como la palabra mediante la cual ellos se refieren a la magnitud de la traslación. Las demás parejas no hicieron uso de términos que pudieran relacionarse con la magnitud.

P9 y P14 usaron la palabra “diagonal” para referirse a la dirección de la traslación. Creemos que ellos reconocieron que los movimientos no se realizaron de manera vertical ni horizontal. P9 y P11 usaron el término “dirección”; sin embargo, no estamos completamente seguras de que esta palabra signifique la dirección de una traslación, tal como la conceptualizamos en el marco teórico. Muy posiblemente se referían al sentido.

Sobre el sentido, P11 y P14 hicieron uso de los puntos cardinales (noroeste o noreste) y P9 uso las palabras que refieren a la propia posición, como “izquierda” o “derecha”, en el intento de dar una descripción exacta del movimiento. Afirmamos que, los estudiantes que hicieron uso de los puntos cardinales tenían un lenguaje más especializado en comparación con los estudiantes que usan los términos “derecha” o “izquierda” debido a que en la cotidianidad es más

común referirse a estos que a los puntos cardinales. Sin embargo, P11 usó el término “noreste” para describir el movimiento de la plantilla de la posición uno a la dos, cuando en realidad esta se movió hacia el noroeste; aunque usan los puntos cardinales, los confunden.

Sobre la conservación de la posición relativa como característica de la traslación, no encontramos alguna palabra claramente asociada. Podríamos pensar que P9, P11, P14 y P17 al usar las palabras “coincide” o “coincidió”, se estaban refiriendo a que la inclinación del unicornio dibujado en la plantilla, con respecto al borde superior o inferior de la tesela no cambió. Pero podría ser que este término lo usaran para referirse al hecho de que la traslación es una isometría, quizás porque por medio de la plantilla ellos identificaron que el unicornio de la posición uno y de la posición dos tienen el mismo tamaño y la misma forma, al sobreponer la plantilla en estas posiciones.

5.1.2 Frases Construidas por los Estudiantes

Tabla 9

Frases construidas por los estudiantes que aluden a la traslación

	Frases
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazó de forma recta diagonal (P10). • Movimiento rectilíneo (P11). • Desplazamiento en un segmento lineal (P11). • Desplazó de forma rectilínea (P14). • Movimiento recto y directo (P14). • Desplazamiento lineal (P17). • Ninguno tuvo rotación (P17).
Magnitud	<ul style="list-style-type: none"> • Hasta la posición dos (P9). • Diferencias: distancia del movimiento (P11). • Diferentes distancias (P17).
Dirección	Ninguna pareja.
Sentido	<ul style="list-style-type: none"> • Hacia la izquierda (P9).

	<ul style="list-style-type: none"> • Hacia la parte superior izquierda (P10). • Sentidos contrarios / diferente sentido de desplazamiento (P10, P17). • Hacia las coordenadas noreste (P11). • Hacia la diagonal superior izquierda (P17). • En la dirección noroeste (P14).
Posición relativa	Ninguna pareja.
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Coincidió en sentido, posición y proporción (P14).

Con relación a cómo describen el movimiento, de forma general, tres de las cinco parejas reconocen que el movimiento es en línea recta. Para ello, hacen uso de frases como “movimiento rectilíneo” o “desplazamiento en un segmento lineal”. Un caso que nos llamó la atención fue la respuesta de P17, cuando dijo que este era un “desplazamiento lineal” y, al comparar las dos traslaciones afirmó que “ninguno tuvo rotación”. Esta respuesta nos da evidencia que ellos reconocen que existen otros movimientos en el plano, aunque este conocimiento no provenga de la escuela.

Al describir el movimiento, P9 se refirió únicamente al sentido. Puede que los estudiantes consideraran que la descripción del movimiento se hacía únicamente diciendo hacia dónde se dirigía el unicornio, sin pensar en la distancia que recorrieron con la plantilla al pasar de una posición a otra (la magnitud del movimiento), ni en el ángulo de inclinación respecto al borde inferior o superior de la tesela (la dirección). Ello puede deberse a que no les pedimos usar instrumentos de medición para estudiar el movimiento.

Con relación a la magnitud, como se evidencia en la Tabla 9, únicamente tres parejas aludieron a este invariante de la traslación. Recordemos que en esta tarea ellos no estaban haciendo uso de instrumentos de medición, así que, para referirse a ello, las parejas emplearon

frases como “hasta llegar” o “desde la figura uno hasta la figura dos”. Con estas frases, asumimos que estos estudiantes identificaron que el movimiento es finito ya que reconocen un inicio y un final de este. Al comparar varias traslaciones, P17 y P11 reconocen que, aunque los movimientos son de traslación no son los mismos porque las distancias son diferentes. Esto se evidencia en respuestas como “diferentes distancias” y “diferencias: distancia del movimiento”. Estas respuestas nos indican que ellos empezaron a referirse a la distancia como un invariante del movimiento.

Respecto a la dirección, ninguna pareja de estudiantes usó alguna frase para referirse a este invariante. P14 hizo uso de la palabra “dirección” en sus frases, pero refiriéndose al sentido, dado que asocia esta palabra con los puntos cardinales (ver Tabla 9).

Para aludir al sentido, encontramos que los estudiantes se apoyan de sus conocimientos básicos de lateralidad o puntos cardinales. P9, P10 y P17 hicieron uso de sus conocimientos básicos de lateralidad (izquierda o derecha). Con la frase “hacia la izquierda” (P9), inferimos que la traslación del unicornio fue hacia la izquierda sobre una recta horizontal. Por el contrario, de las frases “hacia la parte superior izquierda” (P10) o “hacia la diagonal superior izquierda” (P17), podemos deducir que la traslación del unicornio no era sobre una recta horizontal o vertical.

Ligado al párrafo anterior, P11 y P14 tienen un vocabulario más especializado, ellos aluden al sentido haciendo uso de los puntos cardinales secundarios. Además, P11, usó la palabra “coordenadas”, puede que los estudiantes hayan usado esta palabra incorrectamente confundiéndola con punto cardinal, pero también es posible que la pareja usara esta palabra porque reconocen que para dar una ubicación exacta de un punto en el plano cartesiano es necesario hacer uso de coordenadas (x, y) .

En las respuestas dadas por P10 y P17 al comparar las traslaciones, ellos identificaron que ambos movimientos tenían “sentidos contrarios” o “diferente sentido de desplazamiento”. Estas dos últimas frases resaltan el hecho de que para los estudiantes “izquierda” es lo contrario de “derecha” y que dar esta información es necesario para caracterizar el movimiento. De lo anterior, fue evidente para nosotras que todas las parejas que participaron de esta tarea reconocieron este invariante de manera intuitiva.

P14 es la única pareja que aludió a la isometría con la frase “coincidió en sentido, posición y proporción”. Podemos inferir que los estudiantes usaron el término “proporción” para indicar que el unicornio de la plantilla tiene el mismo tamaño que el unicornio de la tesela; los estudiantes usaron “posición” posiblemente para indicar que cuando la plantilla llegó a la posición final no fue necesario inclinarla para que quedara en el mismo lugar del unicornio. Sin embargo, no podemos asegurar qué significado tiene para P14 la palabra “sentido”.

Para finalizar el análisis de los rasgos discursivos de los estudiantes, fue evidente para nosotras la dificultad que tienen ellos para referirse a la dirección de la traslación. Esto puede deberse a que no habían estudiado el movimiento (como mencionamos en ocasiones anteriores). Además, en el contexto cotidiano cuando se solicita o se da una dirección se hace uso de lenguaje coloquial como “siga derecho y luego gire a la derecha” sin especificar cuantos grados.

5.2 Tarea 4: Traslación

Como se mencionó en el Capítulo 4, las producciones de los estudiantes de esta tarea se encuentran en los Anexos 4 y 5. Del Anexo 4 analizamos términos empleados, frases construidas y rutinas empleadas por los estudiantes para caracterizar los vectores de traslación. Para el análisis del numeral 1, usamos la tabla de este anexo. Con base en la tabla del Anexo 4, generamos dos tablas, en las que sintetizamos la información obtenida. En la Tabla 10 listamos

los términos empleados y en la Tabla 11 registramos las frases construidas por las parejas para referirse al vector de traslación y sus componentes. Para organizar la información, ubicamos las palabras y frases en filas de la siguiente manera: en la primera fila registramos cómo se refieren al vector de traslación y en las siguientes tres filas cómo aluden a los componentes del vector de traslación.

Para el análisis del numeral 3 usamos la tabla del Anexo 5; de este anexo analizamos las rutinas empleadas por las parejas para obtener la imagen por traslación del cuadrado dado.

5.2.1 Términos Empleados

Tabla 10

Términos empleados por los estudiantes que aluden al vector de traslación

	Términos
Cómo se refieren al vector de traslación	<ul style="list-style-type: none"> • Flecha (P9, P10).
Magnitud	<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud (P11). • Longitud (P14).
Dirección	<ul style="list-style-type: none"> • Dirección (P9, P10, P11, P14, P17).
Sentido	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido (P11, P17).

Respecto a cómo se refieren al vector de traslación, P9 y P10 aluden a este como una flecha. Creemos que esto sucedió por el enunciado de la tarea, por la representación gráfica del vector o por la explicación de la profesora. Suponemos que las demás parejas no hicieron alusión al vector porque se enfocaron fue en mencionar qué tenían en común las flechas y en qué se diferenciaban.

En el vocabulario de las cinco parejas, encontramos que: P11 es la única pareja que menciona los tres componentes del vector de traslación; P17 menciona el sentido y la dirección; P14 menciona la dirección y alude a la magnitud con la palabra “longitud”; inferimos que no recordó el nombre del componente, pero sí sabe que este corresponde a la longitud; P9 y P10 solo mencionaron la dirección. Ninguna de las parejas caracterizó el componente que mencionó, es decir no aludieron a un ángulo, una longitud o a los puntos cardinales, pero creemos que sí los tuvieron en cuenta para describir las diferencias y similitudes entre las flechas.

Al comparar los discursos de la Tarea 1 con los de la Tarea 4, es evidente que algunos estudiantes adquirieron nuevo vocabulario para referirse a la traslación, asociando el movimiento a los componentes del vector de traslación. Por ejemplo, en la Tarea 1, P10 no aludió a ningún invariante, en cambio en la Tarea 4 se refirió a la dirección; P14 en la Tarea 1 aludió a la dirección con el término “diagonal” mientras que en la Tarea 4 lo mencionó como la dirección.

Además, los estudiantes dejaron de usar los términos derecha o izquierda para referirse al sentido de la traslación. En relación a la magnitud, ellos dejaron de emplear el término “distancia” y lo reemplazaron por los términos “magnitud” o “longitud”. Respecto a la dirección dejaron de usar el término diagonal.

5.2.2 Frases Construidas por los Estudiantes

Tabla 11

Frases construidas por los estudiantes que aluden al vector de traslación

	Frases
Cómo se refieren al vector de traslación	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento con dirección y sentido (P17).
Magnitud	<ul style="list-style-type: none"> • Miden lo mismo (P9). • Tienen el mismo tamaño (P10).

	<ul style="list-style-type: none"> • Misma longitud (P14). • Tienen misma distancia los vértices de cada figura (P17).
Dirección	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento con dirección y sentido (P17).
Sentido	<ul style="list-style-type: none"> • Van a la misma dirección (P9). • Van hacia la misma dirección (P10). • Segmento con dirección y sentido (P17).

La única pareja que hace referencia al vector de traslación es P17 con la frase “segmento con dirección y sentido”. Es posible que los estudiantes usaran la palabra segmento porque a diferencia de la recta o el rayo, el segmento se puede medir. Además, esta pareja complementa el discurso afirmando que este tiene dirección y sentido, de lo que podemos inferir que los estudiantes reconocen los componentes del vector de traslación. En la Tarea 1, esta pareja no aludió ni al sentido ni a la dirección de la traslación, pero en la Tarea 4 sí incluyó en su vocabulario el sentido y a la dirección.

Respecto a la magnitud del vector, P9, P10, P14 y P17 aludieron a este componente. Las frases que usaron hacen referencia a que los vectores de traslación de una figura tienen la misma medida, tamaño o longitud, como se evidencia en los discursos de P9, P10 y P14. Aunque el discurso de P17 no es claro, creemos que ellos aluden a la distancia entre los vértices de la figura y su imagen por traslación afirmando que estos vectores tienen la misma distancia. En la Tarea 1, P10 y P14 no aludieron a la magnitud con términos o frases, pero en la Tarea 4 usaron frases como “mismo tamaño” y “misma longitud”, respectivamente, que aluden a la magnitud.

En los discursos de P9 y P10 vemos que ellos hacen uso de la palabra dirección; sin embargo, al analizar la frase en la que incluyen el término, lo acompañan del verbo “ir”, por lo que deducimos que están haciendo referencia al sentido del vector de traslación y no a la dirección. P17 menciona los dos componentes “sentido y dirección”; no podemos asegurar que,

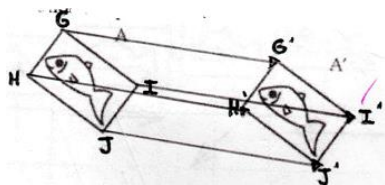
por ello, los estudiantes sí distinguen el significado de cada uno, pero el hecho de que nombren ambos en una misma frase nos indica que es posible que P17 encuentre alguna diferencia entre ellos. En cambio, en la Tarea 1, P9, P10 y P17 no aludieron a la dirección y tampoco usaron este término.

5.2.3 Rutinas: Numeral 1

A continuación, presentamos el análisis de rutinas observadas en las construcciones de los estudiantes que se encuentran en el Anexo 4. En el enunciado de la tarea les pedimos unir los vértices correspondientes por traslación de la Figura A mediante flechas. Identificamos que las cinco parejas establecieron como rutina: nombrar cada vértice y su correspondiente con letras mayúsculas, hacer uso de la comilla simple para diferenciar el punto imagen por traslación del original y representar con flechas los vectores de traslación. Inferimos que los estudiantes reconocen que al nombrar la figura de la derecha como A' , esta es la figura imagen por traslación de la Figura A, por lo que hicieron la representación gráfica del vector con origen en los vértices de la Figura A. Las construcciones de las cinco parejas son similares a lo que se ve en la Ilustración 27.

Ilustración 27

Representación de los vectores de traslación por P10



5.2.4 Rutinas: Numeral 3

Ahora vamos a presentar el análisis de las construcciones de los estudiantes, presentadas en el Anexo 5. Nos parece importante mencionar que los estudiantes, antes de realizar las construcciones de la imagen por traslación de la figura dada, caracterizaron cada uno de los vectores de traslación (numeral 2): es decir, previamente identificaron su magnitud, dirección y sentido. Pero, no todas las parejas lograron construir las imágenes por traslación de la Figura A mediante los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Ilustración 28

Construcción de P9

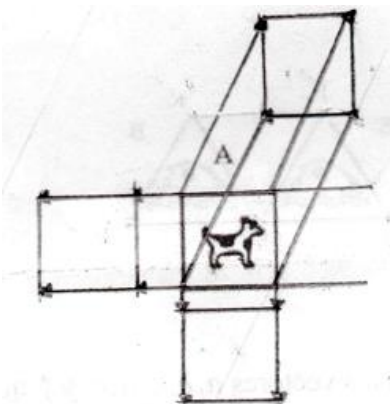
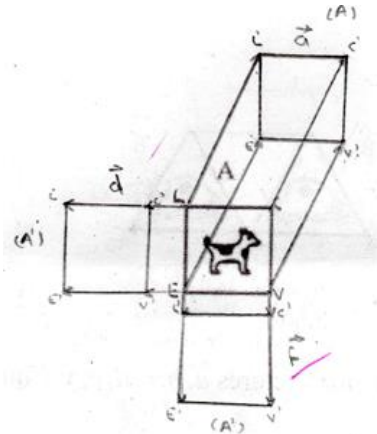


Ilustración 29

Construcción de P14



Debido a que no les pedimos hacer una descripción de los pasos que realizaron para construir la imagen del cuadrado por traslación (según la información de los 3 vectores), debimos inferir posibles rutinas, al revisar las producciones de P9 y P14. Suponemos dos rutinas que pudieron haber realizado estas parejas. Una posible rutina es: prolongar los lados horizontales de la figura; trazar flechas tal que el origen de esta sea un vértice de la figura y la medida del ángulo entre la horizontal y la flecha corresponda a la dirección de cada vector de traslación; marcar un punto que representa la punta de cada flecha, tal que la distancia del origen

de la flecha a esta sea igual a la magnitud del vector de traslación; unir los puntos imagen para construir la imagen por traslación de la Figura A correspondiente a cada vector. Por las marcas evidenciadas en la producción de P9 (Ilustración 28), suponemos que ellos establecieron esta rutina.

La otra posible rutina es: trazar flechas tal que estas sean paralelas a la representación gráfica de cada vector de traslación dado y contengan uno de los vértices de la figura dada; unir los puntos imagen (indicados por la punta de cada flecha) mediante segmentos, para construir la imagen por traslación de la Figura A. Por las marcas dejadas sobre el papel en la producción de P14 (Ilustración 29) suponemos que ellos establecieron esta rutina. Notamos que a diferencia de P9, P14 nombró los puntos correspondientes por traslación.

Ilustración 30

Construcción de P10

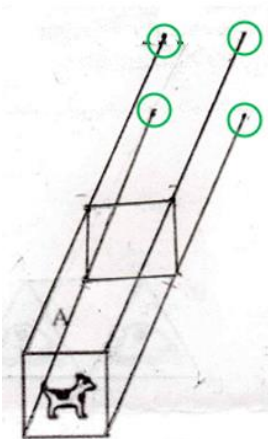


Ilustración 31

Construcción de P11

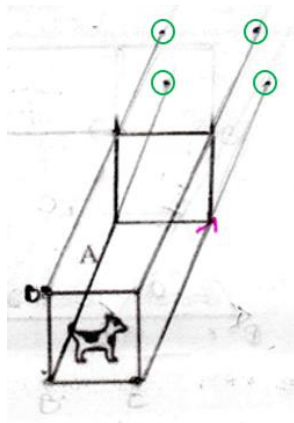
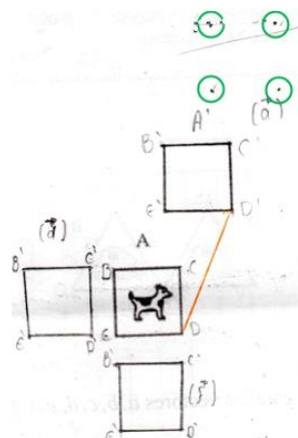


Ilustración 32

Construcción de P17



En las construcciones de P10 (Ilustración 30), P11 (Ilustración 31) y P17 (Ilustración 32), evidenciamos que los estudiantes establecieron la siguiente rutina: ubicar el centro del transportador en cada uno de los vértices de la figura, de tal manera que, el lado inicial del ángulo esté alineado con el lado horizontal de la figura al que pertenece el vértice; marcar un

punto (que señalamos con verde) tal que la recta que contiene a este y la que contiene el lado inicial, formen un ángulo cuya medida corresponda a la dirección del vector de traslación; usar la regla alineándola con el vértice de la figura y el punto que se halló anteriormente; trazar un punto sobre la recta tal que la distancia entre este punto y el vértice de la figura corresponda a la magnitud del vector de traslación; unir con segmentos cada una de los puntos obtenidos para construir la imagen por traslación de la Figura A.

Las construcciones de P10 y P11 son similares entre sí, sin embargo, P11 borró construcciones auxiliares dejando únicamente los segmentos que unen un vértice de la figura y su imagen por traslación. Resaltamos el hecho de que P17 a diferencia de P10, no trazó segmentos auxiliares. Adicional a ello, P17 nombró los vértices de la figura y su correspondiente por traslación con letras mayúsculas, además, hizo uso de la comilla simple para diferenciar el punto imagen por traslación de la figura original. Las imágenes por traslación de la Figura A que realizaron P10 y P17 no son iguales debido a que los estudiantes aun presentan dificultades en el uso de los instrumentos de medición, especialmente del transportador.

Estas rutinas son un avance discursivo significativo producto de la enseñanza. Los estudiantes se apropiaron del procedimiento para construir una imagen por traslación, de la acción de nombrar los vértices de una figura y de usar los instrumentos de medida y de trazo para construir la figura imagen por traslación. Es una forma especializada de actuar, que no conocían previamente.

5.3 Tarea 3: Introducción a la Rotación

Para este análisis hicimos uso de la tabla del Anexo 6 en donde incluimos todas las producciones correspondientes a esta tarea. Esta tabla la usamos para construir dos tablas en las que se encuentra información acerca del discurso de los estudiantes con relación a la rotación. En

la Tabla 12 registramos los términos empleados y en la Tabla 13 listamos las frases construidas por los estudiantes. En estas tablas consignamos cómo se refieren los estudiantes a los invariantes y descriptores centrales del movimiento: cómo se refieren al movimiento mismo (fila 2), qué dicen de los invariantes del movimiento (filas 3, 4 y 5), cuál es el efecto del movimiento sobre la posición relativa del objeto y su imagen (fila 6) y por qué el movimiento no altera la forma ni el tamaño de un objeto que rota (fila 7).

Al planear la tarea acerca de la rotación nosotras no tuvimos en cuenta el “diseño” (los puntos de adorno) de las alas de la mariposa en la tesela. Por esta razón, en la clase misma, decidimos agregar la siguiente indicación: “Encuentre otra posición [mediante una rotación] en la que el diseño de las alas de la tesela coincida con el de la plantilla”.

En seguida presentamos el análisis de los términos empleados, las frases construidas y los mediadores visuales que emplearon los estudiantes.

5.3.1 Términos Empleados

Tabla 12

Términos empleados por los estudiantes que aluden a la rotación

	Términos
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación / rotaciones / rotativo / rotamos (P1, P2, P3, P4, P5, P7, P9, P10, P12, P13, P14, P15, P16, P17). • Girar / giro / giró / giramos (P4, P6, P9, P12). • Plano (P4, P9). • Trasladó (P11).
Centro de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Vértice (P13).
Ángulo de giro	<ul style="list-style-type: none"> • 180° (P2, P3, P4, P8, P13, P14, P17). • 90° (P9, P17).
Sentido de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido (P3, P4).
Posición relativa	Ninguna pareja

Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Encajara (P4). • Coincidió / coincida / coincidiera / coincide (P6, P9, P10, P12, P16, P17). • Calza (P14).
---------------------------------------	---

Para referirse al movimiento, 14 de las 17 parejas usaron la palabra “rotación” o “rotativo”, y cuatro parejas usaron el término “giro” o algo similar. Respecto a las parejas que usaron el término “giro”, P4, P9 y P12, también añadieron en sus discursos el término “rotación” para referirse al mismo tipo de movimiento; por lo tanto, inferimos que estas parejas hacen uso de estos términos como sinónimos. Por el contrario, P6 solo usó la palabra “giró”; esto nos indica que posiblemente esta pareja aun no relaciona el término giro con el de la rotación.

P11 se refiere al movimiento de rotación usando la palabra “trasladó”. Podemos inferir que los estudiantes no se refieren al movimiento de traslación pues para hablar de este usaron la palabra “desplazamiento”. Usan la palabra “trasladó” para referirse a un cambio de lugar al mover la plantilla; aunque creemos que esto puede relacionarse con el cambio en la posición relativa de la rotación, no podemos asegurarlo. En el discurso de P4 y P9 hacen uso de la palabra “plano” pero con significados diferentes. P4 relaciona este término con una parte de la tesela, mientras que, P9 lo relaciona con toda la tesela.

Con relación a los invariantes de la rotación, ninguna de las parejas se refirió a las tres invariantes (centro de rotación, ángulo de rotación y sentido de la rotación) para describir el movimiento; solo se refirieron a dos o a uno de ellos. P3 y P4 hacen referencia al ángulo y al sentido de giro; P13 alude al ángulo de giro y al centro de giro; P2, P8, P9 y P17 sólo aluden al ángulo de giro. P1, P5, P7, P10, P11, P12, P15 y P16 no se refieren a ninguno de los invariantes.

P13 alude al centro de giro con la palabra “vértice” para indicar que se sitúa en la punta de una de las alas de la mariposa de la tesela (Ilustración 33). A diferencia de las demás parejas, ellos fueron los únicos que aludieron a este invariante solo con una palabra, que, además, es un término matemático con el que se hace referencia a puntos de intersección de dos segmentos en la configuración de los polígonos.

Ilustración 33

Representación del centro de giro “vértice” de P13

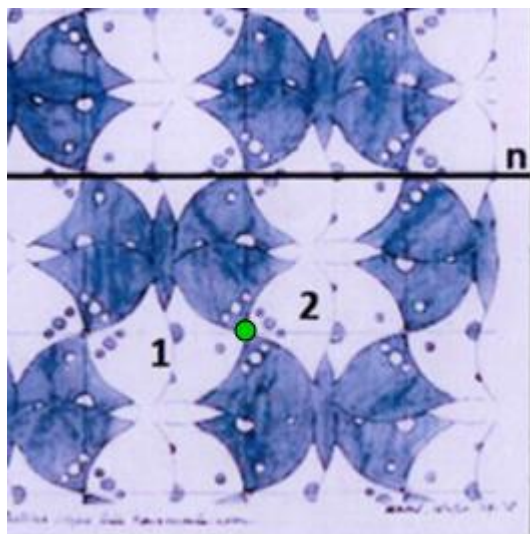
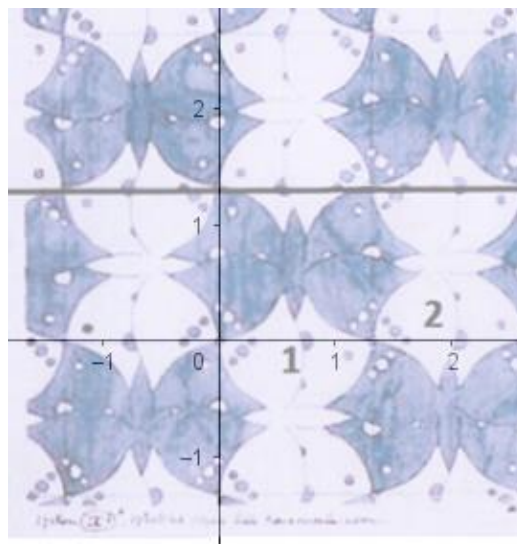


Ilustración 34

Visualización de los ejes del plano cartesiano en la tesela



Nota. La recta n no juega ningún papel en esta tarea.

Ocho parejas describieron el movimiento con la medida de un ángulo (180° o 90°); esto pudo haber sucedido porque estos ángulos son “fáciles” de identificar visualmente por corresponder a un cuarto o a medio giro. Sabemos que las 17 parejas en el año anterior habían trabajado sobre el plano cartesiano en el que los ejes forman cuatro ángulos de 90° . Puede que los estudiantes hayan relacionado lo anterior con la configuración de la tesela. En la Ilustración

34 mostramos esta representación; sin embargo, ninguna de las parejas hizo explícita esta relación.

P3 y P4 hicieron alusión al sentido de giro usando la palabra “sentido” en frases en las que especificaban si el movimiento era a favor o en contra de las manecillas del reloj. P3 ya había usado esta palabra: cuando se refirió al movimiento de traslación, dijo “en sentido noreste”, y cuando se refirió al movimiento de rotación, dijo “en sentido contrario a”. De lo anterior, podemos notar que ellos usan esta palabra como apoyo para describir hacia dónde se dirige la plantilla. P4 no había usado esta palabra en las tareas anteriores. Esto nos permite inferir que esta pareja usa esta palabra asociada al movimiento de las manecillas del reloj.

Para referirse al hecho de que la rotación es una isometría, ocho de las parejas incluyeron en sus discursos los términos “encajara”, “coincidió” y “calza”. Nos llama la atención que usaran estas palabras debido a que, aunque no pedimos esta información en el enunciado de la tarea, los estudiantes decidieron comparar las alas de la mariposa de la plantilla con las alas de la mariposa de la posición dos en la tesela. Inferimos que los estudiantes le dieron importancia a esto porque en la tarea de traslación les preguntamos “¿la plantilla coincidió con el unicornio de la posición dos?” o quizás porque era necesario para explicar que el diseño de las alas de la mariposa en la plantilla no coincidía con el diseño de las alas de la mariposa en la posición dos.

5.3.2 Frases Construidas por los Estudiantes

Tabla 13

Frases construidas por los estudiantes que aluden a la rotación

	Frases
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazamiento rotativo (P7). • Encima del plano (P9).

Centro de giro	<ul style="list-style-type: none"> • El punto del eje para desplazarla es la punta del ala de la derecha (P2). • La unión del ala de una mariposa con la otra / unión de las dos alas / punto de unión de la figura uno y dos (P2, P15, P16). • Eje de rotación / los ejes de rotación (P3, P14). • Punto de la derecha (P4). • El punto en la parte superior del ala (P5). • Punto fijo (P6). • Sobre una de sus esquinas / una esquina / esquina superior de la parte del ala arriba (P10, P17). • Punto de referencia (P12, P16). • Punto del ala derecha (P12). • Eje de rotación el vértice (P13). • La punta del ala (P16).
Ángulo de giro	<ul style="list-style-type: none"> • De 180° (P2, P3, P4, P8, P13, P14). • De 90° (P9). • Rota 90° (P17)
Sentido de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido contrario a las manecillas del reloj / en sentido de las manecillas del reloj (P3, P4, P11). • Hacia la derecha / a la derecha / hacia la izquierda / hacia abajo (P4, P7, P9, P11, P12, P13, P14, P15). • Hacia la izquierda por arriba / hacia la izquierda y hacia arriba / parte superior derecha (P6, P10, P17).
Posición relativa	Ninguna pareja.
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Coincidió la forma (P9). • Coincidió con la figura dos (P16). • Coincide el marco (P17).

En la Ilustración 23, se encuentra la tesela que les entregamos a los estudiantes. Los estudiantes debían mover la plantilla desde la posición uno hasta la posición dos. Sin embargo, al realizar el movimiento, 11 de las 17 parejas identificaron que el diseño de las alas de la mariposa en la plantilla no coincidía con las alas de la mariposa de la posición dos. En la clase, los estudiantes se dieron cuenta de esto, por lo tanto, en sus respuestas escribieron “no coinciden los

puntos” (P3), “no coincidió” (P1, P4, P5, P14), “puede que coincida la figura, pero no el diseño de la figura” (P6).

Por esta razón, en la clase misma, decidimos agregar la siguiente indicación “Encuentre otra posición [mediante una rotación] en la que el diseño de las alas de la tesela coincida con el de la plantilla”. De las 11 parejas que le dieron importancia al diseño de las alas, sólo seis (P4, P10, P11, P12, P14, P17) propusieron una nueva posición en la que coincidiera el diseño de las alas, escogiendo la posición de las alas de mariposa, cuatro, cinco y seis (Ilustración 35).

Ilustración 35

Propuesta de nuevas posiciones por los estudiantes

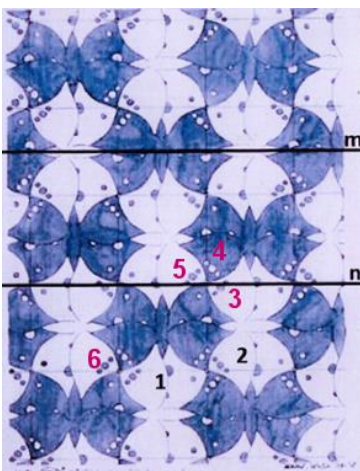
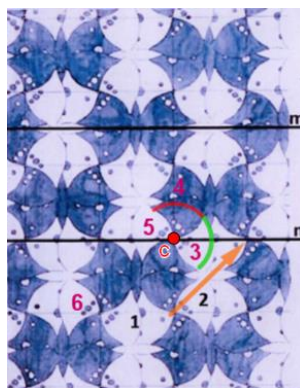


Ilustración 36

Representación de los movimientos descritos por P17



Nota. El vector representa la traslación de la posición uno a la posición dos. El arco de circunferencia verde representa la rotación de 90° desde la posición tres, con centro en C . El arco de circunferencia rojo representa la rotación de 90° desde la posición cuatro, con centro en C .

De los estudiantes que propusieron otra posición para que el diseño coincidiera, destacamos lo que hizo P17. Lo que nos llamó la atención es que ellos hicieron uso de tres movimientos (una traslación y dos rotaciones). En su respuesta, la frase “Si se desplaza hacia la

izquierda y hacia arriba [...]” alude a una traslación de la plantilla de la posición 1 a la 3, “[...] y se rota 90° coincide y si de ahí se rota otros 90° también” alude a dos rotaciones, la primera de la posición 3 a la 4 y la segunda de la posición 4 a la 5. De lo anterior podemos afirmar que ellos reconocen que estos movimientos son distintos, como se muestra en la Ilustración 36.

Respecto a las frases que aluden al movimiento de rotación, solo identificamos expresiones de P7 y P9. P9 dice que el movimiento es “encima del plano” y P7 usa la palabra “desplazamiento”, esto posiblemente es debido a que la tarea consistía en mover la plantilla sobre la tesela sin despegarla.

P7 usa la palabra “desplazamiento” para referirse a un movimiento, que no es en línea recta. Aunque usa la misma palabra en la Tarea 1 y la Tarea 3, es evidente que esta pareja reconoce que los movimientos de traslación y de rotación dejan un “rastros” distinto, ya que usan esta palabra en asociación con las expresiones “línea recta” o “rotativo” (Tabla 14).

Tabla 14

Uso del término “desplazamiento” de P8

Discurso de P8 en traslación	Discurso de P8 en rotación
“[...] un desplazamiento en línea recta [...]”.	“Un desplazamiento rotativo [...]”

Ahora vamos a comentar con qué frases los estudiantes se refieren a los invariantes de la rotación. En el discurso de P1 no se evidencia ninguna alusión a los invariantes.

P3, P4, P13 y P14 hacen referencia a las tres invariantes del movimiento, intentando describirlos. Sobre el centro de giro, P3, P13 y P14 aluden a este como el "eje de rotación”. Creemos que esto se debe a que lo relacionan con el eje en el cual gira una rueda o el eje de rotación de la tierra. De esto inferimos que ellos han usado esta frase en otros contextos.

Algunas parejas reconocen que hay un punto de la plantilla que se mantiene en el mismo lugar al aplicar el movimiento de rotación. Intentan describir la posición de este con frases como “la punta del ala” (P16), “punto del ala derecha” (P12), “punto en la parte superior del ala” (P5) y “el punto de la derecha” (P4).

Para referirse al centro de giro, P2, P15 y P16 se refirieron a este como un punto que resulta de la “unión” de las alas de la mariposa de la tesela. El discurso de P16 es más específico y nos permite identificar cuál es el centro de giro: “unión de la figura uno y dos”. Al ver la Ilustración 33 es evidente que las mariposas de la posición uno y dos tienen un único punto en común. Inferimos que al usar la palabra unión, los estudiantes querían referirse a un punto en el que concurren las alas de las mariposas y no propiamente a la unión como operación entre conjuntos. Es decir, los estudiantes confunden los términos “unión” e “intersección”.

P10 y P17 aludieron al centro de giro como una esquina haciendo referencia a un punto que pertenece a una de las alas de la mariposa. Para P17, fue explícito al indicar cuál esquina es la que se mantiene inmóvil al realizar la rotación; por eso mencionaron “esquina superior de la parte del ala arriba”. Sin embargo, en su descripción usaron dos palabras que podrían indicar lo mismo (superior y arriba). En general los estudiantes tenían una interpretación de lo que significa el centro de giro. Pero les faltaba vocabulario para hacer la descripción. Evidenciamos que las parejas, en sus discursos, intentaron describir respecto a qué se hace la rotación.

Sobre el ángulo de giro, ocho de las 17 parejas nombraron específicamente la amplitud de ángulo. Ellos indicaron que el movimiento de la plantilla de la posición uno a la posición dos era una “rotación de 180°”. No obstante, P9 fue la única pareja se refirió a dos rotaciones de 90° para llegar a la posición dos. Consideramos importante mencionar que los estudiantes, en sus

respuestas, hicieron uso de la notación correspondiente a la unidad de medida de los ángulos (grados). De lo anterior podríamos inferir que ellos ya habían trabajado con ángulos.

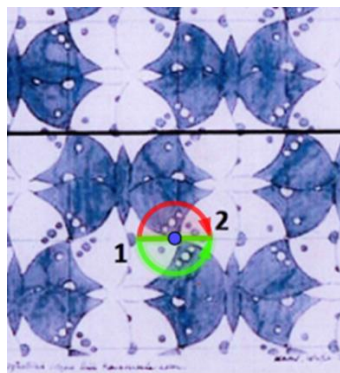
Con relación a las frases que usaron los estudiantes para aludir al sentido de giro tres parejas se apoyaron en el sentido de las manecillas del reloj. P3 y P4 nombraron la medida de un ángulo (180°) y un sentido usando las manecillas de reloj. De lo anterior, podríamos inferir que ellos distinguen dos sentidos (en contra y a favor de las manecillas del reloj). Sin embargo, puede que hayan omitido el signo que diferencia hacia dónde se genera el ángulo de rotación, porque era más sencillo para ellos referirse al sentido horario.

Ocho parejas de estudiantes hicieron uso de sus conocimientos básicos de lateralidad con las palabras “derecha”, “izquierda” y “abajo”, para mencionar hacia dónde se debía realizar la rotación. Además, ellos unen estas palabras con el artículo como “la” y preposiciones como “hacia” o “a”. Estas ocho parejas de estudiantes recurren a estas palabras porque no describen el movimiento sino la posición final con respecto a la inicial.

P6, P10 y P17 mencionan que el movimiento fue “hacia arriba”, “parte superior” o “por arriba”. Con esto inferimos que ellos identificaron que había dos rotaciones que permitían llegar de la posición uno a la dos. En la Ilustración 37 el arco de circunferencia verde representa la rotación hacia “abajo” y el rojo la rotación hacia “arriba”. Tal vez los estudiantes no cuentan con el vocabulario que permite diferenciar una rotación de la otra; en consecuencia, aclaran esto mencionado apoyándose de la palabra “arriba” o “superior”.

Ilustración 37

Representación de las dos rotaciones que permiten pasar de la posición 1 a la 2



Con respecto a la conservación del tamaño y de la forma, esta característica fue mencionada solo por tres parejas: P9, P16 y P17 al decir que la forma o figura imagen coincide con la original. Es evidente que ellos usaron la plantilla como medio para comparar las alas que se encuentran en la tesela. En el discurso de P17 resaltamos la siguiente frase: “coincide el marco de la figura, más no los puntos de su interior”. Podemos inferir que los estudiantes observaron el borde de las alas de la mariposa y los puntos del diseño de estas; por ello, aclararon que solo coincidió el borde de las alas. Por el contrario, en los discursos de P9 y P16 se evidencia que los estudiantes solo estaban observando el borde de las alas de la mariposa sin tener en cuenta los puntos del diseño; por este motivo, estas parejas dijeron que coincide la “figura” o la “forma”. De lo anterior, concluimos que P9, P12 y P17 verifican que, al realizar la rotación, el borde de una de las alas de la mariposa de la plantilla coincide con el borde de las alas de la mariposa de la posición 2.

Para finalizar el análisis de los rasgos discursivos de los estudiantes, resaltamos que ninguna de las parejas de estudiantes hizo uso de palabras o frases que aludieran a la posición relativa de la rotación. Esto nos llama la atención, porque en las tareas previas algunos de los

estudiantes sí usaron palabras que se refirieran al efecto del movimiento sobre la posición relativa. Puede que los estudiantes no creyeran pertinente aludir a esto, puesto que no encontraron ninguna regularidad al rotar la plantilla. Sin embargo, en la traslación, ellos reconocieron que, aunque se aplicaba un movimiento, la posición relativa de la plantilla se mantenía.

5.5.3 Mediadores Visuales

En la sesión de clase nosotras identificamos que a algunas parejas se les dificultaba rotar la plantilla dejando un punto “fijo”; ellos trataban de poner el dedo sobre lo que ellos consideraban debía ser el centro de giro, otros ponían la punta del esfero, dejando una marca en las plantillas como se muestra en la Ilustración 38.

Ilustración 38

Marca del centro de giro hecha por algunos estudiantes

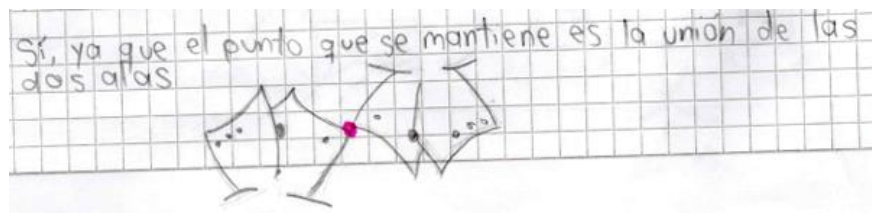


Además, fue evidente para nosotras que para los estudiantes no era importante aclarar cuál era el centro de giro o cuál punto se mantenía fijo, cuando pedimos que describieran el movimiento de la posición uno a la posición dos. Sin embargo, al preguntar si existía algún punto fijo que se mantuvo en el mismo lugar, los estudiantes intentaron describir cuál era este. Es notorio para nosotras que la descripción de dicho punto fue complicada para los estudiantes ya que no tenían vocabulario para describirlo. Incluso, encontramos en las respuestas de P15 un

dibujo hecho por la pareja indicando cuál era el punto que se mantuvo al realizar el movimiento; esto se evidencia en la Ilustración 39.

Ilustración 39

Representación del centro de giro de P15



5.4 Tarea 6: Rotación

Para este análisis hicimos uso de la tabla del Anexo 7 y 8. La tabla del Anexo 7 la usamos para construir dos tablas en las que se encuentra información acerca del discurso de los estudiantes con relación a la rotación. En la Tabla 15 incluimos los términos empleados y en la Tabla 16 listamos las frases construidas por los estudiantes. Debido a que algunos discursos eran similares, decidimos exponer en la tabla un ejemplo de estos, seguido de las parejas que lo dijeron. En la Tabla 15 consignamos cómo se refieren los estudiantes al movimiento de rotación, los invariantes y descriptores centrales del movimiento: cómo se refieren al movimiento (fila 2), qué dicen de los invariantes del movimiento (filas 3, 4 y 5), por qué el movimiento no altera la forma ni el tamaño de un objeto que rota (fila 6) y cuál es el efecto del movimiento sobre la posición relativa del objeto y su imagen (fila 7).

En la Tabla 16 registramos cómo se refieren los estudiantes al movimiento de rotación y descriptores centrales del movimiento: cómo se refieren al movimiento (fila 2), por qué el movimiento no altera la forma ni el tamaño de un objeto que rota (fila 3) y cuál es el efecto del movimiento sobre la posición relativa del objeto y su imagen (fila 4).

Con base en la tabla del Anexo 7, analizamos la sintaxis, los términos empleados, las frases construidas y las narrativas presentadas por los estudiantes. Con base en el Anexo 8, analizamos las rutinas empleadas por los estudiantes.

5.4.1 Sintaxis

Al contrastar los discursos de los estudiantes de esta tarea con las tareas anteriores, identificamos que las parejas usaron más términos matemáticos y mejoraron sus formas discursivas; sin embargo, algunas parejas aun omiten el sujeto y artículos en las frases. Además, presentan confusiones en el uso de algunos términos matemáticos.

En los discursos de P1, P6, P7, P10 y P17 no hacen alusión al sujeto. Por ejemplo, P10 afirma que “Ni el tamaño ni la forma cambia” o P7 comenta que “Hizo una rotación de 145 grados respecto al punto g .”. En estas frases no es evidente quién no cambia de tamaño ni de forma o quién hizo una rotación. Una manera de reescribir estas frases es agregando el sujeto: “Ni el tamaño ni la forma **del cuadrado $ABCD$** cambia” y “**el cuadrado $ABCD$** hizo una rotación de 145 grados respecto al punto g ”.

Otros casos en los que es necesario explicitar el o los sujetos son, por ejemplo, cuando P7 menciona que “La distancia es de $6,2cm$ ” y P11 comenta que “La distancia del vértice B del punto final es de $3cm$ ”. Debido a la falta de sujetos en el discurso de P7, no pudimos identificar la distancia a la que hacen referencia. Asumimos que P11 hace referencia a la distancia entre el vértice y el centro de giro; agregando esta información al discurso obtenemos: “La distancia del vértice B del punto final **al centro de giro G** es de $3cm$ ”.

Además del sujeto, P1 también omite el artículo “una” en la frase “Realizó rotación de 135° ”; como sabemos, los artículos les dan coherencia a las frases, por lo que esta frase puede reescribirse como “**el cuadrado ABCD** realizó **una** rotación de 135° ”.

En algunos de los discursos de los estudiantes identificamos confusiones en el uso de términos. Por ejemplo, P3 usa las palabras círculo y circunferencia como sinónimos; esto lo inferimos porque en sus discursos no hacen mención a alguna diferencia entre estos términos.

P2 además de omitir uno de los sujetos, menciona que la distancia entre dos puntos se puede expresar en grados: “La distancia desde el centro de giro es de 135° ”. Si reescribimos esta frase realizando las respectivas correcciones, esta frase quedaría como “la distancia desde el centro de giro al vértice **B** es de **3cm**”. Pese a las anteriores falencias discursivas, resaltamos que en esta tarea 12 de las 17 parejas aludieron al sujeto que realizó la rotación mientras que, en la Tarea 3, P12 fue la única pareja que mencionó el sujeto (plantilla) que realizó la rotación.

5.4.2 Términos Empleados

Tabla 15

Términos empleados por los estudiantes que aluden a la rotación

	Términos
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación / rota (P1, P2, P4, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P14, P15, P16, P17). • Giro / giró (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P9, P11, P12, P13, P14, P15, P16). • Desplazó (P17).
Centro de giro	<ul style="list-style-type: none"> • G (P3, P6, P9, P13, P14, P15, P16) • g (P7, P11).
Ángulo de rotación	<ul style="list-style-type: none"> • 135° (P1, P2, P4, P5, P17). • -135° (P1, P3, P9, P13, P14, P16). • 130° (P2). • 140° (P2).

	<ul style="list-style-type: none"> • 180° (P4). • 225° (P6). • 145 (P7) • -145° (P10). • 134° (P11). • -134° (P15) • -147° (P12). • 230° (P17).
Sentido de rotación	<ul style="list-style-type: none"> • [Sin signo] (P1, P2, P4, P5, P6, P7, P11, P17). • [Signo menos] “-” (P1, P3, P9, P10, P12, P13, P14, P15, P16).
Conservación del tamaño y de la forma	Ninguna pareja

En las producciones de los estudiantes, encontramos que, para referirse al movimiento, nueve de las 17 parejas usan las palabras “rotación” y “giro”, tres solo usan la palabra “rotación”, cuatro usan la palabra “giro” y P17 hace alusión al movimiento con las palabras “rota” y “desplazó”. Las parejas que usan las palabras “rotación” y “giro” las usan como sinónimos entre sí; es posible que este hecho, esté relacionado con las palabras que usamos al redactar el enunciado de la tarea que propusimos: utilizamos el término rotación en el título y “giro” en la pregunta “¿Cuánto giró el cuadrado $ABCD$ respecto al centro de giro (punto G)?”.

En cuanto al uso solo del término “rotación” empleado por P7, P8 y P10, consideramos que esto se debe a que, durante las sesiones de clase, mencionamos con más frecuencia esta palabra para referirnos a este movimiento. Respecto a P3, P5, P12 y P13 que solo usaron la palabra “giro”, no podemos afirmar que ellos relacionaran este término con el término rotación. Ellos lo usaron para responder a la pregunta mencionada en el párrafo anterior. P17 se refiere al movimiento de rotación con el término “desplazó”; creemos que esto se debe a que en la Tarea 3 (introducción a la rotación), se les pidió a los estudiantes mover una plantilla haciendo énfasis en

que esta no se podía despegar del plano. Sabemos que P17, con el término “desplazó”, no se está refiriendo a una traslación, porque en sus discursos también usa la palabra “rota”; por tanto, creemos que esta palabra la usa para aludir al hecho de que la plantilla cambia de una posición inicial a una final.

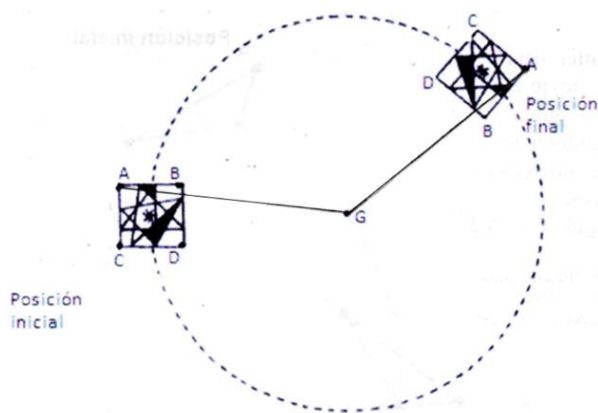
Nueve de las 17 parejas hacen alusión al centro de giro con la notación de punto, incluyendo en sus discursos la letra “*G*”. P3, P6, P9, P13, P14, P15 y P16 usaron la letra “*G*” en mayúscula; es posible que esto se deba a que en la figura dada se encuentra la representación del centro de giro como un punto nombrado *G*. Adicional a esto, en las preguntas que realizamos, explicitamos que el centro de giro era el punto *G*. Nos parece extraño que P7 y P11 hicieran referencia al centro de giro con la letra “*g*” en minúscula, puesto que cuando nombran otros puntos (vértices) lo hacen con letras mayúsculas.

Evidenciamos un avance en el aprendizaje de las parejas mencionadas en el párrafo anterior. P13 en la Tarea 3, aludió a este invariante con el término “vértice”, como producto de la enseñanza en la Tarea 6 se refirió a este como el “punto *G*”. P3, P6, P9, P14, P15 y P16 en la Tarea 6 incluyeron en sus discursos el centro de giro al describir una rotación.

Aunque evidenciamos variedad en la información expuesta sobre la medida del ángulo de rotación, resaltamos el hecho de que 15 de las 17 parejas expresaron la medida del ángulo en grados ($^{\circ}$). P7 al referirse al ángulo de rotación no hizo uso de este símbolo y P8 es la única pareja que no mencionó el ángulo de giro. Al revisar su producción dejaron la respuesta redactada y el espacio para escribir el ángulo; es posible que esto se deba a que no tenían transportador. Además, en la figura dejaron representados los lados del ángulo *AGA* (Ilustración 40). 8

Ilustración 40

Construcción de los lados del $\angle AGA$ por P8



Con relación al sentido de rotación, P1, P3, P9, P10, P12, P13, P14, P15 y P16 hacen uso del signo menos (–) para indicar que el sentido del ángulo es a favor de las manecillas del reloj. P2, P4, P5, P6, P7, P11 y P17 no ponen ningún signo (+ o –). Consideramos que hay al menos dos razones para ello: la primera, es que el sentido del ángulo sea en contra de las manecillas del reloj, es decir que el ángulo sea positivo; en matemáticas sabemos que si un número es positivo no necesariamente se debe anteceder con el signo más (+). La segunda, es que los estudiantes no le hayan dado importancia a indicar el sentido del ángulo; por ejemplo, P4, P5, P11 y P17 explicitaron de manera correcta la medida del ángulo, pero no hicieron uso del signo negativo para indicar el sentido del ángulo de rotación. En los discursos de los estudiantes no encontramos algún término con el que hicieran referencia al hecho de que la rotación conserva el tamaño y la forma de las figuras.

5.4.3 Frases Construidas por los Estudiantes

Tabla 16

Frases construidas por los estudiantes que aluden a la rotación

	Frases
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación de x° (P1, P4, P5, P6). • Rotación de x grados respecto al punto g (P7). • Giró $-x^\circ$ (P1, P6, P12). • El cuadrado $ABDC$ hizo una rotación de x° (P2). • El cuadrado $ABCD$ giró $-x^\circ$ (P3). • El cuadrado giró x° (P4). • El cuadrado $ABCD$ tuvo una rotación de (P8). • El cuadrado $ABCD$ giró respecto al centro de giro (G) $-x^\circ$ (P9). • Respecto al centro punto g el giro fue de x° (P11). • El cuadrado $ABCD$ giró $-x^\circ$ respecto al punto G (P13, P14). • Tuvo un giro respecto al punto G de $-x^\circ$ (P15). • El cuadrado $ABCD$ giró $-x^\circ$ respecto al centro de giro (punto G) (P16). • En sentido de las manecillas se desplazó x° y en sentido antihorario x° (P17).
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • No cambió su tamaño y tampoco su forma (P1, P3, P7, P10, P11, P13). • No cambió su forma (P4). • Su tamaño es el mismo (P5). • Conservó su tamaño y forma (P6, P9). • El tamaño del cuadrado no cambió [...] la forma no cambió (P8, P12). • El tamaño y la forma se mantuvo tras la rotación (P14). • El cuadrado $ABCD$ no tuvo alteraciones de tamaño ni de forma (P16). • El tamaño no cambió, la forma del cuadrado no cambió (P17).
Posición relativa	<ul style="list-style-type: none"> • Lo único que cambió fue la orientación del cuadrado (P10). • El cuadrado cambió de posición -147° (P12). • Solo cambió de posición (P13). • Su sentido y posición sí cambiaron (P14). • La figura cambió de posición (P16). • Cambió su posición (P17).

Nota. La variable x representa la medida del ángulo de rotación mencionado por los estudiantes.

En los discursos, P9, P13, P14, P15 y P16, explicitan todos los invariantes de la rotación al momento de referirse al movimiento que realizó el cuadrado $ABCD$ para pasar de la posición inicial a la posición final. Ellos afirman que el movimiento es un giro; especifican el ángulo de rotación, indicando la medida en grados, el signo que indica el sentido de rotación y el centro de giro, haciendo referencia a un punto nombrado con la letra G . P9, P15 y P16 a diferencia de P13 y P14, nombraron primero el centro de giro y posteriormente el ángulo de rotación. P13, P14 y P15 no usaron la frase “centro de giro” en sus discursos; en cambio usaron la frase “[...] respecto al punto G ”, la cual consideramos que alude al centro de giro. P15 a diferencia de las demás parejas, no especificó el sujeto.

P1, P3, P6 y P12 explicitan dos de los invariantes de la rotación: el ángulo medido en grados y el sentido de rotación indicado por el signo negativo. P3 y P12 se refieren al movimiento como un giro. P1 y P6 se refieren al movimiento como una rotación y un giro; además, inferimos que ellos distinguen un ángulo positivo de uno negativo, porque en sus discursos explicitan dos ángulos: uno con signo negativo y otro sin signo, el cual por convención sabemos que es positivo. P3, a diferencia de P1, P6 y P12, mencionan el sujeto.

P7 y P11 explicitan dos invariantes: ángulo y centro de rotación. Ambas parejas coinciden en que el centro de giro es un punto al escribir la letra “ g ” en minúscula. P7 se refiere al movimiento como una rotación, mientras que P11 se refiere al movimiento como un giro. P7 a diferencia de las demás parejas, no expresa la medida del ángulo en grados con el símbolo ($^{\circ}$), en cambio escribe la palabra “grados”.

P1, P3, y P12, no aludieron al centro de giro; creemos que esto se debe al menos a tres razones: la primera, es que los estudiantes omitieron esta información, debido a que la pregunta que se realizó fue “¿Cuánto giró el cuadrado $ABCD$ respecto al centro de giro (punto G)?”. Y

esto les proporcionó información respecto a que la rotación del cuadrado se realizó con centro de giro en el punto G ; la segunda, se relaciona con la primera y es que los estudiantes no redactan la respuesta utilizando todos los datos, sino únicamente lo que se les pregunta; la tercera, es que al incluir la palabra “cuánto” en la pregunta, esta pudo condicionar a los estudiantes a dar como respuesta un valor numérico (la medida del ángulo de rotación).

El discurso de P17 nos parece curioso debido a que ellos se refieren al movimiento como un “desplazamiento”. No obstante, aluden a dos ángulos de rotación, por lo que pensamos que ellos no están considerando otro movimiento diferente al de rotación. Además, ellos usan dos maneras para referirse al sentido de rotación, apoyándose del movimiento de las manecillas del reloj, “En sentido de las manecillas se desplazó 135° y en sentido antihorario 230° ”. El discurso de P8 no proporciona la información suficiente para caracterizar el movimiento; ellos solo afirman que es una rotación, pero no aluden a ninguno de los invariantes. P2, P4 y P5 solo aluden al ángulo de rotación indicando una medida en grados. P10 no construyó alguna frase para describir la rotación que realizó el cuadrado $ABCD$.

Con relación al hecho de que la rotación conserva la forma y el tamaño de las figuras, P2 y P15 son las únicas parejas que no hacen referencia a esto. En los discursos de P1, P3, P7, P8, P10, P11, P12, P13 y P17 evidenciamos que los estudiantes reconocen que después de hacer una rotación, no se presentan cambios en el tamaño ni en la forma de la figura; esto lo afirmamos debido a que en sus discursos incluyen la frase “no cambió”. En la Tarea 3, P17 fue la única pareja que aludió a esto, por lo que notamos un avance discursivo en las parejas P1, P3, P7, P8, P10, P11, P12 y P13. P8 y P12 en sus discursos incluyen el sujeto “cuadrado”, P17 lo menciona solo cuando se refiere a la forma. P1, P3, P7, P10, P11, P13, no mencionan el sujeto debido a que solo respondieron la pregunta que se les realizó. Resaltamos que en la frase “[...] no tuvo

alteraciones de tamaño ni de forma” del discurso de P16, la pareja alude a lo mismo que los estudiantes que usaron la frase “no cambió”.

A diferencia de las parejas mencionadas en el párrafo anterior, P6, P9 y P14, usan las palabras “mantiene” o “conserva” aludiendo al “no cambió” del tamaño y la forma de la figura después de hacer la rotación. P4 y P5 solo aluden a una de las características de la figura, aluden a que después de aplicar una rotación, no cambia la forma del cuadrado (P4) o a que el tamaño es el mismo (P5).

Nos parece importante mencionar que P5 y P15, afirmaron que el cuadrado, después de la rotación, tuvo un cambio de forma, quedando en la posición final un rombo en lugar de un cuadrado (Tabla 17). Esta afirmación está relacionada con el hecho de que, al momento de estudiar las figuras geométricas, algunos profesores acostumbramos presentar los cuadrados de tal manera que uno de sus lados este contenido en una recta horizontal y los rombos, de tal manera que uno de sus vértices esté contenido en una recta horizontal (Ilustración 41).

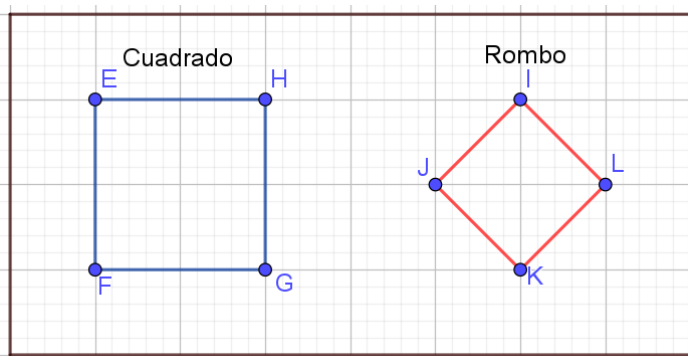
Tabla 17

Discursos de P5 y P15

Discurso de P5	Discurso de P15
“Posición inicial era un cuadrado y en la final quedó como un rombo”	“El cuadrado tuvo un cambio en su forma ya que esta quedó en forma de rombo”

Ilustración 41

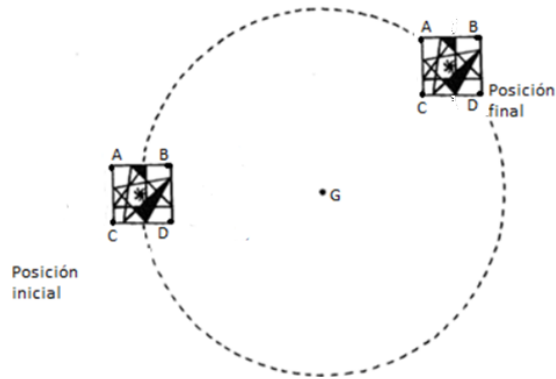
Imagen prototípica de la representación del cuadrado y del rombo



A diferencia de la Tarea 3, en esta tarea sí hubo estudiantes que se refirieron a la posición relativa. Seis de las 17 parejas en sus discursos hacen alusión al cambio en la posición relativa del cuadrado. P10, P12, P13, P14, P16 y P17 mencionan en sus producciones escritas que el cuadrado “cambió”. P12, P13, P14, P16 y P17 afirman que lo que cambió fue la posición. P12 relaciona el cambio de posición con un ángulo de rotación, al escribir “el cuadrado cambió de posición –147°”, de lo anterior inferimos que la pareja quiere resaltar que el cambio de posición lo causó una rotación. En el discurso de P14, además de mencionar la posición, también afirman que el sentido cambió. Suponemos que esta pareja utilizó la palabra “sentido” para referirse al hecho de que además de cambiar de lugar en el plano (posición), el cuadrado cambió de posición relativa, descartando la posibilidad de que el resultado de la rotación sea el presentado en la Ilustración 42; Es posible que para P10 al referirse al cambio de “orientación” quisieran hacer referencia a lo que sucede respecto a los vértices de la figura como P14.

Ilustración 42

Representación gráfica de lo que inferimos del discurso de P14 con la palabra “sentido”



5.4.4 Narrativas

A partir de las producciones escritas de los estudiantes identificamos tres narrativas.

En una parte de esta tarea se les pidió a los estudiantes medir la distancia desde el centro de giro G hasta el vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición inicial y la distancia desde el centro de giro G hasta el vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición final, esto para que ellos vieran que la distancia era la misma. Posteriormente, debían dar una explicación geométrica de lo ocurrido. En los discursos de P10, P12 y P14 identificamos las narrativas que presentamos en la Tabla 18.

Tabla 18

Narrativas expresadas por P10, P12 y P14

Pareja	Narrativa
P10	“Al ser una rotación completamente circular no se genera alteraciones ya que las características de un círculo es que su radio es el mismo por tanto la distancia no cambia”
P12	“Porque es una circunferencia el radio es la misma por lo que la distancia no cambia”

P14	“Las distancias son las mismas debido a que la rotación trata una circunferencia y la distancia de los puntos desde el centro hasta los vértices se asemejan o hacen el papel del radio de esta misma circunferencia”
-----	---

En las narrativas identificamos que los estudiantes hacen alusión a atributos o propiedades de objetos matemáticos generales como: circunferencia, círculo, radio, rotación y punto. P10 y P14 relacionan la rotación con una circunferencia, aunque P10 no usa explícitamente la palabra circunferencia en su discurso, vemos que en lugar de esta menciona las palabras “circular”, “círculo” y “radio”, con las cuales está haciendo referencia a la circunferencia. P10, P12 y P14 relacionan el hecho de que el movimiento de rotación se realiza sobre una circunferencia con el hecho de que el radio de una circunferencia es constante, usando esto como argumento para explicar el por qué las distancias desde el centro de giro a un vértice y a su imagen por rotación son iguales.

A diferencia de la Tarea 3, en las que los estudiantes no expresaron narrativas, en la Tarea 6 identificamos las narrativas anteriormente mencionadas, las cuales son evidencia de un avance discursivo.

5.4.5 Rutinas: Numeral 2

A continuación, presentamos el análisis de rutinas encontradas en las construcciones de los estudiantes que se encuentra en el Anexo 8. Todas ellas marcan un avance en el discurso de los estudiantes acerca de la rotación, producto de la enseñanza. Aunque no todas producen el resultado deseado, muestran que los estudiantes comienzan a apropiarse del procedimiento que les enseñamos. En el enunciado de la tarea se les pidió hallar el centro de giro de la rotación de un triángulo ABC dada la representación gráfica de su posición inicial y final. Para ello, debían construir las mediatrices para dos segmentos cuyos extremos son un vértice del triángulo y su

imagen por rotación. En esta tarea solo participaron 13 de las 17 parejas de estudiantes; esto se debe a que algunos usaron más tiempo para resolver los otros numerales de la tarea y, en consecuencia, no alcanzaron a realizar ninguna construcción. Para este análisis realizamos una agrupación de las parejas.

En el primer grupo ubicamos a las parejas P3 y P10 debido a que sus construcciones son similares y tienen establecida la siguiente rutina: trazar los segmentos cuyos extremos son un vértice del triángulo ABC y su imagen por rotación; hallar las mediatrices de estos segmentos aplicando la rutina que se aprendió en clase¹²; marcar el centro de giro el cual es el punto de intersección entre las mediatrices; construir las circunferencias cuyo centro es el centro de giro y radio el segmento cuyos extremos son el centro de giro y un vértice del triángulo ABC o $A'B'C'$; construir los lados del ángulo tal que, el lado inicial corresponde a el rayo determinado por el centro de giro y un vértice del triángulo de la posición inicial, el lado final sea el rayo determinado por el centro de giro y el vértice correspondiente por rotación; tomar y explicitar la medida del ángulo de rotación. Resaltamos que P3 además de aplicar la rutina para hallar el centro de giro, señaló con una flecha el sentido del ángulo de rotación (Ilustración 43). Aun así, podemos inferir que este invariante aún no es claro para los estudiantes, pues las flechas señalan el sentido de giro contrario al correspondiente en la tarea.

¹² Dados los puntos A y B : i) trazar el \overline{AB} . ii) trazar un arco de circunferencia con centro en A y radio de longitud mayor que la mitad de AB . iii) con el mismo radio, trazar un arco de circunferencia con centro en B . iv) trazar la recta mediatriz que contiene los puntos de intersección entre los arcos de circunferencia.

Ilustración 43

Señalización del sentido del ángulo de rotación de P3

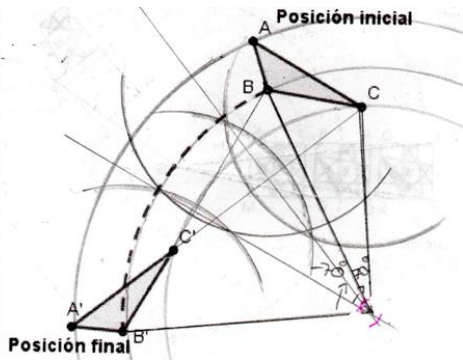
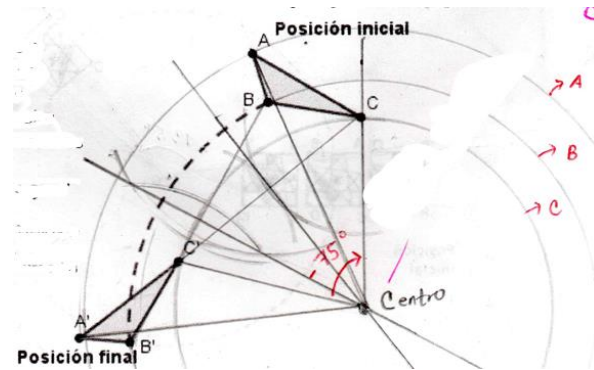


Ilustración 44

Uso de la flecha para indicar el sentido del ángulo de giro por P1



En el segundo grupo ubicamos a las parejas P1, P2, P5, P15 y P16. La rutina que establecieron para hallar el centro de giro y la medida del ángulo de rotación es la misma que emplearon las parejas del primer grupo. No obstante, estas parejas tuvieron dificultades en el manejo del transportador para medir del ángulo de rotación. Esto lo inferimos debido a que estas parejas explicitaron una medida del ángulo de rotación distinta a la correspondiente. Las construcciones de P1 y P5 son similares, además, para indicar el sentido de giro, hicieron uso del signo menos. Sin embargo, P1 señala el sentido de giro con una flecha, en mismo sentido indicado por el signo (Ilustración 44).

En el tercer grupo ubicamos a P8, la rutina que ellos emplearon es la siguiente: trazar los segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo ABC y su imagen por rotación; hallar las mediatrices de estos segmentos aplicando la rutina que se aprendió en clase; marcar el centro de giro el cual es el punto de intersección entre las mediatrices; construir los arcos de circunferencia cuyo centro es el centro de giro y radio el segmento cuyos extremos son el centro de giro y un vértice del triángulo ABC o $A'B'C'$; tomar y explicitar la medida del ángulo de rotación. En la Ilustración 45 mostramos la construcción de P8.

Ilustración 45

Construcción de las mediatrices para hallar el centro de giro por P8

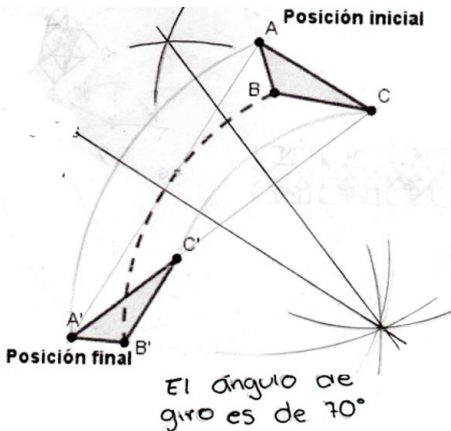
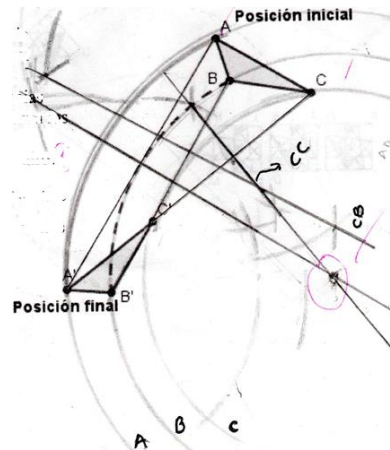


Ilustración 46

Construcción de las mediatrices para hallar el centro de giro por P6



Ubicamos a P4, P6 y P13 en el cuarto grupo debido a que emplearon la rutina establecida para construir la mediatriz y hallar el centro de giro. En la Ilustración 46 presentamos la producción de P6, en la que se observa que construyó tres mediatrices, las cuales corresponden a los segmentos AA' , CC' y BC' , no estamos seguras del orden en que las construyeron, aun así, inferimos que al trazar las mediatrices de BC' y AA' , y ver que estas no se intersecaban, decidieron trazar la mediatriz del segmento CC' , la cual se intersecó con las dos mediatrices, pero resaltaron la intersección de las mediatrices de los segmentos AA' y CC' , aunque no dejaron marcas es posible que hayan verificado si ambos puntos de intersección eran o no el centro de giro.

No ubicamos en ningún grupo a P7 y P9 debido a que estas parejas no establecieron ninguna rutina en sus construcciones. No hay evidencias suficientes, como marcas de compás o trazos en el papel, que nos permita identificar cómo P9 halló el punto que representa el centro de

giro. Es posible que, para marcar este punto, hayan copiado la medida del radio en la tarea de alguno de sus compañeros. Respecto al ángulo de giro que ellos mencionan (90°) tampoco hay marcas que permitan identificar cómo midieron el ángulo de giro, ellos afirman que la medida de este ángulo es de 90° , por ello creemos que lo relacionaron con el ángulo que forma el segmento BB' y su mediatriz (Ilustración 47)

En la producción de P7 (Ilustración 48), aunque se evidencian varios trazos de arcos de circunferencias, no encontramos la relación de estos, con la construcción de alguna de las mediatrices (líneas rojas), por lo que no identificamos qué rutina establecieron para hallar el centro de giro que marcaron en su producción. Sin embargo, al revisar la construcción, dos de estas líneas rojas sí son mediatrices de los segmentos AA' y CC' . Por la línea curva que hicieron cerca al punto de giro, creemos que esta indica que el ángulo formado por el vértice C , el centro de giro y el vértice C' , mide 72° .

Ilustración 47

Representación del centro de giro por P9

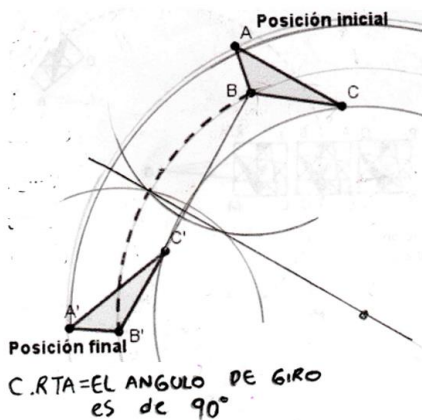
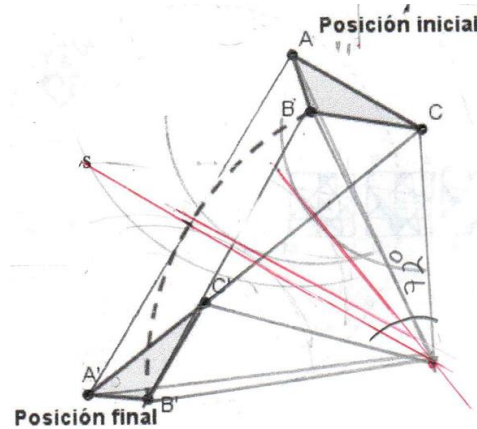


Ilustración 48

Representación de las mediatrices y el ángulo de rotación por P7



5.5 Tarea 7: Aplicación de lo Aprendido

Para este análisis hicimos uso de la tabla del Anexo 9. En este presentamos una tabla en la que registramos las construcciones de los estudiantes luego de aplicar las isometrías del plano a una plantilla sobre un cartón paja para teselarlo. Adicionalmente, registramos cómo describen los estudiantes las isometrías que aplicaron a la plantilla para pasar de una posición a otra.

Aclaremos que no explicitamos cada una de las producciones escritas por parejas de estudiantes, debido a que muchas de ellas eran similares entre sí. Por consiguiente, decidimos analizar las producciones escritas de algunas parejas que son representativas. Adicionalmente, mencionamos que, para construir la tesela artística, P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P13, P15 y P16, solo aplicaron rotaciones y simetrías axiales; esto se debe a que, como ya lo mencionamos, no alcanzamos a estudiar el movimiento de traslación con estas parejas que pertenecían a los cursos 1102 y 1103.

En seguida presentamos el análisis de la sintaxis y el vocabulario en las producciones escritas de los estudiantes.

5.5.1 Sintaxis

Al revisar las producciones de las parejas de estudiantes de esta tarea para describir las isometrías que aplicaron al teselar el cartón paja, identificamos que las parejas usaron más términos matemáticos que en tareas anteriores, al aludir a algunos de los invariantes de las isometrías correspondientes. Sin embargo, algunas parejas aún omiten sujetos, preposiciones o artículos.

En los discursos de P2, P3, P6, P8, P9, P12, P14 y P17 no mencionaron el sujeto que realiza el movimiento que describen. Por ejemplo, P6 caracterizó un movimiento de traslación

así: “Una rotación con centro en P en 120° ”, sin embargo, no es claro quién rota. Si agregamos el sujeto a esta frase obtenemos: “Una rotación **del punto A** con centro en P en 120° ”. Otro ejemplo, es el que se encuentra en el discurso de P3: “[simetría] del punto P con respecto a la roja”, pero no es claro quién o qué es “la roja”. Si reescribimos esta frase añadiendo el sujeto, esta sería “[simetría] del punto P con respecto a la **línea/recta** roja”.

En las producciones escritas de P1, P2, P5, P6, P16, evidenciamos que las parejas no hicieron uso de preposiciones o en su defecto usaron preposiciones que no corresponden a lo que quieren expresar. Por ejemplo, P1 sustituyó la preposición “de” por la preposición “a” en la siguiente frase “Rotación del punto P a 120° ”. Otro ejemplo lo podemos encontrar en el discurso de P6: “Una simetría del punto B con respecto a la recta roja”, en este, evidenciamos que la pareja usa la preposición “con” pero este debe omitirse; si reescribimos esta frase sería “Una simetría del punto B ~~con~~ respecto a la recta roja”.

En los discursos de P7, P11, P13, P14 y P17, identificamos que estas parejas omitieron, casi siempre, algunos artículos. Por ejemplo, P7 mencionaron lo siguiente: “[rotación] con centro de giro $P - 120^\circ$ tomando como referencia del punto A ”, en este discurso notamos que la pareja sustituyó el artículo “el” por el artículo “del”. Además, les faltó añadir la frase “y ángulo de”, la cual se compone de un conector (y), de un sustantivo (ángulo) y de una preposición (de). Por lo tanto, el discurso de P7 reescrito como proponemos sería: “[rotación] con centro de giro P y ángulo de -120° tomando como referencia **el** punto A ”.

5.5.2 Vocabulario

En el análisis del vocabulario (términos empleados y frases construidas) que usaron los estudiantes para describir las isometrías que aplicaron para teselar el cartón paja, decidimos

formar tres grupos: el primero, con las parejas que usaron las tres isometrías, el segundo, con las parejas que usaron dos isometrías (rotación y simetría axial), y el tercero, con la pareja que usó solo la rotación.

En el primer grupo ubicamos a P9, P10, P11, P12, P14 y P17; estas parejas usaron la traslación, rotación y simetría axial en su tesela.

El discurso de P10 (Tabla 19) es similar al de P12 y P14. Ellos en la traslación aludieron a tres invariantes: para la magnitud especificaron la distancia en centímetros; para el sentido usaron los puntos cardinales; para la dirección se refirieron al ángulo respecto a una recta horizontal o al borde superior de la hoja (como mencionaron P10 y P14). Al describir la rotación, aludieron a tres invariantes: para el centro de giro usaron el punto P ; para referirse al ángulo de rotación mencionaron la medida en grados y el sentido de rotación lo señalaron con el signo menos ($-$) cuando era necesario. Respecto a la descripción de la simetría axial, las parejas se refirieron al eje de simetría como una recta. En la Ilustración 49, presentamos parte de la tesela que construyó P10.

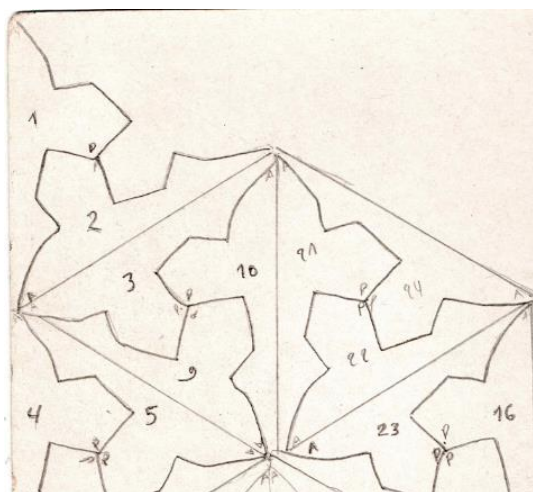
Tabla 19

Descripción de las isometrías por P10

Posición	Movimiento	Descripción
1 a la 4	Traslación	Traslación del punto P con sentido sur, magnitud de 8.7 cm y una dirección de -90° respecto al borde superior.
2 a la 3	Simetría	Simetría del punto P con respecto a la recta roja.
9 a la 10	Rotación	Rotación con centro en el punto P del punto A con ángulo de -120° .

Ilustración 49

Tesela artística construida por P10



El discurso de P9 y P17 se diferencia del discurso del grupo anterior porque no aludieron a la dirección de la traslación. P9 es la única pareja que aún no diferencia en su discurso entre el sentido y la dirección al decir: “en dirección sur”.

El discurso de P11 respecto a la rotación y la simetría axial es similar al de P10. No obstante, notamos que P11 presenta confusiones para describir las traslaciones que realizó (Tabla 20), en la primera descripción usa la palabra “magnitud”, sin embargo, no especifica una distancia y en la segunda descripción solo alude al sentido de la traslación.

Tabla 20

Descripción de dos traslaciones por P11

“[...] traslación de una magnitud del punto P a la P prima”	“[...] traslación hacia el sur [...]”
---	---------------------------------------

En el segundo grupo ubicamos a P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P13, P15 y P16, estas parejas usaron la rotación y la simetría axial para teselar el cartón paja. El discurso de P4 (Tabla 21) es similar al discurso de P2, P5, P6, P7, P15 y P16. En sus discursos aludieron a las tres invariantes de la rotación, aluden al centro de giro con el punto P , y especificaron el ángulo de rotación y el sentido de giro dando la magnitud del ángulo y el signo menos cuando el sentido de giro es a favor de las manecillas del reloj. Para la simetría axial aludieron al eje de simetría como una línea (P2), recta (P4, P5, P6 y P15) o raya (P7).

Tabla 21

Descripción de las isometrías por P4

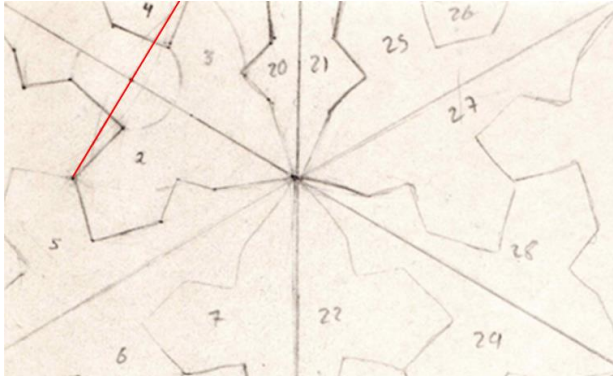
Posición	Movimiento	Descripción
5 a la 6	Rotación	Rotación con centro en P de -120°
6 a la 8	Simetría	Simetría del punto P con respecto a la recta roja

Como mencionamos anteriormente P1, P3 y P13 usaron la rotación y la simetría axial en su tesela; sin embargo, tuvieron algunas diferencias notorias en sus discursos. P1 no aludió al centro de giro en la rotación. P3 no especificó el eje de simetría, aunque inferimos que se refirieron a este como "la roja".

Es evidente para nosotras que P13 tuvo dificultades para describir la simetría axial que realizaron con la plantilla. De su discurso: "Se halla la mediatriz del eje de simetría (línea roja) y desde el punto medio con respecto a P se hace un movimiento de simetría". Podríamos inferir que los estudiantes, en su tesela, usaron el método de construcción de la mediatriz para hallar el eje de simetría. No obstante, las marcas dejadas en la tesela (Ilustración 50) no corresponden a la construcción de la mediatriz.

Ilustración 50

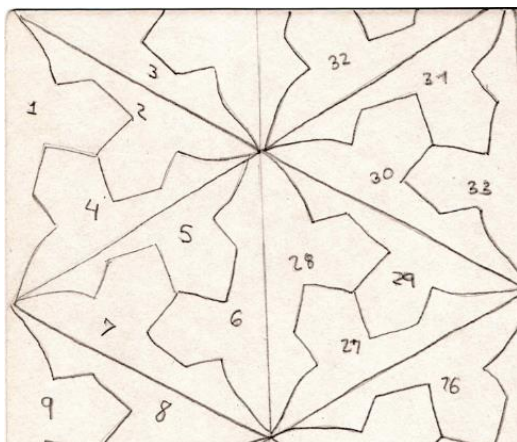
Tesela artística construida por P13



En el tercer grupo ubicamos a P8, para teselar el cartón solo usaron rotaciones. La producción escrita de P8 es “hizo un movimiento contra las manecillas del reloj, con punto en A”. Ellos aluden al centro de giro como un punto, sin embargo, esta pareja no explicita la medida del ángulo, por lo cual no podían referirse al sentido usando el signo negativo u omitiendo este, debido a lo anterior, para referirse al sentido usaron las manecillas del reloj. En la Ilustración 51, notamos que la tesela artística obtenida por P8 es diferente a las teselas de las demás parejas. Como solo usaron rotaciones, no obtuvieron pescados simétricos.

Ilustración 51

Tesela artística construida por P8



Capítulo 6:

Discusión y Resultados

En este capítulo presentamos la discusión de los resultados que surgen del análisis de las producciones de los estudiantes. Para ello, dividimos el capítulo en tres partes. En la primera, presentamos una síntesis de los aprendizajes de estudiantes de grado undécimo del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza (IED), sobre la traslación, la rotación y la simetría axial, a la luz del enfoque comunicacional de Sfard. En la segunda, evaluamos de manera crítica la pertinencia del conjunto de tareas que implementamos. En la tercera, reflexionamos sobre nuestro que hacer como profesoras de matemáticas y sobre el aprendizaje de las isometrías.

6.1 Aprendizajes logrados por los Estudiantes sobre las Isometrías del Plano

Para recapitular el aprendizaje de los estudiantes sobre los movimientos de traslación y rotación sintetizamos en dos tablas el avance discursivo respecto a los términos y las frases usadas por los estudiantes.

En la Tabla 22 listamos los términos empleados por las parejas en cada una de las tareas en las que se habló de traslación. Al comparar las producciones escritas de los estudiantes, identificamos un avance en su discurso. Evidenciamos que los estudiantes adquirieron lenguaje propio para referirse a las isometrías, aunque les falta mejorar el uso de la terminología.

Tabla 22

Términos usados por los estudiantes para referirse a la traslación (Tareas 1, 4 y 7)

Traslación: Términos			
	Tarea 1	Tarea 4	Tarea 7
Cómo se refieren al movimiento	• Desplazamiento. (5 parejas)		• Traslación. (6 parejas)

Cómo se refieren al vector de traslación		• Flecha. (2 parejas)	
Magnitud	• Distancia(s). (2 parejas)	• Magnitud. • Longitud. (2 parejas)	• x • $x\text{ cm}$ • Magnitud (6 parejas)
Dirección	• Diagonal. • Dirección. (3 parejas)	• Dirección. (5 parejas)	• x° (3 parejas)
Sentido	• Izquierda. • Noroeste. (3 parejas)	• Sentido. (2 parejas)	• Sur. (6 parejas)
Posición relativa			
Conservación de tamaño y de la forma	• Coincide. (4 parejas)		

Nota. La variable x representa la medida de una longitud o de un ángulo según corresponda.

Para referirse al movimiento de traslación, en la Tarea 1, cinco de las seis parejas de estudiantes no sabían cómo se llamaba este; por lo tanto, usaron la palabra “desplazamiento”. En cambio, en la Tarea 7, encontramos que todas las parejas cambiaron este término por el nombre propio del movimiento.

Respecto a los invariantes del movimiento, resaltamos que en la Tarea 7, todas las parejas aludieron a la magnitud (como una longitud) y al sentido (usando puntos cardinales). Por el contrario, en la Tarea 1, solo dos parejas mencionaron la magnitud como una distancia y tres parejas aludieron al sentido, refiriéndose a este con la lateralidad o los puntos cardinales. En cuanto, a la dirección, en las Tareas 1 y 7 se mantuvo la misma cantidad de parejas que se refieren a este invariante, sin embargo, son distintas; en la Tarea 7 expresan la dirección (a diferencia de la Tarea 1) con la medida del ángulo en grados.

Infortunadamente, el conjunto de tareas que propusimos para la traslación, no nos permite identificar los aprendizajes de los estudiantes respecto a dos descriptores centrales del

movimiento: posición relativa y conservación del tamaño y la forma. Pero consideramos que en la Tarea 1, algunas parejas se refieren tangencialmente a ellos.

En la Tabla 23 listamos las frases que los estudiantes construyeron para referirse a la traslación en las Tareas 1, 4 y 7. Queremos destacar que en la Tarea 1, las parejas escribieron frases muy largas, algo confusas y vagas con las que pretendían hacer una descripción detallada del movimiento que realizaban con la plantilla. En la Tarea 7, con la adquisición del lenguaje matemático, los estudiantes pudieron simplificar sus verbalizaciones y expresar las ideas de manera más clara y concreta. Adicionalmente, evidenciamos que, en el discurso de varias parejas, ellos usaron la notación correspondiente para referirse a un punto (letra en mayúscula), un ángulo ($^{\circ}$) y a una magnitud (por ejemplo, *cm*).

Tabla 23

Frases construidas por los estudiantes para referirse a la traslación (Tareas 1, 4 y 7)

	Traslación: Frases		
	Tarea 1	Tarea 4	Tarea 7
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazó de forma recta diagonal. • Movimiento rectilíneo. • Desplazamiento en un segmento lineal. • Desplazó de forma rectilínea. • Movimiento recto y directo. • Desplazamiento lineal. (6 parejas)		<ul style="list-style-type: none"> • Se traslada. • Hacer una traslación. • Traslación del punto <i>P</i> (5 parejas)
Cómo se refieren al vector de traslación		<ul style="list-style-type: none"> • Segmento con dirección y sentido. (1 pareja)	
Magnitud	<ul style="list-style-type: none"> • Hasta la posición dos. (1 pareja)	<ul style="list-style-type: none"> • Miden lo mismo. • Tienen el mismo tamaño. • Misma longitud. 	<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud de <i>x cm</i> • Magnitud del punto <i>P</i> a la <i>P</i> prima. • Magnitud <i>x</i> (4 parejas)

		<ul style="list-style-type: none"> • Tienen misma distancia los vértices de cada figura. (4 parejas) 	
Dirección		<ul style="list-style-type: none"> • Segmento con dirección. (1 pareja) 	<ul style="list-style-type: none"> • Dirección de x° respecto al borde superior. • Dirección de x° • Traslación de x° • Dirección a x° sobre la horizontal. (5 parejas)
Sentido	<ul style="list-style-type: none"> • Hacia la izquierda. • Hacia la parte superior izquierda. • Hacia las coordenadas noreste • Hacia la diagonal superior izquierda. • En la dirección noroeste. (5 parejas) 	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento con [...] sentido. • Van a la misma dirección • Van hacia la misma dirección. (3 parejas) 	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido sur. • Hacia el sur. • Sentido hacia el sur. • Sentido vectorial sur. (5 parejas)
Posición relativa			
Conservación de tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Coincidió en sentido, posición y proporción. (1 pareja) 		

Cabe mencionar que, además del avance discursivo evidenciado en el vocabulario de los estudiantes, estos también adquirieron nuevos rasgos discursivos. En las tareas correspondientes a la traslación, la mayoría de las parejas construyeron rutinas que les permitieron obtener la figura imagen por traslación de un cuadrado, según un vector de traslación. Para ello, los estudiantes usaron la representación gráfica de los vectores, establecieron sus invariantes y usaron esta información para obtener la imagen por traslación.

Con respecto al movimiento de rotación, en la Tabla 24 listamos los términos usados por los estudiantes en las Tareas 3, 6 y 7. Al comparar las verbalizaciones, identificamos un avance discursivo producto de la enseñanza del movimiento de rotación.

Tabla 24

Términos usados por los estudiantes para referirse a la rotación (Tarea 3, 6 y 7)

	Rotación: Términos		
	Tarea 3	Tarea 6	Tarea 7
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación. • Girar. • Trasladó. (16 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación. • Giro. • Desplazó. (17 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación. (17 parejas)
Centro de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Vértice. (1 pareja)	<ul style="list-style-type: none"> • G / g. (9 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • P. (16 parejas)
Ángulo de giro	<ul style="list-style-type: none"> • x°. (8 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • $x^\circ / -x^\circ$. (16 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • $x^\circ / -x^\circ / +x^\circ$. • $x^\circ C$. (16 parejas)
Sentido de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido. (2 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • [sin signo]. • [signo menos] “-”. (16 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • [sin signo]. • [signo menos] “-”. • [signo más] “+”. (16 parejas)
Posición relativa			
Conservación de tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Encajara. • Coincidió. • Calza. (8 parejas)		

Nota. La variable x representa la medida un ángulo.

Para nosotras es evidente que, aunque los estudiantes no habían estudiado isometrías del plano (según el profesor-tutor), ellos tenían nociones sobre este movimiento. Podemos ver que en las tres tareas que implementamos, los términos “rotación” y “giro” fueron los más usados por las parejas para referirse a este movimiento. Producto de la enseñanza, en la Tarea 7, ninguno de los estudiantes utilizó términos como “trasladó” o “desplazó”, como sucedió en las Tareas 3 y 6. Adicionalmente, evidenciamos que cuatro estudiantes usaron el término “giro”, en las tareas 3 y 6, mientras que, en la Tarea 7, ninguna pareja usó este término para describir alguna rotación.

Respecto a los invariantes de la rotación, resaltamos que, aunque en la Tarea 1, las parejas de estudiantes no tenían instrumentos de medición, gracias a la configuración de la tesela, expresaron la medida del ángulo de rotación en grados. Sin embargo, ninguna pareja usó algún término o signo (como el negativo “-”) para referirse al sentido de la rotación. Para referirse al sentido, en las Tareas 6 y 7, algunas parejas incluyeron en sus discursos el uso de signo “-” para referirse a ángulos de rotación negativos y solo una pareja usó el signo “+” para ángulos positivos.

En la Tabla 25 listamos las frases que construyeron las parejas de estudiantes para aludir a la rotación, en las Tareas 3, 6 y 7. Inicialmente queremos destacar el hecho de que en la Tarea 3 solo una pareja de estudiantes expresó una frase que alude al movimiento de rotación. Por el contrario, en la Tarea 7, más de la mitad de las parejas de estudiantes lograron crear verbalizaciones para describir el movimiento.

Tabla 25

Frases construidas por los estudiantes para referirse a la rotación (Tareas 3, 6 y 7)

Rotación: Frases			
	Tarea 3	Tarea 6	Tarea 7
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazamiento rotativo. (1 pareja) 	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación de x°. • Rotación de x grados. • Giró x°. • Cuadrado $ABCD$ hizo una rotación. • El cuadrado $ABCD$ giró. • Tuvo un giro. • En sentido de las manecillas se desplazó. (13 parejas) 	<ul style="list-style-type: none"> • Rotación del punto P. • La plantilla hace un movimiento de rotación. • Rotación [...] del punto A. • Hizo un movimiento contra las manecillas del reloj. • Se mueve x°. • Es una rotación [...] de la figura 9. (12 parejas)
Centro de giro	<ul style="list-style-type: none"> • El punto del eje para desplazarla es la punta del ala derecha. 	<ul style="list-style-type: none"> • Respecto al centro de giro (G). 	<ul style="list-style-type: none"> • Con centro en P. • Con giro del centro P.

	<ul style="list-style-type: none"> • La unión del ala de una mariposa con la otra. • Eje de rotación. • Punto a la derecha. • El punto en la parte superior del ala. • Punto fijo. • Sobre una de sus esquinas. • Punto de referencia. • Punto del ala derecha. • Eje de rotación el vértice. • La punta del ala. (12 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • Respecto centro punto g. • Respecto al punto G. • Centro de giro (punto G). (4 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • del punto P (como centro). • Con el punto P. • Punto giratorio en P. • Centro de giro en el punto P. (15 parejas)
Ángulo de giro	<ul style="list-style-type: none"> • De x°. • Rota x°. (8 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • De $-x^\circ$/ De x°. (5 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • A x° / De x°/ En x°. • En un ángulo de x°. • Con ángulo de x°. • A $x^\circ C$. (12 parejas)
Sentido de giro	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido contrario a las manecillas del reloj. • Hacia la derecha. • Hacia la izquierda por arriba. (12 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • [sin signo]. • [signo menos] “-”. • En sentido de las manecillas. • En sentido antihorario. (6 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • [sin signo]. • [signo menos] “-”. • [signo más] “+”. • Contra las manecillas del reloj. (13 parejas)
Posición relativa		<ul style="list-style-type: none"> • Lo único que cambió fue la orientación del cuadrado. • El cuadrado cambió de posición x°. • Solo cambió de posición. • Su sentido y posición sí cambiaron. • La figura cambió de posición. • Cambió su posición. (6 parejas)	
Conservación de tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Coincidió la forma. • Coincidió con la figura dos. • Coincidió el marco. (3 parejas)	<ul style="list-style-type: none"> • No cambió su forma. • Su tamaño es el mismo. • Conservó su tamaño y forma. • El tamaño del cuadrado no cambió [...] la forma no cambió. 	

		<ul style="list-style-type: none"> • El tamaño y la forma se mantuvo tras la rotación. • El cuadrado $ABCD$ no tuvo alteraciones de tamaño ni de forma. (15 parejas)	
--	--	---	--

Sobre el “sentido de giro” inferimos, por las respuestas a la Tarea 3, que los estudiantes identificaron que existían ángulos positivos y negativos; para ello, usaron frases que aludían a la lateralidad o a las manecillas del reloj. Aun así, notamos avances en el discurso de los estudiantes en las Tareas 6 y 7, porque estas parejas reemplazaron estas frases por el uso de los signos “-” o “+”.

Producto de la enseñanza de la rotación, los estudiantes adquirieron nuevos rasgos discursivos; entre ellos, resaltamos algunas rutinas y narrativas. Respecto a las rutinas, los estudiantes usaron instrumentos de medida y de trazo para encontrar el centro de giro. Respecto a las narrativas, tres de las 17 parejas lograron generalizar el hecho de que el centro de giro equidista de un punto y de su imagen por rotación, debido a que el rastro que deja el movimiento de rotación es una circunferencia, en la que el centro de la circunferencia es el centro de giro.

Aunque en el cuerpo del trabajo no presentamos el análisis de los rasgos discursivos de los estudiantes al estudiar la simetría axial, nos parece importante destacar algunos resultados fruto del análisis de las Tareas 2 y 5, que incluimos en el Anexo 13. Los aprendizajes que los estudiantes adquirieron principalmente tienen que ver con los rasgos discursivos de vocabulario y de rutinas. Respecto al vocabulario, los estudiantes adquirieron lenguaje matemático, por ejemplo: punto medio, mediatriz, recta, segmento, ángulo recto, intersección y eje de simetría, entre otros términos. Respecto a las rutinas, varias parejas adquirieron dos rutinas usando

instrumentos de medida y de trazo: el método de la construcción de la mediatriz de un segmento y la construcción de la imagen por simetría axial de un polígono, dado un eje de simetría.

En síntesis, queremos mencionar que usar el enfoque comunicacional de Sfard, nos permitió identificar y caracterizar aprendizajes de los estudiantes acerca de la especialización de sus discursos sobre las isometrías del plano, que sin este referente teórico quizás hubiéramos pasado por alto. Además, aprendimos a usar los rasgos discursivos, propuestos por esta autora, para hacer los análisis de manera organizada.

6.2 Sobre el Conjunto de Tareas Implementadas

En este apartado mencionamos algunos aciertos de las tareas propuestas y también posibles mejoras que podríamos realizar, para la enseñanza de las isometrías del plano. Para ello, hacemos algunos comentarios generales y luego nos referimos a las tareas alusivas a cada movimiento.

Como comentario general, después de implementar las tareas, identificamos dos aciertos en el diseño de las tareas:

- El uso de las teselas de Escher como entorno para trabajar sobre las isometrías. Estas nos permitieron reconocer las nociones iniciales sobre las isometrías del plano que tenían los estudiantes, promovió la motivación y la creatividad (como lo señala Mejía (2008)) y dio pie a un acercamiento significativo, dinámico en el caso de la traslación y la rotación, que fue estimulante para los estudiantes.
- La manipulación de plantillas para recrear los movimientos sobre las teselas. Estas permitieron a los estudiantes identificar el hecho de que las traslaciones y las rotaciones son movimientos isométricos en el plano. La plantilla fue un medio útil para comparar un

motivo en una posición inicial con el motivo en una posición final del movimiento de esta en la tesela; esto generó que los estudiantes pudieran experimentar el movimiento con las manos, caracterizar sus invariantes y visualizar la conservación del tamaño y la forma del motivo.

También, de manera general evaluamos un desacierto importante en el diseño de las tareas iniciales (Tareas 1, 2 y 3). Debimos haber pedido a los estudiantes que usaran instrumentos de medida y de trazo. Así los estudiantes podrían haber realizado descripciones de las isometrías de manera más clara y caracterizar el cambio de posición con el valor de algunos de los invariantes.

6.2.1 Respecto a las Tareas 1 y 4 (Traslación)

Quisimos avanzar demasiado rápido en la enseñanza de la traslación. En la Tarea 1 realizamos preguntas relacionadas con la descripción general de un movimiento de traslación y en la Tarea 4 nos enfocamos en el vector de traslación, sin dar lugar a ahondar en los invariantes con más cuidado. Quizá hubiese sido más pertinente que la Tarea 4, se enfocara en lograr que los estudiantes realizaran y caracterizaran traslaciones, mediante sus invariantes, antes de sintetizar el movimiento a través de un vector.

Para lo anterior, sugerimos tres posibles mejoras en la Tarea 4. La primera, en el numeral 1, solicitar a los estudiantes que describan la traslación que realizó la Figura A. La segunda, crear un nuevo numeral, en el que se solicite a los estudiantes describir cada una de las traslaciones que realizaron en el numeral 3. La tercera, pedir a los estudiantes realizar algunas traslaciones a partir de la descripción de sus invariantes.

En la Tarea 1, cuando les pedimos a los estudiantes comparar dos movimientos de traslación, debimos pedirles que usaran instrumentos de medida y de trazo, para que los estudiantes se vieran forzados a comparar las medidas de los invariantes en cada caso y pudieran identificar diferencias entre los movimientos, pese a ser todos de traslación. Además, notamos que la pregunta planteada en el numeral 1 literal (c) (Sección 3.2.1.1) puede generar que los estudiantes creen que deslizar la plantilla sobre el plano no es un movimiento; para mitigar esta dificultad, proponemos replantear la pregunta de la siguiente manera: “¿al deslizar la plantilla de la posición uno a la posición dos tuvieron que realizar un movimiento adicional para que esta coincidiera? Si o no, expliquen”.

6.2.2 Respecto a las Tareas 3 y 6 (Rotación)

Las tareas correspondientes al movimiento de rotación fueron motivantes, llamativas y retadoras para los estudiantes. Sin embargo, al igual que en las Tareas 1 y 4, consideramos que hubiera sido muy oportuno pedir a los estudiantes que usaran instrumentos de medida y de trazo para caracterizar y comparar los invariantes de distintas rotaciones.

La tesela artística que usamos en la Tarea 3 tenía una configuración que simulaba una cuadrícula (Ilustración 34); por consiguiente, los estudiantes inferían (sin medir) que los ángulos de rotación que realizaban con la plantilla eran de 90° , 180° o 270° . Consideramos que sería más pertinente que la tesela no tuviera esta configuración para que los estudiantes tuvieran que usar los instrumentos de medida para medir los ángulos de rotación.

Adicionalmente, como comentamos en el análisis del aprendizaje de los estudiantes relacionado con la Tarea 3 (Sección 5.3), al diseñar la tarea no tuvimos en cuenta que el diseño de las alas de la mariposa de la plantilla debía corresponder al diseño de las alas de la mariposa de la tesela en la posición final. Esto fue una falla de la que nos dimos cuenta en la clase y que

tratamos de solventar pidiendo a los estudiantes buscar una nueva posición en la tesela de tal manera que el diseño de las alas coincidiera con el de la plantilla. Aunque nuestro descuido en el diseño ayudó a que los estudiantes fijaran su atención en el hecho de que la rotación es una isometría, por lo que la figura (plantilla) que rota no debe cambiar de forma, tamaño y diseño; también, sirvió para que vieran que, a partir de una posición inicial, se pueden realizar muchas rotaciones. Reconocemos que debemos tener cuidado al momento de crear material (en este caso, las plantillas) para los estudiantes y prestar atención en los detalles.

Creemos que en el numeral 1 de la Tarea 6, los literales (a) y (b) pudieron reemplazarse por un literal en el que pidiéramos a los estudiantes describir la rotación que realizó el cuadrado $ABCD$. Sin embargo, esta tarea permitió que algunos estudiantes construyeran narrativas sobre el movimiento. Adicionalmente, el numeral 2 de esta tarea generó que los estudiantes se apropiaran del método de construcción de la mediatriz y la aplicaran para encontrar el centro de giro de la rotación del triángulo ABC . Además, en el numeral 2 consideramos pertinente que en la “nota” que le dimos a los estudiantes como pista para hallar el centro de giro, se aclare que las mediatrices que deben construir son las correspondientes a los segmentos cuyos extremos son un vértice del triángulo y su imagen por rotación.

6.2.3 Respecto a las Tareas 2 y 5 (Simetría axial)

Posterior a la implementación de la Tarea 2, reconocimos que la tesela que usamos no era la más adecuada para estudiar esta isometría. Lo anterior, principalmente por dos razones: una, debido a que las alas de las mariposas son figuras simétricas respecto a un eje de simetría que atraviesa el cuerpo de la mariposa, algunos estudiantes intuyeron que el efecto del espejo (que simulaba el eje de simetría) era completar la mariposa, centrando la atención en la característica de la mariposa de ser una figura simétrica y no en la isometría como tal; dos, porque las simetrías

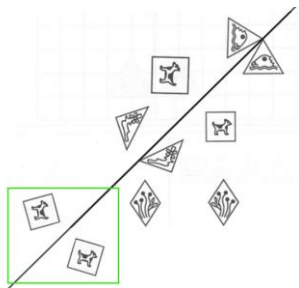
que pretendíamos que los estudiantes identificaran, correspondían todas a ejes de simetría horizontales y paralelos a una parte de las alas de las mariposas, así como paralelos al borde de la hoja, con lo cual promovimos un significado restringido de la isometría, ligado a la simetría de los objetos y no a la simetría como correspondencia entre puntos.

Posterior a la implementación, también nos dimos cuenta que las preguntas que propusimos a los estudiantes no eran lo suficientemente específicas para que ellos pudieran identificar los invariantes de la simetría axial. Algunos de los estudiantes entendieron que la instrucción era responder qué se podía ver a través del espejo. Además, las preguntas que les hicimos no se enfocaron en la relación entre el eje de simetría, los puntos y sus imágenes por simetría axial, sino al efecto del espejo indicado por la posición de las rectas m y n que añadimos a la tesela.

Reconocemos una falta de secuencialidad entre la Tarea 2 y la Tarea 5. En esta última, los estudiantes debían asociar las propiedades de la mediatriz con las del eje de simetría y construir un polígono imagen por simetría axial, mientras que en la Tarea 2, ellos apenas debían describir lo que veían en el espejo, según la posición del eje de simetría. Resaltamos que la Tarea 5 les permitió a los estudiantes asociar las propiedades de la mediatriz con las del eje de simetría y adoptar una rutina para construir la imagen por simetría axial de un polígono, dado un eje de simetría. Sin embargo, identificamos que en el numeral 1, no incluimos el caso en el que hubiese una figura y su imagen por simetría axial, tal que ningún punto de esta perteneciera al eje de simetría (Ilustración 52).

Ilustración 52

Propuesta de mejora del numeral 1 de la Tarea 5



6.2.4 Respecto a la Tarea 7 (Aplicación de lo Aprendido)

Recordamos que decidimos usar las teselas artísticas, atendiendo a que estas posibilitan contextos de aprendizaje llamativos (Mejía, 2008). Resaltamos que esta tarea permitió que los estudiantes aplicaran los aprendizajes que adquirieron sobre las isometrías para teselar un plano. Debido a que en esta tarea no les dimos instrucciones paso a paso para teselar el cartón paja, ellos pudieron cubrirlo, de manera creativa, mediante una secuencia isometrías que ellos establecieron y posteriormente describieron. Además, destacamos que la creación de la tesela artística les permitió describir diferentes isometrías.

Pese a los aciertos que vemos a la Tarea 7, consideramos que la tabla que les dimos para describir cada isometría no tenía un formato muy pertinente porque inducía a hacer descripciones repetitivas a manera de “plana” de escritura. Sugerimos, que en lugar de usar esta tabla se les pida a los estudiantes describir con sus palabras cada isometría para dos o tres posiciones diferentes.

6.3 Reflexión Docente Sobre el Hacer Docente y el Aprendizaje de las Isometrías del Plano

Como hemos mencionado, las tareas que propusimos para el estudio de las isometrías del plano, las planeamos en nuestra Práctica en Aula y las aplicamos en grado undécimo. Según nuestros imaginarios sobre lo que estudiantes de este grado debían saber de las isometrías (aunque no hubieran trabajado el tema), pensábamos que las tareas no podían ser “elementales” y que el tratamiento de las isometrías no debía hacerse como se abordaría en grados inferiores, que es en donde se supone que se enseñen las isometrías. Recordemos que en el currículo colombiano se pretende que este estudio se haga en tercer, cuarto y séptimo grado. Por este motivo, descartamos la posibilidad de enseñar las isometrías mediante ejemplos y no ejemplos, y decidimos introducir el vector de traslación y la construcción de la mediatriz.

Al implementar las tareas y observar el desempeño y el lenguaje de los estudiantes en el aula, nos encontramos con que ellos tenían muchas dificultades para interpretar los enunciados de las tareas, comunicarse en lenguaje matemático y la mayoría no sabían usar los instrumentos de medida y de trazo. Por ejemplo, en la Ilustración 53, mostramos la manera en la que una pareja de estudiantes ubicó el transportador, cuando le pedimos hacer una rotación del punto B con centro de giro en C con un ángulo de -60° . En la ilustración se puede ver que el centro del transportador no está ubicado sobre el punto C ; además, la regla no está ubicada de tal forma que los puntos B y C estén contenidos en la misma recta; es decir, la base del transportador indica la recta que contiene al punto C y no contiene al punto B . En la Ilustración 54, mostramos la manera en la que la mayoría de los estudiantes hacían uso del compás; en lugar de manipularlo con una sola mano desde la parte superior, lo sujetaban con ambas manos usando los brazos del compás, con lo cual no siempre controlaban la abertura.

Ilustración 53

Dificultad en el manejo del transportador

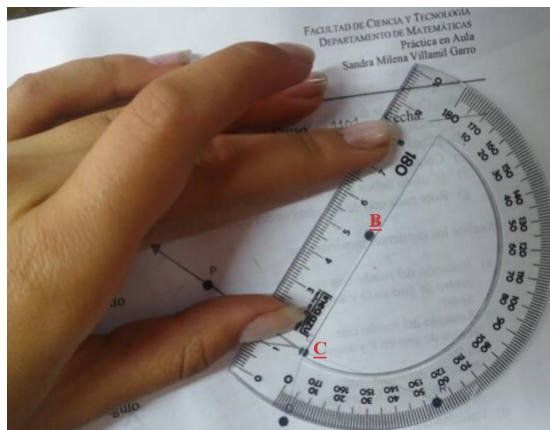
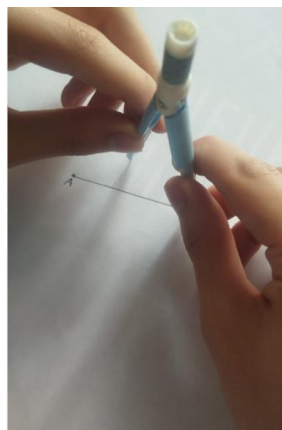


Ilustración 54

Dificultad en el manejo del compás



En nuestro espacio de Práctica en Aula, al no ser nosotras las profesoras titulares y no contar con tiempo suficiente para conocer a los grupos de estudiantes, decidimos seguir las sugerencias del profesor-tutor dado que él tenía conocimiento de los estudiantes a su cargo. Él nos sugirió que las tareas que propusiéramos no fueran cortas para “mantener a los estudiantes ocupados” y que las producciones de las tareas se pudieran recoger para “sacar una nota”.

Cuando empezamos a implementar las clases en los cursos correspondientes, pudimos identificar que los estudiantes, por estar en grado undécimo y haber presentado la prueba Saber 11, no querían hacer mayor cosa. Además, el manejo de los grupos era complejo; algunos estudiantes eran muy necios y otros muy callados. Debido a lo anterior y al hecho de que debíamos cumplir con los tiempos establecidos por el espacio de práctica en el colegio y en la universidad, decidimos que todas las tareas debían recogerse para “obligar” a los estudiantes a realizarlas. Por lo tanto, no promovimos suficientes espacios de discusión. Al no promover estos espacios no obtuvimos registros orales de los estudiantes, los cuales según Sfard (2008) son muy importantes en el aprendizaje. Adicionalmente, para mantener a los estudiantes ocupados,

propusimos tareas que resultaron muy extensas; en algunos casos, los estudiantes no pudieron completar todas las tareas debido a que en el horario de la clase ellos tomaban el desayuno.

Respecto a la gestión en el aula, resaltamos la importancia de hacer un acompañamiento a los estudiantes durante el desarrollo de las tareas. Por ejemplo, pasar por los puestos de trabajo nos permitió identificar si los estudiantes estaban o no desarrollando las tareas y a la vez solventar las dificultades que algunos presentaban respecto a la comprensión del enunciado de las tareas o el manejo de los instrumentos de medición y de trazo. Además, consideramos que fue pertinente organizar a los estudiantes en parejas, esto les permitió poder discutir entre ellos sus ideas y a nosotras tener un mejor control del aula.

Producto de la implementación y del ejercicio analítico realizado en nuestro trabajo de grado, nos quedan preguntas acerca del uso que le damos a algunos términos y cómo estos pueden generar confusiones al momento de aprender sobre las isometrías del plano. Los términos sobre los que queremos discutir son: desplazamiento, sentido, dirección.

Respecto al desplazamiento, identificamos que tres de cinco parejas que usaron este término para referirse a la traslación, aclararon que el desplazamiento era “de forma recta” (P10), “en un segmento lineal” (P11) y “de forma rectilínea” (P14). Mientras que otra pareja usó este término para referirse a la rotación, aclarando que el desplazamiento era “rotativo” (P7). Lo anterior, nos lleva a tener la precaución, cuando usemos el término desplazamiento, de especificar si el desplazamiento es en línea recta o en línea curva. Este término se usa para referirse a la acción de ir de un lugar a otro, por ejemplo, “me estoy desplazando hacia la universidad” pero no necesariamente en línea recta.

Con relación al término "sentido", debido a lo complejidad de la definición matemática de sentido para describir un invariante de la traslación (Sección 2.1.2), hicimos una adaptación en la que, propusimos usar los puntos cardinales y puntos cardinales secundarios. Esto conduce a imprecisiones en la caracterización de la traslación. Por ejemplo, el decir que un objeto se trasladó hacia el noreste, abarca una región del plano en el que hay infinitas direcciones sobre las cuales el objeto se puede trasladar (Ilustración 55). Solo es claro usar los puntos cardinales cuando se acompañan de la dirección de la traslación. Por ejemplo, al decir que un objeto se trasladó 45° al noreste, la dirección nos da información sobre la recta en la que se traslada el objeto, por lo tanto, nos indica una única dirección (recta m), además el sentido nos permite identificar hacia dónde se traslada el objeto sobre esa recta (Ilustración 56).

Ilustración 55

Región indicada por el término noreste y las rectas contenidas en esta

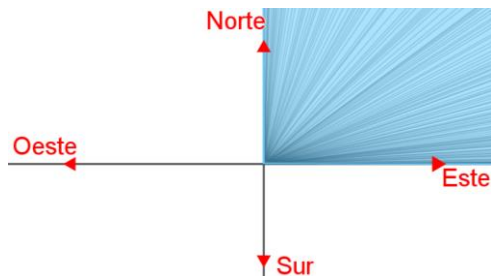
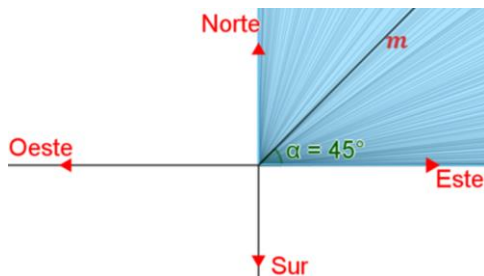


Ilustración 56

Recta m sobre la que se traslada el objeto



También, hay dos dificultades referidas al uso de la palabra sentido como invariante de la rotación. Por un lado, se pueden generar confusiones relacionadas con creer que el sentido alude a los puntos cardinales. Por otro lado, por convención, dijimos a los estudiantes que, para referirse a ángulos de rotación positivos, solo bastaba con expresar la medida del ángulo, en cambio, para referirse a ángulos de rotación negativos, debían anteceder la medida del ángulo

con el signo menos ($-$). En las producciones escritas vimos que algunos estudiantes no usaban esta notación. Esto nos hizo dudar sobre si los estudiantes diferenciaban un ángulo positivo de uno negativo. Por lo que consideramos que es pertinente que siempre se indique, con el signo correspondiente, si el ángulo de rotación es positivo o negativo.

Conclusiones

Este trabajo de grado ligado a la Práctica en Aula nos permitió analizar detenidamente aspectos del aprendizaje de nuestros estudiantes que las dinámicas del ambiente escolar no nos dejaron ver cuando estábamos inmersas en la enseñanza de las isometrías del plano.

El enfoque comunicacional de Sfard nos permitió identificar aprendizajes de los estudiantes, a pesar de que no habíamos estudiado este enfoque antes de proponer el conjunto de tareas. Consideramos que este enfoque es una buena herramienta que permite identificar los rasgos discursivos de los estudiantes. Además, nos ayuda a entender por qué los estudiantes usan el vocabulario con el que se refieren a un objeto matemático y el significado que le dan, que usualmente es influenciado por el lenguaje cotidiano. Invitamos a los profesores de matemáticas en formación y en ejercicio a estudiar este enfoque e intentar usarlo en sus clases.

Consideramos que el contexto de las teselas artísticas fue una manera llamativa para enseñar las isometrías del plano a los estudiantes. Por ejemplo, el material manipulativo (teselas, plantillas y espejo) que usaron los estudiantes para las Tareas 1, 2 y 3, nos permitió conocer las nociones iniciales que tenían los estudiantes de las isometrías del plano; en el caso de la rotación y la traslación, emular los movimientos con la plantilla les permitió tener un acercamiento dinámico que favoreció el proceso de descripción de estos. Adicionalmente, la Tarea 7 permitió que los estudiantes usaran su creatividad y los aprendizajes que adquirieron sobre las isometrías para recrear una tesela y caracterizar cada isometría aplicada.

Aunque en el currículo colombiano se pretende que el estudio de las isometrías se haga en tercer, cuarto y séptimo grado, como ya lo hemos mencionado, los estudiantes de grado undécimo aún no habían estudiado este objeto matemático. De esto inferimos que en los colegios

se da mayor importancia a otros objetos matemáticos en el que promueve el proceso de ejercitación de procedimientos a pesar de la importancia de las isometrías del plano (Sección 1.1.3). Creemos que por la manera en la que nosotras abordamos las isometrías se favoreció el proceso de comunicación escrita, que fue un reto para los estudiantes debido a que no están acostumbrados a describir, argumentar o explicar sus ideas.

El proceso de análisis de los discursos de los estudiantes para identificar sus aprendizajes, fue un trabajo arduo que nos implicó mucho tiempo. Este trabajo de grado nos permitió realizar este ejercicio investigativo, no obstante, seguramente, en el ámbito laboral no podremos llevar a cabo este tipo de análisis tan minucioso, por la cantidad de cursos que tendremos a cargo, pero sí ganamos sensibilidad sobre la atención que hay que prestar a la comunicación en clase, no como un asunto colateral sino central del aprendizaje.

Reconocemos que una planeación óptima debe hacerse a partir de un conocimiento profundo de los estudiantes, su entorno escolar, sus conocimientos, el momento del año escolar, el horario de la clase, etc. Lo anterior no necesariamente garantiza un óptimo funcionamiento de la clase, pero sí contribuye en buena medida a lograr buenos resultados.

Referencias

- Ángel, M., Jiménez, W., Rojas, S., Zambrano, N. y Mora, L. (2008). *Teselados en el club de Matemáticas*. Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI encuentro de Aritmética, Bogotá, Colombia. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1214778/AngelTeseladosGeometr25C325ADa2008.pdf>
- Boule, F. (2005). *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. Uribe y Ferrari Editores.
- Camargo, L. y Perry, P. (2020). “Los lados de un polígono no se intersecan”... Ahondar en la voz de los estudiantes. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(68), 994-1014. [SciELO - Brasil - “Los lados de un polígono no se intersecan” ... Ahondar en la voz de los estudiantes “Los lados de un polígono no se intersecan” ... Ahondar en la voz de los estudiantes](#)
- Corrales, C. (2005). Escher I: Las matemáticas para construir. *Revista SUMA*, 49, 101-108. 101-108. <https://docta.ucm.es/rest/api/core/bitstreams/4cac0a79-6882-4e8f-bb88-aeddf08e4ca0/content>
- Domínguez, I., Domínguez, I., García, E. y Moreno, G. (2016). Introducción a las teselaciones: experiencia de un taller. *Revista e innovación en Matemática educativa*, 1, 609-617. [Dominguez2016Introduccion.pdf](#)
- Grossman, S. y Stanley, I. (2008). *Álgebra lineal*. Editorial MC Gran Gill. <https://es.slideshare.net/slideshow/algebra-lineal-stanley-l-grossman-6ta-edicionpdf/251694097#67>

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1986). *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. Papeles de Enseñanza de las Matemáticas, Colección Monografías. Editorial Universidad de Valencia.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Editorial Síntesis.
- Khiar, V. y Marques, J. (2019). *Propuesta didáctica para la enseñanza de isometrías en el plano en 3º ESO* [Trabajo fin de Máster, Universidad Zaragoza]. Zagan.
<https://zaguan.unizar.es/record/86695>
- Mejía, M. (2008). El estudio de la teselaciones para la enseñanza de la geometría transformacional. *Triángulo*, 180, 175-182. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1214829/MejiaElestudioGeometr25C325ADa2008.pdf>
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio. <http://roychacon/lineamientos/agradecimientos.asp>
- MEN, (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia: Magisterio. https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- MEN, (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Magisterio. https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Morales, G. y Rubio, N. (2020). Una experiencia con teselados usando GeoGebra. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 90, 65-71. [\(PDF\) Una experiencia con teselados usando GeoGebra](#)

- Perry, P. Camargo, L. Molina, O. y Samper, C. (2021) Voces de Estudiantes en Clase de Geometría y su Potencial para Desarrollar el Discurso en el Aula. *Educación Matemática*, 33(2), 87-114. <http://funes.uniandes.edu.co/23293/1/2021-Perry%26Voces.pdf>
- Ropero, D. (2021). *La Práctica Matemática de Definir: Un Análisis del Discurso de Estudiantes de Secundaria al Definir Familias de Poliedros*. [Tesis de Maestría no Publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Universidad del Valle. <https://www.jstor.org/stable/j.ctv14jx9tk>
- Uribe, S., Cárdenas, Ó. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, 26(2), 135-160. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/teselaciones-para-ninos-una-estrategia-para-el-desarrollo-del-pensamiento-geometrico-y-espacial-de-los-ninos/>

Anexos

Anexo 1. Sistema Teórico

Postulado Dos puntos - recta: Dados dos puntos, existe una única recta que los contiene.

Postulado LAL: Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y los ángulos que estos determinan también son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Definición de Ángulos alternos internos: Dadas dos rectas y una secante a ellas, dos ángulos son alternos internos si y solo si: 1. Sus vértices son las intersecciones de las dos rectas con la secante. 2. Su intersección es un segmento, cuyos extremos son dichos vértices. 3. Cada lado que los conforma está contenido en alguna de las rectas. 4. No tienen puntos interiores en común.

Definición de Congruencia: Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

Definición de Cuadrilátero: Dados cuatro puntos coplanares, y cada terna de estos no colineales. Un cuadrilátero es la unión de los segmentos tales que: i) cada segmento tiene por extremos dos de los puntos dados. ii) cada punto es exactamente extremo de dos segmentos. iii) si dos segmentos se intersecan, el punto de intersección es uno de su extremo.

Definición Diagonal de Cuadrilátero: Una diagonal de un cuadrilátero es cada uno de los segmentos cuyos extremos son vértices del cuadrilátero, y que no son lados del cuadrilátero.

Definición de Intersección: Sean A y B conjuntos, la intersección de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A y también a B . $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.

Definición de Mediatriz: Una recta m es mediatriz del \overline{AB} si y sólo si todos los puntos de m equidistan de A y B .

Definición de Perpendicularidad: Dos rectas (rayos, segmentos o combinaciones de estos) son perpendiculares si se intersecan y determinan un ángulo recto.

Definición Secante (o Transversal): Dadas dos o más rectas coplanares, una recta es secante a ellas si las interseca en sendos puntos.

Definición de Trapecio isósceles: Un trapecio es isósceles si y solamente si los lados no paralelos son congruentes

Definición de Triángulo: Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.

Definición de Triángulos congruentes: Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de uno de los triángulos y del otro, de tal forma que los ángulos y lados correspondientes son congruentes. Esto significa que $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si se tiene que: i) A corresponde a D , B corresponde a E y C corresponde a F . ii) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. iii) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$.

Teorema Ángulos rectos: Todos los ángulos rectos son congruentes.

Teorema Diagonales de un trapecio isósceles: Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.

Teorema Intersección de rectas: Si dos rectas distintas, m y l , se intersecan entonces su intersección es un único punto.

Teorema LLL: Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema PAI: Dadas tres rectas, m, n y l en un plano α , tales que son coplanares y l interseca a las otras dos, sean $m \parallel n$, y los $\angle 1$ y $\angle 2$ alternos internos determinados por dichas rectas. Entonces $\angle 1 \cong \angle 2$.

Teorema Perpendicularidad paralelismo: Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta y son coplanares, entonces estas dos rectas son paralelas entre sí.

Teorema Recta - dos puntos: Si se tiene una recta, entonces esta recta tiene por lo menos dos puntos.

Teorema Recta - rayo - segmento: Existe \overleftrightarrow{AB} si y solo si existe \overline{AB} o \overrightarrow{AB} . Existe \overrightarrow{AB} si y solo si existe \overline{AB} o \overleftrightarrow{AB} .

Anexo 2. Conceptos, Relaciones y Propiedades Geométricas Involucradas

Definición de Ángulo: Un ángulo es un objeto geométrico formado por dos rayos que tienen su punto inicial común pero no están sobre la misma recta.

Definición de Ángulo de rotación: Un ángulo de rotación es una figura geométrica formada por dos rayos, que corresponden a la posición inicial y final del movimiento de un rayo alrededor de su origen.

Definición de Dirección de traslación: La dirección de un vector es el ángulo comprendido entre el vector y una recta horizontal.

Definición de Distancia: El número real asignado a dos puntos se llama la distancia entre los puntos.

Definición de Equidistancia: Dos o más puntos equidistan de un punto dado si sus distancias a dicho punto son iguales.

Definición de Magnitud: La magnitud de un vector \overrightarrow{AB} es la distancia entre el punto inicial A y el punto final B .

Definición de Punto medio: El punto medio de un segmento es un punto entre los extremos del segmento, que equidistan de estos.

Definición de Rayo: El rayo AB es la unión del segmento AB con todos los puntos de la recta para los que B queda entre A y el punto.

Definición de Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se intersecan.

Definición de Rectas perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si determinan un ángulo recto.

Definición de Sentido de traslación: El sentido de un vector indica hacia dónde se dirige este, para ello se hace uso de los puntos cardinales y puntos secundarios cardinales.



Definición de Vértice del ángulo: El punto de intersección de los dos rayos que forman un ángulo se llama vértice.

Definición de Vértice del polígono: El punto de intersección de los dos lados que forman un ángulo se llama vértice.

Teorema Perpendicularidad – paralelismo: Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta y son coplanares, entonces estas dos rectas son paralelas entre sí.

Anexo 3. Producciones de los Estudiantes: Tarea 1

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes de la Tarea 1. La primera columna corresponde a las parejas de estudiantes, cuya producción analizamos, y las siguientes **cinco** a las preguntas planteadas en la tarea. En la fila dos, explicitamos qué movimiento debían realizar los estudiantes con la plantilla; en la fila tres, presentamos las indicaciones dadas a los estudiantes con respecto al movimiento; y en las filas posteriores, consignamos las respuestas que dieron todas las parejas de estudiantes para cada una de las indicaciones.

Introducción a las Isometrías: Traslación					
<p>1. Ubiquen la plantilla en la posición uno, luego, sin despegar la plantilla del plano, deslícenla desde la posición uno hasta la posición dos.</p> <p>a. Con sus propias palabras describan cómo es el movimiento que realizaron con la plantilla.</p> <p>b. ¿La plantilla coincidió con el unicornio de la posición dos? Sí o no, expliquen.</p> <p>c. ¿Al deslizar la plantilla de la posición uno a la posición dos tuvieron que moverla para que coincidiera? Sí o no, expliquen.</p> <p>2. Ubiquen la plantilla de en la posición dos, luego, sin despegar la plantilla del plano deslícenla desde la posición dos hasta la posición tres.</p> <p>a. Con sus propias palabras describan cómo es el movimiento que realizaron con la plantilla.</p> <p>b. ¿Qué tienen en común estos desplazamientos? ¿Qué diferencias y similitudes hay entre los deslizamientos?</p>					
					
<p><i>Nota.</i> Teselado usado para la Tarea 1</p>			<p><i>Nota.</i> Plantilla de unicornio usada para la Tarea 1</p>		
	Movimiento de la posición uno a la posición dos.			Movimiento de la posición dos a la posición tres.	Comparación de los movimientos
	Con sus propias palabras describa cómo es el movimiento que realizó con la plantilla.	¿La plantilla coincidió con el unicornio de la posición 2? Si o no, explique.	¿Al deslizar la plantilla de la posición 1 a la posición 2 tuvo que moverla para que coincidiera? Si o no, explique.	Con sus propias palabras describa cómo es el movimiento que realizó con la plantilla.	¿Qué tienen en común estos desplazamientos? ¿Qué diferencias y similitudes hay entre los deslizamientos?
P1	El caballo se trasladó diagonalmente recto. Izquierda.	Sí porque está en la misma posición.	No.	El caballo se trasladó diagonalmente recto hacia derecha.	Están en la misma posición, las dos rectas diagonales , pero una va a la izquierda y una va a la derecha.

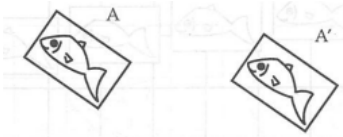
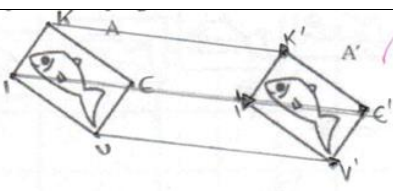
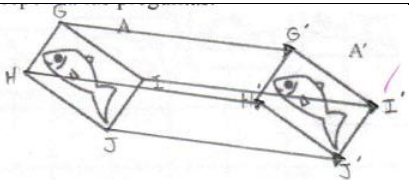
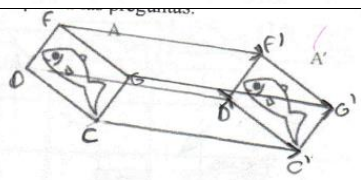
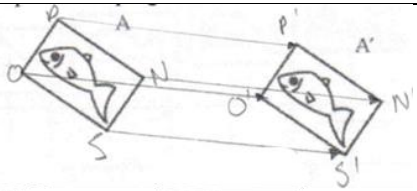
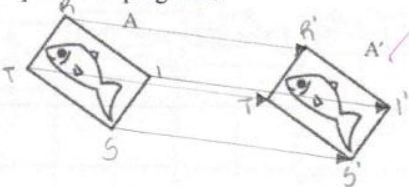
P2	Desplazamiento de la plantilla hacia la parte superior en diagonal a la izquierda .	Sí coincidió .	No, encajó con solo el deslizamiento .	Se realizó un desplazamiento en diagonal a la parte superior derecha .	Fue el mismo movimiento solo que con distinto sentido . La diferencia es que un movimiento es a la izquierda y el otro a la derecha.
P3	Se realiza un movimiento de traslación hacia el noroeste desde el punto uno al punto dos en el plano.	Sí, son la misma figura .	No realizamos ningún movimiento adicional.	Se realizó un movimiento de traslación en sentido noreste del punto dos al punto tres.	Las dos realizaron un movimiento de traslación, exceptuando que de uno a dos fue en sentido noroeste y de dos a tres en sentido noreste.
P4	Es un movimiento de traslación , se desplaza en línea diagonal / hacia la izquierda y hacia arriba .	Sí coincide porque el unicornio queda en la misma dirección antes y después de desplazarlo.	No, solo se movió en diagonal a la posición dos.	Es un movimiento de traslación, se desplaza en diagonal hacia la derecha.	En la posición uno a la dos fue diagonal a la izquierda y en la posición dos a la tres fue diagonal a la derecha, en ambos movimientos el unicornio mira para la izquierda .
P5	Realice un movimiento en diagonal hacia la izquierda / hasta llegar a la posición dos.	La plantilla sí coincidió con la posición dos ya que en la posición uno se encontraba mirando hacia el mismo lado (izquierda).	El único movimiento fue el desplazamiento en diagonal, así que no.	El movimiento realizado fue un desplazamiento en diagonal hacia la derecha.	El movimiento en los dos casos fue un desplazamiento solo que en el primer movimiento fue hacia la izquierda y en el segundo hacia la derecha.
P6	La plantilla se desplazó diagonalmente / hacia arriba para la izquierda .	Sí coincide ya que los dos están en el mismo sentido.	No.	La plantilla se desliza nuevamente hacia arriba diagonalmente pero ahora por la derecha .	Las dos se deslizan diagonalmente. Las dos van hacia arriba. En el movimiento del uno al dos se mueve hacia la izquierda mientras que del dos al tres hacia la izquierda.
P7	Vemos un desplazamiento en línea recta diagonal hacia el segundo unicornio.	Sí coincidió .	No.	Se realiza un desplazamiento en diagonal a la parte superior derecha .	La diferencia es que un movimiento es a la derecha y el otro a la izquierda.
P8	Movimiento de desplazamiento diagonal hacia el eje $-x$ y eje y .	Sí coincide la figura.	No tuvimos que cambiar la posición de la figura.	Movimiento de desplazamiento diagonal hacia el eje x y eje y .	Tiene de similitud es que fueron movimientos en diagonal , pero en diferentes direcciones .

P9	Se desplazó hacia la izquierda de manera diagonal hasta la posición dos.	El unicornio de la plantilla sí coincide perfectamente.	No se hicieron movimientos adicionales ya que la plantilla coincide y no hubo necesidad de adicionar un movimiento más.	Se desplazó hacia la derecha de manera diagonal a la posición tres.	La diferencia de los movimientos fue su sentido y la similitud fue la dirección (diagonal).
P10	Iniciamos de la posición uno, la figura se desplazó de forma recta diagonal / hacia la parte superior izquierda.	No, dado que falta una parte de la figura.	No, ya que solo desplazamos.	Desplazamos la figura de forma recta diagonal superior derecha.	El desplazamiento fue en sentidos contrarios del uno al dos del dos al tres. Los dos se desplazaron de forma recta diagonal superior.
P11	El objeto hace un movimiento rectilíneo / hacia las coordenadas noreste .	Sí coincide .	No existe.	Se movió el objeto del punto dos al tres.	Diferencias: distancia del movimiento, dirección . Similitudes: desplazamiento en un segmento lineal. Sentido .
P13	Desplazamiento de la figura hacia el noroeste .	Sí coincidió porque tienen la misma forma y tamaño.	No.	Desplazamiento de la figura hacia el noreste.	Similitudes: los dos movimientos van hacia arriba . Diferencias: se mueven en dirección al noroeste. Se mueve en dirección al noreste.
P14	Se desplazó de forma rectilínea en forma diagonal en la dirección noroeste.	En efecto el unicornio coincidió en sentido, posición y proporción.	No, fue un movimiento recto y directo.	Fue un movimiento parecido al primero, pero en dirección noreste. Rectilíneo y diagonal.	Se diferencia únicamente en la dirección que toma el segundo. Sin embargo, ambos coinciden en sentido y posición.
P15	Hicimos un movimiento de traslación en diagonal a la izquierda .	Sí, porque la plantilla son varias de la figura base y todas son iguales.	No, porque la figura base es igual a las demás.	Hicimos un movimiento de traslación en diagonal a la derecha.	Similitudes: Ambos unicornios están mirando hacia el mismo lado (derecha) . Diferencias: ambos tienen sentido opuesto .
P16	Trasladamos la plantilla deslizándola por el plano / desde la figura uno hasta la figura dos. /	Sí, coincidió porque todas las figuras tienen las mismas medidas y el	No, simplemente deslizamos la plantilla.		Similitudes: ambos se desplazaron sin separarse del plano. Ambos se deslizaron en diagonal. Diferencias: cambiaron de dirección , una se deslizó

	Dirección <u>diagonal</u> con izquierda.	mismo aspecto.			hacia la derecha y una hacia la <u>izquierda</u> .
P17	<u>Desplazamiento</u> lineal / hacia la diagonal superior izquierda.	Sí <u>coincide</u> con el 2.	No se hizo movimiento adicional.	Desplazamiento lineal diagonal superior derecha.	Tienen diferente sentido de desplazamiento, pero mismo tipo de desplazamiento, ninguno tuvo rotación, tienen diferentes <u>distancias</u> .

Anexo 4. Producciones de los Estudiantes: Tarea 4 (numeral 1)

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 1 de la Tarea 4. La primera columna corresponde a las parejas de estudiantes, la segunda corresponde a la representación gráfica del vector de traslación dada la figura y su imagen por traslación y en la tercera columna se encuentra la descripción que hacen los estudiantes del vector de traslación.

Isometría: Traslación		
<p>1. En la siguiente imagen, la figura A se ha trasladado hasta A'. Unan con flechas los vértices correspondientes por traslación, después, escriban qué tienen en común las flechas y en qué se diferencian.</p>  <p style="text-align: center;"><i>Nota. Adaptado de El Grupo de las Isometrías del Plano (p. 106), por Jaime y Gutiérrez, 1996.</i></p>		
P9		<p>Las flechas tienen en común que todas van a la misma dirección y miden lo mismo, y se diferencian porque cada una sale de un diferente vértice.</p>
P10		<p>Todas las flechas van hacia la misma dirección y tienen el mismo tamaño.</p>
P11		<p>En común tiene el sentido y su misma magnitud y dirección. Diferencia: No todas están en una misma posición.</p>
P14		<p>Misma longitud, misma dirección, diferente nacimiento y terminación.</p>
P17		<p>Son segmento con dirección y sentido, también tienen misma distancia los vértices de cada figura.</p>

Anexo 5. Producciones de los Estudiantes: Tarea 4 (numeral 3)

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 3 de la Tarea 4. La primera columna corresponde a las parejas de estudiantes y la segunda corresponde a las construcciones de las imágenes por traslación de un cuadrado dados los vectores de traslación.

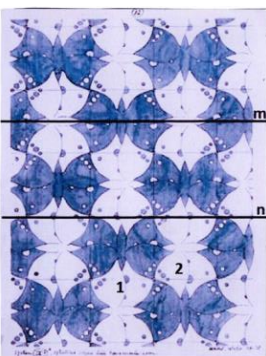

Isometrías: Traslación 3. Obtengan las imágenes de A por las traslaciones con \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .	
P9	
P10	

Nota. Adaptado de *El Grupo de las Isometrías del Plano* (p. 108), por Jaime y Gutiérrez, 1996.

<p>P11</p>	
<p>P14</p>	
<p>P17</p>	

Anexo 6. Producciones de los Estudiantes: Tarea 3

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes de la Tarea 3. En esta tabla encontramos cuatro columnas, la primera corresponde a las parejas de estudiantes y las siguientes tres a las indicaciones que propusimos. En la fila dos, mencionamos qué movimiento debían realizar los estudiantes con la plantilla; en la fila tres, presentamos las indicaciones que realizamos a los estudiantes y en las filas siguientes, registramos las respuestas de las parejas.

Introducción a las Isometrías: Rotación			
<p>1. Ubiquen la plantilla de las alas de la mariposa en la posición 1, luego, sin despegar la plantilla del plano, con un solo movimiento llévenla desde la posición 1 hasta la posición 2.</p> <p>a. ¿Cómo fue el movimiento?</p> <p>b. ¿Hay algún punto de la plantilla que se mantuvo en el mismo lugar?</p>			
			
<p><i>Nota.</i> Plantilla de las alas de la mariposa usada para la Tarea 3</p>			
<p><i>Nota.</i> Teselado usado para la Tarea 3</p>			
	Mueva la plantilla desde la posición 1 a la posición 2		
	¿Cómo fue el movimiento?	Encuentre otra posición en la que el diseño del ala de la tesela coincida con la plantilla.	¿Hay algún punto de la plantilla que se mantuvo en el mismo lugar?
P1	Primero es una rotación . No coincidió porque el ala está volteada al revés.		
P2	Realizó un movimiento de rotación de 180° , / el punto del eje para desplazarla es la punta del ala de la derecha.		Sí, la unión del ala de una mariposa con la otra.
P3	Se realiza un movimiento de rotación de 180° en sentido contrario a las manecillas del reloj, no coinciden los puntos.		Sí, se mantuvo el punto utilizado como eje de rotación.
P4	Se tuvo que hacer una rotación de 180° / en sentido de las manecillas del reloj, no coincidió.	Se tuvo que girar hacia la derecha para que encajara con el plano .	El punto de la derecha se mantuvo en la primera posición y en la segunda posición.
P5	Para llegar a la posición dos realicé un movimiento de rotación , no coincidió ya que al observar queda la misma posición, pero al revés.		Sí, el punto en la parte superior del ala se mantiene durante las tres posiciones uno arriba y dos.

P6	Se giró hacia la izquierda por arriba, no ya que puede que coincida la figura, pero no el diseño de la figura.		Sí hay un punto fijo en una de las puntas del ala.
P7	Un desplazamiento rotativo / hacia la derecha.		Sí coincide en varios puntos.
P8	Se hizo un movimiento de 180° , los puntos de la plantilla no coinciden.		
P9	Hicimos dos rotaciones de 90° / hacia la derecha / encima del plano y coincidió la forma con la posición dos.		Sí ya que al hacer el giro .
P10	Partimos de la posición uno y rotamos sobre una de sus esquinas a la posición dos, no coincide porque no quedo exactamente igual.	Si rotamos la plantilla a la parte superior derecha para que coincida .	La esquina de la plantilla que da a la punta del ala.
P11	Se trasladó a la derecha de la uno a la dos.	Si lo movemos en sentido de las manecillas del reloj cuadran los puntos.	Sí hubo un punto que se movió en el extremo del ala.
P12	Desde la posición uno giramos la plantilla hacia la derecha , hizo que la posición dos coincidiera .	Desde la posición uno rotamos la plantilla hacia abajo lo que hizo que coincidiera con una mariposa morada en el ala derecha.	El punto de referencia es el punto del ala derecha .
P13	Una rotación de 180° / hacia la derecha, pero tomando como eje de rotación el vértice de la mitad de la derecha.		El vértice que tomé como eje de rotación se mueve en el mismo punto.
P14	Hicimos una rotación hacia la derecha / de 180° y la figura no coincidió por los puntos.	Al hacer la misma rotación hacia la izquierda la figura calza perfectamente.	Al realizar las rotaciones, los puntos que se mantienen son los ejes de rotación sin embargo estos cambian cuando la dirección del movimiento también lo hace.
P15	Hicimos un movimiento de rotación hacia la derecha.		Sí, ya que el punto que se mantiene es la unión de las dos alas .
P16	Se realiza la rotación desde la punta del ala que coincidió con la figura dos.		El punto de referencia para la rotación se quedó en el mismo lugar (punto de unión de la figura uno y dos).
P17	Se hace una rotación 180° desde una esquina de la plantilla, coincide el marco de la figura, más no los puntos de su interior.	Si se desplaza hacia la izquierda y hacia arriba y se rota 90° coincide y si de ahí se rota otros 90° también.	Sí, la esquina superior de la parte del ala arriba .

Anexo 7. Producciones de los Estudiantes: Tarea 6 (numeral 1)

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 1 de la Tarea 6. Esta tabla se compone de cuatro columnas, la primera corresponde a las parejas de estudiantes y las siguientes tres a las preguntas que propusimos; en las filas dos a la 18, registramos las respuestas de las parejas.

Isometrías: Rotación

1. En la siguiente imagen se encuentra el cuadrado $ABCD$, el cual realizó un movimiento de rotación.

Nota. Adaptado de *Traslaciones Giros y Simetrías en el Plano* (p. 24), por Gutiérrez y Jaime, 1986.

	¿Qué cambios tuvo el cuadrado $ABCD$ al moverse de la posición inicial a la final? ¿el tamaño del cuadrado cambió? ¿la forma del cuadrado cambió?	¿Cuánto giró el cuadrado $ABCD$ respecto al centro de giro (punto G)?	¿Cuál es la distancia desde el centro de giro al vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición inicial? ¿Cuál es la distancia desde el centro de giro al vértice B del cuadrado $ABCD$ en la posición final? De una explicación geométrica a lo sucedido.
P1	Realizó <u>rotación de 135°</u> , / no cambió su tamaño y tampoco su forma.	<u>Giró / -135°</u> .	3cm, 3cm. La distancia no cambia porque al realizar un movimiento de rotación el punto B y el punto G serían el radio de la circunferencia que se genera, y el radio nunca cambia su distancia sin importar la posición del punto B en el perímetro de la circunferencia.
P2	El cuadrado $ABDC$ hizo una <u>rotación de 140°</u>	El <u>giro</u> del cuadrado hizo la rotación de <u>130°</u> .	La distancia desde el centro de giro es de <u>135°</u> . La distancia desde el <u>centro de giro</u> al vértice (B) la posición inicial y final es igual.
P3	El cuadrado $ABCD$ al moverse de la posición inicial a la final cambió su posición. No, a pesar de que cambió su posición, <u>no cambió su</u>	El cuadrado $ABCD$ <u>giró -135°</u>	La distancia que hay desde el <u>centro G</u> al vértice B tomándolo en centímetros es de 3cm. La distancia que hay desde el <u>centro G</u> al vértice B en el cuadrado de posición final, tomándolo en centímetros es de 3cm.

	tamaño. No, su forma no cambió.		Ambos tienen la misma distancia a pesar de que están en diferentes posiciones de la circunferencia. Como ejemplo podríamos usar un círculo de referencia ya que el movimiento que hace el cuadrado es de manera rotatoria en sentido de las manecillas del reloj.
P4	Tuvo una rotación de 180° en comparación a la posición inicial, no cambió su forma.	El cuadrado giró 135° hasta llegar a la posición final.	La distancia que hay desde el centro de giro hasta el vértice B en la posición inicial es de 3cm. La distancia que hay desde el centro de giro hasta el vértice B en la posición final es de 3cm. La distancia es constante durante toda la rotación.
P5	Posición inicial era un cuadrado y en la final quedó como un rombo. Su tamaño es el mismo.	El cuadrado ABCD dio un giro de 135°	La distancia del punto G al B en la posición inicial es de 3cm. La distancia del punto G al B en la posición final es de 3cm. La distancia de ambos vértices $B_i - B_f$ es la misma porque se desplazó, pero su distancia respecto al punto g es igual a la línea del radio.
P6	Tuvo una rotación de 225° , conservó su tamaño y forma.	Giró 225°	3cm, 3cm, la distancia siempre es la misma dado que se realizó una rotación alrededor del punto G sin que se realizara algún tipo de desplazamiento horizontal o vertical.
P7	Cuando empezó a rotar quedó en una posición, no cambió de tamaño ni de forma solo en sentido.	Hizo una rotación de 145 grados / respecto al punto g.	La distancia es de 6,2cm. La distancia del centro de giro al vértice B es de 3cm.
P8	El cuadrado ABCD tuvo una rotación de El tamaño del cuadrado no cambió sigue igual la forma no cambió.		La distancia del centro a B es de 3cm. La distancia del centro de giro al vértice B no cambia debido a que al hacer las circunferencias la distancia nunca cambia.
P9	El cuadrado ABCD al mover de la posición inicial a la final lo único que hizo fue su rotación y conservó el mismo tamaño y forma.	El cuadrado ABCD giró respecto al centro de giro (G) - 135° hacia las manecillas del reloj.	La distancia del centro de giro al vértice B del cuadrado ABCD inicial es de 3cm. La distancia del centro de giro al vértice B del cuadrado ABCD final es de 3cm. Lo sucedido es que al cuadrado ABCD al dar su rotación de -135° mantuvo su distancia al respecto del centro de giro (G).
P10	Ni el tamaño ni la forma cambia, / lo único que cambió fue la orientación del cuadrado.	-145°	La distancia del punto B perteneciente al cuadrado ABCD en su posición inicial hasta el punto G es de 3cm. La distancia del punto B perteneciente al cuadrado ABCD en su posición final hasta el punto G es de 3cm. Al ser una rotación completamente circular no se genera alteraciones ya que las características de un círculo es que su radio es el mismo por tanto la distancia no cambia.

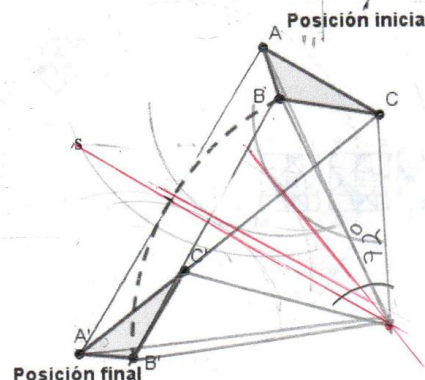
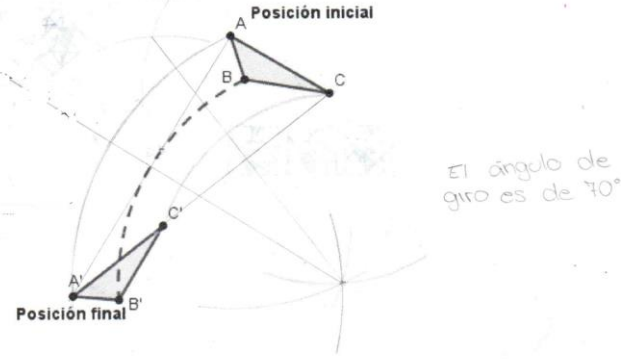
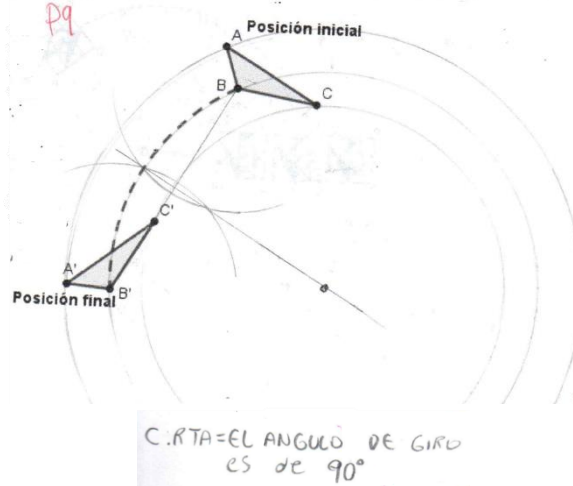
P11	El cuadrado $ABCD$ tuvo el cambio de rotación de vértices no tuvo ningún cambio de tamaño y la forma no tuvo cambio alguno.	Respecto al centro punto g el giro fue de 134° .	La distancia del vértice B al punto g es de 3cm. La distancia del vértice B del punto final es de 3cm. La distancia entre los dos vértices B da igual en ambos vértices por la distancia distribuida en el radio.
P12	El cuadrado cambió de posición -147° . / El tamaño del cuadrado no cambió. No la forma de cuadrado no cambió.	Giró -147° .	3cm, 3cm. Porque es una circunferencia el radio es la misma por lo que la distancia no cambia.
P13	Solo cambio de posición, / no cambio de forma ni de tamaño.	El cuadrado $ABCD$ giró -135° respecto al punto G .	3cm, 3cm. La distancia es igual porque el cuadrado $ABCD$ no giró sobre su propio eje, sino que solo sobre el centro de giro (punto G) .
P14	El tamaño y la forma se mantuvo tras la rotación. Sin embargo, su sentido y posición si cambiaron.	El cuadrado $ABCD$ giró -135° con respecto al punto G .	La distancia desde la posición inicial del punto B hasta el centro de giro es de 3cm. La distancia del punto B en la posición final hasta el centro de giro también es de 3cm. Las distancias son las mismas debido a que la rotación trata una circunferencia y la distancia de los puntos desde el centro hasta los vértices se asemejan o hacen el papel del radio de esta misma circunferencia.
P15	El cuadrado tuvo un cambio en su forma ya que esta quedó en forma de rombo y tuvo un movimiento de rotación .	Tuvo un giro respecto al punto G de -134° .	La distancia desde el centro del giro al vértice B de la posición inicial es de 3cm. La distancia desde el centro del giro al vértice B de la posición final es de 3cm. La distancia de los dos puntos de B desde el centro del giro es igual. La explicación geométrica es que al dar el giro de rotación la figura gira en su propio eje conservando la distancia del giro.
P16	El cuadrado $ABCD$ no tuvo alteraciones de tamaño ni de forma y posición, pero si hubo rotación en la que la figura cambió de posición.	El cuadrado $ABCD$ giró -135° respecto al centro de giro (punto G)	La distancia del vértice B en la posición inicial con respecto al punto G fueron 3cm. La distancia del vértice B en la posición final con respecto al punto G fueron 3cm. En la posición final e inicial tuvieron la misma distancia al punto G , la explicación geométrica a esto es que la figura no se trasladó, sino que rotó sobre su propio eje conservando la distancia con el centro de giro.
P17	Cambió su posición, / el tamaño no cambió, la forma del cuadrado no cambió.	En sentido de las manecillas se desplazó 135° y en sentido antihorario 230°	3cm, 3cm. Se mantiene en un mismo movimiento y no rota sobre su eje.

Anexo 8. Producciones de los Estudiantes: Tarea 6 (numeral 3)

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 3 de la Tarea 6. Esta tabla se compone de dos columnas, la primera corresponde a las parejas de estudiantes y en la segunda registramos las construcciones de los estudiantes.

Isometrías: Rotación 3. El triángulo de la posición inicial ha realizado una rotación para ponerse en la posición final. Encuentre el centro de giro y el ángulo de giro, para ello, siga la siguiente instrucción.	
<p style="text-align: center;">Instrucción</p> <p>Dibuje las circunferencias sobre las que se movieron cada uno de los vértices.</p> <p>Nota: El centro de la circunferencia se puede hallar al construir dos mediatrices, la intersección entre estas será el centro.</p>	
<p>P1</p>	
<p>P2</p>	

<p>P3</p>	<p>Diagram for P3 showing the rotation of a triangle ABC. The initial position is labeled "Posición inicial" with vertices A, B, and C. The final position is labeled "Posición final" with vertices A', B', and C'. The construction uses concentric circles centered at a pivot point and radial lines to map the initial points to their final positions.</p>
<p>P4</p>	<p>Diagram for P4 showing the rotation of a triangle ABC. The initial position is labeled "Posición inicial" with vertices A, B, and C. The final position is labeled "Posición final" with vertices A', B', and C'. The construction uses concentric circles centered at a pivot point and radial lines to map the initial points to their final positions.</p>
<p>P5</p>	<p>Diagram for P5 showing the rotation of a triangle ABC. The initial position is labeled "Posición inicial" with vertices A, B, and C. The final position is labeled "Posición final" with vertices A', B', and C'. The construction uses concentric circles centered at a pivot point labeled "Centro" and radial lines to map the initial points to their final positions. The label "P5" is written in red below the diagram.</p>
<p>P6</p>	<p>Diagram for P6 showing the rotation of a triangle ABC. The initial position is labeled "Posición inicial" with vertices A, B, and C. The final position is labeled "Posición final" with vertices A', B', and C'. The construction uses concentric circles centered at a pivot point and radial lines to map the initial points to their final positions.</p>

<p>P7</p>	 <p>Diagram for P7 showing the rotation of a triangle ABC to a new position A'B'C'. The initial position is labeled "Posición inicial" and the final position is labeled "Posición final". Red lines and a 70-degree angle are shown to indicate the rotation.</p>
<p>P8</p>	 <p>Diagram for P8 showing the rotation of a triangle ABC to a new position A'B'C'. The initial position is labeled "Posición inicial" and the final position is labeled "Posición final". A handwritten note states "El ángulo de giro es de 70°".</p>
<p>P9</p>	 <p>Diagram for P9 showing the rotation of a triangle ABC to a new position A'B'C'. The initial position is labeled "Posición inicial" and the final position is labeled "Posición final". A handwritten note states "C.RTA=EL ANGULO DE GIRO ES DE 90°".</p>

<p>P10</p>	
<p>P13</p>	
<p>P15</p>	<p style="text-align: right;"> $C = -65^\circ$ $B = -65^\circ$ $A = -65^\circ$ </p>
<p>P16</p>	

Anexo 9. Producciones de los Estudiantes: Tarea 7

A continuación, presentamos la tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes de la Tarea 7. En la primera columna están las parejas de estudiantes y en la segunda están, por filas, las construcciones de la tesela sobre el cartón paja y las producciones escritas (descripciones).

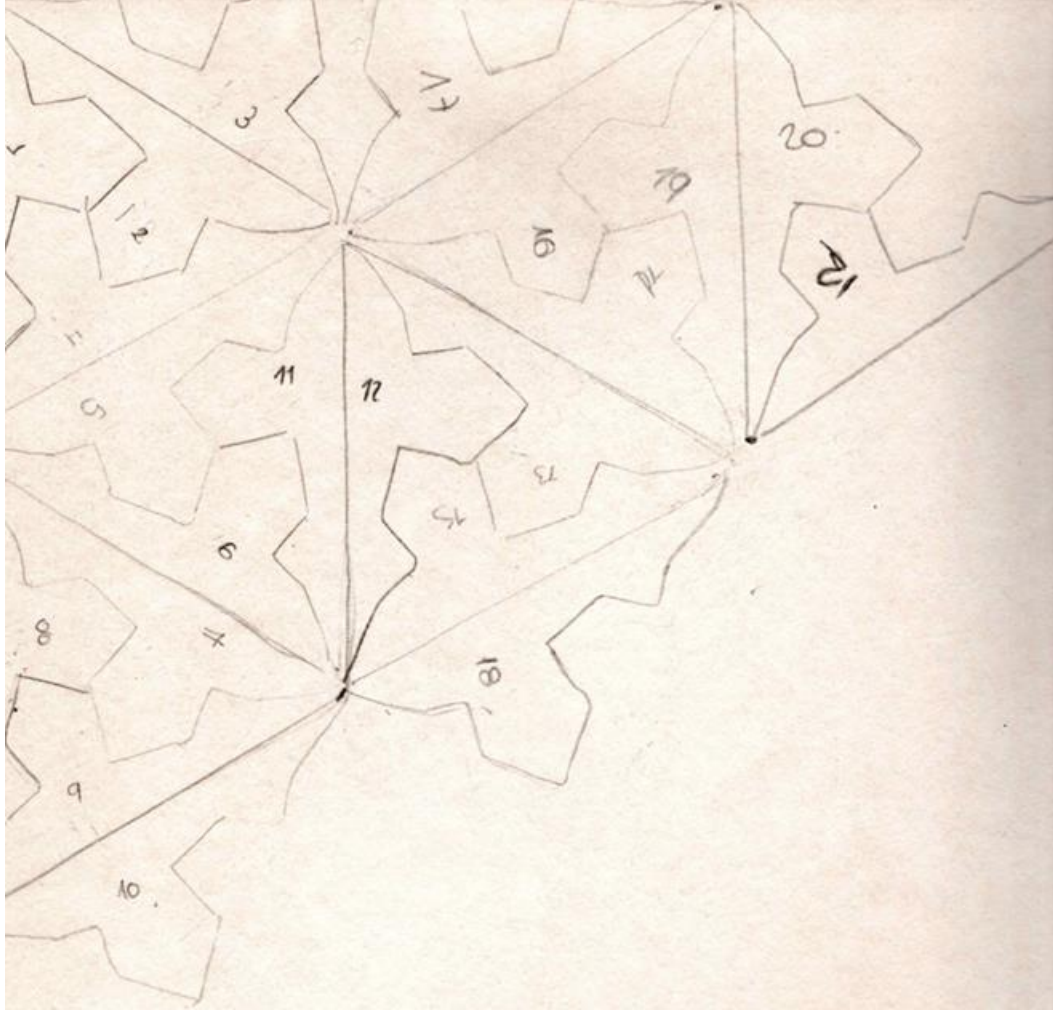
1. Ubiquen la plantilla como se muestra en la figura, luego, dibujen la silueta de esta sobre el cartón paja y numeren esta como 1.



2. Apliquen a esta los movimientos rígidos del plano para generar la tesela sobre el cartón paja. Para ello, enumeren la figura generada por la plantilla en el cartón en el orden en que vayan aplicando los movimientos.
3. A continuación, se presenta una tabla en la cual deberán registrar cada uno de los movimientos que realicen con la plantilla para recrear la teselación de M. C. Escher del plano

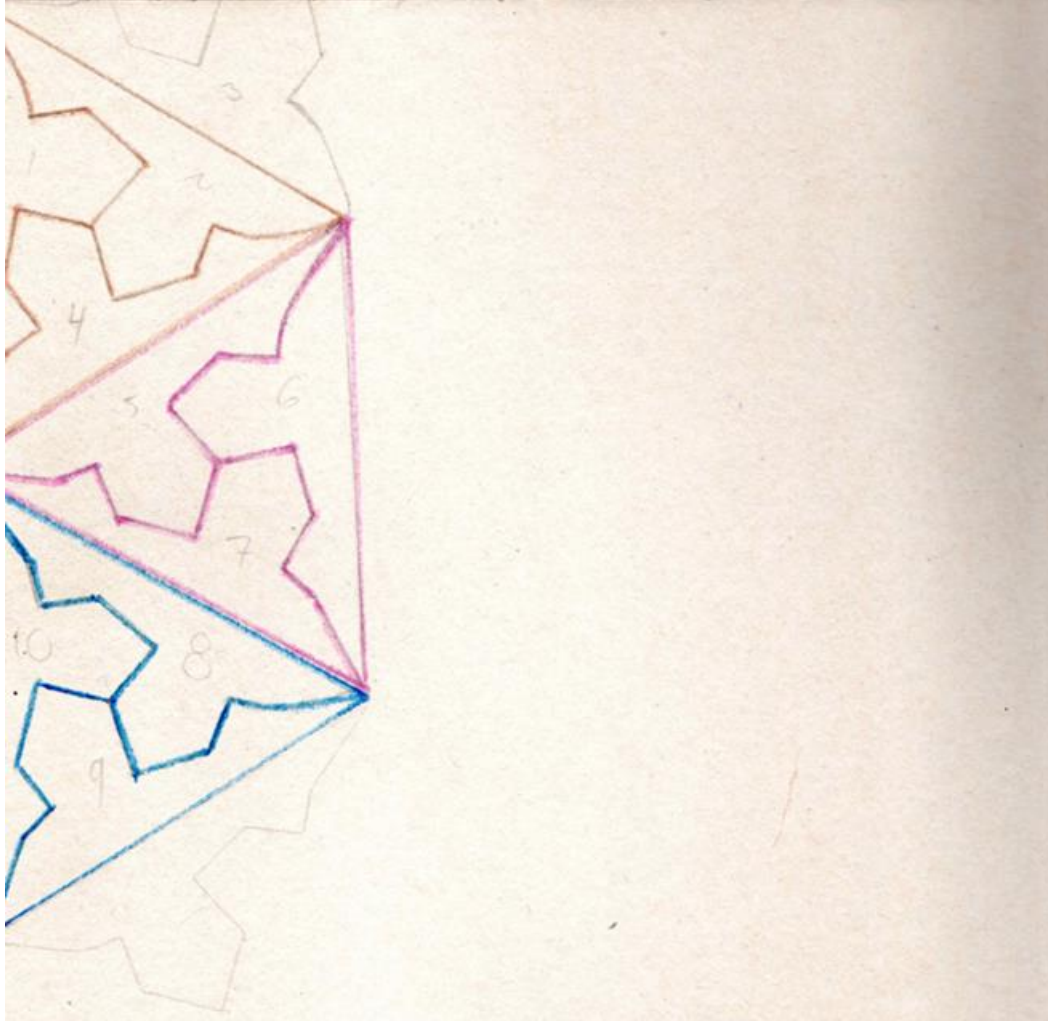
Posición	Movimiento	Descripción
De la 1 a la 2		

P1



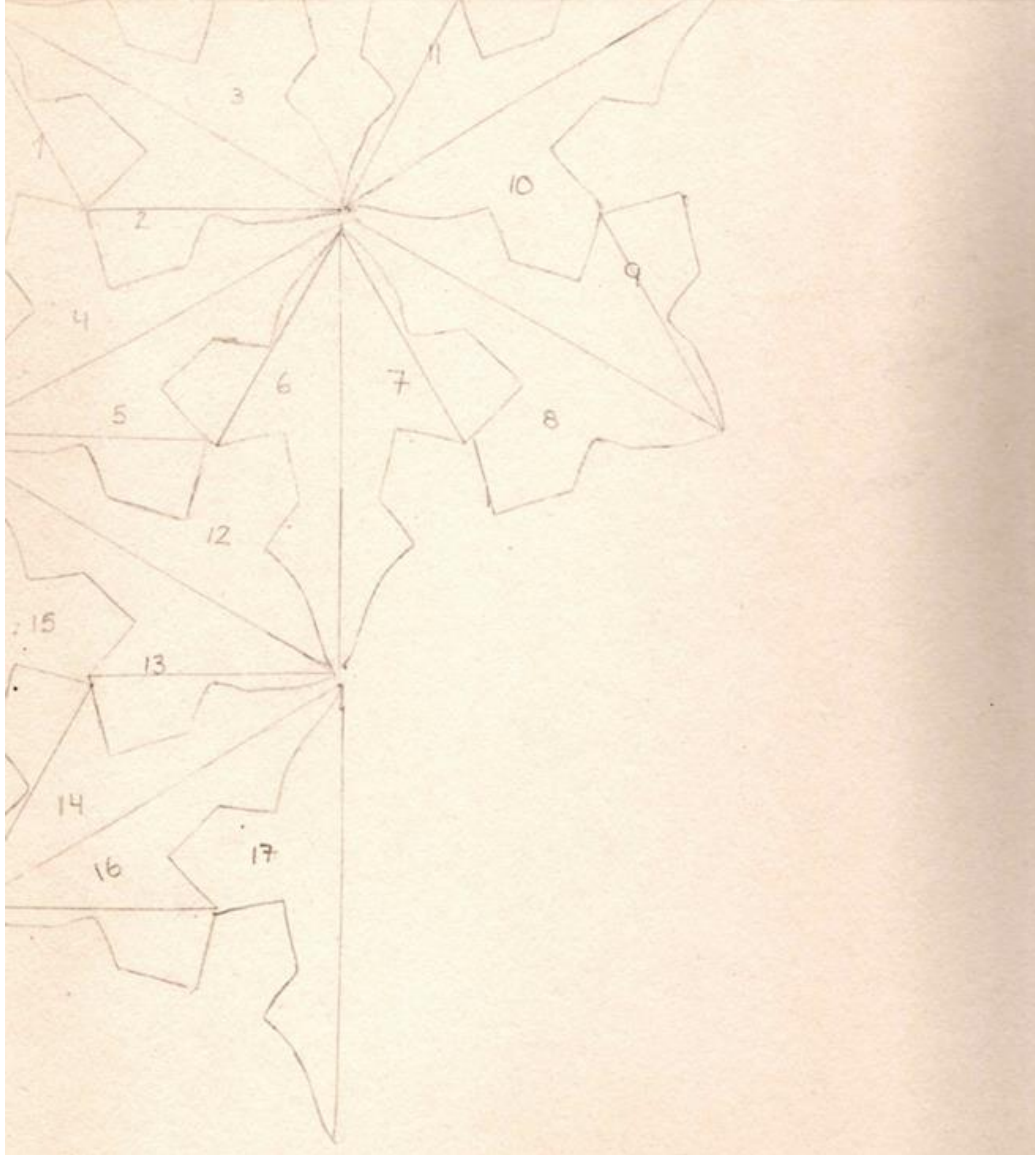
Posición	Movimiento	Descripción
5 a 6	Rotación	Rotación del punto P a <u>120°</u> .
6 a 7	Simetría	Simetría del punto P a la recta roja.
18 a 19	Rotación	Rotación <u>-120°</u>

P2



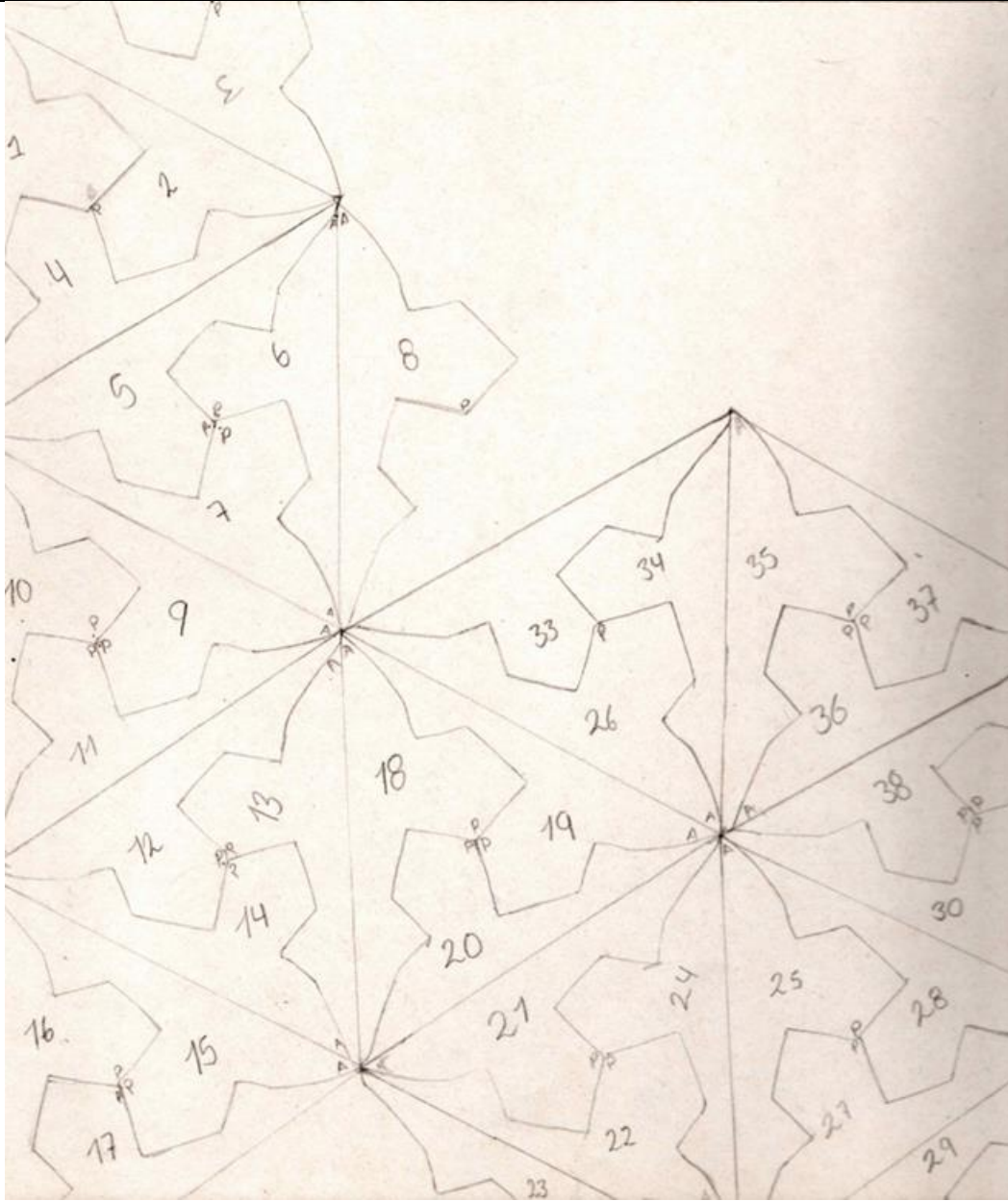
Posición	Movimiento	Descripción
4 a la 5	Simetría	Simetría con respecto a su eje (línea roja)
5 a la 6	Rotación	La plantilla hace un movimiento de rotación con centro en P (según línea roja) -120°

P3



Posición	Movimiento	Descripción
5 a la 6	Rotación	Rotación con giro del centro P del punto A en un ángulo de <u>-120°</u>
6 a la 7	Simetría	Del punto P con respecto a la roja.

P4



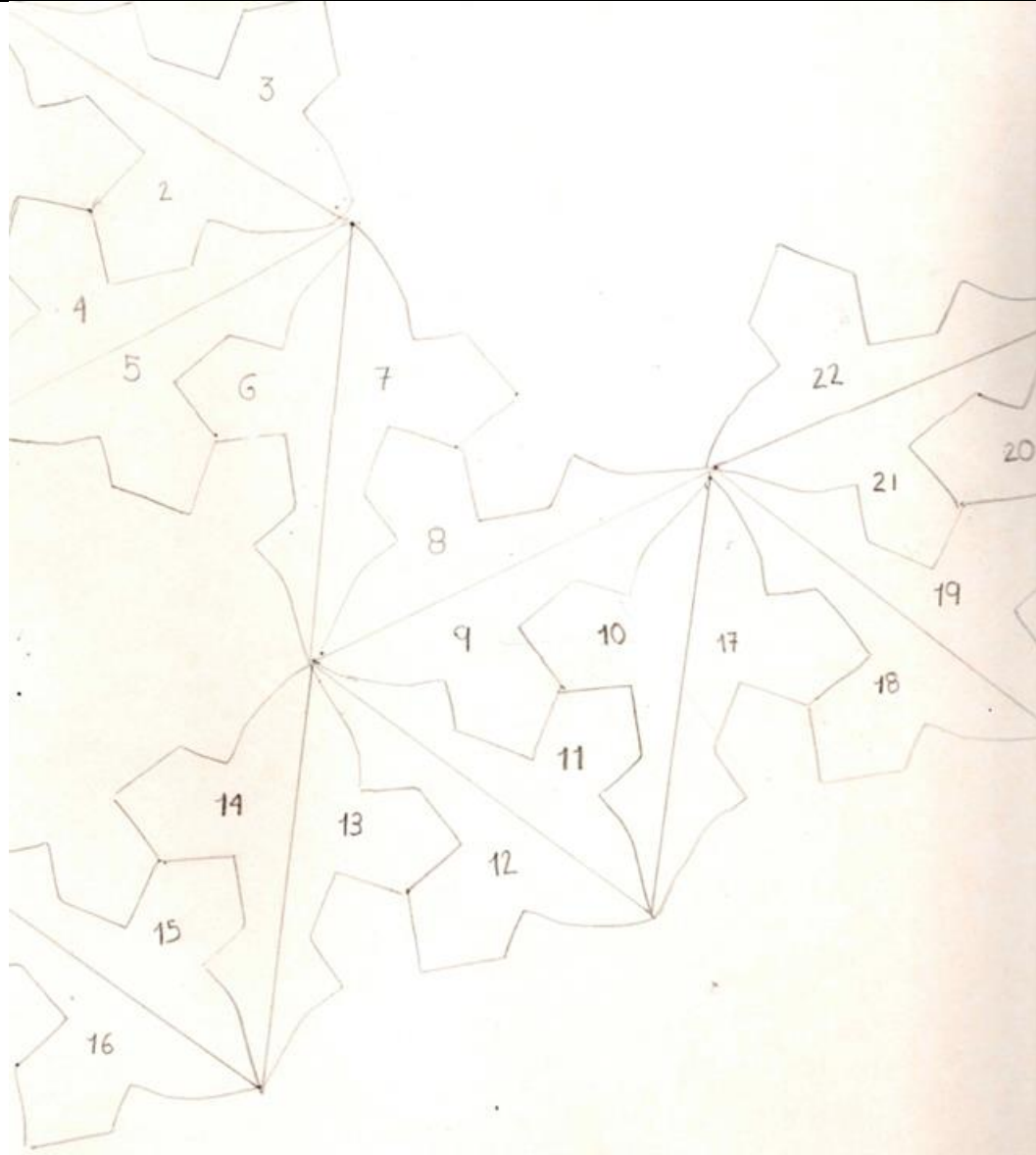
Posición	Movimiento	Descripción
5 a la 6	Rotación	Rotación con centro en P de <u>-120°</u>
6 a la 8	Simetría	Simetría del punto P con respecto a la recta roja

P5



Posición	Movimiento	Descripción
5 a la 6	Rotación	Del punto p (como centro) giro en p del punto a con ángulo de <u>-120°</u>
6 a la 7	Simetría	Del punto p al respecto de la recta roja
8 a 9	Simetría	Centro en p con respecto de la recta roja.

P6



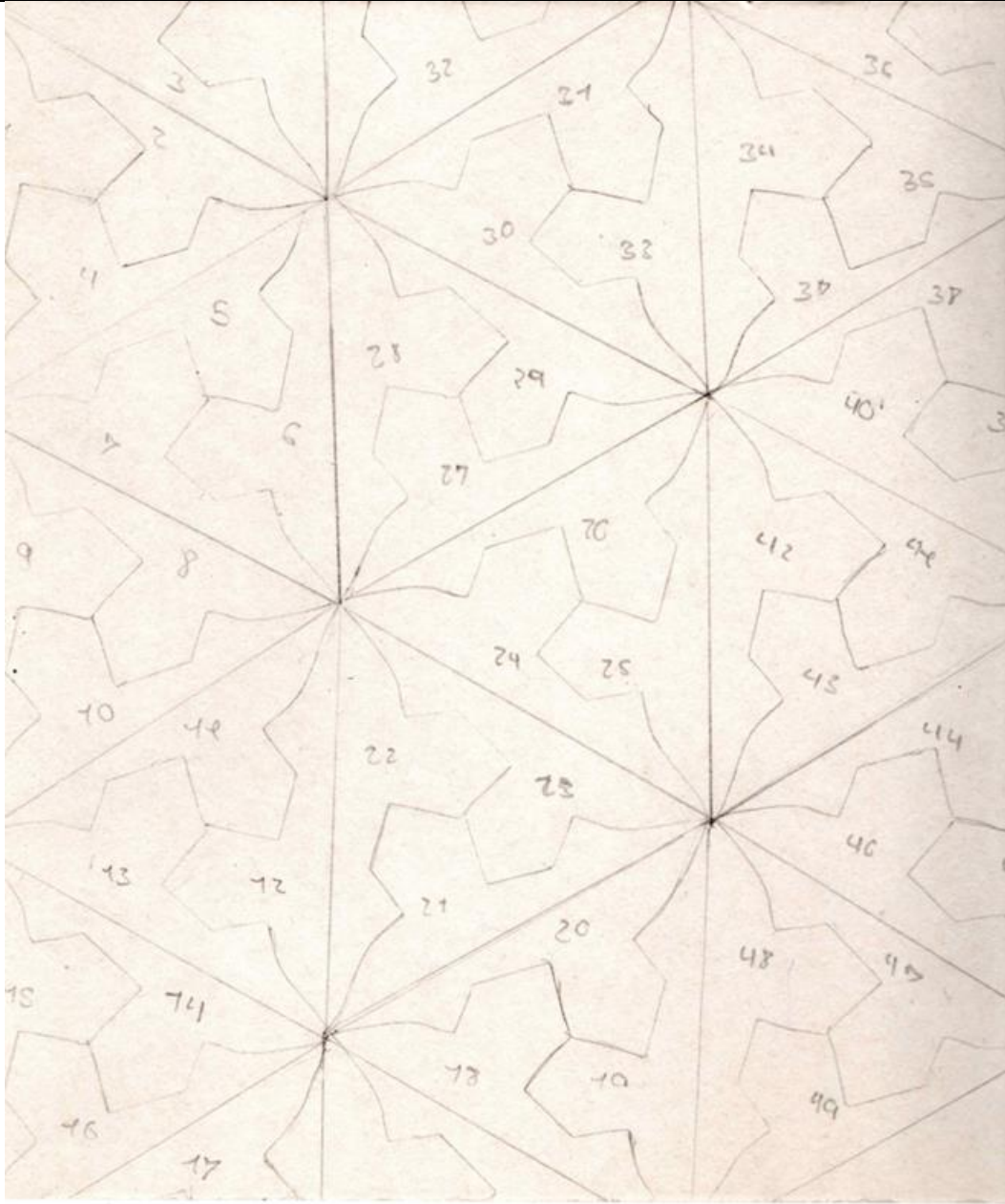
Posición	Movimiento	Descripción
7 a la 8	Rotación	Una rotación con centro en <u>P</u> en <u>120°</u>
8 a la 9	Simetría	Una simetría del punto <i>B</i> con respecto a la recta roja.
9 a la 10	Rotación	Es una rotación con centro de giro en <u>P</u> del punto <i>a</i> , en un ángulo de <u>-120°</u>

P7



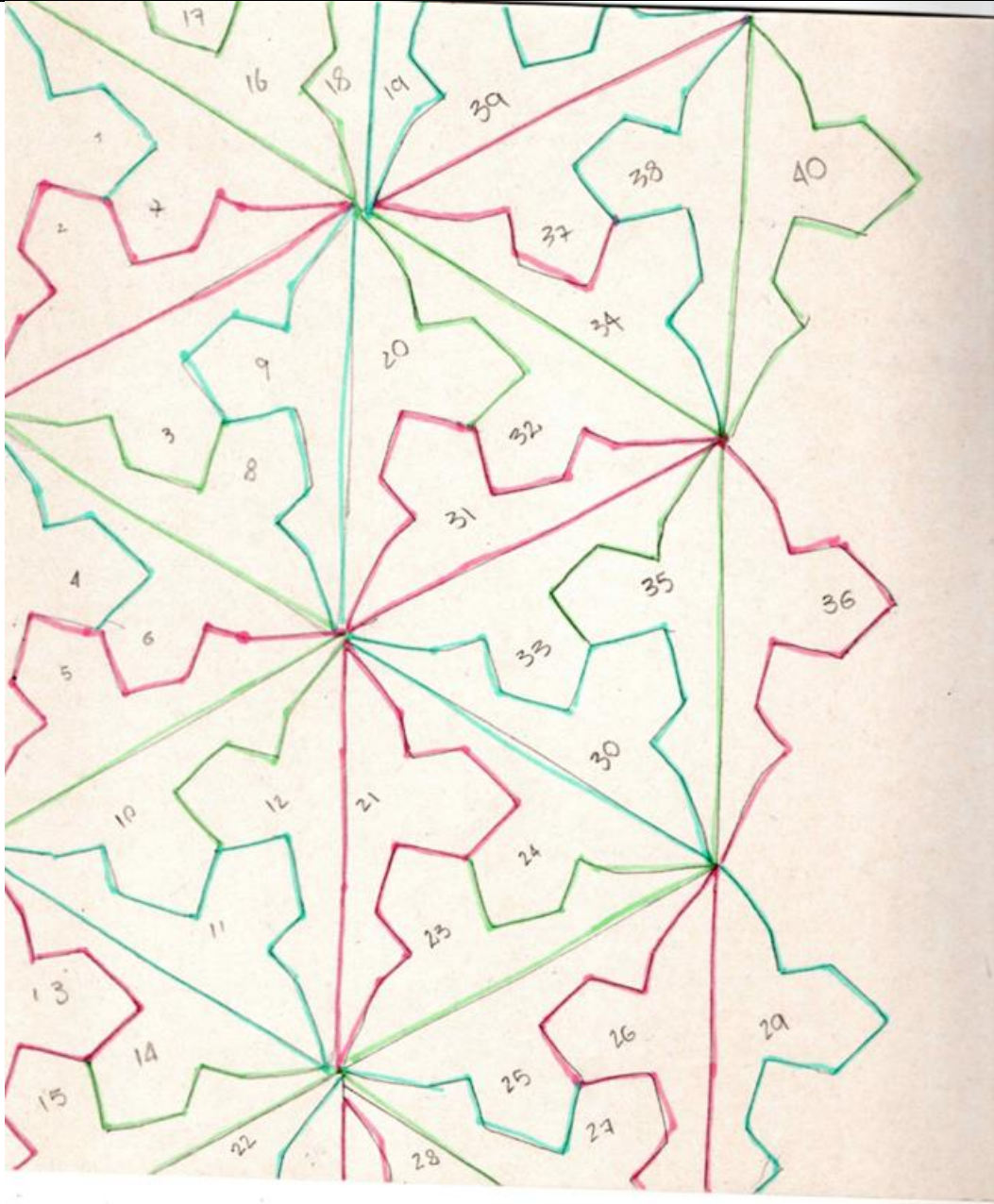
Posición	Movimiento	Descripción
5 a la 6	Rotación	Con centro de giro en P $+120^\circ$ tomando como referencia el punto A .
6 a la 7	Rotación	Con centro de giro P -120° tomando como referencia del punto A .
6 a la 9	Simetría	Una simetría de punto A respecto al eje de simetría (raya roja).

P8



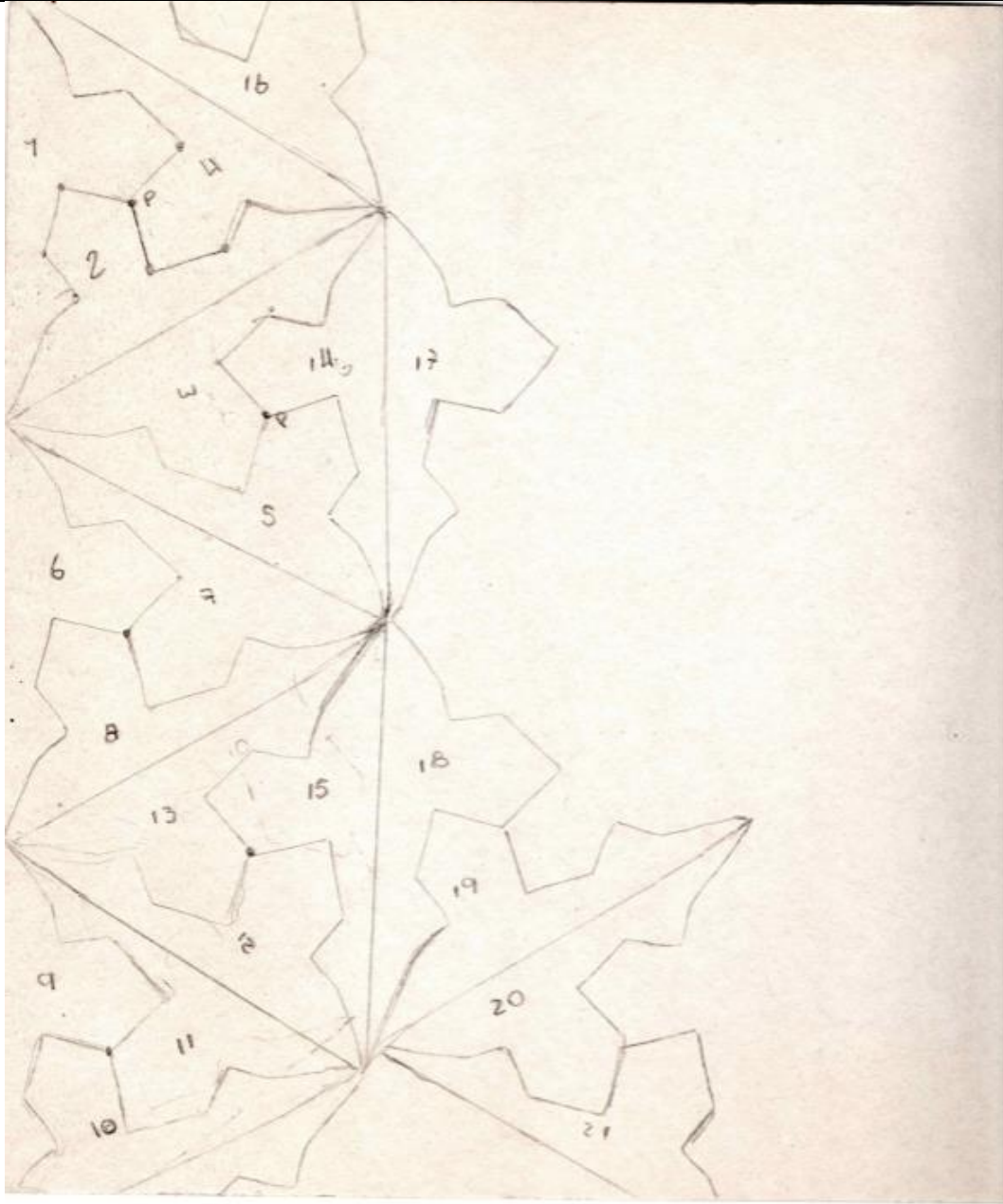
Posición	Movimiento	Descripción
4 a la 5	Rotación	Hizo un movimiento contra las manecillas del reloj, con punto en <u>P</u> .
7 a la 8	Rotación	Hizo un movimiento contra las manecillas del reloj, con punto en <u>A</u> .

P9



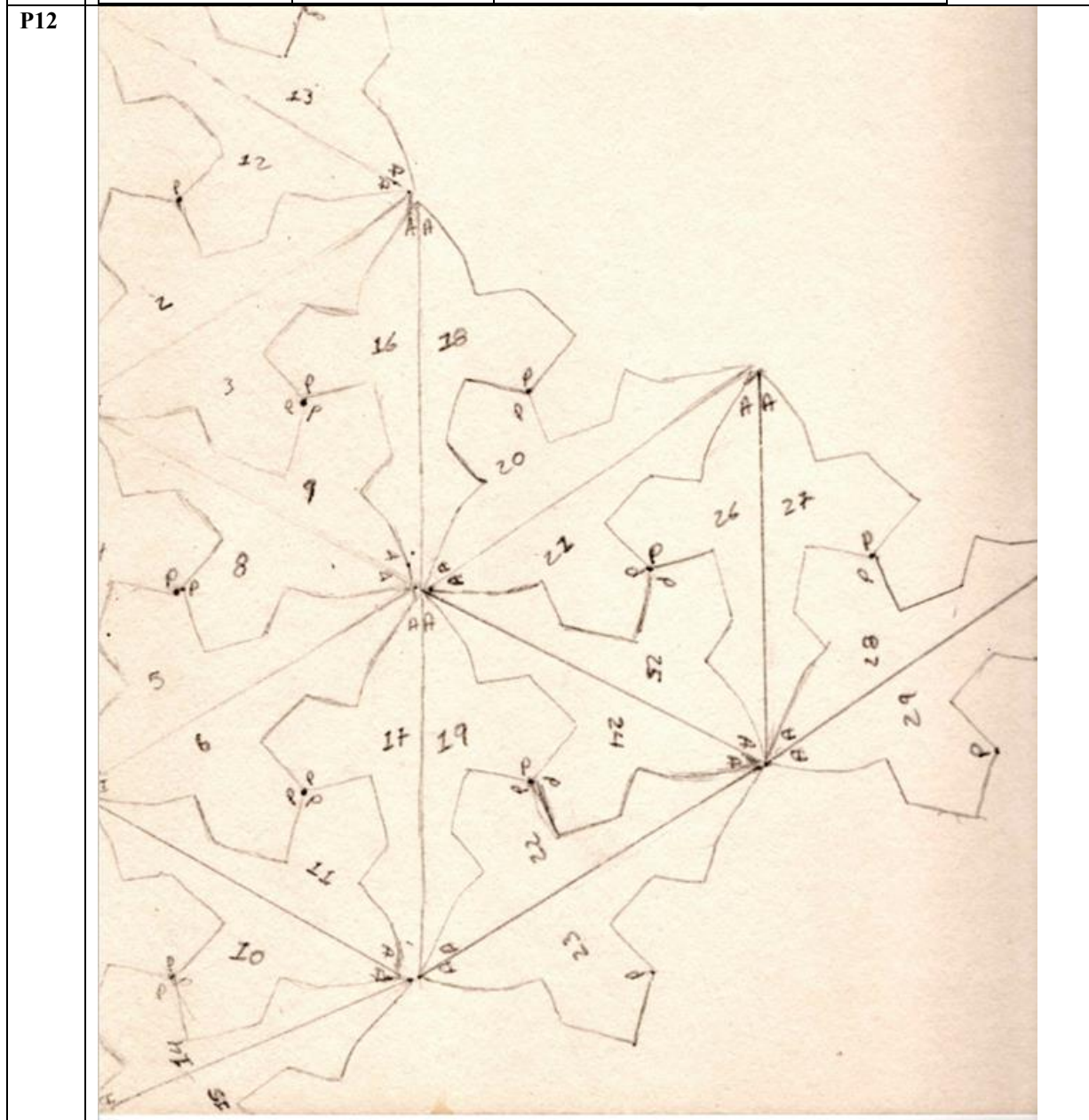
Posición	Movimiento	Descripción
4 a la 5	Rotación	Rotación con centro en P en un ángulo de <u>120°</u> .
4 a la 6	Rotación	Rotación con centro en P en un ángulo de <u>-120°</u> .
6 a la 8	Simetría	Simetría del punto P con respecto a la recta roja.
4 a la 13	Traslación	Se traslada <u>8.5cm</u> en dirección <u>sur</u> .

P11



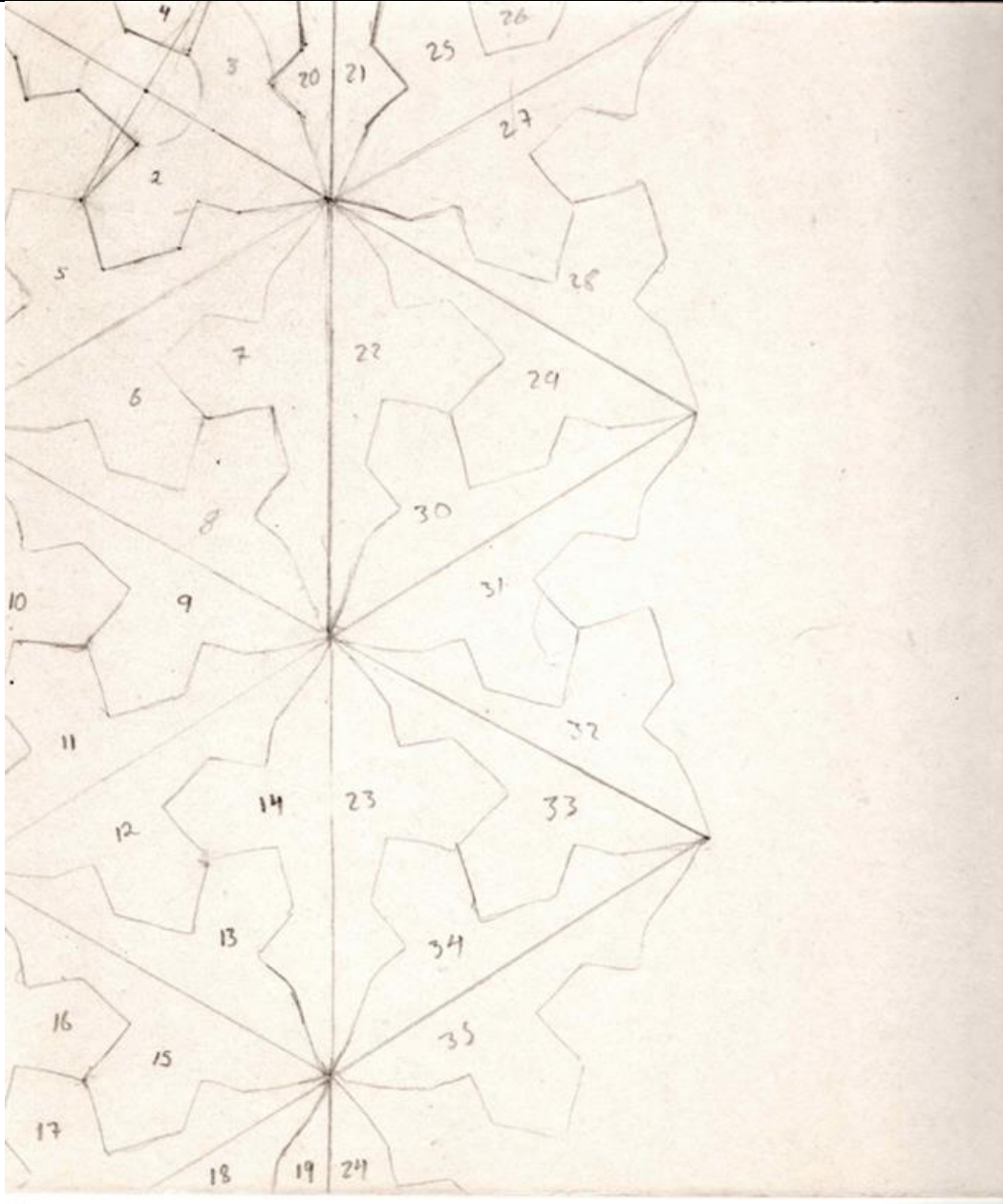
Posición	Movimiento	Descripción
6 al 7	Rotación	Con el punto P de la posición 6 usamos un ángulo de -120° para formar la séptima posición.
2 al 3	Simetría	Nos basamos en el eje de simetría con línea roja para reflejar la P con la P prima para así trazar cada uno de sus vértices.
1 al 6	Traslación	Nos basamos en la posición 1 para hacer una traslación de una magnitud del punto P a la P prima .

	1-6 al 9	Traslación	Usamos el punto a de la 1 – 6 para hacer una traslación hacia el <u>sur</u> dándonos la posición 9
--	----------	------------	--



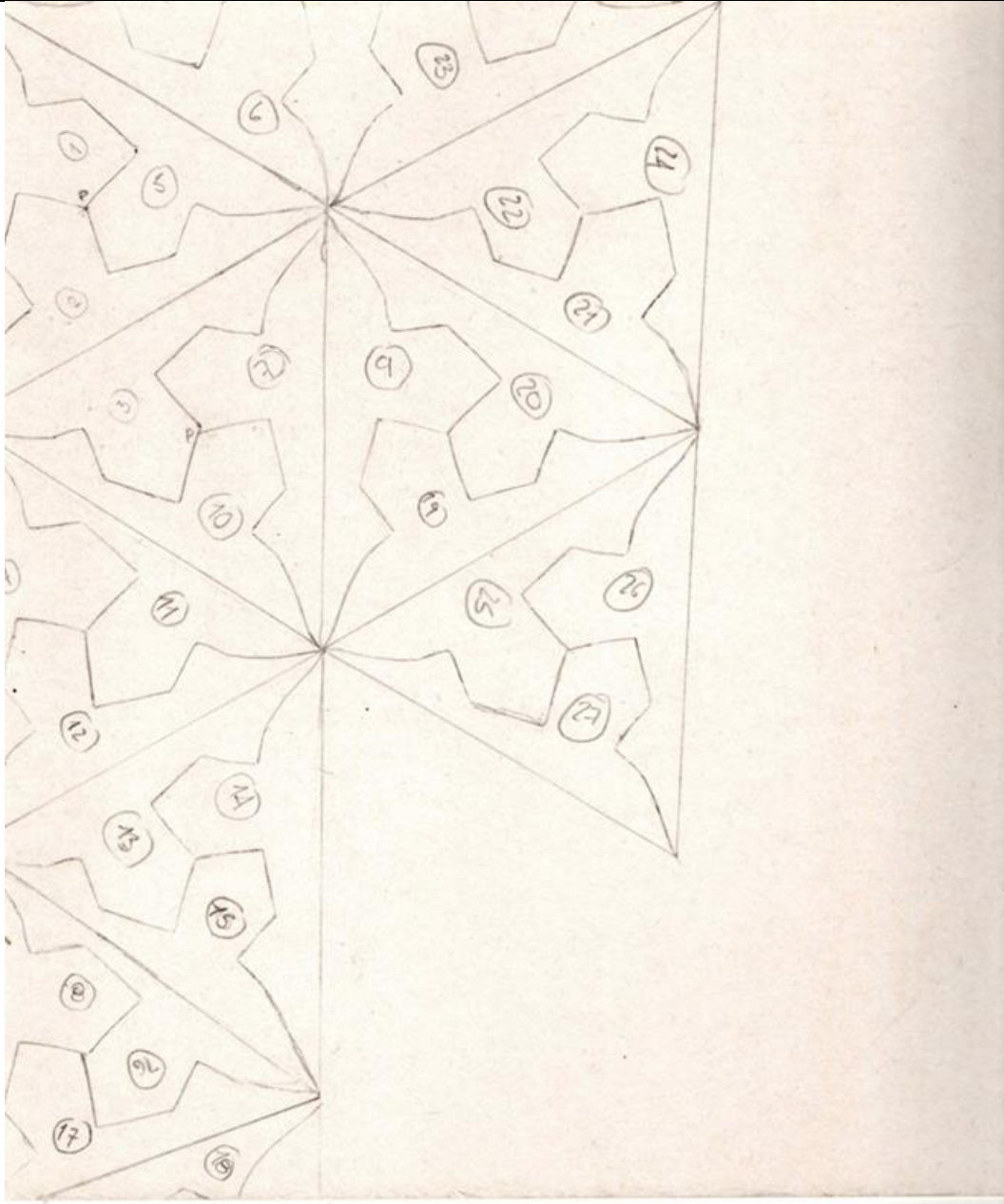
Posición	Movimiento	Descripción
4 a la 7	Traslación	Traslación de <u>90°</u> , con sentido hacia el <u>sur</u> con magnitud <u>8.7</u> .
7 a la 10	Rotación	Rotación con centro en <u>P</u> del <u>A</u> en un ángulo de <u>-120°</u> .
8 a la 9	Simetría	Simetría del punto <u>P</u> con respecto a la recta roja.

P13



Posición	Movimiento	Descripción
1 a la 2	Rotación	Se mueve <u>-120°</u> con punto giratorio en <u>P</u> y punto de referencia en <u>A</u> .
2 a la 5	Rotación	Se mueve <u>240°</u> con punto giratorio en <u>P</u> y punto de referencia en <u>A</u> .
5 a la 6	Simetría	Con respecto a <u>P</u> se hace un movimiento de simetría donde el punto está estático.
8 a la 9	Simetría	Se halla la mediatriz del eje de simetría (línea roja) y desde el punto medio con respecto a <u>P</u> se hace un movimiento de simetría y el punto estático.

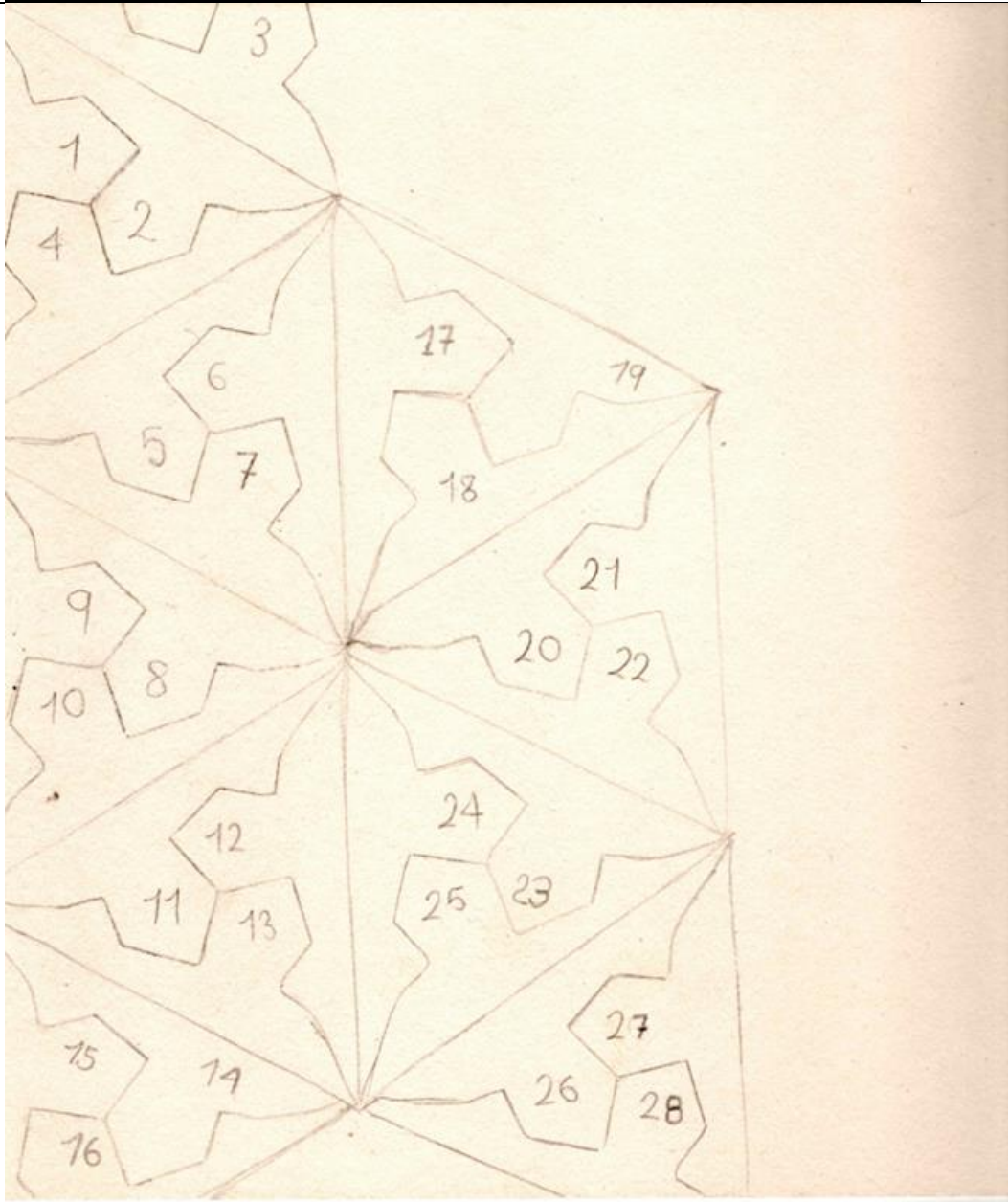
P14



Posición	Movimiento	Descripción
1 a la 4	Traslación	Se realiza una traslación con sentido vectorial <u>sur</u> , conservando su dirección a <u>90°</u> sobre la horizontal y moviéndose en una magnitud de <u>8.8cm</u> , es decir (1) unidad o figura.
1 a la 5	Rotación	Se realiza una rotación del punto <i>A</i> con un centro de giro en el punto <u>P</u> y ángulo de <u>-120°</u>

	7 a la 9	Simetría	Se realiza una simetría de la figura 7 con respecto al eje de simetría tomado como la recta roja.
	3 a la 10	Rotación	Se realiza una rotación del punto <u>A</u> con centro de giro en <u>P</u> y ángulo de <u>120°</u>

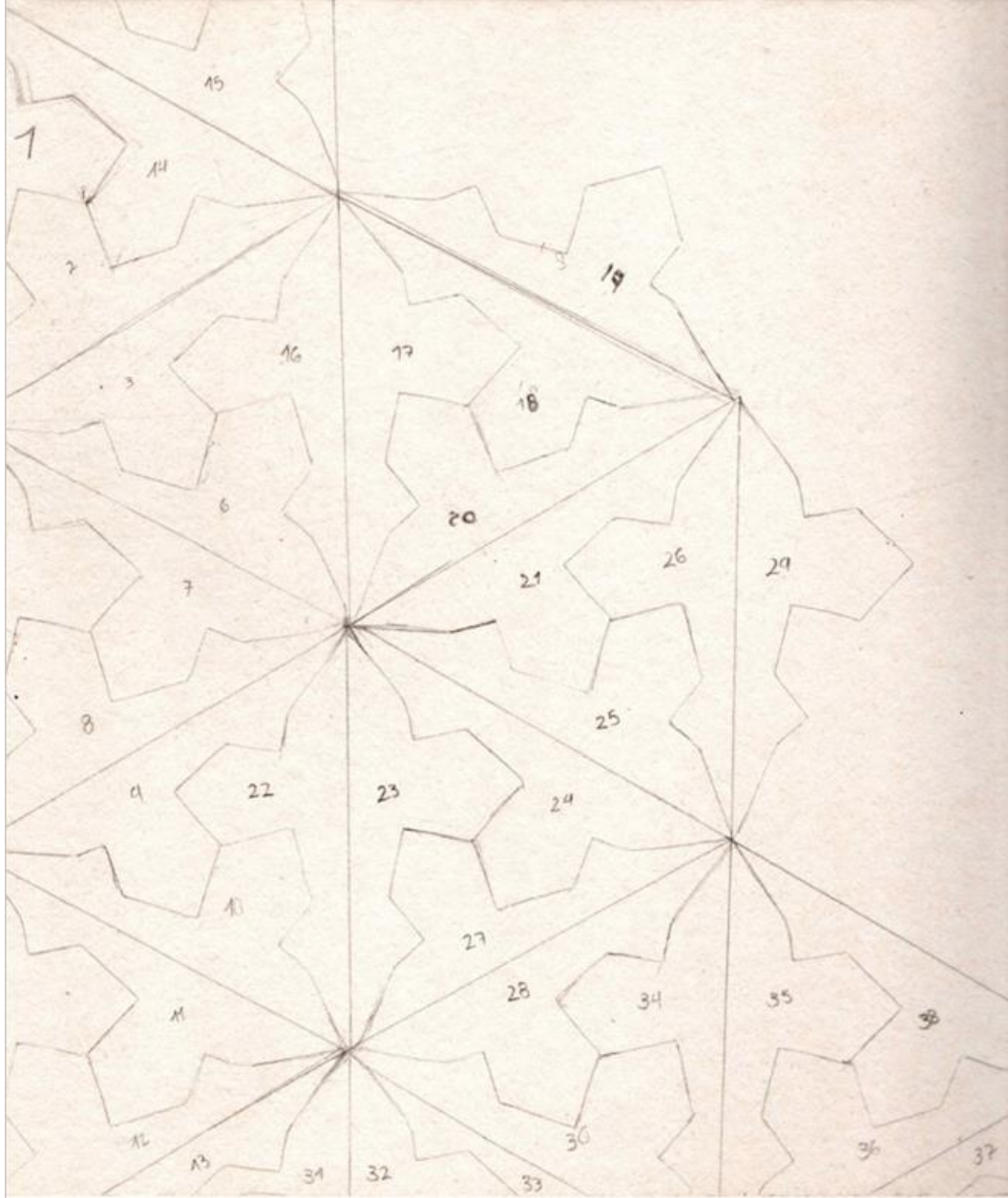
P15



Posición	Movimiento	Descripción
9 a la 10	Rotación	Es una rotación con centro en <u>P</u> de la figura 9 con un ángulo de <u>120°</u>
10 a la 11	Simetría	Simetría del punto <u>P</u> de la figura 10 con respecto a la recta roja.

	20 a la 21	Rotación	Es una rotación con centro en P de la figura 20 con un ángulo de <u>-120°</u>	
P16				
	Posición	Movimiento	Descripción	
	5 a la 6	Rotación	Una rotación con centro de giro en punto P (desde la imagen 5) a <u>-120°C</u> de punto A.	
	8 a la 9	Simetría	Respecto al eje de simetría de la figura 8.	

P17

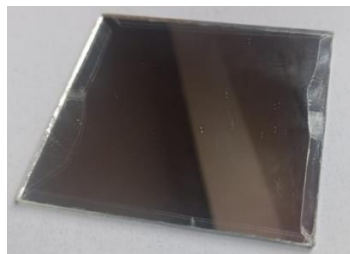
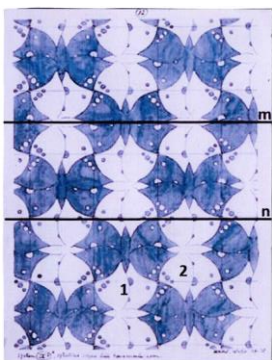


Posición	Movimiento	Descripción
4 a la 5	Traslación	Se trasladó 8.7cm hacia el sur
7 a la 8	Rotación	Se rota con centro en P el punto A -120°
8 a la 9	Simetría	Simetría de punto P con respecto a la recta .

Anexo 10. Producciones de los Estudiantes: Tarea 2

A continuación, presentamos una tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes de la Tarea 2. Esta tabla está constituida por 19 filas y cinco columnas. En la primera fila se encuentran las indicaciones de lo que los estudiantes debían realizar con el espejo y la tesela. En la fila dos están las preguntas a los estudiantes; en la primera columna se encuentran las parejas de estudiantes y las siguientes cuatro corresponden a las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas.

1. Ubique el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta m de tal manera que se vea la parte de atrás (sin reflejo). Con sus propias palabras describa qué parte de las mariposas (gris y azul) puede ver.
2. Ubique el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta m (con reflejo). Escriba y explique qué observa respecto a las mariposas y qué parte de las mariposas puede ver.
3. Ubique el espejo de forma perpendicular al plano sobre la recta n (con reflejo). Escriba y explique qué observa respecto a las mariposas y qué parte de las mariposas puede ver.
4. ¿Considera que la posición de la recta puede influir en lo que se reflejó en el espejo? Explique.



Nota. Espejo usado para tarea de “Introducción a las Isometrías: Simetría”

Nota. Teselado usado para la tarea de “Introducción a las Isometrías: Simetría”

	Con el espejo ubicado en la recta m (sin reflejo)	Con el espejo ubicado en la recta m (con reflejo)	Con el espejo ubicado en la recta n (con reflejo)	
	Con sus propias palabras describa qué parte de las mariposas (gris y azul) puede ver.	¿Qué observa respecto a las mariposas? ¿Qué parte de las mariposas puede ver? Explique.	¿Qué observa respecto a las mariposas? ¿Qué parte de las mariposas puede ver? Explique.	¿Considera que la posición de la recta puede influir en lo que se reflejó en el espejo? Explique.
P1	Se ve el reflejo de la mitad.	Si miramos el papel junto con el espejo forman / una mariposa completa.	El reflejo <u>refleja</u> las mariposas completas.	No, se ven la misma cantidad de mariposas.
P2	Se ven las dos alas en la parte inferior de la mariposa y dos de lado derecho.	Las mariposas se ven completas.	La mariposa se ve cortada al mismo tiempo <u>reflejando</u> una cara.	Sí influye porque se <u>refleja</u> la mariposa es el reflejo.
P3	Vemos $\frac{1}{2}$ del área de cada mariposa en	Vemos $\frac{1}{2}$ de la mariposa y su	Vemos el área total de cada mariposa y su	Sí, porque de acuerdo a su posición cambia su vista.

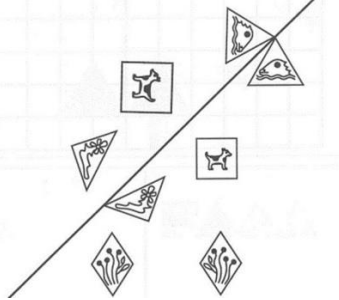
	la recta perpendicular m .	<u>simetría</u> con respecto al espejo.	simetría con respecto al espejo.	
P4	La mitad inferior de las alas.	Se ve toda la mariposa.	Vemos la mariposa <u>duplicada</u> .	Sí influye porque la recta m divide la mariposa y la recta n no la divide.
P5	Se puede observar la mitad de las mariposas.	Se ve una mariposa completa.	Se ven dos mariposas tocándose con la punta de sus alas completas.	Sí, debido a que la posición m está atravesando la mariposa a la mitad lo que al ver lo que <u>refleja</u> solo se ve una mariposa completa, mientras que la recta n ubicada en la parte superior refleja dos mariposas.
P6	Solo se alcanza a ver lo inferior de las alas de la mariposa.	Se ven las alas completas de las mariposas a través del espejo.	Se ven mariposas dobles por el <u>reflejo</u> del espejo.	Sí, ya que en la recta m vemos / la otra mitad de la mariposa / mientras que en la recta n se ve doble mariposa.
P7	Se ven las dos alas en la parte baja.	Se completa apenas ponemos el espejo.	Se ve doble.	
P8	Vemos las alas y algunas partes de cuerpo y algunas mariposas completas.	Completa las mariposas que estaban incompletas anteriormente.	Las azules se completan formando dos juntas y las blancas se unen con otras blancas.	Sí porque sin la recta tienen una forma diferente y con la recta la forma cambia.
P9	Y solo se ve la mitad de la mariposa.			En cada recta influye lo que se <u>refleja</u> ya que por la posición se ve la figura completa o incompleta.
P10	Solo se puede observar la mitad de las mariposas que se intersecan con la línea m .	Se puede observar la parte faltante la que se interfiere con el espejo.	Al colocar el espejo podemos observar las mariposas, pero no por completo creando un patrón diferente.	Sí, porque al poner el espejo en la línea m que se encuentra justo a la mitad de las mariposas / se <u>refleja</u> la otra mitad y en la línea n se refleja las mariposas creando un patrón diferente.
P11	No podemos observar los esquemas de la parte m y no usamos el contraste del espejo para analizar los demás esquemas.	Usando el espejo y ubicándolo en la recta m podemos analizar la mayoría de los esquemas de mariposas en el plano.	Usando el <u>contraste</u> del espejo <u>duplica</u> la cantidad de los esquemas.	La recta m hace un corte por la mitad de la mariposa y la recta n corta una pequeña fracción de mariposa.

P12	Se ve la mitad de la parte de debajo de la mariposa.	Podemos ver que el espejo completa la forma de la mariposa.	Podemos ver que unas mariposas están completas, pero hay otras que les falta una parte y pues no están completas.	Sí, todo depende del ángulo del espejo porque si tiene más el espejo en toda la recta solo vemos diez, pero, si el espejo lo inclinamos hacia atrás de la recta podemos ver que las mariposas se completan todas en el espejo.
P13	En la recta m con el espejo al revés las mariposas se completan (es decir forman una mariposa).	En la recta m con el espejo al derecho se ve lo mismo, pero más claro que antes.	En la recta n con el espejo al derecho a las mariposas les falta una parte es decir que se ven incompletas.	Sí, porque si la recta pasa por la mitad de las mariposas si se forma la mariposa , pero, si la recta pasa por otro punto de la mariposa le corta una parte.
P14	Son nueve sin contar mitades solamente visto hasta la recta m y nada más.	Que se pueden ver todas excepto las que están tras el espejo.	Las mariposas que se ven con el reflejo son seis, doce contando el reflejo sin poder verlo de detrás del espejo.	Sí, entre más al extremo se encuentre el espejo son más las mariposas que se pueden evidenciar si de cara a nosotros se encuentra el espejo.
P15	Vemos la mitad de la figura base.	Vemos dos mariposas blancas y una mariposa morada ya que el reflejo hace que se unan a la figura base.	Vemos una mariposa morada completa en el centro y dos mariposas que con el reflejo se complementan.	Sí, ya que la posición de la recta nos muestra diferentes ángulos.
P16	Podemos ver la mitad.	El espejo refleja simétricamente la otra mitad / de la mariposa formando una mariposa completa.	El espejo refleja una mariposa azul ligada a una mariposa blanca.	Sí porque dependiendo donde se sitúe el espejo refleja algo diferente, por ejemplo, si se sitúa en la mitad de la mariposa refleja el resto , pero, si sitúa la mariposa completa se refleja otra igual.
P17	Todas menos el grupo m .	Se ven enteras y medias, menos el grupo m .	Unas completas y otra media y a unas les hace falta punta.	Sí, porque en la recta m se completa la mariposa y la recta n no.

Anexo 11. Producciones de los Estudiantes: Tarea 5 (numeral 1)

A continuación, presentamos una tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 1 de la Tarea 5. La tabla está conformada por cinco columnas y 18 filas. En la primera columna están las parejas de estudiantes y en las cuatro restantes las imágenes de los pares de figuras. En cada fila se encuentran las producciones escritas (justificación) y las construcciones que realizó cada pareja.

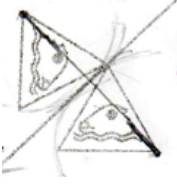
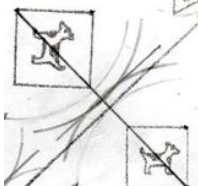
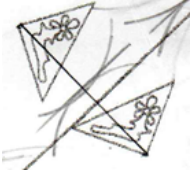
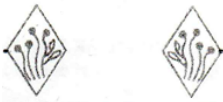
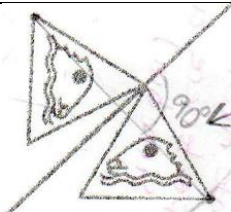
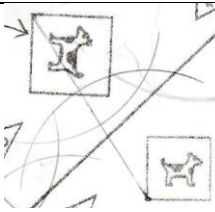
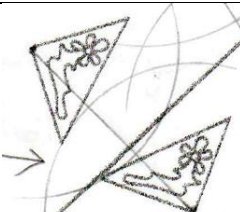
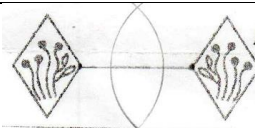
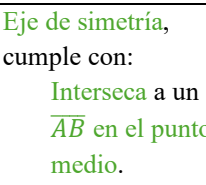
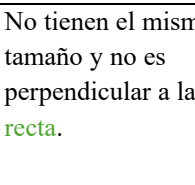
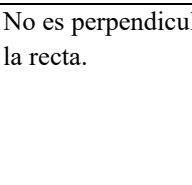
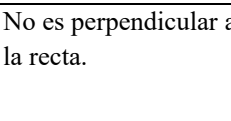




1. Observe la imagen que se muestra a continuación y justifique cuáles pares de figuras son simétricas o no respecto al eje de simetría dibujado. Para ello, use los instrumentos de medida y de trazo, y la definición de eje de simetría.

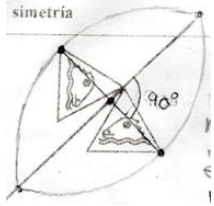
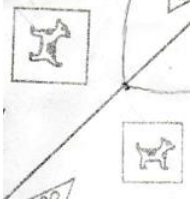
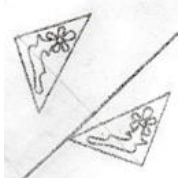

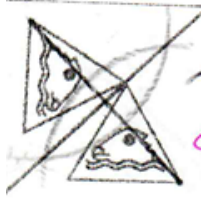
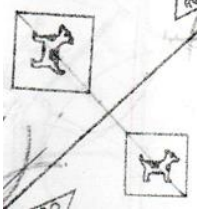
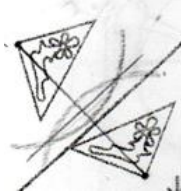
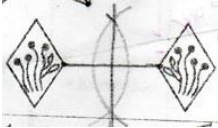
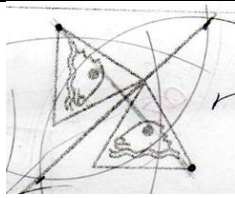
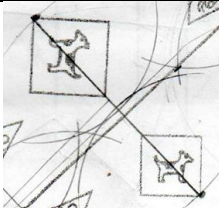
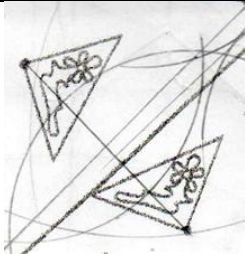
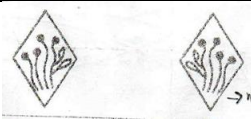
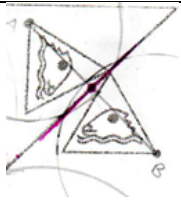
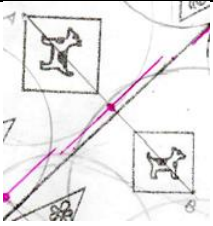
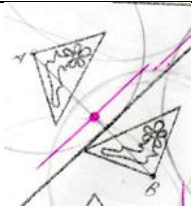
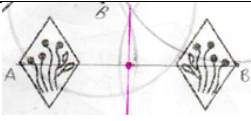


Nota: Adaptado de *El Grupo de las Isometrías del Plano* (p. 175), por Jaime y Gutiérrez, 1996.

P1				
	Sí, pasa por el punto medio del segmento	No, hay, no existe un punto medio, no se tocan.	No hay porque los círculos no se tocan.	No existe, falta una recta , sin esa recta no se puede hacer.
P2				
	La línea sí pasa por el punto medio del segmento .	Sí es mediatriz porque igualmente pasa por el punto medio. El tamaño sí influye.	No, porque no pasa y no cumple la segunda regla.	La línea no pasa por el punto medio.

P3				
	Sí es mediatriz porque tiene un punto medio que forma un ángulo de 90° .	No es mediatriz porque el punto medio no pasa por la recta inicial.	No es mediatriz porque el punto medio no coincide con la recta inicial.	No es mediatriz porque ni siquiera hay una figura al otro lado de la recta , ambos están del mismo lado de la recta .
P4				
P5				
	Sí, pasa por el punto medio .	Nos muestra que una es más grande que la otra, así que no son mediatriz [sic].	No son mediatriz [sic] porque solo una toca la recta y al otra está más lejos.	No son mediatriz [sic] porque ninguna toca la recta , están en el mismo lado.
P6				
	Sí es mediatriz porque cumple con las dos condiciones.	No son mediatriz ya que no coinciden.	No es mediatriz porque la recta no cumple la condición de pasar por el punto medio .	No es mediatriz porque ambas están en el mismo lado de la recta .
P7				
	Sí, es mediatriz porque pasa por el punto medio y hace 4 ángulos de 90 grados .			


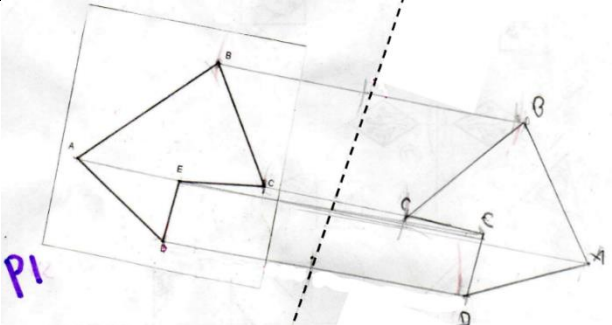
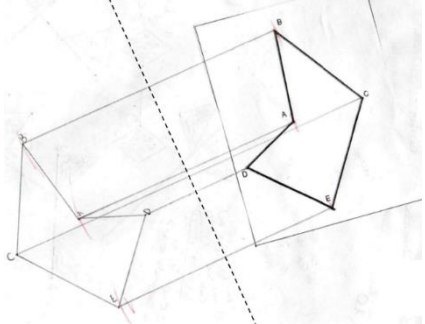
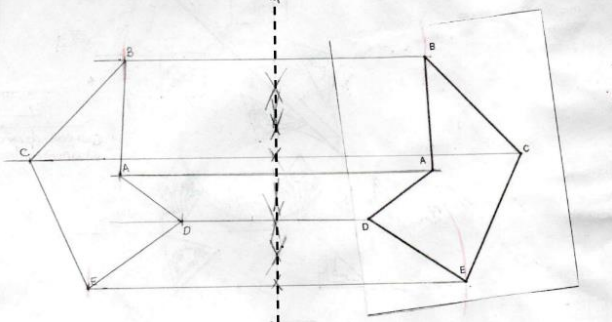
P8				
	<p>Sí es mediatriz del punto medio porque pasa por este.</p>	<p>No es mediatriz del punto medio porque no pasa por este.</p>	<p>No es mediatriz del punto medio porque no pasa por este.</p>	<p>No porque no pasa por el punto medio.</p>
P9				
	<p>Estas imágenes sí son eje de simetría. Ya que al aplicar el método de mediatriz estos puntos coinciden con la recta.</p>	<p>No es un eje de simetría ya que no cumple con intersecar el punto medio de la recta.</p>	<p>No es un eje de simetría ya que no interseca el punto medio del segmento con la recta.</p>	<p>No ya que esta, ni siquiera su segmento no toca la recta.</p>
P10				
	<p>Eje de simetría, cumple con: Interseca a un \overline{AB} en el punto medio. Es perpendicular al \overline{AB} porque cumple con un ángulo de 90°.</p>	<p>No tienen el mismo tamaño y no es perpendicular a la recta.</p>	<p>No es perpendicular a la recta.</p>	<p>No es perpendicular a la recta.</p>
P11				

	La recta es un eje de simetría por el corte en el punto medio y su ángulo de 90° .	Ninguno de los vértices corresponde mantiene la misma distancia hacia la simetría .	Ninguno de los vértices corresponde mantiene la misma distancia hacia la simetría.	Ninguno de los vértices corresponde mantiene la misma distancia hacia la simetría.
P12				
	Sí coincide con la recta porque hay una intersección en el punto medio .	La imagen del perro no ya que no tienen el mismo tamaño.	El de las flores uno está pegado a la recta por lo que no coincide.	La imagen de las plantas no está en la recta por lo que no coinciden.
P13				
	Sí, pasa por el punto medio .	No son iguales.	No pasa por el punto medio.	No, su punto medio no pasa por la recta .
P14				
	Sí, se trata de un eje de simetría . Además, las figuras están reflejadas, y es la mediatriz del segmento creado.	No es la mediatriz , además las figuras son diferentes (tamaño) por ende no son reflejos.	No es la mediatriz, además las figuras se encuentran a diferente distancia respecto al eje inicial.	No es eje de simetría ya que tampoco es mediatriz.
P15				

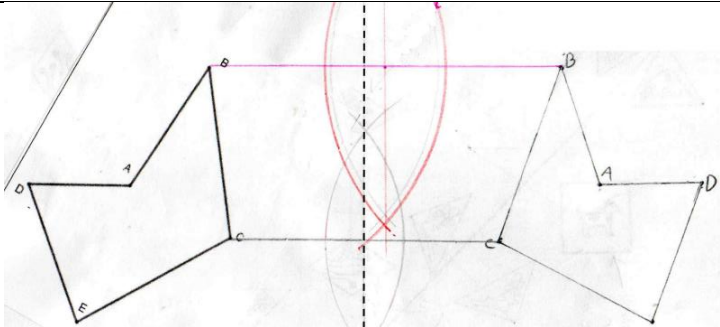
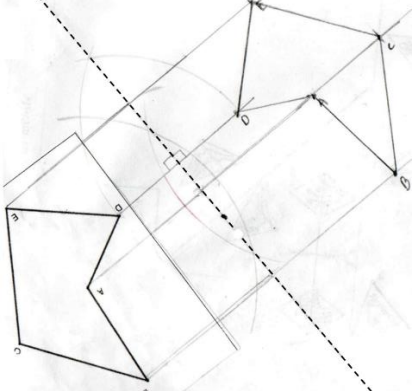
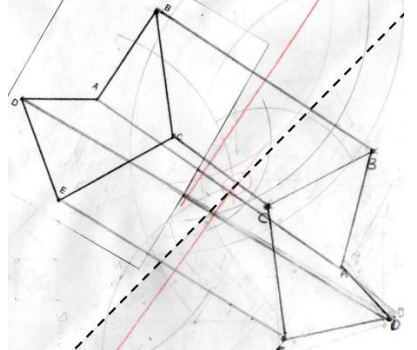
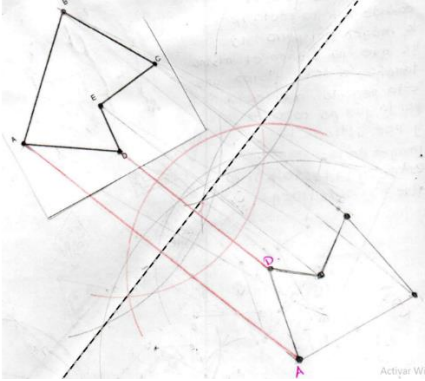
	Sí es mediatriz porque tiene 4 ángulos rectos y se intersecan en el segmento \overline{AB} .	No es mediatriz ya que ambas figuras no tienen las mismas medidas .	No es mediatriz porque no pasa por la recta de intersección.	No es mediatriz porque ambas están al mismo lado de la recta.
P16				
	Sí, es mediatriz ya que tiene 4 ángulos rectos y se intersecan en el punto medio de \overline{AB} .	No se puede hacer la mediatriz porque ambas figuras tienen diferentes medidas .	Aunque sus 4 ángulos son rectos, el punto medio no se pasa una sobre la perpendicular de \overline{AB} .	Ambas figuras están ubicadas del lado derecho del referente del punto medio.
P17				
	Sí, es mediatriz ya que cumple las condiciones; perpendicular , punto medio \overline{AB} las interseca .	No, tienen distinto tamaño.	No, no interseca en punto medio , pero si es perpendicular .	No, no cumple las condiciones.

Anexo 12. Producciones de los Estudiantes: Tarea 5 (numeral 2)

A continuación, presentamos una tabla en la que registramos las producciones de los estudiantes del numeral 2 de la Tarea 5. La tabla está conformada por 17 filas y dos columnas, en la primera columna se presentan las parejas y en la segunda las producciones de los estudiantes.

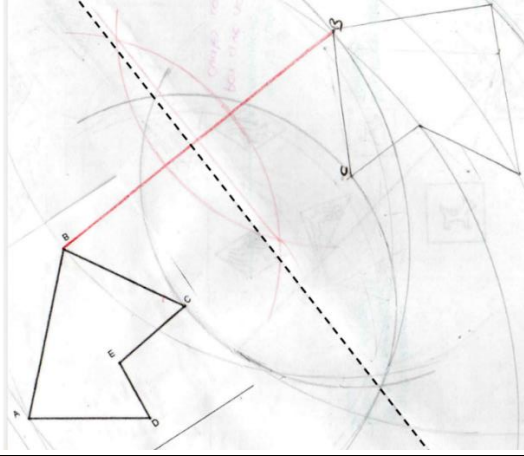
	<p>2. Construya la imagen del polígono por simetría axial, tomando como eje de simetría el doblez de la hoja que realizó la profesora.</p> 
<p>P1</p>	
<p>P2</p>	
<p>P3</p>	

<p>P4</p>	
<p>P5</p>	
<p>P6</p>	
<p>P7</p>	
<p>P8</p>	

<p>P9</p>	
<p>P10</p>	
<p>P11</p>	
<p>P12</p>	

<p>P13</p>	
<p>P14</p>	
<p>P15</p>	
<p>P16</p>	

P17



Anexo 13. Análisis de las Tarea 2 y 5

1 Tarea 2: Introducción a la Simetría axial

Para analizar los rasgos discursivos de los estudiantes en relación con la simetría axial, usamos la tabla del Anexo 10. La tabla del Anexo 10 se usó para generar dos tablas en las que se encuentra información relevante respecto a los rasgos discursivos de los estudiantes sobre la simetría axial. En el Cuadro 1, listamos las palabras y en el Cuadro 2, registramos las frases usadas por los estudiantes para referirse a la simetría axial. Para dar un orden a la información, ubicamos las palabras y las frases en filas que se refieren a la manera cómo hablan los estudiantes de la correspondencia en el plano (fila 2), al eje de simetría (fila 3) y el hecho de que la simetría axial no altera ni la forma ni el tamaño del objeto (fila 4).

Como el acercamiento que realizamos con los estudiantes fue a la simetría axial, por lo tanto, decidimos usar espejos como recurso para que los estudiantes evidenciaran la imagen por simetría. Por el uso de espejos, el acercamiento realizado fue estático y no dinámico.

Para el análisis, primero comentamos las palabras usadas por los estudiantes y posteriormente las frases construidas para referirse a la simetría axial.

1.1 Términos Usados

Cuadro 1

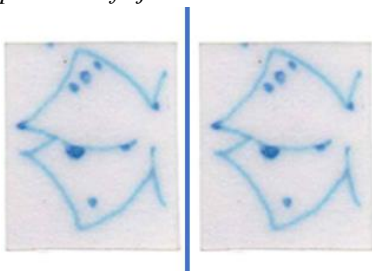
Términos usados por los estudiantes que aluden a la simetría.

	Términos
Cómo se refieren a la correspondencia en el plano	<ul style="list-style-type: none">• Reflejo / refleja (P1, P2, P5, P6, P9, P10, P14, P15, P16).• Simetría/ simétricamente (P3, P16).• Duplicada (P4, P11)• Contraste (P11).
Eje de simetría	Ninguna pareja
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none">• Duplicada (P4, P11)

Al revisar las respuestas de los estudiantes identificamos tres usos de la palabra “reflejo”. El primer uso, es cuando los estudiantes centran su atención en la imagen del espejo, es decir solo tienen en cuenta lo que se ve en el espejo. El segundo uso, es cuando los estudiantes centran su atención en lo que se ve en el espejo y lo comparan con algo que ven en la tesela, sin considerar la posición especular. El tercer uso, es cuando los estudiantes componen una imagen usando lo que se ve en el espejo con un objeto del plano que está en posición especular; por ejemplo, cuando los estudiantes ubican el espejo en la recta m y el efecto es que se completa una mariposa. La diferencia entre el segundo y tercer uso se encuentra en las Imágenes 1 y 2.

Imagen 1

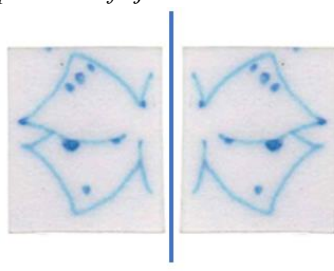
Representación del segundo uso de la palabra reflejo



Nota. Como no se alude a la posición especular, esta representación podría ser válida.

Imagen 2

Representación del tercer uso de la palabra reflejo



Nota. El ala de la izquierda es la imagen que está en el plano, la recta azul es el espejo (mediador como eje de simetría) y el ala de la derecha lo que se ve en el espejo.

Nueve de las 17 parejas usan la palabra “reflejo” o “refleja” para referirse a la correspondencia en el plano. Como se mencionó anteriormente, esta palabra es usada de tres maneras. P2 y P9, en sus discursos, se refieren al reflejo como solo a lo que se ve en el espejo (primer uso). En los discursos de P6 y P14 encontramos que no aluden a la posición especular, ellos comparan lo que se ve en espejo con algo que ven en el plano (segundo uso). En la respuesta de P6, es evidente que los estudiantes están observando el plano y el espejo. Los estudiantes se centran en el efecto que realiza el espejo, sin embargo, no mencionan la posición especular, por lo tanto, esta pareja concluye que “se ven mariposas dobles por el reflejo del espejo”. P14 alude a la cantidad de mariposas que se pueden ver en el plano y a través del reflejo del espejo.

P5, P10, P15 y P16 emplean la palabra reflejo y aluden a la posición especular (tercer uso). En sus discursos mencionan que el efecto del espejo es reflejar la “otra mitad”, “completar”, “unir” o “complementar”, de lo que inferimos que ellos sí tienen en cuenta la posición especular.

Nos parece interesante que dos parejas hicieran uso de las palabras “simetría” (P3) y “simétricamente” (P16) teniendo en cuenta que ellos no habían estudiado las isometrías del plano. P16 usa la palabra “simétricamente” para afirmar que el efecto del espejo es reflejar un objeto manteniendo su forma y su tamaño, esto lo afirmamos porque en la frase “refleja simétricamente la otra mitad”.

La forma en la que P3 usa la palabra simetría en sus discursos nos hace pensar que ellos podrían tener dos significados de esta. Sin embargo, no podemos afirmarlo porque los discursos no tienen las condiciones suficientes para asegurar esto. Cuando ubicaron el espejo en la recta m , relacionaron este término con la propiedad de un objeto simétrico, en este caso, las mariposas de la tesela. En cambio, cuando ubicaron el espejo en la recta n , aludieron a que veían “el área total de cada mariposa y su simetría”, de lo que inferimos que los estudiantes entienden la simetría axial como una correspondencia de puntos, no obstante, en el discurso no aluden a la posición especular.

P4 y P11 se refiere a la correspondencia en el plano con la palabra “duplica”, es posible que ellos estuvieran mirando el plano y el reflejo en el espejo, pero no podemos asegurar que hayan tenido en cuenta la posición especular. Adicionalmente, inferimos que los estudiantes, con el uso de esta palabra, quisieran decir que se mantiene la forma y el tamaño de la figura, debido a que la palabra “duplica”, en términos coloquiales se usa, por ejemplo, para referirse a la acción de sacar una copia de una llave.

Ninguna de las parejas hizo uso de alguna palabra que aludiera al eje de simetría o a sus propiedades, esto puede ser porque en ese momento desconocían este objeto matemático. Estas palabras en el momento de la implementación de la tarea no hacían parte de su vocabulario debido a que no son de uso coloquial y, como mencionamos antes, ellos no habían estudiado el tema de isometrías.

1.2 Frases Construidas por los Estudiantes

Cuadro 2

Frases usadas por los estudiantes para referirse a la simetría

	Frases
Cómo se refieren al movimiento	<ul style="list-style-type: none"> • Simetría con respecto al espejo (P3). • Refleja simétricamente la otra mitad (P16).
Eje de simetría	<ul style="list-style-type: none"> • Simetría con respecto al espejo (P3). • m está atravesando la mariposa a la mitad / la línea m que se encuentra justo a la mitad de las mariposas se refleja la otra mitad / La recta m hace un corte por la mitad de la mariposa (P5, P10, P11). • Si la recta pasa por la mitad de las mariposas sí se forma la mariposa / si se sitúa en la mitad de la mariposa refleja el resto (P13, P16). • Si sitúa la mariposa completa se refleja otra igual (P16). • En la recta m vemos la otra mitad de la mariposa mientras que en la recta n se ve doble mariposa (P6). • El espejo completa la forma de la mariposa (P12),
Posición relativa (especular)	<ul style="list-style-type: none"> • El papel junto con el espejo forma una mariposa completa (P1). • Se ven completas / se ve toda la mariposa / se ve una mariposa completa / el espejo completa la forma de la mariposa (P2, P4, P5, P12). • Vemos el área total de cada mariposa (P3). • En la recta m vemos la otra mitad de la mariposa (P6). • Se refleja la otra mitad (P10). • Dos mariposas que con el reflejo se complementan (P15). • Refleja simétricamente la otra mitad de la mariposa formando una mariposa completa (P16).
Conservación del tamaño y de la forma	<ul style="list-style-type: none"> • Una mariposa completa (P1). • La mariposa duplicada (P4). • Se ven mariposas dobles (P6). • La otra mitad de la mariposa (P6). • Se completa (P7). • Se ve doble (P7). • Se refleja la otra mitad (P10). • Refleja simétricamente la otra mitad (P16). • Si sitúa la mariposa completa, se refleja otra igual (P16). • En la recta m se completa la mariposa (P17).

P8, P9, P11 y P14 no construyeron frases que fueran relevantes para analizar cómo se refieren a la simetría. Creemos que esto se debe a que las preguntas eran complejas para los estudiantes. P8 se enfocó en los colores de las mariposas que podían ver. P9 solo respondió los numerales 1 y 4. P11 y P14 se enfocaron en realizar un conteo de las mariposas.

Respecto al eje de simetría, solo ocho parejas aludieron a este invariante: P1, P5, P6, P10, P11, P12, P13, P16. Resaltamos ahora que nosotras les proporcionamos a los estudiantes un espejo para que este cumpliera con el rol del eje de simetría, por lo tanto, los estudiantes se refieren a este invariante como “el espejo” o “la recta”. Como esta tarea fue realizada como introducción a la simetría, los estudiantes no aludieron a perpendicularidad ni a distancia entre puntos correspondientes por simetría.

Para el análisis de este invariante, decidimos dividir a las parejas en dos grupos. El primer grupo está conformado por P3, P5, P10, P11, P12 y P13; ellos aluden a que el eje de simetría hace parte de la figura y por ello en sus discursos relacionan la simetría con la propiedad de una figura simétrica. El segundo grupo está conformado por P6 y P16; a diferencia del primer grupo, ellos adicionalmente reconocen que el eje de simetría puede no hacer parte de la figura y en consecuencia relacionan la simetría con una correspondencia entre puntos.

Las parejas que pertenecen al primer grupo mencionan que (por ejemplo) el eje de simetría “atravesaba”, “hace un corte”, “pasa por” o “se sitúa” en la mitad de la mariposa. Debido a esto creemos que los estudiantes reconocen que la mariposa de la tesela es simétrica. Las respuestas de las parejas que pertenecen al segundo grupo son interesantes porque tienen una visión más amplia respecto al eje de simetría. Ellos reconocen que la mariposa es simétrica, por tanto, afirman que la recta m está en la mitad de la mariposa, pero también, reconocen que el eje de simetría genera que se refleje la otra mitad de la mariposa o se ve otra mariposa idéntica a la que está en la tesela.

Con respecto a la posición relativa especular solo diez de las 17 parejas aluden tangencialmente a este descriptor central del movimiento. Las parejas P1, P2, P4, P5 y P12 mencionan que pueden ver la mariposa “completa”, “complementa” o “toda” la mariposa y podemos ver que P3 usa la frase “área total” como sinónimo de “completa”. Con el uso de estas palabras no podemos asegurar que los estudiantes están teniendo en cuenta la posición relativa especular, porque ellos ven que la figura se completa, pero no aluden a dos partes iguales, solo se enfocan en el hecho de que se ven completas.

Por el contrario, P6, P10, P15 y P16 sí aluden a la posición relativa especular, porque ellos están viendo lo que está en el plano y en el espejo. P15 menciona que con el espejo observaron “mariposas que con el reflejo se complementan”. P6, P10 y P16 dicen que al ubicar el espejo en la recta m “se refleja la otra mitad de la mariposa”. Además, es posible que los estudiantes reconocieran que la mariposa es una figura simétrica (sin tener en cuenta el diseño) debido a que la recta m pasa por la mitad de ella y es uno de sus ejes de simetría.

En relación con la conservación del tamaño y de la forma las parejas que consideramos aludieron a ello fueron P1, P4, P6, P7, P10, P16 y P17. Creemos que al mencionar en sus discursos “mariposa completa” (P1) o “se completa” (P7, P17) están comparando el ala de la mariposa que ven en el espejo con el ala que ven en el plano, lo que podría ser equivalente a decir que las alas de la mariposa son iguales. P4 afirmó que veían “la mariposa duplicada”. Reconocemos que la palabra “duplicada”, en ámbitos informales es usada para solicitar una copia exacta de un mismo objeto, por ejemplo, cuando se solicita un duplicado de una cédula o de una llave.

En las frases de P6, P10 y P16 vemos que se refieren a “otra mitad”, consideramos que esta expresión hace referencia a la conservación del tamaño y de la forma porque ellos reconocen o saben de forma intuitiva que la mariposa es en sí misma simétrica. Además, P16 aclara que si la mariposa está completa “se refleja otra igual”.

P6 y P7 mencionan que se “ven mariposas dobles” y “se ve doble”, respectivamente; en este caso ellos están usando la palabra doble como sinónimo de duplicado porque al ver su discurso a diferencia de P11 ellos no se centran en la cantidad de mariposas. En el Cuadro 3 presentamos lo mencionado anteriormente.

Cuadro 3

Uso de la palabra doble por las parejas P6, P7 y P11

Uso de la palabra “doble”	
“Se ven mariposas dobles por el reflejo del espejo.” (P6)	“Usando el contraste del espejo duplica la cantidad de los esquemas.” (P11)
“Se ve doble.” (P7)	

2 Tarea 5: Simetría axial

Para el análisis de la Tarea 5 tomamos en cuenta los Anexos 11 y 12. Es importante resaltar que previo a la presentación de la definición y las invariantes de simetría axial, se les indicó a los estudiantes cómo construir la mediatriz de un segmento y se les mencionó que el eje de simetría cumplía con las propiedades de la mediatriz.

A continuación, presentamos el análisis de las producciones de los estudiantes, presentadas en el Anexo 11, del que analizamos el vocabulario y la sintaxis que emplean los estudiantes en sus respuestas y las rutinas que algunos adquirieron y usaron para la solución de la tarea. Del Anexo 12 analizamos las rutinas que emplearon los estudiantes para la construcción de la imagen por simetría axial de un polígono dado.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes es necesario tener en cuenta lo escrito por ellos y las construcciones en conjunto, debido a que como los estudiantes están aprendiendo a construir discursos matemáticos ellos omiten información que puede deducirse a partir de sus construcciones. Es importante mencionar que P4, aunque hizo las construcciones no escribió nada al respecto.

2.1 Sintaxis

Al comparar las producciones de los estudiantes para esta tarea con las producciones en las tareas de introducción a las isometrías vemos que las parejas usaron más términos matemáticos en esta tarea, no obstante, no es suficiente el uso de estos términos debido a que no hacen uso de artículos, sujetos, objetos (quien recibe la acción) y preposiciones que ayudan a dar significado a las oraciones.

Las parejas P3, P6, P7, P8, P15, P16 y P17 inician sus discursos con la frase “Sí, es mediatriz [...]”, pero ¿quién es mediatriz? Así mismo las parejas P1, P5 y P13 inician sus frases diciendo “Sí, pasa por el punto medio [...]”, pero ¿quién pasa por el punto medio? Es evidente que las parejas no mencionan o no aclaran quién es el sujeto, por lo que el lector no podría identificar quién es mediatriz o quién pasa por el punto medio, creemos que esto se debe a que ellos cuentan con el apoyo de la imagen, en la que solo había una recta y no vieron necesario nombrarla. Debido a la importancia del sujeto en las frases una manera más completa para reescribir estas frases sería “Sí, **la recta** es mediatriz [...]”, “Sí, **la recta** pasa por el punto medio [...]” o “Sí, **la recta m** es mediatriz [...]”, “Sí, **la recta m** pasa por el punto medio [...]” si se quiere enfatizar más en el sujeto.

En el discurso de P2 se evidencia la falta de objeto (quien recibe la acción), ellos mencionan que “La línea no pasa por el punto medio”, pero ¿de quién es el punto medio?, la frase sería más clara si escribimos “La línea no pasa por el punto medio **del segmento**” o “La línea no pasa por el punto medio **del \overline{AB}** ”. Esto mismo sucede en los discursos de P5, P6, P7, P8, P11, P12 y P13.

A pesar de que los estudiantes introdujeron términos matemáticos en sus discursos, algunos de ellos aún siguen acudiendo al vocabulario coloquial para referirse a estos. Por ejemplo, usan “no se tocan” (P1) o “no pasa por” (P2) para aludir a que no existe la intersección, entre dos circunferencias o una recta y un segmento. P2 usa la palabra línea como sinónimo de recta. Las parejas P3 y P13 usan la frase “el punto medio

no pasa por la recta” o “el punto medio no coincide con” nosotras creemos que lo hacen para aludir a que el punto medio no pertenece a la recta.

También se presentan casos en los que los estudiantes confunden términos matemáticos. Esto lo evidenciamos en el discurso de P5, en el que mencionan que las figuras “no son mediatriz [...]”, interpretamos que los ellos querían decir es que las figuras “no son simétricas”, debido a que no realizaron ninguna construcción para verificar si la recta era eje de simetría; además, en su discurso aludieron a la posición de las figuras respecto el eje y al tamaño de estas.

2.2 Vocabulario

Al revisar las justificaciones de los estudiantes identificamos que todas las parejas al construir frases hicieron uso de términos matemáticos. Sin embargo, algunos introdujeron en su vocabulario más palabras que otros. En la primera columna del Cuadro 4 presentamos los términos matemáticos que usaron los estudiantes, en la segunda columna se encuentra la cantidad de parejas que usaron estos términos (frecuencia) y en la columna tres se especifican las parejas que lo emplearon.

Cuadro 4

Frecuencia del uso de términos matemáticos por los estudiantes

Términos matemáticos	Frecuencia	Parejas
Punto medio	14	P1, P2, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13, P16, P17
Mediatriz	11	P2, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P14, P15, P16, P17
Recta	10	P1, P3, P5, P6, P9, P10, P11, P12, P13, P15
Segmento	7	P1, P2, P9, P10, P15, P16, P17
Ángulo de 90° / Ángulo recto	6	P3, P7, P10, P11, P15, P16
Intersecar / Intersección	6	P9, P10, P12, P15, P16, P17
Eje de simetría	4	P9, P10, P11, P14
Perpendicular	3	P10, P16, P17
Distancia	2	P11, P14
Medidas	2	P15, P16
Simetría	1	P11
Vértices	1	P11
Círculos	1	P1

En relación con cómo usan los estudiantes algunos de los términos matemáticos mencionados anteriormente, podemos ver que estos están relacionados con la simetría. Sin embargo, creemos que la frecuencia en el uso de los términos: punto medio, mediatriz, recta, segmento, ángulo de 90° e intersección, están relacionados con el hecho de que en una sesión de clase se enfatizó en el método de construcción de la mediatriz de un segmento dado, para posteriormente mencionar a los estudiantes que el eje de simetría cumple las mismas condiciones que la mediatriz. Lo anterior también explica por qué ellos hicieron más uso del término mediatriz, que de eje de simetría. En general nos parece importante resaltar que la mayoría de los estudiantes usaron el término recta o segmento, mejorando así su vocabulario, puesto que en tareas anteriores hablaban de línea o línea recta.

En los discursos de los estudiantes encontramos que hay tres casos en los que usan el término mediatriz: las parejas P1, P2, P6, P8 y P13 se refieren a la mediatriz como una recta que pasa por el punto medio. Aunque en sus discursos no especifican de quién es el punto medio, nosotras inferimos que se refieren


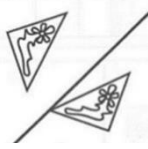
al punto medio del segmento que construyeron al unir un punto y su imagen; P10 alude a la mediatriz como una recta que es perpendicular; en su discurso no especifica quién es perpendicular a recta; las parejas P3 y P7 mencionan que la mediatriz pasa por el punto medio y forman cuatro ángulos de 90° pero no aclaran de quién es el punto medio ni con quién forman cuatro ángulos de 90°. De los tres casos anteriores inferimos que ellos, al realizar esta tarea solo se enfocaron en la mediatriz y no en el eje de simetría ni mucho menos en la simetría axial como una isometría.

P11, P15, P16 y P17 en sus discursos hacen referencia al eje de simetría. Esto lo podemos afirmar porque, por ejemplo, P11 usa la frase “Ninguno de los vértices corresponde mantiene la misma distancia hacia la simetría”, aludiendo al hecho de la distancia de un punto y su imagen por simetría al eje de simetría deben ser la misma. Además, P15, P16 y P17 en sus discursos se refieren al tamaño de las figuras o a su posición respecto al eje de simetría con frases como “No es mediatriz porque ambas están al mismo lado de la recta.” (P15).

Para nosotras es evidente que en los discursos de P5, P12 y P14, los estudiantes no están hablando de mediatriz ni de eje de simetría; ellos están refiriéndose a la simetría axial. Lo anterior lo afirmamos debido a que los estudiantes se enfocaron en argumentar si una figura y su imagen son simétricas respecto a la recta dada. P5 y P12 son de alguna manera, más similares entre sí, debido a que decidieron no realizar ninguna construcción en los últimos tres puntos de la tarea. Esto sucede porque para los estudiantes era suficiente la justificación en la que mencionaron que las figuras no eran simétricas respecto a la recta dada. Nos parece importante resaltar que las respuestas de P5, P12 y P14 a los puntos dos y tres de la tarea, son similares, en el Cuadro 5, mostramos las figuras correspondientes al punto uno y dos de la tarea y las justificaciones que dieron los estudiantes para afirmar que estas no eran simétricas.

Cuadro 5

Producciones de P5, P12 y P14 para los numerales 2 y 3 de la tarea de simetría

	Punto dos	Punto tres
		
P5	Nos muestra que una es más grande que la otra, así que no son mediatriz [sic]	No son mediatriz [sic] porque solo una toca la recta y al otra está más lejos.
P12	La imagen del perro no ya que no tienen el mismo tamaño.	El de las flores uno está pegado a la recta por lo que no coincide.
P14	No es la mediatriz, además las figuras son diferentes (tamaño) por ende no son reflejos.	No es la mediatriz, además las figuras se encuentran a diferente distancia respecto al eje inicial.

2.3 Rutinas: Numeral 1

Al revisar las producciones de los estudiantes, registradas en el Anexo 11 identificamos que todas las parejas hicieron uso del método de construcción de la mediatriz de un segmento para verificar si la recta dada era o no eje de simetría. Sin embargo, no apreciamos el establecimiento de la misma rutina en todas las parejas, como explicamos a continuación.

En el primer grupo ubicamos a las parejas P3, P9, P10, P11, P15, P16 y P17 en cuyas representación y discurso identificamos que establecieron como rutina examinar las dos propiedades de la mediatriz: pasa por el punto medio del segmento que cuyos extremos son un vértice de la figura y su posible imagen y es perpendicular a este.

Identificamos que las parejas P3, P10, P15 y P16 hacen arcos de circunferencia o circunferencias completas con el mismo radio (mayor a la mitad del segmento), trazan una recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias y comparan la recta obtenida con la recta dada para verificar si es eje de simetría. Las construcciones de P3 y P10 son similares entre sí (Imagen 3). P15 y P16 adicionalmente, marcan el punto medio en sus construcciones destacando en la representación la propiedad de la mediatriz de ser punto medio, y P16, además, señala los ángulos rectos que se generan por la intersección entre el segmento y su mediatriz (Imagen 4).

Imagen 3

Construcción de la mediatriz de P3

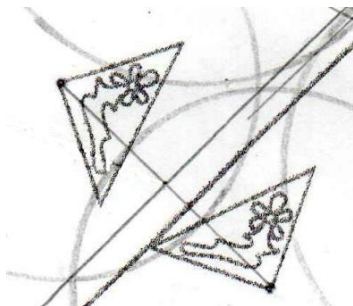
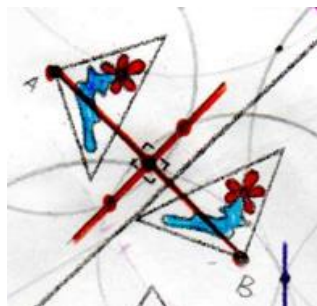


Imagen 4

Construcción de la mediatriz de P16



A pesar de haber ubicado a P9, P11 y P17 en el grupo de parejas que establecieron la rutina descrita en el párrafo anterior, en sus construcciones observamos que estas tres parejas no trazan la mediatriz (Ilustración 48 y 49). Es posible que para ellos no fuera necesario trazarla debido a que la visualizaban sin dibujarla, a partir de las intersecciones entre los arcos construidos. Esto lo afirmamos por las marcar que hizo P11 del punto medio del segmento y del ángulo de 90° .

Imagen 5

Construcción de los arcos de circunferencia de P11 para verificar si la recta dada es mediatriz

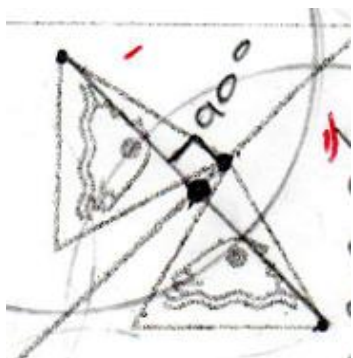
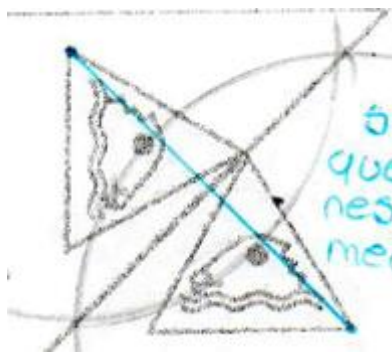


Imagen 6

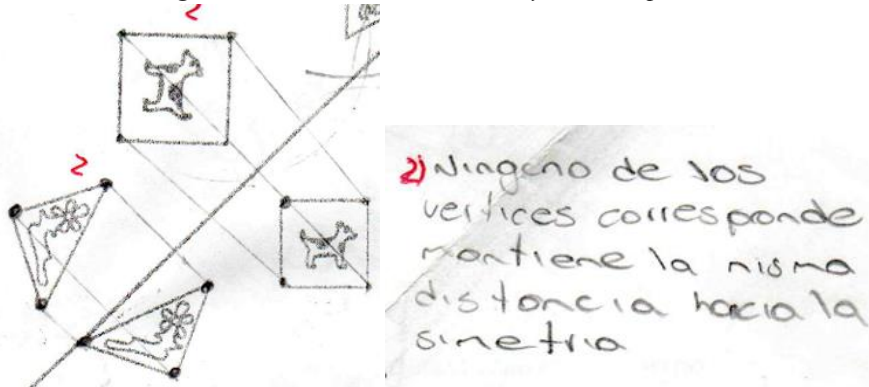
Construcción de los arcos de circunferencia de P17 para verificar si la recta dada es mediatriz



Consideramos importante resaltar que ubicamos a P11 en el grupo que estableció la rutina descrita, aunque solo para el primer par de figuras (Imagen 7), porque los trazos empleados son correctos, hacen marcas que aluden a las propiedades de la mediatriz y saben cuándo no es necesario usarla. En efecto, para verificar si la recta dada era o no eje de simetría de los otros pares de figuras (Ilustración 50), esta pareja no vio necesario construir la mediatriz, porque se fijó en el invariante de la equidistancia de cada punto y su imagen a la recta dada para confirmar que no era eje de simetría.

Imagen 7

Construcción de segmentos con extremos un vértice y su correspondiente

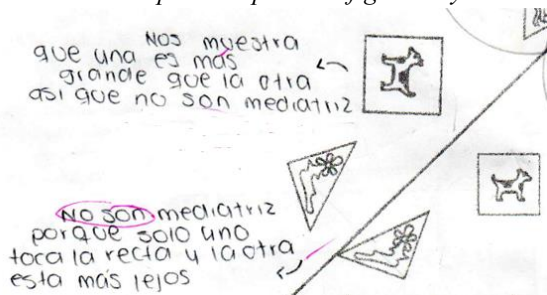


En el segundo grupo ubicamos a las parejas P2, P5 y P13 en cuyas representación y discurso identificamos que establecieron como rutina examinar una de las propiedades de la mediatriz: pasa por el punto medio del segmento que cuyos extremos son un vértice de la figura y su posible imagen o es perpendicular al segmento.

En las construcciones encontramos que P2, P5 y P13 establecieron como rutina construir dos arcos de circunferencia con igual radio (mayor a la mitad del segmento). P2 a diferencia de P13 no traza la mediatriz, en los discursos de ambas parejas hacen mención a la propiedad de la mediatriz de pasar por el punto medio del segmento. Consideramos especial a P5 debido a que ellos solo usan la rutina de mediatriz para el primer par de figuras; para los otros tres pares de figuras no hacen construcción alguna, en sus discursos se apoyan de la equidistancia entre un punto vértice de la figura a la recta y su posible imagen por simetría axial, y el hecho de que la simetría es una isometría (Imagen 8). Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, afirmamos que P5 tiene la rutina de construcción de la mediatriz y además sabe en qué casos es necesario usarla.

Imagen 8

Discurso de P5 para los pares de figuras 2 y 3



En el tercer grupo ubicamos a las parejas P1, P4, P6, P7 y P8. Debido a las construcciones que realizaron, consideramos que estas parejas no tienen establecida la rutina de la construcción de mediatriz o en sus discursos no hay evidencia suficiente para afirmar que tienen alguna rutina establecida.

En los discursos de P1 y P8 hacen alusión a la propiedad de la mediatriz de pasar por el punto medio del segmento cuyos extremos son un vértice de la figura y su posible imagen. En sus construcciones evidenciamos que ellos primero encontraron el punto medio haciendo uso de la regla y luego trazaron arcos de circunferencia tomando como radio la distancia entre un extremo del segmento y su punto medio (Imagen 9 y 10)

Imagen 9

Construcción de P1

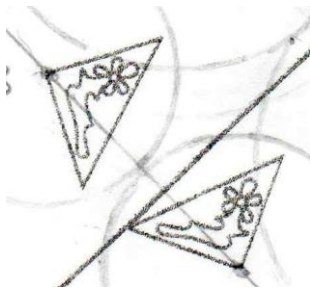
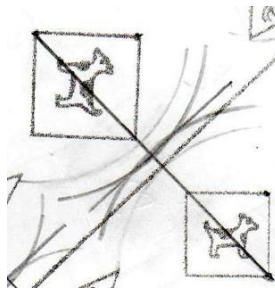


Imagen 10

Construcción P8



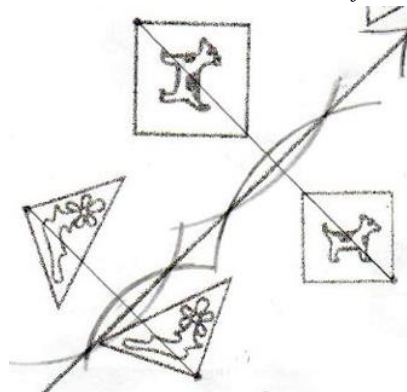
P4 para cada par de figuras realizaron construcciones diferentes. Para el primer y el cuarto par de figuras construyeron arcos de circunferencia con radio mayor a la mitad del segmento, pero como ellos no apoyaron su construcción con algún discurso no podemos afirmar que establecieron la rutina de la mediatriz. Además, para el segundo par de figuras no realizaron ninguna construcción; para el tercer par de figuras hicieron arcos de circunferencia de tal manera que se intersecan tangencialmente entre ellas e intersecan al segmento en su punto medio, por esto creemos que primero encontraron el punto medio y luego trazaron los arcos usando como radio la distancia entre un extremo del segmento y su punto medio.

Las construcciones de P6 también son diferentes para cada par de figuras. En el primer par de figuras realizan la misma construcción que P4. Para los otros pares de figuras P6 construyeron el segmento que une un vértice de la figura y su posible imagen. Sin embargo, en el segundo par de figuras los estudiantes borraron el segmento y en su discurso mencionaron que “No son mediatriz ya que no coinciden”, es posible que los estudiantes hayan identificado que las figuras no son simétricas porque tienen diferente tamaño y por lo tanto ellos creyeron que el discurso que dieron era suficiente para decir que la recta dada no era eje de simetría. En el tercer par de figura los estudiantes marcan el punto medio sin hacer la construcción de los arcos de circunferencia, es posible que lo hayan hecho con ayuda de la regla.

Nos parece curiosa la construcción de P7, pues cuando verificamos los radios de los arcos de circunferencia, encontramos que estos son diferentes. P7 construyó los arcos de circunferencia de tal manera que estos intersecaran con la recta dada (Imagen 11). Esto nos lleva a pensar que los estudiantes no entendieron la tarea o no consideraron que la construcción de la mediatriz les permitía verificar si la recta dada era o no eje de simetría, esto último lo afirmamos porque en el discurso que dio para el primer par de figuras, P7 hizo mención a las propiedades de la mediatriz “Sí, es mediatriz porque pasa por el punto medio y hace 4 ángulos de 90 grados”.

Imagen 11

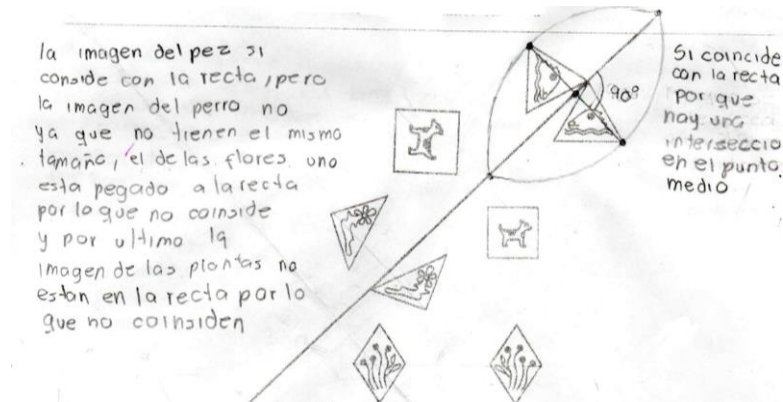
Construcción de arcos de circunferencia de P7



No ubicamos a P12 ni a P14 en ninguno de los grupos, debido a que estas parejas son diferentes entre sí y a las demás parejas. En la Imagen 12, encontramos las producciones de P12. Para el primer par de figuras, ellos utilizan las propiedades de la mediatriz, en su discurso alude al punto medio y en su representación gráfica señala el ángulo de 90° , aludiendo así a la perpendicularidad entre el segmento que une un vértice y su imagen por simetría axial y la recta dada (eje de simetría); para el segundo par de figuras, P12 alude al hecho de que la simetría es una isometría; para el tercer par de figuras, aluden a la equidistancia de una figura y su imagen respecto al posible eje de simetría; para el cuarto par de figuras, hacen referencia al hecho de que el eje de simetría debe estar entre la figura y su imagen por simetría axial.

Imagen 12

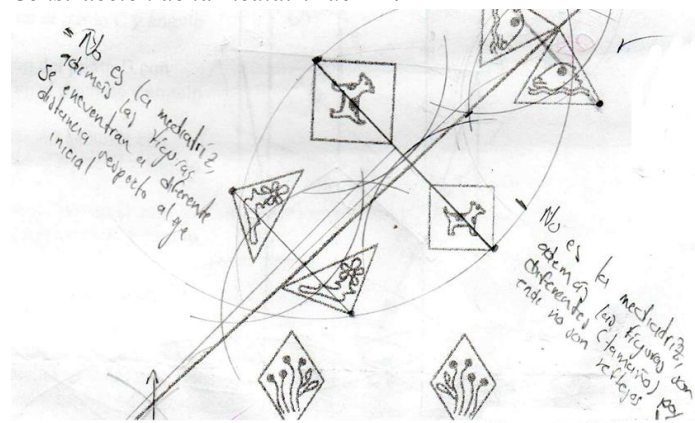
Producciones de P12



P14 no hizo mención explícita de las condiciones para ser mediatriz de un segmento cuyos extremos son un vértice de la figura y su posible imagen, sin embargo, al ver sus construcciones evidenciamos que la pareja reconoció estas dos condiciones. En la construcción, ellos hacen los arcos con igual radio (mayor a la mitad del segmento) y trazan la mediatriz teniendo en cuenta que esta pasa por las intersecciones entre los arcos; siendo evidente para nosotras que establecieron la rutina para construir la mediatriz de un segmento. Identificamos que P14, primero construye la mediatriz y luego la compara con la recta dada teniendo en cuenta las propiedades del eje de simetría, la equidistancia entre un punto y su posible imagen por simetría axial y el hecho de que la simetría axial es una isometría. Esto lo afirmamos porque ellos en sus discursos mencionan que las figuras no son “reflejo” debido a que tienen diferente tamaño o están a una distancia diferente de la recta dada (Imagen 13).

Imagen 13

Construcción de la mediatriz de P14



2.3 Rutinas: Numeral 2

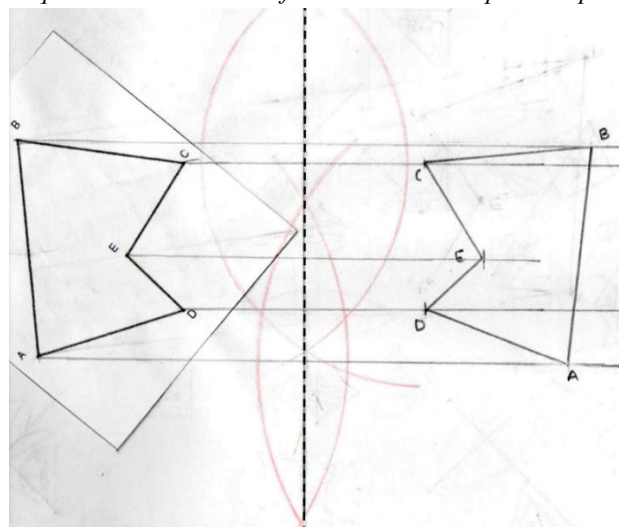
A continuación, vamos a presentar el análisis de las producciones de los estudiantes, contenidas en el Anexo 12. En algunas de las imágenes presentadas hay trazos de color rojo que realizó la profesora para revisar la tarea. Para este análisis, clasificamos a las parejas en cuatro grupos.

En el primer grupo ubicamos a las parejas P3, P4, P5, P7, P10, P14 y P15, las cuales establecieron una rutina para hallar la imagen por simetría axial del polígono dado, según el eje de simetría trazado por la profesora con un doblez de la hoja. Identificamos que la rutina de las parejas P4, P5, P7, P10, P14 y P15 es: construir rectas perpendiculares al eje de simetría (línea punteada) que contienen uno de los vértices del polígono; luego medir la distancia de un vértice del polígono al punto de intersección entre la perpendicular y el eje de simetría, posteriormente; marcar un punto que pertenece a la perpendicular tal que la distancia entre este y el eje de simetría sea la misma que tiene el vértice del polígono al eje de simetría. Para finalizar, aunque no podemos asegurar el orden en que lo hacen, las parejas unen mediante segmentos los puntos que marcaron sobre las perpendiculares, construyendo la imagen por simetría axial del polígono y nombran el punto imagen por simetría axial.

Para la construcción de las perpendiculares identificamos que todas las parejas hacen uso de la escuadra o dos reglas. Las parejas P4 y P7, usan la regla para garantizar la equidistancia del vértice y su imagen al eje de simetría, en cambio, P10, P14 y P15 garantizan esta equidistancia haciendo uso del compás, esto lo afirmamos porque al revisar las producciones a contra luz se ven las marcas que deja la aguja del compás en el papel, además, se evidencian marcas de pequeños arcos de circunferencia como guía para trazar el punto por imagen sobre la recta perpendicular construida (Imagen 14).

Imagen 14

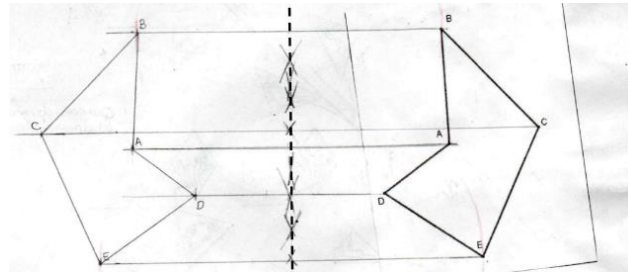
Pequeños arcos de circunferencia marcados por P14 para garantizar la equidistancia



La rutina de P3 para construir el polígono imagen es diferente, debido a que el eje de simetría era perpendicular al borde superior o inferior de la hoja. Ellos trazaron rectas paralelas al borde; luego, con ayuda del compás trazaron los puntos imagen de cada vértice, por la marca de la aguja del compás sobre el papel, afirmamos que ellos la ubicaron en el punto de intersección entre el eje y la recta paralela al borde de la hoja que contiene un vértice del polígono; posteriormente, tomaron como amplitud del compás la distancia entre este punto de intersección y el vértice del polígono dado; después, marcaron esta distancia sobre la recta paralela al otro lado del eje de simetría garantizando así la equidistancia, finalmente, unieron los puntos obtenidos, construyendo así el polígono imagen por simetría axial como vemos en la Imagen 15.

Imagen 15

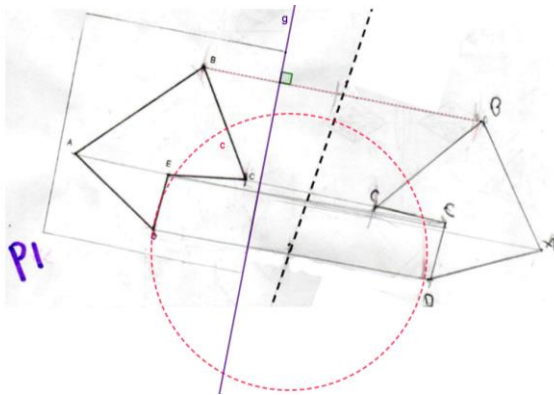
Producción P3



En el segundo grupo ubicamos a las parejas P1, P8, P11, P13 y P17, las cuales no tienen la rutina establecida que describimos anteriormente para construir la imagen por simetría axial de un polígono dado. Esto lo afirmamos debido a que el polígono construido no es la imagen por simetría axial del polígono dado. En la Imagen 16, vemos que P1 no construye perpendiculares al eje de simetría, en lugar de ello trazan rectas perpendiculares al borde derecho del recorte del polígono (recta g).-Además, no garantiza la equidistancia entre el vértice y el punto por imagen respecto al eje dado, esto lo evidenciamos al trazar la circunferencia c con centro en la intersección entre el eje de simetría y el segmento que une el vértice D con su posible imagen.

Imagen 16

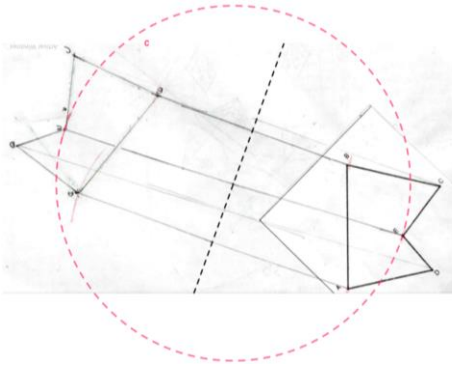
Producción de P1



Creemos que P8 tuvo problemas con el uso de los instrumentos, en su construcción (Imagen 17). Evidenciamos que para trazar los segmentos perpendiculares realizaron dos trazos determinando construir los segmentos que unen un vértice y su posible imagen por simetría axial, posiblemente la regla no era lo suficientemente larga para hacerlo en un solo trazo.

Imagen 17

Producción de P8



Las construcciones de P11 y P13 son similares entre sí, debido a que trazaron todos los segmentos que unen un punto y su imagen sin tener en cuenta el eje de simetría dado. Sin embargo, creemos que P13 construyó la figura imagen haciendo uso de circunferencias concéntricas, como se evidencia en la Imagen 18. P17 no construyó los segmentos que unen un punto y su imagen, es evidente que el polígono que construyeron no es imagen por simetría del polígono dado, además, no hay trazos o rastros suficientes en su producción para determinar el procedimiento que emplearon (Imagen 19).

Imagen 18

Producción de P13

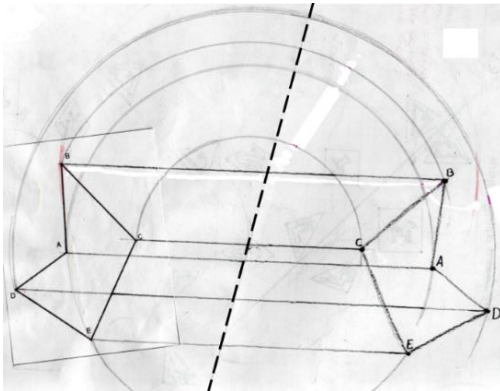
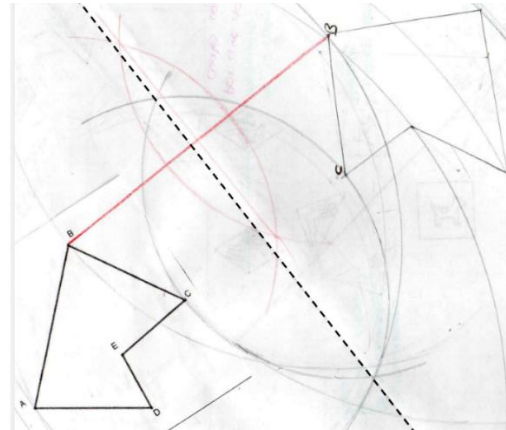


Imagen 19

Producción de P17



En el tercer grupo ubicamos a las parejas P2, P6 y P12, estas parejas para construir el polígono imagen, calcaron el polígono dado, esto lo afirmamos debido a que al revisar a contra luz, encontramos marcar de lápiz y de la aguja del compás sobre los vértices del polígono. P2 y P12 (Imagen 20) doblaron la hoja y retiñeron con lápiz los vértices del polígono dado, dejando una huella que al tacto se percibe relieve sobre estos. Sin embargo, P2 a diferencia de P12 no solo retiñó los vértices del polígono, sino que también retiñó los lados del polígono dado. P6 (Imagen 21) solo calcó los vértices *B*, *D* y *E* con la aguja del compás. No logramos identificar que procedimiento emplearon para los demás vértices. Es posible que las parejas hayan calcado debido a que es más fácil obtener el polígono imagen y al ver que la profesora dobló la hoja.

Imagen 20

Producción de P12

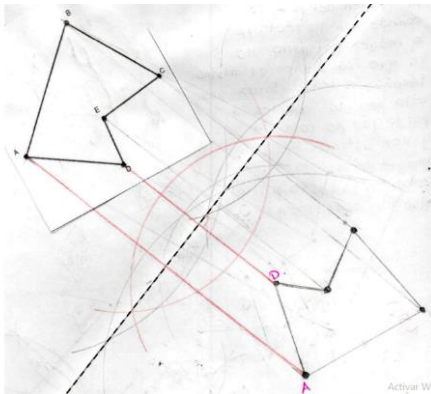
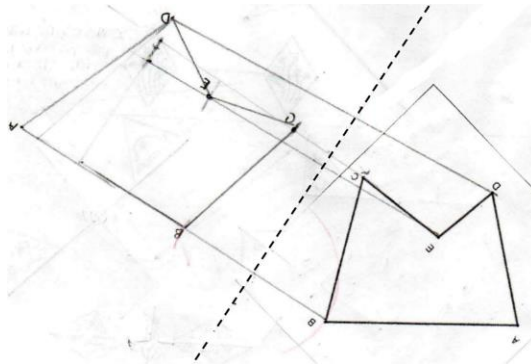


Imagen 21

Producción de P6



Las parejas P9 y P16 no las ubicamos en alguno de los grupos, debido a que en sus construcciones hay pocos trazos o rastros que nos permita evidenciar cual fue el procedimiento que emplearon para construir el polígono imagen. En la Imagen 22 vemos que P9 solo trazo el segmento CC y verificaron que el eje de simetría es mediatriz de este segmento. Al revisar la construcción de los demás puntos imagen, identificamos que el punto B no es imagen por simetría axial del vértice B, por lo que el polígono construido no es congruente con el dado. Por el contrario, al revisar la producción de P16, el polígono construido si es congruente con el dado, sin embargo, evidenciamos imprecisiones en el trazo de los lados del polígono y no construyeron todos los segmentos que unen un punto y su imagen. Es posible que esta pareja haya hecho uso de la escuadra y la regla como se ve en la Imagen 23 y por esto no hay rastro del uso de compas.

Imagen 22

Construcción de mediatriz del segmento CC por P9

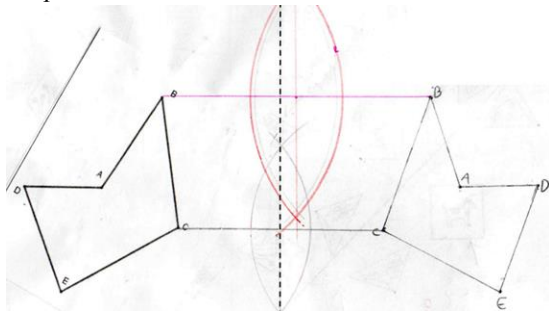


Imagen 23

Posible uso de instrumentos de medición y producción de P16

