

Estudio del espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d es la métrica primeriza o de Baire

Brayan Ferney Quinchanagua Bernal

Brayam Arvey Ardila Ortiz

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad De Ciencia Y Tecnología

Departamento De Matemáticas

Bogotá D.C.

2020

Estudio del espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d es la métrica primeriza o de Baire

Brayan Ferney Quinchaneque Bernal 2015240065 C.C. 1023956072

Brayam Arvey Ardila Ortiz 2015240010 C.C. 1030672466

**Trabajo de grado para optar por el título
de Licenciado en Matemáticas**

Dirigido por: Gil Alberto De Jesús Donado Núñez

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad De Ciencia Y Tecnología
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.**

2020



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado "ESTUDIO DEL ESPACIO MÉTRICO $(\{0,1\}^n, d)$ DONDE d ES LA MÉTRICA PRIMERIZA O DE BAIRE", elaborado por los estudiantes BRAYAN ARVEY ARDILA ORTIZ, identificado con el Código 2015240010 y Cédula 1030672466 y BRAYAN FERNEY QUINCHANEGUA BERNAL, identificado con el Código 2015240065 y Cédula 1023956972, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y tres (43)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna



Meritoria



Laureada



El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de febrero de 2021.

Mg. ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ
Director del Trabajo de grado

Mg. BENJAMÍN RAFAEL SARMIENTO LUGO
Jurado del Trabajo de grado

Mg. JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN
Jurado del Trabajo de grado

A mi Abuela porque me dio la vida, me reveló el amor y me infundió mi fe en la belleza.

A mi hermana, que durante su breve estancia en mi vida y sin siquiera pronunciar una palabra, aclaró mi recorrido y me alentó cada día a continuar, a ella, que con sólo una sonrisa me mostraba lo valioso que es continuar luchando sin importar las adversidades que pueden aparecer en el camino.

Tabla De Contenido

Introducción	10
Justificación	12
Planteamiento del problema.....	13
Definición de la métrica de Baire	13
Objetivos.....	14
Objetivo general.....	14
Objetivos específicos	14
1 El espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ y las bolas abiertas y cerradas.....	15
1.1.1 Demostración: $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico	15
1.1.2 Construcción de las bolas en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$	18
1.1.3 Bolas abiertas	18
1.1.4 Bolas cerradas	19
1.1.5 Bolas equivalentes.....	21
2 La relación entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $[0, 1]$, conceptualización de una representación en el plano.....	24
2.1.1 Interpretación de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ como un conjunto de números	24
2.1.2 Representación doble de algunas sucesiones	25
2.1.3 El conjunto con doble representación	27
2.1.4 Interpretación de las bolas utilizando la operación suma disyunta	29
3 Abiertos, cerrados y las bolas en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$	39
3.1.1 Ejemplos de abiertos no básicos	39
3.1.2 Cualquier punto de una bola puede ser su centro.....	45
3.1.3 Una bola abierta es un conjunto cerrado	46
3.1.4 Una bola cerrada es un conjunto abierto	52
3.1.5 Espacio ultramétrico	53
4 Algunas propiedades topológicas y las sucesiones en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$	54
4.1.1 $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ Es totalmente acotado.....	54
4.1.2 Separación en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$	60
4.1.3 Recubrimiento de A , $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$	72
4.1.4 Ejemplo de convergencia de sucesiones y sucesiones de Cauchy en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$	78
5 Conclusiones.....	86
5.1.1 Conclusión general.....	86
5.1.2 Conclusiones específicas.....	87
6 Bibliografía	88

Tabla De Gráficos

Gráfico 1. Convenio para la representación gráfica	31
Gráfico 2. Ejemplo, representación de $\frac{11}{12}$	32
Gráfico 3. Ejemplo, representación de $\frac{4227}{16384}$	33
Gráfico 4. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$	33
Gráfico 5. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(x)$ con $x = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$	36
Gráfico 6. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(s)$ con $s = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$	37
Gráfico 7. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\varepsilon}(x)$ con $\varepsilon > 1$	38
Gráfico 8. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	40
Gráfico 9. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	40
Gráfico 10. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	41
Gráfico 11. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	41
Gráfico 12. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	42
Gráfico 13. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{6}}(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	42
Gráfico 14. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	43
Gráfico 15. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	44
Gráfico 16. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	44
Gráfico 17. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$	46
Gráfico 18. $(\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$	48
Gráfico 19. $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(x) \subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$	48
Gráfico 20. $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(x) \subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$	49
Gráfico 21. $\mathcal{B}_1(x) \not\subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$	49
Gráfico 22. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(x) \not\subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$	50
Gráfico 23. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(x)$ con $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$	50
Gráfico 24. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(p)$ con $p = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$	52
Gráfico 25. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(p)$ con $p = (0, 0, \dots)$	55
Gráfico 26. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((0, 1, \dots))$	55
Gráfico 27. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1, 0, \dots))$	55
Gráfico 28. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1, 1, \dots))$	56
Gráfico 29. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 0, \dots))$	57
Gráfico 30. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 1, \dots))$	57
Gráfico 31. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 0, \dots))$	57
Gráfico 32. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 1, \dots))$	58

Gráfico 33. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1,0,0, \dots))$	58
Gráfico 34. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1,0,1, \dots))$	58
Gráfico 35. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1,1,0, \dots))$	59
Gráfico 36. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1,1,1, \dots))$	59
Gráfico 37. $(0, 0, 1,0, 0, 1,0, 0, 1, \dots) \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z)$ con $z = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	61
Gráfico 38. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(w)$ con $w = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$	62
Gráfico 39. $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(v)$ con $v = (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1 \dots)$	62
Gráfico 40. $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((0, 0,1,0,0,1 \dots))$ y $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((0,0,1,1,1 \dots))$	66
Gráfico 41. $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((1,0,1,1,1,1,1 \dots))$ y $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots))$	67

Introducción

En el presente documento se muestra el estudio realizado en el espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$, donde d es la métrica primeriza o de Baire, estudio que se realizó partiendo de la exploración de diferentes objetos y características que son de interés en la topología. Sobre cada aspecto tratado se procuró ejemplificar a través de variedad de representaciones, que, además, permitieron hacer una caracterización del espacio mencionado.

En la primera sección se parte de la definición que presenta Gustavo Rubiano en su libro “Topología general”, y se procede a demostrar que efectivamente $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico. Además, se estudian las bolas en este conjunto; estas se construyen desde la definición general y se explora a través de ejemplos hasta caracterizar una definición específica para este espacio.

En la siguiente sección se presenta el estudio del conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, es decir, el conjunto de las sucesiones de ceros y unos, con el fin de conceptualizar una representación adecuada para utilizarla en el abordaje de todos los conceptos que se tratan en secciones posteriores, para ello, se encuentra una relación entre estas sucesiones y el intervalo $[0, 1]$. También se hacen las precisiones y las convenciones que se utilizarán para tener representaciones en el plano que faciliten la visualización de las propiedades topológicas del espacio métrico, además, se utiliza la suma disyunta de conjuntos para tener también una representación algebraica de estos elementos.

En el tercer capítulo se continúa explorando la obtención de abiertos por medio de uniones de bolas y se estudian las relaciones que hay entre las bolas abiertas y cerradas. También se demuestran algunas propiedades que resultan bastante extrañas a primera vista: toda bola abierta es un conjunto cerrado, toda bola cerrada es un conjunto abierto y cualquier punto de una bola

puede ser su centro, a partir de estas exploraciones se caracteriza al espacio $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ como un espacio ultramétrico. Se ejemplifica cada apartado utilizando la representación conceptualizada en la sección anterior.

En la última sección, se presenta el estudio de algunas propiedades topológicas en este espacio métrico, propiedades como la conexidad y separación, nociones de compacidad y convergencia de sucesiones. Para cada tópico se presentan ejemplos utilizando las representaciones que se desarrollaron en otras secciones. Por último, se muestra un compendio de conclusiones basadas en el desarrollo de cada apartado que se abordó en el documento y que sirven para caracterizar al espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$.

Justificación

La métrica de Baire define una forma de medir distancias entre sucesiones, al explorar de forma superficial el ejercicio propuesto por Gustavo Rubiano en el libro “Topología general” (2002) Pág. 34 se pudo evidenciar el potencial conceptual del tema, pues los espacios métricos que surgen al estudiar algunos conjuntos con la métrica de Baire parecen tener un comportamiento poco intuitivo, por lo dicho, la elección de este problema para el desarrollo del presente trabajo se sustenta en la posibilidad de realizar un estudio más amplio que permita caracterizar las particularidades del espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d , es la métrica de Baire, y que pueda ser utilizado posteriormente para caracterizar espacios de la forma $(X^{\mathbb{N}}, d)$ con conjuntos arbitrariamente grandes. Por otro lado, se considera que el problema escogido tiene suficiente potencial para desarrollar un proceso de estudio e investigación en torno a él; proceso que sirva como pretexto para ejercitar habilidades comunicativas escritas y orales, así como la autonomía como futuros docentes e investigadores.

Planteamiento del problema

Definición de la métrica de Baire

Sea X un conjunto no vacío. En $X^{\mathbb{N}}$ se define d , la métrica primeriza o de Baire como: dadas dos sucesiones, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ en X :

- $d(x, y) := \frac{1}{k}$, si $x_n = y_n$ para todo $n < k$ y $x_k \neq y_k$.
- Si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(x, y) = 0$.

Partiendo de la definición de la métrica d de Baire, se propone realizar un estudio en el espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ que permita indagar en algunas nociones topológicas como bolas: abiertas y cerradas, compacidad, separación, conexidad y convergencia de sucesiones. Para lo anterior, se presentan varios ejemplos de cada concepto en representaciones que permitan visualizar de mejor manera las propiedades que tiene este espacio métrico. Adicionalmente, a partir de la exploración se generaliza y obtienen algunas conclusiones sobre el comportamiento del espacio $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d es la métrica de Baire.

Objetivos

Objetivo general

- Realizar un estudio del espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d es la métrica de Baire.

Objetivos específicos

- Demostrar que $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico.
- Desarrollar una representación para $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en el plano que permita visualizar las propiedades del espacio métrico y que facilite la exploración.
- Estudiar conceptos como bolas abiertas y cerradas, conexidad, compacidad y convergencia de sucesiones en este espacio.
- Presentar variedad de ejemplos de cada concepto abordado, utilizando la representación en el plano.

1 El espacio métrico $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ y las bolas abiertas y cerradas

En primer lugar, es necesario cerciorarse de que efectivamente $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico, es por esto que se presenta una demostración de este hecho, sin embargo, en vez de tomar específicamente el conjunto de las sucesiones de ceros y unos, es decir $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, se demostrará para cualquier conjunto $X^{\mathbb{N}}$.

1.1.1 Demostración: $(X^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico

Para que $(X^{\mathbb{N}}, d)$ sea un espacio métrico se tendrá que mostrar que d cumple:

$$D1. \forall x \forall y (d(x, y) \geq 0) \text{ y } \forall x \forall y (d(x, y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y)$$

$$D2. \forall x \forall y (d(x, y) = d(y, x)), \text{ propiedad llamada "simetría de la distancia"}$$

$$D2. \forall x \forall y \forall z (d(x, y) \leq (d(x, z) + d(z, z))), \text{ propiedad llamada "desigualdad triangular"}$$

Se demostrará D1.

Por la definición de esta métrica se tiene que $d(x, y) := \frac{1}{k}$, si $x_n = y_n$ para todo $n < k$ y $x_k \neq y_k$ y si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se define $d(x, y) = 0$, por lo que esta deducción se consigue directamente de la definición de la métrica.

Se demostrará D2.

Sean $e, f \in X^{\mathbb{N}}$ con $e = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)$ y $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$. Supóngase que

$d(e, f) = \frac{1}{n}$, es decir, $e_1 = f_1, e_2 = f_2, e_3 = f_3, \dots, e_{n-1} = f_{n-1}$ y $e_n \neq f_n$, por la simetría de la igualdad se puede deducir $f_1 = e_1, f_2 = e_2, f_3 = e_3, \dots, f_{n-1} = e_{n-1}$ y $f_n \neq e_n$, luego se tiene $d(f, e) = \frac{1}{n}$ aplicando la definición de la métrica, así, $d(e, f) = d(f, e)$.

Para demostrar D3 se utilizarán los teoremas que se enuncian a continuación:

Teorema 1:

Si $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ entonces $Max\{a, b\} \leq a + b$.

Por contradicción. Supóngase que $Max\{a, b\} > a + b$, luego de la función Max se tiene que $Max\{a, b\} = a$ ó $Max\{a, b\} = b$, pero si $Max\{a, b\} = a > a + b$ entonces $0 > b$, pero esto es una contradicción pues $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ahora para $Max\{a, b\} = b > a + b$ se tiene $0 > a$, lo cual es contradictorio ya que $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por tanto $Max\{a, b\} \leq a + b$

Teorema 2

Si $\frac{1}{k}, \frac{1}{m} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, con k y m en naturales entonces $\frac{1}{Min\{k, m\}} = Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\}$.

De la función Max se tiene que $Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} = \frac{1}{k}$ ó $Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} = \frac{1}{m}$. Si el $Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} = \frac{1}{k}$ se tiene que $k \leq m$, enseguida $Min\{k, m\} = k$ por tanto se tendrá que $\frac{1}{Min\{k, m\}} = \frac{1}{k}$, luego, de $Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} = \frac{1}{m}$ se tiene que $m \leq k$ luego $Min\{k, m\} = m$, es decir que $\frac{1}{Min\{k, m\}} = \frac{1}{m}$. Por tanto, queda demostrado que $\frac{1}{Min\{k, m\}} = Max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\}$

Teorema 3:

Si x, y , y z son elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tales que $d(x, y) = \frac{1}{p}$ y $d(y, z) = \frac{1}{q}$, entonces $d(x, z) \leq$

$$\frac{1}{Min\{p, q\}}.$$

Siendo x, y, y y z sucesiones de $X^{\mathbb{N}}$, ahora supóngase que $d(x, y) = \frac{1}{p}$ y que $d(y, z) = \frac{1}{q}$; de $d(x, y) = \frac{1}{p}$ de aquí se deduce que $x_k = y_k, \forall k < p$, pues así se define la métrica de Baire. Lo mismo pasa con $d(y, z) = \frac{1}{q}$, de donde $y_k = z_k, \forall k < q$.

Ahora supóngase que $p < q$, como $y_k = z_k, \forall k < q$ se tendrá $y_k = z_k, \forall k \leq p$, y ya se sabe que $x_k = y_k, \forall k < p$, se concluye entonces que $x_k = z_k, \forall k \leq p$, luego $d(x, z) \leq \frac{1}{p}$.

Con una demostración análoga, suponiendo que $q < p$ se concluye $d(x, z) \leq \frac{1}{q}$; Y por estas dos desigualdades se tiene que $d(x, z) \leq \frac{1}{\min\{p, q\}}$.

Se demostrará D3

Sean $a, b, c \in X^{\mathbb{N}}$.

Como $d: X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se asegura que $\max\{d(a, c), d(c, b)\} \leq d(a, c) + d(c, b)$ por el primer teorema anterior.

Supóngase que $d(a, c) = \frac{1}{k}$ y que $d(c, b) = \frac{1}{m}$; es decir, a y c difieren por primera vez en la posición k , mientras que c y b lo hacen en la posición m .

Ahora se tomará $\min\{k, m\}$, se puede asegurar que $d(a, b) \leq \frac{1}{\min\{k, m\}}$ por lo expuesto en el tercer teorema. Luego $d(a, b) \leq \frac{1}{\min\{k, m\}} = \max\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\} = \max\{d(a, c), d(c, b)\}$, esto por el segundo teorema. Y como $\max\{d(a, c), d(c, b)\} \leq d(a, c) + d(c, b)$ se concluye $d(a, b) \leq (d(a, c) + d(c, b))$.

Ya se ha demostrado que efectivamente la métrica de Baire determina un espacio métrico con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, el paso natural es empezar a explorar cómo quedan las bolas en el espacio, este hecho será el que se procederá a explorar a continuación, primero, haciéndolo con las bolas abiertas, y después con las bolas cerradas.

1.1.2 Construcción de las bolas en el conjunto $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$

1.1.3 Bolas abiertas

A continuación, se presenta cómo son las bolas tomando $x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, como centro.

$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x, y) < \varepsilon\}$ es la definición de una bola abierta con centro x y radio ε .

Sin embargo, las distancias en la métrica de Baire están dadas por números de la forma $\frac{1}{k}$, así que, por ahora, se van a explorar con radios de este tipo.

Se halla inicialmente $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(x)$:

Para que se cumpla la condición $d(x, y) < \frac{1}{3}$ el denominador debe ser mayor que 3.

$$p = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots); d(x, p) = \frac{1}{4}.$$

$$q = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots); d(x, q) = \frac{1}{5}.$$

$$r = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots); d(x, r) = \frac{1}{6}.$$

Todas estas sucesiones están en la bola, es claro que cualquier sucesión cuyos primeros tres elementos sean iguales a los de x están en la bola. Esto es:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3\}$$

Ahora, otro ejemplo:

Sea la sucesión $z = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$\text{La } \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z) = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(z, y) < \frac{1}{2}\right\}$$

Para que se cumpla la condición $d(z, y) < \frac{1}{2}$ el denominador debe ser mayor que 2.

$$p = (0, 1, 1, p_4, p_5, \dots, p_k, \dots); d(z, p) = \frac{1}{3}.$$

$$q = (0, 1, 0, 0, q_5, q_6, \dots, q_k, \dots); d(z, q) = \frac{1}{4}.$$

$$r = (0, 1, 0, 1, 1, r_6, r_7, \dots, r_k, \dots); d(z, r) = \frac{1}{5}.$$

De lo cual se tiene que

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

En general para cualquier p en $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ se tendrá:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / p_1 = y_1, p_2 = y_2, p_3 = y_3, \dots, p_k = y_k\}$$

1.1.4 Bolas cerradas

Ahora se centra el estudio en averiguar qué pasa con las bolas cerradas, nuevamente se hará una exploración con radios de la forma $\frac{1}{k}$.

Tómese como definición de bola cerrada: $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x] = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x, y) \leq \frac{1}{k}\right\}$.

Ahora hágase la bola cerrada centrada en $p = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y con radio $\frac{1}{3}$, esto es:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}[p] = \left\{ y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

Véase que para que una sucesión esté en la bola, solo se necesita que su distancia con p sea menor o igual a $\frac{1}{3}$, por ejemplo, las siguientes sucesiones están en la bola:

$$\text{Si } y = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \text{ entonces } d(y, p) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Si } y = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \text{ entonces } d(y, p) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Si } y = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) \text{ entonces } d(y, p) = \frac{1}{5}.$$

Es decir, para que una sucesión esté en la bola cerrada es suficiente con que comparta los primeros dos elementos con p . $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}[p] = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = p_1 \wedge y_2 = p_2\}$.

$$\text{En general se tiene } \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p] = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = p_1, y_2 = p_2, y_3 = p_3, \dots, y_{k-1} = p_{k-1}\}.$$

Un hecho, hasta el momento curioso, es la posibilidad de hacer la siguiente igualación:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p] = \mathcal{B}_{\frac{1}{k-1}}(p), \text{ siempre que } k > 1. \text{ Pues en la bola abierta con radio } \frac{1}{k-1} \text{ se fijan las primeras}$$

$k - 1$ posiciones de la sucesión centro, lo mismo que en la bola cerrada con radio $\frac{1}{k}$.

Ahora obsérvese qué pasa con la bola $\mathcal{B}_1[p]$, tómese, como ejemplo, $p = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, es claro que toda sucesión y de la bola debe cumplir $d(p, y) \leq$

Algunos ejemplos de sucesiones que están en la bola son:

$$\text{Si } y = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \text{ entonces } d(y, p) = 1.$$

Si $y = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{2}$.

Si $y = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{3}$.

Si $y = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{4}$.

En este caso, cualquier sucesión que difiera de p en la primera posición estará en la bola, además estará cualquier sucesión que difiera en alguna posición con p , ya que $\frac{1}{k} < 1$ para todo $k > 1$. De lo dicho se puede concluir que cualquier sucesión diferente de p estará en la bola, y p también está en la bola, pues se sabe que $d(p, p) = 0 < 1$, así, se concluye que cualquier sucesión estará en $\mathcal{B}_1[p]$, por lo que $\mathcal{B}_1[p] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ para todo p .

1.1.5 Bolas equivalentes

La métrica de Baire solo define distancias de la forma $\frac{1}{k}$, donde k es un número natural, pero ya se tiene que el radio de una bola puede ser cualquier número real ε , en este apartado se muestra que para cualquier número real es posible encontrar una bola con un radio de la forma $\frac{1}{k}$ que sea equivalente.

Por ejemplo, tómesese $\varepsilon = \frac{2}{3}$ y $z = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

Sea $\mathcal{B}_{\frac{2}{3}}(z) = \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / d(z, y) < \frac{2}{3} \right\}$

Para que se cumpla la condición $d(z, y) = \frac{1}{k} < \frac{2}{3}$ el denominador debe ser mayor o igual que

$p = (0, 0, p_3, p_4, \dots, p_k, \dots)$; $d(z, p) = \frac{1}{2}$.

$q = (0, 1, 1, q_4, q_5, \dots, q_k, \dots)$; $d(z, q) = \frac{1}{3}$.

$$r = (0, 1, 0, 0, r_5, r_6, \dots, r_k, \dots); d(z, r) = \frac{1}{4}.$$

De lo cual se tiene que $\mathcal{B}_{\frac{2}{3}}(z) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / x_1 = 0\} = \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}[z] = \mathcal{B}_1(z)$.

Otro ejemplo, si se toma $\varepsilon = 4$ y $p = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$, ahora sea $\mathcal{B}_4(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) < 4\}$.

Se tiene que $d(p, y) = \frac{1}{k} < 4$ se cumple para todo valor de k , ya que el mayor valor que puede tomar una distancia con la métrica de Baire es 1, Así que es suficiente con que $d(p, y) \leq 1 < 4$ para que una sucesión esté en la bola, luego $\mathcal{B}_4(p) = \mathcal{B}_1[p] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ahora, en los dos ejemplos anteriores se tenía que dado un ε que no es de la forma $\frac{1}{k}$, y se encontró una bola (cerrada o abierta) equivalente con un radio que sí es de esta forma; el hecho de poder igualar bolas abierta y cerradas parece bastante contrario a la intuición en un primer momento, pero más adelante en el presente trabajo se ahondará en este hecho y se demostrará que toda bola cerrada es un conjunto abierto y que toda bola abierta es un conjunto cerrado.

En caso de que $\varepsilon > 1$ se ve que el número más cercano de la forma $\frac{1}{k}$, menor que ε es 1, por lo que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_1[x] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

En el caso de que $0 < \varepsilon < 1$, se tiene entonces que $\frac{1}{\varepsilon} > 1$. Lo que se busca es el número de la forma $\frac{1}{k}$ más próximo a ε que además cumpla $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, o lo que es lo mismo, $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$, se ve que basta con tomar $k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, es decir, aproximar por exceso a $\frac{1}{\varepsilon}$, así, si $0 < \varepsilon < 1$ entonces:

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil}}[x] = \mathcal{B}_{\frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil - 1}}(x)$$

Por lo expuesto en este apartado, de ahora en adelante se tomarán como radios de las bolas números de la forma $\frac{1}{k}$ en los ejemplos y demostraciones, pues cualquier radio será equivalente a un número de este tipo, claro, sin haber demostrado aún que toda bola cerrada es un conjunto abierto.

2 La relación entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $[0, 1]$, conceptualización de una representación en el plano

Como ya lo habrá notado el lector, el conjunto de interés de este trabajo es $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, es decir, el conjunto de las sucesiones de ceros y unos, sin embargo, por la naturaleza del conjunto, que está formado por elementos que son infinitos resulta un poco compleja su visualización, por esta razón, en este apartado se aprovechará una curiosa relación que existe entre el conjunto de interés y $[0, 1]$, para conceptualizar una representación gráfica que permita visualizar mejor los conceptos tratados hasta ahora y en apartados posteriores.

2.1.1 Interpretación de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ como un conjunto de números

Inicialmente se presenta una exploración que permita entender la relación que existe entre el conjunto de interés y el intervalo cerrado cero uno, véase lo siguiente:

Si se tiene la sucesión $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ se puede pensar en asociarle el número $(0,01010101010101 \dots)_2$ que, a su vez, es lo mismo que escribir:

$$0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 0 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4} + \dots = 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-6} + \dots + 1 * 2^{-2n}$$

Ahora se escribe este número como una serie y se averigua a qué valor en base diez corresponde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - 1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

De forma general, a toda sucesión de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ se le puede asociar un número entre 0 y 1 en base dos, esto es:

A cada $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ le corresponde el número $0, x_1 x_2 x_n \dots$; que, escrito como serie, en base diez es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ con } x_i \in \{0,1\}.$$

Sin embargo, hay algunas ambigüedades que se deben tratar, pues puede ocurrir que haya dos sucesiones con el mismo número asociado, por lo que, si se quiere tener una buena representación del conjunto en el plano, será necesario caracterizar las sucesiones problemáticas e idear una forma de diferenciarlas.

2.1.2 Representación doble de algunas sucesiones

Sea una sucesión de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, es decir, una sucesión que empieza a ser de únicamente unos a partir de algún x_k ; es posible asociarle a esta parte de la sucesión el número:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Por ejemplo, a la sucesión $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ le corresponde en número $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

A la sucesión $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ le corresponde $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$ más los números asociados a las posiciones donde hay unos, es decir: $\frac{1}{2^3}$ y $\frac{1}{2^5}$, luego le corresponde el número $\frac{1}{512} +$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{81}{512}.$$

El hecho que se menciona provoca que se pueda asociar el mismo número a dos sucesiones, así:

Ejemplo 1

A la sucesión $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ se le asocia la suma $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{3}{64}$, pero al segundo sumado se puede obtener con la serie asociada a la sucesión $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, basándose en la observación anterior. El primer término le corresponde a la sucesión $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$; si se unen estas dos sucesiones en una sola queda: $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ cuyo número asociado es el mismo $\frac{3}{64}$.

Ejemplo 2

Lo mismo pasa con $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ cuyo número asociado es $\frac{1}{2^4}$ que se puede escribir como: $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$.

Ejemplo 3

Otro ejemplo de este hecho es la sucesión $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ cuyo número asociado es $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{15}{64}$; el primer sumando es el asociado a $(0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, el segundo es el asociado a $(0, 0, 0, 1, 0, \dots)$, el del siguiente asociado a $(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$, y, por último, usando el hecho anteriormente mencionado el último sumando se puede escribir como $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$. Ahora, acorde con los casos ilustrados anteriormente, al generalizar se encuentra la sucesión $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ a la cual le corresponde el mismo $\frac{15}{64}$.

Ejemplo 4

Si se aplica este razonamiento a $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, cuyo número asociado es $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} = \frac{21}{128}$; las sucesiones que les corresponden a los sumandos son $(0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$,

$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \dots)$ y por lo mencionado anteriormente $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$. Si ahora se unen estas sucesiones en una sola se tendrá $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ cuyo número asociado también es $\frac{21}{128}$.

En general, para cualquier sucesión con finitos unos se tiene una suma de números de la forma $\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k-p} + 2^{k-q} + 2^{k-s} + \dots + 1}{2^k}$, donde $p < q < s < \dots < k$; dicho de otro modo, números de la forma $\frac{r}{2^k}$, con r impar menor que el denominador. Fijándose en el último sumando se encuentra que se puede escribir como una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$$

Luego, este sumando se puede escribir también como $x = (0, 0, 0, \dots, x_k = 1, 0, 0, 0, \dots)$

Y también como $(0, 0, 0, 0, \dots, x_k = 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$.

El conjunto de los números con doble representación es:

$$S = \left\{ m \in \mathbb{Q} : m = \frac{2^{k-p} + 2^{k-q} + 2^{k-s} + \dots + 1}{2^k}, \text{ con } p < q < s < \dots < k \right\} = \left\{ m \in \mathbb{Q} : m = \frac{r}{2^k}, \text{ donde } r \text{ es un número natural impar menor que } 2^k \right\}.$$

A continuación, se presenta un desarrollo de las ideas anteriormente expuestas que se espera le sirva al lector para convencerse de la caracterización que se hizo de las sucesiones “problemáticas”.

2.1.3 El conjunto con doble representación

Un argumento para el hecho de que algunas sucesiones tengan doble representación es el que presentan Bartle y Sherbert (2001); los autores parten de la definición de intervalo anidado:

Una sucesión de intervalos I_n , con $n \in \mathbb{N}$, se llama sucesión de intervalos anidados si:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \cdots$$

Lo siguiente que se plantea, es una forma de asignarle una sucesión de ceros y uno a cada número en el intervalo $[0, 1]$; para ello, lo primero es tomar $x \in [0, 1]$, luego se biseca el intervalo $[0, 1]$ en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ahora se conviene tomar $a_1 = 0$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ o $a_1 = 1$ si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, si $x = \frac{1}{2}$ se puede tomar cualquiera de los dos valores, pues, en todos los casos, se cumplirá:

$$\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}$$

Lo siguiente será bisecar el intervalo $\left[\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\right]$, nuevamente, si x queda en el intervalo de la izquierda se asigna $a_2 = 0$, si queda a la derecha $a_2 = 1$. Si $x = \frac{1}{4}$ o $x = \frac{3}{4}$ se puede tomar o cero o uno, pues cualquiera sea el caso se va a cumplir que:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{1}{2^2}$$

De esta forma, se le asigna al enésimo paso $a_n = 0$ si x está en el intervalo de la izquierda o $a_n = 1$ si x está a la derecha. De esta forma se va a obtener una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ intervalos anidados cuya intersección será precisamente x . Así, para cada n se cumple:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Si x resulta ser el punto de bisección entonces será de la forma $\frac{m}{2^n}$ con m impar. Siendo así, se puede escoger $a_n = 0$ o $a_n = 1$; pero, ya hecha la elección, se determinan todos los demás subintervalos del proceso de bisección. Por ejemplo, si se eligió el subintervalo izquierdo, es decir,

se tomó $a_n = 0$, entonces x es el punto terminal derecho de los subintervalos siguientes, luego, $a_k = 1$ para todo $k > n$. Por otra parte, si se elige $a_n = 1$, entonces, $a_k = 0$ para todo $k > n$. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$, las dos representaciones posibles para x son: $(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y $(0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

Concluyen los autores: si $x \in [0, 1]$ entonces existe una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ tal que $x = (0, a_1 a_2 a_3 a_n \dots)_2$, esta representación es única excepto cuando x es de la $\frac{m}{2^n}$ con m impar, en este caso las dos representaciones posibles son:

$x = (0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1000 \dots)_2$ y $x = (0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0111 \dots)_2$. Una terminada en ceros y la otra en unos.

Hasta ahora, se ha descrito una forma de representar las sucesiones del conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en el plano, también se han identificado las sucesiones que presentan problemas al asociarles un número del intervalo $[0, 1]$; partiendo de estas ideas, en el siguiente apartado se conceptualizará una buena representación para nuestro conjunto, y se harán todos los convenios necesarios para que no haya ambigüedad en la misma.

2.1.4 Interpretación de las bolas utilizando la operación suma disyunta

Se comenzará la conceptualización de la representación mostrando cómo queda una bola al graficarla en el plano, valiéndose de la relación entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $[0, 1]$ expuesta anteriormente.

Teniendo en cuenta que la definición de bola es: $\mathcal{B}_k(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, \dots, x_k = y_k\}$.

Tómese como centro la sucesión $x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ y como radio $\frac{1}{3}$.

La bola, como ya se vio queda:

$$B_{\frac{1}{3}}(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3\}$$

Es decir, toda sucesión con los primeros tres elementos iguales a los de x está en la bola. Con esta información se puede hallar la sucesión con el número asociado más pequeño que hace parte de la bola, que es la que tiene los tres primeros elementos de x y el resto ceros, de igual forma se puede encontrar la sucesión con el número asociado más grande que estará en la bola, fijando los tres elementos y tomando el resto como unos. Ahora, si se hallan los números asociados a estas dos sucesiones se encontrarán los extremos del primer intervalo de la bola, de la siguiente forma:

En este caso la sucesión más pequeña es $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y su número asociado es el $(0,010000000 \dots)_2$ que en base diez está dado por:

$$0 \frac{1}{2^1} + 1 \frac{1}{2^2} + 0 \frac{1}{2^3} + 0 \frac{1}{2^4} + 0 \frac{1}{2^5} + \dots + 0 \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}$$

Por otro lado, la sucesión más grande es $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y su número asociado $(0,010111111111 \dots)_2$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 \frac{1}{2^1} + 1 \frac{1}{2^2} + 0 \frac{1}{2^3} + 1 \frac{1}{2^4} + 1 \frac{1}{2^5} + \dots + 1 \frac{1}{2^n} + \dots &= \frac{1}{4} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^3 \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{15}{8} \right) = \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{15}{8} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

El número $z = (0,10101, \dots)_2$ y en base 10 se tendrá que $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} \dots$

$$\sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Luego, a primera vista, se podrá representar esta bola como el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$.

Sin embargo, es claro que este intervalo no representa completamente la bola. Recuérdese que los números de la forma $\frac{2^{k-p} + 2^{k-q} + 2^{k-s} + \dots + 1}{2^k}$ con $p < q < s < \dots < k$, tienen doble representación, y cada una de ellas corresponde a una sucesión distinta del conjunto, por esta razón es necesario hacer algunos convenios para representar correctamente el conjunto, de la siguiente forma:

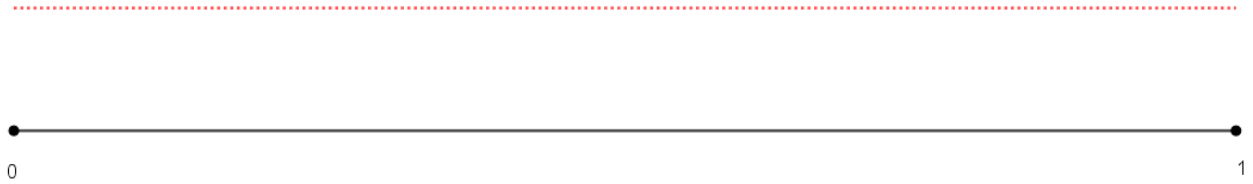


Gráfico 1. Convenio para la representación gráfica

En el segmento de abajo estarán los números asociados a todas las sucesiones de ceros y unos con representación única, además de los números asociados a las sucesiones de la forma $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, mientras que los puntos rojos de arriba representarán los números asociados a las sucesiones de finitos unos, es decir, las sucesiones de la forma $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k = 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$. Si se asume que el segmento negro está sobre el eje x se tendrá entonces que sus puntos están dados por coordenadas de la forma $(a, 0)$ donde a es el número asociado a una sucesión con única representación, o el número asociado a una sucesión que se vuelve solo de unos en algún punto. Mientras que los puntos rojos son de la forma $(b, 1)$ donde b es el número asociado a alguna sucesión con finitos unos.

La representación finita del uno en base dos es precisamente 1, pero esta no corresponde a ninguna sucesión del conjunto de interés, mientras que la representación infinita que es $(0,11111111 \dots)_2$ le corresponde a la sucesión $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, y como esta es una sucesión de infinitos unos, estará ubicada en el segmento negro. El cero está en la recta de abajo debido a que su representación es única, pues la sucesión que le corresponde es $(0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

Algunos ejemplos de cómo quedan ubicados algunos números asociados a sucesiones son: el número asociado a la sucesión $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ es $\frac{11}{12}$, pero este mismo número le corresponde a la sucesión $(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$, como se dijo, la primera sucesión se graficará en el segmento punteado de arriba, mientras que la segunda en el segmento negro, así:

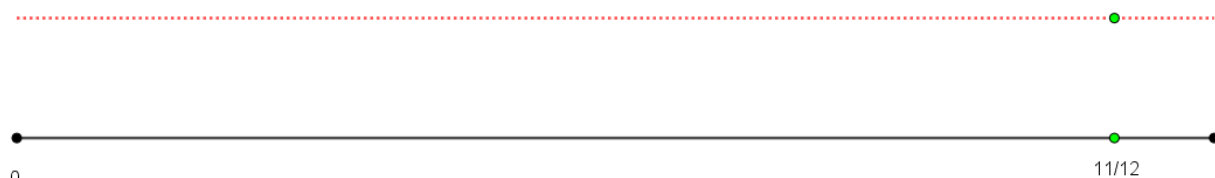


Gráfico 2. Ejemplo, representación de $\frac{11}{12}$

Ahora, partiendo de un número con doble representación se hallarán sus sucesiones correspondientes. Por ejemplo, al número $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} = \frac{4227}{16384}$, las sucesiones que le corresponden son:

$(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$, que quedan representadas, la primera en el segmento de arriba y la segunda en el de abajo, como se muestra a continuación:

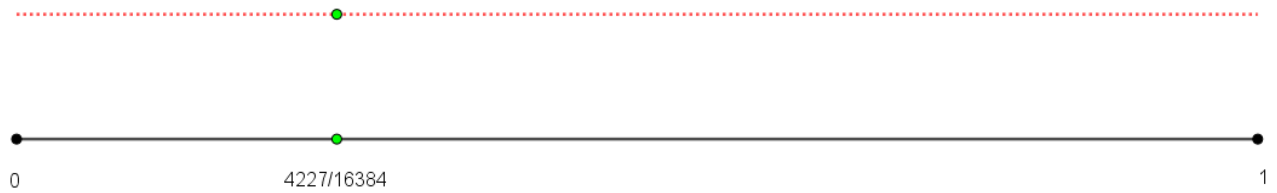


Gráfico 3. Ejemplo, representación de $\frac{4227}{16384}$

De acuerdo con lo anterior, se presentan algunos ejemplos de bolas completamente representadas en el plano.

Ejemplo 1

A continuación, se representa la $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(x, y) < \frac{1}{4}\}$, con $p = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$

Dado que algunos de los elementos de $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ tienen doble representación se tendrá la siguiente gráfica:

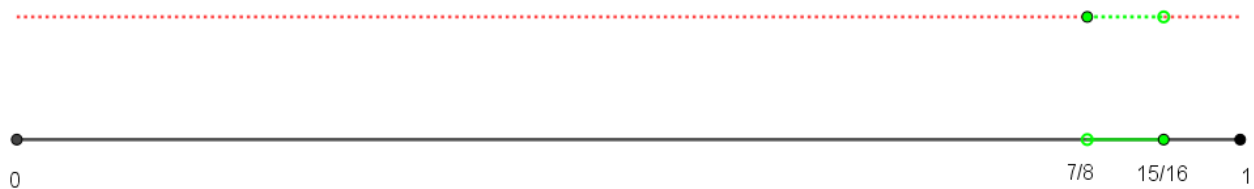


Gráfico 4. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$

Se ve que la sucesión $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ hace parte de la bola, y su número asociado es el $\frac{7}{8}$, por lo que se grafica en la parte de arriba, mientras que la representación con infinitos unos $(1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ queda abajo pero sin ser incluida, pues la distancia entre esta y la

sucesión centro es $\frac{1}{3}$. Ahora, la sucesión $(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ hace parte de la bola, pero como es una representación de infinitos unos de $\frac{15}{16}$ queda abajo, mientras que la representación con finitos unos que es $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ queda arriba, pero no en la bola, pues su distancia con p es $\frac{1}{4}$. Como pasa en este ejemplo, toda bola tendrá en sus extremos números con doble representación.

Como se mencionó al principio de esta sección, para escribir de forma algebraica la situación expuesta se usará la operación suma disyunta. Ya se vio que en el segmento de abajo quedan incluidos los números en el intervalo $\left(\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]$ mientras que en el de arriba quedan los números de la forma $\frac{2^{k-p}+2^{k-q}+2^{k-s}+\dots+1}{2^k}$ con $p < q < s < \dots < k$ que están entre $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right)$. Pero ¿cómo escribir este segundo conjunto de una forma algebraica?

Obsérvese que el primer número de la forma mencionada en la bola es $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{2^2+2+1}{2^3}$, pues se sabe que en la bola se fijan las primeras cuatro posiciones $(1, 1, 1, 0)$, por esta razón cualquier número de esta forma que tenga estos tres sumandos y no tenga al $\frac{1}{2^4}$ estará en la bola. Este hecho se tiene debido a que todas estas sumas finitas van a ser menores que $\frac{15}{16}$, pues $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{15}{16}$; luego los números de esta forma que estará en la bola es $\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\}$, sin embargo, al definir el conjunto de esta forma no queda incluido el primer elemento, $\frac{7}{8}$, por ello, se agrega por medio de la unión, así:

$$\left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{7}{8}\right\}.$$

La bola completa utilizando la suma disyunta queda:

$$\left(\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \cdots < s.\right\} \cup \left\{\frac{7}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Ejemplo 2

Tómese ahora $x = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y hágase $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(x)$. Como ya se ha dicho, cualquier elemento que esté en la bola debe coincidir con los primeros 7 elementos de x . Las sucesiones que definen los extremos de la bola son entonces $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, el número asociado a la primera es $\frac{47}{128}$ y el asociado a la segunda es $\frac{3}{8}$. Como ya se vio anteriormente ambas sucesiones tienen doble representación, pues a $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ también le corresponde el número $\frac{47}{128}$ y a $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ le corresponde $\frac{3}{8}$. Sin embargo, ninguna de estas dos sucesiones queda dentro de la bola pues la distancia de $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ a x es $\frac{1}{6}$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ a x es $\frac{1}{3}$.

Para la representación algebraica se centra la atención en la consecuencia de haber fijado los primeros siete elementos de la sucesión centro, al hallar el número asociado a cada sucesión de la bola, estas deben tener los sumandos $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} = \frac{47}{128}$ y no deben tener los sumandos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2^3}$, entonces cualquier suma finita de la forma $\frac{47}{128} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \cdots < s$ será la segunda representación de un elemento de la bola, la representación de finitos unos, nuevamente se ve que al definir de esta forma el conjunto no se incluye al $\frac{47}{128}$, por lo que este se unirá. El conjunto que se representará en el segmento rojo de arriba es:

$$\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{47}{128} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \cdots < s.\right\} \cup \left\{\frac{47}{128}\right\}.$$

Este conjunto y el intervalo $\left(\frac{47}{128}, \frac{3}{8}\right]$ forman una representación completa de los elementos de la bola $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}((0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \dots))$, tanto de las sucesiones con representación única, como la segunda representación de las demás. La representación gráfica y algebraica, usando la suma disyunta, se muestran a continuación.

$$\left(\frac{47}{128}, \frac{3}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{47}{128} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{47}{128}\right\}\right) \times \{1\}.$$

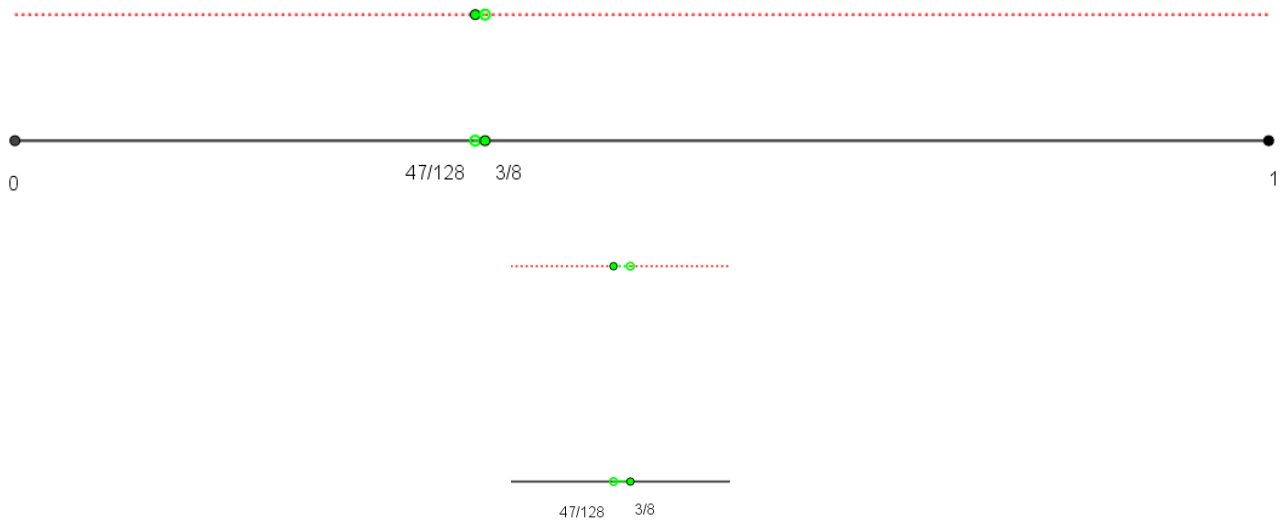


Gráfico 5. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(x)$ con $x = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \dots)$

Ejemplo 3

Ahora se puede explorar con la siguiente sucesión, $s = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$, y tomar como radio $\frac{1}{3}$ para hacer $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(s)$. De forma análoga a los ejemplos anteriores es posible hallar los extremos de la bola, que son 0 y $\frac{1}{8}$, correspondientes a las sucesiones $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ respectivamente. Como ha pasado anteriormente, se encuentra una segunda sucesión asociada a $\frac{1}{8}$ que es $(0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, nuevamente, esta sucesión no está en la bola, pues

la distancia entre s y $(0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ es $\frac{1}{3}$, sin embargo, no hay otra sucesión asociada a 0, pues este número solo tiene una representación como sucesión, que es la presentada, por esta razón, siempre que una bola tenga a la sucesión $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ se tendrá que tener en cuenta que en primer lugar el cero, como ya se mostró, se representa en el segmento de abajo, por lo que en vez de tomarse el intervalo $(0, \frac{1}{3}]$, se tomará $[0, \frac{1}{3}]$. Por otro lado, para hallar los números con doble sucesión asociada, basta con que no tengan los sumandos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$ y $\frac{1}{2^3}$, pues en la sucesión centro se fijan los primeros tres elementos $(0, 0, 0)$, luego, cualquier número de la forma $\frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}$, $3 < l < m < \dots < s$ está en el conjunto, no es necesario unirle el cero pues ya se incluyó su única representación en el intervalo del segmento negro. Las representaciones de esta bola quedan así:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \times \{1\}$$

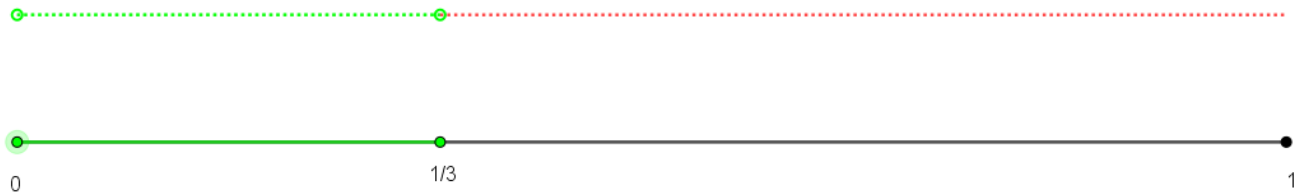


Gráfico 6. $B_1(s)$ con $s = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$

Ahora se empezarán a explorar algunas cuestiones básicas del espacio y a utilizar la representación para visualizarlas de mejor manera, también es natural buscar algunos conjuntos abiertos no triviales y ahondar en el estudio de las relaciones existentes entre las bolas abiertas y

cerradas, que parecen ser bastante especiales de acuerdo con lo visto en apartados anteriores, precisamente estas cuestiones son las que se tratan en la siguiente sección del documento.

Ejemplo 4

Ahora se grafican bolas cerradas y por lo expuesto en apartados anteriores, se intuye que la representación gráfica se hace de forma análoga a como se hace con bolas abiertas, pues recuérdese que es posible encontrar bolas abiertas equivalentes para cualquier $0 < \varepsilon < 1$, haciendo: $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil}}[x] = \mathcal{B}_{\frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil - 1}}(x)$. Sin embargo, hay una bola cerrada que resulta bastante especial, que es la de radio uno, pues, como ya se mostró, esta bola resulta ser todo el conjunto.

También se mostró que esta bola es equivalente a cualquier bola abierta con radio mayor que uno, esto es: si $\varepsilon > 1$ entonces $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_1[x]$. Por este motivo las representaciones de todas estas bolas son:



Gráfico 7. Ejemplo, $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ con $\varepsilon > 1$

$$[0, 1] \times \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 0 < l < m < \dots < s. \right\} \times \{1\}$$

3 Abiertos, cerrados y las bolas en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$

3.1.1 Ejemplos de abiertos no básicos

Hasta el momento, se han dado algunos ejemplos de bolas abiertas, que resultan también ser ejemplos de abiertos, pues en un espacio métrico toda bola abierta es un conjunto abierto; sin embargo, el paso natural es explorar algunos otros ejemplos de abiertos no triviales, para ello, en este apartado se explora la opción de hacer reuniones de bolas abiertas, variando el radio con un centro fijo para observar los conjuntos que aparecen.

3.1.1.1 Primer abierto no básico

Tomando la sucesión $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ se puede pensar en uniones de abiertos variando el radio y fijando el centro en p .

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(p)$$

Ejemplo 1

Si se toma como radio 1 la bola que resulta es:

$$B_1(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) < 1\} = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : y_1 = 1\}.$$

La sucesión más “pequeña” que cumple con la condición es:

$(1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y la más “grande” $(1, 1, 1, 1, \dots)$ cuyos números asociados son $\frac{1}{2}$ y 1

respectivamente. Las representaciones de la bola son:

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \{1\}.$$

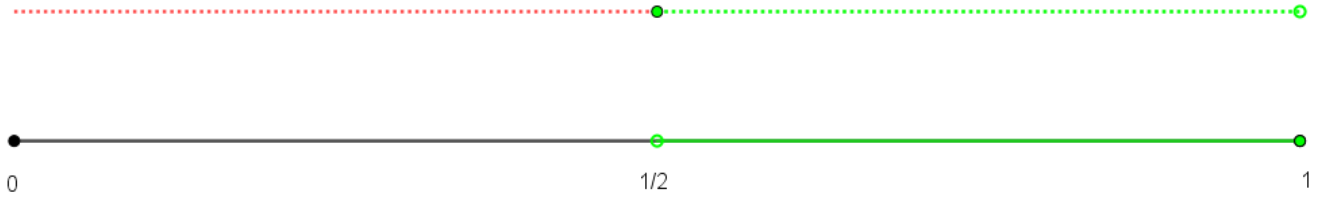


Gráfico 8. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Ahora se tomará como radio $\frac{1}{3}$, luego se tiene:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(p) = \left\{ y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) < \frac{1}{3} \right\} = \{ y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1 \}. \text{ De forma}$$

análoga hallamos sus representaciones correspondientes.

$$\left(\frac{7}{8}, 1 \right] \times \{0\} \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s. \right\} \cup \left\{ \frac{7}{8} \right\} \right) \times \{1\}.$$

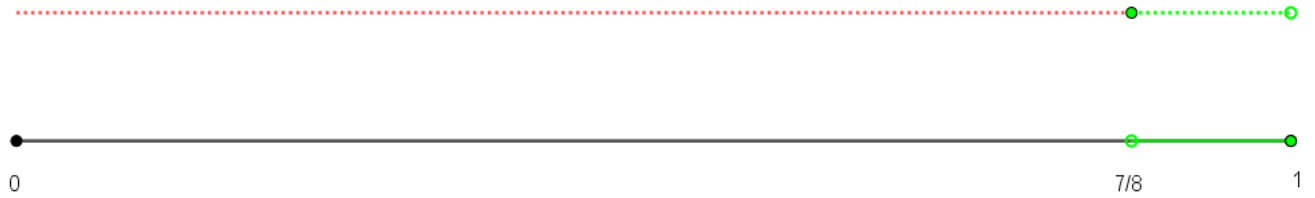


Gráfico 9. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Si se hace con radio $\frac{1}{5}$ la bola es $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(p) = \left\{ y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) < \frac{1}{5} \right\} = \{ y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : y_1 =$

$1, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 1 \}$, y sus representaciones:

$$\left(\frac{29}{32}, \frac{15}{16} \right] \times \{0\} \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{29}{32} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 5 < l < m < \dots < s. \right\} \cup \left\{ \frac{29}{32} \right\} \right) \times \{1\}.$$



Gráfico 10. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Ya no llega hasta uno, debido a que en la cuarta posición hay un cero.

Todas estas bolas están contenidas en la de radio uno, que será la bola más “grande” que se obtendrá, luego:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_1(p) = \mathcal{B}_1(p) = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \{1\}$$

Ejemplo 2

Ahora se hace lo mismo tomando como centro $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Constrúyase $\mathcal{B}_1(q) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) < 1\} = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : y_1 = 1\}$.

Nuevamente, la sucesión más “pequeña” que cumple con la condición es:

$(1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ y la más “grande” $(1, 1, 1, 1, \dots)$ por lo que los extremos de los intervalos son $\frac{1}{2}$ y 1, y la bola queda:

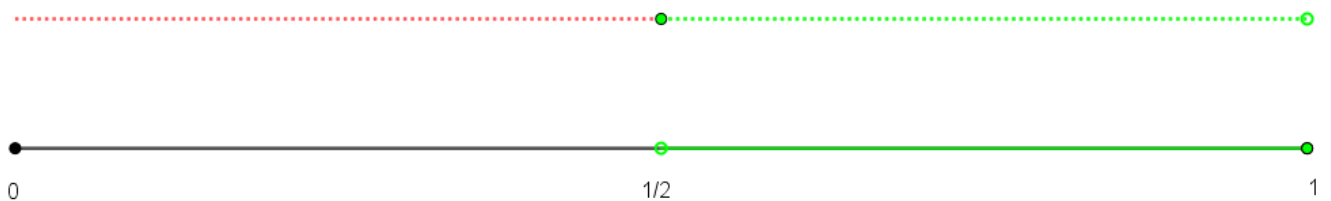


Gráfico 11. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Si se toma ahora un radio de $\frac{1}{4}$, algebraicamente la bola resultante es:

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{5}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{5}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

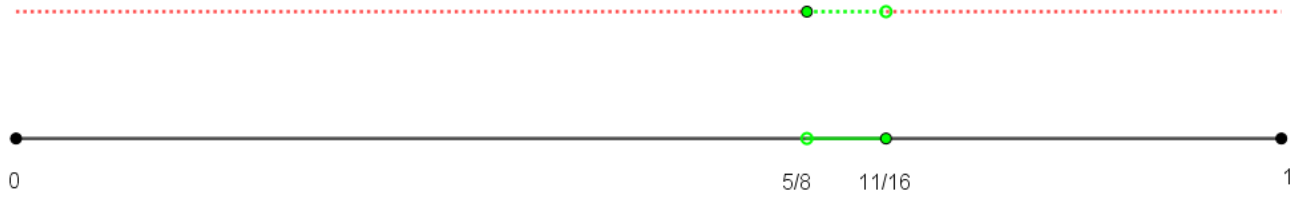


Gráfico 12. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Con radio $\frac{1}{6}$ el conjunto queda:

$$\left(\frac{21}{32}, \frac{43}{64}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{21}{32} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 6 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{21}{32}\right\}\right) \times \{1\}.$$

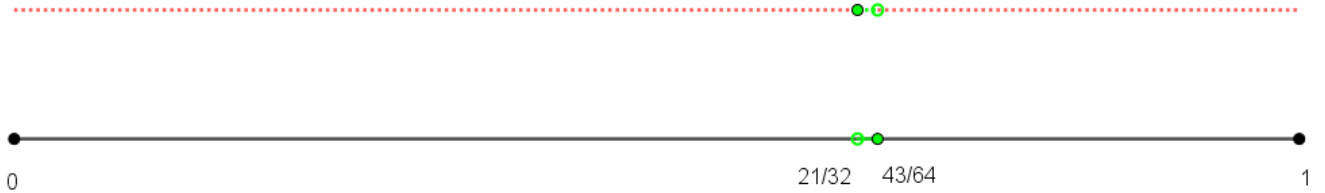


Gráfico 13. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{6}}(q)$ con $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Todos estos intervalos están contenidos en el de la bola con radio 1.

En los ejemplos anteriores se pudo obtener el 1 al final del intervalo debido a que las sucesiones que se tomaron como centro, es decir, $p = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ y $q = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ comienzan en 1, pues al formar $\mathcal{B}_1(p)$ y $\mathcal{B}_1(q)$ la sucesión más

grande que se puede obtener es $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ cuyo número asociado es precisamente 1, y la más pequeña es $(1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ que corresponde al número $\frac{1}{2}$

En general, si se tiene una sucesión $p = (1, p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) = \mathcal{B}_1(p) = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times \{1\}.$$

3.1.1.2 Segundo abierto no básico

Ahora se puede tomar como centro una sucesión que empiece con cero, por ejemplo $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ y hacer $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p)$.

Si se toma como radio 1 tenemos entonces: $\mathcal{B}_1(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) < 1\} = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = 0\}$. Razonando de forma análoga, la sucesión más pequeña de la bola es $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ que tiene como número asociado al cero, y la más grande $(0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ que tiene como número asociado al $\frac{1}{2}$, luego la bola es:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\}\right) \times \{1\}.$$

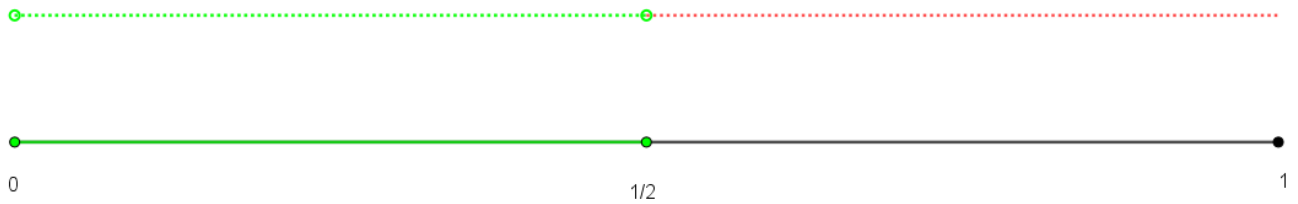


Gráfico 14. Ejemplo, $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Si se prueba con $\frac{1}{4}$ como radio, la bola resultante es:

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\}\right) \times \{1\}.$$

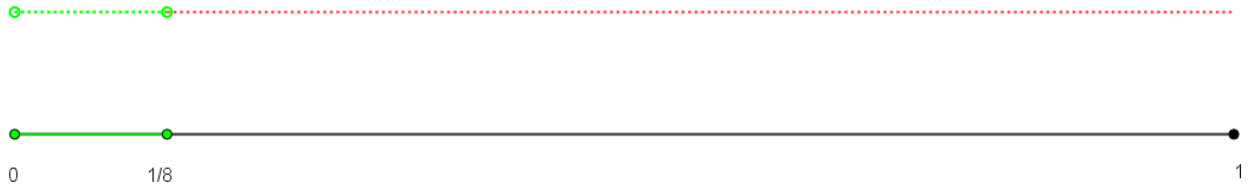


Gráfico 15. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Con un radio de $\frac{1}{7}$ se tendrá:

$$\left(\frac{5}{64}, \frac{11}{128}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{5}{64} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{5}{64}\right\}\right) \times \{1\}$$

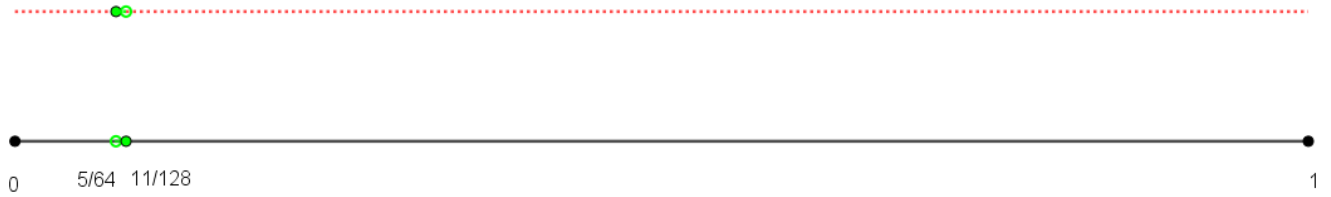


Gráfico 16. Ejemplo, $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(p)$ con $p = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Luego, nuevamente todas estas bolas están contenidas en la bola con radio 1.

Si se tiene una sucesión $p = (0, p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) = \mathcal{B}_1(p) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\} \times \{1\}.$$

En apartados anteriores, se pudo observar que es posible encontrar bolas abiertas y cerradas que son equivalentes, hecho que resulta bastante contrario a la intuición, en la siguiente sección se va a explorar más a fondo esta característica.

3.1.2 Cualquier punto de una bola puede ser su centro

Antes de explorar la relación que existe entre las bolas, hay otra característica que también resulta extraña. Se vio que al hacer una bola de radio k , se fijan los primeros k elementos de la sucesión centro, es decir, todos los elementos de la bola comparten los primeros k elementos, por lo que el centro de la bola resulta indistinguible de las demás sucesiones. Un ejemplo de este hecho es:

Si se toma como centro la sucesión $x = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, y se define la bola $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 1, y_5 = 0\}$. Sea una sucesión de la bola, por ejemplo $p = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$, Se ve que si hacemos $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(p)$ se fijan los primeros 5 elementos de p , es decir, $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(p)$. Es claro en el ejemplo que cualquier punto de la bola puede ser tomado como centro sin modificarla.

Demostración para bolas abiertas

Sea $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x)$, se demostrará que si $p \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x)$ entonces $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$.

Se inicia probando que $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$. Sea $s \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x)$, si se hace $d(s, x) = \frac{1}{h}$, $d(p, x) = \frac{1}{i}$ y por el teorema 3 y por el teorema 2 $d(s, p) \leq \frac{1}{\min\{h, i\}} = \max\left\{\frac{1}{h}, \frac{1}{i}\right\} = \max\{d(s, x), d(p, x)\}$, además como $d(x, s) < \frac{1}{k}$ y $d(p, x) < \frac{1}{k}$, se puede concluir $d(s, p) \leq \max\{d(s, x), d(p, x)\} < \frac{1}{k}$, así, $s \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$. De forma análoga se demuestra que $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x)$, luego $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$.

Demostración para bolas cerradas

Para demostrar que si $p \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x]$ entonces $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x] = \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$, basta con observar que en la demostración anterior se tendrá de $d(x, s) \leq \frac{1}{k}$ y $d(s, x) \leq \frac{1}{k}$, que $d(s, p) \leq \text{Max}\{d(s, x), d(p, x)\} \leq \frac{1}{k}$, luego $s \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$ y la demostración contraria también es análoga. Por lo que $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x] = \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$.

Ya se vio que es posible igualar algunas bolas abiertas con bolas cerradas, pues se tiene que en un espacio métrico toda bola abierta es un conjunto abierto, y toda bola cerrada es un conjunto cerrado, por lo que, la exploración que se hizo en un apartado anterior está sugiriendo que las bolas abiertas son también bolas cerradas, y, en consecuencia, conjuntos cerrados, además que las bolas cerradas son también bolas abiertas y conjuntos abiertos y es justamente a explorar esta característica tan particular a lo que se dedica la siguiente parte del trabajo.

3.1.3 Una bola abierta es un conjunto cerrado

Sea $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$; sea la bola abierta $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) < \frac{1}{4}\}$,

como ya se ha hecho, la bola queda:

$$\left(\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{13}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{13}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

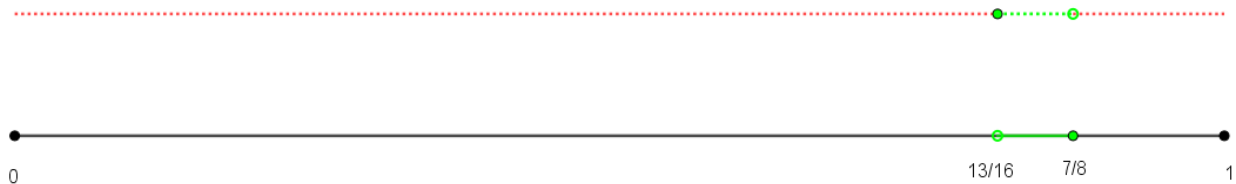


Gráfico 17. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p)$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$

Se sabe que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto, el complemento de esta bola es $(B_{\frac{1}{4}}(p))^c = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) \geq \frac{1}{4}\}$. Se puede ver que en este conjunto están todas las sucesiones cuyas distancias a p son iguales a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. En términos de conjuntos esto queda:

$$\begin{aligned} \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) \geq \frac{1}{4}\} &= \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) = 1\} \cup \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) = \frac{1}{2}\} \cup \\ &\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) = \frac{1}{3}\} \cup \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, y) = \frac{1}{4}\}. \end{aligned}$$

Ahora se hallan los conjuntos asociados, en el conjunto $\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) = 1\}$ están todas las sucesiones que empiecen por cero, pues para estar en el conjunto deben ser diferentes a p en la primera posición, luego, como ya se vio, el conjunto queda:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 1 < l < m < \dots < s.\right\}\right) \times \{1\}.$$

Las sucesiones de $\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) = \frac{1}{2}\}$ deben empezar en uno y tener un cero en la segunda posición (1, 0, ...), pues son las que compartan el primer elemento con p y que sean diferentes en el segundo, luego el conjunto asociado es:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 2 < l < m < \dots < s.\right\}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \{1\}.$$

Para $\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) = \frac{1}{3}\}$, las sucesiones del conjunto deben coincidir en los primeros dos elementos y cambiar en el tercero con respecto a p , es decir, son de la forma (1, 1, 1, ...), por lo que el conjunto queda:

$$\left(\frac{7}{8}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\}\right) \cup \left\{\frac{7}{8}\right\} \times \{1\}.$$

De forma análoga, para $\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) = \frac{1}{4}\}$ las sucesiones deben tener la forma

$(1, 1, 0, 0, \dots)$, quedando así el conjunto asociado:

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \times \{1\}.$$

A cotinuación se muestra la representación gráfica de estos cuatro conjuntos:

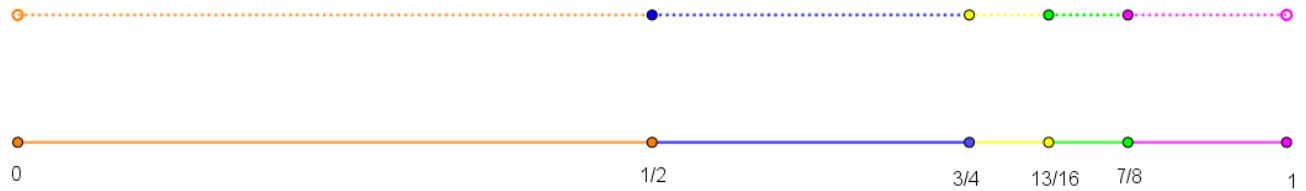


Gráfico 18. $(\mathcal{B}_1(p))_4^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$

Lo que se quiere mostrar es que el complemento de la bola abierta $\mathcal{B}_1(p)_4$ es abierto, para ello se puede ver si este conjunto es vecindad de todos sus puntos.

Tómese un elemento de $(\mathcal{B}_1(p))_4^c$, por ejemplo $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, se ve que

$d(p, x) = \frac{1}{2}$. Ahora se debe encontrar una bola tal que $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq (\mathcal{B}_1(p))_4^c$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{5}$ y **determinese la** $\mathcal{B}_1(x)_{\frac{1}{5}} = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x, y) < \frac{1}{5}\}$. El conjunto que le

corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{17}{32}, \frac{9}{16}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{7}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Y este conjunto está contenido en el complemento de la bola como se muestra a continuación.

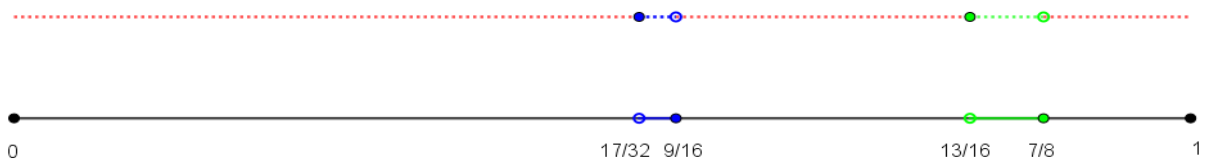


Gráfico 19. $\mathcal{B}_1(x)_{\frac{1}{5}} \subseteq (\mathcal{B}_1(p))_4^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

Ahora se probará con $\varepsilon = \frac{1}{7}$. $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x,y) < \frac{1}{7}\}$ el conjunto correspondiente

es:

$$\left(\frac{35}{64}, \frac{9}{16}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{35}{64} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{35}{64}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Y este conjunto también está contenido en $(\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$

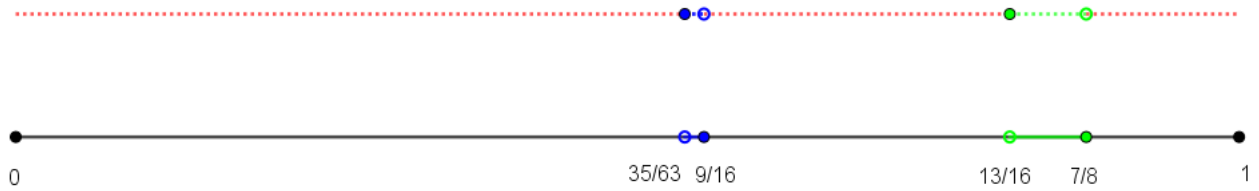


Gráfico 20. $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(x) \subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

Ahora con $\varepsilon = 1$ se repite el proceso, $\mathcal{B}_1(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x,y) < 1\}$, el conjunto que le corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 7 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times \{1\}.$$

que no está contenido en el complemento de la bola.

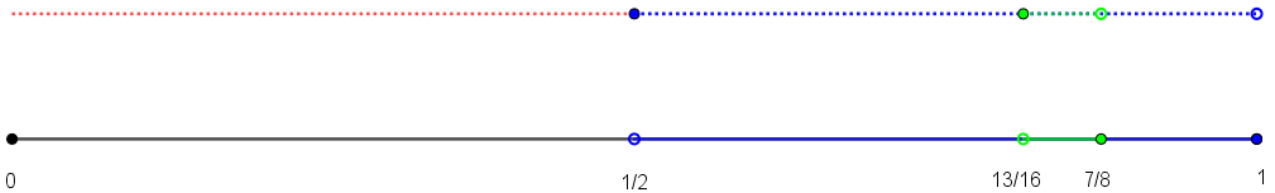


Gráfico 21. $\mathcal{B}_1(x) \not\subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

Luego con $\varepsilon = \frac{1}{3}$ se hace $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(x) = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x,y) < \frac{1}{3}\right\}$ así se tiene el siguiente

conjunto:

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \times \{1\}.$$

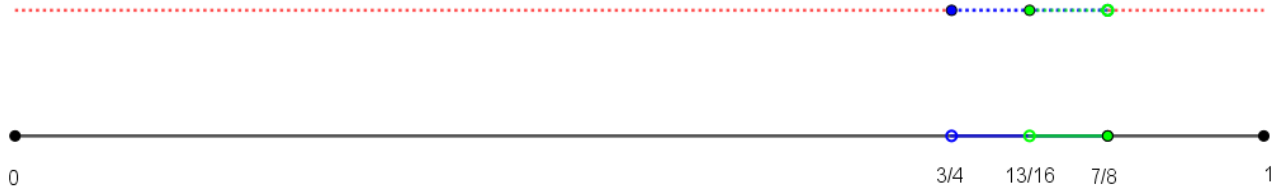


Gráfico 22. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(x) \not\subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(p))^c$ con $p = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

Que también contiene a la bola.

Por último, se va a explorar qué pasa si se toma $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(x) = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(x,y) < \frac{1}{4}\right\}$, en ese

caso se obtiene el siguiente conjunto:

$$\left(\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{13}{16} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 4 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}\right) \times \{1\}.$$

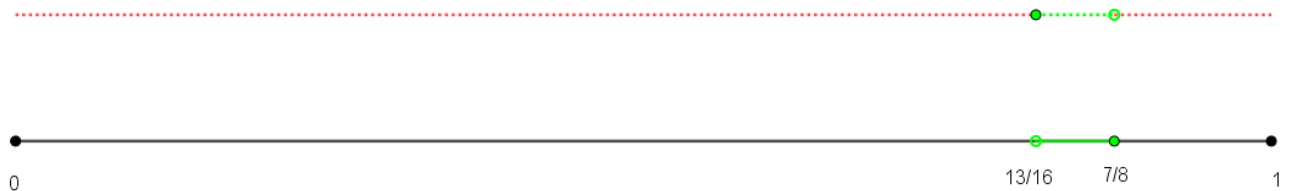


Gráfico 23. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(x)$ con $x = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

En este caso el conjunto es la misma bola, pues, como ya se demostró, todo elemento de una bola puede ser su centro.

Este ejemplo parece sugerir que si se toma un ε que sea menor que el radio de la bola, siempre se encontrará un abierto contenido en el complemento de la bola para cualquier punto perteneciente a él.

Demostración

Sea $p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, y $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p) = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) < \frac{1}{k}\right\}$ una bola abierta centrada en p ; ahora se demostrará que $(\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) \geq \frac{1}{k}\right\}$ es un conjunto abierto.

Sea $s \in (\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c$. Ahora, sea $\frac{1}{r} < \frac{1}{k}$ y sea también $\mathcal{B}_{\frac{1}{r}}(s) = \left\{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(s, y) < \frac{1}{r}\right\}$, si se demuestra que, en general, $\mathcal{B}_{\frac{1}{r}}(s) \subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c$ se habrá escrito el complemento como unión de conjuntos abiertos, demostrando así que es abierto.

Sea $n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{r}}(s)$, se sabe entonces que $d(n, s) = \frac{1}{m} < \frac{1}{r}$, y $d(s, p) = \frac{1}{h} \geq \frac{1}{k}$

Ahora, si se toma $\text{Min}\{m, h\}$, se tendrá entonces, por teorema 3 y teorema 2, que $d(n, p) \leq \frac{1}{\text{Min}\{m, h\}} = \text{Max}\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{h}\right\}$. Por otro lado, se tiene que $\frac{1}{m} < \frac{1}{r} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{h}$, lo que permite concluir que $d(n, p) \leq \frac{1}{h} = d(s, p)$.

De forma similar, si se hace $d(n, p) = \frac{1}{i}$, por la definición de la métrica se sabe que $d(s, p) \leq \frac{1}{\text{Min}\{i, m\}} = \text{Max}\left\{\frac{1}{i}, \frac{1}{m}\right\} = \text{Max}\{d(n, p), d(n, s)\}$, como se tiene que $\frac{1}{r} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{h}$ se concluye $d(n, s) < d(s, p)$ y en consecuencia que $d(s, p) \leq d(n, p)$. En últimas, se puede concluir que: $d(s, p) = d(n, p) \geq \frac{1}{k}$, luego $n \in (\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c$ y $\mathcal{B}_{\frac{1}{r}}(s) \subseteq (\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c$. Demostrando, de esta forma, que $(\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p))^c$ es un abierto por lo que $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$ es un conjunto cerrado.

3.1.4 Una bola cerrada es un conjunto abierto

Sea ahora una bola cerrada centrada en $p = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y radio $\frac{1}{3}$, esto es $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}[p] = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / d(p, y) \leq \frac{1}{3}\}$.

Se sabe que para que una sucesión esté en la bola, solo se necesita que su distancia con p sea menor o igual a $\frac{1}{3}$, por ejemplo, las siguientes sucesiones están en la bola:

Si $y = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{3}$.

Si $y = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{4}$.

Si $y = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $d(y, p) = \frac{1}{5}$.

Es decir, para que una sucesión esté en la bola cerrada es suficiente con que comparta los primeros dos elementos con p . $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}[p] = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = p_1 \wedge y_2 = p_2\}$; inmediatamente se puede hallar una bola abierta centrada en p equivalente a esta, que es $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(p) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} / y_1 = p_1 \wedge y_2 = p_2\}$ y como toda bola abierta es un abierto en un espacio métrico, se tendrá que toda bola cerrada también lo es.

La representación de la bola es:

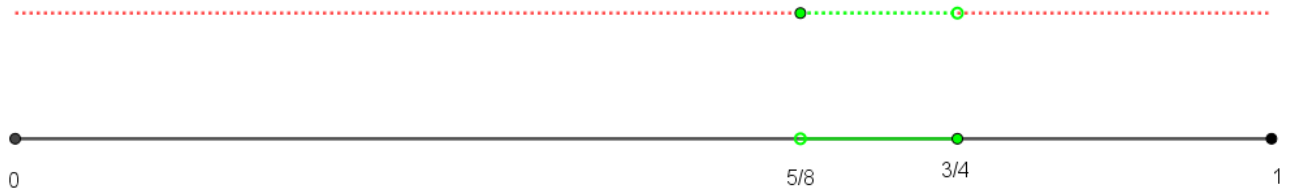


Gráfico 24. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(p)$ con $p = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{5}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{5}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Demostración

Se escribirá el conjunto como reunión de abiertos, sea $x \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$, ya se ha demostrado que cualquier punto puede ser centro de una bola, luego: $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x] = \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$, y como $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[x]$ por definición, se concluye que $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$. Así, siempre es posible encontrar un abierto entre $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}[p]$ y todos sus elementos, por lo que resulta ser un conjunto abierto.

Estas tres propiedades tan particulares que se acaban de enunciar y demostrar son consecuencia del hecho que se presenta a continuación.

3.1.5 Espacio ultramétrico

En Rubiano (2000) se define al espacio ultramétrico X como un espacio métrico (X, d) en el cual la métrica d satisface la ultra- desigualdad triangular:

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

Gracias a la demostración del axioma D3 para mostrar que $(X^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico, se puede concluir que $(X^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio ultramétrico, el cual cumple:

- En un espacio ultramétrico cualquier punto de una bola puede ser su centro, si $y \in B_{\varepsilon}(x)$ entonces $B_{\varepsilon}(x) = B_{\varepsilon}(y)$
- Una bola cerrada es un conjunto abierto
- Una bola abierta es un conjunto cerrado

4 Algunas propiedades topológicas y las sucesiones en $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$

Hasta el momento, se ha logrado consolidar una buena representación del conjunto de interés, por medio de la cual se ha podido explorar y visualizar de mejor manera las bolas y las relaciones que hay entre ellas. En este **último capítulo se exploran otras** propiedades topológicas de este espacio y se utiliza la representación en el plano para presentar **varios ejemplos** de cada una de ellas.

4.1.1 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ Es totalmente acotado

Se iniciará esta exploración, indagando si el espacio métrico resulta ser acotado. A continuación, se enuncia la definición de un espacio métrico acotado.

Un espacio métrico (X, d) se dice totalmente acotado si dado $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -dependiendo de ε - llamado ε - *red* tal que $X = \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon}(x_i)$, $(x_i \in F)$.

Ejemplo 1

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se halla un conjunto finito de centros de bolas que al unirlos produzca a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Hágase $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(p) = \left\{ w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / d(w, p) < \frac{1}{2} \right\}$.

Se sabe que en la bola de radio $\frac{1}{2}$ se fijaran los dos primeros elementos de p , que puede ser cualquier sucesión, pero como se fijan los dos primeros elementos bastará con explorar cuatro posibilidades: $p_1 = (0, 0, \dots)$, $p_2 = (0, 1, \dots)$, $p_3 = (1, 0, \dots)$, $p_4 = (1, 1, \dots)$.

Ahora se grafica $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((0, 0, \dots))$, como se fijan los dos primeros elementos, ambos cero, las sucesiones $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y $(0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ cuyos números asociados son $\frac{1}{4}$ y 0, estarán en

la bola, luego la representación queda:

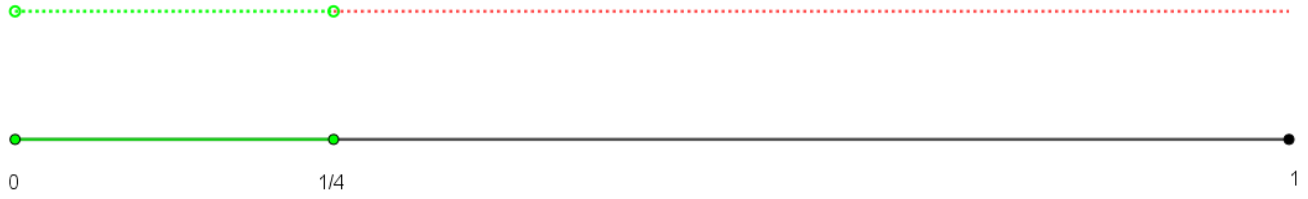


Gráfico 25. $\mathcal{B}_1(p)$ con $p = (0, 0, \dots)$

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 2 < l < m < \dots < s.\right\} \times \{1\}.$$

Ahora se grafica $\mathcal{B}_1((0, 1, \dots))$, las sucesiones $(0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ y $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ determinan los extremos de la bola, que son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, La representación de esta bola es:

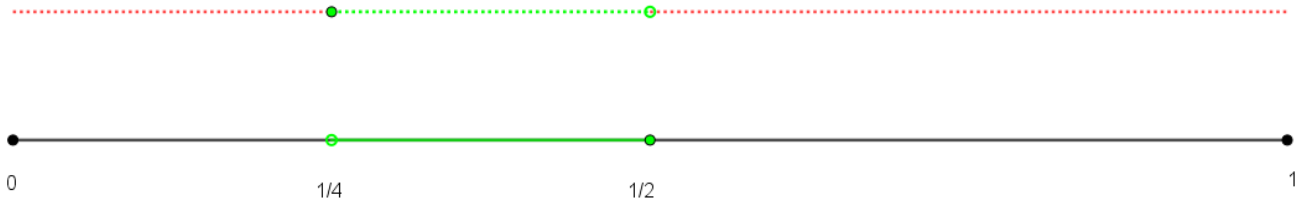


Gráfico 26. $\mathcal{B}_1((0, 1, \dots))$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 2 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Lo siguiente es hallar la representación gráfica de $\mathcal{B}_1((1, 0, \dots))$, se sabe que las sucesiones $(1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ y $(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ están en la bola, y sus números asociados $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ determinarán la bola en el plano, luego la representación queda así:

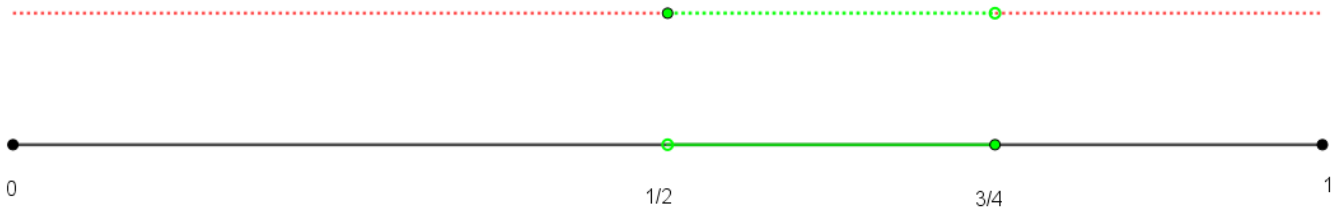


Gráfico 27. $\mathcal{B}_1((1, 0, \dots))$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 2 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Por último, se hará la gráfica de $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1, 1, \dots))$, se tiene que el menor número que se puede representar es el $\frac{3}{4}$ y el mayor número esta dado por la sucesión $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, es decir, 1.

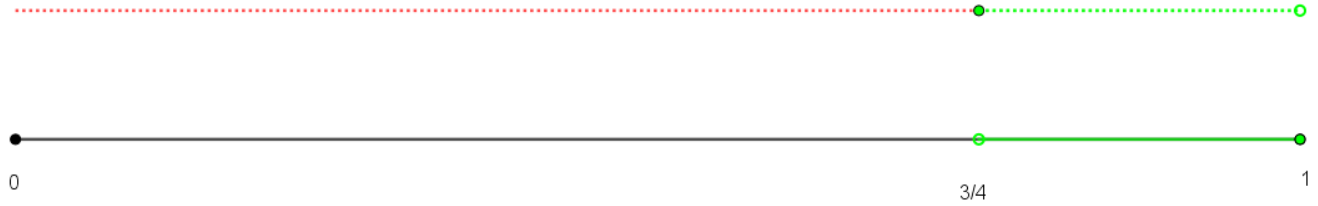


Gráfico 28. $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1, 1, \dots))$

$$\left(\frac{3}{4}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 2 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Se tiene que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ hay al menos cuatro sucesiones que forman una ε -red, es decir se encuentra $F = \{p_1 = (0, 0, \dots), p_2 = (0, 1, \dots), p_3 = (1, 0, \dots), p_4 = (0, 1, \dots)\}$ tal que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^4 B_{\frac{1}{2}}(p_i), (p_i \in F)$.

Ejemplo 2

Se ve ahora qué pasa con $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Se toman nuevamente todas las sucesiones que se pueden obtener intercalando ceros y unos en las primeras tres posiciones, que son $p_1 = (0, 0, 0, \dots), p_2 = (0, 0, 1, \dots), p_3 = (0, 1, 1, \dots), p_4 = (1, 1, 1, \dots), p_5 = (1, 0, 0, \dots), p_6 = (1, 1, 0, \dots), p_7 = (0, 1, 0, \dots), p_8 = (1, 0, 1, \dots)$. Ahora, se toman como centro estas sucesiones y como radio $\frac{1}{3}$ para construir las respectivas bolas.

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 0, \dots))$$

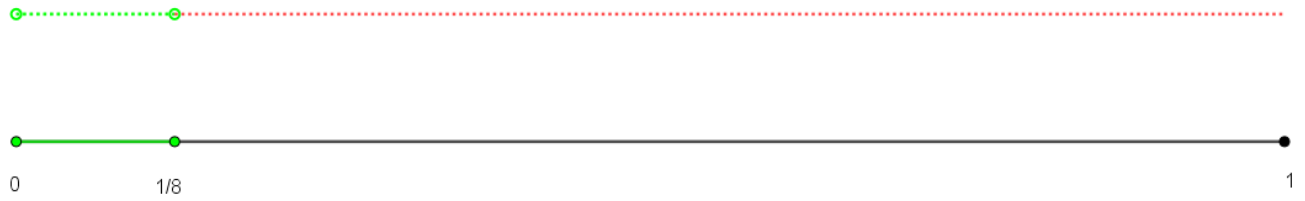


Gráfico 29. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 0, \dots))$

$$\left[0, \frac{1}{8}\right] \times \{0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 1, \dots)):$$

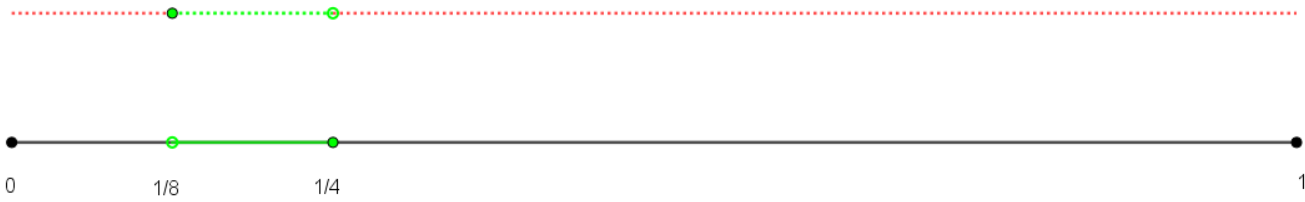


Gráfico 30. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 0, 1, \dots))$

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 0, \dots)):$$



Gráfico 31. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 0, \dots))$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 1, \dots)):$$

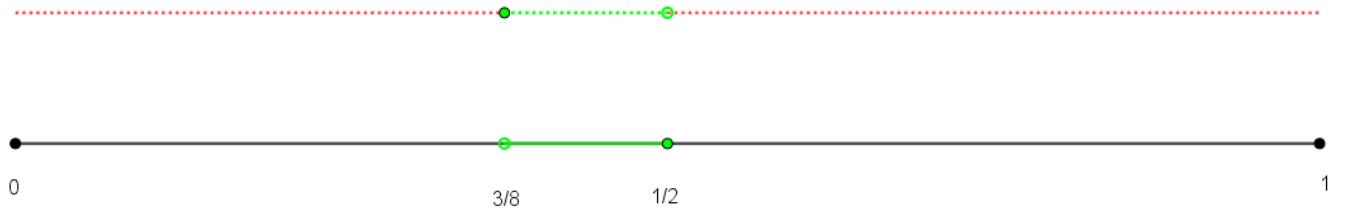


Gráfico 32. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0, 1, 1, \dots))$

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{3}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 0, 0, \dots))$$

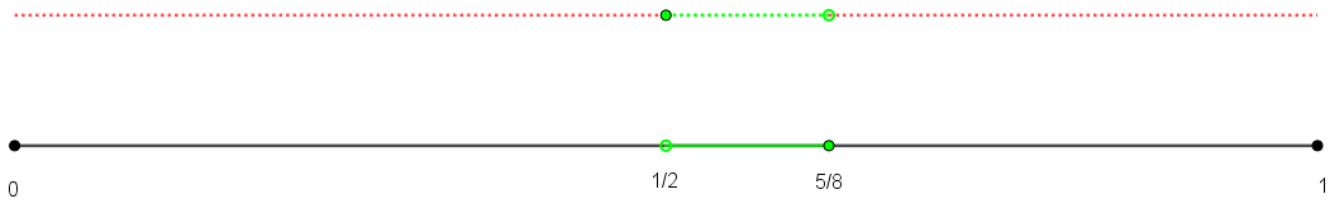


Gráfico 33. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 0, 0, \dots))$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 0, 1, \dots))$$

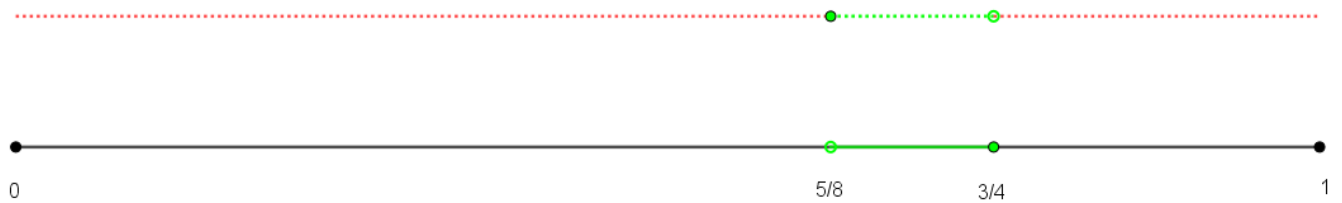


Gráfico 34. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 0, 1, \dots))$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{5}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{5}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 1, 0, \dots)):$$

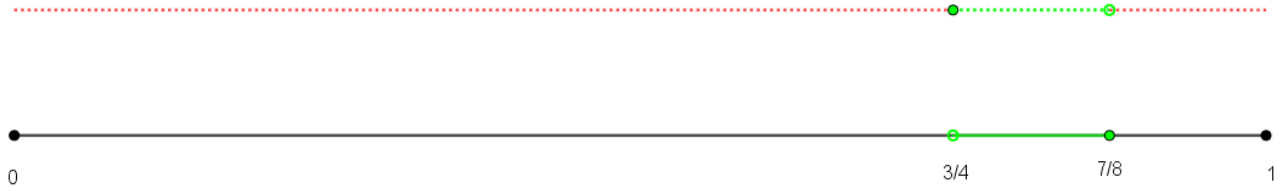


Gráfico 35. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 1, 0, \dots))$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \times \{1\}.$$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 1, 1, \dots)):$$

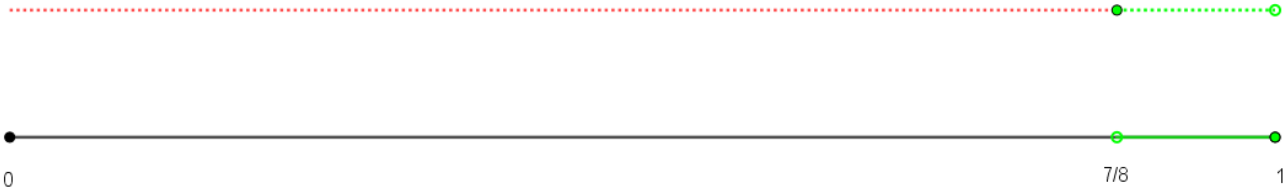


Gráfico 36. $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((1, 1, 1, \dots))$

$$\left(\frac{7}{8}, 1\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{7}{8} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 3 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{7}{8}\right\}\right) \times \{1\}.$$

Nuevamente, se tiene que para $\varepsilon = \frac{1}{3}$ hay al menos ocho sucesiones que forman una ε -red, es decir, se encuentra $F = \{p_1 = (0, 0, 0, \dots), p_2 = (0, 0, 1, \dots), p_3 = (0, 1, 1, \dots), p_4 = (1, 1, 1, \dots), p_5 = (1, 0, 0, \dots), p_6 = (1, 1, 0, \dots), p_7 = (0, 1, 0, \dots), p_8 = (1, 0, 1, \dots)\}$ tal que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^8 \mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(p_i), (p_i \in F)$.

Generalización.

Se vio en los ejemplos anteriores, que dado $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k > 1$, es posible encontrar un conjunto de 2^k sucesiones $F = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots, p_{2^k}\}$ tal que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{2^k} B_{\frac{1}{k}}(p_i)$, ($p_i \in F$). Basta con tomar todas las sucesiones que se pueden obtener variando las primeras k posiciones, de ahí el número 2^k .

En caso de que $\varepsilon \geq 1$, como ya se vio, $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_1[x] = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para cualquier x , luego se tiene $F = \{x\}$ tal que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{B}_\varepsilon(x)$.

4.1.2 Separación en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Este apartado está dedicado a estudiar y a explorar algunas propiedades de separación a través de ejemplos, como se ha hecho hasta el momento, a partir de esta exploración se generalizan y concluyen cuáles características cumple el espacio métrico estudiado. Primero se explora si este espacio es T_0 .

Definición: un espacio topológico X se llama T_0 o de kolmogoroff si para todo par de puntos distintos de X , existe un conjunto abierto que contiene uno de ellos y no al otro.

Ejemplos

Sea $x, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $x = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ y $z = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, de donde se tiene que a x se le asociará el número $\frac{1}{7}$ y a z el número $\frac{2}{3}$

Para construir una bola abierta que tenga a z pero no a x se tendrán en cuenta las distancias entre estas dos sucesiones:

$$d(x, z) = 1$$

Ahora se determina una bola con un radio $\frac{1}{k} < d(x, z)$, así:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(z) = \left\{ w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(w, z) < \frac{1}{k} \right\}$$

De lo anterior, es posible asegurar que $x \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(z)$ dado que $\frac{1}{k} < d(x, z)$.

Por ejemplo, al fijar el radio $\frac{1}{2}$, se tiene entonces:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z) = \{w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : w_1 = 1 \wedge w_2 = 0\}$$

Como

$$d(x, z) = 1$$

Se puede asegurar que $x \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z)$ porque $\frac{1}{2} < d(x, z)$

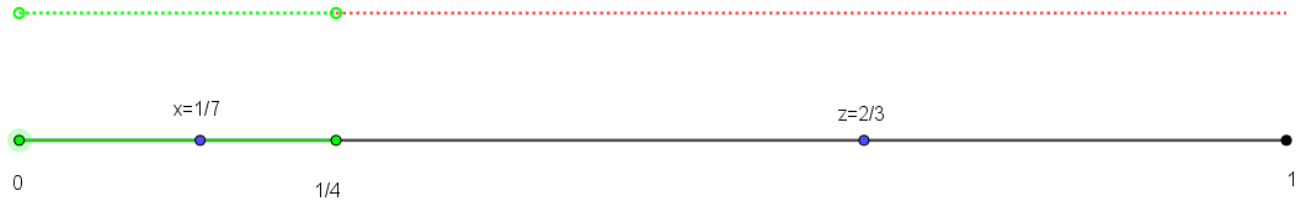


Gráfico 37. $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z)$ con $z = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Sea $w, v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $w = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ y $v = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$, de donde se tiene que:

A $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ se le asocia el número $(0, 01010101010101 \dots)_2$, es decir $\frac{1}{3}$. También para v se va a tener que se le asocia el número $(0, 011111111111 \dots)_2$, es decir $\frac{1}{2}$

De w y v tenemos que:

$$d(w, v) = \frac{1}{3}$$

Se puede encontrar una bola que tenga a la sucesión w pero que no tenga a v o viceversa siguiendo la idea presentada anteriormente, es decir, tomar un radio de la forma $\frac{1}{k} < d(w, v)$.

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(w) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(w, m) < \frac{1}{k}, \frac{1}{k} < d(w, v) \right\}$$

Por ejemplo, haciendo $k = 4$ se tiene:

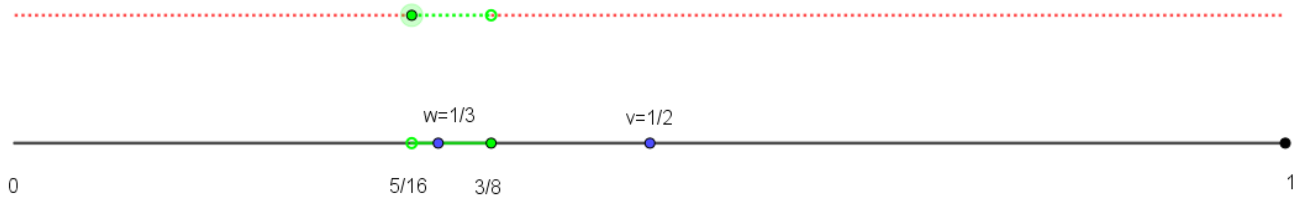


Gráfico 38. $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(w)$ con $w = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Ahora, se graficará $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(v)$.

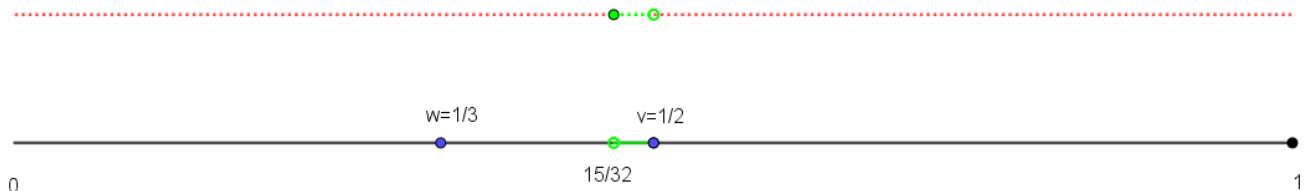


Gráfico 39. $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(v)$ con $v = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

De aquí se puede asegurar que $v \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(w)$ o también que $w \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(v)$ siempre y cuando se determine una bola $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(w)$ con $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$.

Generalización

Si se tienen $l, q \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es posible encontrar una bola cerrada que tenga a q pero no a l , o viceversa, encontrando un k que cumpla:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(q) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(q, m) < \frac{1}{k}, \frac{1}{k} < d(q, l) \right\}$$

A partir de lo anterior $q \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(q)$ pero $l \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(q)$, pero si se quiere encontrar una bola abierta que tenga a l pero no a q , se tiene que determinar la siguiente bola:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(l) = \left\{ s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(l, s) < \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < d(q, l) \right\}$$

Demostración

Se tiene que en la $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(q)$ están todas aquellas sucesiones que cumplan $d(q, m) < \frac{1}{k}$, pero el radio de la bola tiene la siguiente característica: $\frac{1}{k} < d(q, l)$ por tanto se tiene que $l \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(q)$. Es claro que k siempre existe, pues los naturales no están acotados superiormente.

Luego se puede asegurar que el espacio métrico es T_0 o de kolmogoroff.

Se explorará ahora si este espacio cumple con ser T_1 .

Definición: un espacio topológico se llama un espacio T_1 si para todo par de puntos distintos x, z , existen dos abiertos tales que: el primero contiene a x pero no a z , y el segundo contiene a z pero no a x .

Esta característica se tiene como consecuencia inmediata del apartado anterior, se verá por qué.

Sea $p, i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se puede asegurar gracias al anterior hallazgo que:

1. $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(p, m) < \frac{1}{k} \right\}$ con $\frac{1}{k} < d(p, i)$ cumple lo siguiente $p \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$ pero $i \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(p)$
2. $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(i) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(i, m) < \frac{1}{n} \right\}$ con $\frac{1}{n} < d(p, i)$ cumple lo siguiente $i \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(i)$ pero $p \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(i)$

Por esta razón se puede asegurar que existen dos abiertos tales que el primero contiene a p pero no a i , y el segundo contiene a i pero no a p , por tanto, es posible asegurar que este espacio métrico es T_1

Se explora ahora si el espacio métrico es T_2

Definición: un espacio topológico X se llama un espacio de Hausdorff o un espacio T_2 si para todo par de puntos distintos x, z de X , existen abiertos disyuntos V y W tales que $x \in V$ y $z \in W$

Ejemplos:

Sea $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $x = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1 \dots)$ y $y = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \dots)$, de donde se tiene que:

A $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1 \dots)$ se le asocia el número $(0, 001001001 \dots)_2$, es decir $\frac{1}{7}$

También para y se tiene que se le asocia el número $(0, 001111111111 \dots)_2$, es decir $\frac{1}{4}$

Para determinar los abiertos disyuntos se halla la $d(x, y) = \frac{1}{4}$, luego se determina la siguiente bola:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}\left(\frac{1}{7}\right) &= \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_1 = 0 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 1 \wedge m_4 = 0 \wedge m_5 = 0 \wedge m_6 = 1 \wedge m_7 \\ &= 0 \wedge m_8 = 0\} \end{aligned}$$

De esto se tiene que el menor número que se podrá representar es $(0,00100100000000 \dots)_2$, es decir $\frac{9}{64} = 0.140625$

Además, se tiene que el mayor número que se podrá representar es $(0,001001001111111 \dots)_2$, es decir $\frac{37}{256} = 0.14453125$

El conjunto que le corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{9}{64}, \frac{37}{256}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{9}{64} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 8 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{9}{64}\right\}\right) \times \{1\}.$$

A partir de los extremos se puede asegurar que $\frac{1}{4} \notin \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}\left(\frac{1}{7}\right)$, ahora se procede a construir la siguiente bola siguiendo con la idea de tomar al radio como $\frac{d(x,y)}{2}$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) &= \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_1 = 0 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 1 \wedge m_4 = 1 \wedge m_5 = 1 \wedge m_6 = 1 \wedge m_7 \\ &= 1 \wedge m_8 = 1\} \end{aligned}$$

Se tiene que el menor número que se puede representar es el $(0,0,1,1,1,1,1,0,0 \dots)$ con su número asociado $(0,0011111100000000 \dots)_2$, es decir $\frac{63}{256} = 0.24609375$

También, se tiene que el mayor número que se puede representar es $\frac{1}{4}$. El conjunto que le corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{63}{256}, \frac{1}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{63}{256} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 8 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{63}{256}\right\}\right) \times \{1\}.$$



Gráfico 40. $B_{\frac{1}{8}}((0, 0, 1, 0, 0, 1 \dots))$ y $B_{\frac{1}{8}}((0, 0, 1, 1, 1 \dots))$

Ahora se verá si este método funciona para otros puntos, así:

Sea $w, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $w = (1,0,1,1,1,1,1 \dots)$ y $z = (1,0,1,0,1,0,1,0 \dots)$, de donde se tiene que:

A $(1,0,1,1,1,1,1 \dots)$ se le asocia el número $(0,1011111 \dots)_2$, es decir $\frac{3}{4}$

También a z se le asociará el número $(0,10101010 \dots)_2$, es decir $\frac{2}{3}$

Ahora se halla la $d(w, z) = \frac{1}{4}$, luego, se determinan:

$$\begin{aligned} B_{\frac{d(w,z)}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) &= \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_1 = 1 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 1 \wedge m_4 = 0 \wedge m_5 = 1 \wedge m_6 = 0 \wedge m_7 \\ &= 1 \wedge m_8 = 0\} \end{aligned}$$

Luego se tiene que el menor número que se podrá representar será el $(1,0,1,0,1,0,1,0,0,0 \dots)$

con su número asociado $(0,10101010000000 \dots)_2$, es decir $\frac{85}{128} = 0.6640625$

Además, se tiene que el mayor número que se podrá representar es $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1 \dots)$

con su número asociado $(0,1010101011111 \dots)_2$, es decir $\frac{171}{256} = 0.66796875$

El conjunto que le corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{85}{128}, \frac{171}{256}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{85}{128} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 8 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{85}{128}\right\}\right) \times \{1\}.$$

De la siguiente bola:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{d(w,z)}{2}}\left(\frac{3}{4}\right) &= \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}: m_1 = 1 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 1 \wedge m_4 = 1 \wedge m_5 = 1 \wedge m_6 = 1 \wedge m_7 \\ &= 1 \wedge m_8 = 1\} \end{aligned}$$

Se ve que el menor número que se podrá representar será el $(1,0,1,1,1,1,1,0,0,0 \dots)$ con su número asociado $(0,1011111100000000 \dots)_2$, es decir $\frac{191}{256} = 0.74609375$

También, el mayor número que se podrá representar es $(1,0,1,1,1,1,1 \dots)$ con su número asociado $\frac{3}{4}$. El conjunto que le corresponde a esta bola es:

$$\left(\frac{191}{256}, \frac{3}{4}\right] \times \{0\} \cup \left(\left\{x \in \mathbb{Q}: x = \frac{191}{256} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^s}, 8 < l < m < \dots < s.\right\} \cup \left\{\frac{191}{256}\right\}\right) \times \{1\}.$$

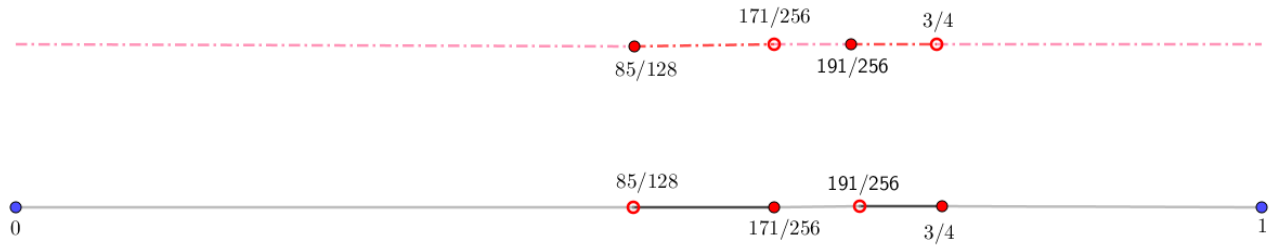


Gráfico 41. $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((1, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \dots))$ y $\mathcal{B}_{\frac{1}{8}}((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots))$

Generalización

Es decir que para cualquier $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se pueden determinar $\mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}(x) = \left\{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(x, m) < \frac{d(x,y)}{2}\right\}$ y $\mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = \left\{g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(y, g) < \frac{d(x,y)}{2}\right\}$ tal que $\mathcal{B}_{\frac{d(w,z)}{2}}(x) \cap \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = \emptyset$.

Para esta demostración se utilizará el teorema 5.6 expuesto en Introducción al análisis matemático de Bartle (1980).

Teorema 4: Sean a, b, c, d elementos de $\mathbb{R}$. Si $b < a$ y $d < c$ entonces $b + d < a + c$

Demostración del teorema 5.6.

Dado que $a - b$ y $c - d$ pertenecen a P (conjunto de los números reales estrictamente positivos) entonces por la propiedad 5.1 que indica: Si a, b pertenecen a P , entonces $a + b$ pertenece a P , se asegura que $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$ también pertenece a P .

Demostración

Supóngase que existe un $p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{B}_{\frac{d(w,z)}{2}}(x) \cap \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = p$, por definición de bola se tiene:

$$d(x, p) < \frac{d(x,y)}{2} \quad y \quad d(y, p) < \frac{d(x,y)}{2}$$

Por el teorema 5.6 se dice:

$$d(y, p) + d(x, p) < d(x, y)$$

Pero esto contradice la propiedad llamada “desigualdad triangular”. Por tanto, se ha mostrado que $\mathcal{B}_{\frac{d(w,z)}{2}}(x) \cap \mathcal{B}_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = \emptyset$. Por lo que se tiene que este espacio es T_2 .

Definición: un espacio topológico X se llama T_3 si cualquier cerrado y cualquier punto que no esté en él, pueden separarse por abiertos, o sea, si para todo cerrado F y para todo punto p que no está en F , existen abiertos disjuntos V y W tales que $\{p\} \subseteq V$ y $F \subseteq W$.

Ejemplo 1

Sea $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{7}\right] = \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_1 = 0 \wedge m_2 = 0 \wedge m_3 = 1\}$ con $\frac{1}{7} = (0,001001001 \dots)_2$ y $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $x = (1,0,1,1,1,1,1,1 \dots)$ de donde se tiene que el número asociado a x es $\frac{3}{4}$

Y los extremos de la $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{7}\right]$:

El menor número que se podrá representar en esta bola es $(0,0010000000 \dots)_2$ y el mayor número será $(0,001111111 \dots)_2$, es decir $\frac{1}{8}$ y $\frac{5}{8}$ respectivamente.

Para determinar las bolas disjuntas se va a hallar $d\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}\right) = 1$, luego se encontrará un número que esté entre $\frac{1}{4}$ y 1, de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{5}{8}$$

Ahora se determina la $\mathcal{B}_{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{7}\right) = \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d\left(\frac{1}{7}, s\right) < \frac{5}{8}\}$, dado que $d\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}\right) = 1$ se tiene que $\frac{3}{4} \notin \mathcal{B}_{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{7}\right)$ y como $\frac{1}{4} < \frac{5}{8}$ es posible asegurar que $\mathcal{B}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{7}\right) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{7}\right)$, además, se puede representar esa misma bola con un radio de la forma $\frac{1}{k}$ como sigue:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{7}\right] = \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : s_1 = 0\}$$

El menor número que se podrá representar en esta bola es $(0,000000000 \dots)_2$, es decir 0 y el mayor número será $(0,011111111 \dots)_2$ es decir $\frac{1}{2}$

Luego se determinará la siguiente bola:

$$\mathcal{B}_{\frac{d(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}) - \frac{5}{8}}{2}}\left(\frac{3}{4}\right) = \left\{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d\left(\frac{3}{4}, s\right) < \frac{d\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{8}}{2}\right\}$$

Dado que $\frac{d(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}) - \frac{5}{8}}{2} = \frac{3}{16}$ se puede representar esa misma bola con un radio de la forma $\frac{1}{k}$ como

sigue:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{6}}\left(\frac{3}{4}\right) = \{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : s_1 = 1 \wedge s_2 = 0 \wedge s_3 = 1 \wedge s_4 = 1 \wedge s_5 = 1\}$$

El menor número que se podrá representar en esta bola es $(0,1011100000000 \dots)_2$, es decir $\frac{23}{32}$ y el mayor número será $\frac{3}{4}$. Gracias a los extremos es posible asegurar que

$$\mathcal{B}_{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{7}\right) \cap \mathcal{B}_{\frac{d(\frac{1}{7}, \frac{3}{4}) - \frac{5}{8}}{2}}\left(\frac{3}{4}\right) = \emptyset$$

Generalización

Dado un $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(z) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(z, m) \leq \frac{1}{k} \right\}$, un $g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, con $g \notin \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(z)$ y $d(z, g) = \frac{1}{m}$

entonces se pueden determinar $\mathcal{B}_{\frac{m+k}{2km}}(z) = \left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(z, m) < \frac{m+k}{2km} \right\}$ y $\mathcal{B}_{\frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}}(g) =$

$$\left\{ m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(g, m) < \frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2} \right\} \text{ con } \mathcal{B}_{\frac{m+k}{2km}}(z) \cap \mathcal{B}_{\frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}}(g) = \emptyset$$

Demostración.

Supóngase que existe un $\mathcal{B}_{\frac{m+k}{2km}}(z) \cap \mathcal{B}_{\frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}}(g) = w$, luego se debe cumplir:

$$d(z, w) < \frac{m+k}{2km} \quad \text{y} \quad d(g, w) < \frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}$$

Por el teorema 5.6 se puede asegurar que:

$$d(z, w) + d(g, w) < \frac{m+k}{2km} + \frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}$$

De donde se tiene

$$d(z, w) + d(g, w) < \frac{3}{4m} + \frac{1}{4k}$$

Es decir que:

$$d(z, w) + d(g, w) < \frac{3}{4}d(z, g) + \frac{1}{4}d(z, m)$$

Luego, por desigualdad triangular:

$$d(z, g) < \frac{3}{4}d(z, g) + \frac{1}{4}d(z, m)$$

De donde

$$d(z, g) < d(z, m)$$

Es decir que $g \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(z)$, lo cual es una contradicción, por tanto, $\mathcal{B}_{\frac{m+k}{2km}}(z) \cap \mathcal{B}_{\frac{\frac{1}{m} - \frac{m+k}{2km}}{2}}(g) = \emptyset$

Definición: un espacio topológico se llama regular si es T_1 y T_3 .

Como se ha mostrado que el espacio topológico es T_1 y T_3 , se puede asegurar que es regular.

4.1.3 Recubrimiento de A , $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Este apartado se centra en la ejemplificación de recubrimientos abiertos y sub-cubrimientos de conjuntos A , tal que $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, esto con el fin de presentar al lector una posible ruta para mostrar que este espacio métrico es compacto. Se define qué es el recubrimiento de un subconjunto de un espacio topológico.

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$; se dice que una familia $(V_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de X es un recubrimiento abierto de A (o un cubrimiento de A) si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$

Si $J \subseteq I$ y $\bigcup_{i \in J} V_i$ aún contiene a A , se dice que el cubrimiento abierto $(V_i)_{i \in I}$ contiene al cubrimiento abierto $(V_i)_{i \in J}$ de A , o que $(V_i)_{i \in J}$ es un subcubrimiento de $(V_i)_{i \in I}$

Para un conjunto finito.

Ejemplo 1.

Sea conjunto $A = \{(0,0,1,0,0,1,0,0,1 \dots), (1,0,1,0,1,0,1,0 \dots)\}$, ahora se tomará el conjunto constituido por bolas abiertas que tienen como centro los elementos del conjunto A , así:

$$W = \{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((0,0,1,0,0,1,0,0,1 \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{4}}((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{3}}((0,0,1,0,0,1,0,0,1 \dots))\}$$

Por lo anterior se asegura que $A \subseteq \bigcup_{I \in W} I$ porque los centros de las bolas que se encuentran en el conjunto W resultan ser los elementos de A . Ahora se encontrará un J , tal que $J \subseteq W$:

$$J = \{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((0,0,1,0,0,1,0,0,1 \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{4}}((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots))\}$$

Se tiene que $A \subseteq \bigcup_{S \in J} S$ porque en el conjunto J se encuentran todos los elementos de A como centros de las bolas abiertas que están en este conjunto. Teniendo en cuenta la definición presentada es posible asegurar que $(V_i)_{i \in J}$ es un subcobrimiento de $(V_i)_{i \in W}$, debido a que $J \subseteq W$ y $A \subseteq \bigcup_{S \in J} S$

Ejemplo 1.1

Se encuentra otro recubrimiento de A . Sea $H = \{\mathcal{B}_2((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots))\}$

Como el elemento de H es una bola abierta se recuerda lo siguiente:

$$\mathcal{B}_2((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots)) = \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots), m) < 2\}$$

Para que se cumpla la condición $d((1,0,1,0,1,0,1,0 \dots), m) < 2$ el denominador debe ser mayor o igual que 1. Por ejemplo,

$$p = (0, p_2, p_3, p_4, \dots, p_k, \dots); d((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), p) = \frac{1}{1}.$$

$$q = (1, 1, q_3, q_4, q_5, \dots, q_k, \dots); d((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), q) = \frac{1}{2}.$$

$$r = (1, 0, 0, r_4, r_5, r_6, \dots, r_k, \dots); d((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), r) = \frac{1}{3}.$$

A partir de lo anterior para $d((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), m) = \frac{1}{1}$ se tienen todas las posibles sucesiones cuyo primer elemento sea 0, en especial la sucesión $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$, lo que muestra que $A \subseteq \bigcup_{I \in H} I$ porque se ha mostrado que $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \in \mathcal{B}_2((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots))$. Ahora se encuentra el sub-cubrimiento de H , para esto se va a tomar un P , tal que:

$$P = \{ \mathcal{B}_2((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)) \}$$

Se puede asegurar que $P \subseteq H$ porque se tiene un teorema que demuestra que todo punto de una bola puede ser su centro, el cual se encuentra en el capítulo 3.1.2, es decir que:

$$\mathcal{B}_2((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)) = \mathcal{B}_2((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots))$$

Además, se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{B}_2((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)) = \{z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), z) < 2\}$$

Para que se cumpla la condición $d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), z) < 2$ el denominador debe ser mayor o igual que 1. Por ejemplo,

$$p = (1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_k, \dots); d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), p) = \frac{1}{1}.$$

$$q = (0, 1, q_3, q_4, q_5, \dots, q_k, \dots); d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), q) = \frac{1}{2}.$$

$$r = (0, 0, 0, r_4, r_5, r_6, \dots, r_k, \dots); d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), r) = \frac{1}{3}.$$

A partir de lo anterior para $d((0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots), z) = \frac{1}{1}$ se tienen todas las posibles sucesiones cuyo primer elemento sea 1, en especial la $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, por tanto, se ha mostrado que $A \subseteq \bigcup_{S \in P} S$. Por otro lado, se tiene que $(V_i)_{i \in P}$ es un subcubrimiento de $(V_i)_{i \in H}$, debido que $A \subseteq \bigcup_{I \in H} I$, $P \subseteq H$ y $A \subseteq \bigcup_{S \in P} S$.

Ejemplo 2.

Sea $B = \{(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots), (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)\}$, ahora se encuentra un cubrimiento y un sub-cubrimiento para B aplicando la idea presentada en el ejemplo 1.2. Es decir que se toma el siguiente conjunto:

$$G = \{\mathcal{B}_z((1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)), z > 1\}$$

Ahora, por lo expuesto en 4.1.1 se tiene que para todo $\varepsilon > 1$ se cumple que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_1[x] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ para cualquier x , es decir que $\mathcal{B}_z((1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, por tanto, se asegura que $B \subseteq \bigcup_{F \in G} F$, ahora se toma la misma bola, pero con un centro distinto a $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ pero que se encuentre en B , por ejemplo:

$$R = \{\mathcal{B}_f((1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)), f > 1\}$$

Utilizando el teorema que se presentó en la sección 4.1.1 se concluye que $\mathcal{B}_f((1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, por tanto:

$$R \subseteq G$$

Además, como todo punto de una bola es su centro, se tiene $B \subseteq \bigcup_{S \in R} S$, entonces se concluye que $(V_i)_{i \in R}$ es un subcubrimiento de $(V_i)_{i \in G}$.

Para un conjunto infinito.

Ejemplo 1.

Se sigue con la idea presentada en conjunto finito, a partir de eso se toma el conjunto $B = \{p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : p_1 = 1\}$ de esto tenemos:

$$Z = \{\mathcal{B}_2((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1,0,1,0,1,0,1,0, \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1,1,1,0,1,0,1,0, \dots))\}$$

A partir de la definición de bola se presenta:

$$\mathcal{B}_2((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots)) = \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots), m) < 2\}$$

Es decir que son todas aquellas sucesiones que cambien desde la posición $k = 1$, en especial aquellas sucesiones que tengan como primer elemento al 1, además se debe recordar que $\mathcal{B}_2((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots)) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. También se tiene:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1,0,1,0,1,0,1,0, \dots)) = \{m \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_1 = 1 \wedge m_2 = 0\}$$

En esta se tienen todas las sucesiones de la forma $(1,0, a_3, a_4 \dots)$, algo parecido sucede con $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1,1,1,0,1,0,1,0, \dots))$ en donde todas las sucesiones son de la forma $(1,1, a_3, a_4 \dots)$. De lo anterior se puede asegurar que $B \subseteq \bigcup_{I \in Z} I$, porque en Z se encuentran a todas aquellas sucesiones cuyo primer elemento sea 1.

Ahora se escoge un Q , tal que $Q \subseteq Z$, así:

$$Q = \{\mathcal{B}_2((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots)), \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}((1,0,1,0,1,0,1,0, \dots))\}$$

Pero es necesario recordar que $\mathcal{B}_2((0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1, \dots)) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a partir de esto es posible asegurar que $B \subseteq \bigcup_{S \in Q} S$, luego se puede concluir que $(V_i)_{i \in Q}$ es un subcubrimiento de $(V_i)_{i \in Z}$.

Ejemplo 2

Sea el conjunto $S = \{p \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : p_1 = 1, p_2 = 0\}$, pero ahora se va a utilizar la idea presentada en el ejemplo 1,2 de esta misma sección. Se toma el siguiente conjunto:

$$V = \{ \mathcal{B}_z((a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)) \}, z > 1$$

A partir de lo anterior se asegura que $V = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, por tanto $S \subseteq \bigcup_{I \in V} I$, luego se toma a O como:

$$O = \{ \mathcal{B}_d((1,0, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)) \}, d > 1$$

Al ser $d > 1$ se asegura que $O = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, por tanto $O \subseteq V$ y además $S \subseteq \bigcup_{I \in O} I$, luego se afirmar que $(V_i)_{i \in O}$ es un subcubrimiento de $(V_i)_{i \in V}$.

Generalización

Dado que se mostraron dos maneras de encontrar el cubrimiento y el sub-cubrimiento de un conjunto se presenta:

1. Sea $A \subseteq X$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$, se encuentra un $W = \{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(a_1), \mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(a_1), \mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(a_2), \mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(a_2), \mathcal{B}_{\frac{1}{6}}(a_3), \mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(a_3), \dots, \mathcal{B}_{\frac{1}{2n}}(a_n), \mathcal{B}_{\frac{1}{2n+1}}(a_n)\}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{I \in W} I$, además, se encuentra un $J = \{\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(a_1), \mathcal{B}_{\frac{1}{4}}(a_2), \mathcal{B}_{\frac{1}{6}}(a_3), \dots, \mathcal{B}_{\frac{1}{2n}}(a_n)\}$, tal que $J \subseteq W$ y $A \subseteq \bigcup_{S \in J} S$. Pero este proceso es análogo para A no finito.

2. Sea $A \subseteq X$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$, se encuentra un $W = \{\mathcal{B}_f(a_k)\}$, $f > 1$, tal que $A \subseteq \bigcup_{I \in W} I$, también, se halla un $J = \{\mathcal{B}_s(a_m)\}$, $s > 1$, tal que $J \subseteq W$ y $A \subseteq \bigcup_{S \in J} S$. Pero este proceso es análogo para A no finito.

4.1.4 Ejemplo de convergencia de sucesiones y sucesiones de Cauchy en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

En esta sección se presentan algunos ejemplos de sucesiones y sucesiones de Cauchy en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, esto con el fin de presentar al lector algunos insumos para que logre demostrar si este espacio métrico es o no completo.

4.1.4.1 Ejemplos de sucesiones convergentes

Se define una sucesión $\{x_n\}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$2 \mapsto (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$3 \mapsto (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$n \mapsto (0, 0, 0, 0, \dots, 0_n, 1, 1, 1, \dots)$$

Se sabe que una sucesión (x_n) converge en (X, d) al punto P sii para toda $\mathcal{B}_\varepsilon(P)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)(x_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(P))$

Los radios, como ya se dijo, son de la forma $\frac{1}{k}$ con k natural.

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{3}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(P)$ deben tener sus tres primeras posiciones fijas. En $\{x_n\}$ para $n \geq 3$ las tres primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $x_3 = 0$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{5}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{5}}(P)$ deben tener sus cinco primeras posiciones fijas, se ve que en $\{x_n\}$ para $n \geq 5$ las tres cinco primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ y $x_5 = 0$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{k}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(P)$ deben tener sus k primeras posiciones fijas, se tiene que en $\{x_n\}$ para $n \geq k$ las k primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, \dots$ y $x_k = 0$

En esencia se tiene que para toda $\mathcal{B}_{\varepsilon}((0,0,0,0,0,0, \dots))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)(x_n \in \mathcal{B}_{\varepsilon}((0,0,0,0,0,0, \dots)))$, es decir que $\{x_n\}$ converge en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ al punto $(0,0,0,0,0,0, \dots)$

Se define ahora una sucesión $\{x_n\}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (1,1,1,1,1,1, \dots)$$

$$2 \mapsto (1,0,1,1,1,1, \dots)$$

$$3 \mapsto (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \dots)$$

$$4 \mapsto (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$5 \mapsto (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$n \mapsto (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, p_n, 1, 1, 1, \dots)$$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(P)$ deben tener sus dos primeras posiciones fijas. En $\{x_n\}$ para $n \geq 2$ las dos primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{7}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{7}}(P)$ deben tener sus siete primeras posiciones fijas. En $\{x_n\}$ para $n \geq 7$ las tres primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$ y $x_7 = 1$

Luego, se tiene que para toda $\mathcal{B}_\varepsilon((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)(x_n \in \mathcal{B}_\varepsilon((1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots)))$, es decir que $\{x_n\}$ converge en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ al punto $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots)$

4.1.4.2 Ejemplos de sucesiones no convergentes

Ahora, se define una sucesión $\{x_n\}$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (1,0,1,0,1,0,1,\dots)$$

$$2 \mapsto (0,1,0,1,0,1,0,1,\dots)$$

$$3 \mapsto (1,0,1,0,1,0,1,\dots)$$

$$4 \mapsto (0,1,0,1,0,1,0,1,\dots)$$

$$n_{par} \mapsto (0,1,0,1,0,1,0,1,\dots, 1_{par}, 0_{impar}, \dots)$$

$$n_{impar} \mapsto (1,0,1,0,1,0,1,\dots, 1_{impar}, 0_{par}, \dots)$$

Con $\varepsilon = 4$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_4(P)$ deben tener su primera posición fija, se ve que en $\{x_n\}$ no existe un n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tenga que $x_n \in \mathcal{B}_4(P)$ porque todos los elementos de $\{x_n\}$ varia en la primera posición.

De lo anterior se asegura que la sucesión $\{x_n\}$ diverge

Ahora se define la sucesión $\{g_n\}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (0,1,1,1,1,1,\dots)$$

$$2 \mapsto (1,1,0,0,0,0,\dots)$$

$$3 \mapsto (0,0,0,1,1,1,\dots)$$

$$4 \mapsto (1,1,1,1,0,0,\dots)$$

$$5 \mapsto (0,0,0,0,0,1,1,\dots)$$

$$n_{par} \mapsto (1,1,1,1,1,1, \dots, 1_n, 0,0,0,0,0,0 \dots)$$

$$n_{impar} \mapsto (0,0,0,0,0,0, \dots, 1_n, 1,1,1,1,1,1, \dots)$$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{n}$$

Se ve que en $\{g_n\}$ no existe un n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tenga que $x_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(P)$

porque todos los elementos de $\{g_n\}$ varían en sus primeras posiciones.

De lo anterior es posible asegurar que la sucesión $\{g_n\}$ diverge.

Ahora se define la sucesión $\{w_m\}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (1,0,1,1,1,1, \dots)$$

$$2 \mapsto (1,1,1,1,1,1,1, \dots)$$

$$3 \mapsto (1,1,1,0,1,1,1, \dots)$$

$$4 \mapsto (0,0,1,1,1,1,1,1, \dots)$$

$$5 \mapsto (1,1,1,1,1,0,1,1, \dots)$$

$$m_{par} \mapsto (0,0,0,0,0,0, \dots, 1_{m-1}, 1,1,1,1,1,1, \dots)$$

$$m_{impar} \mapsto (1,1,1,1,1,1, \dots, 0_{m+1}, 1,1,1,1,1, \dots)$$

No existe un n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tenga que $x_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(P)$, por tanto $\{w_m\}$

diverge.

4.1.4.3 Sucesiones de Cauchy

Definición: dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que $((\forall n, m \geq n_0)(d(x_n, x_m) < \varepsilon))$. A una sucesión con esta propiedad se le llama sucesión de Cauchy.

Ejemplos.

Se define la sucesión $\{z_n\}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (1,0,0,0,\dots)$$

$$2 \mapsto (1,1,0,0,0,0,\dots)$$

$$3 \mapsto (1,1,1,0,0,0,0,\dots)$$

$$4 \mapsto (1,1,1,1,0,0,0,0,\dots)$$

$$n \mapsto (1,1,1,1,1, \dots, 1_n, 0,0,0,0,\dots)$$

Se explora su convergencia, así:

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{1}{k}$$

En este caso todos los centros que se elijan para la $\mathcal{B}_{\frac{1}{k}}(P)$ deben tener sus k primeras posiciones fijas, se tiene que en $\{y_n\}$ para $n \geq k$ las k primeras posiciones se mantienen fijas, las cuales son $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1, \dots$ y $x_k = 1$

En esencia, se tiene que para toda $\mathcal{B}_{\varepsilon}((1,1,1,1,1,1,1, \dots))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)(x_n \in \mathcal{B}_{\varepsilon}((1,1,1,1,1,1,1, \dots)))$, es decir que $\{z_n\}$ converge en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ al punto $(1,1,1,1,1,1,1, \dots)$

$\{z_n\}$ es de Cauchy?

Con $\varepsilon = \frac{1}{3}$

Para que se tenga $d(x_n, x_m) < \frac{1}{3}$ se toma cualquier $n_0 \geq 3$, porque todas las sucesiones tendrán sus tres primeras posiciones fijas.

Con $\varepsilon = \frac{1}{8}$

Para que se tenga $d(x_n, x_m) < \frac{1}{8}$ se puede tomar cualquier $n_0 \geq 8$, porque todas las sucesiones tendrán sus ocho primeras posiciones fijas.

Lo anterior asegura que $\{z_n\}$ es de Cauchy.

Se define una sucesión $\{s_n\}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$1 \mapsto (1,0,0,1,1,1,1,1,\dots)$$

$$2 \mapsto (1,1,0,0,1,1,1,1,\dots)$$

$$3 \mapsto (1,1,1,0,0,1,1,1,1,\dots)$$

$$4 \mapsto (1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,\dots)$$

$$n \mapsto (1,1,1,1,1, \dots 1,1,1, 0_{n+1}, 0_{n+2}, 1,1,1,\dots)$$

Se ve que sea convergente, así:

Con $\varepsilon = \frac{1}{k}$

En esencia se tendrá que para toda $\mathcal{B}_\varepsilon((1,1,1,1,1,1,1,1, \dots))$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)(x_n \in \mathcal{B}_\varepsilon((1,1,1,1,1,1,1,1, \dots)))$, es decir que $\{s_n\}$ converge en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ al punto $(1,1,1,1,1,1,1,1, \dots)$

$\{z_n\}$ es de Cauchy?

Con $\varepsilon = \frac{1}{4}$

Para que se tenga $d(x_n, x_m) < \frac{1}{4}$ es posible tomar cualquier $n_0 \geq 4$, porque todas las sucesiones tendrán sus cuatro primeras posiciones fijas.

Con $\varepsilon = \frac{1}{j}$

Para que se tenga $d(x_n, x_m) < \frac{1}{j}$ es posible tomar cualquier $n_0 \geq j$, porque todas las sucesiones tendrán sus j primeras posiciones fijas.

De lo anterior se puede asegurar que $\{s_n\}$ es de Cauchy.

5 Conclusiones

A continuación, se presentan los resultados destacados que se consiguieron durante el desarrollo del trabajo.

5.1.1 Conclusiones generales.

- Los conocimientos matemáticos que se adquirieron en el curso de la Licenciatura en Matemáticas fueron suficientes para la realización del presente estudio, en el cual se tuvieron en cuenta principalmente los conceptos estudiados en los cursos de teoría de conjuntos y topología. También se pusieron en práctica las habilidades comunicativas escritas que se desarrollaron en el transcurso de la carrera para la consolidar las ideas del presente documento.
- $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ donde d es la métrica de Baire, es un espacio ultramétrico; a partir de la demostración de los axiomas D1, D2 y D3 se logra mostrar que $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ satisface la ultra-desigualdad triangular, es totalmente acotado; se logra ejemplificar y generalizar la existencia del subconjunto finito $(\varepsilon - red)$ de tal manera que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^{2^k} B_{\frac{1}{k}}(p_i), (p_i \in F)$, de kolmogoroff; con $l, q \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se ejemplifica y demuestra la existencia $B_{\frac{1}{k}}(l)$ tal que $l \in B_{\frac{1}{k}}(l)$ pero $q \notin B_{\frac{1}{k}}(l), T_1$; teniendo en cuenta los resultados de la propiedad anterior se tiene: con $p, i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se logra mostrar la existencia de $B_{\frac{1}{k}}(p)$ tal que $p \in B_{\frac{1}{k}}(p)$ pero $i \notin B_{\frac{1}{k}}(p)$ junto con $B_{\frac{1}{n}}(i)$ tal que $i \in B_{\frac{1}{n}}(i)$ pero $p \notin B_{\frac{1}{n}}(i)$, Hausdorff; con $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se logró determinar $B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$ y $B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$ tal que $B_{\frac{d(w,z)}{2}}(x) \cap B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y) = \emptyset, T_3$; a partir de $B_{\frac{1}{k}}(z)$ con $g \notin B_{\frac{1}{k}}(z)$ se pueden

determinar dos bolas abiertas tal que $B_{\frac{m+k}{2km}}(z) \cap B_{\frac{1}{m} \cdot \frac{m+k}{2km}}(g) = \emptyset$ y también es regular

porque se mostró que el espacio métrico cumple con T_1 y T_3 .

5.1.2 Conclusiones específicas.

- Al determinar una bola se fijan los primeros k elementos de la sucesión centro, de esto se puede asegurar que todos los elementos que pertenecen al abierto comparten los primeros k elementos. De lo anterior se logra demostrar que en $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ cualquier punto puede ser centro de una bola.
- En $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ toda bola abierta es un conjunto cerrado; se ejemplifica y demuestra que el complemento de toda $B_{\frac{1}{k}}(p)$ es abierto.
- En $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ toda bola cerrada es un conjunto abierto; se reescribe $B_{\frac{1}{k}}[p]$ cómo reunión de abiertos.
- En $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se puede asociar el mismo número a dos sucesiones. El conjunto de los números con doble representación como sucesiones de ceros y unos es: $S := \left\{ m \in \mathbb{Q} : m = \frac{2^{k-p} + 2^{k-q} + 2^{k-s} + \dots + 1}{2^k}, \text{ con } p < q < s < \dots < k \right\} = \left\{ m \in \mathbb{Q} : m = \frac{r}{2^k}, \text{ donde } r \text{ es un número natural impar menor que } 2^k \right\}$.
- El espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es totalmente acotado.
- El espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es kolmogoroff.
- El espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es T_1 .
- El espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es T_3 .
- El espacio métrico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d)$ es regular.

6 Bibliografía

Bartle , R., & Sherbert, D. (2001). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa .

Bartle, R. (1980). *Introducción al análisis matemático* . México: Limusa .

Iribarren, I. (2008). *Topología de espacios métricos*. Caracas : Limusa .

Muñoz, J. (2003). *Topología básica* . Bogotá: Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales.

Muñoz, J. (2012). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia .

Rubiano, G. (2000). *Topología general*. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia .