DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE LÍMITE DE FUNCIONES REALES EN UN PUNTO

Autores

Sara Romina Arrúa Ramírez

Osvaldo Abdon Dominguez Encina

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

2024

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE LÍMITE DE FUNCIONES REALES EN UN PUNTO

Autores

Sara Romina Arrúa Ramírez

Osvaldo Abdon Dominguez Encina

Asesor

Dr. Edwin Ferley Ortiz Morales

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

2024

Agradecimiento

Expresamos nuestro sincero agradecimiento al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, por brindarnos el apoyo y los recursos constantes.

Un especial reconocimiento al Dr. Edwin Ferley Ortiz Morales, por su invaluable orientación, paciencia y compromiso con nosotros a lo largo de este proceso.

Finalmente, agradecemos a todos los profesores que formaron parte de la Maestría en Docencia de la Matemática, cohorte 2023-I (BECAL Paraguay), quienes, con su conocimiento, enseñanzas y apoyo, contribuyeron significativamente a nuestra formación académica y profesional.

Resumen

Nuestro trabajo de grado tuvo como objetivo general diseñar una secuencia de tareas para estudiantes del tercer año de la educación media paraguaya, con el propósito de promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto. En el contexto educativo paraguayo, donde persisten desafíos en la comprensión de conceptos matemáticos abstractos, buscamos aportar estrategias que mejoren la enseñanza y se produzca un aprendizaje de la noción de límite. Para alcanzar este fin, determinamos dos objetivos específicos: proponer tareas para involucrar la articulación de los registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto y plantear tareas para impulsar la interpretación y asignación de significado a la noción de límite de funciones reales en un punto mediante la articulación de sus registros semióticos. En nuestro marco teórico integramos la teoría de Sfard (2008) sobre la construcción, adopción y modificación del discurso matemático para impulsar una interpretación y asignación de significado a la noción de límite de funciones reales en un punto, la teoría de Duval (2016) acerca de los registros de representación semiótica (gráfico, algebraico o simbólico, numérico y verbal) y sus implicaciones en el aprendizaje matemático, así como la teoría APOE, con sus componentes fundamentales. La metodología que empleamos corresponde al ciclo ACE, con un enfoque cualitativo y de naturaleza exploratoria. Incluimos tres tareas específicas y una tarea de evaluación en nuestra secuencia diseñada donde cada una está estructurada con base en las estructuras mentales que los estudiantes deben construir. Además, agregamos rúbricas que facilitan una evaluación de dichas construcciones mentales y presentamos un análisis detallado del diseño de la secuencia de tareas, evaluando su posible impacto en el proceso de aprendizaje y sugiriendo aspectos a considerar en futuras implementaciones.

Palabras claves: Secuencia de tarea, aprendizaje, noción de límite, representaciones semióticas, discurso matemático, teoría APOE, ciclo ACE.

Abstract

The general objective of this graduate work was to design a sequence of tasks for students in the third year of Paraguayan high school, with the purpose of promoting the learning of the notion of limit of real functions at a point. To achieve this objective, two specific objectives were proposed: to propose tasks that favor the articulation of the semiotic registers of the notion of limit and to design activities that promote the interpretation and assignment of meaning to these registers. The theoretical framework includes Sfard's (2008) theory on the construction and modification of mathematical discourse, Duval's (2016) theory about the semiotic representation registers (graphic, algebraic or symbolic, numerical and verbal) and their implications in mathematics, as well as the APOE theory, with its fundamental components. The methodology used corresponds to the ACE cycle, with a qualitative approach and of an exploratory nature. The sequence designed consists of three specific tasks and one evaluation task, each one structured based on the mental structures that students must build. In addition, rubrics are included to facilitate an evaluation of these mental constructs. The paper also presents a detailed analysis of the design of the task sequence, evaluating its possible impact on the learning process and suggesting aspects to be considered in future implementations.

Key words: Task sequence, learning, notion of limit, semiotic representations, mathematical discourse, APOE theory, ACE cycle.

Tabla de contenido

Índice de Figura

Índice de tabla

Introducción

En el contexto de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, cohorte 2023-I (BECAL Paraguay), quienes desarrollamos este trabajo hemos sido beneficiarios del Programa de Becas Carlos Antonio López (BECAL). Este programa, promovido por el Estado paraguayo, busca fortalecer la capacitación docente en áreas clave, como la educación matemática, con el propósito de mejorar la calidad del sistema educativo en Paraguay.

Nuestra participación en esta maestría cuya duración es de 14 meses, refleja un compromiso con la mejora de los estándares educativos en nuestras aulas. A lo largo de este proceso formativo, hemos adquirido herramientas teóricas y metodológicas que nos han permitido reflexionar críticamente sobre nuestras prácticas pedagógicas y explorar nuevas estrategias que contribuyan a mejorar nuestras acciones docentes. Este trabajo, de naturaleza exploratoria, cualitativa y de profundización, investiga estrategias y teorías que orientan nuestra propuesta, analizando si las tareas diseñadas, basadas en una descomposición genética preliminar, guardan coherencia con las estructuras mentales necesarias para el aprendizaje del concepto estudiado. De esta manera, consideramos que nuestra formación no solo enriquece nuestra labor, sino que también contribuye al desarrollo educativo de nuestro país, alineándose con los objetivos del programa de BECAL.

Este trabajo lo desarrollamos dentro de ese marco, y tiene como objetivo contribuir a la enseñanza de las matemáticas mediante el diseño de una secuencia de tareas que promueva el aprendizaje. Para ello, organizamos el documento en cuatro capítulos, cada uno de los cuales exponen diferentes aspectos de nuestra propuesta.

En el primer capítulo presentamos los aspectos iniciales, como la inquietud pedagógica que motivó el desarrollo de este proyecto. Aquí, justificamos la necesidad de diseñar una secuencia de tareas enfocadas en el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto, un concepto clave para el estudio del cálculo. Además, presentamos los objetivos generales y específicos que orientan nuestra propuesta. Estos objetivos están fundamentados en un marco teórico que incluye la teoría de Duval (2016), Sfard (2008) y otras perspectivas relevantes, complementados con una revisión de antecedentes teóricos. En esta revisión, se analizan enfoques históricos y didácticos relacionados con la enseñanza del límite, proporcionando las bases necesarias para la construcción de las tareas y estrategias propuestas.

En el segundo capítulo, exponemos un marco de referencia, donde abordamos el marco normativo que orienta la educación matemática en Paraguay, situando el contexto educativo en el que trabajamos como profesores. A continuación, profundizamos en conceptos teóricos fundamentales como el método de exhaución de Eudoxo y Arquímedes, el triángulo de Sierpinski, y las diferentes concepciones históricas del límite. Finalmente, en la sección del marco didáctico, describimos las teorías y estrategias que fundamentan nuestra propuesta, como la teoría APOE y el ciclo de enseñanza ACE, elementos clave en el diseño de las tareas planteadas.

En el tercer capítulo ubicamos al marco metodológico en el que delineamos la metodología aplicada en el diseño de nuestra secuencia de tareas, describiendo el tipo de investigación adoptado y su enfoque. Además, definimos cómo los estudiantes deberían manifestar su aprendizaje a través de diferentes registros de representación semiótica y cómo esto transforma su discurso matemático. En este contexto, presentamos la descomposición genética de la noción de límite y describimos el proceso de construcción de las tareas basadas en el ciclo ACE.

Los aspectos finales se ubican en el cuarto capítulo, aquí reflexionamos sobre el producto de la propuesta que es el diseño de la secuencia de tareas, formulamos recomendaciones para mejorar la enseñanza del límite y sugerimos futuras líneas de investigación que aborden las dificultades observadas en el aprendizaje de este concepto.

En las conclusiones resaltamos cómo nuestra formación en la maestría nos ha permitido integrar enfoques teóricos y metodológicos relevantes, al mismo tiempo que mantenemos una visión crítica y reflexiva sobre nuestras prácticas. Este esfuerzo no solo responde a las expectativas del Programa de Becas Carlos Antonio López, sino que también representa un aporte valioso para la mejora de la calidad educativa en Paraguay, contribuyendo al fortalecimiento de las capacidades de los profesores y al desarrollo de estrategias pedagógicas pertinentes a nuestro contexto

Capítulo 1. Aspectos iniciales

Este capítulo organizamos en tres apartados principales. En primer lugar, exponemos la inquietud pedagógica que motiva el diseño de la secuencia de tareas, enfocada en la necesidad de facilitar el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto para los estudiantes del tercer año de la educación media de Paraguay. En segundo lugar, planteamos tanto el objetivo general como los específicos que guían nuestro trabajo y finalmente, presentamos los antecedentes teóricos, que nos proporcionan una base para avanzar en nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas, a través de una revisión de enfoques históricos y didácticos relevantes para la enseñanza de la noción de límite de funciones reales. Estos apartados nos permiten estructurar una secuencia coherente que respalda nuestra propuesta de enseñanza para promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.

Inquietud pedagógica

Desde nuestra posición como profesores de aula nos encontramos ante una dualidad, y es que nuestra preocupación por el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto se evidencia en dos aspectos interrelacionados: por un lado, tradicionalmente hemos dado más importancia a la parte algorítmica y mecánica del cálculo, especialmente a los límites de funciones, como lo ha manifestado Lockhart (2009), quien nos hace reflexionar acerca de cómo en la educación secundaria se da más importancia a la repetición mecánica inconsciente de fórmulas y algoritmos en lugar de abordar problemas naturales que hagan explorar a los estudiantes diversos caminos de resoluciones. Creemos que esta perspectiva ha llevado a los estudiantes a enfocarse únicamente en aplicar procedimientos matemáticos sin entender realmente el significado detrás de ellos; por otro lado, en nuestra práctica reconocemos un fenómeno en el cual los profesores somos conscientes de que los estudiantes tienen dificultades para comprender la noción del concepto de límite y a pesar de ello, continuamos proponiendo tareas que les enseñan a resolver situaciones de manera mecánica, con el solo objetivo de que la mayoría pueda aprobar la asignatura como lo plantea Azcárate et al., (1996).

Estamos convencidos de que es importante tratar el fenómeno que hemos identificado en nuestra práctica, donde persistimos en ofrecer tareas sin abordar las dificultades reales de comprensión, o sin proponer actividades que recojan información sobre las formas en que los estudiantes aprenden con el propósito de adaptar nuestra enseñanza para promover el aprendizaje. En este sentido, consideramos necesario adoptar nuevas estrategias que promuevan el aprendizaje de los conceptos matemáticos, enriqueciendo así nuestra experiencia de enseñanza.

Coincidimos con Cottrill, et al. (citado por Rendón, 2017) en que el enfoque de procedimientos dificulta aún más el aprendizaje de los conceptos matemáticos y en este sentido, destacamos la necesidad de reformar nuestra manera de enseñar con el propósito de promover el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto mediante la construcción de significados a través de la interacción entre sus diferentes representaciones semióticas (Duval, 2016). Nuestra intención es desarrollar una secuencia de tareas que impulsen la interpretación y la asignación de significado a la noción de límite mediante sus diferentes formas de representación semiótica, como las representaciones gráficas, numéricas, algebraicas o simbólicas como la verbal, ya que estas múltiples representaciones permiten a los estudiantes abordar el concepto desde distintas perspectivas, facilitando una comprensión de su significado matemático. Esto implica no solo apartar nuestra práctica de la simple memorización de pasos y fórmulas, sino también guiar a los estudiantes hacia un proceso de construcción o modificación de un discurso matemático (Sfard, 2008), mediante la elaboración de la secuencia de tareas que proponemos. Al considerar diversas perspectivas teóricas, como las propuestas por Duval (2016) y Sfard (2008), reconocemos la necesidad de adoptar un enfoque dinámico en la enseñanza de las matemáticas que se orienta hacia la promoción de la comprensión y una participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, por lo que valoramos la riqueza que surge al contemplar estas teorías en lugar de limitarnos a una sola perspectiva.

Considerar varias perspectivas respalda la visión de Kaput y Thompson (1994), quienes argumentan que el cálculo es una parte esencial de las matemáticas que debe ser enseñada desde la escuela secundaria. Ellos sostienen que el estudio del cálculo no solo facilita una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, sino que también cultiva habilidades, destrezas de razonamiento y resolución de problemas cruciales para la vida cotidiana. En este sentido, dado que el límite es el fundamento del cálculo y un concepto vital para analizar el comportamiento de las funciones en situaciones donde tienden a valores específicos o al infinito positivo o negativo, es imperativo que diseñemos tareas que fomenten la construcción del significado de la noción de límite. Esto contribuiría a desarrollar habilidades de abstracción y generalización, las cuales son transferibles a diversas áreas del conocimiento y la vida en general.

Reconocemos que es pertinente diseñar tareas que permitan a los estudiantes explorar y comprender el significado de la noción de límite, específicamente en el contexto de funciones reales en un punto. Nuestra propuesta busca fomentar el análisis, la reflexión, la participación y la construcción colaborativa de significados en el aula. Al centrarnos en la interpretación de la noción de límite de funciones reales en un punto y articulación de sus diferentes representaciones semióticas empleadas, buscamos promover la apropiación del concepto y el desarrollo de la habilidad para coordinar y conectar sus diversos registros semióticos.

Al reorientar nuestras prácticas educativas hacia enfoques que estimulen el análisis, la exploración, la reflexión, la participación y la asignación colaborativa de significados, fortaleceremos la preparación de los estudiantes para enfrentar no solo desafíos académicos, sino también para ampliar sus perspectivas en la comprensión de las matemáticas, porque si adoptamos métodos que involucren activamente a los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje, podríamos transformar nuestra enseñanza de las matemáticas de una experiencia memorística y repetitiva a una enseñanza matemática que guíe a los estudiantes a la construcción gradual de su aprendizaje que a su vez facilitaría un cambio progresivo de su discurso adoptando desde su proceso unas formas propias de referirse a los conceptos matemáticos (Sfard, 2008).

Objetivos

Objetivo general

Diseñar una secuencia de tareas para estudiantes del tercer año de la educación media paraguaya con el fin de promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto a través de sus distintos registros semióticos.

Objetivos específicos

- Proponer tareas para involucrar la articulación de los registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto.
- Plantear tareas para impulsar la interpretación y asignación de significado a la noción de límite de funciones reales en un punto mediante la articulación de sus registros semióticos.

Antecedentes

En nuestra búsqueda de estudios sobre el diseño de tareas relacionadas con el límite de funciones en la enseñanza secundaria, hemos encontrado una variedad de contribuciones provenientes de diferentes perspectivas. Inicialmente, nuestra búsqueda se centró en trabajos realizados en nuestro país, pero debido a la limitada disponibilidad de investigaciones, expandimos nuestra búsqueda a otros países. A pesar de consultar numerosas fuentes adicionales, hemos optado por destacar aquellos estudios que aportan de manera relevante a nuestra propuesta, como aquellos que ofrecen enfoques desde análisis exhaustivos de las concepciones existentes hasta propuestas concretas de diseño didáctico. Hemos identificado dos grandes categorías que sustentan nuestra propuesta: primero, el diseño de tareas didácticas centradas en promover la comprensión del límite, y segundo, los enfoques históricos que analizan cómo la evolución del concepto ha influenciado en su enseñanza.

En primera instancia mencionamos a aquellos autores cuyos trabajos convergen en una propuesta integrada para la enseñanza y el aprendizaje del límite, que combina enfoques intuitivos, tecnológicos y formales. Aquere et al. (2009) se centran en la construcción del concepto a través de actividades cooperativas y la reflexión sobre errores, coincidiendo con Romiti et al. (2012) en la necesidad de trabajar con múltiples representaciones semióticas (gráficas, numéricas y simbólicas), lo que facilita la comprensión desde diferentes perspectivas. Volverás (2015) y Dos Santos & De Souza (2023) añaden el uso de GeoGebra, lo que no solo permite la visualización dinámica de límites laterales, asíntotas y límites infinitos, sino que también coincide con Aquere et al. (2009), en la importancia de superar las dificultades de aprendizaje mediante el uso de tecnología y actividades grupales. En conjunto, estos trabajos destacan la importancia de la reflexión sobre los errores y el análisis colaborativo para reconstruir el concepto de límite y coinciden en buscar facilitar un aprendizaje progresivo y profundo, haciendo uso de la tecnología, visualización y representación para garantizar un entendimiento más completo.

Siguiendo la misma línea, abarcamos los trabajos que centran su propuesta en el diseño de unidades didácticas y secuencias de actividades que promueven la comprensión del concepto de límite en diferentes niveles educativos. Los trabajos de Radillo y González (2014), Rendón (2017), Cercado (2018), García (2019), Builes (2020), Morante (2020), y Duque (2020) comparten un enfoque común: diseñar unidades didácticas y secuencias de tareas que ayuden a los estudiantes a entender mejor el límite de funciones. Estos trabajos no solo utilizan varias representaciones (gráficas, numéricas y algebraicas), sino que también integran tecnología y materiales concretos para hacer el aprendizaje accesible y tangible. Además, la argumentación matemática también juega un papel importante, alentando a los estudiantes a justificar y defender sus ideas de manera lógica.

En segunda instancia, nos apoyamos en los estudios que exploran el concepto de límite desde una perspectiva histórica, analizando cómo su evolución ha influenciado en su enseñanza y comprensión actuales. Blázquez y Ortega (1998), De la Fuente y Armenteros (2011), Medina (2001), Cantoral y Farfán (2003), Molfino y Buendía (2010), Ruíz Soto (2019) y Bernal y Quitian (2020) coinciden en señalar que muchos de los desafíos que enfrentan nuestros estudiantes, como el horror al infinito o la confusión entre el proceso dinámico y el concepto formal del límite, han sido obstáculos presentes a lo largo de la historia del desarrollo de este concepto.

Por ejemplo, Medina (2001) resalta la importancia de analizar las concepciones históricas del límite para comprender mejor las dificultades que los estudiantes enfrentan al abordar este concepto. De manera similar, Cantoral y Farfán (2003) sitúan el concepto de límite en el contexto de la evolución de la matemática educativa, destacando que la enseñanza debe reconocer las diferencias entre el conocimiento cotidiano y el científico para facilitar una transición entre ambos. Bernal y Quitian (2020) subrayan la importancia de que los profesores en formación deben comprender la evolución histórica del concepto de límite, ya que esto les permitirá diseñar estrategias para abordar los obstáculos que presentan los estudiantes. Por otro lado, Molfino y Buendía (2010) y Ruíz Soto (2019) investigan cómo el concepto de límite ha sido institucionalizado en los currículos escolares y destacan los desafíos didácticos actuales en la enseñanza del límite en secundaria.

Estas propuestas no solo buscan facilitar la comprensión del límite, sino que hacen que los estudiantes se involucren activamente, explorando y construyendo su propio aprendizaje. Estos aportes enriquecen nuestra propuesta, ofreciéndonos ampliar nuestra visión para ayudar a que los estudiantes comprendan el concepto de manera profunda y significativa.

Los estudios presentados implícitamente persiguen el objetivo de facilitar el aprendizaje del límite de funciones, aunque su enfoque principal recae en la mejora de la enseñanza. Por nuestra parte, buscamos priorizar el aprendizaje, para promover la comprensión y apropiación del concepto a través de nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas. Si bien nuestra propuesta busca contribuir indirectamente a mejorar nuestra enseñanza, la intención es potenciar el proceso de aprendizaje en los estudiantes del tercer año de la educación media paraguaya.

Capítulo 2. Marco de referencia

En el proceso de diseño de una secuencia de tareas destinadas a favorecer el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto, nos sumergimos en un contexto donde convergen tres elementos esenciales: el marco normativo, el sustento teórico y el marco didáctico. Estos pilares representan tanto las directrices legales que orientan nuestra labor educativa, como los fundamentos teóricos y las estrategias didácticas que dan forma a nuestra práctica docente. En primer lugar, abordamos el marco legal, donde contextualizamos la educación en Paraguay, las regulaciones y políticas que influyen en nuestra labor educativa; luego, nos adentramos al sustento teórico, donde exploramos los temas centrales asociados al objeto matemático y finalmente, nos concentramos en el marco didáctico de nuestra propuesta, donde delineamos las estrategias didácticas y la secuencia de tareas diseñada para promover el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto.

Directrices y normativas: orientaciones en el ámbito educativo

Sabemos que la educación desempeña un papel fundamental en el desarrollo y progreso de una sociedad y que para garantizar su acceso universal y promover la calidad y equidad en todos los niveles, es necesario contar con un marco normativo.

En Paraguay, con la promulgación de la Constitución Nacional en 1992 se inició la transición hacia la democracia, mientras que la creación de la Ley General de Educación de 1998 por parte del Consejo Asesor de la Reforma Educativa (CARE) sentó las bases normativas de la política educativa (Elías, 2014). Estas disposiciones legales continúan siendo esenciales y vigentes en la actualidad, proporcionando el marco normativo que guía el sistema educativo del país, reflejándose en los preceptos consagrados y estableciendo que:

> Toda persona tiene derecho a la educación integral y permanente, que como sistema y proceso se realiza en el contexto de la cultura de la comunidad. Sus fines son el desarrollo pleno de la personalidad humana y la promoción de la libertad y la paz, la justicia social, la solidaridad, la cooperación y la integración de los pueblos; el respeto a los derechos humanos y los principios democráticos; la afirmación del compromiso con la Patria, de la identidad cultural y la formación intelectual, moral y cívica, así como la eliminación de los contenidos educativos de carácter discriminatorio. La erradicación del analfabetismo y la capacitación para el trabajo son objetivos permanentes del sistema educativo. (Constitución Nacional, 1992, art. 73, p. 15).

Con esto, se busca promover el desarrollo armónico e integral de cada individuo, respetando y fortaleciendo su identidad, y es responsabilidad del estado y de las instituciones educativas proporcionar los recursos necesarios para que cada estudiante pueda avanzar en su proceso educativo de acuerdo con su propio ritmo e intereses.

A pesar de que la educación está respaldada por el mismo Estado paraguayo, nuestra historia educativa está marcada por períodos de cambio y desafíos después de la dictadura, y aunque existen algunos avances, persisten problemas que afectan la educación como: la calidad de la enseñanza que debido al aumento en la matricula se ha considerado un logro en términos de inclusión educativa, y no necesariamente se ha prestado la misma atención a la mejora de la calidad de la educación ofrecida; las desigualdades sociales que muy a pesar del acceso universal a la educación, siguen siendo un problema en el sistema educativo paraguayo, lo que dificulta la democratización de la sociedad (Ortiz, 2012).

Durante la dictadura en Paraguay (1954 - 1989), se promovió el autoritarismo, el estancamiento en el progreso científico, técnico y cultural, la adopción de prácticas profesionales y sociales cerradas y antidemocráticas, la falta de perspectiva social e histórica en la mayoría de la población educada y la desconexión del conocimiento con la realidad (Elías, 2014). Identificamos que esto refleja la crítica que hacen de Skovsmose y Valero (2012) sobre los enfoques educativos descontextualizados y autoritarios, destacando la necesidad de una educación que fomente la participación, el pensamiento crítico y la inclusión social para superar la desigualdad y, promover un desarrollo social y cultural sostenible, ya que el obstáculo de aprendizaje identificado consistió en mantener la desigualdad a través de las políticas establecidas por la dictadura que llevó la exclusión en la educación disfrazándose y pasando inadvertida.

Según Ortiz (2012), la reforma educativa de 1991 en Paraguay, implementada tras el fin de la dictadura, tuvo como objetivo primordial transformar el sistema educativo para fortalecer la democracia y elevar el nivel académico de los jóvenes. Del mismo modo, las reformas posteriores representaron otro esfuerzo por mejorar la calidad de la educación en Paraguay. A pesar de estas loables metas, nuestra experiencia como profesores en el aula revela una marcada desconexión entre los ideales educativos planteados y la realidad en nuestras prácticas diarias.

Creemos que, a pesar de las reformas realizadas para transformar la mentalidad del pueblo paraguayo mediante una evaluación más equitativa, holística y sistemática, respaldada por un enfoque educativo más participativo, los resultados no han sido alentadores y se reflejan en las evaluaciones estandarizadas, tanto a nivel nacional como internacional. Los datos obtenidos, especialmente de pruebas como el Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo (SNEPE) y el examen Programme for International Student Assessment (PISA), muestran un desempeño académico preocupantemente bajo, con más del 85 % de los estudiantes paraguayos enfrentando dificultades significativas para comprender textos básicos y sin mejoras notables en lectura. Además, una gran proporción de estudiantes muestra dificultades para resolver problemas simples de matemáticas, y se encuentran en los niveles más bajos en ciencias (Sosa y Kiernyezn, 2023).

Estimamos que estos resultados reflejan una persistencia en la mentalidad educativa arraigada en lo tradicional, heredada en gran medida de la época de la dictadura y muy a pesar de los cambios políticos y sociales posteriores, aún podemos observar vestigios de temor, dependencia e incapacidad para tomar decisiones propias entre la población, lo que indica que la libertad alcanzada en 1989 no se ha reflejado completamente en la práctica, y con mayor acento en el ámbito educativo. Esta situación crítica en el sistema educativo paraguayo, agravada por la pandemia de COVID-19, coloca a los jóvenes en una posición desfavorable, comprometiendo sus oportunidades futuras, por lo que consideramos crucial tomar medidas urgentes para mejorar la educación en nuestro país y proporcionarles oportunidades futuras más equitativas y competitivas.

En particular, como profesores de matemáticas, hemos sido protagonistas de esta brecha en nuestra propia labor docente. En demasiadas ocasiones, hemos caído en simplemente seguir el currículo o el plan de estudios establecido por el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) en un tiempo limitado, asegurando únicamente que los estudiantes avancen de año, en lugar de profundizar en la comprensión y el razonamiento matemático. Reconocemos que, en demasiadas ocasiones, nos hemos enfocado más en enseñar algoritmos que en profundizar en los conceptos matemáticos, descuidando la construcción de significados en nuestras clases.

En este contexto crítico, es evidente que revisar únicamente la implementación de las políticas educativas no es suficiente para abordar las deficiencias en el sistema educativo, además consideramos crucial no solo examinar la estructura educativa definida por la Ley General de Educación de Paraguay, sino también revisar el plan curricular con el objetivo de buscar enfoques que promuevan mejoras en la educación.

Según el capítulo II, sección I del artículo 27 de la Ley General de Educación de Paraguay: "La educación formal se estructura en tres niveles: El primer nivel comprenderá la educación inicial y la educación escolar básica; el segundo nivel, la educación media; el tercer nivel, la educación superior" (Ley General de Educación, N°1264, 1998, art. 27). El segundo nivel se erige como una fase crucial en la preparación de los estudiantes para su inserción en el mundo actual. En esta etapa, los estudiantes tienen la oportunidad de profundizar en áreas específicas de estudio y desarrollar habilidades críticas que no solo les serán útiles en su futuro académico y profesional, sino también en la vida cotidiana. Además de adquirir conocimientos en diversas disciplinas, la educación media les brinda la oportunidad de explorar diferentes áreas de interés y vocacionales, lo que les permite descubrir sus pasiones y habilidades individuales.

La actualización Curricular del Bachillerato Científico de la educación media se organiza en tres planes: común, específico y optativo. El primero, posibilita una formación general y facilita la movilidad de estudiantes; el segundo, permite una formación más profunda y vertical en una determinada área, y el tercero constituye un espacio en el que las comunidades educativas participan plenamente de las decisiones curriculares al seleccionar aquello que consideran relevante en la formación de los estudiantes, como complemento de los planes común y específico (MEC, 2014). Este hecho conlleva mayor protagonismo de los actores locales y, también, mayor responsabilidad.

Nos centraremos en la modalidad del Bachillerato Científico, que ofrece formación en tres áreas específicas: Ciencias Básicas y Tecnología, Letras y Artes, y Ciencias Sociales, con una duración total de 3 años. El plan de estudios de matemática de este nivel se enfoca en el desarrollo de habilidades matemáticas aplicadas como la trigonometría y el cálculo diferencial, fundamentales para áreas como física, ingeniería y arquitectura. El tercer año se dedica exclusivamente al cálculo diferencial, fomentando un estudio reflexivo para un desarrollo efectivo de capacidades, por lo que se sumerge en esta disciplina que va más allá de la mera manipulación de ecuaciones y funciones. Es en este punto, donde se inicia un camino hacia la profundización del cambio y la continuidad en el ámbito matemático y uno de los pilares fundamentales de este camino es el estudio del límite de funciones reales.

Como educadores de matemáticas en el nivel secundario, buscamos promover un entorno de aprendizaje donde los estudiantes puedan crear y asimilar conceptos matemáticos diversos, desarrollando así habilidades analíticas. Reconocemos que estas habilidades tienen un impacto significativo en la vida cotidiana de los estudiantes al fortalecer su capacidad para resolver situaciones de manera lógica y tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. El estudio del límite de funciones reales desempeña un papel importante en este proceso, porque al comprender cómo una función se comporta a medida que se acerca a ciertos valores o al infinito, los estudiantes desarrollan la habilidad de análisis y la capacidad de descomponer situaciones complejas en elementos más manejables y esto les permite enfrentar problemas con mayor confianza y precisión.

La importancia del estudio de la noción de límite de funciones reales se refleja en nuestro compromiso como profesores de matemáticas en diseñar una secuencia de tareas que promueva el aprendizaje de esta noción en los estudiantes del tercer año de la educación media de Paraguay. Con nuestra propuesta nos centramos en la creación de entornos que fomenten la reflexión, la colaboración, la participación y el respeto mutuo, al mismo tiempo que buscamos facilitar el cambio entre las representaciones semióticas de los registros gráficos, numéricos y algebraicos o simbólicos, desafiando a los estudiantes a dar significado al concepto y a enriquecer su forma de comunicar la interpretación y asignación de significado de ideas matemáticas.

Nuestra visión sobre el aprendizaje y su potencial transformador se refleja en la elaboración de una secuencia de tareas con las que buscamos promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto que estarán enfocadas en impulsar la articulación entre los registros gráficos, numéricos y algebraicos o simbólicos y la verbal, así como para fomentar la interpretación y asignación de significado a los registros semióticos asociados y con ello, buscamos no solo fortalecer la comprensión matemática en los estudiantes, sino también promover su desarrollo integral como individuos autónomos y críticos.

Sustento teórico

La noción de límite es uno de los conceptos centrales en el análisis matemático y el cálculo, y ha sido fundamental en el desarrollo de la matemática moderna. Su evolución histórica es un reflejo de la forma en que diferentes culturas y matemáticos han intentado comprender el cambio continuo, la aproximación y el comportamiento de funciones cuando se acercan a ciertos valores. Aunque esta sección no profundiza en cada aspecto histórico, presenta los temas a nivel de su implicancia para el diseño de secuencias de tareas que promuevan la comprensión de la noción de límite en el aprendizaje de los estudiantes.

Este recorrido permitirá establecer conexiones significativas entre el enfoque didáctico propuesto y una idea intuitiva con el método de exhaución de Eudoxo que ha influido en la conceptualización del límite, hasta la rigurosa formalización del límite en el siglo XIX. Este abordaje desde una perspectiva histórica y teórica ofrece un marco coherente para comprender cómo cada etapa ha impactado en la enseñanza moderna y la comprensión del límite, permitiendo así crear actividades educativas que fomenten el aprendizaje.

El método de exhaución de Eudoxo y Arquímedes

Al explorar la evolución del cálculo, es esencial remontarnos a sus orígenes para comprender cómo las ideas sobre el límite comenzaron a tomar forma. Uno de los hitos más significativos en este viaje intelectual se encuentra en la obra de Eudoxo, un matemático de la antigua Grecia cuyo trabajo no solo influyó en contemporáneos como Arquímedes, sino que también sentó las bases para el desarrollo de conceptos fundamentales en matemáticas. Aunque en nuestra discusión sobre el diseño de tareas educativas no profundizaremos directamente en sus teorías, consideramos crucial entender el contexto y la importancia histórica de sus contribuciones. El método de exhaución de Eudoxo, descrito en su proposición sobre la relación entre volúmenes y áreas, fue revolucionario y representa el verdadero punto de partida en el estudio formal del límite. Este conocimiento no solo enriquece nuestra perspectiva, sino que también nos permite apreciar mejor los fundamentos sobre los que se construyó esta rama del conocimiento matemático.

En la antigua Grecia, matemáticos como Eudoxo y Arquímedes plantearon problemas relacionados con magnitudes infinitesimales mientras investigaban el cálculo de áreas y volúmenes. Sus intuiciones sobre el comportamiento de cantidades cada vez más pequeñas sentaron las bases conceptuales para el desarrollo futuro del cálculo (Boyer, 1959).

El trabajo de Eudoxo que se presenta a continuación lo extrajimos del libro "Desarrollo conceptual del Cálculo" de Cantoral y Farfán (2004), en él se presenta un teorema, conocido como la Proposición 2 del Libro XII de Los elementos de Euclides. La notación fue modificada intentando no falsear la idea.

La proposición dice:

Los círculos son uno al otro los cuadrados de los diámetros

La demostración consta de tres pasos:

Primer paso: se demuestra un teorema análogo para polígonos inscritos en circunferencias. Este teorema afirma que las áreas de polígonos semejantes inscritos en círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros. Para demostrar este teorema, se parte de un hecho conocido:

Las áreas de polígonos semejantes están en la misma proporción que los cuadrados de dos cualesquiera lados correspondientes (Proposición 20 del Libro VI de Los Elementos de Euclides).

Por lo tanto, es suficiente demostrar que una pareja de lados correspondientes están en la misma proporción que los diámetros correspondientes porque al demostrar que los lados correspondientes de polígonos semejantes inscritos en círculos tienen la misma proporción que los diámetros de esos círculos, se puede concluir que las áreas de estos polígonos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros de los círculos. Este paso nos permite extender esta proporción a las áreas de los círculos mismos cuando consideramos polígonos con un número cada vez mayor de lados, acercándose así al área real de los círculos.

Teorema (proposición 1 del libro XII de Los elementos de Euclides):

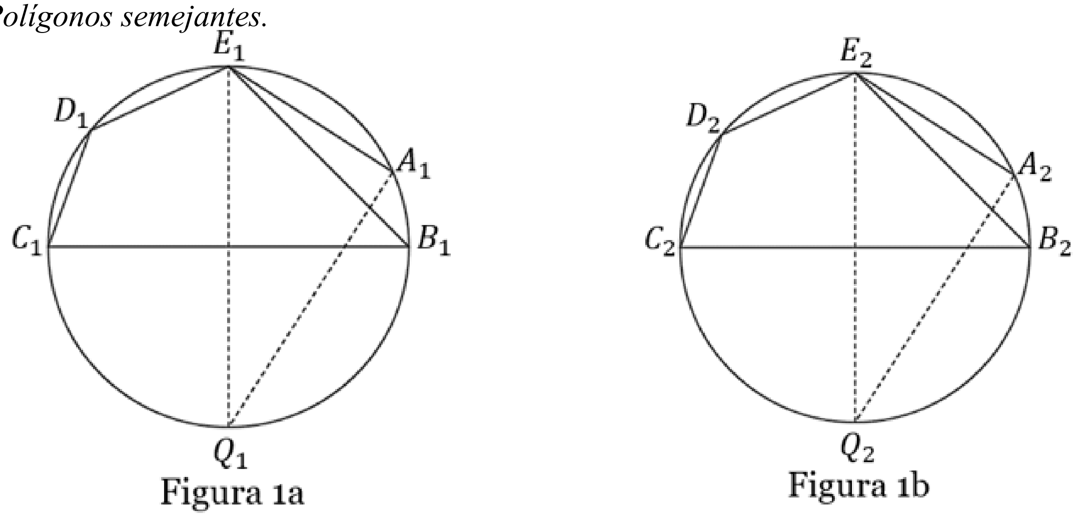
"Las áreas de polígonos semejantes inscritos en círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros".

Demostración: Considerando como un hecho conocido que las áreas de polígonos semejantes están en la misma razón que los cuadrados de dos cualesquiera lados correspondientes (proposición 20 del libro VI de Los elementos de Euclides), es suficiente demostrar que una pareja de lados correspondientes están en la misma razón que los diámetros correspondientes.

Aquí convendría observar que el área de un triángulo es el producto de dos de sus lados por una constante, que solo depende del ángulo formado por ambos lados. En consecuencia, las áreas de triángulos semejantes están en la misma razón que el cuadrado de la razón de cualesquiera dos lados correspondientes. De aquí podemos pasar a un caso más general, el de polígonos semejantes, ya que el área de un polígono puede obtenerse triangulándolo, y tendríamos la proposición 20 del Libro VI de Los elementos de Euclides.

Figura 1.

Polígonos semejantes.



Nota. Cantoral y Farfán, 2004, p.26.

Consideremos los polígonos semejantes $A_1B_1C_1D_1E_1$ y $A_2B_2C_2D_2E_2$ inscritos en los círculos correspondientes C_1 y C_2. Sean Q_1 y Q_2 tales que E_1Q_1 y E_2Q_2 sean diámetros.

Entonces $\angle E_1\, A_1\, B_1 \cong \angle E_2\, A_2\, B_2$ y los lados que los determinan son proporcionales, ya que, por hipótesis, los polígonos son semejantes. Por lo tanto, $\Delta E_1\, A_1\, B_1 \sim \Delta E_2\, A_2\, B_2$. De aquí obtenemos:

$\angle A_1B_1E_1 \cong \angle A_2B_2E_2$ y, en consecuencia, por ser inscritos y subtender los mismos arcos, $\angle A_1Q_1E_1 \cong \angle A_2Q_2E_2$ y como los ángulos $\angle E_1A_1Q_1$ y $\angle E_2A_2Q_2$ son rectos, tenemos que $\Delta A_1\, Q_1\, E_1 \sim \Delta A_2\, Q_2\, E_2$

De aquí inferimos $\frac{E_1Q_1}{E_2Q_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$, con lo que terminamos el primer paso.

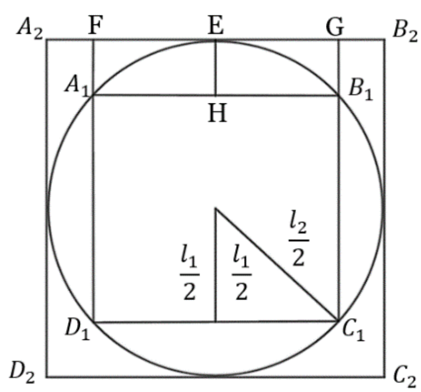
Segundo paso: se demuestra que el área del círculo puede ser exhaustada por medio de las áreas de los polígonos regulares inscritos de 2^n lados. Este método de agotamiento nos permite observar que, al aumentar el número de lados de los polígonos regulares inscritos, el área de estos polígonos se acerca cada vez más al área del círculo, hasta que la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono regular inscrito se hace arbitrariamente pequeña. Esto nos ayuda a entender cómo el proceso de aumentar el número de lados ilustra la noción de límite, es decir que, aunque nunca se alcanza exactamente el área del círculo, se puede llegar tan cerca como se desee.

Demostraremos ahora que las áreas de polígonos regulares de 2^n lados exhaustan el área del círculo.

Demostración: Inscribamos el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ en el círculo; demostraremos que el área de este cuadrado es mayor que la mitad el área del círculo.

Figura 2.

Cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ en el círculo $A_2B_2C_2D_2$ con lados paralelos al cuadrado inscrito.



Nota. Cantoral y Farfán, 2004, p.27.

Consideremos el cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ cuyos lados son paralelos al cuadrado inscrito $A_1B_1C_1D_1$. Si su área es el doble del área del cuadrado inscrito, ya que, si llamamos l_1 a la longitud del lado del cuadrado inscrito y l_2 a la del cuadrado inscrito, tenemos, por el teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_2}{2}\right)^2$$

y, en consecuencia, $2{l^2}_1 = {l^2}_2$.

Entonces, el área del cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado inscrito y como ésta es mayor que la del círculo, demostremos lo que nos propusimos.

Ahora consideremos el octágono regular obtenido bisecando el arco A_1B_1 en el punto E. Demostraremos que el octágono ocupa más de la mitad del exceso de área del círculo respecto al cuadrado inscrito.

Tenemos que área del segmento circular determinado por el arco A_1EB_1 y el segmento A_1B_1 es menor que el área del rectángulo A_1FGB_1. El octágono incluye exactamente la mitad del área del rectángulo A_1FGB_1, por lo cual el octágono regular incluye más de la mitad del área del segmento.

De aquí, usando básicamente una consecuencia del principio, obvio para los matemáticos de la época, de que dadas dos cantidades podemos sumar la pequeña consigo misma un número suficientemente grande de veces hasta exceder la grande, (lo que ahora es conocido como el axioma de Arquímedes), Eudoxo afirma que la diferencia del círculo y la del polígono regular de 2^n lados, con n suficientemente grande puede ser hecha menor que cualquier cantidad asignada de antemano.

Tercer Paso: se utiliza el método de reducción al absurdo para mostrar el resultado buscado el cual consiste en suponer que la afirmación que se quiere demostrar es falsa y luego se muestra que esta suposición lleva a una contradicción lógica. Al llegar a una contradicción, se concluye que la suposición inicial debe ser incorrecta, y, por lo tanto, la afirmación original es verdadera.

Ahora consideremos dos círculos con áreas C_1 y C_2 y con diámetros d_1 y d_2, respectivamente, y supongamos que

$$\frac{C_1}{C_2} < \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} \qquad (1)$$

Entonces tendremos que:

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} \qquad (2)$$

para algún círculo con área C_3 tal que $C_2 > C_3$. La existencia de tal círculo es una hipótesis de esta geometría.

Por lo demostrado en el segundo paso, podemos encontrar un polígono regular de 2^n lados inscritos en el círculo C_2, tal que su área P satisfaga

$$C_3 < P < C_2 \quad (3)$$

Consideremos un polígono regular de 2^m lados, con área P_1, inscrito en el círculo C_1, entonces por lo demostrado en el primer paso, se tiene:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} \qquad (4)$$

y considerando (2) obtenemos:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (5)$$

Además, ya que $P_1 < C_1$, llegamos a que $P < C_3$, lo que contradice la relación (3). Por lo tanto, la expresión (1) es falsa. Análogamente se demuestra que, si suponemos, en vez de la relación (1), la relación

$$\frac{C_1}{C_2} > \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} \qquad (6)$$

Con que también se llega a una contradicción, de lo cual concluimos la prueba del teorema de Eudoxo (Cantoral y Farfán, 2004).

Eudoxo respondió al desafío de la crisis epistemológica inducida por la existencia de magnitudes que no podían ser expresadas como la razón de enteros y lo llevó a la necesidad de una nueva matemática con su método de exhaución, una técnica que, aunque no formulada en términos de límites modernos, encapsulaba la esencia de hacer tender una sucesión de magnitudes finitas hacia una magnitud límite. Su enfoque para calcular áreas y volúmenes fue crucial para la integración de los conceptos de infinito y continuidad en las matemáticas (González, 2008).

Arquímedes utilizó el método de exhaución para el cálculo del área de un círculo, inscribiendo polígonos. Si P_n es el perímetro del polígono inscrito con n lados y r es el radio del círculo, entonces el área A_n del polígono inscrito se puede aproximar como:

$$A_n = \frac{1}{2} P_n r \qquad (7)$$

donde P_n aumenta con el número de lados, acercándose al perímetro del círculo $2\pi r$ cuando $n \to \infty$. Al aumentar el número de lados de los polígonos, Arquímedes demostró que la diferencia entre las áreas inscritas y circunscritas disminuía, acercándose así al área real del círculo. Esto le permitió calcular el valor de π (pi) con una precisión sin precedentes para su época. Avanzó el método de Eudoxo y lo aplicó en sus trabajos sobre la cuadratura de la parábola y el volumen de la esfera. A través del método de exhaución, Arquímedes no solo estableció lo que ahora reconocemos como los fundamentos del cálculo integral, sino que también introdujo un método riguroso para lidiar con los infinitesimales, afrontando directamente las paradojas del infinito (González, 2015).

Al abordar el diseño de la secuencia de tareas a partir del método de exhaución de Eudoxo y Arquímedes, incluimos una perspectiva histórica como un recurso complementario que enriquece la comprensión gradual y significativa de la noción del límite. Aunque esta perspectiva no es el foco de nuestros objetivos, contribuye a que los estudiantes perciban el límite no solo como una herramienta técnica, sino también como una construcción lógica desarrollada para responder a problemas concretos. Esto nos ayuda a consolidar la noción de límite empleando elementos históricos que, sin ser el centro de nuestra propuesta, ofrecen una visión accesible del límite, facilitando un aprendizaje al integrar recursos que promuevan la intuición y la visualización en el contexto escolar.

Concepciones del límite

A lo largo de la historia, distintas concepciones de la noción de límite han influido en la forma en que se comprende y enseña este concepto en matemáticas. Estas concepciones ofrecen diferentes maneras de aproximarse al concepto de límite y resultan relevantes para el diseño de secuencias de tareas que buscan facilitar su aprendizaje. El análisis de estos enfoques permite abordar el límite desde diversas perspectivas, promoviendo un entendimiento flexible mediante la propuesta en los estudiantes.

Tabla 1.

Concepciones del límite.

Concepción Algebraica de la Noción del Límite	Matemáticos como Fermat, Euler y Lagrange avanzaron en la formalización del cálculo. Fermat desarrolló métodos de máximos y mínimos y técnicas de aproximación de tangentes. Euler propuso formalizaciones del cálculo sin conceptos geométricos y aplicó diferenciales de Leibniz. Lagrange contribuyó con el método de máximos y mínimos y destacó el uso de polinomios de Taylor para describir funciones (Boyer, 1959).
Concepción de Pierre de Fermat	Fermat, a inicios del siglo XVII, abordó el paso al límite como una operación matemática, asignando valores a las variables y descartando aquellos con impacto insignificante. Introdujo el concepto de incremento diferencial y el método de adigualdad para analizar máximos, mínimos y tangentes de curvas polinómicas mediante operaciones algebraicas, sin recurrir explícitamente al concepto de límite.
Concepción de Leonard Euler	Euler adoptó un enfoque pragmático del cálculo, usando diferenciales de Leibniz y herramientas como el teorema del binomio de Newton para resolver problemas en Geodesia, Física y Mecánica. Definió funciones como expresiones analíticas, aceptando números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, y consideró el límite como el valor alcanzado cuando incrementos infinitesimales se acercan a cero. Su enfoque algorítmico, centrado en resultados más que en fundamentos geométricos, contribuyó significativamente al desarrollo del cálculo y el análisis matemático (Boyer, 1959).
Joseph Louis Lagrange y su concepción Finitista	Lagrange estableció una nueva base para el cálculo infinitesimal, alejándose de nociones de infinito e infinitesimales. Con un enfoque algebraico, utilizó Series de Taylor y propuso una Teoría Analítica de funciones sin límites. Esto contribuyó a un análisis matemático más riguroso, desligado de consideraciones geométricas, y permitió un estudio sistemático del límite (Medina, 2001).

Nota. Construcción propia, basado en (Boyer, 1959; Medina, 2001)

Estas concepciones no solo ofrecen una comprensión amplia de la noción del límite, sino también una oportunidad para identificar los fundamentos esenciales del límite que subyacen en su desarrollo a lo largo de los siglos. Aunque no las integramos directamente en nuestra propuesta, el análisis de estas perspectivas históricas ilumina los distintos enfoques que han modelado el límite, desde las primeras intuiciones de la aproximación hasta la formulación formal en el cálculo. Este proceso de indagación nos ha guiado a tomar nuestras decisiones pedagógicas al diseñar tareas que aborden las nociones de aproximación e infinito. Esto refuerza nuestra intención de que los estudiantes experimenten el límite como un concepto construido, con aplicaciones y significados que trascienden el aula y los conectan con una rica tradición matemática. Así, al considerar estos antecedentes históricos, orientamos el diseño de tareas que, sin necesidad de abordar el límite en términos formales, fomenten una base para los estudiantes, promoviendo una comprensión que se alinee con los principios que fundaron el cálculo.

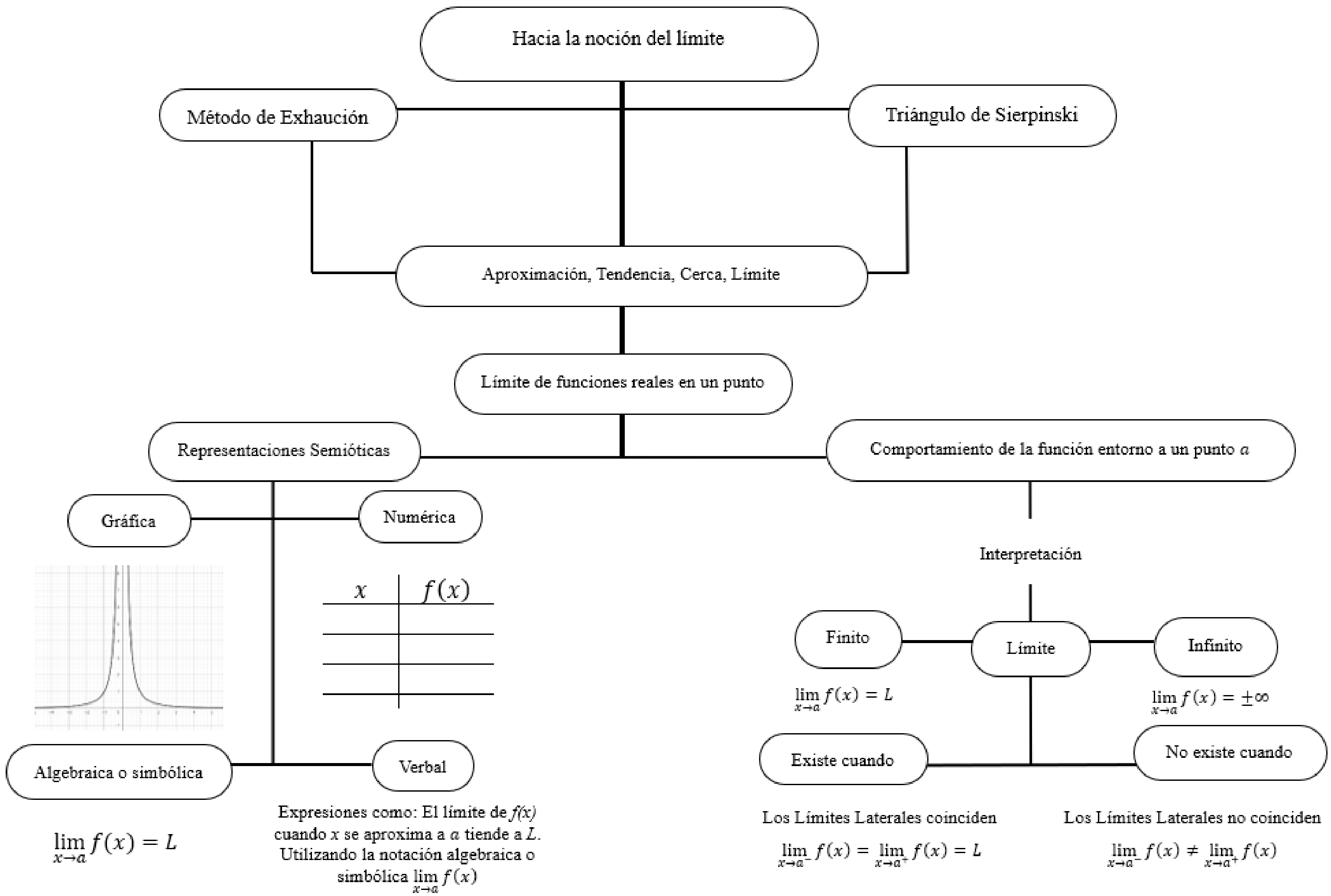
Red conceptual de la noción de límite de funciones reales en un punto

Presentamos la red conceptual que dirige nuestro diseño de tareas enfocadas en la noción de límite de funciones reales en un punto. Sabemos que una red conceptual completa debería abarcar toda la complejidad epistemológica, cognitiva y didáctica del concepto de límite, incluyendo sus múltiples enfoques históricos, teóricos y prácticos. No obstante, en este trabajo nos centramos exclusivamente en los elementos que consideramos esenciales para promover el aprendizaje de la noción de límite y las estructuras mentales necesarias para su comprensión. Aunque la teoría APOE no es el eje principal de nuestra propuesta, la utilizamos como herramienta complementaria para estructurar las tareas, facilitando la relación entre las representaciones semióticas y el desarrollo de las construcciones mentales requeridas para este concepto. La red conceptual que sustenta esta propuesta se presenta en la figura 3.

Esta red, se enfoca en los elementos esenciales para encaminar el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto. A partir de las representaciones semióticas (gráfica, numérica, algebraica o simbólica y la verbal), se organiza la interpretación del comportamiento de la función en torno a un punto a. Esta interpretación aborda tanto los casos en los que el límite es finito como aquellos en los que tiende al infinito, además de contemplar las situaciones en las que el límite no existe debido a la diferencia entre los límites laterales. Al integrar estas representaciones, el diseño de tareas permite que los estudiantes visualicen, describan y articulen los diversos registros semióticos que apoyan su aprendizaje de la noción de límite.

Figura 3.

Red conceptual de la noción de límite de funciones reales en un punto.



Nota. Construcción propia.

La red conceptual de la noción de límite de funciones reales en un punto nos permite estructurar los elementos fundamentales para facilitar el aprendizaje del concepto a través de sus diferentes representaciones semióticas. Sin embargo, en el análisis de esta noción, encontramos que ciertos aspectos, como la tendencia al infinito, requieren una exploración adicional para comprender los límites de manera integral. Esto nos conduce a considerar la cuestión del infinito, un concepto clave que enriquece la comprensión del límite y abre nuevas perspectivas en la interpretación de funciones que se acercan a valores infinitos o que exhiben un crecimiento sin fin. A continuación, abordamos esta cuestión y su relevancia en la enseñanza de la noción de límite.

La cuestión del infinito

A lo largo de la historia de las matemáticas, el infinito ha sido un concepto que ha generado debates y avances fundamentales para comprender la naturaleza y el comportamiento de las funciones reales. La interpretación del infinito nos permite analizar cómo las funciones tienden hacia valores extremadamente grandes o pequeños sin alcanzar un límite fijo, aspecto importante para abordar la noción de límite. En este trabajo, destacamos la relevancia de esta idea del infinito como un eje que orienta el diseño de una secuencia de tareas, enfocándonos en aquellos elementos que favorecen la comprensión de los límites de funciones reales en un punto.

Aunque no pretendemos profundizar en las ideas topológicas relacionadas con el infinito, brindar a los estudiantes una idea intuitiva resulta esencial para facilitar que, al analizar funciones cuyo límite tiende al infinito, analicen cómo los valores de una función se comportan al aproximarse a ciertos puntos o tendencias. La importancia del concepto de infinito en el aprendizaje de las matemáticas radica en su influencia fundamental sobre la comprensión conceptual de nociones como el límite en el análisis de funciones reales (Ortiz, 1994).

En la tabla 2 presentamos algunos aspectos clave sobre el significado del infinito, los cuales nos permiten entender su papel crucial en el desarrollo de conceptos como la aproximación y la tendencia en la noción de límite.

Tabla 2.

El concepto de infinito.

Aspecto	Descripción
Infinito potencial e infinito actual Aristóteles distingue entre el infinito potencial (crecimiento o subdivisión sin fin) y el infinito actual (una totalidad completa)	Infinito Potencial: proceso infinito, similar al crecimiento o subdivisión continua de un intervalo, donde siempre es posible encontrar un número mayor a otro dado. Esto está relacionado con la noción de límite, ya que una función puede acercarse indefinidamente a un valor sin alcanzarlo, reflejando la idea de aproximación en una secuencia interminable que se acerca a un punto. Infinito Actual: se refiere a una totalidad completa e ilimitada, como una colección infinita de puntos en una recta. Este concepto fue rechazado por algunos filósofos y matemáticos debido a sus implicaciones paradójicas. Sin embargo, su desarrollo posterior fue crucial para formalizar conceptos como el límite y el cálculo infinitesimal.
Confusión histórica y filosófica	La noción de infinito ha generado confusión desde los griegos hasta la edad media, al ser interpretada desde un sentido finito común, lo que llevó a paradojas como la de Aquiles y la tortuga. En la edad media, el infinito se entendía en términos teológicos como una propiedad divina, dificultando su comprensión matemática, reflejando cómo el infinito desafía las intuiciones básicas, lo que resalta su complejidad conceptual. La necesidad de superar las barreras intuitivas que enfrentan los estudiantes al abordar límites infinitos. Para enseñar este concepto, es fundamental contextualizar estas dificultades y preparar a los estudiantes para afrontar ideas que desafían su comprensión intuitiva.
Infinito como herramienta conceptual	El infinito actúa como una herramienta conceptual que permite interpretar y analizar funciones cuyo comportamiento no está limitado. Explicar el concepto de infinito a los estudiantes los prepara para comprender cómo algunas funciones crecen indefinidamente o se aproximan a valores que nunca alcanzan. Esto les facilita Interpretar el comportamiento de los límites cuando las funciones tienden a valores extremadamente grandes (o pequeños).

Nota. Construcción propia con base en Ortiz (1994).

Para esta propuesta, entendemos el infinito como una idea que permite describir comportamientos de crecimiento o decrecimiento sin límite en una función, tal como lo plantean autores como Ortiz (1994) y Stewart (2008). Ortiz (1994) aborda el infinito en términos de su papel conceptual para interpretar el comportamiento de funciones que no están acotadas, mientras que Stewart (2008) lo vincula directamente con el análisis de límites infinitos y su relevancia en el cálculo moderno. Por ejemplo, al analizar una función $f(x)$ en torno a un punto a, es posible que los valores de $f(x)$ aumenten indefinidamente o decrezcan sin límite. Esta comprensión no se orienta hacia una formalización rigurosa, sino hacia la identificación y descripción de estos comportamientos como parte de una secuencia de tareas en la que posibilite un aprendizaje de noción de límite de funciones reales en un punto, reconociendo cómo la función tiende a valores muy grandes positivos $(+\infty)$ o negativos $(-\infty)$ al aproximarse la variable x a un punto determinado (Stewart, 2008).

Para este propósito, utilizaremos el triángulo de Sierpinski como recurso didáctico, ya que su estructura fractal permite a los estudiantes acercarse de forma visual y conceptual a la noción de infinito a través de un proceso iterativo infinito, ya que su estructura fractal permite a los estudiantes acercarse de forma visual y conceptual a la idea del infinito, preparando su comprensión y facilitando el entendimiento de límites infinitos.

El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es un fractal descrito por primera vez en 1915 por el matemático polaco Wacław Sierpiński, quien lo desarrolló como parte de su trabajo en geometría fractal (Rubiano, 2018). Este triángulo se construye a partir de un triángulo equilátero inicial al que se le aplican sucesivas iteraciones para crear una estructura autosimilar (Gutiérrez y Parraguez, 2021). La construcción más común del triángulo de Sierpinski comienza con un triángulo equilátero de lado 1, incluyendo su área interior. A partir de aquí, se trazan los puntos medios de cada lado para formar cuatro triángulos más pequeños, eliminando el triángulo central. Este proceso se repite en los tres triángulos restantes al unir los puntos medios de sus lados y eliminar el triángulo central nuevamente, generando nueve triángulos más pequeños, y así sucesivamente.

Para construir el triángulo de Sierpinski, se sigue un proceso iterativo que se puede resumir de la siguiente manera (Rubiano, 2018; Gutiérrez y Parraguez, 2021):

Paso 1: Triángulo Inicial

Se comienza con un triángulo equilátero de lado 1. A continuación, se determinan los puntos medios de cada lado, dividiendo el triángulo original en cuatro triángulos equiláteros más pequeños y congruentes. Se elimina el triángulo central, dejando tres triángulos equiláteros que conservan la mitad de la longitud del triángulo original.

Paso 2: Primera Iteración

Se repite el proceso en cada uno de los tres triángulos restantes, es decir, se trazan los puntos medios de sus lados y se elimina el triángulo central de cada uno. Esta iteración produce nueve triángulos equiláteros más pequeños, cada uno con una cuarta parte del área del triángulo original.

Paso 3: Iteraciones Subsecuentes

El proceso de eliminación se continúa indefinidamente: en cada iteración, se divide cada triángulo restante en cuatro y se elimina el triángulo central. Con cada nueva iteración, la estructura resultante es más compleja y mantiene la propiedad de autosimilitud característica del triángulo de Sierpinski.

La figura 4 muestra cómo, tras cada iteración, la estructura se vuelve más compleja, manteniendo la propiedad de autosimilitud característica del triángulo de Sierpinski.

Figura 4.
Representación del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski.

Nota. Construcción propia.

Cada paso muestra una iteración de la construcción, en la que se crea un patrón repetitivo que conduce a un fractal auto semejante. Consideramos que el triángulo de Sierpinski es un recurso para introducir la noción de infinito y la idea de límite en el contexto de funciones reales, especialmente porque visualiza cómo una estructura geométrica puede aproximarse a una forma infinita a través de iteraciones sucesivas, la figura se va pareciendo cada vez más a una estructura que nunca llega a completarse completamente. Estas características permiten trabajar con la idea de que algo puede aproximarse o tender hacia una estructura completa, sin llegar a un final concreto, reflejando así la noción fundamental de límite (Rubiano, 2018; Gutiérrez y Parraguez, 2021).

Para este trabajo, no profundizaremos en la construcción completa del triángulo de Sierpinski, sino que utilizaremos una configuración preestablecida con apoyo de GeoGebra para que los estudiantes manipulen de forma sencilla las iteraciones, con el objetivo de que, a través de la interacción con esta figura, puedan comprender la idea de infinito. La intención no es centrarse en el análisis de áreas u otros detalles, sino únicamente en la noción del infinito que el triángulo de Sierpinski permite visualizar.

De la noción a la formalidad: entornos y límites

Esta definición es esencial porque permite formalizar cómo una función se comporta cerca de un punto específico, lo cual es clave para entender la aproximación de los valores de una función a un límite. Luego, abordamos dos facetas fundamentales del concepto de límite en el contexto del cálculo: la noción y la definición formal del límite. Continuaremos examinando cómo Spivack (2014) describe esta noción, centrándonos en su comprensión intuitiva y práctica. Luego, nos sumergiremos en la definición rigurosa del límite, explorando su formulación matemática precisa y sus implicaciones. Buscamos que los estudiantes aprendan la noción del límite, lo que les permitirá abordar con confianza y solidez la definición formal, asegurando así una base sólida para su estudio y aplicación en el cálculo.

Definición de entorno en un punto

Cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p.

Notación. Designemos los entornos $N(p), N_1(p), N_2(p)$, etc. Puesto que un entorno $N(p)$es un intervalo abierto simétrico respecto a p, consta de todos los números reales x que satisfagan $p - r < x < p + r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. En lugar de $N(p)$ ponemos $N(p; r)$ si deseamos especificar su radio. Las desigualdades $p - r < x < p + r$ son equivalentes a $-r < x - p < r$, y a $|x - p| < r$. Así pues, $N(p; r)$ consta de todos los puntos x, cuya distancia a p es menor que r (Apóstol, 1967, p. 157).

Es decir que, si tomamos un punto p y dibujamos un pequeño intervalo alrededor de él, ese intervalo es el entorno de p que, incluye todos los puntos que están dentro de esa distancia r de p. Un entorno de p es como una pequeña vecindad alrededor de p. Por ejemplo, si se tiene un punto $p = 5$ y un radio $r = 1$, el entorno $N(5; 1)$ incluye todos los números desde 4 a 6, sin incluir los extremos hablando de un entorno abierto, así cualquier número x en el intervalo $4 < x < 6$ está dentro del entorno de 5. Esta definición proporciona una base para el estudio de límites, permitiendo una comprensión de cómo los valores de una función se aproximan a un límite.

La siguiente definición, es intuitiva sobre el límite que prepara un camino para abordar la definición formal.

Definición de la noción de una función que se aproxima a un límite

La noción de límite es un concepto central en el análisis matemático, ya que describe el comportamiento de una función conforme sus valores se aproximan a un punto determinado. En este apartado, presentamos una definición intuitiva que prepara el camino hacia una comprensión más formal de este concepto, basado en la proximidad entre los valores de la función y su límite esperado.

Definición de la noción del límite:

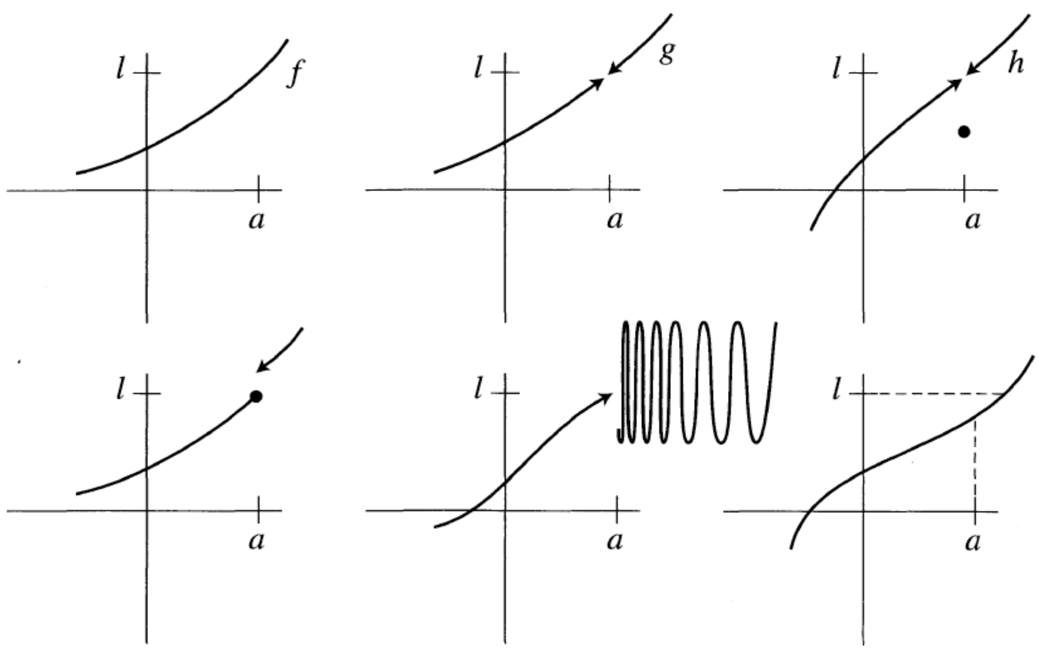
"La función $\boldsymbol{f}$ *se* a*proxim*a a*l límite* $\boldsymbol{l}$ *cerc*a *de* $\boldsymbol{a}$*, si* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *se* a*proxim*a t*anto como se quier*a a $\boldsymbol{l}$ *si* $\boldsymbol{x}$ *se* a*proxim*a *suficientemente* a $\boldsymbol{a}$ *pero es distinto de* $\boldsymbol{a}$*" (Spivak, 2012).*

$\boldsymbol{f}$ es la función; $\boldsymbol{l}$ es el límite al que se aproxima la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$; $\boldsymbol{a}$ representa el punto al cual la variable $\boldsymbol{x}$ se acerca.

Esto significa que no importa cuán cerca queramos que $f(x)$ esté de l, siempre podemos encontrar un entorno alrededor de a (excluyendo a mismo), tal que, dentro de esa distancia, $f(x)$ esté tan cerca de l como especificamos.

Esta definición provisional es importante porque establece la base para el entendimiento intuitivo de cómo una función puede acercarse a un valor límite a medida que la variable independiente se acerca a un punto particular, sin necesidad de que la función esté definida en ese punto o tome ese valor límite en ese punto. Es una preparación para la definición más formal de límite que implica los conceptos de ε y δ (Spivak, 2012). Al explorar esta noción, nos adentramos en el corazón del análisis matemático, donde la precisión y la intuición se entrelazan para revelar los secretos del cambio y la continuidad. Observemos lo que sucede en las representaciones gráficas:

Figura 5.
Gráfica de funciones.



Nota. Spivak, 2012, p. 90.

Las gráficas de las funciones $f(x), g(x), h(x)$ muestran cómo se acercan a l en a. Aunque la función $g(x)$ no tenga una definición precisa y $h(x)$ esté definida incorrectamente, podemos observar que tanto $g(x)$ como $h(x)$ se acercan al valor l en a. Ello se debe a que en la definición dada, se ha excluido explícitamente la necesidad de considerar el valor de la función en el punto

a; tan sólo es necesario que $f(x)$ se aproxime a l cuando x se aproxima a a, siendo x distinto de a, sencillamente no estamos interesados en el valor que pueda tener $f(a)$, ni tampoco en si f está definida en a (Spivak, 2012).

En cuanto a la cuarta gráfica inferior izquierda de la figura 3, podemos observar una función que tiene límites laterales diferentes en a, es decir, el límite por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y el límite por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$ no coinciden, sino que se ilustra una discontinuidad de salto en a y matemáticamente hablando se expresa como: $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, aunque ambos límites laterales existen, su diferencia implica que no hay un único valor hacia el cual $f(x)$ converge cuando x se aproxima a a.

La quinta gráfica de la parte inferior central nos muestra una función que no tiene límite cuando x se aproxima a a, debido a una oscilación indefinida cerca de a, porque a medida que x se acerca a, la función $f(x)$ no se estabiliza en ningún valor particular. Esta gráfica es un ejemplo de una función que falla en tener un límite en a debido a una oscilación continua y sin control a medida que x se aproxima a a. Podemos ver este comportamiento como caso típico en funciones trigonométricas como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando x se aproxima a cero.

La sexta gráfica es la gráfica más interesante, ya que muestra una función que se aproxima a l desde la derecha, pero nunca lo alcanza al acercarse a $x = a$. La línea punteada indica que la función tiene un salto en $x = a$, lo que significa que la función tiene un valor definido diferente de l en ese punto, o posiblemente no esté definida en $x = a$. Esta gráfica ilustra una discontinuidad de salto, donde la función tiene límites laterales, que no coinciden, o la función simplemente no existe en ese punto.

Cada una de estas gráficas ilustra diferentes comportamientos de las funciones cuando se analizan límites y continuidad en un punto a. La sexta gráfica, en particular, enfatiza la importancia de considerar los límites laterales y la existencia o no de un valor de la función en el punto de interés. Básicamente, la definición establece que los valores de $f(x)$ están próximos al número l cuando x está cerca de a desde cualquier dirección, lo que la hace informal debido a la frase *se aproxima suficientemente*, cuyo significado es contextual, pero es claro para calcular límites de funciones particulares y comprender gráficos para asimilar la noción del límite. Consideramos que comprender estas diferentes situaciones permitirán a los estudiantes desarrollar una visión más completa de cómo las funciones se comportan en torno a los puntos y cómo identificar correctamente la existencia o ausencia de límites.

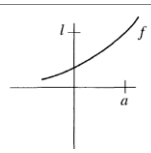
Para comprender plenamente la idea de límite, es crucial identificar y establecer diferentes representaciones semióticas que nos permitan abordarla desde distintas perspectivas. Estas representaciones incluyen los registros gráfico, numérico y algebraico o simbólico, así como la verbal. De este modo, cada una de estas representaciones facilita una aproximación más accesible a la noción del límite, ya que provee una manera específica de entender y comunicar el comportamiento de una función al acercarse a un punto dado a. La visualización del comportamiento de una función en las proximidades de un punto nos permite anticipar su tendencia y aproximarse a valores específicos, ofreciendo así una percepción directa de conceptos que son abstractos y a veces contraintuitivos.

Al observar cómo $f(x)$ se acerca a un valor L mientras x se aproxima a a, pero sin que x sea igual a a, nos equipamos mejor para abordar definiciones formales y teorías más complejas que dependen de una comprensión sólida de los límites. Este resulta beneficioso no sólo para aplicaciones teóricas en matemáticas, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades en abstracción y generalización que son aplicables en una amplia variedad de campos del saber y en aspectos cotidianos de la vida.

En la tabla 3 establecemos las representaciones semióticas con las que trabajaremos en la propuesta, definiendo así las distintas maneras de abordar la noción de límite de una función, permitiendo a los estudiantes observar, interpretar y comunicar el comportamiento de una función al aproximarse a un punto dado.

Tabla 3.

Representaciones semióticas de la noción de límite.

<table>
<tr><th colspan="2">Representación</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>
</td><td>La noción de límite se visualiza a través del comportamiento de la función f. La curva de la función muestra la tendencia de $f(x)$ al acercarse al valor L. Se interpreta como el límite de la función conforme x se aproxima a a es L.</td></tr>
<tr><td>Numérica</td><td><table><tr><td>x</td><td>2.9</td><td>2.9999</td><td>a</td><td>3.00001</td><td>3.0001</td><td>3.1</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td>…</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>Aquí se utiliza una tabla de valores donde se muestran puntos del dominio de x que se aproximan progresivamente al valor a en su entorno (por izquierda y derecha). A medida que estos valores de x se aproximan a a, se observan las correspondientes imágenes de $f(x)$ y si los valores de $f(x)$ tienden a un mismo valor L, este valor es identificado como el límite de la función en a.</td></tr>
<tr><td>Algebraica o Simbólica</td><td>$\lim_{x\to a} f(x) = L$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$</td><td>La noción de límite se expresa $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para indicar que, a medida que x se aproxima o acerca al valor dado a, la función $f(x)$ tiende al valor L. Los signos negativo y positivo indican la aproximación de x por la izquierda o la derecha respectivamente.</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td></td><td>La representación verbal, es una forma de comunicar el comportamiento de una función cuando tiende a un punto, ya sea a través de lenguaje cotidiano o matemático, haciendo el concepto más accesible para los estudiantes sin sacrificar la profundidad y rigor de la idea matemática. Esto permitiría a los estudiantes articular sus observaciones y análisis de manera coherente.</td></tr>
</table>

Nota. Construcción propia basada en Blázquez y Ortega (2001).

Esta tabla sintetiza las diversas representaciones semióticas de la noción de límite, cada una de las cuales desempeña un papel fundamental en la comprensión integral del concepto. La representación gráfica permite visualizar el comportamiento de la función cerca de un punto dado, facilitando una interpretación visual del límite. La representación numérica, a través de tablas de valores, ayuda a comprender cómo se aproximan las imágenes de la función a un valor límite. La representación algebraica o simbólica formaliza el límite con notación matemática, permitiendo expresar su definición de manera precisa. Finalmente, la representación verbal complementa las anteriores al comunicar de forma intuitiva y contextual la idea de límite, conectando conceptos abstractos con el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Esta combinación de registros proporciona un enfoque multifacético que enriquece la enseñanza y el aprendizaje del límite.

Límites laterales

Los límites laterales permiten analizar el comportamiento de una función cuando se acerca a un punto desde un solo lado, ya sea desde la izquierda o la derecha. Cuando se habla del límite por la izquierda de una función $f(x)$ en un punto a, se refiere a cómo se comportan los valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima a a por valores menores (desde la izquierda), esto se expresa como $\lim_{x \to a^-} f(x)$. Por otro lado, el límite por la derecha se refiere a los valores de $f(x)$ cuando x se aproxima a a desde valores mayores (desde la derecha) y esto se expresa como $\lim_{x \to a^+} f(x)$ (Stewart, 2012).

El símbolo $x \to a^-$ indica que se consideran sólo los valores de x que son menores que el punto específico a. Del mismo modo, el símbolo $x \to a^+$ indica que se consideran solo valores de x que son mayores que el punto específico a. Cuando hablamos de aproximaciones por la izquierda o la derecha, nos referimos al entorno inmediato del punto a, también conocido como vecindad de a (Stewart, 2012). En ambos casos, el análisis implica observar cómo se comporta la función considerando valores ligeramente menores o mayores que el punto a de interés.

Para que el límite de una función en un punto a exista, es necesario que ambos límites laterales existan y además sean iguales, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Si ambos límites laterales coinciden, entonces se dice que el límite de la función en a existe y es igual a ese valor común. Sin embargo, si los límites laterales no coinciden, el límite en a no existe. Esto último es especialmente importante al identificar puntos de discontinuidad o cambios bruscos en las funciones analizadas, donde el comportamiento de la función difiere drásticamente dependiendo del lado por el que se acerque a a (Stewart, 2012).

Para el contexto de nuestro diseño de una secuencia de tareas, reconocemos que los límites laterales poseen implicaciones más profundas y complejas en el análisis de funciones. Sin embargo, dentro de nuestra propuesta, nos centraremos únicamente en la existencia o no existencia del límite en un punto, considerando la diferencia entre los límites laterales. Dado que esta propuesta está dirigida a estudiantes de nivel bachillerato, no pretendemos explorar de manera exhaustiva todos los aspectos matemáticos relacionados con los límites laterales. El enfoque está orientado a aproximar a los estudiantes a la comprensión de la noción del límite de funciones reales en un punto, preparándolos para que, en etapas posteriores de su formación, puedan abordar la definición formal y más rigurosa del concepto de límite (Stewart, 2012).

Límites infinitos

En el análisis de la noción de límite de funciones reales es importante entender el comportamiento de cómo varían las funciones a medida que sus variables independientes se aproximan a ciertos valores. Un caso particular es cuando una función tiende al infinito, lo que implica que, al acercarse a un punto específico, los valores de la función crecen o decrecen sin límite. Este fenómeno se observa comúnmente en funciones racionales, exponenciales y logarítmicas, entre otras, y resulta clave para comprender conceptos más avanzados como las asíntotas y la continuidad (Stewart, 2012).

Cuando decimos que una función $f(x)$ tiende al infinito en un punto a, esto significa que los valores de $f(x)$ aumentan o disminuyen sin límite alguno cuando x se aproxima a a. Esto podemos representar de varias maneras, dependiendo del entorno de a y el comportamiento de la imagen de $f(x)$. Por esto, el estudio del límite infinito de una función se convierte en un recurso para describir cómo se comporta la función en regiones cercanas a a, identificando si existe una tendencia que crece o decrece ya sea hacia $+\infty$ o hacía $-\infty$, (Stewart, 2017).

Es importante formalizar esta idea de los límites infinitos para brindar a los estudiantes un marco conceptual claro sobre el comportamiento de las funciones en valores extremos. Sea $f(x)$ una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en el mismo a. Se dice que el límite de la función en a tiende a infinito positivo $(+\infty)$ o negativo $(-\infty)$ si al aproximarse x al valor de a, los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes (positivos o negativos). Esto se expresa de la siguiente manera:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, significa que los valores de $f(x)$ se hacen positivos y tan grandes como se quiera conforme x se aproxima a a.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, significa que los valores de $f(x)$ se hacen negativos y tan grandes en magnitud (negativos) como se quiera conforme x se aproxima a a.

En ambos casos, la expresión indica que al acercarse o aproximarse x a a, la función $f(x)$ crece sin límite (ya sea hacia el infinito positivo o negativo). Esto es importante para analizar el comportamiento de funciones que presentan tendencias de crecimiento o decrecimiento extremos, y se ilustra gráficamente con comportamientos asintóticos hacia $+\infty$ o $-\infty$, (Stewart, 2017).

Para los propósitos de nuestra propuesta de diseño, nos enfocaremos exclusivamente en los casos donde el límite de una función evaluada en un punto específico a tiende al infinito, es decir, $x \to a$ y $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$. No consideraremos situaciones en las que tanto la variable independiente como la función tienden al infinito simultáneamente, ya que estas implican un análisis más complejo que excede el alcance introductorio y didáctico que buscamos en el estudio de la noción de límite de funciones reales en un punto. Incluimos casos en los que el límite existe, no existe debido a la diferencia entre los límites laterales, o tiende al infinito, manteniendo siempre un nivel accesible.

Establecimiento de criterios de precisión

Spivak (2012) recalca que la matemática requiere definir exactamente lo que significa “estar cerca” de un valor. La noción de proximidad debe ser cuantificable y no solo intuitiva. Aquí es donde se introduce el concepto de $\varepsilon - \delta$, que nos permite precisar y garantizar esta proximidad. En particular, la definición $\varepsilon - \delta$ de límite especifica que para cada número real ε (épsilon) positivo, por pequeño que sea, existe un número real δ (delta) tal que, si la distancia entre la variable y el punto al que se aproxima es menor que δ, entonces la distancia entre el valor de la función y el límite es menor que ε. Este marco clarifica la noción de límite y establece una metodología esencial para verificar la precisión en el análisis matemático, fundamental para teorías avanzadas y sus aplicaciones.

Definición formal de límite

La función $\boldsymbol{f}$ tiende hacia el límite $\boldsymbol{l}$ en $\boldsymbol{a}$ significa que: para todo $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ existe algún $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ tal que, para todo $\boldsymbol{x}$, si $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\delta}$, entonces $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

En términos simples, esta definición establece que, si podemos hacer que la diferencia entre los valores de la función $f(x)$ y el límite l, sea tan pequeña como queramos, es decir menor que cualquier número positivo pequeño ε, simplemente asegurándonos de que x esté lo suficientemente cerca pero no exactamente en el punto a, entonces decimos que $f(x)$ tiende a l cuando x se aproxima a a. La belleza de esta definición radica en su precisión y universalidad además nos permite controlar y predecir el comportamiento de funciones en matemáticas proporcionando una base para muchos otros conceptos avanzados en análisis y cálculo.

A lo largo de este capítulo, hemos analizado momentos clave en la historia de la construcción de la noción de límite, centrándonos no en su desarrollo riguroso, sino en aquellos aspectos que enriquecen nuestro diseño de secuencia de tareas. Este análisis nos ha proporcionado herramientas para nuestra propuesta, permitiéndonos identificar qué elementos históricos pueden facilitar la creación de tareas que favorezcan construcciones mentales en los estudiantes. De este modo, logramos que los estudiantes no solo aprendan la noción de límite, sino que también conecten con la historia detrás del concepto, dándole un sentido profundo y contextualizado al tema.

Con esta comprensión en mente, avanzamos hacia el Marco Didáctico, donde delineamos la propuesta de diseño de una secuencia de tareas orientada a promover el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto, fundamentada en la teoría APOE. En este capítulo, exploraremos cómo traducir el conocimiento teórico e histórico en estrategias pedagógicas concretas, utilizando la descomposición genética de APOE y su medio de implementación, el ciclo ACE, para estructurar las tareas. Aquí, abordaremos la importancia de diseñar actividades que no solo presenten el límite como un concepto abstracto, sino que lo hagan accesible y significativo para los estudiantes.

Marco didáctico

En este capítulo, presentamos las perspectivas teóricas que fundamentan nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas. Iniciamos definiendo nuestra postura de aprendizaje y enseñanza desde dos enfoques que se alinean con el propósito de este trabajo. Posteriormente, exploramos la teoría APOE, describiendo sus componentes esenciales: estructuras y mecanismos mentales, descomposición genética y el ciclo de enseñanza ACE. Además de profundizar en los procesos mentales involucrados, analizaremos descomposiciones genéticas elaboradas por varios autores, que servirán como guía para la construcción de nuestro diseño. Finalmente, examinaremos el ciclo ACE como una metodología derivada de APOE, la cual sustenta y orienta nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas para el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto.

Aprendizaje y enseñanza

A lo largo de nuestra trayectoria, desde nuestra formación inicial hasta nuestra práctica como profesores de aula, hemos reconocido que las matemáticas van más allá de ser simplemente un conjunto de reglas y procedimientos abstractos. Más bien, implican una interpretación y comprensión de significados que trascienden la mera manipulación de números y símbolos. Aprender matemáticas implica que el estudiante no solo adquiera conocimientos, sino que también identifique y comprenda los elementos fundamentales de la disciplina. Este proceso incluye el desarrollo y la construcción de ideas matemáticas, la recopilación y análisis de información, la creación y descubrimiento de relaciones, y la discusión activa de ideas. Los estudiantes deben plantear conjeturas, evaluar y contrastar continuamente sus resultados, participando en un proceso dinámico y reflexivo (Santos Trigo, 1995).

En el campo de la educación de las matemáticas, restringir nuestra comprensión del aprendizaje únicamente a una perspectiva resulta limitante, creemos que no hay enfoque individual que pueda abarcar la inmensa riqueza y diversidad en la que se da el aprendizaje. No obstante, para organizar nuestro análisis hemos decidido centrarnos en las aportaciones particulares de al menos dos autores cuyas teorías enriquecen y alinean con nuestro trabajo.

Sfard (2008), concibe el aprendizaje como el proceso de cambiar de cierta manera, bien definida, las formas discursivas propias, lo que implica una participación activa en la construcción del conocimiento, mediante interacciones sociales y culturales. Asimismo, Duval (2016) destaca la importancia de considerar los registros de representación, ya que cambiar entre ellos es esencial para una comprensión de los conceptos matemáticos. Aspiramos a promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto mediante el diseño de una secuencia de tareas que fomenten la articulación con diferentes registros semióticos de este objeto matemático.

Valoramos el enfoque integrador de Sfard (2008), quien destaca la importancia del lenguaje, la comunicación en la construcción activa del conocimiento, y el proceso de modificación en el discurso matemático propio del estudiante. Además, valoramos las aportaciones de Duval (2016), quien destaca en su teoría semiótica la importancia de involucrarse con distintas formas de representación como una forma de contribuir al desarrollo general las capacidades de razonamiento, análisis y visualización de los estudiantes.

En este sentido, es fundamental establecer nuestra posición con relación a la enseñanza y analizarla desde los puntos de vista planteados por los teóricos citados Sfard (2008) y Duval (2016). Consideramos a la enseñanza como el acto de orientar y/o guiar a los estudiantes en la comprensión y manejo de diferentes formas matemáticas. Esto significa promover la coordinación de los registros de representación y la habilidad para cambiar entre ellos. Creemos que parte de enseñar es diseñar ambientes educativos que fomenten la participación de los estudiantes en la construcción de su propio aprendizaje. De esta manera nos aseguramos de que las estrategias utilizadas en el aula estén alineadas con nuestra concepción del aprendizaje, lo cual facilita un proceso educativo coherente y enriquecedor.

Estimamos que integrar las teorías de Duval (2016) y Sfard (2008) con la teoría APOE (Arnon et al., 2014) enriquece nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas, ya que estas perspectivas se aportan mutuamente. Mientras que Duval (2016) y Sfard (2008) nos brindan herramientas valiosas para interpretar, convertir representaciones, coordinar registros y facilitar la transición del discurso matemático, la teoría APOE nos proporciona robustez para descomponer y reconstruir el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos como la noción de límite de funciones reales en un punto. En la sección siguiente, profundizaremos en la teoría APOE, explorando cómo puede ser implementada para estructurar tareas que ayuden a favorecer el aprendizaje de este tema.

Más allá de solo transmitir información, nos comprometemos a proporcionar oportunidades para la comunicación, la interacción social, la cooperación y la exploración activa de conceptos matemáticos. De esta manera, buscamos no solo impartir conocimientos, sino también cultivar habilidades y destrezas de pensamiento abstracto y creativo en nuestros estudiantes, permitiéndoles aprender.

Construcción conceptual de elementos didácticos

En este apartado, buscamos construir definiciones propias de los elementos didácticos que componen nuestro diseño de una secuencia de tareas para promover la noción de límites de funciones reales en un punto, como tareas, actividades, secuencia de tareas e incisos. Estos elementos son importantes para estructurar y orientar el proceso de aprendizaje, y si bien están inspirados en teorías y trabajos de investigadores que han realizado y continúan realizando aportes significativos en el campo de la educación, presentamos definiciones que están basadas y fundamentadas en las contribuciones de diversos autores que han realizado aportes significativos. Aunque nos apoyamos en estas fuentes teóricas, hemos adaptado sus conceptos para alinearlos con los objetivos específicos de nuestra propuesta, garantizando que respondan a las necesidades del contexto educativo que abordamos.

A continuación, presentamos una construcción conceptual para cada uno de los elementos que componen nuestro diseño.

- Tarea

Entendemos como una tarea matemática a la propuesta de trabajo planteada por el profesor hacia el alumno con el propósito de que este último se involucre en procesos matemáticos que contribuyan a su aprendizaje (Gusmão, y Font, 2020). Las tareas permiten a los estudiantes interactuar con objetos, procedimientos y actividades matemáticas que involucran la ejecución de cálculos, la formulación de conjeturas, la representación de ideas y la demostración de conceptos (Herbst, 2012). En la Teoría APOE, el diseño de tareas es clave para comprender y explicar las formas de pensar de los estudiantes, sus dificultades y las relaciones que pueden o no construir sobre los conceptos matemáticos (Trigueros y

Oktaç, 2019). Esto resalta la importancia de una planificación cuidadosa, ya que la tarea propuesta se convierte en una herramienta que define en gran medida el aprendizaje de los alumnos (Hiebert y Wearne, 1997, citado por Gusmão y Font, 2020).

- Actividad

Para los efectos de nuestra propuesta, entendemos la actividad como las respuestas que el estudiante debe realizar a la tarea planteada por el profesor, focalizándose en lo que efectivamente ejecuta para cumplir con los objetivos de aprendizaje establecidos (Gusmão y Font, 2020). Estas actividades buscan que los estudiantes participen activamente en su proceso de aprendizaje matemático, ya que implican realizar ejercicios, experimentos, investigaciones o incluso juegos, diseñados con el propósito de facilitar la comprensión de conceptos matemáticos (Penzo, 2009). En nuestra propuesta, describimos cómo, al responder a las instrucciones de las actividades en las tareas asignadas, los estudiantes pueden desarrollar las estructuras mentales previstas según el enfoque de la teoría APOE.

- Secuencia de Tareas

Se refiere a una serie ordenada y coherente de tareas que el profesor diseña para guiar el aprendizaje de los estudiantes hacia objetivos específicos. Según Gómez et al. (2018), puede incluir tareas transversales que los estudiantes aborden simultáneamente con otras tareas de la secuencia, permitiendo una integración de conocimientos y habilidades. En este sentido, optamos por trabajar con una secuencia de tareas porque consideramos que su diseño ordenado y gradual facilitaría la promoción de construcciones de estructuras mentales en los estudiantes, en concordancia con los principios de la teoría APOE. Aunque la teoría no establece explícitamente una disposición progresiva, nos hemos inclinado por estructurar nuestra propuesta de esa manera, tal que favorezca el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

- Inciso

En el contexto del diseño de tareas, los incisos son una forma de organizar la información y las actividades dentro de la tarea, permitiendo al profesor establecer pasos claros y progresivos para el desarrollo de la actividad. Estos pasos pueden facilitar la transición entre conceptos y promover una mayor comprensión por parte de los estudiantes, guiándolos de manera efectiva a lo largo de la secuencia de tareas (Gusmão y Font, 2020).

Esta construcción conceptual resalta la importancia del diseño y organización de tareas y actividades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, alineado con principios teóricos que buscan promover la comprensión matemática efectiva.

Teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema) fue desarrollada por Ed. Dubinsky en 1991 junto con el grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). Este enfoque constructivista se basa en la abstracción reflexiva de Jean Piaget para describir la construcción de estructuras cognoscitivas lógico-matemáticas. La teoría APOE permite describir la epistemología y estudiar la cognición de los conceptos matemáticos (Guerra, 2021). Según esta teoría, el ciclo de investigación incluye tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y recolección de datos (Jaimes et al., 2017). Sin embargo, este trabajo se limitará solo al análisis teórico y diseño del segundo componente, es decir, la implementación, recolección y análisis de datos no se llevarán a cabo, ya que nuestra propuesta se centra exclusivamente en el análisis teórico y al diseño de una secuencia de tareas.

El primer componente denominado análisis teórico, se trata de diseñar una descomposición genética preliminar que describe estructuras y mecanismos mentales involucrados en la construcción de un concepto matemático, que pueden predecir cómo un estudiante construye un concepto, lo que debe ser experimentalmente probado y refinado si fuera necesario (Trigueros, 2019). En este sentido, buscamos que nuestra descomposición genética preliminar describa las estructuras y mecanismos mentales que deberían darse en los estudiantes para que se produzca el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.

El segundo componente propone un diseño para implementar un plan de enseñanza con el objetivo de que los estudiantes construyan estructuras mentales mediante los mecanismos mentales necesarios que se previeron en la descomposición genética preliminar (Franco et al., 2021). En nuestro caso, nuestra propuesta se limita al diseño del plan de enseñanza que promueva el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto, y no así a la implementación.

El tercer componente implica la recolección de datos a lo largo de la ejecución del plan, la cual se analiza posteriormente dentro del marco teórico proporcionado por la teoría APOE, con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos planteados para dicho estudio. (Franco et al., 2021).

Según Arnon et al., (2014) acción, proceso, objeto y esquema son las estructuras mentales que los estudiantes deben construir para dar sentido al objeto matemático de estudio, para los efectos de nuestra propuesta presentamos solo las definiciones de las estructuras que se utilizan en la propuesta, las que se expresan a continuación:

- Acción: es la transformación de un objeto matemático percibida por el estudiante como externa. Esta transformación se produce como una respuesta a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un estudiante solo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción (Bermúdez, 2013, citado por Guachamin, 2020). Para que un estudiante aprenda la noción de límite de una función real en un punto, debe realizar acciones tanto mentales como físicas, como por ejemplo una acción se daría cuando se evalúe la función en algunos puntos, donde cada punto sucesivo está más cerca de un valor específico a que el punto anterior. Esto proporcionaría una interacción directa y concreta con el comportamiento gráfico de la función en el entorno del punto a, lo cual es crucial para comenzar a formar una comprensión del concepto de límite (Cottrill et al., 1996).
- Proceso: es una transformación de una acción externa a una acción interna que se caracteriza por ser una construcción cognitiva y el control que el individuo tiene sobre esta transformación. Esto implica que el individuo puede describir o reflexionar sobre todos los pasos de la transformación sin necesariamente ejecutarlos. El proceso representa una etapa más avanzada en la comprensión de un concepto matemático, después de la etapa de acción (Cottrill et al., 1996).

Para el caso de la noción de límite de funciones reales en un punto, un proceso sería donde un estudiante tiene la habilidad de comprender cómo una función se acerca a un valor determinado cuando su variable independiente se aproxima a cierto punto, sin necesidad de calcular cada paso detalladamente. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando x se aproxima a cero, la comprensión del proceso requiere reconocer que a medida que el valor de x se acerca cada vez más a cero siendo positivo, los valores de $f(x)$ crecen indefinidamente sin tener que sustituir valores continuamente para ver este efecto, por lo que podemos afirmar que una acción se interioriza cuando el estudiante puede realizar la transformación de manera interna.

Arnon et al., (2014) presentan las definiciones de unos mecanismos mentales establecidos por Dubinsky en la década del 90, que facilitan la transición entre los diferentes tipos de estructuras mentales, aquí presentamos solo aquellos mecanismos utilizados en la propuesta:

- Interiorización: Es una construcción mental que se genera cuando una o varias acciones, que inicialmente requerían instrucciones paso a paso o un control consciente, se convierte en un proceso que el estudiante puede ejecutar de manera automatizada y reflexiva. Un ejemplo sería cuando el estudiante practica varias veces un procedimiento matemático específico como el proceso de evaluar una función en algunos puntos, donde cada punto sucesivo está más cerca de un valor específico a que el punto anterior. A medida que el estudiante repite y reflexiona sobre este proceso con diferentes funciones y diferentes puntos, comienza a entender el patrón y el comportamiento de las funciones cerca del punto a sin necesidad de calcular cada vez todos los valores manualmente o visualizar gráficamente. El estudiante aprende a predecir el comportamiento y a formular el límite de la función en su mente, basándose en su comprensión del comportamiento de la tendencia de $f(x)$ a L. Puede decirse que el estudiante logra un control interno de las acciones por repetición o reflexión lo que hace posible el cambio mental y la combinación de acciones. (Cottrill et al., 1996; Arnon et al., 2014).
- Coordinación: es un mecanismo mental por el cual un estudiante aprende a manejar y relacionar múltiples procesos o estructuras cognitivas para resolver problemas

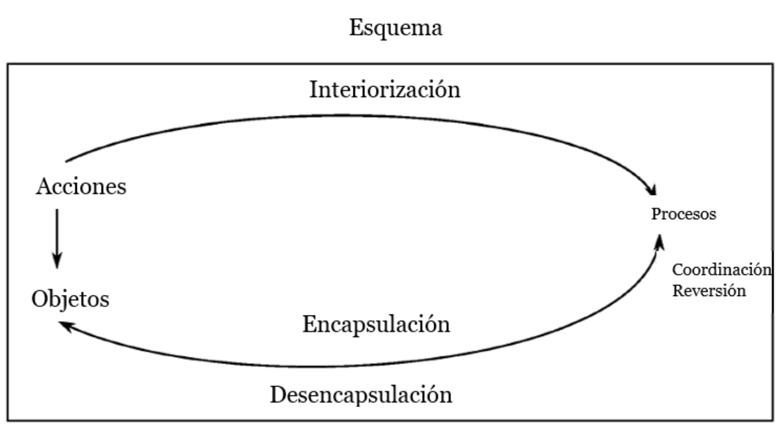
matemáticos más complejos o para entender conceptos más avanzados. Este mecanismo es esencial para integrar diferentes conocimientos y habilidades matemáticas de manera efectiva y eficiente (Arnon et al., 2014). Por ejemplo, en cuanto a la noción de límite de funciones reales en un punto, se puede suponer que el estudiante ya ha encapsulado el concepto de límite y ha interiorizado otros conceptos relacionados, como la definición formal, la continuidad y la derivabilidad. La coordinación se refiere a cómo el estudiante puede manejar y relacionar estos conceptos para analizar o resolver problemas más complejos.

En este caso, nos limitaremos a desarrollar la comprensión de procesos y acciones que permitan a los estudiantes construir una base, pero en la noción de límite, ya que, de esta manera, enfocaremos nuestras tareas y actividades en el desarrollo gradual de la comprensión, asegurando que los estudiantes puedan interiorizar los conceptos fundamentales antes de avanzar hacia niveles superiores de abstracción que, aunque importantes, no forman parte del objetivo inmediato de este trabajo.

La figura 6, describe las relaciones entre las estructuras y mecanismos mentales para que se propicie el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.

Figura 6.

Relaciones entre estructuras y mecanismos mentales.



Nota. Arnon et al., 2014, p.10.

Esto se puede describir de la siguiente manera:

> …consideramos que comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; Luego, las acciones se interiorizan para formar procesos que luego se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden desencapsular y volver a los procesos a partir de los cuales se formaron. Finalmente, las acciones, procesos y objetos se pueden organizar en esquemas. (Asiala et al. 1996, p. 9, citado por Arnon et al., 2014, p.19)

Esto refleja cómo el aprendizaje matemático es un desarrollo dinámico y acumulativo de habilidades y conocimientos. Las estructuras y mecanismos mentales antes mencionados y detallados forman el núcleo de la descomposición genética, un modelo que describe las acciones, procesos y objetos que los estudiantes necesitan construir para comprender un concepto matemático. En el proceso de aprendizaje de la noción de límite, los objetos iniciales son valores numéricos específicos o puntos en una gráfica que los estudiantes manipulan directamente para entender cómo una función se aproxima a un valor límite. A medida que los estudiantes realizan repetidamente acciones como sustituir valores cercanos a un punto o analizar gráficas, estos procesos se coordinan de manera que se produce una interiorización de la noción de límite de funciones reales en un punto.

Sin embargo, es importante aclarar que, con la propuesta didáctica presentada, no buscamos que los estudiantes lleguen a encapsular el concepto de límite como un objeto completamente abstracto, ya que este nivel de comprensión suele alcanzarse en niveles superiores. En cambio, con esta propuesta nos enfocamos en que los estudiantes desarrollen una comprensión de los procesos asociados al límite y una intuición clara sobre su significado, preparando el camino para futuras formalizaciones y encapsulaciones más avanzadas en su educación superior. Por lo que creemos que al identificar cómo los estudiantes pueden aprender y desarrollar un concepto, la descomposición genética nos proporciona una guía para el diseño de estrategias de instrucción en la enseñanza de las matemáticas.

Análisis teórico

En esta sección presentamos la definición propuesta por la teoría APOE sobre lo que es una descomposición genética, además un análisis teórico fundamentado en diversas investigaciones realizadas sobre la descomposición genética que permita descomponer los elementos clave de la noción del límite de funciones reales en un punto, para guiar a los estudiantes en el aprendizaje de este concepto matemático, preparándolos para abordar la definición formal de límite.

Descomposición genética

La descomposición genética es un componente clave dentro de la teoría APOE que estructura el aprendizaje matemático en etapas cognitivas, desde acciones concretas hasta la abstracción y generalización, es decir que se refiere al análisis detallado de los procesos mentales que un estudiante debe seguir para construir y comprender un concepto matemático, incluyendo la identificación de las acciones, procesos, objetos y esquemas que intervienen en el aprendizaje del concepto en cuestión (Arnon et al., 2014).

Creemos fundamental a este enfoque para diseñar tareas educativas que promuevan el aprendizaje de conceptos matemáticos, como la noción del límite de funciones reales en un punto, porque no solo organiza el conocimiento de manera clara y manejable, sino que también permite identificar y abordar las dificultades específicas que podrían enfrentar los estudiantes, lo que a su vez nos permitiría desarrollar estrategias pedagógicas pertinentes. Como profesores, basaremos nuestra descomposición genética principalmente en nuestra práctica, en la que notamos resultados insatisfactorios que no cumplen con nuestras expectativas actuales de mejora educativa. Es un modelo inicial que está basado en la comprensión matemática del concepto por parte de los investigadores, las experiencias como docentes, investigaciones previas sobre el pensamiento de los estudiantes acerca del concepto, perspectivas históricas sobre el desarrollo del concepto y/o un análisis de materiales textuales o instruccionales relacionados con el concepto (Arnon et al., 2014).

Es importante resaltar que la descomposición genética no explica lo que sucede en la mente de un individuo, ya que eso es incognoscible, no predice si el individuo aplicará una estructura determinada cuando se lo solicite y no ofrece un análisis teórico exclusivo de cómo se aprende la matemática, sin embargo, describe las estructuras que un estudiante necesita construir en su aprendizaje de un concepto (Arnon et al., 2014).

En este contexto, examinaremos tres descomposiciones genéticas desarrolladas por: Cottrill et al., (1996), Arias (2019) y Hernández et al., (2023) en cuanto al concepto de límite. Esta descripción no solo nos permite comprender mejor las estructuras y mecanismos mentales necesarios para aprender el concepto matemático de estudio mencionado, sino que también nos proporciona herramientas para elaborar nuestra propia descomposición genética preliminar. Al fundamentar nuestra propuesta en trabajos previamente realizados, garantizaremos que esté respaldada por investigaciones y experiencias previas, lo que enriquecerá y fortalecerá nuestra aproximación didáctica.

Descomposición genética de concepto de límite de Cottrill et al. (1996)

Cottrill et al. (1996) presentan una descomposición genética preliminar del concepto de límite, basándose en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) y en un análisis detallado de observaciones de estudiantes. El objetivo de su trabajo fue reinterpretar puntos de la literatura existente y desarrollar una descripción detallada de cómo los estudiantes pueden aprender el concepto de límite. Pero observaron que la descomposición genética preliminar no capturaba completamente cómo los estudiantes realmente progresaban en su comprensión del concepto de límite.

Las entrevistas con estudiantes revelaron dificultades específicas y concepciones erróneas que la descomposición preliminar no había anticipado, así que con la refinación buscaron abordar estas dificultades de manera directa. Con la descomposición genética refinada buscaron detallar y precisar cada etapa del aprendizaje lo que permitió una transición clara entre los distintos niveles de abstracción y comprensión del concepto de límite, además enfatizaron en la coordinación de los esquemas de aproximación en el dominio y el rango, un aspecto importante para la comprensión del límite. Esto ayudó a los estudiantes a ver la conexión integral entre las acciones en el dominio y sus efectos en el rango, asimismo suponen los autores que la descomposición refinada prepara mejor a los estudiantes para la definición formal epsilon-delta, un componente esencial en el cálculo. Al hacer que los estudiantes trabajen de manera más sistemática con intervalos y desigualdades, se facilita la transición a la comprensión y aplicación de la definición formal.

Tabla 4.
Descomposición genética refinada basada en las dificultades y entendimientos observados en los estudiantes.

Etapa	Descripción
1. Evaluación de la función $\boldsymbol{f}$ en un punto cercano a $\boldsymbol{a}$. Esta etapa inicial refleja una concepción muy estática del límite, similar a simplemente evaluar f en a.	Acción de evaluar la función f en un único punto x cercano a a.
2. Evaluación de la función $\boldsymbol{f}$ en varios puntos cercanos a $\boldsymbol{a}$.	Acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada punto sucesivo más cerca de a que lo que estaba el punto anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado	
$(\boldsymbol{a})$ Interiorización del proceso en el dominio.	Interiorizar la acción del paso 2 para construir un proceso en el que x se acerca a a.
$(\boldsymbol{b})$ Construcción del proceso en el rango.	Construir un proceso de rango en el que $f(x)$ se aproxima a L.
$(\boldsymbol{c})$ Coordinación de los procesos del dominio y rango.	Coordinar los procesos del dominio (a) donde $x \to a$, del rango (b), donde $f(x) \to L$, utilizando la función f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x acercándose a a para obtener el proceso de $f(x)$ acercándose a L.
4. Encapsulación del esquema coordinado como un objeto.	Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, de límites de combinaciones de funciones. De esta forma, el esquema de 3 se encapsula para convertirse en un objeto.
5. Reconstrucción del esquema en términos de intervalos y desigualdades.	Reconstruir los procesos de 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se hace introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de la aproximación, en símbolos, $0 < \lvert x-a \rvert < \delta$ y $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$.
6. Aplicación de un esquema de cuantificación	Aplicar un esquema de cuantificación para conectar el proceso reconstruido del paso anterior para obtener la definición formal de límite.
7. Aplicación de la concepción completa del épsilon-delta a situaciones específicas	Utilizar la concepción completa $\varepsilon - \delta$, en situaciones específicas. De esta manera se consolida la comprensión formal del límite y su aplicación en diversas situaciones matemáticas.

Nota. Construcción propia con base en la descomposición genética elaborada por Cottrill et al. (1996).

Los resultados del estudio de Cottrill et al. (1996) sobre la descomposición genética refinada proporcionan una mejor comprensión del límite en los estudiantes a través de pasos basados en observaciones empíricas, que se enfocan en dificultades específicas y facilitan el aprendizaje de la definición formal épsilon-delta. Esta descripción del modelo permite la coordinación de procesos tanto en el dominio como en el rango, corrigiendo ideas erróneas, logrando así un aprendizaje del concepto.

Descomposición genética del límite de una función de Arias (2019)

La descomposición genética propuesta por Arias (2019), basada en el análisis de Cottrill et al. (1996), Swinyard y Larsen (2012) y de Pons (2014), se presenta de manera detallada y estructurada para comprender el concepto de límite, la que organiza en dos concepciones principales: la concepción dinámica y la concepción métrica, cada una con sus propios elementos y procesos cognitivos, se puede observar en la tabla 5.

Tabla 5.

Descomposición genética del límite de una función.

Etapa	Descripción
1. Idea de función	Acción de evaluar una función f para determinados valores de x.
	Esquema de la concepción dinámica
2. Aproximación	Proceso dado por la interiorización de la acción de evaluar: ▪ x cuando se aproxima al número a ▪ $f(x)$ cuando se aproxima a L.
3. Coordinación	Esquema formado por la coordinación de los procesos: cuando x se aproxima a a, sus imágenes $f(x)$ se aproximan a L.
4. Encapsulación	Encapsulación del proceso de coordinación: manifestación consciente del Límite L de la función $f(x)$ en el punto a, escribiendo $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
5. Des-encapsulación	Reflexión sobre las acciones que al actuar sobre el proceso originaron el objeto.
	Esquema de la Concepción métrica:
6. Aproximación	Estimar las distancias $\lvert x - a \rvert$ y $\lvert f(x) - L \rvert$.
7. Coordinación	Generalización del esquema de coordinación de los procesos de aproximación de la concepción dinámica, en términos de desigualdades.
8. Encapsulación del proceso de coordinación	Formalización como una manifestación consciente de la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a, escribiendo $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
9. Desencapsulación	Establece la relación ε y δ para determinar que una función tiene límite.

Nota. Construcción propia con base en la descomposición genética elaborada por Arias (2019).

Al analizar esta descomposición genética, podemos entender que la propuesta de Arias (2019) no solo describe cómo los estudiantes pueden progresar desde una comprensión intuitiva hasta una formal del límite, sino que también ofrece una estructura clara para identificar y desarrollar los procesos cognitivos necesarios en cada etapa del aprendizaje. Aunque nuestro trabajo se centrará en la noción del límite de funciones reales en un punto, Arias (2019) nos proporciona una dirección para diseñar nuestra propia descomposición genética preliminar, asegurando que nuestra propuesta esté bien fundamentada y apoyada por investigaciones previas.

Descomposición genética de la concepción dinámica del límite de una función de Hernández et al., (2023)

La descomposición genética propuesta por Hernández et al., (2023) se basa en la de Cottrill et al. (1996), pero introduce refinamientos para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función en su concepción dinámica, incorporando los registros semióticos de representación.

Tabla 6.
Descomposición genética refinada con las mejoras implementadas.

Etapa	Descripción
Estructuras previas	- Un Esquema de número real que incluya las nociones de los diferentes conjuntos de números, en particular del número racional (en su representación numérica fraccionaria y decimal) y las propiedades de orden en los números reales. - Una concepción de Proceso del concepto de función real en sus diferentes representaciones semióticas, lo cual significa que el estudiante logra identificar la imagen de un elemento arbitrario del dominio e imagina el rango de la función en cualquier registro semiótico. - Una concepción de infinito como Proceso (Dubinsky et al., 2005).
Acciones	Dado un elemento cualquiera del dominio, cercano al valor $x = a$, el estudiante realiza la acción de asociar este valor con su imagen bajo la función f en cada uno de los registros semióticos de la función. En el registro numérico, desempeñará las acciones de analizar una tabla en la que se presenten parejas ordenadas de números conformada por dos sucesiones, una en el dominio de la función y otra de las respectivas imágenes. En el algebraico, realizará acciones de sustitución de elementos del dominio de la función cada vez más cercanos a $x = a$ en una expresión matemática, para determinar su imagen correspondiente. En el registro gráfico, hará la acción de ubicar las imágenes en el eje y de distintos valores en el eje x pertenecientes al dominio de la función cada vez más cercanos al valor $x = a$. En el registro verbal, llevará a cabo la acción de describir cada una de las acciones anteriores.
Dos estructuras de proceso, una en el dominio y otra en el rango	Al reflexionar sobre las acciones de asociación de un valor en el dominio, cercano a $x = a$ con su respectiva imagen, por la izquierda y por la derecha de $x = a$, utilizando una diversidad de funciones representadas en cada uno de los distintos registros de representación, y reflexionar, en cada ocasión, acerca de la proximidad, o no, de los valores en el dominio a $x = a$ y de los valores en el rango a un cierto valor $y = L$, cuando esto sea posible, el estudiante interioriza dichas acciones en dos procesos de aproximación infinita, uno en el dominio y otro en el rango, en cada uno de los registros de representación antes mencionados.

Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real	Cuando el estudiante coordina los dos procesos descritos en la etapa anterior, utilizando distintas funciones en cada uno de los registros de representación, en las que el límite exista o no, construye un nuevo proceso mediante el cual será capaz de apreciar y representar de diversas maneras las aproximaciones conjuntas; de x acercándose al valor a y de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto valor L. Cuando el estudiante reflexiona sobre el resultado de los procesos anteriores en cada uno de los registros de representación y los coordina pro-pares, construye nuevos procesos (numérico-gráfico, numérico-verbal, numérico-algebraico, gráfico-verbal, gráfico-simbólico, algebraico-verbal). Estos últimos procesos se coordinan nuevamente entre ellos. Ese proceso coordinado puede considerarse como proceso de la concepción dinámica del límite, el cual se pone en evidencia cuando el estudiante puede concluir que, cuando x se aproxima infinitamente a $x = a$, la función se aproxima al valor $f(x) = L$, independientemente de las representaciones involucradas.
Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite	Siempre que el límite L de una función f exista en $x = a$, el estudiante podrá dar evidencia de ver el proceso coordinado de aproximación infinita como terminado y manifestar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en cualquiera de los registros semióticos en los que se presente esta situación. Cuando el límite de la función no exista porque los límites laterales no coinciden, el estudiante será capaz de determinar los límites laterales y argumentar que el límite de la función no existe porque ambos límites, como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes.
Objeto de la concepción dinámica del límite	A través de acciones sobre el límite dinámico evidenciando la totalidad del infinito, el alumno encapsula la concepción dinámica del límite en el objeto y es capaz de realizar nuevas acciones sobre él como, por ejemplo, aplicar sus propiedades.

Nota. Construcción propia con base en la descomposición genética elaborada por Hernández et al. (2023).

Esta propuesta incorpora varios registros semióticos y destaca la importancia de la coordinación entre ellos para la comprensión del límite. Las autoras buscan proporcionar una comprensión que abarca todas sus dimensiones y aspectos, en lugar de centrarse solo en componentes aislados del concepto de límite y facilitar el aprendizaje a través de actividades didácticas dirigidas.

Hernández et al., (2023) para la descomposición genética del límite de una función, sugieren incorporar conocimientos previos sobre números reales, funciones y la concepción del infinito. Proponen evaluar la función para valores cercanos a un punto a utilizando registros semióticos diversos (numérico, algebraico o simbólico, gráfico y verbal) y coordinar la aproximación de x a a y $f(x)$ a L en todos estos registros, además incorporan la totalidad del infinito para ayudar a los estudiantes a visualizar el límite como un concepto completo, y encapsula esta comprensión como un objeto matemático concreto, específicamente con su concepción dinámica. Esta refinación basada en investigaciones previas facilita el diseño de tareas que promuevan el aprendizaje del límite, mejorando la coordinación entre las representaciones y fortaleciendo la comprensión del concepto.

Para nuestro trabajo, nos centraremos en una descomposición genética preliminar elaborada a partir de las descomposiciones genéticas mencionadas previamente, la cual consiste en una descripción de las acciones que el estudiante necesita realizar sobre objetos mentales existentes, incluyendo explicaciones de cómo estas acciones se interiorizan en procesos (Roa-Fuentes y Oktac, 2010). Este componente servirá como una guía para estructurar las actividades de enseñanza, permitiendo identificar qué acciones y procesos deben ser promovidos para que los estudiantes avancen en su comprensión (Arnon et al., 2014).

Este elemento nos ayudará a proponer una guía para los estudiantes en la realización de tareas secuenciadas que faciliten la construcción de estructuras mentales sobre el comportamiento de las funciones reales en las proximidades de un punto específico mediante los mecanismos mentales mencionados anteriormente (Hernández et al., 2023). Con esto, buscamos asegurar que los estudiantes no solo aprendan el tema en cuestión, sino que también asignen un significado y desarrollen un discurso descriptivo sobre el objeto de estudio.

Ciclo de enseñanza ACE

El Ciclo de Enseñanza ACE, basado en la teoría APOE presentada por Arnon et al. (2014), nos ofrece un enfoque metodológico para el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Este ciclo se estructura en torno a tres componentes clave: *actividades, discusión en clase, y ejercicios,* los cuales están diseñados para guiar a los estudiantes en la construcción de estructuras mentales y para estructurar las *acciones, procesos y coordinaciones* que proponemos en la descomposición genética, con el objetivo de facilitar el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.

Partimos desde la idea de aproximación, que buscamos introducir a través del método de exhaución, y avanzamos hacia la idea del infinito, que se explora mediante el triángulo de Sierpinski, y con el ciclo de enseñanza ACE conectaremos progresivamente con el análisis de funciones, para establecer la noción de límite de funciones reales en un punto. A continuación, presentamos una descripción detallada de cada uno de estos componentes, evidenciando cómo se integran en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

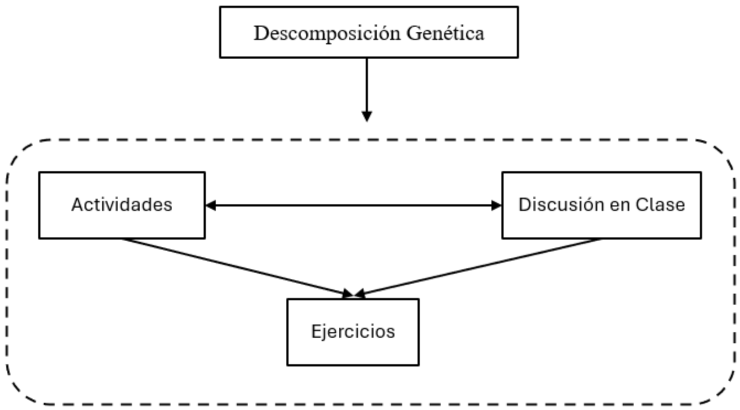
El primer componente del ciclo, *actividades,* es fundamental para iniciar el proceso de construcción conceptual. En esta etapa, se pretende que los estudiantes trabajen en colaboración, socializando con sus compañeros y participando en tareas diseñadas para facilitar las construcciones mentales que la descomposición genética describe. Estas actividades están concebidas para estimular la socialización, discusión y la reflexión de manera a lograr una abstracción reflexiva (Arnon et al., 2014). El objetivo no es solo llegar a una respuesta correcta, sino comprender el proceso subyacente, generar una discrepancia cognitiva que impulse el pensamiento reflexivo (Aguilar y Oktaç, 2004; citado por Trigueros y Oktaç en 2019), lo que permite a los estudiantes construir y consolidar conocimientos más avanzados.

A continuación, el ciclo avanza hacia la *discusión en clase*, un componente esencial para profundizar en la comprensión de los conceptos trabajados previamente. Durante esta fase, como profesores podemos tomar un rol activo en guiar a los estudiantes a través de discusiones dirigidas, ya sea en el marco de la clase general o en pequeños grupos. Estas discusiones se centran en el uso de diversos instrumentos didácticos.

El propósito de esta etapa es doble: por un lado, proporcionar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado durante las *actividades*; por otro, permite al instructor clarificar conceptos, ofrecer definiciones precisas y conectar las diversas ideas que los estudiantes han estado explorando (Arnon et al., 2014). En este punto, buscaremos establecer una conexión entre la noción de aproximación, introducida a través del método de exhaución, y la idea de infinito propuesta por el triángulo de Sierpinski, con el análisis de funciones para comprender la noción del límite de funciones reales en un punto.

Finalmente, el ciclo culmina con los *ejercicios*, diseñados para consolidar y aplicar el conocimiento adquirido. Estos ejercicios, que se presentan como problemas estándar, tienen la función de reforzar las actividades y discusiones previas, ayudando a los estudiantes a interiorizar las construcciones mentales que han construido a lo largo del ciclo. Además, esta etapa les ofrece la oportunidad de aplicar lo aprendido a nuevas situaciones, promoviendo la transferencia de conocimientos a contextos matemáticos relacionados (Arnon et al., 2014).

Figura 7.
Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la descomposición genética.



Nota. Arnon et al., 2014, p. 58.

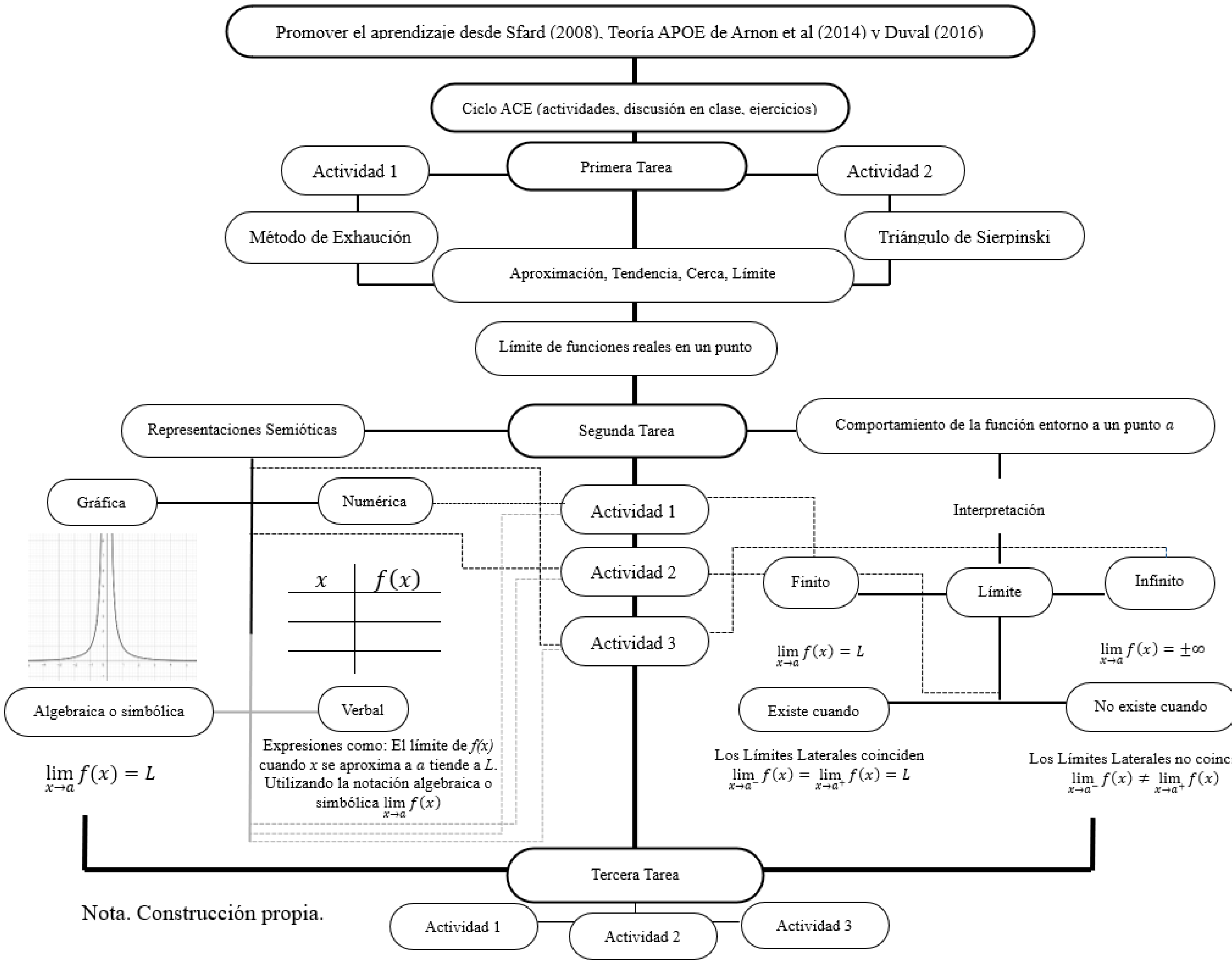
La Figura 7 ilustra la relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la descomposición genética dentro del marco de la teoría APOE. La descomposición genética, sirve como fundamento teórico para el desarrollo de las actividades pedagógicas y a partir de esta base, se estructuran tres elementos principales: actividades, discusión en clase y ejercicios, previamente descritos. La flecha que conecta la descomposición genética con el cuadro punteado sugiere que esta influye en cada componente del ciclo de enseñanza ACE. La flecha bidireccional entre actividades y discusión en clase refleja que, por un lado, las actividades son el punto central de la discusión en clase, y por otro, que la discusión permite a los estudiantes reflexionar sobre las actividades realizadas.

Las flechas que parten desde actividades y discusión en clase hacia los ejercicios subrayan que el propósito principal de estos es fortalecer las construcciones mentales que los estudiantes han desarrollado o comenzado a construir durante el trabajo en actividades y discusiones en clase (Arnon et al., 2014).

Su estructura nos proporciona una guía para diseñar nuestra propuesta de secuencia de tareas que promuevan el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto. Además, dejamos abierta la posibilidad de realizar estudios futuros que permitan ajustar y mejorar tanto la descomposición genética como la secuencia de tareas, en función de los resultados obtenidos. Conectar el objeto matemático con las teorías seleccionadas para promover el aprendizaje es un desafío. Por ello, elaboramos una red que relaciona los aportes de Sfard (2008), la teoría APOE en Arnon et al., (2014), y los planteamientos de Duval (2016), fundamentos clave para el diseño de nuestras tareas. Presentamos esta red, de construcción propia, como herramienta conceptual para guiar el aprendizaje en nuestra propuesta.

Figura 8.

Red conceptual de teorías para promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.



Nota. Construcción propia.

La red conceptual presentada organiza la estructura de nuestro diseño de una secuencia de tareas basado en promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto, integrando las teorías de Sfard (2008), Arnon et al., (2014) y Duval (2016), además de seguir el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios) propuesto por la Teoría APOE. En la primera tarea, se trabajan dos actividades principales: una utilizando el método de exhaución y otra con el triángulo de Sierpinski, lo que permite a los estudiantes explorar las ideas de aproximación, tendencia, cerca y límite. Ambas actividades se enfocan en construir las estructuras mentales necesarias para comprender cómo una función se comporta cuando se aproxima a un punto específico además de ir modificando o construyendo un discurso matemático en el contexto de las tareas.

La segunda tarea se centra en la noción de límite de funciones reales en un punto, integrando y coordinando las representaciones semióticas (gráfica, numérica, algebraica o simbólica y verbal). En esta etapa, se presentan tres actividades que permiten a los estudiantes interpretar el comportamiento de una función en torno a un punto a, ya sea que el límite sea finito, infinito, o que no exista debido a la divergencia de los límites laterales.

Finalmente, la tercera tarea refuerza estas ideas, permitiendo a los estudiantes consolidar las estructuras mentales desarrolladas mediante actividades adicionales que cumplen las veces de ejercicios del ciclo ACE. La red destaca cómo la teoría, las actividades y las representaciones semióticas se integran de manera coherente, promoviendo el aprendizaje.

Capítulo 3. Marco metodológico

En este capítulo, se detallan el tipo de investigación, la metodología, las formas en que se operacionalizarán los conceptos y teorías descritos en el marco didáctico, y cómo debe darse el aprendizaje con respecto a la noción de límite de funciones reales en un punto. Además, aplicamos la teoría APOE según Arnon et al., (2014) como una herramienta para estructurar nuestra propuesta de diseño de una secuencia de tareas, utilizando sus componentes, tales como la construcción de una descomposición genética propia y la aplicación del Ciclo ACE. Todo ello será aplicado en el diseño de una secuencia de tareas didácticas con el propósito de promover el aprendizaje de la noción de límite. Aquí presentamos cómo estos delineamientos se transforman en estrategias concretas de tareas, orientando así nuestra propuesta.

Metodología y tipo de investigación

La metodología empleada en este trabajo sigue el ciclo ACE propuesto por la teoría APOE de Arnon et al., (2014), que consta de tres fases: análisis teórico, diseño y aplicación de un plan de instrucción, y recolección y análisis de datos. Sin embargo, en este estudio nos hemos centrado únicamente en la fase de análisis teórico y el diseño, sin abordar la implementación, recolección de datos ni el análisis. Este enfoque es de naturaleza exploratoria, cualitativa y de profundización, con el objetivo de verificar si las tareas diseñadas, basadas en la descomposición genética preliminar, están alineadas con las estructuras mentales necesarias para la comprensión del concepto estudiado.

Manifestación del aprendizaje desde los registros de representación semiótica

Duval (2016) enfatiza la importancia de los registros de representación semiótica en el aprendizaje matemático. Él expresa que el conocimiento matemático se desarrolla a través de la conversión y coordinación de diferentes registros de representación, como lo son las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas o simbólicas como así también la verbal, por lo que para la noción de límite de funciones reales en un punto los estudiantes deberían:

1. Interpretar y convertir representaciones: deben ser capaces de interpretar una función y su límite a través de diferentes registros de representación. Por ejemplo, deben poder pasar de la representación gráfica de una función a su representación algebraica o simbólica como la de pasar de la representación numérica a la gráfica y viceversa.
2. Coordinar registros: La coordinación de registros implica reconocer y articular coherentemente las representaciones gráfica, numérica, algebraica o simbólica como la verbal, para interpretar el comportamiento de una función cerca de un punto. Los estudiantes deberían identificar cómo el acercamiento a un límite se refleja algebraica o simbólica y numéricamente, comprendiendo cómo estas representaciones se complementan para ofrecer una visión completa de la noción del límite.

En este sentido, para la manifestación del aprendizaje, los estudiantes deberían demostrar que pueden identificar y explicar la noción del límite de una función real en un punto a través de sus diferentes representaciones, lo que implica:

- Describir el comportamiento de una función gráficamente: Los estudiantes deberían ser capaces de señalar y describir cómo una función se aproxima a un límite en su representación gráfica.
- Expresar algebraica o simbólicamente: Los estudiantes deberían poder formular el límite de una función utilizando notación algebraica o simbólica y explicar cómo esta representación se relaciona con el registro gráfico y numérico.

- Verificar numéricamente: A través de tablas de valores, los estudiantes deberían mostrar cómo los valores de la función se aproximan al límite cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado.

Manifestación del aprendizaje desde la modificación del discurso

Sfard (2008) propone que el aprendizaje de las matemáticas implica una transición en el discurso, sugiriendo que los estudiantes deben adoptar y transformar sus formas de comunicación y pensamiento sobre los conceptos matemáticos. Al aplicar este enfoque al aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto, nos centraremos en cómo los estudiantes deberían modificar su discurso matemático para comprender y expresar adecuadamente este concepto. Debemos reconocer que, incluso antes de cualquier actividad formal en clase, los estudiantes ya poseen una idea sobre términos como aproximación, tendencia, límite, cerca, vecindad y entorno, derivados de su experiencia cotidiana (Cornu, 1981). A lo largo de su proceso de aprendizaje, estos términos se transformarán gradualmente, adaptándose a las formas específicas del discurso matemático, tal como plantea Sfard (2008). Este proceso implicaría varias etapas clave:

1. Adopción de lenguaje matemático

- Antes de la modificación, los estudiantes podrían usar un lenguaje impreciso, describiendo el límite como el número al que se acerca la función, y con relación a nuestra experiencia en aula, podrían confundir como un caso más de factorización en el que deben reducir la función que se les propone y valorarlo. El lenguaje matemático de la noción del límite podría generar conflicto con sus ideas previas, lo que generaría una mezcla y adaptación entre las intuiciones iniciales y el modelo matemático formal (Cornu, 1981).

- Después de la modificación: deberían utilizar el lenguaje correspondiente al objeto matemático, comprendiendo y empleando términos como aproximación, tendencia, límite, cerca, y entorno. Deberían formular declaraciones como el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a tiende a L, utilizando la notación algebraica o simbólica $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

2. Explicación o Justificación

- Antes de la modificación, podrían expresar justificaciones basadas en ejemplos específicos sin una comprensión general del concepto. Desde nuestra experiencia en aula, hemos reconocido casos en los que se reduce el significado del objeto matemático en cuestión, por ejemplo, cuando los estudiantes estén tratando de explicar por qué el límite de la función $f(x) = 2x$, cuando x se aproxima a 3 es igual a 6.

Podrían expresar:

Para saber el límite de $2x$ *cuando* x *se acerca a 3. Si* $x = 2.9$*, entonces* $f(x) = 2 \cdot 2.9 = 5.8$ *y si* $x = 3.1$*, entonces* $f(x) = 2 \cdot 3.1 = 6.2$*, "como estos valores están cerca de 6, el límite debe ser 6.*

Analizando este discurso, identificamos varios problemas comunes cuando no se comprende la noción del límite de funciones reales en un punto, como basarse en pocos ejemplos numéricos sin considerar el comportamiento general de la función $f(x)$ en el entorno del punto 3, además de que la conclusión de que el límite es 6 se basa en valores que están cerca de 6, sin entender que el límite se refiere al valor al que la función tiende cuando x se aproxima a 3. No se menciona por qué los valores de $f(x)$ tienden a 6 en términos de la tendencia general de la función. Por lo que después de la modificación, para una comprensión adecuada de la noción de límite, el estudiante debería decir algo como:

Para entender por qué el límite de $2x$ *cuando* x *tiende a 3 es 6, consideremos cómo se comporta la función* $2x$ *a medida que* x *se acerca a 3. Cuando* x *se acerca a 3, los valores de*

$2x$ se acercan a $2 \cdot 3 = 6$. No importa si x es un poco menor o un poco mayor que 3; mientras más cerca esté x de 3, más cerca estará $2x$ de 6. Por lo tanto, podemos decir que $\lim_{x \to 3} 2x = 6$ porque los valores de $2x$ se aproximan a 6 cuando x se acerca a 3.

Deberán justificar la existencia y la noción del límite utilizando razonamientos matemáticos. Esto implica explicar que el límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, significa que, a medida que x se aproxima a a, los valores de $f(x)$ tienden a L.

Establecemos así la manifestación del aprendizaje del objeto matemático de estudio, por el uso del lenguaje matemático; utilizando términos y notaciones matemáticas correspondientes a la noción de límite de funciones reales; formulando y entendiendo declaraciones matemáticas sobre límites sin ambigüedades.

Creemos que la manifestación del aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto desde diferentes perspectivas es pertinente y complementaria para diseñar una secuencia de tareas que sea efectiva. Por cuanto Duval (2016) destaca la importancia de la interpretación y la conversión entre diferentes registros de representación semiótica (gráfica, numérica y algebraica o simbólica como también la verbal), lo cual facilita que los estudiantes comprendan y articulen la noción de límite desde sus diferentes registros, y por cuanto Sfard (2008) enfatiza la modificación del discurso, promoviendo una transición hacia un lenguaje matemático alejando a los estudiantes de justificaciones simplistas basadas en ejemplos específicos, creemos que ambas perspectivas en el diseño de tareas permiten abordar tanto la comprensión conceptual como la habilidad para comunicar y justificar la noción del límite de funciones reales en un punto.

Descomposición genética de la noción de límite de funciones reales en un punto

En esta sección, presentamos nuestra propuesta de descomposición genética, la cual se basa en las descomposiciones genéticas analizadas previamente, en las sugerencias didácticas dentro de la investigación de Hernández et al., (2023), y en nuestra experiencia como profesores en ejercicio además de las investigaciones sobre el objeto matemático, tal y como lo sugiere Arnon et al., (2014). Describimos los requisitos que se debe tener para abordar el concepto matemático y luego definimos la descomposición genética preliminar iniciando con la idea de aproximación utilizando la tarea del método de exhaución, en la cual los estudiantes jugarán con la variación de los lados del polígono inscrito en una circunferencia para comprender que, aunque el área del polígono se acerca al área de la circunferencia, solo se aproximará cuanto queramos pero que nunca será igual. Seguidamente, utilizaremos el Triángulo de Sierpinski para aproximar a los estudiantes a la idea de infinito, mediante la manipulación de las subdivisiones y la observación del aumento indefinido del número de triángulos, los estudiantes podrán interiorizar cómo el concepto de infinito se refleja en estructuras geométricas, coordinando estas ideas con la noción de límite, mientras reconocen que el área total se aproxima a un valor finito a pesar de la repetición infinita.

Asociaremos esta idea de aproximación adquirida con el método de exhaución y la idea de infinito con el triángulo de Sierpinski a funciones reales. Además, guiaremos a los estudiantes a concretar la noción de límite de funciones reales en un punto mediante el uso del lenguaje matemático de manera fluida en diferentes contextos, mostrando la capacidad de trasladar su discurso matemático a nuevas situaciones (Sfard, 2008). Apostamos por esta estrategia, siguiendo las sugerencias de Hernández et al., (2023), ya que creemos que nos permitirá desarrollar paso a paso las acciones y procesos, y cómo estos se coordinan e interiorizan en la mente de los estudiantes de manera a promover el aprendizaje del objeto matemático en estudio.

Requisitos y descomposición genética preliminar

En primer lugar, es esencial definir los conocimientos previos que los estudiantes deben tener para abordar la noción de límite de funciones reales en un punto. Según Dubinsky et al. (2005, citado por Hernández et al., 2023), las estructuras mentales necesarias son cruciales porque permiten a los estudiantes interiorizar, coordinar, encapsular, generalizar y revertir conceptos matemáticos, lo que facilita el aprendizaje del límite de funciones reales en un punto.

> Un esquema de número real que incluya las nociones de los diferentes conjuntos de números, en particular del número racional (en su representación numérica fraccionaria y decimal) y las propiedades de orden en los números reales; una concepción de proceso del concepto de función real en sus diferentes representaciones semióticas, lo cual significa que el estudiante logra identificar la imagen de un elemento arbitrario del dominio e imagina el rango de la función en cualquier registro semiótico y una concepción de infinito como proceso. (Dubinsky et al., 2005, citado por Hernández et al., 2023, p. 130)

Alineando a lo descrito, la estructura mental previa debe incluir el conocimiento de las propiedades de diferentes tipos de funciones, la habilidad para realizar operaciones con ellas y la capacidad de construir sus gráficas, así como la habilidad desarrollada de una concepción de objeto al describir el comportamiento de una función alrededor de un punto y una concepción de proceso respecto al concepto de sucesiones.

Descomposición genética preliminar

En esta sección describimos las estructuras mentales que los estudiantes deberían construir para adquirir la idea de aproximación, infinito y términos como tendencia, límite, y cerca, utilizando el método de exhaución con el que buscamos que se logre un proceso al momento de manipular la variación de los lados de un polígono inscrito en una circunferencia de radio r para comprender que, aunque el área del polígono se acerque cada vez más al área de la circunferencia, solo se aproximará tanto como deseemos, llegará a un área suficientemente cerca del área real de la circunferencia pero nunca será exactamente igual. Además, emplearemos el Triángulo de Sierpinski para acercar a los estudiantes a la idea de infinito, que a través de la subdivisión repetida de los triángulos en esta figura fractal, los estudiantes observarán cómo el número de triángulos aumenta indefinidamente mientras el área total se reduce, permitiéndoles visualizar la tendencia hacia un valor límite. Este procedimiento los ayudará a coordinar las ideas de infinito y aproximación, al tiempo que comprenden cómo un proceso repetitivo puede acercarse infinitamente a un valor sin alcanzarlo completamente.

Realizaremos una configuración en un software como GeoGebra u otro similar para que los estudiantes puedan enfocarse en visualizar y analizar la variación de la cantidad de lados de los polígonos inscritos en la circunferencia, y luego compararlos con el área real del círculo. Con estas acciones, pretendemos propiciar la comprensión de la idea de aproximación, tendencia, límite, cerca.

Seguidamente, nos enfocaremos en asociar la idea de aproximación e infinito, utilizando términos como tendencia, límite, cerca, con el comportamiento de las funciones en el entorno de un punto específico, con el fin de alcanzar la noción de límite de funciones reales en un punto. La transición desde esta idea de aproximación e infinito hacia el análisis de funciones para comprender la noción de límite no será un proceso de construcción espontánea por parte de los estudiantes; requerirá de nuestra intervención como profesores. Aquí, detallamos las estructuras mentales que los estudiantes deberían construir para coordinar el objeto matemático (noción de límite de funciones reales en un punto) en sus diversas representaciones semióticas (numérica, gráfica y algebraica o simbólica, así como la verbal). Además, es importante destacar que esta descomposición genética se basa en las descomposiciones genéticas previamente analizadas, pero se diferencia en que no abordaremos la definición formal del límite, ya que nos centraremos exclusivamente en la noción, lo que marca una clara distinción con respecto a las otras descomposiciones.

1. *Acción* aumentar gradualmente el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia, observando cómo se aproxima al contorno de la circunferencia.

2. *Acción* de calcular el área de la circunferencia de radio r utilizando la ecuación $Á = \pi \cdot r^2$.

3. *Proceso* de comparar las áreas de los polígonos inscritos, aumentando el número de lados, con el área de la circunferencia calculada usando $Á = \pi \cdot r^2$, observando cómo estas áreas se aproximan progresivamente.

4. *Acción* de comunicar verbalmente y por escrito la idea de que el área del polígono inscrito se aproxima al área de la circunferencia, pero nunca es exactamente igual.

5. *Acción* de subdividir y manipular las partes del Triángulo de Sierpinski, observando el patrón de autosimilitud en cada nivel de división.

6. *Interiorización* de la *acción de* subdividir y manipular las partes del Triángulo de Sierpinski, para determinar que estas divisiones se repiten indefinidamente en una secuencia infinita.

7. *Acción* de describir verbalmente y por escrito la idea de infinito a partir de la observación de subdivisiones sucesivas, como en el Triángulo de Sierpinski.

8. *Acción* de sustituir valores del dominio cercanos a a en el registro algebraico o simbólico de la función real dada para determinar las imágenes correspondientes.

9. *Acción* de valorar una función real dada en su registro numérico, utilizando varios puntos del entorno de a por izquierda y por derecha, para observar la variación de las imágenes a medida que los valores del dominio se aproximan a a.

10. *Acción* de utilizar el software GeoGebra para visualizar y manipular la función real dada en su registro gráfico en diversos puntos del entorno de a.

11. *Interiorización* a *proceso de las acciones* de sustituir valores en el registro algebraico o simbólico, valorar la función en su registro numérico y representar la función gráficamente.

12. *Proceso* de comparar los registros numérico y gráfico de la función real dada para observar que ambos reflejan la tendencia de la función a un valor L cuando x se aproxima a a.

13. *Coordinar* las transformaciones de los diferentes registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto.

14. *Acción* de utilizar el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre límites.

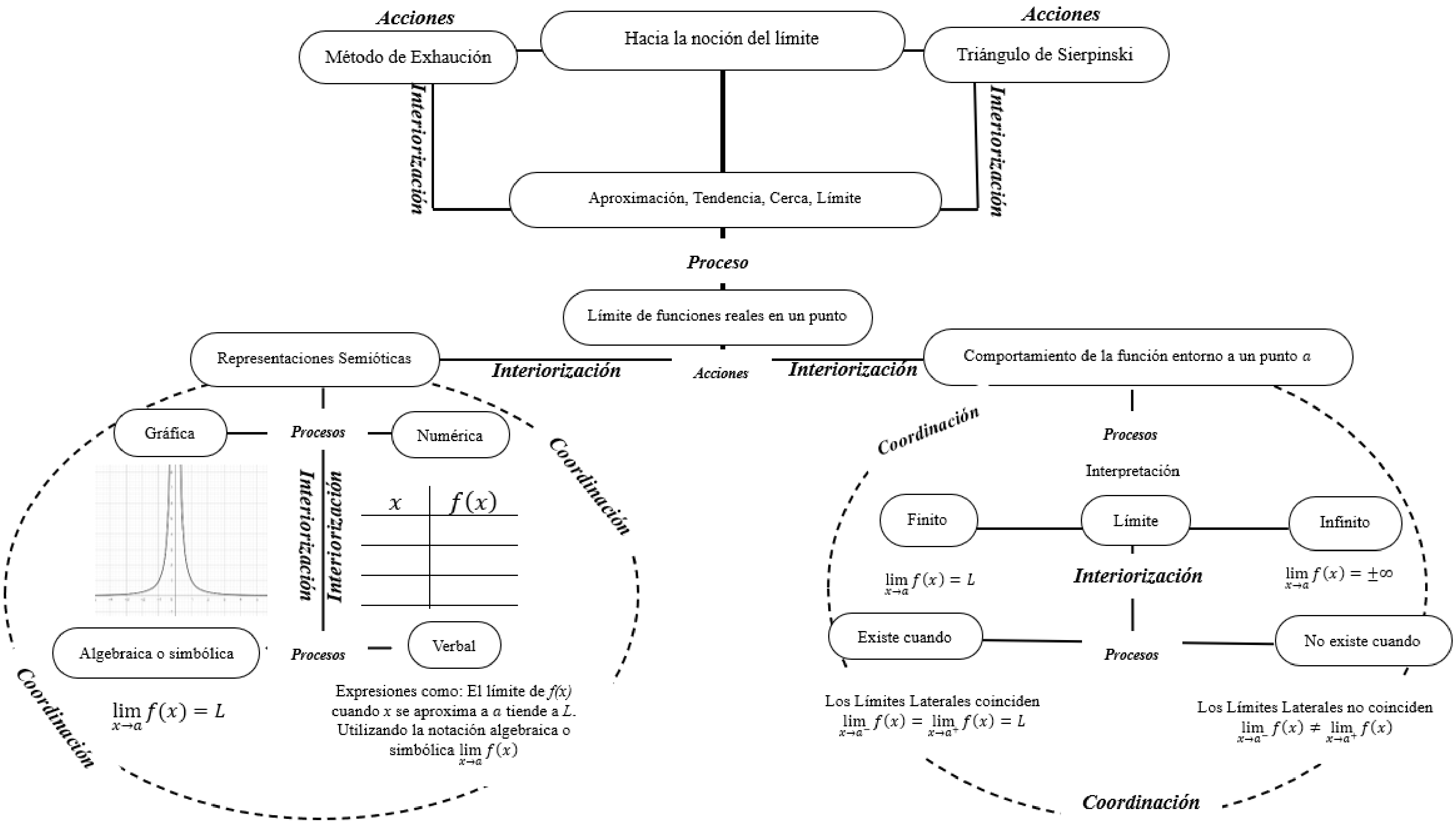
15. *Acción* de describir verbalmente y por escrito la tendencia de la función real utilizando el lenguaje matemático de la noción de límite.

Con esta descomposición genética preliminar, proponemos un recorrido que facilite la construcción de las estructuras mentales necesarias para comprender la noción de límite de manera gradual, y que en etapas posteriores puedan abordar la definición formal.

La red presentada en la figura 9, ilustra cómo se debería dar la descomposición genética preliminar para la noción de límite de funciones reales en un punto, mediante acciones iniciales como el método de exhaución y el triángulo de Sierpinski, que introducen conceptos de aproximación e infinito. A través de la interiorización de estas acciones y la coordinación de representaciones semióticas (gráfica, numérica, algebraica o simbólica y la verbal), los estudiantes desarrollan un proceso para comprender el comportamiento de una función alrededor de un punto. Finalmente, esto los lleva a interpretar el límite en términos de existencia o no existencia, según los límites laterales coincidan o no como la tendencia al infinito positivo o negativo, utilizando el lenguaje matemático adecuado.

Figura 9.

Red conceptual que conecta la descomposición genética con la noción del límite.



Nota. Construcción propia.

Diseño de tareas basadas en el ciclo de enseñanza ACE

En el marco de la teoría APOE, la relación entre la descomposición genética y el ciclo de enseñanza ACE desempeña un papel crucial en la construcción de estructuras mentales relacionados con conceptos matemáticos, debido a que esta interconexión facilita el aprendizaje, al permitir que los estudiantes progresen, de manera sistemática, a través de diferentes etapas de comprensión (Arnon et al., 2014). Nos enfocaremos en cómo esta relación se refleja en el diseño de tareas destinadas a promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto.

El diseño propuesto se basa en los tres componentes fundamentales del Ciclo de enseñanza ACE: *actividades, discusión en clase y ejercicios* que se realizarán mediante un diseño de una secuencia de tareas. Hemos elaborado cada uno para guiar a los estudiantes a un aprendizaje inicial e intuitiva de la noción del límite de funciones reales en un punto, fomentando la construcción de estructuras mentales que reflejen que se ha dado el aprendizaje. A continuación, presentamos una descripción general de la propuesta en la tabla 7, en la cual establecemos los momentos del diseño y los componentes del ciclo ACE en cada una. Seguidamente, se expone el diseño de la secuencia de tareas.

Tabla 7.

Descripción del ciclo ACE del diseño de una secuencia de tareas aplicado al aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto.

Etapas del Ciclo ACE	Secuencia	Descripción
Actividades (A)	1	Introducimos dos conceptos clave para promover el aprendizaje de la noción del límite en los estudiantes. Por un lado, utilizamos el método de exhaución para que los estudiantes comprendan la idea de aproximación, mediante la exploración de áreas de polígonos inscritos en un círculo y cómo estas se aproximan al área del círculo conforme aumenta el número de lados. Por otro lado, presentamos el Triángulo de Sierpinski como una herramienta para acercar a los estudiantes a la comprensión de la tendencia al infinito, mostrando cómo una figura geométrica puede ser

		dividida repetidamente en partes más pequeñas sin nunca alcanzar un fin, lo que ilustra el concepto del infinito de manera visual y accesible.
Entre la secuencia 1 y la 2, el profesor interviene para establecer una conexión con las ideas desarrolladas en la secuencia 1		
	2	Presentamos actividades que involucran diversas representaciones semióticas (gráfica, algebraica o simbólica, numérica y verbal) con el objetivo de que los estudiantes analicen el comportamiento de funciones reales$f(x)$ en torno a un punto a, determinando si tiene límite, si carece de él debido a la discrepancia entre los límites laterales, o si el límite tiende al infinito, al mismo tiempo que desarrollan la habilidad de coordinar las diferentes representaciones semióticas involucradas.
	3	Introducimos actividades enfocadas en el uso del lenguaje matemático en el contexto de límites, con el objetivo de que los estudiantes empleen y se apropien de términos clave como límite, aproximación, entorno y tendencia. Además, deberán formular afirmaciones como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, utilizando la notación matemática $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Con esta actividad buscamos que los estudiantes adopten unas formas propias de referirse a la noción de límites en su discurso matemático.
Discusión de Clase ($\boldsymbol{C}$)	1	La intervención del profesor orienta la reflexión no solo hacia la aproximación numérica y geométrica, sino también hacia la noción de infinito. Se establece una conexión entre estas ideas y la noción de límite: el área del círculo representa el valor al que tienden los polígonos a medida que aumenta su número de lados, mientras que el Triángulo de Sierpinski ejemplifica la tendencia al infinito a través de iteraciones y reducción de área. Asimismo, se fomenta la reflexión sobre el uso del lenguaje matemático, enfocada en la construcción de un discurso relacionado con la noción de límite.
	2	El profesor orienta la reflexión crítica sobre los casos en que una función tiene un límite, no lo tiene por discrepancia de los límites laterales, o tiende al infinito. Durante esta discusión, los estudiantes analizan y justifican sus conclusiones mediante las representaciones semióticas utilizadas (gráfica, algebraica o simbólica, numérica y verbal). El objetivo es que los estudiantes comprendan y diferencien los distintos comportamientos de las funciones en torno al límite, con apoyo del profesor para ajustar y mejorar sus razonamientos.
	3	En la discusión sobre el lenguaje matemático relacionado con la noción de límite de funciones, el profesor guía a los estudiantes para que utilicen términos como límite, aproximación, entorno y tendencia. Se fomenta que los estudiantes expresen en la representación verbal y escrita la notación matemática adecuada, como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, y que verbalicen sus razonamientos de manera que *interioricen* el uso del lenguaje matemático, reconociendo su importancia para describir con precisión los comportamientos de las funciones. El profesor proporciona retroalimentación para ajustar las expresiones de los estudiantes y asegurar que su discurso sea matemático.
Ejercicios ($\mathbf{E}$)	2	Se presentan tres categorías de funciones reales: funciones que tienen límite en un punto, funciones que no tienen límite debido a la no coincidencia de los límites laterales, y funciones cuyo límite tienden al infinito. Los estudiantes se agruparán en equipos y a cada uno se le asignarán las mismas funciones, pero la tendencia de x será distinta para cada grupo. Los estudiantes realizarán un análisis crítico de las funciones y la tendencia de x, identificarían las características de los límites en cada caso, y luego compararían sus resultados con los demás equipos. Esta fase del ciclo permite reforzar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética y que los estudiantes han comenzado a construir durante las actividades y la discusión en clase.
	3	Se proporciona ejercicios enfocados al uso del lenguaje matemático en el contexto de la noción de límite. Los estudiantes deben emplear un lenguaje matemático utilizando términos como límite, se aproxima, entorno, tiende, etc., y deben formular enunciados como “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L” utilizando el registro algebraico o

	simbólico $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Esto se alinea con Sfard (2008) quien sostiene que la manera en que los estudiantes utilizan el lenguaje matemático, como la notación y los términos matemáticos, es fundamental para su desarrollo conceptual. El dominio del lenguaje matemático permite a los estudiantes pensar y comunicar sus ideas de manera más efectiva, lo que es crucial para la construcción del conocimiento matemático.

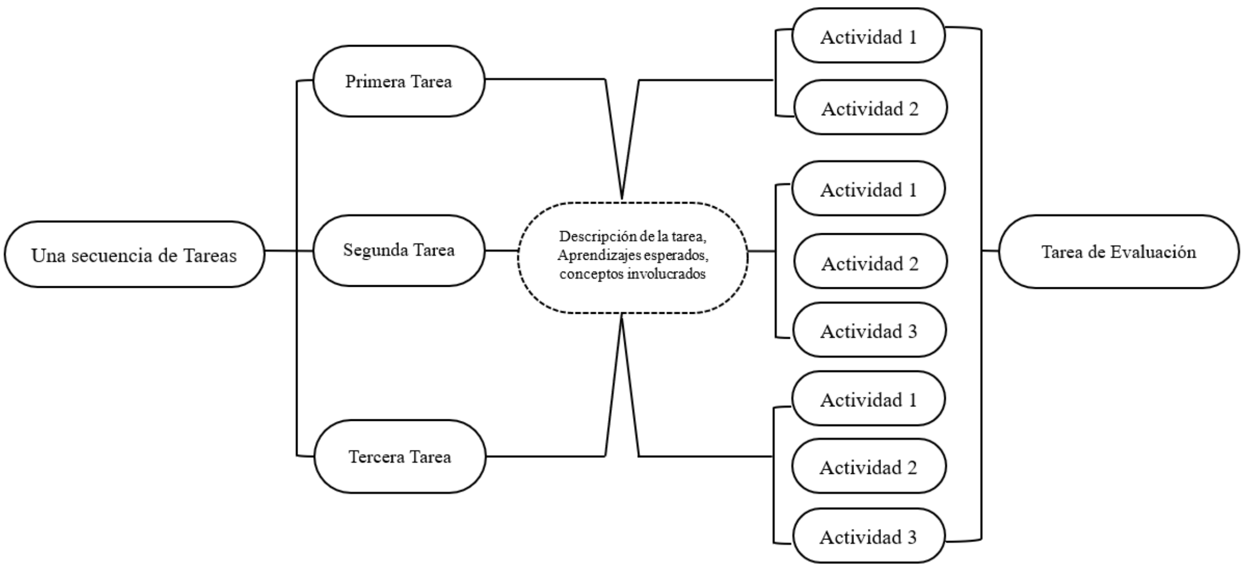
Nota. Construcción propia.

Desarrollo del diseño de una secuencia de tareas basado en el ciclo ace para promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto

Nuestro diseño de una secuencia de tareas tiene como objetivo promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto mediante la coordinación de diversos registros semióticos, dirigido a estudiantes del último año de bachillerato. La secuencia consta de tres tareas basadas en el ciclo ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios), un enfoque que permite a los estudiantes construir estructuras mentales de manera progresiva. A lo largo de estas tareas, los estudiantes exploran la noción de límite desde diferentes perspectivas, como la aproximación mediante el método de exhaución, el infinito por medio del triángulo de Sierpinski, la representación gráfica de funciones, y el análisis de la tendencia en diversos registros semióticos. Cada tarea está diseñada para fomentar la transición de acciones a procesos, y así lograr coordinaciones de la noción de límite.

Al final de la secuencia, proponemos una tarea de evaluación que integra las actividades anteriores de manera que sirva de instrumento de medición del alcance de la secuencia. Esta tarea no solo retoma los conceptos explorados previamente, sino que también busca evaluar la construcción de estructuras mentales por parte de los estudiantes a través de la interiorización y coordinación de diferentes registros semióticos, manipular funciones en un entorno gráfico y numérico, y formular descripciones precisas utilizando el lenguaje matemático. De esta manera, la tarea de evaluación no solo mide el progreso individual en términos de acciones y procesos, sino que también contribuye a fortalecer la estructura cognitiva que sustenta el objetivo. La figura 10 describe la organización de la secuencia de tareas que proponemos.

Figura 10.
Organización del diseño de una secuencia de tareas para promover el aprendizaje de la noción del límite de funciones reales en un punto.



Nota. Construcción propia.

La primera tarea, compuesta por dos actividades, prepara el terreno para el análisis de funciones al introducir las ideas de aproximación e infinito, conceptos clave en el estudio de la noción de límite. La segunda tarea consta de tres actividades en las que los estudiantes aplicarán y profundizarán las nociones aprendidas en la primera tarea, como las ideas de aproximación e infinito, trasladándolas al análisis del límite de funciones reales en un punto. En esta tarea, se explorarán situaciones en las que el límite existe, casos donde los límites laterales no coinciden, y escenarios en los que el límite tiende al infinito. La coordinación de los diferentes registros semióticos y la formulación de enunciados matemáticos permitirán a los estudiantes desarrollar habilidades de interpretación entre diversas representaciones, señalando un avance en la comprensión de la noción de límite. Además, al construir estas estructuras mentales, se producirá una modificación en su discurso matemático, ya que serán capaces de comunicar correctamente el límite de funciones utilizando el registro algebraico o simbólico, y empleando términos como aproximación, tendencia y entorno para expresar lo aprendido.

La tercera tarea consta de tres actividades que buscan generar discusión en clase, creando un espacio de reflexión y análisis colectivo para revisar y consolidar los hallazgos y experiencias de las actividades previas. Con esta tarea, se fomenta el intercambio de ideas, la comparación de resultados y la construcción de significados a partir de las acciones realizadas. A través de la discusión guiada por el profesor, los estudiantes conectarán sus experiencias concretas con un proceso más general, interiorizando conceptos, este diálogo enriquece el aprendizaje y permite clarificar dudas y resolver confusiones. Cada una de las tareas tiene aprendizajes esperados basados en la descomposición genética, facilitando así la construcción progresiva de las estructuras mentales esperadas, tal como lo plantea la teoría APOE de Arnon et al., (2014).

La tarea de evaluación consta de dos actividades que integran los conceptos trabajados en tareas anteriores sobre la noción de límite de funciones reales. La primera actividad se enfoca en el análisis gráfico, donde los estudiantes observan y calculan los límites de varias funciones representadas visualmente, aplicando la identificación de comportamientos y posibles discontinuidades. La segunda actividad involucra el uso del registro algebraico o simbólico como el registro numérico, con los que deben comparar comportamientos entre funciones y reflexionar sobre las diferencias entre aproximación y tendencia. Esta tarea fomenta la discusión y el análisis colaborativo, ya que los estudiantes presentan y justifican sus resultados en grupo.

Para cada tarea se proporciona una descripción, los aprendizajes esperados, los conceptos involucrados y el enunciado. Además, al final de cada tarea se incluye una propuesta de rúbrica que permite medir el alcance de las estructuras mentales desarrolladas por los estudiantes. Estas rúbricas están diseñadas para evaluar el progreso en la construcción de las estructuras mentales previstas según la teoría APOE de Arnon et al., (2014), asegurando que los estudiantes avancen desde las acciones iniciales hacia la interiorización y coordinación de procesos. Dado que la implementación práctica de la propuesta de tareas excede los objetivos de esta maestría, hemos optado por desarrollar una rúbrica para cada tarea, que permita medir el avance de los estudiantes desde las acciones iniciales hasta la interiorización y coordinación de procesos, relacionado con la noción de límite. Así, buscamos que los aprendizajes esperados en la secuencia de tareas se puedan alcanzar y evaluar, asegurando que lo propuesto esté alineado con la teoría APOE.

Tarea 1

Descripción de la tarea 1

La tarea se compone de dos actividades diseñadas para introducir conceptos fundamentales de la noción de límite: el método de exhaución y la idea de infinito. Además, está temporalizada para realizarlo en una clase de 120 minutos. En la primera actividad planteamos una situación en la que los estudiantes deben determinar el área de una circunferencia de radio r sin usar la fórmula conocida del área de un circunferencia. Inspirada en el método de exhaución de Eudoxo, la actividad invita a inscribir polígonos en la circunferencia y utilizar GeoGebra para manipular la cantidad de lados del polígono, observando cómo su área se aproxima a la del círculo. Finalmente, se comparará con la fórmula $Á_{Cía.} = \pi \cdot r^2$, visualizando cómo las áreas se aproximan progresivamente. La segunda actividad introduce el concepto de infinito a través de la construcción del Triángulo de Sierpinski. Utilizando GeoGebra, los estudiantes iterarán subdivisiones sucesivas, creando triángulos cada vez más pequeños al unir los puntos medios de los lados del triángulo original. Mediante esta interacción, observarán el proceso iterativo infinito y comprenderán cómo una figura puede aproximarse indefinidamente a un patrón sin alcanzar un límite final. Esta experiencia facilita la comprensión visual y manipulativa de la aproximación infinita, conectando con la noción de límite en matemática.

Aprendizajes esperados

Con esta tarea buscamos que los estudiantes desarrollen una interpretación del concepto de aproximación en el contexto de áreas de polígonos inscritos en una circunferencia. Relacionar cómo el aumento del número de lados en los polígonos inscritos tiende progresivamente al área de la circunferencia sin alcanzarla. Además, de establecer la relación entre el proceso de aproximación de los polígonos y la noción de límite en funciones reales y relacionar el aumento indefinido de triángulos más pequeños en la construcción del Triángulo de Sierpinski con la noción de infinito, para observar cómo el área total del triángulo permanece finita a pesar de las subdivisiones infinitas.

Conceptos involucrados

- Aproximación: Proceso por el cual una cantidad se acerca progresivamente a un valor específico sin necesariamente alcanzarlo. En el método de exhaución, los polígonos inscritos en una circunferencia aproximan el área del círculo a medida que el número de lados del polígono aumenta.
- Tendencia y cercanía: Dirección en la que una cantidad cambia, acercándose cada vez más a un valor sin alcanzarlo exactamente. Los polígonos se acercan al área del círculo conforme aumenta el número de lados, sin llegar a ser iguales, reflejando la idea de tendencia y cercanía.
- Iteración infinita: Repetición de subdivisiones que genera triángulos cada vez más pequeños, acercando a los estudiantes a la noción de infinito al observar cómo este proceso puede continuar indefinidamente.

Enunciado de la actividad 1

Actividad 1: Explorando la Aproximación con el Método de Exhaución

Utilizando el enlace proporcionado en la aplicación GeoGebra, realiza las indicaciones

https://www.geogebra.org/classic/gmzenuvm

1. Aumenta progresivamente el número de lados, y para cada nuevo polígono registra el área obtenida en una tabla.
2. Observa lo que sucede al polígono conforme aumenta su número de lados y discute con tus compañeros las observaciones hechas, respondiendo las preguntas verbalmente y en forma escrita:
   a. ¿Qué observas al comparar las áreas de los polígonos inscritos con el área de la circunferencia a medida que aumentas el número de lados?
   b. Si continúas aumentando el número de lados del polígono inscrito, ¿el área del polígono será exactamente igual al área de la circunferencia? Justifica.
   c. ¿Cuál es la diferencia entre la última área del polígono cuyo lado $n = 20$ y el área de la circunferencia? ¿Qué nos dice esta diferencia en términos de aproximación y tendencia?

Enunciado de la actividad 2

Actividad 2: Explorando la noción de Infinito con el Triángulo de Sierpinski

Utilizando el enlace proporcionado en la aplicación GeoGebra, realiza las indicaciones

https://www.geogebra.org/m/zjjt22nz

1. Realiza iteraciones en las que se subdivide el triángulo en triángulos más pequeños. Repite esto al menos 5 veces, registrando el número total de triángulos generados en cada iteración en una tabla.
2. Discute con tus compañeros las iteraciones realizadas y responde las preguntas verbalmente y por escrito:
   a. ¿Qué observas acerca de la cantidad de triángulos al comparar cada iteración?
   b. ¿De qué manera cambian el número y el área de los triángulos a medida que realizas más subdivisiones en cada iteración? Justifica.
   c. Si se continúa dividiendo el triángulo cada vez más, ¿alguna vez se terminarían las divisiones posibles?

Tabla 8.

Rúbrica para la tarea 1.

Criterios de Evaluación	Insuficiente (0)	Aceptable (1)	Bueno (2)	Puntaje
Relaciona el área de los polígonos inscritos y el área de la circunferencia	No identifica que a medida que aumenta los lados del polígono inscrito su área se aproxima al área de la circunferencia	Identifica que a medida que aumente los lados del polígono inscrito aumenta su área, pero no identifica la relación con el área de la circunferencia	Descubre que a medida que aumenta los lados del polígono inscrito su área se aproxima al área de la circunferencia.	
Visualiza la aproximación del área de los polígonos inscritos según el aumento de sus lados al área de la circunferencia	No visualiza la aproximación del área de los polígonos inscritos al área de la circunferencia	Visualiza que el área del polígono inscrito aumenta, pero no visualiza la aproximación al área de la circunferencia	Tiene en cuenta que a medida aumenta el área de los polígonos inscritos se aproxima al área de la circunferencia.	
Relaciona el aumento indefinido del triángulo de Sierpinski con la noción de infinito	No relaciona que el aumento indefinido del triángulo se relaciona con la noción de infinito.	Tiene noción de la idea de infinito, pero no lo asocia al aumento de los triángulos.	Interioriza a proceso la idea de que cuantas más iteraciones haga, el triángulo aumentará hasta el infinito.	
Construye la *acción* de describir la idea de aproximación e infinito	No construye la acción de describir la idea de aproximación en infinito.	Construye parcialmente la acción de describir la idea de aproximación e infinito.	Construye la acción de describir la idea de aproximación e infinito.	

Nota. Construcción propia

Cada criterio de evaluación mide aspectos clave de la tarea, para verificar las acciones concretas hacia la interiorización de procesos.

1. **Relaciona el área de los polígonos inscritos y el área de la circunferencia.** Este criterio permite observar si los estudiantes comprenden que a medida que aumentan los lados del polígono, su área se aproxima al área de la circunferencia.
2. **Visualiza la aproximación del área de los polígonos inscritos según el aumento de sus lados al área de la circunferencia.** Evalúa la habilidad del estudiante para visualizar cómo el aumento del número de lados de los polígonos inscritos genera una aproximación cada vez más cercana al área de la circunferencia.
3. **Relaciona el aumento indefinido del triángulo de Sierpinski con la noción de infinito.** Este criterio examina si los estudiantes logran conectar el aumento continuo de los lados del polígono con la idea del infinito.

4. **Demuestra la construcción de la acción de describir la idea de aproximación e infinito a proceso.** A través de este criterio se evalúa si los estudiantes pueden describir de manera clara y completa las ideas de aproximación e infinito, habiendo interiorizado las acciones en un proceso conceptual.

Tarea 2

Descripción de la tarea 2

Esta tarea se enfoca en el estudio de los distintos registros semióticos asociados a la noción de límite de funciones reales en un punto. Los estudiantes han trabajado previamente con el método de exhaución de Eudoxo, que les permitió comprender el concepto de aproximación mediante el cálculo de áreas, y con el triángulo de Sierpinski, que les introdujo la noción de infinito desde un enfoque geométrico. Como profesores, facilitaremos la transición y conexión entre la tarea 1 y esta tarea 2, mediante discusiones y reflexiones guiadas, ayudaremos a los estudiantes a conectar las nociones previamente abordadas de aproximación (con el método de exhaución) e infinito (con el triángulo de Sierpinski) con el análisis de funciones reales.

En esta tarea, que está temporalizada para realizarlo en una clase de 120 minutos, presentamos 3 actividades, la primera busca que los estudiantes analicen el comportamiento de una función $f(x)$ en el entorno de un punto a. Sustituyendo valores cercanos a a en el registro algebraico o simbólico y numérico para identificar tendencias conforme x se aproxima a a. Con el apoyo de GeoGebra, visualizaran gráficamente la función, reforzando la idea de aproximación hacia un valor límite. Estas tareas coordinan los registros algebraico o simbólico, numérico y gráfico, permitiendo comparar resultados y entender el límite de forma integral.

En la segunda y tercera actividad, el análisis será más complejo, ya que se trabajará con funciones que no tienen límite debido a la no coincidencia de los límites laterales, así como con funciones que tienden al infinito. Además, se incorporará la interiorización a proceso de sustituir valores en el registro algebraico o simbólico, del registro numérico y registro gráfico. Los estudiantes deberán comparar los registros numérico y gráfico para observar cómo varía la función en función del lado por el que x se aproxima. Asimismo, trabajarán en la coordinación de los registros semióticos, utilizando el lenguaje matemático para formular enunciados sobre los límites laterales, y describirán verbalmente y por escrito la tendencia de la función, explicando por qué no existe un límite único en el punto analizado.

Aprendizajes esperados

Se espera que los estudiantes lleven a cabo las acciones (8), (9) y (10) de la descomposición genética preliminar planteado, de manera que comprendan la tendencia de una función en el entorno de un punto sustituyendo valores cercanos a a en el registro algebraico o simbólico y analizando las imágenes correspondientes. Esto les permitirá observar el comportamiento de la función a medida que x se aproxima a a. Además, al evaluar la función en su registro numérico, utilizando puntos a la izquierda y derecha de a, identificarán la variación en las imágenes de la función, reconociendo patrones de comportamiento y su tendencia hacia un valor. Finalmente, mediante el uso de GeoGebra, visualizarán la función en su registro gráfico, manipulando la representación en el entorno de a, lo que reforzará su comprensión del límite a través de una representación visual y gráfica integrada.

Conceptos involucrados

- Dominio y codominio de una función: se trabajarán con valores del dominio cercanos a a y se observarán cómo estos valores afectan las imágenes de la función en el codominio.

- Límite de una función en un punto: la tarea está centrada específicamente en la observación de cómo los valores de la función se aproximan a un valor límite conforme x se aproxima a a desde la izquierda y la derecha.
- Límites laterales: deberán calcular los límites laterales (cuando x se aproxima a un punto desde la izquierda o desde la derecha) y observar sí coinciden o no, para determinar si la función tiene un límite único.
- Aproximación y Tendencia: observarán, al aproximarse x a a, los valores de la función tienden hacia un valor específico, tanto en su representación numérica como gráfica.
- Registros semióticos (algebraico o simbólico, numérico, gráfico): se trabajarán con diferentes representaciones de la función (algebraica o simbólica, numérica y gráfica), entendiendo cómo cada registro refleja el mismo comportamiento en el entorno de a.
- Funciones que tienden al infinito: se analizarán funciones cuyo valor aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a un punto, funciones que crecen o decrecen de forma indefinida conforme se acercan a ciertos valores de x.

Enunciado de la actividad 1

Actividad 1: Explorando el límite de una función en un punto

1. Dada la función real $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ completa la siguiente tabla y contesta las preguntas.

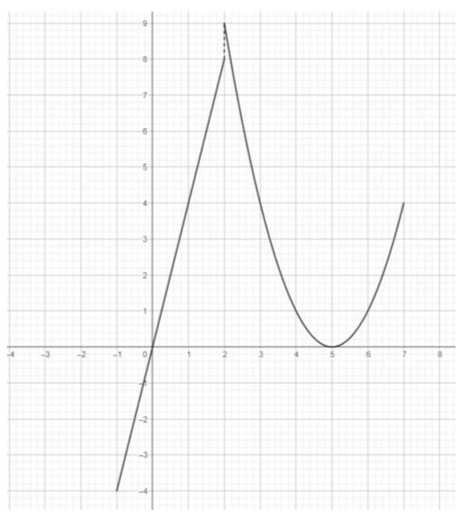
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	a	3.00001	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$					L					

a. ¿Qué observas con respecto a los valores propuestos para la variable x?
b. ¿Qué valor se aproxima x por izquierda y por derecha?
c. ¿A qué valor tiende $f(x)$ en la tabla?
d. ¿Cómo varía $f(x)$ conforme x se aproxima al punto a en su entorno?
e. Representa gráficamente la función $f(x)$ y describe con tus palabras lo que observas a medida que x se aproxima al punto a por izquierda y por derecha.

Enunciado de la actividad 2

Actividad 2. Explorando los límites laterales

1. Observa el registro gráfico de la función $g(x) = \begin{cases} 4x & si\ -1 \leq x \leq 2 \\ (x-5)^2 & si\ 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$ y realiza las actividades:



a. ¿Cómo se comporta la función $g(x)$ cuando x se aproxima al entorno del punto 2?
b. Completa la tabla con los valores de x cercanos a 2, y calcula las imágenes correspondientes.

x						2					
$g(x)$											

c. ¿El comportamiento de la función alrededor del punto 2 en su registro gráfico coincide con lo que observaste en el registro numérico? Justifica.
d. Dado el registro algebraico o simbólico de la noción del límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, propone una formulación de los enunciados de los límites por izquierda y derecha de la función $g(x)$.
e. Teniendo en cuenta el inciso anterior, ¿se podría decir que existe límite de la función $g(x)$? Justifica.

Enunciado de la actividad 3

Actividad 3. Explorando la tendencia al infinito

1. Dada la función $h(x) = \frac{1}{x-1}$, sustituye valores del entorno de $x = 1$ y determina las imágenes correspondientes ubicándolos en la tabla.

x					1				
$h(x)$									

a. Representa gráficamente la función $h(x)$ y visualiza su comportamiento en torno al punto 1. ¿El registro gráfico coincide con lo que observaste en el registro numérico?
b. Describe qué sucede con los valores del rango de la función $h(x)$ y cuál parece ser su tendencia cuando la variable x se aproxima al punto 1.
c. ¿Se puede decir que la función $h(x)$ tiene límite? Si tiene, formula el límite de la función $h(x)$, si no lo tiene, justifica.

Tabla 9.

Rúbrica para la tarea 2.

Criterios de Evaluación	Insuficiente (0)	Aceptable (1)	Bueno (2)	Puntaje
Analiza los valores del dominio cercanos a un punto en el registro algebraico o simbólico	No reemplaza los valores en el registro algebraico o simbólico cercanos a a.	Sustituye parcialmente en el registro algebraico o simbólico los valores cercanos a a	Sustituye completamente en el registro algebraico o simbólico los valores cercanos a a	
Valora en sus entornos la función real en su registro numérico	No examina ni interpreta la aproximación de la función al punto a en la tabla de valores.	Examina los valores de la función , pero no interpreta la aproximación al punto a	Examina e interpreta los valores de la función cercano al punto a	
Valora en sus entornos la función real en su registro gráfico.	No visualiza en el registro gráfico de la función la tendencia de $f(x)$ conforme x se aproxima a a.	Se percata en el registro gráfico de la función la aproximación de x a a, pero no identifica la tendencia de $f(x)$.	Identifica en la gráfica de la función la tendencia de $f(x)$ conforme x se aproxima a a.	
Coordina la representación numérica y la gráfica de la función real	No explica la relación entre el registro numérico y gráfico de la función real en el punto dado.	En su discurso presenta la noción del registro gráfico y numérico sin relacionarlas.	En su discurso demuestra coordinación de los registros numéricos y gráficos de la función real relacionando su tendencia y aproximación.	
Utiliza el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre la noción de limite	No demuestra construcción de estructura mentales (*acción* y *proceso*) en su expresión escrita o verbal sobre la noción de limite.	Demuestra que ha construido la estructura mental *acción*, pero no *proceso* en su discurso verbal o escrito sobre la noción de límite.	Demuestra la construcción de estructura mentales (*acción* y *proceso*) en su discurso verbal y escrito sobre de la noción de límite.	

Nota. Construcción propia.

Con esta rúbrica se puede obtener evidencias de las estructuras mentales construidas en la segunda tarea al coordinar estos registros y su habilidad para formular enunciados matemáticos sobre la noción de límite.

1. **Analiza los valores del dominio cercanos a un punto en el registro algebraico o simbólico.** Evalúa si los estudiantes pueden sustituir correctamente los valores cercanos a a en el registro algebraico o simbólico y analizar la función en torno a ese punto.

2. **Valora en sus entornos la función real en su registro numérico.** Mide si los estudiantes son capaces de examinar e interpretar la aproximación de la función en torno a a utilizando una tabla de valores.

3. **Valora en sus entornos la función real en su registro gráfico.** Evalúa la capacidad de los estudiantes para observar y describir la tendencia de la función gráfica a medida que x se aproxima a a.

4. **Coordina la representación numérica y la gráfica de la función real.** Este criterio mide la habilidad de los estudiantes para relacionar los registros gráfico y numérico, coordinando ambos para describir la tendencia y aproximación de la función.

5. **Utiliza el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre la noción de límite.** Mide si los estudiantes han construido estructuras mentales relacionadas con la noción de límite, evaluando su capacidad para formular enunciados matemáticos claros y precisos tanto de manera escrita como verbal.

Tarea 3

Descripción de la tarea 3

En esta tarea se presentan tres actividades centradas en el análisis y la comprensión de la noción de límite de funciones reales en un punto a través de distintos registros semióticos. Además, está temporalizada para realizarlo en una clase de 120 minutos. La primera actividad, se enfoca en el registro gráfico: se proporcionan a los estudiantes tres representaciones gráficas de funciones diferentes, y en cada una se destaca un punto a, se solicita a los estudiantes que observen cuidadosamente el entorno de dicho punto en cada gráfica, analizando cómo se comporta la función conforme se aproxima a a por ambos lados. A partir de esta observación analítica, los estudiantes deberán identificar el límite de la función y expresar esta tendencia en su registro algebraico o simbólico. El objetivo es que, sin realizar cálculos algebraicos, puedan reconocer visualmente el comportamiento de la función y formular el límite correspondiente.

La segunda actividad, propone una función enfocándose en interpretar la gráfica para identificar su tendencia cerca de un punto, explorar la existencia de límites laterales y traducir estos hallazgos al registro algebraico. La tercera actividad, está centrada en el análisis de una función con una tendencia al infinito la que se representa gráficamente y en la que los estudiantes deben evaluar su comportamiento cuando x se aproxima a un valor a desde la izquierda y desde la derecha. Con esto se fomenta la descripción de la tendencia de la función en términos del límite y el uso del lenguaje matemático para expresar el límite cuando x se acerca a un valor a.

Aprendizajes esperados

Los aprendizajes esperados se centran en varios aspectos claves relacionados con la noción de límite. En primer lugar, se busca desarrollar el reconocimiento visual del límite, es decir, la capacidad de observar una gráfica y analizar su comportamiento cerca de un punto a, identificando cómo la función se aproxima a un valor específico desde ambos lados. Asimismo, esperamos que los estudiantes logren la coordinación de registros semióticos, donde la interpretación del comportamiento de la función en el registro gráfico se traduzca al registro algebraico o simbólico, permitiéndoles expresar correctamente el límite. Otro aspecto fundamental es el manejo de distintos comportamientos de límite, distinguiendo entre funciones con un límite finito, límites laterales coincidentes, y aquellas que tienden al infinito.

Además, se promueve el desarrollo de un lenguaje matemático preciso, mediante la correcta expresión simbólica del límite, lo que refuerza la habilidad de comunicar conceptos matemáticos. Por último, se pretende que los estudiantes logren la interiorización del concepto de límite sin cálculos formales, comprendiendo intuitivamente la tendencia de la función a través de la observación, lo que facilita una comprensión conceptual antes de abordar procedimientos formales de cálculo.

Conceptos involucrados

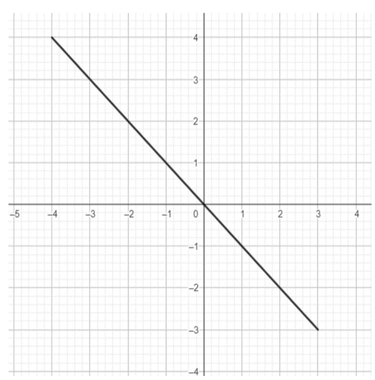
- Dominio y codominio de una función: se trabajarán con valores del dominio cercanos a a y se observarán cómo estos valores afectan las imágenes de la función en el codominio.
- Límite de una función en un punto: la tarea está centrada específicamente en la observación de cómo los valores de la función se aproximan a un valor límite conforme x se aproxima a a desde la izquierda y la derecha.
- Límites laterales: Los estudiantes deberán calcular los límites laterales (cuando x se aproxima a un punto desde la izquierda o desde la derecha) y observar sí coinciden o no, para determinar si la función tiene un límite único.

- Aproximación y Tendencia: Los estudiantes comprenderán cómo, al aproximarse x a a, los valores de la función tienden hacia un valor específico, tanto en su representación numérica como gráfica.
- Registros semióticos (algebraico o simbólico, numérico, gráfico): se trabajarán con diferentes representaciones de la función (algebraica o simbólica, numérica y gráfica), entendiendo cómo cada registro refleja el mismo comportamiento en el entorno de a.
- Funciones que tienden al infinito: se analizarán funciones cuyo valor aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a un punto, es decir, funciones que crecen o decrecen de forma indefinida conforme se acercan a ciertos valores de x.

Enunciado de la actividad 1

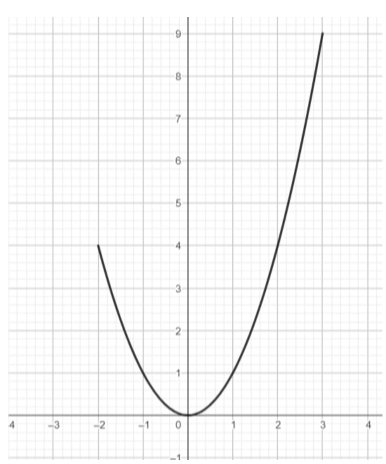
Actividad 1: Límite finito

Observa el registro gráfico de las funciones y formula sus límites.



a. $f(x) = -x$ si $-4 \leq x \leq 3$

cuando x se aproxima a -1 y a 1



b. $g(x) = x^2$ si $-2 \leq x \leq 3$

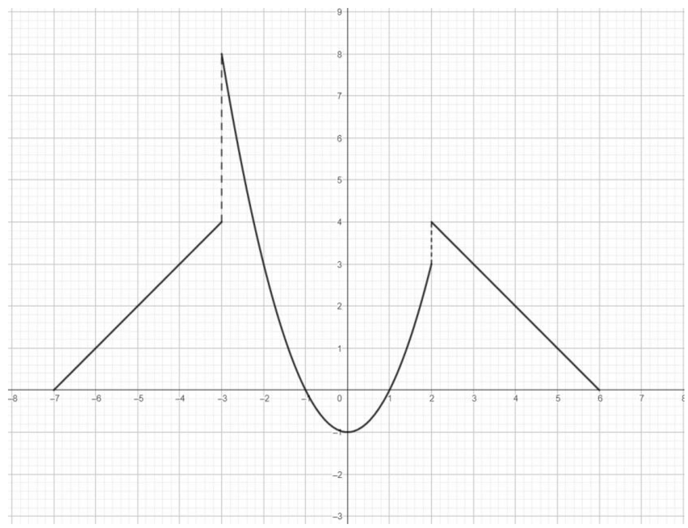
cuando x se aproxima a -2 y a 2

Enunciado de la actividad 2

Actividad 2. Analizando las tendencias de las funciones.

1. Observa el registro gráfico de la siguiente función $h(x) = \begin{cases} x+7 & si\ -7 \leq x \leq -3 \\ x^2-1 & si\ -3 < x \leq 2 \\ -x+6 & si\ 2 < x \leq 6 \end{cases}$

¿Cuál es la tendencia de la función $h(x)$ cuando x se aproxima al entorno de -3 ? ¿y por la izquierda y derecha de 2? Justifica.



2. Completa la tabla

x									
$h(x)$									

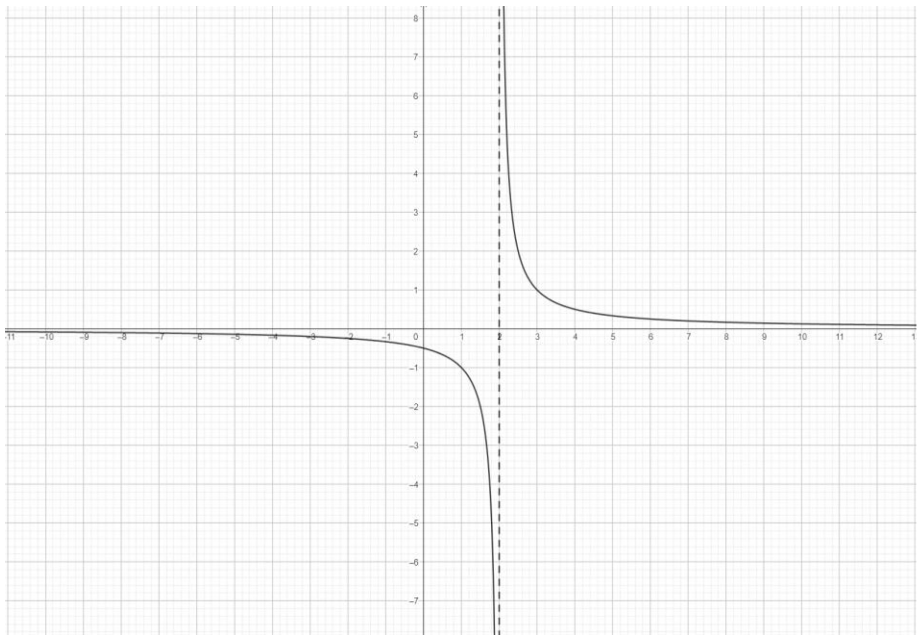
a. Redacta una explicación sobre el comportamiento de las imágenes de $h(x)$ a medida que x se aproxima a -3, 0, 2 y 4.

b. ¿Existe límite cuando x se aproxima a 1? ¿y si x se aproxima a -1? ¿Existe límite cuándo se aproxima a -3 y a 2? Exprésalo lo tuviera en su registro algebraico o simbólico y si no tiene, justifica

Enunciado de la actividad 3

Actividad 3. Tendencia al infinito

1. Dado el registro gráfico de la función $k(x) = \frac{1}{x-2}$, obtiene las imágenes de la función en la tabla proporcionada.



x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$k(x)$							

a. Observa los valores de $k(x)$ cuando x se aproxima a 2 desde la izquierda ¿Hacia qué valor parece tender la función $k(x)$?
b. Observa los valores de $k(x)$ cuando x se aproxima a 2 desde la derecha. ¿Hacia qué valor parece tender la función $k(x)$?
c. Con base en tus observaciones, describe la tendencia de $k(x)$ conforme x se acerca a 2.
d. Formula el límite al que tiende $k(x)$ cuando x se aproxima a 2.

Tabla 10.

Rúbrica para la tarea 3.

Criterios de evaluación	Insuficiente (0)	Aceptable (1)	Bueno (2)	Puntaje
Reconoce visualmente el valor al que se aproxima $\boldsymbol{x}$ y al que tiende $\boldsymbol{f(x)}$ en el registro numérico.	No identifica el valor al que se aproxima x y al que tiende $f(x)$ en el registro numérico.	Identifica el valor al que se aproxima x, pero no identifica el valor al que tiende $f(x)$ en el registro numérico.	Identifica el valor al que se aproxima x y el valor al que tiende $f(x)$ en el registro numérico.	
Coordina la noción del límite en los distintos registros semióticos (gráfica, algebraica o simbólica, numérica y verbal)	No logra coordinar la noción del límite en sus distintos registros semióticos.	Logra coordinar algunos registros de semióticos de la noción del límite.	Coordina la noción del límite en todos sus registros semióticos.	
Se refleja la construcción, modificación o adopción de un discurso matemático (verbal o escrito) en la formulación de enunciados sobre la noción de límites.	No expresa cambios en su lenguaje matemático con relación a la noción del límite.	No logra expresar cambios en la totalidad de su discurso matemático (verbal o escrito) con relación a la noción del límite.	Presenta construcciones o modificaciones en su discurso matemático (verbal o escrito) con relación a su formulación de enunciados sobre la noción del límite.	
Interioriza la noción del límite sin cálculos formales	No interioriza la noción del límite con cálculos o sin ella.	Interioriza la noción de límite a través de la realización de cálculos.	Interioriza a proceso la noción límite sin la realización de cálculos formales.	

Nota. Construcción propia.

1. **Reconoce visualmente el valor al que se aproxima x y al que tiende f(x) en el registro numérico.** Este criterio evalúa si el estudiante puede identificar correctamente los valores hacia los cuales se aproxima x y tiende $f(x)$ en una tabla de valores, reconociendo el comportamiento de la función en su entorno.

2. **Coordina la noción del límite en los distintos registros semióticos (gráfica, algebraica o simbólica, numérica y verbal).** Mide la habilidad para relacionar y coordinar las distintas representaciones de la función, conectando sus comportamientos en cada uno de los registros.

3. **Se refleja la construcción o modificación de su discurso (verbal o escrito) en la formulación de enunciados sobre la noción de límites.** Evalúa la capacidad para mejorar su discurso matemático en la formulación de enunciados sobre límites, reflejando un progreso desde la acción hasta el proceso en su expresión verbal o escrita.

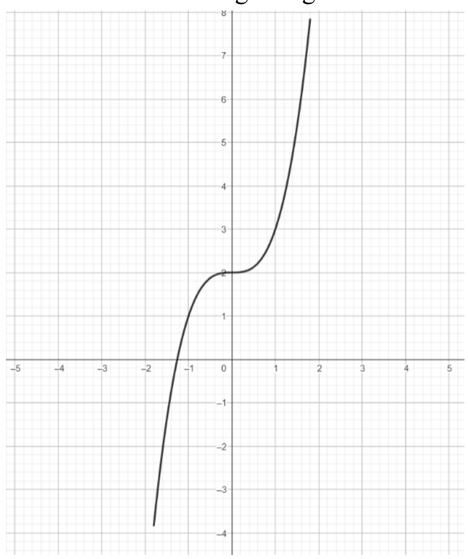
4. **Interioriza la noción del límite sin cálculos formales.** Examina si el estudiante puede interiorizar la noción de límite sin dependencia de cálculos formales, alcanzando una comprensión más intuitiva del concepto.

Con estos indicadores se puede medir el progreso de los estudiantes en términos de su coordinación de registros semióticos, y su capacidad para expresar y formular enunciados sobre la noción de límite.

Tarea de evaluación

Tarea de Evaluación

Actividad 1. Observa el registro gráfico de las funciones e indica la tendencia de los límites indicados.



$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

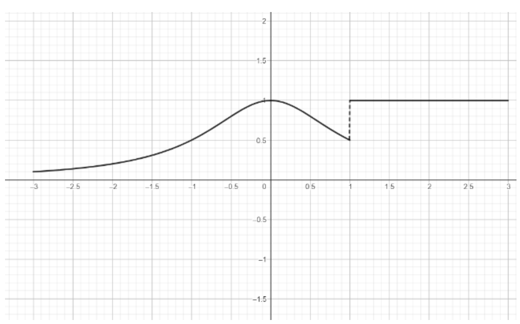
$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

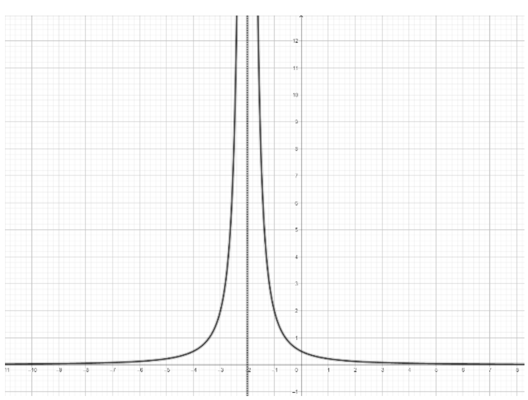


$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$



$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

Actividad 2. Dada las funciones: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$

1. Determina el comportamiento de las funciones cuando x se aproxime al valor asignado, utilizando los registros gráfico y numérico.
2. Determina el límite, si existe, al que tienden las funciones, conforme x se aproxime a los valores asignados y exprésalo en su registro algebraico o simbólico.
3. Compara las funciones $f(x)$ y $g(x)$. ¿Cómo son los límites de ambas funciones cuando se aproximan al mismo valor de x?¿Es posible que ambos límites sean iguales, aunque las funciones sean diferentes? Explica tus respuestas
4. ¿Existe diferencia entre aproximación y tendencia? explica
5. Exponga sus respuestas y justificaciones frente a la clase, compare sus resultados con los de otros grupos, y participe activamente en la discusión haciendo preguntas y reflexionando sobre diferentes formas de interpretar y calcular los límites.

$$Grupo\ 1\begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 2 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 3 \end{cases} \qquad Grupo\ 3\begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \end{cases}$$

$$Grupo\ 2\begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a -2 \end{cases} \qquad Grupo\ 4\begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a -3 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \end{cases}$$

Tabla 11.

Rúbrica de la tarea de evaluación.

Criterios de evaluación	Insuficiente (0)	Aceptable (1)	Bueno (2)	Puntaje
Analiza el comportamiento de las funciones cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$, utilizando los registros gráfico y numérico.	No analiza el comportamiento de las funciones cuando x se aproxima a a, ni en los registros gráficos, ni el numérico.	En el registro numérico visualiza el comportamiento de las funciones cuando x se aproxima a a, mas no así en el registro gráfico.	Analiza el comportamiento de las funciones cuando x se aproxima a a en ambos registros (gráfico y numérico).	
Interioriza a proceso la existencia o no del límite de funciones reales en los puntos dados.	No identifica la existencia o no del límite de funciones reales en los puntos dados.	Identifica que existe una aproximación y una tendencia de las funciones, mas no logra identificar la existencia de limite en los puntos dados.	Interioriza la existencia del límite de las funciones reales en los puntos dados.	
Relaciona las funciones reales $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$ según las aproximaciones de $\boldsymbol{x}$.	No distingue que al comparar los límites de $f(x)$ y $g(x)$ cuando se aproximan a un mismo valor de a, ambos límites pueden ser iguales o diferentes.	Distingue parcialmente que al comparar los límites de $f(x)$ y $g(x)$ cuando se aproximan a un mismo valor de a, los límites pueden ser iguales o diferentes.	Coordina los límites de $f(x)$ y $g(x)$ cuando se aproximan a un mismo valor de a, y distingue que los límites pueden llegar a ser iguales o diferentes.	
Describe verbalmente o por escrito la tendencia de la función real utilizando el lenguaje matemático de la noción de limite.	En su discurso (escrito o verbal) no utiliza lenguaje matemático de la noción de límite y no detalla la tendencia de la función real.	En su discurso (escrito o verbal) no utiliza lenguaje matemático de la noción de limite, pero detalla la tendencia de la función real.	En su discurso (escrito o verbal) utiliza el lenguaje matemático de la noción de limite y detalla la tendencia de la función real.	

Nota. Construcción propia.

1. **Analiza el comportamiento de las funciones cuando x se aproxima a a, utilizando los registros gráfico y numérico.** Este criterio mide la capacidad del estudiante para analizar cómo las funciones se comportan cerca de un valor dado, tanto en su representación gráfica como numérica.
2. **Interioriza a proceso la existencia o no del límite de funciones reales en los puntos dados.** Evalúa si el estudiante ha logrado interiorizar la noción de límite, identificando si el límite de las funciones existe o no en un punto dado.
3. **Relaciona las funciones reales $f(x)$ y $g(x)$ según las aproximaciones de x.** Mide la habilidad del estudiante para comparar los límites de dos funciones y distinguir si pueden llegar a ser iguales o no.
4. **Describe verbalmente o por escrito la tendencia de la función real utilizando el lenguaje matemático de la noción de limite.** Evalúa la capacidad del estudiante para describir de manera precisa el comportamiento de la función utilizando un lenguaje matemático adecuado.

Cada nivel de logro (insuficiente, aceptable, bueno) está definido para facilitar su aplicación en el aula, permitiendo una evaluación objetiva y centrada en el desarrollo cognitivo. Esta rúbrica es flexible y puede ser adaptada por cualquier profesor de matemáticas que desee medir el progreso de sus estudiantes en el entendimiento del límite, la aproximación y el infinito.

Capítulo 4. Aspectos finales

En este capítulo, realizamos una descripción detallada del diseño de la secuencia de tareas propuestas para promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto. Comenzamos con la descripción de nuestra descomposición genética, organizada en torno a las estructuras mentales relacionadas al objeto matemático que los estudiantes deben desarrollar, exponiendo nuestra intención pedagógica de acuerdo con los objetivos planteados. A partir de esta descripción, evaluamos la coherencia entre la secuencia de tareas diseñada, las estructuras mentales necesarias para alcanzar el aprendizaje, determinando si estas tareas conducen al logro de nuestros objetivos. Además, reflexionamos sobre si la secuencia de tareas promueve el aprendizaje de la noción del límite en los estudiantes.

Descripción de la descomposición genética preliminar

La descripción de la descomposición genética no seguirá el orden original. En su lugar, la presentamos de acuerdo con las estructuras y mecanismos mentales involucradas en el proceso de aprendizaje: acciones, procesos y coordinación. Esto nos permite analizar de manera clara cómo cada una de estas estructuras contribuye al aprendizaje progresivo de los estudiantes, de la noción de límite de funciones reales en un punto. Para facilitar esta explicación, la descripción de la descomposición genética está organizada en tablas, como se muestra a continuación.

Tabla 12.

Descripción de la descomposición genética preliminar.

Acciones	Descripción
Acción de inscribir un polígono regular de al menos 3 lados dentro de un círculo y aumentar gradualmente el número de lados, observando cómo se aproxima al contorno de la cía.	Con la repetición de esta acción, se facilitaría la interiorización de la idea de aproximación, ya que los estudiantes visualizarían cómo, al aumentar el número de lados, el polígono inscrito se aproxima cada vez más a la circunferencia. Esta acción les permitiría comprender que el polígono se acerca progresivamente al círculo sin llegar a ser igual.
Acción de calcular el área de la circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$ utilizando la ecuación $\text{Á} = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$.	Aplicar esta fórmula permitiría a los estudiantes calcular el área exacta de la circunferencia, proporcionando una referencia concreta contra la cual pueden comparar las áreas de los polígonos inscritos en pasos posteriores
Acción de comunicar verbalmente y por escrito la idea de que el área del polígono inscrito se aproxima al área de la circunferencia, pero nunca es exactamente igual.	La acción solidifica el proceso de aproximación en la mente del estudiante, lo que contribuiría a sus construcciones mentales en torno a la noción de límite.
Acción de subdividir y manipular las partes del Triángulo de Sierpinski, observando el patrón de autosimilitud en cada nivel de división.	Esta acción se enfoca en identificar los triángulos resultantes de cada iteración y observar cómo la cantidad de triángulos sigue aumentando con cada iteración, mientras el área cubierta por cada uno disminuye en cada paso.
Acción de describir verbalmente y por escrito la idea de infinito a partir de la observación de subdivisiones sucesivas, como en el Triángulo de Sierpinski.	Describir esta idea, refuerza las construcciones mentales de los estudiantes sobre la noción de infinito.
Acción de sustituir valores del dominio cercanos a $\boldsymbol{a}$ en el registro algebraico o simbólico de la función real dada para determinar las imágenes correspondientes	En esta *acción* los estudiantes sustituirían valores próximos al punto a, para obtendrían las imágenes correspondientes a la función real dada utilizando la manipulación del registro algebraico o simbólico. Esto les permitiría desarrollar una comprensión general y abstracta de la función y su comportamiento, lo que posteriormente les facilitaría interpretar y dar sentido a los cálculos numéricos concretos.
Acción de valorar una función real dada en su registro numérico, utilizando varios puntos del entorno de $\boldsymbol{a}$ por izquierda y por derecha, para observar la variación de las imágenes a medida que los valores del dominio se aproximan a $\boldsymbol{a}$.	Esta acción les permitiría observar cómo los valores de la función real varían conforme x se aproxima a a, evaluando tanto desde la izquierda como desde la derecha en su registro numérico. Los estudiantes reflexionarían sobre la proximidad de los valores de x en el dominio hacia a, y de los valores correspondientes de y en el rango hacia L, preparando así el terreno para una comprensión formal del límite.
Acción de utilizar el software GeoGebra para visualizar y manipular la función real dada en su registro gráfico en diversos puntos del entorno de $\boldsymbol{a}$	La acción facilita la repetición y manipulación de la función real, permitiendo a los estudiantes interactuar directamente con los parámetros de la función y observar en tiempo real cómo estos cambios afectan su comportamiento cerca del punto a. Esta manipulación permitiría a los estudiantes identificar tendencias, lo que reforzaría su comprensión del concepto de aproximación de la noción de límite de una función real dada.
Acción de utilizar el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre límites.	Esta *acción* se llevaría a cabo bajo la supervisión del profesor, quien intervendría directamente para asegurar que los estudiantes conozcan la forma precisa de expresar estos conceptos matemáticos como "límite", "aproximación", "tendencia" y "entorno" además de la notación matemática de la noción del límite, $\lim_{x \to x} f(x) = L$. En esta etapa, el uso del lenguaje matemático no se construirá de manera completamente autónoma, como lo describe la teoría APOE (Arnon et. al., 2014). Sin embargo, nuestra intervención es pertinente para proporcionar el apoyo necesario que permitirá

	a los estudiantes familiarizarse con la terminología correcta de manera que se establezca una base sólida sobre la cual podrán construir una comprensión más profunda en el futuro.
Acción de describir verbalmente y por escrito la tendencia de la función real utilizando el lenguaje matemático de la noción de límite.	A medida que los estudiantes construyan la *acción* de utilizar el lenguaje matemático, se convertiría en una parte integral de su comprensión de la noción de límite, interiorizándolo a proceso.
Procesos	**Descripción**
Proceso de comparar las áreas de los polígonos inscritos, aumentando el número de lados, con el área de la circunferencia calculada usando $Á = \boldsymbol{\pi \cdot r^2}$, observando cómo estas áreas se aproximan progresivamente	La comparación de las áreas de los polígonos inscritos permitiría la interiorización de la noción de que las aproximaciones pueden ser muy cercanas sin ser iguales, lo que prepara el camino para la comprensión de la noción de límite en términos más abstractos.
Interiorización de la *acción de* subdividir y manipular las partes del Triángulo de Sierpinski, para determinar que estas divisiones se repiten indefinidamente en una secuencia infinita.	La interiorización de la acción de manipular las divisiones es un proceso que les permitiría imaginar o visualizar mentalmente el resultado de subdividir sin realizarlo físicamente en cada momento, logrando coordinar la idea de infinito, en el que reconocerían que el número de triángulos aumenta sin límite, aunque el área total se reduce, uniendo esta idea con el concepto de límite.
Interiorización a *proceso de las acciones* de sustituir valores en el registro algebraico o simbólico, valorar la función en su registro numérico y representar la función gráficamente.	Al trabajar en registros numéricos, gráficos, y algebraicos o simbólicos, los estudiantes no solo ejecutarían una acción mecánica, sino que interiorizarían el proceso de conectar estos valores, facilitando la construcción de la noción de límite. Esta interiorización les permite observar cómo los valores de la función tienden hacia un número L, integrando distintas representaciones y preparando el terreno para una comprensión más abstracta y generalizada del límite como un objeto matemático.
Proceso de comparar los registros numérico y gráfico de la función real dada para observar que ambos reflejan la tendencia de la función a un valor $\boldsymbol{L}$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$.	Este proceso permitiría que los estudiantes desarrollen la habilidad de contrastar y relacionar los diferentes registros semióticos, comprendiendo cómo reflejan el comportamiento de la función en el entorno del punto a.
Coordinación	**Descripción**
Coordinar las transformaciones de los diferentes registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto.	*Coordinar* los diferentes registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto es esencial para la comprensión matemática profunda, como lo sostiene Duval (2016). Al convertir y *coordinar* distintas representaciones semióticas, los estudiantes desarrollarían un *proceso* mental que les permitiría entender las aproximaciones simultáneas de x hacia a a y de $f(x)$ hacia L. Este *proceso* se manifiesta cuando concluyen que, al aproximarse x a un punto a, la función se acerca a $f(x) = L$, independientemente de las representaciones utilizadas. La capacidad de moverse fluidamente entre estas representaciones es clave para construir una comprensión completa del concepto, (Duval, 2016).

Nota. Construcción propia.

Es importante destacar que, como profesores, estaremos interviniendo en la transición desde las ideas de aproximación e infinito para conectarlas con la noción de límite en el análisis del comportamiento de las funciones reales en un punto determinado. En el ciclo ACE, el profesor desempeña un papel crucial al facilitar el paso de la acción al proceso y la encapsulación, guiando reflexiones, estructurando tareas y promoviendo la conexión entre distintas representaciones. Esta intervención es esencial para que los estudiantes desarrollen una comprensión y abstracción de la noción de límite, avanzando a través de las etapas cognitivo-epistemológicas que describe la teoría APOE (Arnon et al., 2014).

Consideramos que, si los estudiantes construyen la estructura mental acción y proceso, además tienen oportunidades para reflexionar y experimentar con funciones cuyas imágenes se aproximen a un valor específico, tanto desde la izquierda como desde la derecha cuando x se aproxima a a, esto les permitiría determinar si, conforme x se aproxima a a, la correspondiente imagen en el rango también tiende, o no, a un valor $y = L$. Esto les permitiría evidenciar el límite L de una función $f(x)$ en $x = a$ como un proceso en cualquiera de los registros semióticos empleados. Además, en los casos en que los límites laterales no coincidan, los estudiantes podrán concluir que el límite no existe debido a la discrepancia entre las aproximaciones laterales, así como en situaciones donde la función tiende al infinito.

A continuación, presentamos el diseño de la secuencia de tareas que facilitaría el desarrollo de las actividades pedagógicas. Las respuestas esperadas se expresarán en cursiva para diferenciarlas de la explicación, la cual se presentará en letra normal, asegurando así una clara distinción entre lo que se espera que los estudiantes respondan y la descripción de la tarea.

Respuestas esperadas en la tarea 1

Con los incisos organizados en la actividad 1, buscamos incentivar a los estudiantes a reflexionar, discutir y socializar sobre la tarea realizada, lo que facilitará la construcción de las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar.

Actividad 1. Explorando la Aproximación con el Método de Exhaución.

Utilizando el enlace proporcionado en la aplicación GeoGebra, realiza las indicaciones

https://www.geogebra.org/classic/gmzenuvm

1. Aumenta progresivamente el número de lados, y para cada nuevo polígono registra el área obtenida en una tabla.

   Se espera que el estudiante aumente gradualmente el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia y luego, calcule y registre sus áreas en una tabla para observar cómo estas se aproximan al área de la circunferencia. Esto permitirá visualizar la idea de límite.

2. Observa lo que sucede al polígono conforme aumenta su número de lados y discute con tus compañeros las observaciones hechas, respondiendo las preguntas verbalmente y en forma escrita:

   a. ¿Qué observas al comparar las áreas de los polígonos inscritos con el área de la circunferencia a medida que aumentas el número de lados?

      Se espera que el estudiante observe como al aumentar el número de lados del polígono inscrito, su área se aproxima al área de la circunferencia y lo pueda socializar conjuntamente con sus compañeros.

   b. Si continúas aumentando el número de lados del polígono inscrito, ¿el área del polígono será exactamente igual al área de la circunferencia? Justifica.

      No creo que el área del polígono sea exactamente igual al área de la circunferencia, incluso si seguimos aumentando el número de lados. Aunque el área del polígono se va acercando mucho al área del círculo, siempre habrá una pequeña diferencia. Esto se debe a que el polígono sigue siendo *una figura con lados rectos, mientras que la circunferencia tiene un contorno perfectamente curvo, por lo que nunca serán exactamente iguales.*

La pregunta (a) promueve la *acción* aumentar progresivamente el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia. Los estudiantes realizan una observación activa, lo que favorece la repetición y reflexión de la *acción* facilitando así la interiorización a *proceso* de los términos matemáticos asociados a la noción del límite como aproximación, cerca y tendencia, al observar cómo el polígono se aproxima al círculo sin alcanzarlo.

c. ¿Cuál es la diferencia entre la última área del polígono cuyo lado $n = 20$ y el área de la circunferencia? ¿Qué nos dice esta diferencia en términos de aproximación y tendencia? Justifica.

La diferencia entre la última área del polígono que obtuve y el área de la circunferencia es muy pequeña, pero todavía existe. Esto me muestra que, aunque el polígono se acerca mucho al área del círculo, nunca la alcanza por completo. Esta pequeña diferencia me dice que la aproximación es un proceso que se va acercando al valor exacto, pero no lo alcanza por completo, y puedo relacionarlo con la idea de límite.

Esta pregunta promueve el proceso de comparar las áreas determinadas por la variación del número de lados del polígono inscrito con el área del círculo calculada mediante la formula $Á = \pi \cdot r^2$. Los estudiantes interiorizan la noción de aproximación al observar que, aunque las áreas se acerquen, siempre habrá una diferencia, lo que refuerza la comprensión de que las aproximaciones pueden ser muy cercanas sin ser iguales.

Para la actividad 2, hemos diseñado preguntas que guíen a los estudiantes a la construcción de las estructuras mentales necesarias para abordar la noción de límite en la siguiente secuencia. A través de acciones como la comparación de áreas y el aumento del número de lados de los polígonos, los estudiantes desarrollarían progresivamente procesos de interiorización sobre la idea de aproximación e infinito.

Actividad 2. Explorando la noción de Infinito con el Triángulo de Sierpinski.

Utilizando el enlace proporcionado en la aplicación GeoGebra, realiza las indicaciones.

https://www.geogebra.org/m/zjjt22nz

1. Realiza iteraciones en las que se subdivide el triángulo en triángulos más pequeños. Repite esto al menos 5 veces, registrando el número total de triángulos generados en cada iteración en una tabla.
   Durante estas iteraciones, se espera que identifiquen cómo, en cada paso, cada triángulo se subdivide en tres triángulos más pequeños. Al repetir esto al menos 5 veces, los estudiantes deberían notar un patrón en el número de triángulos generados, registrándolo en una tabla. Esperamos que los estudiantes reconozcan que el número de triángulos aumenta exponencialmente con cada iteración y que comiencen a identificar la relación matemática que surge, promoviendo su comprensión de conceptos como la autosimilitud y el infinito.
2. Discute con tus compañeros las iteraciones realizadas y responde las preguntas verbalmente y por escrito:
   a. ¿Qué observas acerca de la cantidad de triángulos al comparar cada iteración?
      Al comparar cada iteración del proceso, observo que el número de triángulos aumenta rápidamente en cada paso. Cada vez que subdivido, el número de triángulos se triplica.
      Estas preguntas promueven la acción de subdividir el Triángulo de Sierpinski en triángulos más pequeños en cada iteración. Al observar cómo se genera un número creciente de triángulos en cada subdivisión, los estudiantes repiten la acción, lo que facilita la interiorización a proceso de reconocer que el número de triángulos aumenta sin límite, acercándose cada vez más a una estructura infinita.

b. ¿De qué manera cambian el número y el tamaño de los triángulos a medida que realizas más subdivisiones en cada iteración?

A medida que aumenta el número de triángulos, su tamaño se reduce, haciendo que los triángulos sean cada vez más pequeños en cada iteración, manteniéndose constante el área del triángulo inicial.

c. Si se continúa dividiendo el triángulo cada vez más, ¿alguna vez se terminarían las divisiones posibles?

Creo que el número de triángulos seguirá aumentando indefinidamente porque cada vez que subdividimos, el número de triángulos aumenta, y no parece haber un límite para cuantas veces podemos hacer esto. Aunque los triángulos se vuelven más pequeños con cada iteración, sí podemos seguir subdividiendo, es decir que no podrían terminar las divisiones porque podrá hacerse infinitas subdivisiones.

Este inciso promueve la interiorización de la noción de infinito. Al reflexionar sobre si el número de triángulos puede ser finito o infinito, los estudiantes reconocen que, aunque la subdivisión sigue repitiéndose indefinidamente, el área total cubierta por los triángulos disminuye. Este razonamiento lleva a la coordinación de la idea de infinito, en la que los estudiantes comprenden que el número de triángulos aumenta sin límite, pero el área total converge a un valor finito. Esta coordinación entre las ideas de aumento indefinido y área limitada es clave para entender la noción de límite.

Al reflexionar sobre el crecimiento infinito y la disminución del área, los estudiantes *coordinan* ambas ideas, reconociendo que el número de triángulos aumenta mientras el área se aproxima a un valor finito, conectando así la idea de infinito con la noción de límite.

Estas actividades están basadas en las *estructuras mentales* descritas en la descomposición genética, que los estudiantes deben construir para una comprensión progresiva de las nociones de aproximación e infinito que lo relacionarán con el límite.

Respuestas esperadas en la tarea 2

Actividad 1. Explorando el límite de una función en un punto.

1. Dada la función real $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ completa la siguiente tabla y contesta las preguntas.

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	a	3.00001	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	0.1	0.16	0.166	0.1666	L	0.16666	0.1666	0.166	0.16	0.1

Observación: aunque los valores en la tabla están expresados en forma decimal, los estudiantes también pueden escribirlos como fracciones equivalentes si lo prefieren.

a. ¿Qué observas con respecto a los valores propuestos para la variable x?

Observo que por el lado izquierdo los valore van aumentando sus decimales hasta acercarse al número 3, y por el lado derecho los valores van decreciendo, aproximándose al número 3 también.

b. ¿A qué valor se aproxima x por izquierda y por derecha?

La variable x se aproxima al número 3.

Los incisos "a" y "b" promueven la acción (8) de la descomposición genética preliminar. Se busca que los estudiantes observen explícitamente cómo los valores de x se aproximan a a y que al sustituir valores de x cercanos a a, los estudiantes visualicen el proceso de aproximación y entiendan que x se acerca al punto a, pero sin alcanzarlo necesariamente. Es una acción inicial que les permite interiorizar a proceso de aproximación en el entorno de un punto.

c. ¿A qué valor tiende $f(x)$ en la tabla?

$f(x)$ *tiende a 0.166667*

Esta pregunta está relacionada con la *acción* (9) de la descomposición genética preliminar. Buscamos que los estudiantes identifiquen la tendencia de $f(x)$ al evaluar la función numéricamente, observando hacia qué valor (si es que existe) tiende la función conforme x se aproxima a a. Esta pregunta busca que los estudiantes reconozcan el límite numérico de $f(x)$, introduciendo el concepto de límite en términos de tendencia y observación de patrones en las imágenes de la función.

d. ¿Cómo varía $f(x)$ conforme x se aproxima al punto a en su entorno?

Puedo ver que la gráfica de $f(x)$ *se acerca a un valor muy cercano a 0.1666… cuando* x *tiende a 3, desde ambos lados. Pero desde la izquierda los valores se acercan al número 3 creciendo y desde la derecha decrecen los valores, pero también aproximándose al número 3.*

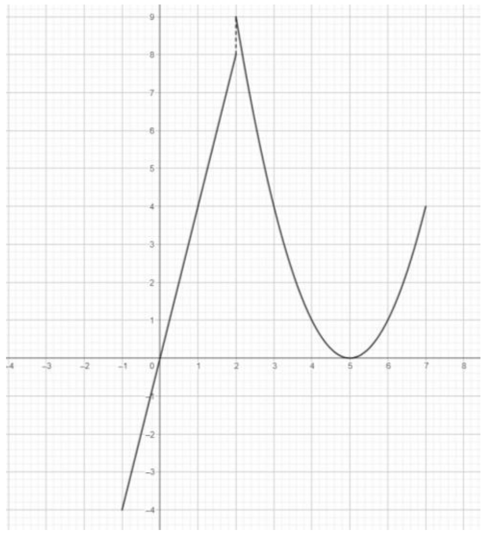
e. Representa gráficamente la función $f(x)$ y describe con tus palabras lo que observas a medida que x se aproxima al punto a por izquierda y por derecha.

Este inciso se asocia con la *acción* (10) que se enfoca en la interpretación gráfica del comportamiento de la función en el entorno de a. Se busca que, al visualizar la gráfica de la función, los estudiantes comparen lo que vieron en el registro numérico y cómo la función tiende a un valor límite en su entorno. Aquí se fomenta la coordinación entre el registro gráfico y el registro numérico, consolidando la idea del límite de una función desde un enfoque visual.

La actividad está diseñada para guiar a los estudiantes desde la *acción* de valorar y observar valores cercanos a a *(Acción 8)* mediante la observación de patrones numéricos *(Acción 9)* y la representación gráfica *(Acción 10).* Cada instrucción o pregunta busca que los estudiantes *construyan procesos mentales*, *coordinando* los registros semióticos (algebraico o simbólico, numérico y gráfico) y utilizando el lenguaje matemático adecuado para describir la noción de límite.

Actividad 2. Explorando los límites laterales.

1. Observa el registro gráfico de la función $g(x) = \begin{cases} 4x; si -1 \leq x \leq 2 \\ (x-5)^2;\ si\ 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$ y realiza las actividades:



a. ¿Cómo se comporta la función $g(x)$ cuando x se aproxima al entorno del punto 2?

Cuando x se aproxima a 2 desde la izquierda se ve que la función se acerca al 8 y cuando x se aproxima a 2 desde la derecha la función tiende a 9.

b. Completa la tabla con los valores de x cercanos a 2, y calcula las imágenes correspondientes.

x	-1	0	1.5	1.8	1.9	2	2.001	2.01	3	6
$g(x)$	-4	0	6	7.2	7.6	L	8.99	8.94	4	1

El inciso "b" está vinculado a la *Acción* de sustituir valores del dominio cercanos a a en el registro algebraico o simbólico de la función real dada para determinar las imágenes correspondientes, además a la *Acción* de valorar una función real dada en su registro numérico, utilizando varios puntos del entorno de a por izquierda y por derecha, para observar la variación de las imágenes a medida que los valores del dominio se aproximan a a. y a la *Interiorización* a *proceso de las acciones* de sustituir valores en el registro algebraico o simbólico, valorar la función en su registro numérico y representar la función gráficamente. Al realizar varias sustituciones cercanas al valor a, los estudiantes interiorizan el proceso de cómo los valores cercanos a a afectan el comportamiento de la función, ayudando a comprender los límites laterales de manera más profunda.

c. ¿El comportamiento de la función alrededor del punto 2 en su registro gráfico coincide con lo que observaste en el registro numérico? Justifica.

Sí, coincide, pero noto que la función $g(x)$ tiene a 8 desde el lado izquierdo del punto 2 pero por el lado derecho tiende a 9, la función tiene diferentes tendencias. En el registro gráfico esto se puede observar porque la gráfica sube hacia 8 desde la izquierda y desde la derecha sin embargo decrece hasta 9, y esto confirma que los límites son diferentes y entonces la función $g(x)$ no tiene límite común en $x = 2$.

El inciso "c" está asociado al *Proceso* de comparar los registros numérico y gráfico de la función real dada para observar que ambos reflejan la tendencia de la función a un valor L cuando x se aproxima a a. También se asocia con *Coordinar* las transformaciones de los diferentes registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto. Esto les permite observar si las tendencias en ambos registros (numérico y gráfico) coinciden o difieren y lleva a los estudiantes a coordinar diferentes representaciones de la función, lo cual es esencial para la comprensión completa del concepto de límite.

d. Dado el registro algebraico o simbólico de la noción del límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, propone una formulación de los enunciados de los límites por izquierda y derecha de la función $g(x)$.

Para el lado izquierdo sería $\lim_{x \to a^-} g(x) = L$

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 8$

$\lim_{x \to 2^-} 4x = 8$

Para el lado derecho sería $\lim_{x \to a^+} g(x) = L$

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 9$

$\lim_{x \to a^+} (x - 5)^2 = 9$

Este inciso se relaciona con la *acción* de utilizar el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre límites. En esta actividad, los estudiantes emplean el lenguaje matemático de límites para escribir los resultados que observaron, tanto desde el registro gráfico como numérico. Este paso fomenta la articulación matemática precisa de los conceptos de límites laterales. Además, se asocia con el *proceso* de describir verbalmente y por escrito la tendencia de la función real utilizando el lenguaje matemático de la noción de límite, ya que la formulación de enunciados matemáticos sobre límites contribuye a la interiorización del proceso de descripción del comportamiento de la función.

e. Teniendo en cuenta el inciso anterior, ¿se podría decir que existe límite de la función $g(x)$? Justifica.

   En $x = 2$ *por la izquierda el límite es 8 y por la derecha es 9, los límites tienden a valores diferentes, y no existe un límite común.*

Actividad 3. Explorando la tendencia al infinito.

1. Dada la función $h(x) = \frac{1}{x-1}$, sustituye valores del entorno de $x = 1$ y determina las imágenes correspondientes ubicándolos en la tabla.

x	*0.9*	*0.99*	*0.999*	*0.9999*	1	*1.0001*	*1.001*	*1.01*	*1.1*
$h(x)$	*-10*	*-100*	*-1000*	*-10000*	*L*	*10000*	*1000*	*100*	*10*

El inciso (1) promueve la *acción* de sustituir valores del dominio cercanos a a en el registro algebraico o simbólico. Al realizar esta sustitución de valores próximos al punto 1, los estudiantes llevan a cabo una *acción* que consiste en explorar la función algebraicamente y les ayuda a observar el comportamiento de la función al aproximarse a a y a reconocer la tendencia hacia el infinito. Repetir la sustitución para diferentes valores de x próximos a a, lleva a la *interiorización* de la variación de la función en torno a 1, preparando a los estudiantes para el análisis comparativo con otros registros.

a. Representa gráficamente la función $h(x)$ y visualiza su comportamiento en torno al punto 1. ¿El registro gráfico coincide con lo que observaste en el registro numérico?

Sí, coincide, pero también por el lado izquierdo, la función $h(x)$ *tiende hacia valores muy muy grandes pero negativos, decrece hasta el infinito negativo. Por el lado derecho, la función* $h(x)$ *tiende al infinito positivo. Es decir que tiene tendencias diferentes, pero ambos al infinito.*

El inciso "a" se asocia con las descomposiciones genéticas de *acción* de utilizar el software para graficar buscando visualizar el comportamiento de la función en su registro gráfico, esta actividad conecta la visualización directa de la tendencia al infinito con lo calculado numéricamente. Además, se involucra el *proceso* de comparar los registros numéricos y gráficos ya que se fomenta la capacidad de relacionar y *coordinar* diferentes registros para comprender la tendencia de la función.

b. Describe qué sucede con los valores del rango de la función $h(x)$ y cual parece ser su tendencia cuando la variable x se aproxima a 1.

Lo que sucede con los valores del rango de $h(x)$ *es que tienden hacia lados opuestos, porque por el lado izquierdo,* $h(x)$ *tiende hacia el infinito negativo y por el lado derecho tiende hacia el infinito positivo.*

c. ¿Se puede decir que la función $h(x)$ tiene límite? Si tiene, formula el límite de la función $h(x)$, si no lo tiene, justifica.

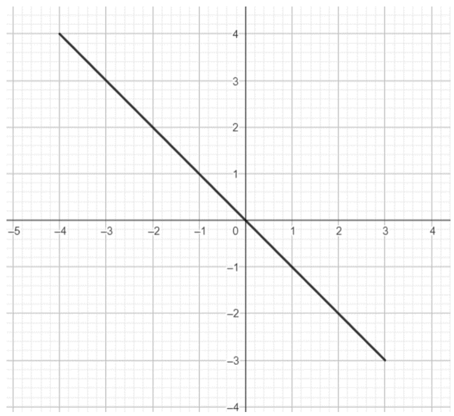
No, la función $h(x)$ *no tiene límite porque tienden a diferentes valores, por la izquierda la función tiende al infinito negativo y por el lado derecho tiene al infinito positivo.*

La actividad permite al estudiante explorar la tendencia del límite *L* hacia el infinito, promoviendo la coordinación entre registros y el uso del lenguaje matemático, lo cual facilita la comprensión de la noción de límite y su significado matemático.

Respuestas esperadas en la tarea 3

Actividad 1. Límite finito.

Observa el registro gráfico de las funciones y formula sus límites.

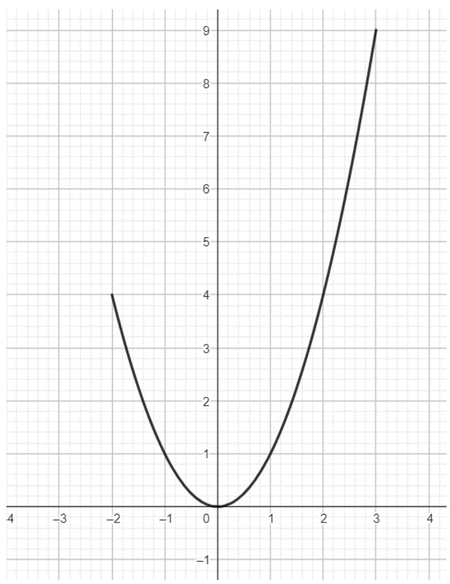


a. $f(x) = -x;\ -4 \leq x \leq 3$

cuando x se aproxima a -1 y 1

$$\lim_{x \to -1} -x = 1$$

$$\lim_{x \to 1} -x = -1$$



b. $g(x) = x^2; -2 \leq x \leq 3$

cuando x se aproxima a -2 y 2

$$\lim_{x \to -2} x^2 = 4$$

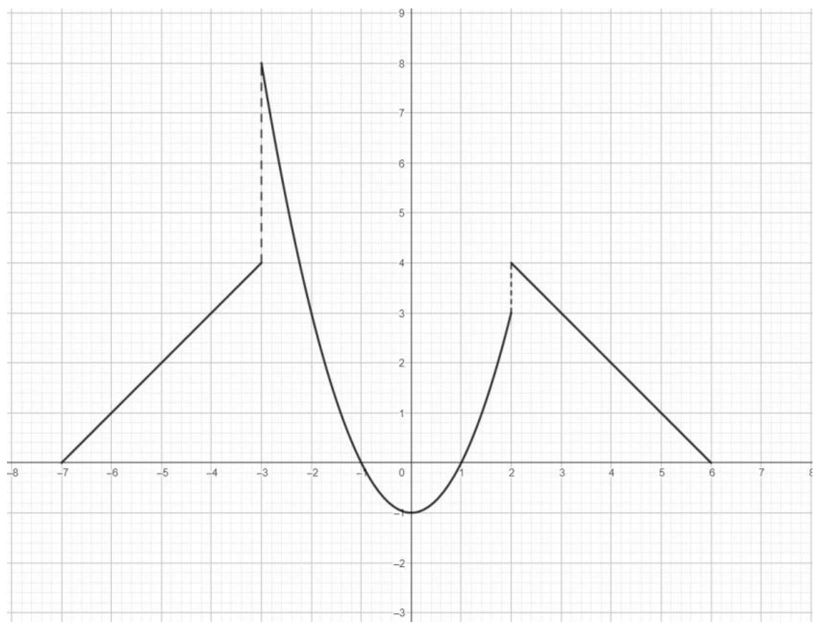
$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Esta primera actividad, está asociada a la *acción* de sustituir valores del dominio cercanos a a, donde los estudiantes deben identificar los límites de $f(x)\ y\ g(x)$ y analizar el comportamiento de las imágenes, al aproximarse a los valores dados. También, se involucra la *interiorización* a *proceso* de la *acción,* analizando las funciones, visualizando el registro gráfico y traduciendo sus observaciones al registro algebraico o simbólico. Además, se promueve el *proceso* de comparar los registros numérico y gráfico, al contrastar la información obtenida de la gráfica con su representación algebraica o simbólica, identificando la tendencia de las funciones cuando x se aproxima a los valores dados.

Actividad 2. Analizando las tendencias de las funciones.

1. Observa el registro gráfico de la siguiente función $h(x) = \begin{cases} x+7 & si\ -7 \leq x \leq -3 \\ x^2 - 1 & si\ -3 < x \leq 2 \\ -x+6 & si\ 2 < x \leq 6 \end{cases}$

¿Cuál es la tendencia de la función $h(x)$ cuando x se aproxima al entorno de -3 ? ¿y por la izquierda y derecha de 2? Justifica.



Cuando x se aproxima a -3 desde la izquierda, la función $h(x)$ tiende al valor 4. Por otro lado, si x se aproxima a -3 desde la derecha, la función $h(x)$ tiende al valor 8. Como las funciones tienden a valores diferentes, no existe límite cuando x se aproxima a -3.

En cuanto a x se aproxima al 2 por la izquierda, la función $h(x)$ tiende a 3 y cuando x se aproxima al 2 pero desde la derecha, la función $h(x)$ tiende a 4, si bien los valores al que tienden $h(x)$ se acercan, no son exactamente iguales en ambos lados, lo que indica que no hay un valor único en $x = 2$ y no existe límite.

2. Completa la tabla

x	-7	-5	-3	-1	0	1	2	4	5	6
$h(x)$	0	2	4	0	-1	0	3	2	1	0

a. Redacta una explicación sobre el comportamiento de las imágenes de $h(x)$ a medida que x se aproxima a -3, 0, 2 y 4.

Cuando x *se aproxima a -3, por la izquierda, la función* $h(x) = x + 7$ *tiende al valor 4, sin embargo, si tomamos valores desde la derecha la función es* $h(x) = x^2 - 1$ *y tiende al valor 8.*

Si x *se aproxima al cero desde la izquierda, la función es* $h(x) = x^2 - 1$ *y tiende a -1 y si tomamos valores desde la derecha la función es la misma y tiende al mismo valor -1.*

Para el caso en que x *se aproxima al 2 por la izquierda, la función es* $h(x) = x^2 - 1$ *y tiende al valor 3, por otro lado, si tomamos valores que se aproximan desde la derecha la función cambia a* $h(x) = -x + 6$ *y tiende al valor 4.*

Finalmente, cuando x *se aproxima al 4 por la izquierda la función es* $h(x) = -x + 6$ *y tiende a 2, de igual forma si* x *se aproxima al 4 desde la derecha la función tiende al mismo valor 2.*

El comportamiento de las imágenes de la función $h(x)$ *varía dependiendo del valor al que se aproxima la* x*.*

b. ¿Existe límite cuando x se aproxima a 1? ¿y si x se aproxima a -1? Exprésalo lo tuviera en su registro algebraico o simbólico y si no tiene, justifica

Cuando x *se aproxima a 1,* $h(x) = x^2 - 1$ *entre* $-3 \leq x \leq 2$

Entonces $\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = (1)^2 - 1$

$\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0$

Por otro lado, cuando x *se aproxima a -1* $\lim_{x \to -1} x^2 - 1 = (-1)^2 - 1$

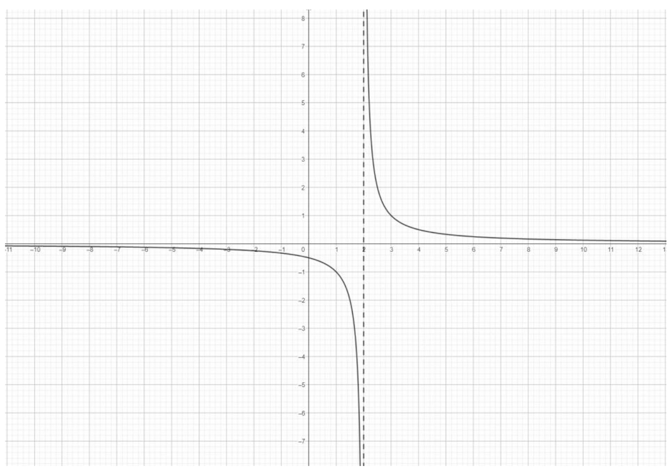
$\lim_{x \to -1} (-1)^2 - 1 = 0$

Ambos límites tienden a cero.

Esta segunda actividad trabaja la *acción* de valorar una función en su registro numérico, el *proceso* de comparar registros numérico y gráfico, la *coordinación* de transformaciones entre registros semióticos y el *proceso* de describir verbalmente y por escrito la tendencia de la función. Al reconocer patrones de comportamiento de la función en ambos registros se espera que el estudiante sea capaz de generalizar esta tendencia, utilizando el lenguaje matemático. Además, esta actividad involucra la reflexión sobre cómo las diferentes representaciones semióticas aportan información complementaria sobre el comportamiento de la función al aproximarse a un punto.

Actividad 3. Tendencia al infinito.

1. Dado el registro gráfico de la función $k(x) = \frac{1}{x-2}$, obtiene las imágenes de la función en la tabla proporcionada.



a. Evalúa la función $k(x) = \frac{1}{x-2}$ en la siguiente tabla

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$k(x)$	-10	-100	-1000	No definida	1000	100	10

b. Observa los valores de $k(x)$ cuando x se aproxima a 2 desde la izquierda. ¿Hacia qué valor parece tender la función $k(x)$?

La función $k(x)$ parece tender a valores negativos muy grandes, puede decirse que tiende a $-\infty$ conforme x se aproxima a 2 por la izquierda.

c. Observa los valores de $k(x)$ cuando x se aproxima a 2 desde la derecha. ¿Hacia qué valor parece tender la función $k(x)$?

La función $k(x)$ parece tender a valores positivos muy grandes, puede decirse que tiende a $+\infty$ conforme x se aproxima a 2 por la derecha.

d. Con base en tus observaciones, describe la tendencia de $k(x)$ conforme x se acerca a 2.

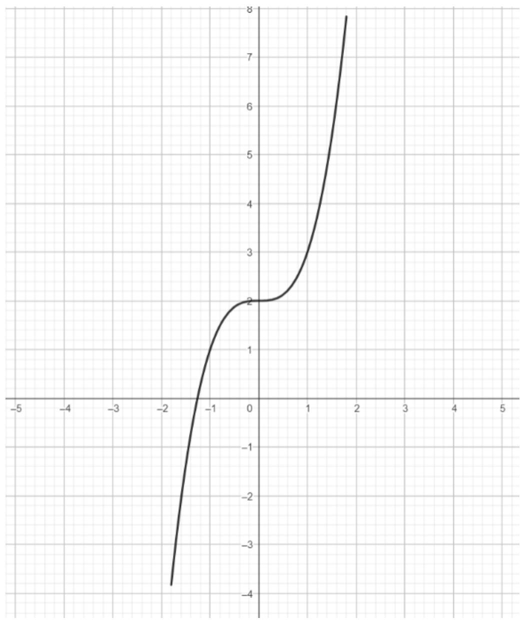
Según lo que observo, cuando x se aproxima al 2 desde la izquierda, la función $k(x)$ tiende a $-\infty$, y cuando x se aproxima al 2 desde la derecha, la función $k(x)$ tiende a $+\infty$. Como los límites laterales son diferentes, podemos decir que no existe un límite en $x = 2$. Matemáticamente sería $\lim_{x\to 2^-} k(x) = -\infty$ y además $\lim_{x\to 2^+} k(x) = +\infty$ así que se puede decir que el límite de la función no existe.

En cuanto a la tercera actividad, las descomposiciones genéticas involucradas son la *acción* de sustituir valores del dominio cercanos a a en el registro algebraico o simbólico de la función real dada para determinar las imágenes correspondientes. *Proceso* de comparar los registros numérico y gráfico de la función real dada para observar que ambos reflejan la tendencia de la función a un valor *L* cuando x se aproxima a a, y la *acción* de utilizar el lenguaje matemático en la formulación de enunciados sobre límites. La actividad permite al estudiante explorar la aproximación al valor límite *L* desde diferentes perspectivas, promoviendo la *coordinación* entre registros y el uso del lenguaje matemático, lo cual facilita la comprensión de la noción de límite y su significado matemático.

Respuestas esperadas en la tarea de evaluación

Tarea de evaluación

Actividad 1. Observa las gráficas de las funciones representadas e indica los valores de los límites indicados.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

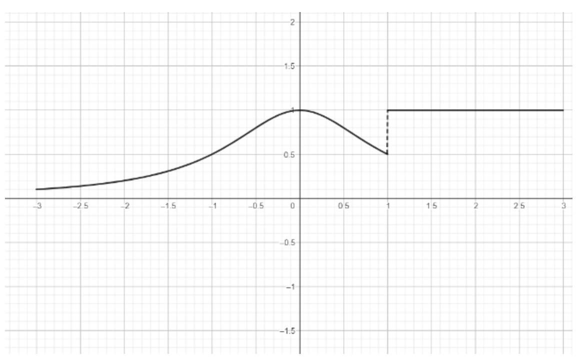
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

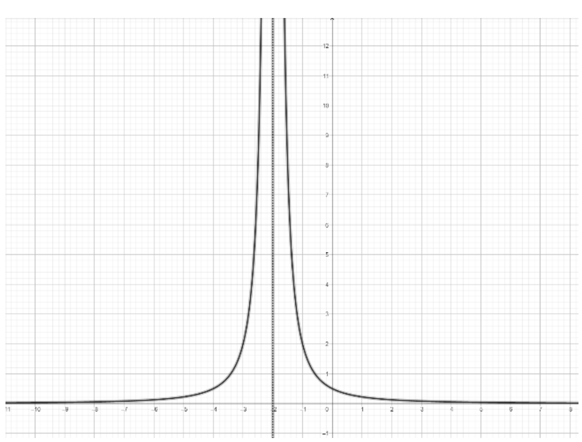


$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.5$$

$$\mathit{lim}_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

$$\mathit{lim}_{x\to -1^-} f(x) = 0.5$$

$$\mathit{lim}_{x\to -1^+} f(x) = 0.5$$



$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$$

Actividad 2. Dada las funciones: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$.

1. Determina el comportamiento de las funciones cuando x se aproxime al valor asignado, utilizando los registros gráfico y numérico.

Registro numérico

$$Para\ Grupo\ 1 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 2 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 3 \end{cases}$$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2.01
$f(x)$	8.41	8.94	8.994	9	9.006	9.06

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3.01
$g(x)$	24.389	26.730	26.973	27	27.027	27.270

$$Para\ Grupo\ 2 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a - 2 \end{cases}$$

x	3,9	3,99	3,999	4	5,001	5.01
$f(x)$	24.01	24.90	24.99	25	36.012	36.120

x	-2,01	-2,004	-2,002	-2	-1,998	-1.996
$g(x)$	-8.120	-8.048	-8.024	-8	-7.976	-7.952

$$Para\ Grupo\ 3 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \end{cases}$$

x	-0.08	-0.06	-0.02	0	0.02	0.06	0.08
$f(x)$	0.8464	0.8836	0.9604	1	1.0404	1.1236	1.1664

x	-0.08	-0.06	-0.02	0	0.02	0.06	0.08
$g(x)$	-0.000512	-0.000216	-0.000008	0	0.000008	0.000216	0.000512

$$Para\ Grupo\ 4 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a - 3 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \end{cases}$$

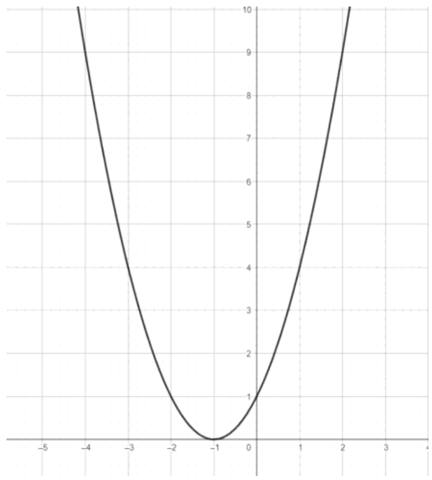
x	-3.08	-3.04	-3.02	-3	-2.98	-2.96	-2.92
$g(x)$	4.3264	4.1616	4.0804	4	3.9204	3.8416	3.6864

x	3.79	3.89	3.99	4	4.05	4.10	4.15
$g(x)$	54.439939	58.863869	63.521199	64	66.430125	68.921	71.473375

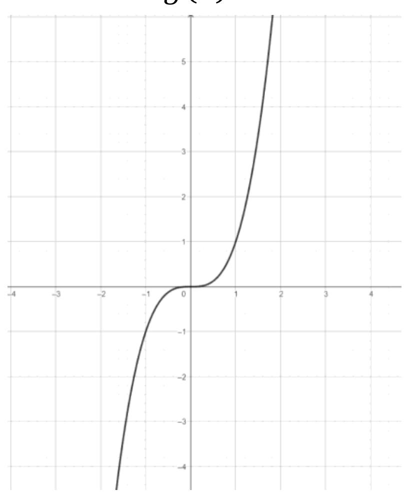
Registro gráfico

El registro gráfico es igual en todos los casos

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$



$$g(x) = x^3$$



2. Determina el límite, si existe, al que tienden las funciones, conforme x se aproxime a los valores asignados y exprésalo en su registro algebraico o simbólico.

$$\textit{Dada las funciones: } f(x) = x^2 + 2x + 1 \; y \; g(x) = x^3$$

$$Para\ Grupo\ 1 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 2 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 2x + 1 = 13 \; y \; \lim_{x \to 3} x^3 = 27$$

$Para\ Grupo\ 2 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a - 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 4} x^2 + 2x + 1 = 25\ y \lim_{x \to -2} x^3 = -8$$

$Para\ Grupo\ 3 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 2x + 1 = 1\ y \lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

$Para\ Grupo\ 4 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a - 3 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 4 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -3} x^2 + 2x + 1 = 4\ y \lim_{x \to 4} x^3 = 64$$

3. Compara las funciones $f(x)$ y $g(x)$. ¿Cómo son los límites de ambas funciones cuando se aproximan al mismo valor de x?¿Es posible que ambos límites sean iguales, aunque las funciones sean diferentes? Explica tus respuestas

Para no hacerlo extenso, tomamos de referencia al

$Grupo\ 1 \begin{cases} f(x), x\ se\ aproxima\ a\ 2 \\ g(x), x\ se\ aproxima\ a\ 3 \end{cases}$

$$Si\ x \to 2, entonces\ \lim_{x \to 2} x^2 + 2x + 1 = 13\ y \lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

$$Si\ x \to 3, entonces\ \lim_{x \to 3} x^2 + 2x + 1 = 16\ y \lim_{x \to 3} x^3 = 27$$

Si en ambos casos x se aproxima al mismo valor, los límites son diferentes. Es posible que dos funciones diferentes tengan el mismo límite en un punto específico. Esto se debe a que el valor del límite no depende de la expresión exacta de la función, sino de su comportamiento cerca de ese punto. Sin embargo, en el caso de las funciones dadas $f(x) = x^2 + 2x + 1\ y\ g(x) = x^3$ los límites no son iguales. Por lo tanto, aunque es posible que dos funciones distintas compartan el mismo límite en ciertos puntos, en este caso específico no es así.

4. ¿Existe diferencia entre aproximación y tendencia? Explica
   Sí, hay una diferencia entre aproximación y tendencia. Aproximación se refiere cuando la variable x se acerca a un valor determinado, pero sin necesariamente alcanzarlo y sin embargo la tendencia se refiere al comportamiento de la función conforme la variable se acerca al valor determinado.
5. Exponga sus respuestas y justificaciones frente a la clase, compare sus resultados con los de otros grupos, y participe activamente en la discusión haciendo preguntas y reflexionando sobre diferentes formas de interpretar y calcular los límites.
   Se espera que los estudiantes participen activamente exponiendo sus respuestas y justificaciones frente a la clase. Durante la exposición, compararán sus resultados con los de otros grupos para identificar coincidencias o diferencias en la manera en que interpretaron y calcularon los límites. Además, deberán formular preguntas que promuevan el debate y la reflexión, como, por ejemplo, qué ocurre cuando los límites laterales no coinciden o cómo se comporta una función en el infinito. los límites y aprendan de las diferentes interpretaciones presentadas por sus compañeros.

La tarea de evaluación en la fase de ejercicios del ciclo ACE consolida lo trabajado, reforzando las acciones, procesos y coordinaciones clave para el aprendizaje de la noción de límite. Este proceso fomenta la reflexión y la interiorización, permitiendo a los estudiantes consolidar la comprensión y adquirir autonomía en la aplicación de la noción de límite de funciones reales en un punto, siendo partícipes de la comunidad establecida en el aula, asegurando que las habilidades y conocimientos trabajados a lo largo del ciclo ACE se afiancen y se profundicen, preparándolos para futuros desafíos en el análisis matemático.

Coherencia del Diseño con los Objetivos

Después de lo expuesto en cuanto a las descripciones de la descomposición genética, las actividades que conforman las tareas, y las respuestas esperadas de los estudiantes, es posible identificar cómo el diseño propuesto para abordar los aspectos clave de la noción de límite de funciones reales sí conduce al alcance de los objetivos.

El primer objetivo específico es ***proponer tareas para involucrar la articulación de los registros semióticos de la noción de límite de funciones reales en un punto***. Para ello, hemos diseñado actividades organizadas en incisos, basadas en la descomposición genética preliminar, que funcionan como instrucciones detalladas de manera que su ejecución permita a los estudiantes observar, analizar, identificar y reflexionar para lograr coordinar las representaciones semióticas de la noción de límite en los registros gráfico, numérico, algebraico o simbólico y el verbal. Cada actividad contenida en las tareas ofrece la oportunidad de reflexionar probando tanto con funciones cuyos valores tienden hacia un número específico como con aquellas que no presentan esta característica en $x = a$ ya que al utilizar distintos tipos de sucesiones de números en el dominio que se aproximen a $x = a$ tanto desde la izquierda como desde la derecha en los diversos registros, permitirá al estudiante identificar si, a medida que x se aproxima a $x = a$, la sucesión correspondiente de valores en el rango se aproxima o no a un valor de $y = L$ tal y como lo sugieren Hernández et al. (2023). La importancia de este objetivo específico radica en que, según Duval (2016), el conocimiento matemático no se desarrolla plenamente en un único registro de representación, sino que se enriquece y se hace más robusto a través de la conversión y coordinación de diferentes registros de representación, por lo tanto, consideramos que las tareas que diseñamos se alinean con el primer objetivo planteado.

Con el segundo objetivo específico buscamos ***plantear tareas para impulsar la interpretación y asignación de significado a los registros semióticos***, mediante la descripción, explicación y justificación de las observaciones, fomentando la modificación, construcción o adopción de un discurso matemático, según Sfard (2008). Este proceso resulta posible porque, incluso antes de cualquier actividad formal, los estudiantes ya cuentan con una idea preliminar de conceptos como aproximación, tendencia, límite, cercanía, vecindad y entorno, provenientes de su experiencia cotidiana (Cornu, 1981). Asimismo, las instrucciones permiten que no solo se interactúe con los registros gráfico, algebraico o simbólico, numérico y verbal, sino que desarrollen una comprensión de estos mediante la comparación de cálculos numéricos con los distintos registros mencionados destacando la importancia de coordinar los diferentes registros semióticos para comprender el comportamiento de las funciones al acercarse a un punto. Así, buscamos favorecer que los estudiantes evalúen el comportamiento de las funciones en torno a un punto específico, estableciendo relaciones entre cada representación y asignación de un significado de lo que significa el límite de una función en dicho punto.

En este sentido, las actividades diseñadas para cada etapa del ciclo ACE garantizan una construcción progresiva de la noción de límite, lo que resulta esencial para lograr el objetivo general de promover un aprendizaje integral de este concepto. El enfoque en la interpretación de los registros semióticos en el diseño de tareas fomenta una experiencia de aprendizaje que transciende la manipulación simbólica, dado que permite a los estudiantes conectar las ideas matemáticas abstractas con representaciones concretas. Con esto buscamos que se dé el aprendizaje de la noción de límite, alineándose directamente con el objetivo general. Además, la descomposición genética en la que se basan estas tareas estructura una ruta clara de aprendizaje, que lleva a los estudiantes desde acciones iniciales, como el método de exhaución, hasta la coordinación de registros semióticos, facilitando el desarrollo de las estructuras mentales necesarias para comprender la noción de límite de manera integral y significativa

Consideramos que nuestra propuesta cumple con el objetivo general *de* ***Diseñar una secuencia de tareas para promover el aprendizaje de la noción de límite en estudiantes de tercer año de educación media en Paraguay***, debido a que favorece la articulación y coordinación de diferentes registros semióticos y, además, el diseño permite asignar significado y desarrollar el discurso matemático de los estudiantes. Aunque no es la única vía, creemos que esta aproximación es efectiva para que los estudiantes interioricen la noción del límite, preparándolos para la definición formal a través de actividades graduales, desde experiencias intuitivas hasta un análisis más riguroso.

Por lo anterior, el diseño de la secuencia de tareas que proponemos promueve el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto, alineándose con el objetivo general. Aunque no ha sido implementada, confiamos en que, podría lograr los resultados esperados, facilitando la construcción de estructuras mentales y la coordinación de los registros semióticos.

Consideraciones sobre las posibles respuestas y dificultades

En este trabajo, no profundizamos en las posibles respuestas que los estudiantes podrían dar en las tareas, especialmente aquellas que se desvían de las respuestas esperadas. Reconocemos que estas desviaciones podrían reflejar dificultades epistemológicas, didácticas y cognitivas, relacionadas tanto con el propio concepto de límite como con las creencias y concepciones que los estudiantes tienen sobre la ciencia y su aprendizaje. Sin embargo, abordar estas respuestas en detalle excede el alcance de nuestro trabajo y corresponde a investigaciones futuras, dado que su complejidad implica un análisis más extenso.

Es importante señalar que muchas veces las desviaciones en las respuestas no son simplemente errores, sino que pueden reflejar una aplicación incorrecta del conocimiento en contextos inadecuados, como indica Brousseau (1983, citado en Aquere et al., 2009). Los estudiantes, al enfrentarse a nuevos conceptos, generan construcciones personales que, aunque no sean científicamente correctas, requieren ser revisadas y reestructuradas para avanzar en su comprensión (Aquere et al., 2009).

Diversos teóricos, como Cornu (1983) y Sierpinska (1994), han identificado obstáculos epistemológicos clave en el concepto de límite, como el horror al infinito y dificultades geométricas, lógicas y simbólicas. Estos obstáculos, relacionados con la articulación entre diferentes sistemas de representación, afectan la comprensión de los estudiantes, tal como señalan Bernal y Quitian (2020). Aunque no profundizamos en estos aspectos, los hemos considerado en nuestra propuesta, reconociendo su influencia en el aprendizaje de la noción de límite y abriendo la puerta a futuras investigaciones sobre las respuestas que se desvían de lo esperado.

Recomendaciones

Las recomendaciones que presentamos están dirigidas a lectores e investigadores en el ámbito de la matemática educativa que deseen aplicar o adaptar las propuestas que hemos desarrollado en contextos educativos similares. Nuestro objetivo es proporcionar orientaciones para facilitar la implementación del diseño de la secuencia de tareas enfocada en la noción de límite de funciones reales en un punto. Estas recomendaciones buscan servir como guía para quienes, desde una perspectiva didáctica, estén interesados en promover el aprendizaje de este concepto matemático.

- Profundizar en el análisis de los obstáculos epistemológicos relacionados con la noción de límite: los obstáculos representan una barrera significativa en la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. Comprender cómo estos obstáculos influyen en las respuestas y procesos de aprendizaje permitirá diseñar estrategias didácticas más eficaces que atiendan estas dificultades de manera directa, mejorando los resultados en la enseñanza de este concepto fundamental en el análisis matemático.
- Implementar el diseño de la secuencia de tareas y analizar los resultados: Como este trabajo se limita simplemente al diseño, sugerimos que debe implementarse la secuencia de tareas propuesta para evaluar su efectividad en el aula. A través del análisis de los resultados obtenidos, se podrá verificar si la descomposición genética preliminar permite a los estudiantes construir las estructuras mentales necesarias para la comprensión de la noción de límite. Además, el análisis permitirá identificar posibles ajustes o mejoras en las tareas, con el fin de optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta retroalimentación basada en la práctica es esencial para refinar las secuencias y asegurar su funcionalidad.

- Profundizar en la noción del límite, considerando más tipos de funciones: es importante ampliar el estudio de la noción de límite para incluir funciones más variadas, como las funciones trigonométricas y logarítmicas. Este enfoque permitirá concretar el tema de manera más completa, ya que muchas de las funciones que los estudiantes encontrarán en niveles avanzados de matemáticas pertenecen a estas categorías. La inclusión de funciones trigonométricas, por ejemplo, ofrece la oportunidad de analizar el comportamiento de funciones periódicas y sus límites en puntos críticos. Por otro lado, las funciones logarítmicas presentan desafíos relacionados con el crecimiento asintótico y la tendencia al infinito. La incorporación de estas funciones no solo enriquecerá el entendimiento de los estudiantes, sino que también les permitirá aplicar la noción de límite a una variedad más amplia de situaciones matemáticas.
- Integrar los registros semióticos en las tareas: la integración de los registros semióticos es esencial para conectar diferentes formas de representación (gráfica, algebraica o simbólica, numérica y verbal). Esta conexión no solo favorece el aprendizaje de la noción de límite, sino que también facilita la transición de los estudiantes entre las representaciones abstractas y las concretas. A medida que los estudiantes interactúan con múltiples registros, pueden observar cómo las diferentes representaciones se complementan, lo que enriquece su comprensión.
- Extender el estudio hasta la definición formal del límite: aunque en esta propuesta nos hemos centrado en la noción del límite, sugerimos que no se limite el aprendizaje solo a esta parte. Sería valioso continuar el proceso de enseñanza hasta alcanzar la definición formal del límite. La formalización del concepto es crucial para que los estudiantes comprendan plenamente su rigor matemático y puedan aplicar el límite en contextos más

avanzados. Guiar a los estudiantes desde la noción inicial de aproximación y tendencia hacia la definición épsilon-delta les permitirá adquirir una comprensión sólida y precisa que será fundamental en futuros estudios de cálculo y análisis.

- Abordar la fenomenología en la enseñanza del límite: sería interesante incorporar la fenomenología en futuras investigaciones y propuestas didácticas sobre el límite. Este enfoque permitiría a los estudiantes conectar las experiencias cotidianas, como la aproximación y la convergencia de magnitudes, con el concepto matemático de límite. A través de la fenomenología, se puede facilitar una comprensión más intuitiva y experiencial del límite, preparando el terreno para una transición más efectiva hacia su definición formal. Además, al destacar cómo el concepto de límite emerge de fenómenos observables, se enriquece el proceso de aprendizaje y se promueve una internalización más profunda de este concepto abstracto.
- La investigación sobre la efectividad de las secuencias de tareas debe ser un proceso continuo: realizar estudios que evalúen cómo estas secuencias impactan en el desarrollo de las estructuras mentales de los estudiantes permitirá ajustar y mejorar las prácticas pedagógicas. Asimismo, el intercambio de experiencias entre docentes e investigadores enriquecerá el enfoque de enseñanza, al compartir buenas prácticas y estrategias innovadoras. Este diálogo entre la teoría y la práctica es clave para asegurar que las propuestas pedagógicas sean efectivas y que los estudiantes estén preparados para enfrentar conceptos matemáticos más avanzados con una base sólida en la noción de límite.

En conclusión, aunque reconocemos que hay muchos aspectos que se pueden mejorar, hemos identificado estos puntos como los más significativos para promover el aprendizaje de la noción de límite. Consideramos fundamental implementar el diseño de la secuencia de tareas y evaluar su efectividad en el aula, así como ampliar el enfoque para abordar funciones más variadas. Sugerimos que incluir los registros semióticos y la fenomenología en la enseñanza de este tema matemático favorecería el aprendizaje. Además, insistimos en la importancia de extender el aprendizaje hasta la definición formal del límite, pues proporciona a los estudiantes una comprensión más profunda y rigurosa. Sabemos que la investigación continua y el intercambio de experiencias docentes son esenciales para ajustar y mejorar las prácticas pedagógicas, asegurando que los estudiantes estén preparados para afrontar conceptos matemáticos más complejos en el futuro.

Reflexiones

Este trabajo que hemos realizado sobre el diseño de una secuencia de tareas para promover el aprendizaje de la noción de límite de funciones reales en un punto dirigidos a estudiantes paraguayos de tercer año de la educación media nos ha permitido cuestionar y revisar nuestras creencias y prácticas en el aula, invitándonos a modificar nuestra visión sobre la enseñanza de la matemática y nuestro rol como facilitadores del aprendizaje.

Toda investigación tiene el poder de transformar al investigador (Freire, 2008), y aunque consideramos este trabajo como un ejercicio de investigación, afirmamos que ha cambiado nuestra manera de pensar sobre nuestras prácticas de enseñanza porque nos ha llevado a reflexionar y a replantear nuestras estrategias pedagógicas.

Estudiar la teoría APOE, las representaciones semióticas de Duval (2016) y otras teorías como el enfoque comunicacional de Sfard (2008) sobre el aprendizaje nos impulsaron a reflexionar la manera en que estructuramos nuestras clases, buscando que los estudiantes se conviertan en protagonistas de su propio aprendizaje, y no solo receptores de conocimiento. Este enfoque más centrado en el estudiante nos lleva a transformar nuestra manera de enseñar, promoviendo una mayor interacción y participación en el aula.

En este proceso hemos aprendido que el diseño de tareas educativas no puede ser un proceso superficial o meramente funcional para que los estudiantes aprueben. Como profesores, debemos ir más allá de la simple creación de actividades mecánicas. El verdadero desafío es diseñar tareas que promuevan el aprendizaje, donde los estudiantes puedan construir y comprender los conceptos, en lugar de limitarse a memorizar o repetir procedimientos. Esto implica un compromiso con la creación de experiencias que fomenten la reflexión y el razonamiento, lo que consideramos esencial para lograr un impacto real en el desarrollo de sus habilidades matemáticas.

Aunque reconocemos los desafíos que enfrentaremos al reincorporarnos a nuestras instituciones, confiamos en que los conocimientos adquiridos durante esta maestría nos permitirán adaptar nuestras prácticas y fomentar un ambiente más colaborativo y reflexivo en el que los estudiantes puedan participar activamente en la construcción de su propio aprendizaje.

Bibliografía

Andersen, K (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. Archive for History of Exact Sciences 31, no. 4 (1985): 291-367

Apóstol, T. M. (1967). Cálculo (Vol. 1, Trad. F. Vélez Cantarell). Editorial Reverté.

Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, M., & Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. Premisa, 40, 14-24.

Arias B., A. L. (2019). Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación. [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. Repositorio institucional Universidad de Alicante. Disponible en https://rua.ua.es/dspace/handle/10045/99128

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., ... & Weller, K. (2014). The APOS paradigm for research and curriculum development. APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education, 93-108.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). Cálculo Diferencial e

Integral. Editorial Sínteses.

Bernal Gamboa, J. D., y Quitian Ariza, K. T. (2020). Incidencia de las diferentes concepciones del paso al límite en la construcción de conceptos y su importancia en la formación inicial de profesores de matemáticas. [Trabajo de grado Licenciatura en matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Universidad Pedagógica Nacional.

Blázquez, S., y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. Aula, 10, 119-135. https://doi.org/10.14201/3550.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 4(3), 219-236.

Boyer, C. (1986). Historia de las matemáticas. Alianza Universidad textos.

Boyer, C. B. (1949). The History of the Calculus and Its Conceptual Development. Dover Publications.

Boyer, C.B. (1959). The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc.

Builes Peláez, J. S. (2020). Unidad didáctica sobre el concepto de límite para el fortalecimiento de la argumentación. [Trabajo final de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNAL

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. Editorial Thompson.

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6(1), 27-40.

Cercado Aveiga, R. A. (2018). Diseño de la unidad didáctica: Funciones y límites. [Tesis de maestría en Formación del Profesorado, Universitat de Barcelona]. Repositorio Universitat de Barcelona

Chamorro Lezcano, U. (1998). Desarrollo educativo alternativo para la transición hacia la democracia. JN Caballero Merlo, & RL Céspedes Rufinelli, Realidad social del Paraguay (págs. 417-435). CIDSEP.

Coba Niño, J. A. (2017). Construcción de una secuencia de tareas a partir de una fenomenología didáctica del concepto de función [Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Disponible en: https://repository.udistrital.edu.co/home

Constitución de la República del Paraguay. (1992). Constitución de la República del Paraguay. Honorable Cámara de Senadores. https://www.bacn.gov.py/constitucion-nacional

Cornu, B (1981) Aprendiendo el concepto de límite: Modelos espontáneos y modelos propios. Editorial Universidad de Grenoble.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. Journal of mathematical behavior, 15 (2), 167-192.

De La Fuente, Á. C., y Armenteros, M. G. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(3), 277-310.

Dos Santos Ferreira, F., y de Souza Oliveira, E. S. (2023). A Construção Da Noção De Limite A Partir Do Estudo Das Funções Racionais: Uma Proposta De Sequência De Tarefas Por Meio Do GeoGebra. Acervo-Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, 5, 1-18.

Dunham, W. (2005). La galería del cálculo: obras maestras desde Newton hasta Lebesgue. Princeton University Press.

Duque Higuita, J. C. (2020). Material concreto como mediador en la enseñanza del límite de una función. [Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Universidad Nacional de Colombia.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En Duval, R., y Sáenz, A. Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Elías, R. (2014). Análisis de la reforma educativa en Paraguay: discursos, prácticas y resultados. Rede de Bibliotecas Virtuais CLACSO.

Franco Carzolio, G. D., Olave Baggi, M. I., y Rosas Mendoza, A. M. (2021). La descomposición genética como marco de referencia para el análisis a priori de actividades. Educación matemática, 33(3), 39-66.

Freire, P. (2008). Pedagogía de la Autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa. Siglo XXI Editores.

García, F. J. (2019). Introducción a ‘Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos’. Avances de Investigación en Educación Matemática, (15), 1-4.

Gómez, P., Mora, M. F., y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, Pedro (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 197-268).

González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución. Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria, (33), 101-129.

Guachamin Quingaluisa, E. (2020). Análisis comparativo de las propuestas planteadas por: Cottrill, Swinyard y Larsen, Pons, y Arias, respecto a la descomposición genética de la concepción métrica de límite de una función en un punto. Quito: UCE.

Guerra Cáceres, M. E. (2021). La teoría APOE: un marco actual para la investigación e innovación en educación matemática en el nivel superior: un marco actual para la investigación e innovación en educación matemática en el nivel superior. Revista Diálogo Interdisciplinario sobre Educación-REDISED, 78-91.

Gusmão, T. C. R. S., y Font Moll, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. Educação Matemática Pesquisa, 2020, vol. 22, num. 3, p. 666-697.

Gutiérrez Figueroa, X. y Parraguez González, M. (2021). Mecanismo mental de síntesis en el aprendizaje del triángulo de Sierpinski como totalidad. Enseñanza de las Ciencias, 39(3), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2908

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. Avances de investigación en educación matemática, (1), 1-22.

Hernández Rebollar, L. A., Trigueros Gaisman, M., Ruiz Estrada, H., & Juárez Ruiz, E. D. L. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. 41-2 (2023), 117-135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

Jaimes Contreras, L. A. Chaves Escobar, R. F, & Vargas Hernández, J. (2017). La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática. Revista Boletín Redipe, 6(9), 73-78.

Kaput, J.J., & Thompson, P.W. (1994). Tecnología en la investigación en educación matemática: Los primeros 25 años en la JRME. Revista de investigación en educación matemática, 25 (6), 676-684.

Ley 1264, N. (1998). General de Educación. Asunción, Paraguay: Poder Legislativo.

Lockhart, P. (2009). El lamento de un matemático: cómo la escuela nos engaña en nuestra forma de arte más fascinante e imaginativa. Prensa literaria de Bellevue.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (9).

Ministerio de Educación y Cultura (2014). Actualización Curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media- Plan Común: Matemática y sus Tecnologías. MEC.

Molfino Vigo, V., & Buendía Abalos, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 5(1), 27-41.

Morante Rodríguez, J. D. (2020). Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE. [Tesis para obtener el título de maestro en educación matemática, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Ortiz S. L., (2012). Reforma educativa y conservación social. Aspectos sociales del cambio educativo en Paraguay. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XLII (4), 55-90.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezolana. Boletín, 1(2), 59-79. 1(2), 59-81.

Penzo, W. (2009). Diseño y elaboración de actividades de aprendizaje.

Radillo, M., y González, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27, 853-861.

Rendón Mayorga, C. G. (2017). Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de matemáticas. [tesis de maestría en docencia de la matemática Universidad Pedagógica Nacional]Repositorio Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/9457.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(1), 89-112.

Romiti, M. R., Sgreccia, N., & Caligaris, M. (2012). Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real. In X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Rubiano, G. N. (2018). Iteración y fractales [con Mathematica] (2ª ed.). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.

Ruiz Soto, S. (2019). El concepto de límite en Bachillerato. [Trabajo para obtener el título de
Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Universidad de Valladolid]. Repositorio Documental de la Universidad de Valladolid.

Santos Trigo, M. L. (1995). ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. Educación matemática, 7(1), 46-61.

Sfard, A. (2008). Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional. Universidad del Valle.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics (Vol. 2). Psychology Press.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012). Educación matemática crítica: Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Ediciones Uniandes.

Sosa, P., & Kiernyezny Rovate, P. (2023). Análisis de resultados de pruebas estandarizadas en el Paraguay. AULA PYAHU - Revista De Formación Docente Y Enseñanza, 1(2), 150–161. https://doi.org/10.47133/rdap2023-12art12

Spivak, M. (2012). Cálculo (3ra ed., JM Oller Sala & L. Serra Camó, Trads.). Editorial Reverté.

Stewart, J. (2008). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, 6.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (7ma ed.). Cengage Learning.

Stewart, J. (2017). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (8.a ed.). Cengage Learning.

Trigueros, M. (2019). Diálogo entre las teorías APOE y TAD. Dialogue between APOE and ATD theories. Educaçao Matemática Pesquisa, 21(5).

Trigueros, M., y Oktaç, A. (2019). Task design in APOS Theory. Avances de Investigación en Educación Matemática, (15), 43-55.

Volverás Espinosa, A. (2015). Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo de la IE El Rosario integrando GeoGebra. [Trabajo de grado para optar por el título de Magister en la Enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales] Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/55982.