CONTRIBUCIÓN DEL USO DE NO EJEMPLOS Y TECNOLOGÍA DIGITAL PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE OBJETOS GEOMÉTRICOS EN UN CURSO DE PRIMARIA

IBETH NATHALIA MORENO BERMUDEZ

OSCAR JAVIER CETINA SILVA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2019

CONTRIBUCIÓN DEL USO DE NO EJEMPLOS Y TECNOLOGÍA DIGITAL PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE OBJETOS GEOMÉTRICOS EN UN CURSO DE PRIMARIA

IBETH NATHALIA MORENO BERMUDEZ

OSCAR JAVIER CETINA SILVA

Trabajo de Grado como requisito parcial para optar al título

Magister en Docencia de la Matemática

Directora

CARMEN SAMPER

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2019

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido el trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

(Parágrafo 2, del Artículo 42 del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de maestría
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Contribución del uso de no ejemplos y tecnología digital para la construcción de significado de objetos geométricos en un curso de primaria
Autor(es)	Cetina Silva, Oscar Javier; Moreno Bermúdez, Ibeth Nathalia
Director	Samper, Carmen
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 182 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	EJEMPLOS Y NO EJEMPLOS; CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO; ENTREVISTA BASADA EN TAREAS; TECNOLOGÍA DIGITAL; ATRIBUTOS CRÍTICOS.

2. Descripción

Este trabajo surge de la necesidad de proveer un apoyo a los estudiantes de primaria durante su proceso para construir significado de objetos y relaciones geométricas específicos. Buscamos contribuir al proceso de formación de los estudiantes, teniendo en cuenta lo perfilado en el Proyecto Educativo (PEI) de las dos instituciones en las que laboramos, las exigencias de políticas públicas sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, y resultados de la comunidad de investigadores en educación matemática. Para lo anterior, se diseñan e implementan tres tareas secuenciales, alrededor de la definición de triángulo, triángulos obtusángulos y triángulos acutángulos; y altura de triángulo. Fundamentadas en un marco de referencia, teniendo en cuenta la construcción de significado, ejemplos y no ejemplos, proceso de definir y, el uso de la tecnología digital. Además, se exponen los aspectos metodológicos y el desarrollo de la propuesta donde se contemplan fundamentalmente las fases de la estrategia investigativa Entrevista Basada en Tareas. Finalmente, se exhiben las conclusiones, atendiendo a la pregunta problema y a los objetivos.

3. Fuentes

Aya, O., Echeverry, A., y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*: *TED 35*,63-86.

Blanco, N. (1994). Las intenciones educativas. Teoría y desarrollo del curriculum. Málaga: Aljibe, 205-231.

Camargo, L., y Samper, C. (2013). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en educación básica.* Simposio Nororiental de Matemáticas, 1, pp. 249-268.

Camargo, L., y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En Perry., *Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, *pp. 55-78*.

Castiblanco, A., Camargo, L., Villaraga, M., y Zapata, G. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

De Villiers, M. (1995). The Handling of Geometry Definitions in School Textbooks. Pythagoras, 38, 3-4.

Equipo de gestores de pruebas del Icfes. (2017). *Guía de orientación*. Bogotá, D.C: Ministerio de Educación Nacional.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics. 24*(2), 139-162.

Godino, J., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática, 12*(1), 70-92.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A., Kelly y R. Lesh (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Capítulo 19, 517 – 545.

González, M., y Lupiáñez, J. (2001). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática, 28*, 195-201.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. Focus on Learning *Problems in Mathematics, 11*(1), 61–76.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

MEN. (2006). Estándares Básicos de competencias en matemáticas. Bogotá D.C.

Molina, O., Perry, P., Camargo, L., y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática, 27*(2), 37-66.

Mounoud, P. (2001). El desarrollo cognitivo del niño: desde los descubrimientos de Piaget hasta las investigaciones actuales. *Contextos educativos*, (4), 53-77.

Planas, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultura, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, *22*(1), 19-36.

Planas, N., y Gorgorió, N. (2000). Estudio de la diversidad de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las ciencias*, *19*(1), 135-150

Riveros, V., Víctor, S., Mendoza, M., y Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. *Quórum Académico*, *8*(1), 111-130.

Samper, C., Leguizamón, C., y Camargo, L. (2002). La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. *Revista EMA*, *7* (3), 293-309.

Samper, C., Perry, P., y Camargo, L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas.* (77), 51-58.

Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. Educación Matemática, 17 (3), 105 – 120. Disponible en: https: /www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40517306

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. Digital Experiences in Mathematics Education, Online first. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9.

Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Sinclair, N., y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 51 y 52, 28–44.

Toro, J. (2014). Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. Educational Studies in Mathematics, 69, 81-95. doi: 10.1007/s10649-008-9133-5

Villarreal, M. (2012). Tecnología y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Innovación y Experiencias*, *3*(5), 73-91.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). Advanced mathematical thinking (Kluwer: Dordrecht, Holanda), 65-81.

Watson, A., y Mason, J. (2005). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.) Proceedings of the 26th Conference of the I nternational Group for the Psychology of Mathematics Education, (4), 377-385.

4. Contenidos

La temática de este trabajo de grado se encuentra ubicada en el campo investigativo de Educación Matemática, en la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. La propuesta se enmarca en el énfasis "tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas" de la Maestría en Docencia de la Matemática, cuyo fin es promover que los profesores incluyan el uso de tecnología en sus clases. Escogimos este énfasis y la línea de geometría en busca de herramientas teóricas y prácticas para analizar y transformar nuestro ejercicio profesional, guiados por profesores que tienen un reconocido recorrido académico en esta temática.

A continuación, presentamos la organización de este trabajo de grado con una breve descripción de los elementos que componen cada sección. En el Capítulo 1, presentamos un panorama de nuestro proceso, para lo cual resaltamos nuestra formación personal, profesional y necesidades educativas de nuestros estudiantes en el momento en que comenzamos nuestra formación en la Maestría, exponemos la importancia de este trabajo, teniendo en cuenta aspectos investigativos y educativos, presentamos el problema que guio nuestro estudio, la concreción de nuestra pregunta de investigación y, por último, el planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos de este estudio.

En el Capítulo 2, presentamos el marco de referencia que sustenta este estudio de acuerdo a los siguientes constructos teóricos: proceso de construcción de significado, definir, definir y construcción de significado, ejemplos y no ejemplos, tipos de ejemplos y no ejemplos, usos de ejemplos y no ejemplos para definir, y el papel de la tecnología en estos procesos.

Luego, en el Capítulo 3 presentamos la metodología de la investigación. En particular, describimos el tipo de investigación, el contexto experimental y población donde se llevó a cabo el estudio. Seguido a este, en el capítulo 4 describimos las fases de la investigación: delimitación conceptual, diseño e implementación de tareas y entrevista, recolección de información, construcción de las categorías de análisis y el análisis de los datos.

Para finalizar, en el Capítulo 5 mostramos las conclusiones que se derivan del desarrollo de este estudio. Al final de este documento se encuentran los anexos que incluyen: las tareas diseñadas y las transcripciones de las entrevistas realizadas.

5. Metodología

Teniendo en cuenta los intereses y propósitos del estudio, emplearemos una aproximación de tipo interpretativa, con un enfoque fenomenológico, pues buscamos desentrañar de lo que dicen y hacen los estudiantes de primaria, cómo es el proceso de construcción de significado. La estrategia investigativa para el desarrollo de nuestro estudio es una adaptación de la "Entrevista basada en tareas" que expone Goldin (2000). La propuesta de Goldin se caracteriza por realizar una indagación sistemática de la actividad que llevan a cabo estudiantes, durante la resolución de una tarea previamente diseñada con ayuda o no de recursos, a través de un diálogo ocasionado por los investigadores. La adaptación consistió en realizar una entrevista basada en el análisis de las soluciones que entregaron los estudiantes a una tarea hecha en clase, en la que debían proponer una definición. Además, durante la entrevista se solicitó resolver un problema asociado a dicha tarea, con el fin de determinar si usaban la definición propuesta. El objetivo de nuestra estrategia adaptada era rastrear los mecanismos de exploración usados por los estudiantes, las causas de sus decisiones, las estrategias que usan y evidencias de la construcción conceptual lograda al resolver la tarea realizada en clase y el problema propuesto durante la entrevista. El plan de ejecución de nuestra estrategia comenzó con el diseño de dos tareas de exploración y construcción para ser desarrolladas en clase. Luego de implementar la tarea, se analizaron las respuestas y acciones realizadas por algunos de los estudiantes con el objetivo de diseñar la entrevista. Cada entrevista era diferente para cada grupo de estudiantes escogido; esta se diseñó teniendo en cuenta las respuestas halladas en hojas de la guía y en los registros de video grabación.

6. Conclusiones

Para finalizar el estudio, presentamos las conclusiones que se derivan del mismo. Estas las obtuvimos a través de los resultados que expusimos en el capítulo Análisis de Datos, y ofrecen una respuesta a los objetivos propuestos en el primer capítulo. Resaltamos la importancia que tuvo la tecnología digital en el desarrollo de las tareas propuestas, los aportes que tuvieron, los ejemplos y no ejemplos para la construcción de una definición y el efecto en la construcción de significado.

La tecnología digital brinda seguridad, confiabilidad y precisión en las propiedades representadas, aspecto necesario para reconocer los atributos críticos de las figuras, y así poder construir una definición. A esta posibilidad de manejar los sistemas de representación se le agrega el aspecto dinámico que tiene el software, lo que permite a los estudiantes manipular los objetos y sus relaciones, construyendo una experiencia matemática difícil de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel.

Un elemento muy importante de nuestro estudio, fue que siempre se presentaron, en cada una de las tareas, ejemplos y no ejemplos de los objetos que se querían definir. Estos se diseñaron atendiendo a lo consultado en el marco de referencia. Esto último fue importante, pues los ejemplos y no ejemplos representados, no fueron prototípicos ni intuitivos, lo que permitió ampliar el espacio de ejemplos de los estudiantes e invitaron a examinarlos de forma crítica.

Consideramos que, gracias al análisis de la implementación de las tareas, nos dimos cuenta que sí es posible que los estudiantes evolucionen en la construcción de significado de un objeto geométrico. Observamos que es posible lograr la transformación de significados personales si se instaura un ambiente de clase que favorezca la interacción comunicativa, el uso de software con geometría dinámica, y tareas que permitan a los estudiantes manifestar sus ideas. Finalmente, se plantea la posibilidad de darle continuidad al presente estudio modificando las tareas propuestas con el fin de orientar mejores procesos pedagógicos.

Elaborado por:	Cetina Silva, Oscar Javier; Moreno Bermúdez, Ibeth Nathalia
Revisado por:	Samper, Carmen

Fecha de elaboración del Resumen:	15	12	2019

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Contribución del uso de no ejemplos y tecnología digital para la construcción de significado de objetos geométricos en un curso de primaria***, presentado por los estudiantes:

Oscar Javier Cetina Silva, Cód. 2018185006, CC. 1.033.734.363
Ibeth Nathalia Moreno Bermudez, Cód. 2018185015, CC. 1.018.431.455

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con cuarenta y dos (42) puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 24 días del mes de febrero de 2020.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: CARMEN SAMPER DE CAICEDO (UPN)

Jurados: Profesor: TANIA JULIETH PLAZAS (UPN)

Profesor: LUIS EDUARDO ESPITIA (UPN)

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, a mi papá, mi hermana y mi familia por su amor incondicional y motivarme cada día a ser mejor persona; por ayudarme a cumplir mis metas y mostrarme que en la educación está el cambio; por comprender mi ausencia. Gracias por esa unión y ese apoyo incondicional.

A mi compañera de vida, por su paciencia y comprensión durante este proceso; por sus aportes y motivación para seguir formándome como persona y profesional; por su amor y compañía.

A Carmen Samper y a mi compañera de este trabajo de grado, por sus grandes enseñanzas, su paciencia, su disciplina y su motivación. Gracias por tantos consejos, enseñanzas y valiosos momentos.

OSCAR JAVIER CETINA SILVA

A Carmen Samper, profesora Emérita del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, quién orientó con paciencia y dedicación este trabajo de grado y por contribuir, con su experiencia y conocimiento, a mi vida profesional.

A mi mamá, por enseñarme que todo en la vida es posible.

IBETH NATHALIA MORENO BERMÚDEZ

TABLA DE CONTENIDO

Lista de tablas

Lista de imágenes

INTRODUCCIÓN

La temática de este trabajo de grado se encuentra ubicada en el campo investigativo de Educación Matemática, en la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. La propuesta se enmarca en el énfasis “tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” de la Maestría en Docencia de la Matemática, cuyo fin es promover que los profesores incluyan el uso de tecnología en sus clases. Escogimos este énfasis y la línea de geometría en busca de herramientas teóricas y prácticas para analizar y transformar nuestro ejercicio profesional, guiados por profesores que tienen un reconocido recorrido académico en esta temática.

A continuación, presentamos la organización de este trabajo de grado con una breve descripción de los elementos que componen cada sección. En el Capítulo 1, presentamos un panorama de nuestro proceso, para lo cual resaltamos nuestra formación personal, profesional y necesidades educativas de nuestros estudiantes en el momento en que comenzamos nuestra formación en la Maestría, exponemos la importancia de este trabajo, teniendo en cuenta aspectos investigativos y educativos, presentamos el problema que guía nuestro estudio, la concreción de nuestra pregunta de investigación y, por último, el planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos de este estudio.

En el Capítulo 2, presentamos el marco de referencia que sustenta este estudio de acuerdo a los siguientes constructos teóricos: proceso de construcción de significado, definir, definir y construcción de significado, ejemplos y no ejemplos, tipos de ejemplos y no ejemplos, usos de ejemplos y no ejemplos para definir, y el papel de la tecnología en estos procesos.

Luego, en el Capítulo 3 presentamos la metodología de la investigación. En particular, describimos el tipo de investigación, el contexto experimental y población donde se llevó a cabo el estudio. Seguido a este, en el Capítulo 4 describimos las fases de la investigación: delimitación conceptual, diseño e implementación de tareas y entrevista, recolección de información, construcción de las categorías de análisis y el análisis de los datos.

En el Capítulo 5, mostramos las conclusiones que se derivan del desarrollo de este estudio. Al final de este documento se encuentran los anexos que incluyen: las tareas diseñadas y las transcripciones de las entrevistas realizadas.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describen las razones que motivaron la realización de este estudio; en este se encuentra la justificación, la construcción del problema, y el objetivo general y los específicos.

1.1 Justificación

Como señala Ausubel (citado en Riveros et al, 2011), la enseñanza y aprendizaje asistida por computador corresponden a una forma individualizada de auto enseñanza, porque hay retroalimentación casi inmediata, que puede afectar la comprensión que tiene el estudiante del objeto o relación en estudio. La geometría dinámica está diseñada para facilitar la exploración de situaciones y descubrir propiedades que se corresponden a hechos que son válidos en la geometría euclidiana. A partir de la exploración empírica, se genera cierta seguridad de que es válida una propiedad, y de acuerdo con el nivel escolar, puede establecerse como tal o puede demostrarse. Nos adherimos a la afirmación realizada por Toro (2014), quién expresa que el software de geometría dinámica permite realizar algunos procedimientos rutinarios como medir, con rapidez y seguridad, posibilitando disponer de más tiempo para ganar significado de conceptos.

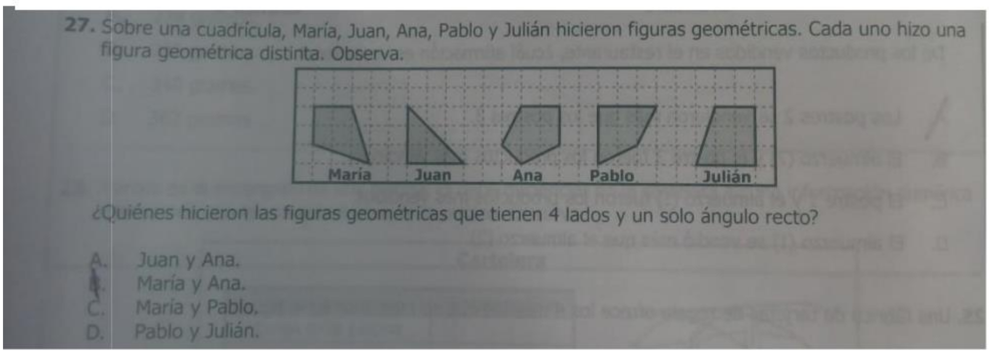
Este trabajo surge de la necesidad de proveer un mejor apoyo a los estudiantes de educación básica primaria en los grados cuarto y quinto, durante su proceso para construir significado de objetos y relaciones geométricas específicos. Buscamos contribuir al proceso de formación de los estudiantes, teniendo en cuenta lo perfilado en el Proyecto Educativo (PEI) de las dos instituciones en las que laboramos, las exigencias de políticas públicas sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, y resultados de la comunidad de investigadores en educación matemática.

Las cuatro circunstancias que exponemos a continuación indican que abordar un estudio, para determinar cómo realizar prácticas innovadoras con el uso de tecnología, es pertinente y necesario.

Primero, en ambas instituciones se establece como necesidad educativa el desarrollo de la dimensión cognitiva. La dimensión cognitiva, según Piaget (1947, citado en Mounoud, 2001), se refiere a la capacidad del estudiante para comprender y percibir los objetos que lo rodean, a partir de sus relaciones e interacciones con otras personas, durante la vivencia de experiencias con los objetos. El uso de geometría dinámica genera un ambiente de aprendizaje que atiende al desarrollo de la dimensión cognitiva porque permite la exploración de situaciones geométricas para descubrir propiedades de objetos y relaciones, y favorece la comunicación de ideas, ya que los estudiantes sienten cierta seguridad de lo que ven y pueden mostrar tienen un respaldo. A través de esto, ellos construyen significado de los objetos y relaciones, pueden hacer representaciones que los involucran, exploran propiedades con el fin de reorganizar su conocimiento acerca de ellos y, así, generar nuevas ideas y esquemas mentales más amplios.

En segundo lugar, las instituciones donde estamos trabajando demandan cambios curriculares para mejorar el desempeño de los estudiantes en las pruebas externas. Generalmente, las preguntas relacionadas con geometría involucran la identificación de partes constitutivas de objetos geométricos, la utilización de propiedades de figuras planas y la caracterización de objetos a partir de la visualización, entre otras cosas, aspectos que deben ser tratados en la clase de geometría. Un ejemplo, tomada del cuadernillo CCG Icfes 2017, grado quinto es el siguiente:

Imagen 1. Ejemplo ilustrado Prueba Saber 2017


27. Sobre una cuadrícula, María, Juan, Ana, Pablo y Julián hicieron figuras geométricas. Cada uno hizo una figura geométrica distinta. Observa.

¿Quiénes hicieron las figuras geométricas que tienen 4 lados y un solo ángulo recto?

A. Juan y Ana.
B. María y Ana.
C. María y Pablo.
D. Pablo y Julián.

Tercero, el enfoque para la geometría que se propone en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) contempla entre los propósitos principales de su estudio: definir, justificar, deducir y comprender algunas demostraciones. Asegura que la geometría euclidiana es un "punto de encuentro entre las matemáticas como una práctica social y como una teoría formal", dado que es posible hacer diferentes registros de representación de los objetos y, a partir del estudio empírico de las representaciones, acercarse al mundo formal de la geometría y la lógica. Con ayuda de geometría dinámica y específicamente con la función arrastre se logra dicho acercamiento dado que se busca poner en evidencia la invariancia de las relaciones geométricas involucradas en las exploraciones, como indican Camargo y Samper (2013), para así descubrir nuevas propiedades y la causalidad entre propiedades.

Cuarto, el uso de las tecnologías digitales en nuestras instituciones ha sido nulo para el área de matemáticas. Sin embargo, vemos que es necesario hacer un cambio para atender las demandas curriculares que desde comienzos de siglo nos están diciendo que:

> En un proceso de conceptualización matemática con la ayuda de recursos tecnológicos, el estudiante puede acceder a un campo operatorio nuevo, realizar tareas que con otros recursos resultaran dispendiosas, hacer análisis de diferentes tipos, resolver problemas utilizando distintas estrategias y sistemas de representación y quizás sintetizar otro tipo de objetos matemáticos. (Castiblanco, A., Camargo, L., Villaraga, M. y Zapata. G. 1999, p.29)

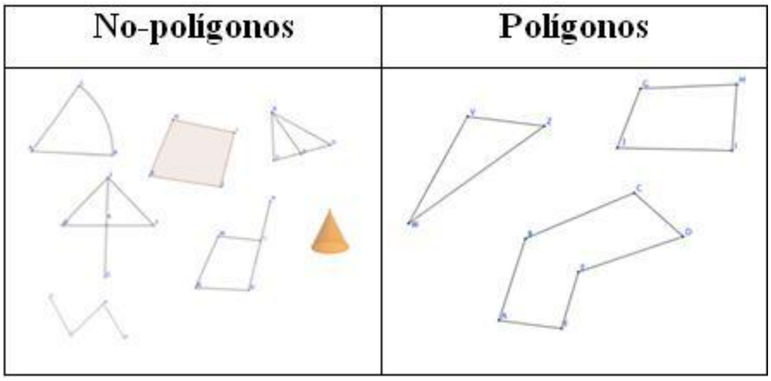
1.2 Construcción del problema

En el transcurso del primer semestre de 2018, para el curso Innovación/Investigación se realizó una tarea cuyo propósito fue identificar y esclarecer el problema de investigación. Decidimos centrar nuestra mirada en el tratamiento en el aula de matemáticas de las definiciones, dado que consideramos que son la piedra angular del proceso para construir significado. Se entrevistaron algunos profesores de geometría para obtener información sobre cómo ellos trabajan las definiciones en clase. En el análisis de las entrevistas, se evidenció que generalmente los profesores se enfocan en procedimientos y no en conceptos, y cuando enseñan definiciones, las dictan o solicitan que las copien de un texto guía. En resumen, se promueven la memorización de ellas. Esto va en contravía de lo que Govender (2002, citado en Aya, O.; Echeverry, A. y Samper, C, 2014) recomienda acerca del tratamiento de las definiciones: no deben ser suministradas por el profesor ni ser el punto de partida para resolver problemas en clase de geometría, sino, al contrario, deben ser construidas a partir de diversas experiencias con el objeto o relación en estudio.

Para recoger evidencias empíricas respecto a asuntos problemáticos del proceso de construcción de significado, diseñamos e implementamos dos tareas en nuestras clases. Resolvimos enfocarnos en el objeto geométrico polígono debido a su correspondencia con la planeación y programación curricular de las instituciones en ese momento.

Con la primera tarea propuesta, pretendíamos identificar si los estudiantes podían construir una definición de polígono a partir del análisis de ejemplos y no ejemplos (Imagen 2). Para esto, debían reconocer y reportar características comunes de los polígonos y determinar cuál de ellas no cumple cada no polígono.

Imagen 2. Ejemplos y no ejemplos de polígono



Para que los estudiantes pudieran refinar la definición de polígono que habían presentado, se les propuso una segunda tarea en la que debían dibujar una trayectoria entre puntos, de acuerdo a las siguientes instrucciones:

a) Ubique cuatro puntos , , y en cualquier posición.
b) Trace una ruta que parta de y llegue a .
c) La ruta debe pasar por , y .

Con esta tarea se buscaba que los estudiantes utilizaran la definición establecida en la anterior tarea y que reconocieran el contorno más no la región como polígono.

Al analizar las respuestas de las tareas, llamó nuestra atención cómo los estudiantes caracterizaban los no ejemplos. Observamos dos situaciones:

- Ellos asignaban un atributo de un no ejemplo a todos los no polígonos; es decir, atribuían la característica de un no ejemplo particular a todas las figuras; no se enfocaban en los atributos de polígono que faltaba en cada no ejemplo y por eso intentaban generalizar. Por ejemplo: “no tienen líneas cerradas”, “es abierto”, “son circulares”, “no tienen forma definida”.

- Algunos estudiantes hicieron caracterizaciones con base únicamente en atributos no geométricos, es decir, determinaron atributos no relevantes de los no polígonos. Por ejemplo: “los no polígonos siempre como que están en relieve”, “están repartidos en partes iguales”, “no tienen forma definida”.

Además, es importante resaltar que, a pesar de la complejidad de la tarea, los estudiantes lograron construir una definición de polígono, a partir de las ideas comunes que tuvieron y que comunicaron en el momento de expresarlas ante todo el grupo.

Con respecto a la segunda tarea, nos llamó la atención algunas respuestas de estudiantes que hacían referencia al movimiento de puntos en la trayectoria construida. Por ejemplo, una estudiante realizó una representación externa con sus manos (Imagen 3) y afirmó: “deberías correrlo [uno de los puntos dados] para que fuera un polígono porque resulta que esto es una recta”.

Imagen 3. Movimiento de manos trayectoria

Esto muestra la falta de un soporte representacional dinámico, para que los estudiantes puedan explicar mejor qué querían cambiar en la configuración de la figura para que sí fuese polígono. Esto es parte de lo que nos lleva a fijarnos en la importancia de contar con representaciones dinámicas para favorecer el proceso de construcción de significado a través de ejemplos y no ejemplos. La tecnología les permitiría representar situaciones dinámicas que en el papel son difíciles de expresar. Tal como señalan Aya et al. (2014), el usar geometría dinámica en el proceso de construir significado puede ayudar a superar las dificultades que las representaciones estáticas puedan generar.

En resumen, los estudiantes de cuarto de primaria parecen tener dificultades al representar y caracterizar no ejemplos, en el proceso de construir significado de objetos y relaciones geométricas. Pueden reconocer atributos que no determinan el objeto, pero estos, en su mayoría, son no geométricos. Además, ellos no hacen referencia a los atributos relevantes de los ejemplos para justificar por qué una figura es un no ejemplo. También se observa que generalizan atributos de una representación de un no ejemplo a todos los no ejemplos, sin distinguir entre cada figura la característica que la hace un no ejemplo. Tienen dificultades para construir representaciones con las cuales puedan comunicar sus significados personales al respecto. De ahí la necesidad de preguntarse: ¿Cómo pueden el uso de tecnología digital y las tareas con ejemplos y no ejemplos contribuir a la construcción de significado de objetos geométricos?

Para dar respuesta a la pregunta problema de nuestro estudio, presentamos a continuación los objetivos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Identificar cómo las tareas con tecnología digital, ejemplos y no ejemplos, influyen en el proceso de construcción de significado de objetos geométricos, realizado por estudiantes de cuarto y quinto de primaria.

1.3.2 Objetivos específicos

- Consolidar un fundamento teórico sobre el proceso de construcción de significado.
- Diseñar y gestionar un conjunto de tareas, con y sin el uso de geometría dinámica, presentando ejemplos y no ejemplos de objetos geométricos, para propiciar la construcción de significado de un objeto geométrico específico.
- Reconocer el impacto de las tareas propuestas para identificar el uso de las definiciones construidas y así contrastar el efecto del uso de tecnología digital y no digital.
- Analizar los resultados obtenidos para determinar en qué casos se evidencia construcción de significado.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo presentamos los elementos teóricos que sustentan este estudio. Exhibimos la perspectiva teórica desde la cual concebimos la construcción de significado y exponemos resultados de investigaciones en Educación Matemática sobre el uso de no ejemplos y de tecnología digital para promover el aprendizaje en una clase geometría en primaria. Finalmente, describimos el marco de referencia con el cual se realiza el análisis de los datos adquiridos, según nuestra metodología de investigación.

2.1 Construcción de significado

Algunos autores como Planas y Gorgorió (2000), Planas (2004), y Godino y Llinares (2000), señalan que hacer matemáticas es una actividad esencialmente social y cultural. Factores sociales, como el discurso (Godino y Llinares, 2000) y la interacción, son un medio que favorece el aprendizaje. Estos autores consideran que el significado se desarrolla a través de la interacción entre los miembros de una cultura, a partir de las interpretaciones personales que tienen de una situación específica; es decir, "el significado es un producto social" (Godino y Linares, 2000, p.89).

Mostrando acuerdo con lo anterior, Samper, Perry y Camargo (2017) exponen que construir significado de un objeto o relación matemática consiste en lograr compatibilidad de las ideas que un estudiante tiene de estos (significado personal) con aquellas que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional), a través de un proceso social y de interacción entre estudiantes, o estudiantes y profesor, y los objetos o relaciones en estudio. A medida que surge el objeto o la relación en diversas situaciones o procesos, se descubren nuevas propiedades, y, por tanto, se construye significado. Teniendo en cuenta lo que proponen Molina, Perry, Camargo y Samper (2015), el significado personal está constituido por el conjunto de interpretaciones de aspectos del objeto matemático o relación, como lo concibe la comunidad matemática, que el estudiante ha ido construyendo a través de experiencias, individuales o colectivas, sin necesariamente coincidir con dicha concepción del objeto y/o relación. El significado personal lo integran significados parciales y provisionales, que son "todas las ideas que va formando, reformando, precisando, modificando el estudiante, con respecto al objeto matemático" (Molina et al, 2015, p.42). Estos autores reconocen que el significado personal se manifiesta a través de las ideas que expresa el estudiante sobre el objeto y el uso que le da a este, en diversos procesos matemáticos, como justificar, resolver problemas, clasificar, definir. Uno de los aspectos que inciden en la construcción de significado de un objeto son las definiciones.

2.2 Definir

Silva (2013), basada en lo que exponen en un artículo de 2001 Leikin y Winicki Landman, afirma que definir es mucho más que asignar nombres a los objetos. Es todo lo que se involucra en tareas que han sido diseñadas de acuerdo al tipo de acercamiento que se quiere usar para establecer la definición.

Pero según lo que evidenciamos en un estudio preliminar, observando clases de geometría y las respuestas dadas en entrevistas por profesores de primaria, varios de ellos limitan el proceso de construcción de significado, porque se restringieron solo al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del objeto y a la memorización de las definiciones, cosa que coincide con lo expuesto por Samper, Leguizamón y Camargo (2002). Esto lleva a que el estudiante, posiblemente, replique la definición sin ningún tipo de comprensión e interpretación. Vinner (1991) afirma que memorizar una definición no garantiza haberla comprendido, pero que un posible indicio es poder construir una definición (definir).

Sobre el proceso de construcción de una definición, de Villiers (1998, citado en Camargo y Samper, 2014) asegura que este puede ser descriptivo o constructivo. Es descriptivo cuando se usan los ejemplos y no ejemplos para elaborar una lista de propiedades del objeto, teniendo en cuenta el mínimo de propiedades necesarias y la consistencia de estas. Para Camargo y Samper (2014), las definiciones pueden considerarse como correctas cuando mencionan las propiedades necesarias que el objeto posee; aunque haya propiedades innecesarias, no se deja de considerar como correcta. Por otra parte, una definición sería incorrecta cuando no se mencionan todas las propiedades necesarias o cuando se incluye una que el objeto no posee, por lo que se generaría un no ejemplo del objeto. Continuando con el asunto, será constructivo cuando se tiene un objeto definido y se le alteran las propiedades que lo definen, bien sea agregando o quitando algunas de estas, para considerarlo como un objeto nuevo, y determinar qué relación tiene con otros objetos. Usualmente, a nivel escolar se propone el proceso descriptivo, porque no han ganado mucha experiencia en la construcción de definiciones.

2.3 Ejemplos y no ejemplos

Según Hershkowitz (1989), los atributos de una figura se pueden catalogar como críticos y no críticos. Los atributos críticos se incluyen en la definición del objeto. Los atributos no críticos son características, como el tamaño o la orientación de la figura, es decir, características que no hacen parte de la definición. Los ejemplos de un objeto se construyen a partir de sus atributos críticos. Los atributos no críticos solamente se encuentran en algunos de los ejemplos del objeto. Esto permite tener claridad sobre las propiedades que definen al objeto, lo que da paso a poder formular una definición que incluya información necesaria. Cuando uno o más de los atributos críticos faltan en una representación, se obtiene un no ejemplo.

2.4 Tipos de ejemplos y no ejemplos

A continuación, exponemos dos clasificaciones; la primera es referente a ejemplos y no ejemplos intuitivos y la segunda, a ejemplos prototípicos. En breve se explicará cada uno de ellos.

Las representaciones de ejemplos y no ejemplos son intuitivas si los estudiantes los identifican con el nombre apropiado de inmediato y no sienten la necesidad de justificar el porqué de su elección o afirmación (Tsamir et al, 2008). Conocer el nombre asignado a la familia de figuras juega un papel fundamental en el momento en que el estudiante clasifica figuras geométricas. Los estudiantes suponen que los objetos tienen un solo nombre y esto puede causar dificultades en la jerarquización de figuras geométricas. Un ejemplo es el cuadrado, que también se puede categorizar como un rectángulo, cuadrilátero o un paralelogramo. Diseñar no ejemplos no basta con poner figuras que pertenecen a una familia disyunta pues no contribuye a determinar los atributos críticos del objeto.

Entendemos por ejemplos prototípicos, aquellos que se muestran a los estudiantes en una posición estándar. Matos (1992, citado en Scaglia y Moriena, 2005, p. 110) señala que las características principales de los ejemplos prototipos son las siguientes:

1. Una posición preferida; por ejemplo, que los triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos deben tener una base horizontal.
2. Simetría; por ejemplo, no se reconocen los triángulos obtusángulos con sus bases en un lado más pequeño, o un triángulo rectángulo se piensa como un medio triángulo.
3. Una forma balanceada globalmente; es decir, que muchos estudiantes no reconocen triángulos "delgados", triángulos "puntiagudos", o cuadrados extremadamente pequeños.

Como lo afirma Hershkowitz (1990, citado en Tsamir et al., 2008), los ejemplos prototípicos además de contener atributos necesarios y suficientes tienen propiedades especiales, que suelen ser no críticas, y pueden llegar a resultar ser más dominantes y atractivos. De esa manera, los ejemplos prototípicos se identifican rápidamente como ejemplos del objeto de estudio, esto puede ser fundamental en la adquisición de un concepto.

2.5 Uso de ejemplos para definir

Camargo y Samper (2014) y Tsamir et al. (2008) afirman que las tareas para definir deben tener como propósito que el estudiante, visualmente, identifique y procure enlistar la mayor cantidad de características posibles que tienen en común los ejemplos del objeto. Al momento de diseñar la tarea, es importante que los ejemplos tengan propiedades no relevantes y diferentes para facilitar la identificación de aquellas que son comunes. Además, Tsamir et al. (2008) recalcan que el uso de ejemplos prototípicos puede ser de ayuda o generar obstáculos para la construcción de significado.

Los ejemplos prototípicos son de ayuda porque permiten un reconocimiento inmediato entre varias representaciones. Pero pueden generar una imagen conceptual limitada y un razonamiento que se basa únicamente en estas representaciones, lo que llevaría a que los estudiantes consideren a los ejemplos no prototípicos como un no ejemplo del objeto. Burger y Shaughnessy (1986, citado en Tsamir et al., 2008) afirman que cuando una persona hace referencia a un atributo no crítico como si fuera necesario, su razonamiento pudo haber sido meramente visual, razón por la cual no todos los ejemplos que se le presentan a un estudiante pueden ser prototípicos.

2.6 Uso de no ejemplos para definir

Tener representaciones de no ejemplos ayuda a determinar si una de las propiedades asignadas a los ejemplos realmente es esencial, porque si también la comparten algunos no ejemplos, ello significa que no es una propiedad que define al objeto. Por su parte, los no ejemplos deben ser escogidos de tal manera que no sean trascendentalmente diferente a los ejemplos, sino que, por el contrario, requieran de un análisis detallado que permita identificar el atributo que le hace falta para ser un ejemplo.

Cuando los estudiantes han estado permeados por una multiplicidad de ejemplos prototípicos, suelen decir que los ejemplos diferentes a estos son no ejemplos del objeto que se esté estudiando. Esto puede interrumpir la construcción de significado del objeto. Por ello, Wilson (1986, citado en Tsamir et al., 2008) ha abogado por el uso de los no ejemplos porque puede disminuir el efecto negativo del uso excesivo de los ejemplos prototípicos; al trabajar con no ejemplos que tienen algunos de atributos críticos de los ejemplos, los estudiantes pueden comenzar a diferenciar entre los atributos críticos y no críticos de estos.

En su estudio, Tsamir et al. (2008) concluyen que como sucede con los ejemplos, con los no-ejemplos también se evidencia lo que denominan la inmediatez y la auto evidencia de algunas figuras, porque los niños las aceptan intuitivamente como no ejemplos. Por ello, no sienten la necesidad de justificar su clasificación. Esto implica que, en estos casos, muy pocos estudiantes utilizan los atributos críticos de las figuras para tomar su decisión.

Cuando los estudiantes asocian una figura con un nombre diferente al asignado a la figura que se está estudiando, indican de manera inmediata que dicha figura es un no ejemplo. Es usual que cuando se pide un ejemplo, se provea primero un ejemplo prototípico. Tsamir et al. (2008) notaron que esta situación también se presenta con los no-ejemplos prototípicos. Por ejemplo, un no ejemplo prototípico de triángulo es una circunferencia.

Según Clements, Swaminathan, Hannibal, y Sarama (1999, citados en Tsamir et al., 2008), el uso de no ejemplos estimula a los estudiantes a exponer en voz alta sus razones para identificar la figura como no ejemplo. Sin embargo, cuando el no ejemplo es intuitivo, se apoyan básicamente en lo visual. Pero si es un no ejemplo no intuitivo tienen que usar los atributos críticos para justificar su decisión. Si el estudiante logra pasar de no ejemplos intuitivos a los no intuitivos, ello puede ser evidencia de la transformación de significado personal. Por eso, Tsamir et al. (2008) recomiendan exponer a los estudiantes a ejemplos y no ejemplos que no sean únicamente prototípicos o intuitivos respectivamente, para así lograr que el significado personal no sea limitado (Watson y Mason, 2005).

2.7 Definir y construcción de significado

Para promover la construcción de significado, de Villiers (1995) propone que los estudiantes participen en la formulación y elección de las definiciones. Tanto Tsamir et al., (2008) como Camargo y Samper (2014) sugieren que la formulación de una definición resulte del análisis de diversas representaciones gráficas de ejemplos del objeto o la relación y de representaciones gráficas que no sean ejemplos (no ejemplos) de este. Lo anterior debido a que autores como Fischbein (1993) indican que los conceptos en geometría tienen una naturaleza dual: una conceptual y otra figural. Desde el punto de vista conceptual, Fischbein afirma que una figura geométrica constituye un concepto genuino, una entidad ideal abstracta, que se define formalmente. Desde el punto de vista figural, una figura geométrica "refleja propiedades espaciales (forma, posición y magnitud)". Por tanto, el significado de conceptos geométricos incluye no solamente cuestiones de la teoría relacionadas al objeto, como la definición y teoremas vinculados, sino también las representaciones gráficas de este (ejemplos). Tsamir, et al. (2008) comentan que, entre los principios generales de la construcción de significado de un objeto, según la psicología cognitiva, juegan un papel fundamental los ejemplos. Hay dos teorías que sobresalen para explicar el proceso de construcción de significado de un concepto: la clásica y la prototípica. En la primera de estas, un objeto está representado por las características definitorias que comparten sus ejemplos. Para decidir si un nuevo elemento se considera ejemplo es necesario evaluar sus propiedades. En la segunda, el objeto está representado por ejemplos ideales, prototípicos, que sirven, a través de la comparación, para determinar si algo es ejemplo del objeto.

En educación matemática, para entender el proceso de construcción de significado de objetos geométricos se usan ambas teorías. Por tanto, es necesario, que en este proceso se pueda reconocer tantos ejemplos como no ejemplos del objeto. En otras palabras, los no ejemplos están presentes porque permiten entender hasta qué abarca el objeto (Tsamir et al. 2008). En geometría, inicialmente la definición personal está compuesta de imágenes visuales basadas en las similitudes perceptuales de los ejemplos que se proveen, conocidas como las propiedades características.

2.8 Papel de la tecnología

Una forma de hacer viable lo que proponen los investigadores en educación matemática, sobre construcción de significado y los aspectos relacionados con este proceso, es a través del diseño y aplicación de tareas, y del uso de diferentes herramientas en la clase de geometría, como es el caso del software de geometría dinámica (en adelante SGD). Existen muchas evidencias del poder y el potencial de hacer actividad matemática en un entorno donde la tecnología, exactamente los SDG, y cómo esto favorece el proceso de construcción de significado.

Schacht (2017) menciona que el uso de SGD para la construcción de significado de objetos geométricos es importante pues no sólo ofrece nuevas experiencias y acciones que influyen directamente en el proceso de aprendizaje, sino que también incide en otros procesos como la comunicación, aspecto necesario para la construcción de significado (proceso social). Camargo (2002) afirma que los estudiantes, en un primer momento, cuando utilizan tecnología en la clase de geometría, manejan lenguaje natural para hablar de sus producciones, pero, con la intervención intencionada del profesor, el lenguaje puede cambiar y refinarse, permitiendo a los estudiantes reconocer la necesidad de usar el lenguaje especializado para hablar con mayor precisión y claridad.

Lo anterior sugiere pensar en el estudio realizado por Sinclair y Moss (2012). Del estudio, se resalta que los estudiantes no necesariamente usan las "definiciones correctas" o "formales", como definiciones matemáticas, sino como descripciones de lo que visualizan mediante el SGD. En la mayoría de los casos cuando un estudiante tiene disponible una definición verbal y un prototipo visual para un concepto geométrico dado, hace uso del prototipo visual en lugar de la definición. Sinclair y Moss (2012) sugieren que los SGD pueden ayudar a los estudiantes a manejar la dualidad entre la comunicación que surge en torno a lo visual y lo verbal, dando paso al uso de las definiciones. Para estos autores y para el objetivo de nuestro estudio, las definiciones son el pilar fundamental del proceso de construcción de significado, debido a que el paso de lo visual a lo "discursivo" genera procesos de pensamiento geométrico avanzados, que se vuelven en criterios para poder nombrar objetos en geometría y por ende lograr definir. En resumen, los SGD generan entornos dinámicos que les permiten a los estudiantes pasar de respuestas visuales a respuestas basadas en propiedades, lo que conlleva el acercamiento a las definiciones formales.

En entornos dinámicos, la interacción con el SGD fomenta la constante reflexión con respecto a los objetos matemáticos representados. Como afirma Holland, (1974, citado en Schacht, 2017), el uso de SGD es notoriamente importante cuando se introducen nuevos conceptos ya que al describir las construcciones realizadas mediante SGD, estas ofrecen múltiples fuentes de reflexión con respecto a los objetos matemáticos. Las tareas de construcción con SGD en el aula de geometría, contribuyen a la construcción de significado porque movilizan conocimientos, como la definición personal, propiedades y promueve procesos como la deducción, la abducción.

Mariotti (2009) indica que los SGD favorecen el descubrimiento de relaciones o la verificación y aceptación o rechazo de otras, lo que contribuye al proceso de construcción de significado, en un ambiente experimental. Podría ayudar a que los estudiantes sean conscientes de sus significados personales y los relacionen con el significado matemático institucional. Un ambiente donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, es posible según Villarreal (2012), gracias a que el uso de un SGD en el aula de matemáticas genera un laboratorio matemático donde un «ensayo y error educado» es permitido y la visualización se convierte en un aliado para la comprensión matemática.

La función arrastre en SGD es la responsable de que se aumenten las posibilidades de interacción del estudiante sobre los objetos geométricos y, en consecuencia, la que permite modificar condiciones, actuando sobre los objetos. Para Hölzl (1996, citado en González y Lupiañez, 2001) la función arrastre pone de manifiesto las relaciones entre dibujo y figura, precisamente porque se reconocen los atributos que definen a la figura. También ayuda a evidenciar el "carácter relacional" de los objetos geométricos, pues permite distinguir algunos objetos que, desde la teoría, son difíciles de interpretar.

3. METODOLOGÍA

Presentamos en este capítulo los aspectos metodológicos que orientan el desarrollo investigativo para atender el problema planteado en este documento. El problema se refiere al efecto del uso, por estudiantes de primaria, de ejemplos y no ejemplos y de tecnología digital en la construcción de significado de relaciones u objetos geométricos.

Teniendo en cuenta los intereses y propósitos del estudio, emplearemos una aproximación de tipo interpretativa, con un enfoque fenomenológico, pues buscamos desentrañar de lo que dicen y hacen los estudiantes de primaria, cómo es el proceso de construcción de significado. Para Samper, Perry y Camargo (2017), a partir de lo que exponen Godino y Batanero (1994), Radford (2000), y Morera, Fortuny y Planas (2012), la construcción de significado de un objeto geométrico consiste en lograr compatibilidad de las ideas que una persona tiene de este (significado personal) con aquellas que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional), en nuestro caso la comunidad de matemáticos, a través de un proceso social y de interacción entre estudiantes y objetos en estudio.

En lo que sigue se justifica la estrategia investigativa adoptada debido a sus características y al marco teórico de referencia que se desarrolló para este estudio investigativo. En un segundo momento, se describen los participantes involucrados en el desarrollo de las tareas propuestas, y el escenario en el que se desarrollan. Y, para finalizar, se presenta el diseño metodológico.

3.1 Estrategia investigativa

La estrategia investigativa para el desarrollo de nuestro estudio es una adaptación de la "Entrevista basada en tareas" que expone Goldin (2000). La propuesta de Goldin se caracteriza por realizar una indagación sistemática de la actividad que llevan a cabo estudiantes, durante la resolución de una tarea previamente diseñada con ayuda o no de recursos, a través de un diálogo ocasionado por los investigadores. La adaptación consiste en realizar una entrevista, después de que los estudiantes hayan resuelto, en clase, la tarea propuesta, basada en un análisis de las soluciones que entregan. Además, se incluye en la entrevista la solicitud de resolver un problema asociado a la tarea propuesta en clase. El objetivo de nuestra estrategia adaptada era rastrear los mecanismos de exploración usados por los estudiantes, las causas de sus decisiones, las estrategias que usan y evidencias de la construcción conceptual lograda al resolver la tarea realizada en clase y el problema propuesto durante la entrevista.

El plan de ejecución de nuestra estrategia comenzó con el diseño de dos tareas de exploración y construcción para ser desarrolladas en clase. Luego de implementar la tarea, se analizaron las respuestas y acciones realizadas por algunos de los estudiantes con el objetivo de diseñar la entrevista. Cada entrevista era diferente para cada grupo de estudiantes escogido; esta se diseñó de acuerdo con las respuestas halladas en las hojas de la guía asociada a las tareas propuestas y en los registros de video grabación. Con las preguntas que se hicieron, se buscaba que los estudiantes expresaran con claridad lo que subyace a su proceso de solución, a sus decisiones, y que aclararan los términos que usaron en su comunicación. Proponer un problema durante la entrevista tenía como objetivo poder evidenciar directamente el proceso que realizan los estudiantes para resolverlo, hacer preguntas en el acto, y observar si usaban lo que descubrieron en las tareas para resolver el problema. Luego, se diseñó una tercera tarea; a diferencia de lo que se hizo en las dos situaciones anteriores, se realizó una "entrevista basada en tareas", durante el desarrollo de la tarea. El profesor o profesora realizaba la entrevista, previamente diseñada. Con esta tarea se buscaba evidencia de construcción de significado que incluye entender la definición y poder determinar cuándo tiene sentido recurrir a ella para resolver un problema. Dicha entrevista se realizó fuera del aula, a tres parejas de estudiantes, en un espacio que brindara tranquilidad, para que ellos pudieran interactuar con la tecnología, entre ellos y con el entrevistador, de forma libre y espontánea.

Para organizar la información se constituyeron dos tipos de archivos: físico y digital. El archivo físico contiene la materia prima recopilada: productos elaborados por los participantes, hojas de trabajo, cuestionarios de respuestas y trascripciones de grabaciones de audio y video. El archivo digital contiene el material registrado en soporte informático: capturas de pantalla de computadores, archivos de audio y archivos de video. Se depuraron los datos para escoger aquellos en los que se da cuenta de ideas acerca del objeto en estudio y de cómo van evolucionando estas ideas, a lo largo del desarrollo de las tareas.

3.1.1 Contexto experimental

El estudio se llevó a cabo en dos instituciones de carácter privado: el colegio SCALAS (Grupo A) y el colegio Camino a la Cima (Grupo B). Ambas instituciones cuentan con una sala de sistemas, en donde los estudiantes desarrollaron las tareas, con la ayuda del programa GeoGebra.

Los estudiantes eran de grado cuarto de primaria, cuyas edades oscilan entre 9 y 11 años. Se escogió un curso en cada institución, en los que los autores de este trabajo de grado eran los profesores: Nathalia del Grupo A y Óscar del Grupo B. Las primeras dos tareas se usaron con todos los estudiantes de cada curso, quienes trabajaron en parejas. En cada curso, se escogió uno de esos grupos; esos estudiantes serían los participantes del estudio que se estaba realizando. En el grupo A, los participantes eran niños y, en el grupo B, niñas; ambos colegios atienden una población mixta. Cabe destacar que no hubo preferencias de género, sino que los estudiantes de los grupos A y B fueron los que más ideas expresaron, fueron más elocuentes, tuvieron un mejor desempeño usando el programa y mostraron mayor interés por resolver la tarea de introducción a GeoGebra.

3.2 Diseño metodológico

Se presentan las fases del diseño metodológico que incluyen la delimitación conceptual, la construcción y diseño de las tareas, y el diseño de las entrevistas.

3.2.1 Fase 1: Delimitación conceptual

Como la construcción de significado de un objeto específico es un proceso social, esto fue determinante para decidir las condiciones que se debían garantizar en el aula para el desarrollo de las tareas. Por ejemplo, se determinó que los estudiantes trabajarían en grupos de a tres, con un solo computador, en el aula de la clase con todos los estudiantes. Como se busca que sus ideas evolucionen para acercarse al concepto como lo propone la comunidad de matemáticos, fue necesario determinar qué aspectos del objeto se podían abordar con estudiantes de grado cuarto, y cómo hacerlo. Conforme a nuestro objetivo, se diseñaron tareas que incluyen ejemplos y no ejemplos, que exigen el uso de GeoGebra.

3.2.2 Fase 2: Diseño de las tareas

En este apartado, presentamos aspectos que tuvimos en cuenta en el diseño de las tres tareas. La finalidad de nuestras tareas es contribuir al proceso de construcción de significado de triángulo, triángulo acutángulo, triángulo obtusángulo y altura de un triángulo. Las tareas incluyen actividades de exploración y construcción con el software GeoGebra, la visualización de representaciones en papel y en algunas ocasiones, construcciones de objetos geométricos con el uso de una regla. Dichas tareas se estructuraron para favorecer la expresión de las ideas que los estudiantes van formando, respecto a las características relevantes de cada uno de estos objetos, para así permitirles construir conjuntamente una definición de cada objeto geométrico y usarla para resolver problemas

En cada una de las tareas, se pretendía aprovechar tanto la tecnología de lápiz y papel como la tecnología digital, GeoGebra. Esto porque al estudiar representaciones de objetos geométricos en papel, se determinan atributos esenciales de dicho objeto, y posiblemente se incluyen propiedades que no son necesarias o falta mencionar otras que sí lo son. Esperábamos que el contraste con la exploración de una representación del objeto en GeoGebra, previamente construido por nosotros, permitiera consolidar cuáles eran los atributos esenciales.

Además, pretendíamos ofrecer elementos a los estudiantes para que evidenciaran que su representación de algún objeto geométrico específico en papel, no siempre coincidía con la representación que hacían con GeoGebra. Con esto, esperábamos que se dieran cuenta que su definición personal utilizada para representar los objetos geométricos no incluía todos los atributos críticos o que incluía unos que no eran necesarios.

Las representaciones de figuras presentadas a los estudiantes incluían los diferentes tipos de ejemplos y no ejemplos para que, de acuerdo con lo expresado en el marco de referencia, el análisis de estos realmente favoreciera la construcción de significado. En el análisis de cada tarea, presentado a continuación, se incluirá: logros de aprendizaje esperados, objeto matemático, prerrequisitos, descripción, análisis, y una descripción de cómo se estructuró la tarea.

En el análisis, establecemos objetivos, intenciones de enseñanza, los procesos que se promueven y la tecnología utilizada. Los objetivos de enseñanza son todo aquello que se espera que el estudiante pueda aprender. En palabras de Eraut (1991, citado en Blanco, 1994), son los resultados intencionales y predeterminados, de un programa de enseñanza planificado, expresados en términos de lo que los estudiantes deben aprender. En consonancia con lo anterior para Blanco (1994), los objetivos de enseñanza los considera como: “el punto inicial, el primer paso de la planificación curricular, del proceder ‘racional’ en educación, de tal forma que –se argumenta– sólo a partir de ellos es posible la selección de los medios que permitan alcanzarlos”. Para nosotros, las intenciones de enseñanza son el conjunto de habilidades actitudes, destrezas o capacidades que conllevan desarrollar y alcanzar el objetivo.

3.2.2.1Tarea 1 (Anexo 2)

Logros de aprendizaje esperados: Establecer, a través de exploraciones en lápiz y papel, y GeoGebra, el listado de los atributos esenciales que definen triángulo.

Objeto matemático: Triángulo.

Prerrequisitos:

- Manejo de funciones y herramientas básicas de GeoGebra (arrastre y medida de longitudes).
- Noción de triángulo.
- Objetos y/o relaciones geométricas: unión, punto, segmento, colinealidad.

Descripción:

Cada estudiante consigna, en la primera parte de la tarea, su definición personal. En la segunda parte, a partir de la interacción con otro compañero para comparar las definiciones personales, se identifican similitudes y diferencias entre sus definiciones, para establecer una definición compartida. En la tercera parte, usando esa definición, clasifican figuras representadas en papel como ejemplos o no ejemplos de triángulo, y justifican por qué se descartan los últimos. En la cuarta parte, examinan, en un archivo previamente creado en GeoGebra, las mismas figuras representadas en papel, con el fin de descubrir si su definición personal de triángulo incluía todos los atributos esenciales. Para finalizar, los estudiantes escriben una nueva definición de triángulo.

Análisis:

Nuestra intención: Conocer la definición personal de triángulo, para ver si las tareas que se proponen llevan al estudiante a modificar esa definición. Mostrar al estudiante que su significado personal de triángulo no lo está expresando en su definición porque posiblemente no mencionan dos atributos esenciales: la no colinealidad de los vértices y la unión de segmentos.

Tabla 1. Descripción Tarea 1.

Descripción Tarea 1	Objetivo de enseñanza	Procesos que se promueven
Parte 1 Individualmente, escribir su definición de triángulo.	Identificar y enunciar los atributos que definen triángulo.	Definir.
Parte 2 En parejas**,** escribir una definición concordada de triángulo.	Contrastar definiciones para reconocer diferencias y similitudes, en lenguaje o atributos.	Comunicar.
Parte 3 Observar ejemplos y no-ejemplos de triángulos representados en papel para identificar los que no son triángulos y escribir por qué.	Seleccionar los atributos que distinguen los no triángulos de los triángulos.	Visualizar (lápiz y papel).
Parte 4 1. Mediante el arrastre, verificar qué propiedades de las figuras se mantenían.	Utilizar el arrastre como herramienta para determinar específicamente dos atributos de triángulo que posiblemente no tuvieron en cuenta los estudiantes: es una figura cerrada, y los vértices deben ser no colineales.	Visualizar y explorar (tecnología digital).

2. Con base en la exploración anterior, justificar su clasificación como ejemplo o no-ejemplo de triángulo.	Usar lo que encontraron en el numeral 1 para clasificar las figuras y justificar sus decisiones.	Visualizar y explorar (tecnología digital). Argumentar.
3. Escribir una definición de triángulo.	Contrastar las definiciones previas con lo que establecieron en los numerales anteriores, para proveer una definición.	Generalizar (lápiz y papel).

Cómo se estructuró la tarea:

En el conjunto de figuras representadas se incluyen, en papel y en el pantallazo que los estudiantes ven tan pronto abren el archivo, ejemplos prototípicos (Figuras 1 y 3), ejemplos no prototípicos (Figuras 2 y 7), no ejemplos prototípicos e intuitivos (Figuras 4 y 8) (Tarea 1c, Anexo 1). El archivo de GeoGebra muestra las mismas figuras representadas en papel. Luego, con el uso de la función arrastre, los estudiantes evalúan la pertinencia de sus elecciones. En la hoja guía, hay un cuadro para que consignen cuáles de las representaciones, bajo el arrastre, no son ejemplos de triángulos. Perder la calidad de ejemplo de triángulo bajo el arrastre permite destacar que los tres puntos que determinan el triángulo no pueden ser colineales y que este debe ser unión de segmentos.

3.2.2.2 Tarea 2 (Anexo 3)

Logros de aprendizaje esperados: Establecer, a través de exploraciones en lápiz y papel, y con GeoGebra, la definición de triángulo acutángulo y triángulo obtusángulo, en términos de un listado de atributos críticos.

Objeto matemático: Triángulo acutángulo y triángulo obtusángulo.

Prerrequisitos:

- Manejo de funciones y herramientas básicas de GeoGebra (medir ángulos y arrastre).
- Definición de triángulo.

- Clasificación de ángulos según sus medidas.
- Objetos o relaciones geométricas: ángulo, triángulo.

Descripción:

Esta tarea consta de cuatro partes. El objetivo general es que los estudiantes identifiquen los atributos esenciales de cada tipo de triángulo, clasificados según los ángulos, y que usen ese listado para justificar por qué un triángulo es no ejemplo de cierto tipo de triángulo. El listado lo obtienen examinando los diferentes valores, de las medidas de las longitudes de los lados y de la amplitud de los ángulos, que obtienen a través de la exploración, en GeoGebra, de ejemplos y no ejemplos de cada tipo de triángulo. Como, bajo el arrastre de cualquiera de los seis triángulos representados, se ven varios ejemplos, se propicia la posibilidad de generalizar. A continuación, mostramos de manera sintética un análisis de cada parte de la tarea.

Análisis:

Tabla 2. Descripción Tarea 2.

Descripción Tarea 2	**Objetivo de enseñanza**	**Proceso**
Parte 1 1. Medir longitud de lados y amplitud de ángulos de triángulos acutángulos, y consignar respuestas en las tablas.	Descubrir atributos comunes de las medidas de amplitud de los ángulos de triángulos acutángulos y determinar que las medidas de longitud de los lados no son atributos esenciales.	Visualizar. Explorar. Generalizar.
2. Definir triángulo acutángulo.	Enunciar, usando lenguaje geométrico apropiado, los atributos esenciales que definen triángulo acutángulo.	Generalizar (lápiz y papel). Definir.
3. Expresar por qué una representación es no ejemplo de triángulo acutángulo.	Justificar, usando la definición que han construido, por qué una representación es no ejemplo de triángulo acutángulo.	Argumentar (lápiz y papel).
Parte 2 1. Dibujar tres ejemplos de triángulos acutángulos	Usar la definición para representar ejemplos y no ejemplos de triángulos acutángulos.	Representar.

diferentes y tres no ejemplos.		
2. Solicitar a algún adulto, extraer, a partir de la observación de las representaciones de ejemplos y no ejemplos de triángulos acutángulos, los atributos esenciales de estos.	Reconocer la importancia de tener una definición correcta, concisa, para identificar ejemplos y no ejemplos.	Comunicar.
Parte 3 1. Medir amplitud de ángulos de triángulos obtusángulos, y consignar respuestas en las tablas.	Descubrir propiedades comunes de las medidas de amplitud de los ángulos de triángulos obtusángulos.	Visualizar.
2. Definir triángulo obtusángulo	Enunciar, usando lenguaje geométrico apropiado, los atributos esenciales que definen triángulo obtusángulo.	Generalizar (lápiz y papel). Definir.
Parte 4 1. Definir triángulo rectángulo.	A partir de la experiencia con el proceso para definir triángulo acutángulo y obtusángulo, establecer el atributo que define triángulo rectángulo.	Generalizar. Definir.
2. Responder la pregunta: ¿Pueden los triángulos isósceles ser acutángulos, obtusángulos o rectángulos?	Reconocer que ser isósceles no es un atributo esencial de los triángulos acutángulo, obtusángulo y rectángulo. Usar las definiciones de triángulos según la amplitud de sus ángulos y las respectivas representaciones, en conjunto con la de triángulo isósceles.	Analizar.
3. Cuando el triángulo es obtusángulo, responda:	Reconocer otros atributos que comparten los triángulos obtusángulos, y la clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos	Analizar. Generalizar.

¿Puede tener un ángulo agudo?	es disyunta.
¿Puede tener dos ángulos agudos?	
¿Puede tener un ángulo recto?	

Estructura de cada tarea:

Entre los ejemplos de triángulos acutángulos, se incluyen ejemplos prototípicos de triángulos (Δ), y ejemplos no prototípicos (Δ y Δ). En ese mismo archivo hay no ejemplos de triángulos acutángulos no prototípicos e intuitivos (Δ , Δ y Δ), (Tarea 2, 1.1). En general, en cada parte se presentan los tres tipos de triángulos (isósceles, escaleno y equilátero). Mediante el arrastre, mantienen las propiedades de ser o no ejemplo de triángulo acutángulo. Estas representaciones se sometieron a pruebas, para que los triángulos mantuvieran sus atributos.

Por su parte, en el archivo de GeoGebra de los triángulos obtusángulos y no obtusángulos, se incluyeron ejemplos no prototípicos con las tres figuras (Δ , Δ y Δ). Para los no ejemplos, se incluyeron no prototípicos e intuitivos (Δ , Δ , Δ y Δ), (Tarea 2,

3. 1.). Así mismo, se construyeron triángulos escalenos, isósceles y equiláteros, que mantuvieran sus atributos. Estos también fueron sometidos a diferentes pruebas para asegurar que no perdieran sus atributos críticos.

La tarea propuesta para la casa tiene dos objetivos: primero, identificar cómo los estudiantes representan gráficamente el triángulo acutángulo y qué propiedades tuvieron en cuenta para elaborar dichas representaciones. Segundo, determinar el uso que le dan a la definición de triángulos acutángulos y adoptar una postura autocrítica frente a las representaciones realizadas. La tarea se planteó de la siguiente manera:

En el cuaderno, elabora tres dibujos de triángulos diferentes que sean acutángulos y tres diferentes que NO sean acutángulos. Muestra tu trabajo a tus padres y pídeles que observen tus dibujos y escriban cuál creen que es la propiedad que hace que un triángulo sea acutángulo.

3.2.2.3 Tarea 3 (Anexo 4)

Logros de aprendizaje esperados: Establecer, a través de exploraciones y construcciones en lápiz y papel, y GeoGebra, la definición de altura de triángulo en términos de un listado los atributos esenciales.

Objeto matemático: Altura de triángulo.

Prerrequisitos:

- Manejo de funciones y herramientas básicas de GeoGebra (recta perpendicular, medida de ángulos, ocultar objetos).
- Definición de triángulo, recta, segmento, vértice, recta perpendicular, ángulo recto, intersección.
- Manejo de trasportador.

Nuestra intención: El acercamiento al concepto altura de triángulo se realiza en cuatro etapas. En la primera, dados un segmento y un punto externo a la recta que contiene al segmento, se debe construir, inicialmente en papel y luego en GeoGebra, una recta perpendicular a la recta por el punto dado. Para la segunda etapa, se presenta la recta perpendicular a la recta que contiene a un punto , tanto en papel como en GeoGebra. La tarea consiste en i) representar el es la intersección de las rectas, eliminando el resto de la recta y ii) construir diversos triángulos con vértice en y con los otros dos vértices sobre la recta n. Se informa al estudiante que el segmento es altura de cada triángulo. En la tercera etapa, en un archivo de GeoGebra, aparecen representados un triángulo y un segmento. La tarea consiste en arrastrar el segmento para que quede como altura del triángulo. En la cuarta etapa, se trabaja con ejemplos y no ejemplos de altura de triángulo representados en papel. Los primeros para reconocer los atributos de este objeto geométrico; los segundos para justificar por qué son no ejemplos. Se finaliza la actividad, solicitando que construyan en GeoGebra las tres alturas de un triángulo dado.

Así nuestra intención es fomentar el desarrollo de una mirada matemática de los elementos que se requieren para definir altura de triángulo, antes de abordar la construcción de la definición. Estos son: no siempre se puede construir una recta perpendicular a un segmento por un punto externo, pero sí a la recta que contiene al segmento; es un segmento que tiene un extremo en un vértice y el otro en la recta que contiene al lado opuesto; el segmento es perpendicular a dicha recta. También se pretende que los estudiantes reconozcan que diversos triángulos tienen la misma altura.

Análisis:

Tabla 3. Descripción Tarea 3.

Descripción Tarea 3	Objetivo de enseñanza	Proceso
Parte 1 (en papel)		
1. Construir, usando cualquier herramienta que tengan a la mano, la recta perpendicular a la recta que contiene un segmento dado, por un punto exterior a ella.	Usar el significado personal de perpendicular para escoger una herramienta adecuada para hacer la construcción y resolver la tarea.	Representar.
2. Explicar por qué la herramienta que usaron para construir la recta perpendicular daba lugar a ello.	Establecer atributos esenciales de la perpendicularidad.	Comunicar.
Parte 2		
1. Dadas dos rectas perpendiculares, dibujar un segmento, subconjunto de una de las rectas, con un extremo en el punto de intersección de estas.	Reconocer que existen segmentos perpendiculares a rectas con un extremo en la recta. Preparar para conformación de la imagen figural de altura de triángulo.	Construir.
2. Construir cuatro triángulos diferentes, para los cuales el segmento representado anteriormente es altura.	Usar la definición de triángulo. Reconocer que muchos triángulos tienen la misma altura.	Construir.
3. Explicar por qué cada figura representada es un triángulo.	Expresar su definición personal de triángulo.	Visualizar.
4. Expresar por qué los triángulos son diferentes.	Justificar, aludiendo a los tipos de triángulos según sus ángulos, que los triángulos representados son diferentes.	Visualizar. Justificar.

Parte 3

1. Reportar proceso de construcción realizado en GeoGebra de un segmento perpendicular a una recta dada, con extremo en esa recta.	Replicar el proceso usado en papel para construir un segmento perpendicular a una recta dada, con un punto en la recta.	Construir.
2. Construir un triángulo para el cual el segmento, representado anteriormente, es altura, y determinar qué se mantiene bajo el arrastre.	Usar la definición de triángulo y la imagen figural de altura. Introducir, a través de la observación, las propiedades invariantes de altura.	Visualizar. Comunicar. Construir.
3. Expresar cuántos triángulos tienen como altura el segmento construido.	Generalizar que una altura puede serlo de muchos triángulos.	Visualizar. Explorar. Generalizar.
4. Explicar en qué difieren los triángulos que tienen la misma altura.	Usar las definiciones de tipos de triángulos según sus ángulos y lados.	Visualizar. Explorar.

Parte 4

1. En GeoGebra, lograr que un segmento dado, sea altura de un triángulo dado.	Usar la imagen figural para identificar atributos de altura de un triángulo.	Construir. Visualizar. Explorar.

Parte 5

1. A partir de ejemplos de alturas de triángulos, escribir las propiedades que comparten estas.	Determinar atributos comunes de las alturas de los triángulos.	Visualizar. Generalizar.

Parte 6

1. Expresar por qué una representación es no ejemplo de altura de triángulo.	Usar las propiedades reconocidas de altura de triángulo para identificar cuál no cumple cada no ejemplo y justificar su respuesta.	Argumentar (lápiz y papel) Comunicar.
2. Escribir una definición de altura de triángulo.	Expresar de manera correcta, concisa y económica una definición.	Generalizar (lápiz y papel). Comunicar.

Parte 7

1. En GeoGebra, dado un triángulo construir una altura de este.	Usar la definición para construir una altura de un triángulo.	Construir. Visualizar.
2. Expresar cuántas alturas tiene un triángulo.	Identificar que un triángulo tiene tres alturas, independiente de su posición y sus características.	Argumentar. Generalizar.

Estructura de la tarea:

En un principio, se incluyeron representaciones en papel de rectas y un punto externo a estas, en las cuales la posición de las rectas variaba para proveer diferentes situaciones a los estudiantes. Los ejemplos de altura representados en papel incluían un ejemplo prototípico que a su vez es un triángulo rectángulo (Tarea 3, Numeral 5a, Figura 3, Anexo 4); los demás triángulos (Figuras 1, 2 y 4), son ejemplos no prototípicos de triángulos. Además, para las alturas se tuvieron en cuenta que los segmentos estuvieran en diferentes posiciones y en diferentes sitios; es decir, unas que estuvieran en el interior del triángulo, otros en el exterior y unos que fueran un lado del triángulo. (Tarea 3, Numeral 5a, Anexo 4). Entre los no ejemplos, hay un ejemplo prototípico de triángulo (Tarea 3, Numeral 5c, Imagen 3, Anexo 4) y ejemplos no prototípicos de triángulos (Imágenes 1, 2, 4 y 5). En cuanto al objeto, representado en papel, que no es altura de dichos triángulos incumplían algún atributo de altura. En la Imagen 1 y en la Imagen 3se incumplía la perpendicularidad y el no ser un segmento; se presenta una recta y un rayo, respectivamente. En la Imagen 2, el segmento no comparte un vértice con el triángulo y tampoco es perpendicular a un lado del triángulo. Por su parte, en la Imagen 4 el segmento no ha sido construido sobre una recta perpendicular a la recta que contiene el lado del triángulo. Por último, en la Imagen 5, el segmento no tiene uno de sus extremos en el lado opuesto al vértice que comparten la altura y el triángulo. Los archivos de GeoGebra, fueron diseñados y probados de tal forma que las construcciones mantienen sus atributos a pesar de someterlas al arrastre. Así era posible que los estudiantes pudieran explorar cada uno libremente.

3.2.3 Fase 3: Diseño de la entrevista

Se analizaron las respuestas escritas de cada uno de los grupos seleccionados de estudiantes en las dos primeras tareas. Se incluían preguntas para que los estudiantes:

1) aclararan ideas que eran confusas para los entrevistadores;

2) expresaran qué hizo que cambiaran las definiciones que daban;

3) expusieran si el uso de GeoGebra fue útil o no;
4) expresaran ideas sobre definiciones dadas por otros grupos;
5) manifestaran qué consideraban como características relevantes de los objetos en cuestión.

A continuación, ejemplificamos unos de los libretos previamente preparados para la Tarea 2 (Anexo 3).

3.2.3.1 Preguntas de entrevista para Tarea 2

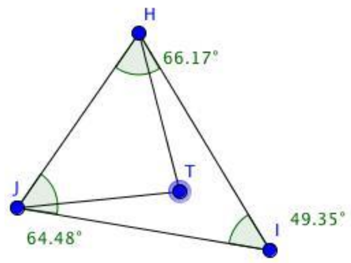
Según los resultados obtenidos al desarrollar la Tarea 2, se diseñaron

- Para el Δ afirmaron que la propiedad de los ángulos es "que todos en las segundas tienen otra medida, un numero igual". Expliquen lo que quieren decir.
- Examinen las medidas de los lados del Δ . En el primer caso todos los lados tienen igual medida. En el segundo y el tercero, no. De nuevo, encuentren las medidas para un segundo caso. ¿Qué hicieron para que dieran distintas?
- Para el Δ la propiedad que ustedes dieron para los ángulos fue "que se puedan mover y se cambian los números" ¿Qué se puede mover? ¿A qué números se refieren? ¿Esto solo sucede con este triángulo?
- Su definición de triángulo acutángulo fue "que acutángulos llegan asta 78,08". ¿Por qué escogieron ese número? ¿Existirá un número mayor para las medidas de los ángulos? [En un archivo nuevo se les muestra un triángulo acutángulo] ¿Se tendría que cambiar la definición con los resultados que acaban de obtener? ¿Cuál es la nueva definición?
- ¿Por qué definen a los triángulos no acutángulos así: "los no acutángulos llegan asta 68,98 de medida"?
- Explique por qué cada triángulo no es acutángulo [Se refiere a los no ejemplos de triángulos acutángulos.].
- Con respecto a su definición, ¿los triángulos acutángulos pueden ser no acutángulos al tiempo?

Además, para determinar cuál era la preferencia de los estudiantes con respecto al tipo de tecnología (geometría dinámica o lápiz y papel) al solucionar las tareas, les preguntamos directamente. También solicitamos que explicaran el porqué de su preferencia. También les propusimos el siguiente problema:

Sea T un punto en el interior del Δ (un triángulo acutángulo representado en GeoGebra, Imagen 4). Construya el Δ . Para saber si es acutángulo, ¿qué tenemos que hacer?

Imagen 4. Figura representada en archivo de GeoGebra



Mientras los estudiantes solucionaban este problema, teníamos previstas las siguientes preguntas, con el fin de reconocer las ideas que están movilizando y las posibles rutas que toman para solucionar el problema. Queríamos que reconocieran que uno dos de esos ángulos tiene menor medida que los del triángulo inicial y así no habría necesidad de medir esos.

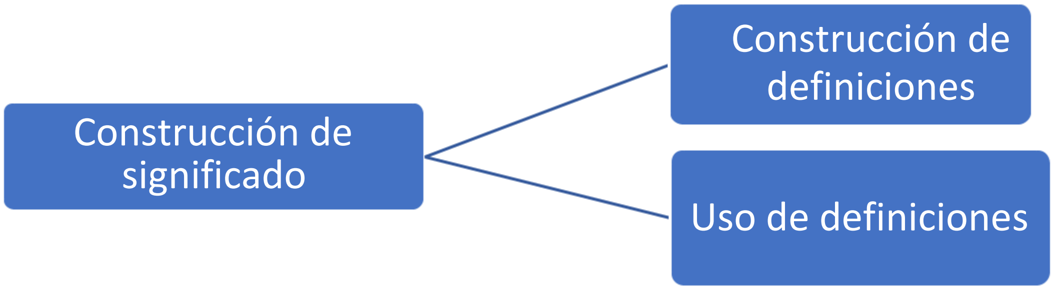
1. Pero, ¿sí es necesario medirlos todos los ángulos? Explique. [Si dicen que sí es necesario medirlos todos decimos: Pues yo pienso que no toca medirlos todos. ¿Por qué crees que pienso eso?]
2. Se quiere saber cuándo el Δ es acutángulo. Para resolver el problema, ¿prefieren usar papel y lápiz o GeoGebra? ¿Por qué?
3. ¿Cuál es la respuesta al problema?

4. ANÁLISIS

En este capítulo, presentamos las categorías de análisis que elaboramos para clasificar las acciones y opiniones de los estudiantes durante las entrevistas y que surgen con relación al marco teórico revisado. Adicional, mostramos algunos fragmentos (separados por procesos y tareas) de las entrevistas, en los cuales se realiza la respectiva clasificación de las intervenciones que consideramos más importantes para nuestro propósito.

De acuerdo con el marco teórico, definir contribuye a la construcción del significado de un objeto. Por ello fue un proceso central en las tareas diseñadas para los estudiantes. Estas se enfocaron en dos acciones del proceso de definir: construcción de definiciones y uso de estas para resolver problemas o justificar propuestas (Tabla 5). Nuestra intención, para este estudio, es determinar la posible contribución del uso de ejemplos y no ejemplos, y de geometría dinámica en la construcción de significado, y, por ende, en la posible evolución del significado personal de los estudiantes, durante el desarrollo de las tareas propuestas.

Tabla 4. Construcción de significado.



A continuación, exhibimos en detalle las categorías y subcategorías de la herramienta de análisis diseñada para nuestro estudio. Las categorías y subcategorías que se diseñaron, se refieren a la acción *Construcción de definiciones* que destacamos del proceso de construcción de significado. Para *Uso de definiciones*, el análisis se realiza sin el uso de las categorías, dado que nuestro interés era determinar en qué momentos los estudiantes usaban la definición.

4.1 Construcción de definiciones

Para dar cuenta del proceso llevado a cabo por los estudiantes en el momento de construir definiciones, se establece como categoría: *Encontrar atributos* (EA). Esta permite identificar acciones o situaciones en las que los estudiantes, al resolver la tarea y al realizar toda exploración necesaria, consiguen encontrar, reconocer y manifestar características de las figuras presentadas, que podrían ser consideradas como atributos relevantes que caracterizan al objeto en estudio. Otra categoría establecida es la referida a las acciones del estudiante para determinar la existencia y cumplimiento de atributos en un objeto geométrico. Recibe por nombre: *verificar atributos* (VA). Es de interés determinar cómo lo hacen. *Descartar atributos* (DA) es la categoría que describe las acciones de los estudiantes para decidir si una o más atributos, de las que habían identificado, están incluidas en lo que concierne a la definición del objeto geométrico. Cuando los estudiantes deciden que una figura es un no ejemplo, es de interés ver qué atributos evocan para tomar su decisión. Esto da lugar a la cuarta categoría que denominamos *ausencia de atributos* (AA). Por último, como quinta categoría, se encuentra: *modificar atributos* (MA). Esta se refiere al proceso que realizan los estudiantes, después de identificar ciertos atributos, para deducir si deben ser incluidas en la definición del objeto.

Cada una de las anteriores categorías tiene tres subcategorías de acuerdo a lo que usen para tomar sus decisiones: (i) *GeoGebra* (GD) o *papel* (P), (ii) *ejemplos* (E), y (iii) *no ejemplos* (NE). La primera está relacionada con el uso de tecnología. En esta subcategoría incluimos el posible efecto del uso de geometría dinámica, utilizando el software GeoGebra, y del uso de papel y lápiz. Es importante determinar cómo el uso de estas tecnologías incide en el desarrollo de las tareas. Aunque algunas tareas exigían el uso de una u otra tecnología, hubo momentos en los cuales los estudiantes podían escoger qué tipo de tecnología usar. En la segunda subcategoría tuvimos en cuenta varios aspectos. Estos son cómo usaron los estudiantes los ejemplos, qué atributos tuvieron en cuenta al trabajar con estos, qué atributos críticos lograron enlistar, y cómo influyeron los ejemplos prototípicos y los que no lo eran. En la tercera subcategoría observamos los mismos aspectos mencionados en subcategoría *Ejemplos*, pero además de no ejemplos prototípicos y no prototípicos, se incluyen los intuitivos.

A continuación, se presentan las categorías y subcategorías usadas en el análisis con su respectivo código. Por ejemplo, EA-GD-E significa encontrar atributos usando geometría dinámica con ejemplos. EA-P-NE significa encontrar atributos usando papel y no ejemplos.

Tabla 5. Resumen categorías.

Categoría	Geometría dinámica (GD)	Papel (P)	Ejemplos (E)	No ejemplos (NE)	Codificación
Encontrar atributos (EA)	X		X		EA-GD-E
	X			X	EA-GD-NE
		X	X		EA-P-E
		X		X	EA-P-NE
Verificar atributos (VA)	X		X		VA-GD-E
	X			X	VA-GD-NE
		X	X		VA-P-E
		X		X	VA-P-NE
Descartar atributos (DA)	X		X		DA-GD-E
	X			X	DA-GD-NE
		X	X		DA-P-E
		X		X	DA-P-NE
Notar ausencia de atributos (AA)	X		X		AA-GD-E
	X			X	AA-GD-NE
		X	X		AA-P-E
		X		X	AA-P-NE
Modificar atributos (MA)	X		X		MA-GD-E
	X			X	MA-GD-NE
		X	X		MA-P-E

		X	X	MA-P-NE

A continuación, mostramos el análisis de ciertos momentos notables de cada una de las tres tareas, usando las categorías y subcategorías descritas con anterioridad. Además, identificamos, en lo que expresan, cuáles de los atributos que pretendíamos que los estudiantes identificaran al resolver las tareas han encontrado. Utilizamos las iniciales de los seudónimos de los participantes y para los profesores: (P) profesor Óscar y (Pa) profesora Nathalia.

4.1.1Tarea 1

Se propuso desarrollar los ítems de la Tarea 1 (Anexo 2) mediante el uso del arrastre, función indispensable para ligar la construcción de definiciones al análisis de diversos ejemplos y no ejemplos que se obtienen con el arrastre de figuras representadas en geometría dinámica. Presentamos a continuación el análisis de la interacción entre profesor y estudiantes durante una entrevista, realizada después de resolver la Tarea 1. La entrevista versaba sobre el trabajo realizado por los estudiantes cuando exploraban no ejemplos y ejemplos de triángulos, representados en un archivo de GeoGebra previamente diseñado.

Los atributos que pretendíamos que los estudiantes reconocieran para definir triángulo son:

I. Tiene tres vértices
II. Los tres puntos no son colineales
III. Es la unión de los tres segmentos determinados por los tres puntos
IV. No incluye la región encerrada por los tres segmentos
V. Cada vértice es extremo de exactamente dos segmentos

4.1.1.1 Ejemplo 1, Tarea 1

En este fragmento, la profesora interactúa con J (inicial del nombre del estudiante) cuando le pregunta al Grupo A por qué categorizaron algunas de las representaciones como no ejemplos.

3. Pa[Indica el Δ representado en la pantalla del computador a la vez que les pregunta por qué no es un triángulo.]

4. JSe mueve el punto , se mueve para todas partes. Y (…) O sea aquí [señala en la pantalla cómo mueve el vértice con el cursor] (…) parece que es un triángulo normal, pero si cogemos aquí el y lo movemos, no es un triángulo.

Imagen 5. Figura 1 en GeoGebra, Tarea 1

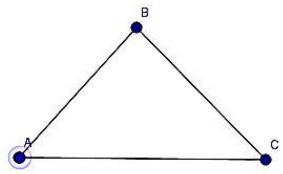
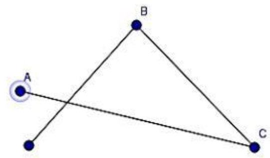


Imagen 6. Figura obtenida al arrastrar el punto A



5. Pa Pero, ¿por qué? Para ti, ¿qué es un triángulo?

6. JEs una figura cerrada, que tiene tres lados, y que pues que no (…) no se (…) despegan los lados… ¡Es cerrada!

7. Pa ¡Ah! Es por eso que dices eso. Ya te entendí. Bueno entonces, ahora oprime acá. Y oprime donde dice Figura 5.

Ustedes dijeron que esa Figura 5 [en papel] no es un triángulo.

¿Todavía siguen pensando que no es un triángulo? En papel dijeron que no. Mira [señala hoja de respuestas], ¿ves? Entonces mi pregunta es: ¿es o no es un triángulo?

Imagen 7. Figura 5 en papel, Tarea 1

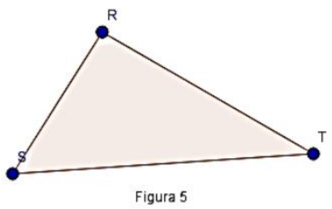
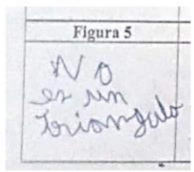


Imagen 8. "No es un triángulo"



8. JSí señora. Sí lo es.

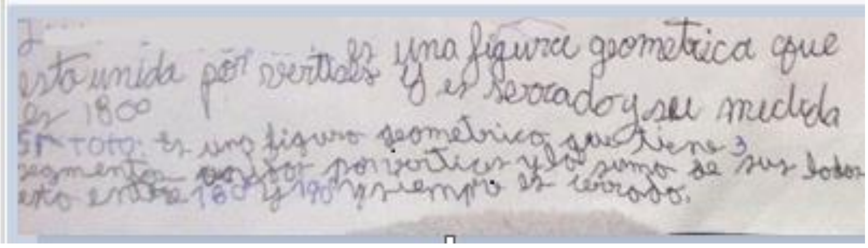
9. Pa ¿Por qué?

10. JPorque si movemos los vértices, queda un triángulo. Por ejemplo, si yo lo intento mover hacia la izquierda, hacia la derecha, sigue siendo un triángulo, porque es cerrado y tiene tres lados.

11. Pa ¿Por qué allá [en hoja de respuestas] dijeron que no?

16. JSí, porque el triángulo es una figura geométrica, tiene tres lados y esos tres lados en GeoGebra no se deberían mover. [Modifica su definición.]

Imagen 9. Definición de J y G.



En [4] y [6] J expresa que, mediante el arrastre, nota la ausencia de uno de los atributos que considera como relevante para ser triángulo, pues expone que los segmentos no están unidos (*III, V*). Lo anterior debido a que, en su significado personal, el triángulo es una figura cerrada de tres lados (AA-GD-NE). Luego, en [10] afirma que ser una figura cerrada es un atributo relevante porque, según aclara, el Ejemplo 5 es para él un triángulo, ya que los segmentos no se separan cuando arrastra uno de los vértices (*I, III*). En [16] se observa un cambio en su definición personal respecto a lo que habían consignado en la hoja de respuestas, tal vez fruto de su experiencia con GeoGebra y los ejemplos y no ejemplos. Ya no incluye como atributo lo referente a la medida.

4.1.1.2 Ejemplo 2, Tarea 1

Ahora, con respecto a la misma tarea, pero con estudiantes del Grupo B, el profesor se refiere a la Figura 8. A continuación, el diálogo con E y N.

23	P	Ubiquen el punto U [en la Figura 8]. Necesito que arrastren el punto U. [arrastran] Ahí. Para. [Detienen el movimiento cuando el punto parece ser colineal con dos vértices, de tal forma que visualmente se forma un triángulo]. Les pregunto, ¿es un triángulo?

Imagen 10. Figura modificada.

24	N	Sí.
25	P	¿Por qué?

26 E Eh no.

27 P Tú dices que no y tú dices que sí. ¿Quién dice primero por qué, la razón?

28 E Porque su forma no sigue siendo igual a un triángulo, medio parecido, pero no es un triángulo completamente. Por su forma.

29 P ¿A qué te refieres con la forma?

30 E A que la forma de un triángulo tiene esta forma [señala la Figura 2 que parece ser un triángulo equilátero]

O sea, está así [parece estar formando con sus dedos índices y pulgares un triángulo en posición prototípica]

Y a cambio esta [Figura 8] está de medio lado. Entonces no sería un triángulo correctamente.

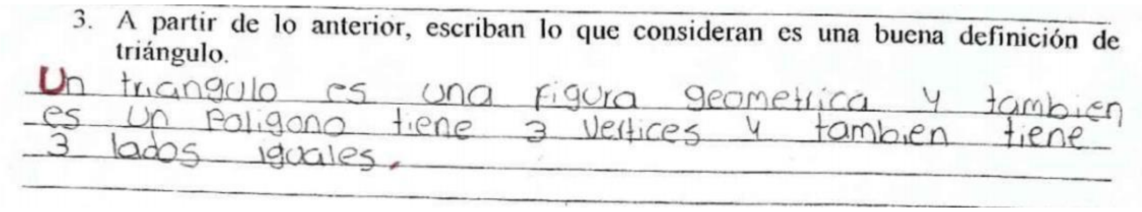
Imagen 11. Representación de triángulo con los dedos.

31 P Si no, ¿qué tipo de figura sería? [silencio] ¿No hay idea?

32 E No, porque está como al revés.

En este fragmento, podemos ver que la estudiante E, según el lenguaje y señas que usa, asigna como atributo relevante de triángulos su posición; es decir, su significado personal incluye una imagen prototípica: el triángulo debe reposar sobre un lado. Esto se deduce de sus expresiones "está de medio lado" [30] y "está como al revés" [32]. (AA –GD-NE) Modifica su definición original (Imagen 5) (*I, III*) pues añade otro atributo a esta (la posición), que no es relevante.

Imagen 12. Definición de triángulo, Grupo B


3. A partir de lo anterior, escriban lo que consideran es una buena definición de triángulo.

Un triangulo es una figura geometrica y tambien es un poligono tiene 3 vertices y tambien tiene 3 lados iguales.

4.1.2 Tarea 2 (Anexo 3)

Mostramos dos fragmentos de la entrevista al Grupo B, después de que dos estudiantes ya habían encontrado las medidas de los ángulos, para resolver la tarea. En el primero de estos, el profesor les pregunta por el atributo que encontraron para resolver la Tarea 2. En el segundo, el profesor les pregunta si ellas cambiarían algo a la definición que habían escrito en la hoja, refiriéndose específicamente a una parte donde reportan "nunca da noventa". Esto porque hay representaciones en los no acutángulos que tampoco tienen ángulos rectos.

Los atributos que establecemos para triángulo acutángulo son:

IA. ser triángulo

IIA. todos sus ángulos son agudos

Para triángulo obtusángulo, los atributos son:

IO. ser triángulo

IIO. uno de sus ángulos es obtuso

IIIO. los otros dos ángulos son agudos

4.1.2.1 Ejemplo 3, Tarea 2

11	I	Que aquí [refiriéndose a las representaciones de triángulos acutángulos], como es acutángulo, podríamos decir que las medidas dan menos
12	M	De noventa.
13	I	Y acá [mostrando las representaciones de no ejemplos] dan más.

A partir de las medidas que encontraron, usando GeoGebra, de los ángulos de los triángulos acutángulos, M e I logran identificar el atributo definitorio de estos triángulos, cosa que mencionan en [11] [12]: triángulos con ángulos cuya medida es inferior a 90 grados (EA-GD-E y EA-GD-NE) (*IA*, *IIA*). Esto muestra que los no ejemplos fueron útiles para que I adquiriera seguridad respecto a su definición.

23 IPero es que, en los triángulos acutángulos, no, no dan [la medida de los ángulos] más de noventa.

24 P Ah. Ok. Más de 90. ¿O sea, que si pueden dar 90?

25 M No.

26 P ¿Tampoco?

27 M No porque cuando yo hice la tarea, pues a mí, los únicos que me daban 90 eran los no acutángulos; los otros no.

28 P ¿Cuál tarea?

29 M Cuando dibujamos los triangulitos.

30 P ¿Para la casa?

31 M Sí.

32 P Luego, ¿cómo la hiciste? Cuéntame, ya que estamos en estas.

33 M Bueno, pues, yo me acordé de esto y pues me acordé que con I habíamos dicho que los no acutángulos son menores de 90. Eh, los acutángulos son menores de 90 y los no acutángulos dan más de 90 o 90. Entonces pues, eso fue lo que yo dibujé.

*Imagen 14. Triángulos a*cutángulos

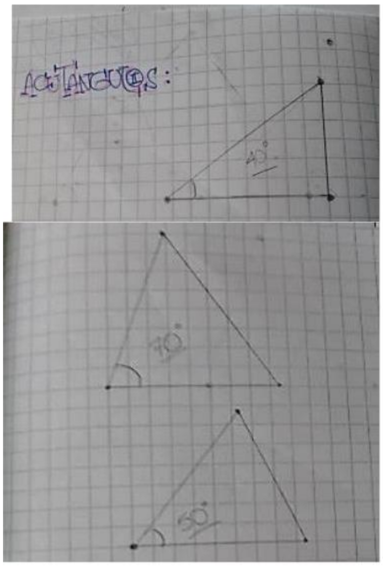
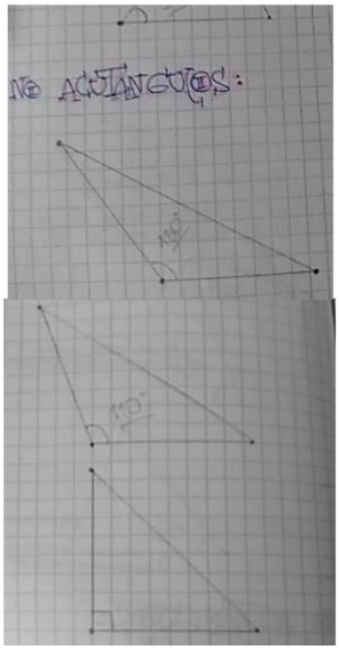


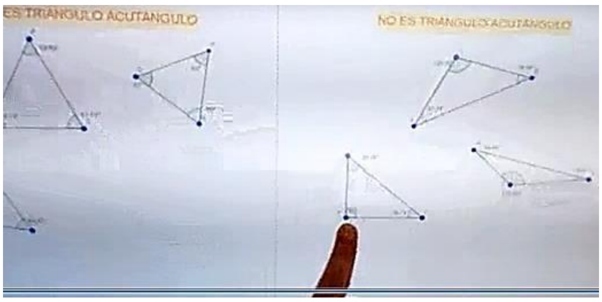
Imagen 13. Triángulos no acutángulos



34 P Ah bueno, ¿entonces si le cambiarían esa parte a la definición?

35 ISí. Y acá nos muestra, aquí nunca dan 90; pero acá sí, en no acutángulos.

Imagen 15. Señala triángulos no acutángulos



En [23], I da su definición de triángulo acutángulo. Ante el cuestionamiento del profesor respecto a la posibilidad de que los triángulos tengan un ángulo recto, las estudiantes usan uno de los no ejemplos para descartar esa posibilidad “los únicos que me daban 90 eran los no acutángulos (M) [27] (DA-GD-NE) (*IIA*) y “pero acá sí [dan 90], en no acutángulos” [35] (I) (VA-GD-NE) (*IIA*). Esta tarea resulta de mucha importancia porque M expresa que usó la definición propuesta por ellas cuando representó, en la tarea, ejemplos y no ejemplos de triángulos acutángulos.

4.1.2.2 Ejemplo 4, Tarea 2

Ahora mostramos el fragmento de otra pareja de estudiantes del Grupo A, T y G, que interactúan con la profesora con el fin de construir la definición de triángulo obtusángulo a partir de ejemplos y no ejemplos.

31. Pa Bueno en el triángulo [ejemplo] ¿qué propiedad encontraron?

32. G Eh (…) en el , dos ángulos (…) menores de 90 [grados] y el otro no puede bajar de 90 [grados]

33. Pa Cuando un ángulo es menor a 90, ¿cómo se llama?

35. G Lo mismo en este [Δ ejemplo] pasa lo mismo (…) pero la cosa es que no sabemos muy bien sobre ángulo obtu (…) sángulo…

36. Pa ¡Ajá! Bueno. Cuando ustedes dicen que no puede dar más de 90, ¿qué quieren decir con eso? ¿Para qué creen que les serviría los triángulos acutángulos que encontraron? ¿Qué son los triángulos acutángulos?

37. G Pues que no pueden dar más de 90, pero (…) es que solo hemos encontrado un obtusángulo [Δ] que es isósceles y si lo deformamos nos da más de 90 [grados]

38 Pa ¿Qué propiedad encontraron en el triángulo ?

39. G Lo que dijimos… un ángulo no puede pasar de 90 (…) dos no pueden pasar de 90 y uno no puede bajar de 90 [lo escribe en la hoja de respuestas]

46. Pa Yo pregunto algo: ¿al otro lado están los no obtusángulo…?

47. T Sí, eso es lo que estaba viendo.

48. Pa Se necesitan para poder definir en el siguiente punto que dice: Escriba la definición de triángulo obtusángulo. ¿Será que necesitamos los no obtusángulos? O ¿ya con esto saben que es un obtusángulo?

49. G Mm. No sé qué es un obtusángulo, porque puede llegar a 90, pasar de 90 (…) y (…) me confundí…

50. Pa Entonces miremos los no obtusángulos a ver qué pasa

51. G [Observa no ejemplos de obtusángulos en GeoGebra] Ah ya entendí. Tenemos que hallar la diferencia y esa diferencia es lo que define los obtusángulos

52. Pa Sí señor.

53. GOk. Está fácil.

54. TOtro [ángulo] de 90 [ha medido tales ángulos de triángulos de no ejemplos]

55. GYa entendí. Eh (…) un triángulo rectángulo no puede ser un triángulo obtusángulo.

61. Pa ¿Qué encontraste?

62. GQue los acutángulos no pueden ser obtusángulos porque los obtusángulos siempre tienen que dar uno de 90 o que pase a 100, ok ¿lo escribo?

63. Pa Sí. Pero mira [señala hoja de respuestas]. Aquí dicen que escriban la definición de triangulo obtusángulo. ¿Crees que ya puedes escribirla?

64. G[Gesto y sonido de sorpresa]

65. Pa ¿Qué encontraron?

66. GAy ya. Que un triángulo obtusángulo no puede ser equilátero [se refiere al Δ que es equilátero y un no ejemplo].

67. Pa Si, muy bien. Ahora, ¿cómo escribirían qué es un triángulo obtusángulo?

70. GUn ángulo que sea mayor a 90 y el resto [ángulos] sean acutángulos.

En [32], G identifica dos atributos relevantes en los ejemplos: "dos ángulos menores de 90 [grados] y el otro no puede bajar de 90" (EA-GD-E) (*IIO*, *IIIO*). Se destaca que al decir "otro no puede bajar de 90", parece que acepta que un ángulo de un triángulo obtusángulo puede ser recto. En [35] considera necesario examinar las demás representaciones de ejemplos y menciona: "pasa lo mismo" lo que se reconoce como una aseveración a lo que había encontrado con anterioridad (VA-GD-E). El significado personal que tiene G de triángulo obtusángulo en [37], incluye un atributo adicional: "es isósceles" (EA-GD-E). En la misma línea, G indica que ha comprobado que tiene el atributo encontrado: "y si lo deformamos nos da más de 90", haciendo referencia a tener un ángulo obtuso (VA-GD-E) (*IIO*). Hasta aquí podemos identificar que el estudiante cuenta con un listado de atributos para triángulo obtusángulo, que incluye la posibilidad de que un ángulo sea recto, como se observa en [39]. Parece que el análisis de los otros ejemplos lo lleva a descartar el ser isósceles como atributo definitorio (DA-GD-E). Por sugerencia de la profesora, los estudiantes deciden analizar los no ejemplos con la intención de establecer cuáles son los atributos definitorios [49] y [51]. Cuando T anuncia que uno de los triángulos no ejemplos tiene un ángulo recto [54], G indica que "un triángulo rectángulo no puede ser un triángulo obtusángulo" [55] (*IIIO*), es decir, reconoce que algunas de las propiedades que tienen los no ejemplos no son propias del triángulo obtusángulo (VA-GD-NE). Sin embargo, aún no descarta la posibilidad de que un triángulo obtusángulo tenga un ángulo recto [62]. Al analizar el Δ y observar que no es ejemplo, descarta que un triángulo obtusángulo pueda ser equilátero (DA-GD-NE) [66]. Pero, además, parece que esa experiencia lo lleva a entender que, como un no ejemplo tiene un ángulo recto, ese atributo no lo puede tener el triángulo obtusángulo (DA-GD-NE) (*IIIO*), pues su definición de triángulo obtusángulo no incluye esa posibilidad [70]. Así, queda claro que la exploración de ejemplos y no ejemplos le permitió a G consolidar una definición que no incluye, como atributos definitorios, ser isósceles, rectángulo o equilátero

4.1.3 Tarea 3

De la Tarea 3 (Anexo 4), se analizan las intervenciones de dos parejas de estudiantes del Grupo A y del Grupo B, en diferentes momentos de la tarea. El propósito es establecer la definición de altura de triángulo. Cabe mencionar que los atributos que establecemos para altura de triángulo son los siguientes:

I. ser un segmento;
II. cumplir la perpendicularidad entre el segmento y la recta que contiene un lado del triángulo
III. tener los extremos en un punto de la recta y en el vértice del triángulo que no pertenece a la recta anteriormente mencionada.

4.1.3.1 Ejemplo 5, Tarea 3

Para la pareja M e I del Grupo B se analiza, únicamente, el proceso de construcción de la altura de un triángulo, utilizando GeoGebra (ítem 5, Tarea 3). Ya las alumnas han observado, en papel, ejemplos de altura de triángulo y enlistado lo que consideran son los atributos definitorios de altura.

En este fragmento, M e I están discutiendo lo que ven inicialmente.

289. POk, ¿observadas [os ejemplos de altura presentados en papel] no? Todas son ejemplos de la altura de un triángulo.

290. MEscriban las propiedades, ¿o sea lo que debe tener la altura de un triángulo?

291. PUjum [asintiendo] sí. Digamos que las características.

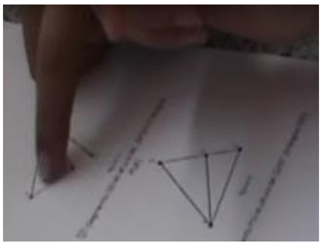
292. M(…) que no se pueden pasar de (…) como de la figura.

293. POk, tú qué opinas [refiriéndose a I] ¿No te convence?

294. INo sé qué decir. Pues si me convence lo de la línea porque aquí no hay ninguna que se salga.

295. MY acá sí. No está unida [a la recta], pero pues no se sale. [Se refiere al Δ y al ≡ .]

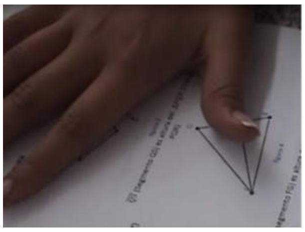
Imagen 16. Señala Δ



296. P¿Podrías comprobar de alguna manera, si ese segmento, como dices, no se pasa?

297. MRegla. Regla del dedo no se pasa. [Coloca el dedo índice sobre el ≡.]

Imagen 17. Dedo índice sobre un lado del triángulo



M en [292] identifica como atributo que las alturas “no pasan de la figura” (EA-P-E). Se refiere a parte del atributo *III* que debe ser parte de la definición de altura. El profesor le pregunta a I si está de acuerdo. I observa, al parecer, todas las figuras ejemplos y asiente en que “no hay ninguna que se salga” [294] (VA-P-E), cosa que ratifica M al indicar que aún el ≡ tiene esa propiedad [295] atributo que verifica [297] (VA-P-E).

4.1.3.2 Ejemplo 6, Tarea 3

A continuación, mostramos un fragmento, con las mismas estudiantes, en el mismo punto de la tarea donde encuentran otro atributo de altura, la otra parte del atributo III.

329. P Por ejemplo, en qué se parecen esas dos [Figura 1 y Figura 4], ya que son tan distintas y estamos hablando de ellas. ¿Qué tienen en común?

336. M Qué más…

337. IQue están tocando de alguna forma la figura.

338. P ¿De qué forma?

339. M En un vértice.

340. P En un vértice. Ahora fíjense si en todas sucede eso.

341. IEn esta sí [Figura 2]. En esta también [Figura 3]

342. M Sí, en esta también. [Señalando el vértice]

343. P Ok, si consideran que también es una característica

344. M Se puede conectar con un vértice o… [mirando la Figura 3] Entonces, el segmento está conectado a uno o más vértices del triángulo [dictándole a I].

En [337], I observa que la altura y el triángulo se están "tocando", cosa que M [339] expresa de mejor forma al decir que se tocan en un vértice (EA-P-E), Por sugerencia del profesor, las estudiantes verifican si en todas las figuras se encuentra lo que parece ser un atributo más de altura [340 y 341]. Tal vez, teniendo en cuenta el ejemplo del triángulo rectángulo (Δ) M corrige un detalle y menciona que el segmento este "conectado a uno o más vértices" (MA-P-E).

De la pareja G y J del Grupo A se analizan tres episodios: aquel en el que dos estudiantes usando los no ejemplos representados en papel, justifican el por qué no eran ejemplos de altura de triángulo; el segundo episodio trata de enlistar los atributos que caracterizan la altura de triángulo para lograr definir y el último episodio consiste en la construcción de la altura de un triángulo, con ayuda de GeoGebra.

4.1.3.3 Ejemplo 7, Tarea 3

Los estudiantes J y G, después de observar ejemplos de altura de triángulo en papel, registraron los atributos que para ellos caracterizaban y compartían todas las alturas representadas de los triángulos, así:

i. que el segmento no interseca totalmente el triángulo,
ii. que la intersección entre el segmento y la recta mide 90°,
iii. todos deben ser un segmento y debe estar conectado a un vértice.

Mostramos a continuación, el fragmento de la interacción entre los estudiantes J y G y la profesora (Pa).

66. J ¿Este punto [apuntando al punto del rayo] qué hace por acá?

67. G Igualmente es una recta; así que no (…) ¡Ah! Es un rayo.

Imagen 18. Imagen 3, Tarea 3

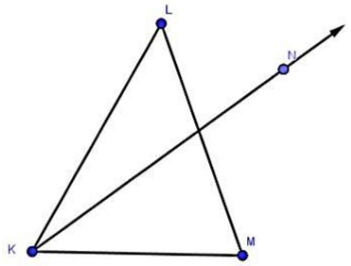


imagen 3
El $\overrightarrow{KN}$ (rayo KN) no es altura del ΔKLM (triángulo KLM)

68. Pa ¿Entonces? (…)

69. G El rayo también es infinito, ¿no?

70. J Entonces tampoco es altura con un rayo.

71. Pa ¿Esta? [Señala la Imagen 4 para que los niños lean].

Imagen 19. Imagen 4, Tarea 3

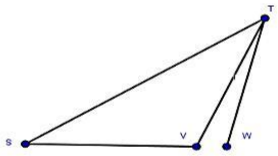


imagen 4
El $\overline{TW}$ (segmento TW) no es altura del ΔSVT (triángulo SVT)

72. JEsa [señalando al ∠] sí no mide 90°.

73. Pa¿Será?
74. G[Mide con el transportador el ∠] Sí da 90° (…) mm

75. J y[Luego de ubicar correctamente le trasportador] No, no mide 90° [J vuelve a Gmedir].

76. PaPero (…) es un segmento, pero no mide 90° (…) Bueno.

77. G[en voz baja] No cumple con todas (…)

78. Pa ¿Qué pasa si solamente cumple con una [propiedad]? Por ejemplo, acá [señala Imagen 4] es segmento y está "conectado", como ustedes dicen (…)

79. J[interrumpe a profesora] Tiene que cumplir con todas.

80. GO si no, no cumpliría con altura.

81. JO si no, no es una (…) altura.

Respecto a la Imagen 3, los estudiantes, para justificar que no se ha representado una altura, indican la ausencia de uno de los atributos que han establecido como característica relevante de altura de un triángulo. Lo anterior corresponde a (AA-P-NE) pues J identifica que el punto no pertenece al lado del triángulo [66], incumpliendo el atributo (i) de su lista. Para G, el atributo cuya ausencia nota es el de ser segmento (iii), ya que especifica que el rayo y la recta se extienden sin fin, en palabras de G, son infinito [67]; así que G descarta que una altura sea "infinita" (DA-P-NE) [70].

En cuanto a la Imagen 4, J menciona la ausencia del atributo (ii) (AA-P-NE) [72], y ante la duda de G, al usar el transportador [75] verifican el incumplimiento del atributo (ii) (VA-P-NE).

En la siguiente tabla, presentamos una síntesis del análisis anterior.

Tabla 6. Resumen análisis

Código de la categoría	**Ejemplos en que aparece**	**Cantidad de veces**
EA-GD-E	Tarea 2: Ejemplo 3 y Ejemplo 4 (2)	3
EA-P-E	Tarea 3: Ejemplo 5 y Ejemplo 6	2

EA-GD-NE	Tarea 2: Ejemplo 3	1
EA-P-NE		
VA-GD-E	Tarea 2: Ejemplo 4 (2)	2
VA-P-E	Tarea 2: Ejemplo 5 (2)	2
VA-GD-NE	Tarea 2: Ejemplo 3 y Ejemplo 4	2
VA-P-NE	Tarea 3: Ejemplo 7	1
DA-GD-E	Tarea 2: Ejemplo 4	1
DA-P-E		
DA-GD-NE	Tarea 2: Ejemplo 3 y Ejemplo 4 (2)	3
DA-P-NE	Tarea 3: Ejemplo 7	1
AA-GD-E		
AA-P-E		
AA-GD-NE	Tarea 1: Ejemplo 1 y Ejemplo 2	2
AA-P-NE	Tarea 3: Ejemplo 7 (2)	2
MA-GD-E		
MA-P-E	Tarea 3: Ejemplo 6	1
MA-GD-NE		
MA-P-NE		

4.2 Síntesis de categorías de análisis

Con respecto a la Tabla 6, notamos que en el análisis del Ejemplo 4, Tarea 2, se evidenció la mayor variedad de categorías: EA-GD-E, VA-GD-E, VA-GD-NE y DA-GD-E. Es importante resaltar que todas las categorías usadas se refieren al uso de geometría dinámica y al uso de ejemplos y no ejemplos. Ello indica que esos elementos son importantes en tareas que tienen como objetivo construir definiciones.

También la Tabla 6 permite observar que el uso de GD para encontrar atributos (EA) en los ejemplos y para descartar atributos (DA) usando no ejemplos, fueron las categorías que más frecuencia presentaron. Precisamente, son estas dos de las acciones esenciales para lograr establecer una definición económica y correcta.

La cantidad de veces (14) que apareció GD en la Tabla 6, es muestra, probablemente, de que el uso de tecnología amplía el rango de acercamientos del estudiante con el objeto geométrico, contribuyendo así a la construcción de significado. La GD permitió generar, recolectar, procesar e interpretar más información. Es decir, la GD le ayudó al estudiante descubrir propiedades, discernir entre ellas, determinar cuáles eran los atributos críticos y cuáles no, reconocer cuál atributo faltaba en una figura, razón por la cual una representación es un no ejemplo.

4.3 Uso de definiciones

Como se mencionó con anterioridad, en el siguiente análisis del uso de definiciones no se tienen en cuenta las categorías establecidas. Mostraremos y analizaremos fragmentos de trascripciones donde se evidencia el uso de definiciones en la Tarea 3 (Anexo 4).

4.3.1 Ejemplo 8, Tarea 3

En el siguiente ejemplo que presentamos, las estudiantes del Grupo B están resolviendo el numeral 4 de la Tarea 3, en GeoGebra; deben convertir un segmento dado en una altura del triángulo dado. Es importante mencionar que, en esta parte de la tarea, las estudiantes aún no han hecho la lista de atributos que definen altura de un triángulo; solo cuentan con la imagen figural que pueden tener producto de resolver los numerales 2 y 3 de la misma tarea. Antes de resolver el problema en cuestión, ellas revisan el archivo en GeoGebra en el que han construido una altura de un triángulo (Tarea 3, ítem 3).

227 M[Mientras consulta el archivo] sería volver este [segmento] como recta perpendicular y hacer que este como en el otro [archivo anterior], sea este la

altura.

228 P Ok.

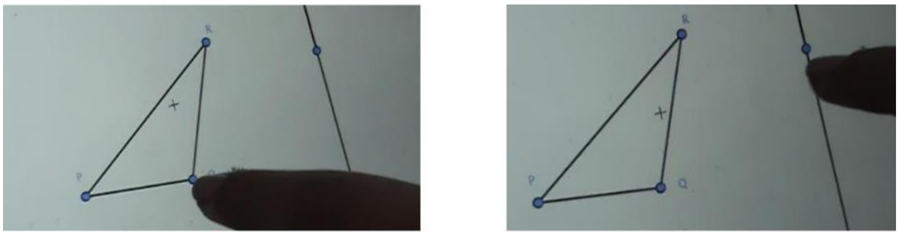
229 IToca hacer una recta. [Escoge la opción recta y construye la recta que contiene al segmento dado.]

230 M[Señala con sus manos, cómo se deben ver las rectas perpendiculares].

Imagen 20. Simulación de rectas perpendiculares

236 MO sea, poner la línea de acá, la recta. [con su dedo señala el] Y hacer que este puntico [que está señalado con el mouse] llegue acá [a uno de los extremos del segmento que se ven sobre la recta] para que se vea como el punto de intersección.

Imagen 21. Simula recta perpendicular



237 P¿Cuál punto va a ser el punto de intersección?

238 MPues este, ¿no? [señala el extremo inferior del segmento dado]

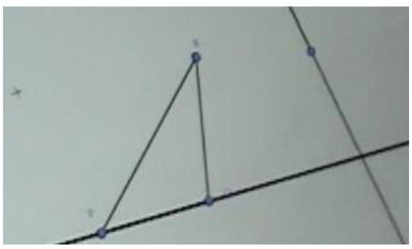
239 POk.

Bien. Eh, pues… Entonces en ese sentido lo que vas a hacer es la .
Entonces seleccionas la opción recta y das click sobre y sobre .

240 M [Una vez construida la recta ↔] Está re

chueca [Se refiere a las rectas, cómo se ven]

Imagen 22. Rectas construidas.

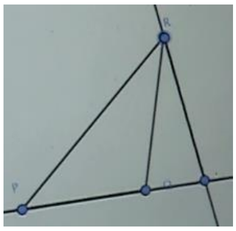


241 ISí. Eso está más.

242 MToca enderezarla [procede a hacerlo].

250 M¡Ahí, ahí! [I arrastra el extremo superior del segmento hasta que coincida con el vértice del triángulo]

Imagen 23. Altura construida, Grupo B



251 P¿Ahí? Listo. ¿Qué les asegura entonces que ese segmento que arrastraron es la altura de ese triángulo?

252 MPorque pues, queda igual [señalando la perpendicularidad]

En el fragmento anterior, las estudiantes abren nuevamente el archivo llamado Tarea 3 [227] probablemente para usar la representación de altura de un triángulo, que han acabado de construir, para recordar los pasos que realizaron para construirla. Luego I indica que se debe construir una recta y M señala con sus manos la característica de esta que es ser perpendicular [330]. Quizás este fue el primer atributo que ellas encontraron y que están usando para construir la altura. Así mismo, M identifica que un extremo del segmento va a ser intersección de las rectas perpendiculares y el otro va a ser un vértice del triángulo [236]. Al parecer, encontró estos atributos adicionales y también los tiene en cuenta para realizar la

construcción. Después de haber construido la $\overleftrightarrow{}$ por sugerencia del profesor, M se percata

que, al intersecarse las rectas, no forman un ángulo recto y expresa: “toca enderezarla” [240], haciendo referencia nuevamente a la perpendicularidad. Esto confirma que para M ese es un atributo encontrado y utilizado, que confirma en [252] cuando dice: “queda igual”. Finalmente, en [250], cuando M hace que I deje de arrastrar, valida como atributo que un extremo del segmento debe ser un vértice del triángulo y lo utilizó para representar la altura. Así, vemos que las estudiantes validan la construcción mediante la verificación de los atributos que encontraron y justifican su representación mediante estos.

4.3.2 Ejemplo 9, Tarea 3

Ahora, mostramos la transcripción de la interacción entre, M e I con el profesor (P), durante el proceso de construcción de una altura de un triángulo dado (ítem 6). Es importante resaltar que ellas nunca habían realizado una construcción completa en GeoGebra; solamente habían usado el arrastre, tomado medidas y construido rectas, perpendiculares, segmentos y puntos.

453. PHagámoslo por partes. Primero construyan la altura desde el punto . Obvio, si quieren arrastrar el triángulo que se muestra pueden hacerlo.

454. MO sea, toca hacer una recta perpendicular. [Mientras I arrastra uno de los vértices del triángulo]. [Construyen la recta perpendicular utilizando el comando en GeoGebra. Dando click sobre el segmento AC y el punto] ¿Y ahora qué hacemos?

455. IConstruir la altura.

458. IFalta. Espera miramos aquí [en las hojas]. No se puede pasar el segmento de la figura [Se refiere a que la altura es un segmeto y que un extremo de este, se interseca con el]. ¿Entonces?

460. MToca hacer otro punto.

461. P¿Qué tipo de punto? ¿Recuerdan?

462. MIntersección.

463. IListo y vamos a ponerle el nombre.

464. M¿Y ahora? La recta perpendicular, ya la hicimos.

465. P¿Pero la altura es una recta perpendicular?

466. INo, está conformada. El segmento.

Al resolver la Tarea 3, M e I en el ítem 6, establecen atributos de altura de un triángulo. Para construir una de ellas en el triángulo representado en GeoGebra, recurren al listado elaborado con anterioridad. A continuación, se presenta lo que propusieron los estudiantes y el código del atributo que nosotros identificamos para altura de triángulo:

i) El segmento no se puede pasar de la figura (*I, III*)
ii) El segmento siempre conecta con un vértice o más (*III*)
iii) La altura está conformada por una recta perpendicular (*II*)

Durante el proceso de construcción de altura, se evidencia que usan el listado. Por ejemplo, en [454] el primer atributo que tienen en cuenta es la perpendicularidad (iii), sin especificar que

≡

la altura tiene que ser perpendicular a la recta que contiene al . Luego, cuando expresan: "no se puede pasar" en [458], es porque consideran que uno de los extremos del segmento (altura) está en el lado opuesto (i), sin mencionar que debe estar en la recta que contiene al lado opuesto. Esto lo ratifican en [460, 462]. Por último, como respuesta a la pregunta del profesor en [465], mencionan otro atributo, que es el de ser un segmento (i, ii) [466].

4.3.3 Ejemplo 10, Tarea 3

A continuación, analizamos el proceso en el que J y G (Grupo A) realizan la construcción y representación de las tres alturas del triángulo representado en GeoGebra (ítem 6).

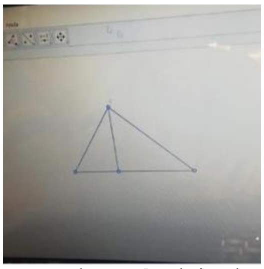
112. GNecesitamos poner (…)

113. JUn segmento

114. GSí, pero (…) no. Este, este [señala en la pantalla del computador, la herramienta segmento]

115. J[Construye segmento con extremos, uno en el vérticey el otro sobre el

Imagen 24. Altura construida, Grupo A



116. GQue no quede tan chueco porque después deja de ser (…)

≡

119. Pa ¿Eso [] ya es altura?
120. JNo, falta medirlo [∠]
121. G[utiliza herramienta medida en GeoGebra para medir ∠]

123. GAh (…) si (…) [observan medida en la pantalla]
124. JNo, toca moverlo [punto lo desplazan sobre el ≡ para intentar que la

medida obtenida sea igual a 90 grados]

125. Pa Está como muy difícil esa idea, ¿no?

126. J y G Sí [al unísono]

127. Pa En GeoGebra hay una opción que se llama recta perpendicular.

132. J y G [borran la anterior construcción y la realizan nuevamente sin instrucción de la profesora, construyen recta perpendicular por el vértice al , no ocultan la recta]

133. Pa Falta algo, porque la altura no es una recta.

134. J¡Borrar! [apuntador sobre recta perpendicular, clic derecho y escoge la opción borrar]

135. G[se desaparece la recta] Se nos olvidó poner el segmento [risas].

141. JDespués de hacer todo eso para solo una [proceso para construir una altura], nos tocará hacer eso [procedimiento de construcción de altura] (…) ¡Ah! Podemos hacerlo desde aquí [señala vértice (Imagen a)] hacia allá [realiza trayectoria con el dedo desde el vértice hacia ellado opuesto al vértice (Imagen b)]

Imagen 26. *Desplazamiento desde C.*

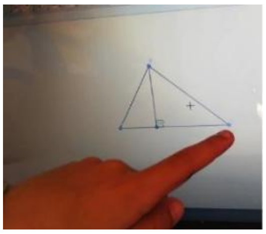
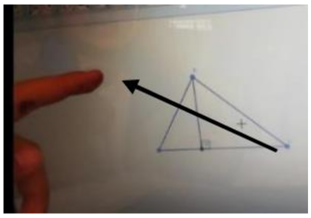
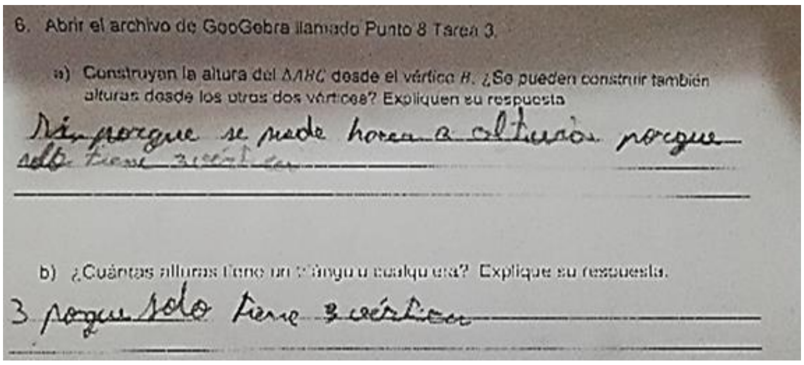


Imagen 25. Final del desplazamiento



148. Pa [Mientras J escribe en la hoja de respuestas] ¿Por qué no se pueden hacer cuatro?

Imagen 27. Respuesta de estudiantes



6. Abrir el archivo de GeoGebra llamado Punto 8 Tarea 3.

a) Construyan la altura del $\triangle ABC$ desde el vértice B. ¿Se pueden construir también alturas desde los otros dos vértices? Expliquen su respuesta

Sí porque se puede hacer a altura porque solo tiene 3 vértices

b) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo cualquiera? Explique su respuesta.

3 porque solo tiene 3 vértices

149. JPorque solo hay tres vértices iniciales

150. GO si no, tocaría hacerlo con un cuadrado.

151. Pa ¿Iniciales?, ¿Qué es eso de [vértices] iniciales?

152. JCon las que se inicia…

Se evidencia el uso de la definición en la construcción blanda que J y G hacen de una altura. A continuación, recordamos los atributos que J y G consignaron:

i. que el segmento no interseca totalmente el triángulo, (*I*)
ii. que la intersección entre el segmento y la recta mide 90°, (*II*) (*III*)
iii. todos deben ser un segmento y debe estar conectado a un vértice. (*I*) (*II*)

Ellos comienzan por representar un segmento (i, iii) con extremos en (iii) y un punto del

cuenta la particularidad de sus extremos, aunque no mencionan que uno de ellos debe estar en la recta que contiene al lado opuesto. Luego, cuando expresan: “Que no quede tan chueco porque después deja de ser”, hace referencia a la perpendicularidad y en [124] utilizan el arrastre para representar dicho atributo (II) (ii). Aquí se evidencia el beneficio de usar geometría dinámica, pues esta acción es imposible de hacer con lápiz y papel; seguramente, la habrían dibujado para que pareciera perpendicular, basados en una imagen figural, y no en la definición. Como no quedan conformes porque el ángulo no mide exactamente 90, deciden usar la sugerencia de la profesora [127]. Borran todo para hacer una construcción robusta, pero omiten el atributo ser segmento. El cuestionamiento de la profesora respecto a si han representado una altura los lleva a corregir su representación. Repiten, cada uno, el procedimiento para construir las otras dos alturas, usando los mismos atributos anteriores. Finalmente, usan el atributo de la definición de altura III y de la definición de triángulo para establecer que solo hay tres alturas en un triángulo, porque indican que un extremo de esta es un vértice, y solo se tienen tres vértices.

5. CONCLUSIONES

Para finalizar el estudio, presentamos las conclusiones que se derivan del mismo. Estas las obtuvimos a través de los resultados que expusimos en el capítulo anterior, y ofrecen una respuesta a los objetivos propuestos en el primer capítulo. Resaltamos la importancia que asumió la tecnología digital en el desarrollo de las tareas propuestas, los aportes que tuvieron, los ejemplos y no ejemplos para la construcción de una definición y el efecto en la construcción de significado.

5.1 Aportes en relación con los objetivos propuestos y el problema de investigación

Gracias al análisis de la implementación de las tres tareas y de cada una de las entrevistas, nos dimos cuenta que sí es posible que los estudiantes evolucionen en la construcción de significado de objetos geométricos. Identificamos que es viable lograr la transformación de significados si se instaura un ambiente innovador en el aula de clase, que involucre diferentes dinámicas, tipos de tareas y tecnología. Las entrevistas se convirtieron en el medio para percibir la construcción de significado y las tareas nos brindaron la posibilidad de estudiar la actividad matemática que pueden realizar estudiantes de grado cuarto.

Con ayuda de nuestra herramienta analítica, observamos que los participantes pudieron reconocer atributos esenciales de los objetos de estudio en las tareas. Esto lo logramos ver al comparar lo que ellos encuentran con los atributos que pretendíamos que los estudiantes identificaran al resolver cada una de las tareas. Otro aspecto que resaltamos y mostramos en el capítulo del análisis, fue que los estudiantes lograron usar la definición que construyeron o el significado personal que tenían para resolver las tareas propuestas. Esto es muestra de que llegaron a establecer su propio significado, cercano al institucional, y una imagen figural más amplia de los objetos de estudio.

Adicionalmente, con respecto al problema planteado para nuestro estudio, evidenciamos que algunos estudiantes exhiben una trasformación del significado personal de triángulo, triángulo obtusángulo, triángulo acutángulo y altura de un triángulo. Esto no sucede de manera inmediata; los cuestionamientos que les hacíamos, en las entrevistas o durante el desarrollo de las tareas, fueron detonantes para que expresaran sus ideas, y mediante interacciones entre ellos y con nosotros, los estudiantes lograron acercarse más a los significados institucionales de cada objeto geométrico estudiado.

A continuación, destacamos los aportes relacionados con cada asunto específico. Como justificación de los aportes que reconocemos de la aproximación que usamos para favorecer la construcción de significado de algunos objetos geométricos (presentación de ejemplos y no ejemplos, uso de geometría dinámica), específicamente para la construcción de definiciones, presentamos algunas opiniones de los estudiantes.

5.2 Aporte de la tecnología digital en el proceso de construcción de significado

Evidenciamos que el uso de la geometría dinámica fue crucial para lograr encontrar los atributos críticos de los objetos geométricos estudiados. A través de lo que expresan los estudiantes cuando se les pregunta acerca de cómo aportó el uso de geometría dinámica, mostramos en qué asuntos específicos se evidencia el aporte.

Los estudiantes reconocen al uso de GeoGebra como un medio que facilita tener representaciones fidedignas de objetos geométricos. Esto lo afirma T, al decir, en la entrevista de la Tarea 2 al Grupo A: "*Podemos deslizarlos y moverlos. "* [5], "*Cuando lo escribimos toca hacer otro y otro y otro…*" [7], y "*En GeoGebra, solo con uno, uno lo mueve y ya"* [9]. G complementa lo que dice T cuando expresa que: "*Porque ahí hacemos las medidas y …"* [4] y en papel "*Porque toca usar escuadra…"* [12] y "*Pero si uno se pasa por un "centimetrito" toca volver a empezar [a dibujar]"* [14]. Esta misma opinión la expresa M (Grupo B), al realizar el contraste entre el uso de tecnología no digital, en este caso la escuadra, y digital, GeoGebra, cuando dice: "*Porque uno se puede equivocar en cualquier momento"* [154] (refiriéndose al momento en que usan la escuadra) e I complementa la idea anterior: "*Se le puede correr la regla*" [155].

Otra contribución del uso de geometría dinámica lo menciona M (Grupo B) cuando está desarrollando la Tarea 3 (Anexo 6). Ella manifiesta que "*Porque es más fácil, solo es seleccionar y poner, saber lo que hay qué hacer*" [150]. M saca a la luz que cuando una persona conoce los atributos críticos de un objeto geométrico, puede hacer una representación adecuada en GeoGebra. Esto se evidenció cuando los estudiantes del Grupo A (Ejemplo 10, Tarea 3), experimentan la necesidad de usar la herramienta recta perpendicular para asegurar que el segmento que construyen es una altura.

Otro aspecto al que contribuyó el uso de GD, al hacer las representaciones de los ejemplos para las tareas de tal manera que siempre mantuvieran sus atributos críticos bajo el arrastre, fue que los estudiantes lograran discernieran estos y comunicaran lo descubierto usando un lenguaje geométrico propio de su edad. Ejemplo de esto son las expresiones que usaron para comunicar los atributos en la Tarea 3: *El segmento no se puede pasar de la figura* y *que el segmento no interseca totalmente el triángulo*.

Resumiendo, T concibe a GeoGebra como un ambiente que garantiza múltiples representaciones, y M, G e I como una herramienta que permite construir garantizando exactitud de medidas. A su vez, M destaca que GeoGebra facilita hacer construcciones robustas, siempre y cuando el usuario sepa lo que está haciendo.

Estas afirmaciones corroboran que la tecnología digital brinda seguridad, confiabilidad y precisión en las propiedades representadas, aspecto necesario para reconocer los atributos críticos de las figuras, y así poder construir una definición. A esta posibilidad de manejar los sistemas de representación se le agrega el aspecto dinámico que tiene el software, lo que permite a los estudiantes manipular los objetos y sus relaciones, construyendo una experiencia matemática difícil de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel.

5.3 Aportes de los ejemplos y no ejemplos

Las representaciones de ejemplos que observaron los estudiantes, tanto en papel como en la pantalla del computador, jugaron un papel importante para descubrir propiedades que podrían ser los atributos críticos del objeto a definir. La comparación de varios ejemplos y la presentación de ejemplos prototípicos y otros que no lo fueran, permitieron discernir propiedades comunes de estos (Ejemplos 5, Tarea3) y descartar algunos de los que inicialmente atribuían como atributo crítico (Ejemplo 4, Tarea 2), confirmar que una propiedad descubierta la compartían todos los ejemplos para así considerarla atributo del objeto (Ejemplo5, Tarea 3). Los no ejemplos sirvieron para delimitar el conjunto de propiedades que podrían ser los atributos esenciales, como, por ejemplo, descartar que los triángulos obtusángulos pudieran tener un ángulo recto (Ejemplos 3 y 4, Tarea 2).

Un elemento muy importante de nuestro estudio, fue que siempre se presentaron, en cada una de las tareas, ejemplos y no ejemplos de los objetos que se querían definir. Estos se diseñaron atendiendo a lo consultado en el marco de referencia. Los ejemplos y no ejemplos representados, no fueron prototípicos ni intuitivos, lo que permitió ampliar el espacio de ejemplos de los estudiantes e invitaron a examinarlos de forma crítica.

Un aporte que se observó respecto al uso de ejemplos y no ejemplos tiene que ver con la justificación. Teniendo la lista de atributos esenciales, los estudiantes podían explicar por qué una representación era un no ejemplo, al expresar qué atributos no poseía cada no ejemplo. Es de destacar la intervención [51] (Ejemplo 4, Tarea 2): [Observa no ejemplos de obtusángulos en GeoGebra] *"Ah ya entendí. Tenemos que hallar la diferencia y esa diferencia es lo que define los obtusángulos*". En ella G indica por qué son importantes los no ejemplos cuando se está construyendo una definición. Esto expresa precisamente nuestra hipótesis. Se percata de la importancia de usar los no ejemplos, los utiliza para compararlos con los ejemplos, para identificar sus diferencias y así lograr definir los triángulos obtusángulos.

Los ejemplos y no ejemplos, en tareas ayudan para que los estudiantes enuncien sus definiciones personales de conceptos, que han usado durante varios años, como fue el caso del Ejemplo 5, Tarea 3, con el objeto geométrico triángulo; en este se evocó a la definición personal y con el análisis de los ejemplos y no ejemplos, se reconoció que esta no era correcta

En el desarrollo de la Tarea 3, J (Grupo A) indica que una representación es ejemplo de un objeto cuando: "*tiene que cumplir con todas* [los aspectos críticos incluidos en una definición]*"* [79]. Él reconoce que solo al cumplirse todos los atributos de su listado, puede el objeto ser altura o no de triángulo. Esto deja entrever que los estudiantes comprenden en qué consiste el proceso de definir en sí, es decir construyen significado de lo que es una definición.

5.4 Aporte de las tareas en el proceso de construcción de significado

Derivado de las producciones de los estudiantes al resolver las tareas, identificamos algunos hechos que evidencian aportes significantes en el proceso de construcción de significado. El uso de la geometría dinámica, los ejemplos y no ejemplos brindaron a los estudiantes herramientas para reconocer qué define a un objeto geométrico.

Durante la Tarea 3, la estudiante M del Grupo B, estaba leyendo una instrucción de esta: "*Escriban las propiedades, ¿o sea lo que debe tener la altura de un triángulo?*". Esta intervención nos permite concluir que ella entendió lo que significa encontrar atributos para definir un objeto. Esto es resultado del tipo de tareas que se propusieron; aporta al significado personal de lo que es definir en matemáticas.

En el desarrollo de la Tarea 3, al solicitarle a las estudiantes del Grupo B recordar la definición de triángulo, ellas responden: "*Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados, tiene tres vértices*" (I, III) El profesor interroga si con lo dicho basta y ellas añaden que los puntos deben ser no colineales (II). Se evidencia una evolución de significado de triángulo pues ninguno de los estudiantes, tanto del Grupo A como del Grupo B, mencionaron en sus definiciones iniciales la no colinealidad de los vértices, atributo esencial del significado institucional de triángulo.

Tanto en la Tarea 1 como en la Tarea 2, se buscó que el proceso de construcción de significado comenzara con la presentación de ejemplos y de no ejemplos, para que al contrastarlos los estudiantes encontraran los atributos que definen el objeto. En la Tarea 3, se procedió de forma diferente a lo que se hizo en las tareas anteriores. Se inicia indicando cómo construir una altura teniendo en cuenta los atributos esenciales de esta. En seguida, los estudiantes mismos producen representaciones que eran ejemplos de altura, para que encontraran los atributos que consideraban esenciales y luego, los usaban para construir una altura.

Creemos que las dos formas de proceder permitieron que los estudiantes expusieran, con cierto grado de confianza, la lista de los atributos que definen los objetos geométricos en cuestión.

5.5 Aportes a las prácticas educativas del profesor

Los dos grupos de estudiantes no habían tenido experiencia con el uso intencionado de geometría dinámica y de no ejemplos, ni habían participado en el proceso de construcción de definiciones. Esto no fue un impedimento para desarrollar las tareas ni para comunicar sus ideas; más bien fue detonante para lograr construir significado de los objetos geométricos que se introdujeron en las tareas. Siendo de instituciones diferentes y teniendo profesores distintos, que afectaban la forma de interactuar entre los estudiantes y de ellos con el profesor, los resultados que se obtuvieron fueron muy parecidos. Es por ello que creemos que este estudio y, específicamente, las tareas diseñadas pueden aportar significativamente a las necesidades e intereses de los profesores que quieran favorecer el proceso de construcción de significado en sus clases, aunque tengan que realizar modificaciones pertinentes de acuerdo al contexto y grado de escolaridad.

Dada la edad de los estudiantes que participaron en el proceso de desarrollo de este estudio, no se esperaba que escribieran definiciones formales. Consideramos que este aspecto no es lo más importante de definir o de construir significado; en cambio creemos que reconocer cuáles son los atributos que se requieren para que una representación sea ejemplo y que la ausencia de uno de ellos produce un no ejemplo, es más relevante y significativo. Se logró que ellos comprendieran qué es una definición y cómo sirve esta para justificar la clasificación como no ejemplo de una figura. Así, además de desarrollar el proceso de definir, los estudiantes incursionaron en otro proceso matemático importante: justificar.

Gracias al proceso de la elaboración del trabajo de grado, comprendemos la importancia de diseñar tareas que incluyan el uso de geometría dinámica, tareas que favorezcan la exploración, el descubrimiento, la toma de decisiones, la comunicación entre estudiantes. Aprendimos que se logran mejores propuestas cuando se trabaja en equipo, pues así se complementan las ideas.

5.6 Aportes a estudios posteriores o a futuras discusiones relacionadas

Algunos asuntos que pueden ser tratados en la posible continuación de este estudio son los siguientes:

- ¿Cómo evolucionan los significados personales de los estudiantes que no participan activamente en el desarrollo de una tarea con uso de GD y ejemplos y no ejemplos, en la clase de geometría?
- Si se favorece el proceso de construcción de significado con el uso de ejemplos y no ejemplos, ¿qué se considera como indispensable y necesario en una clase de geometría?
- ¿En qué momento del proceso de construcción de significado debe intervenir el profesor? ¿Cuál es el rol del profesor en el proceso de construcción de significado?

Estas cuestiones no son abordadas en este estudio debido a que no se contemplan en los objetivos del mismo. Sin embargo, consideramos que pueden ser una amplificación de este y un tema sobre el cual invitamos a nuestros lectores a realizar más investigaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aya, O., Echeverry, A., y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*: *TED 35*,63-86.

Blanco, N. (1994). Las intenciones educativas. Teoría y desarrollo del curriculum. Málaga: Aljibe, 205-231.

Camargo, L., y Samper, C. (2013). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en educación básica.* Simposio Nororiental de Matemáticas, 1, pp. 249-268.

Camargo, L., y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En Perry., *Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, *pp. 55-78*.

Castiblanco, A., Camargo, L., Villaraga, M., y Zapata, G. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

De Villiers, M. (1995). The Handling of Geometry Definitions in School Textbooks. Pythagoras, 38, 3-4.

Equipo de gestores de pruebas del Icfes. (2017). *Guía de orientación*. Bogotá, D.C: Ministerio de Educación Nacional.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics. 24*(2), 139-162.

Godino, J., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, *12*(1), 70-92.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A., Kelly y R. Lesh (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Capítulo 19, 517 – 545.

González, M., y Lupiáñez, J. (2001). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática, 28,* 195-201.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. Focus on Learning *Problems in Mathematics, 11*(1), 61–76.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

MEN. (2006). Estándares Básicos de competencias en matemáticas. Bogotá D.C.

Molina, O., Perry, P., Camargo, L., y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática, 27*(2), 37-66.

Mounoud, P. (2001). El desarrollo cognitivo del niño: desde los descubrimientos de Piaget hasta las investigaciones actuales. *Contextos educativos,* (4), 53-77.

Planas, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultura, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias, 22*(1), 19-36.

Planas, N., y Gorgorió, N. (2000). Estudio de la diversidad de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las ciencias*, *19*(1), 135-150

Riveros, V., Víctor, S., Mendoza, M., y Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. *Quórum Académico, 8*(1), 111-130.

Samper, C., Leguizamón, C., y Camargo, L. (2002). La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. *Revista EMA, 7* (3), 293-309.

Samper, C., Perry, P., y Camargo, L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas.* (77), 51-58.

Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. Educación Matemática, 17 (3), 105 – 120. Disponible en: https: /www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40517306

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. Digital Experiences in Mathematics Education, Online first. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9.

Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Sinclair, N., y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 51 y 52, 28–44.

Toro, J. (2014). Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. Educational Studies in Mathematics, 69, 81-95. doi: 10.1007/s10649-008-9133-5

Villarreal, M. (2012). Tecnología y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Innovación y Experiencias, 3*(5), 73-91.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). Advanced mathematical thinking (Kluwer: Dordrecht, Holanda), 65-81.

Watson, A., y Mason, J. (2005). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.) Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (4), 377-385.

ANEXOS

ANEXO 1: Actividad de exploración con GeoGebra

Instrucciones expresadas verbalmente por el docente

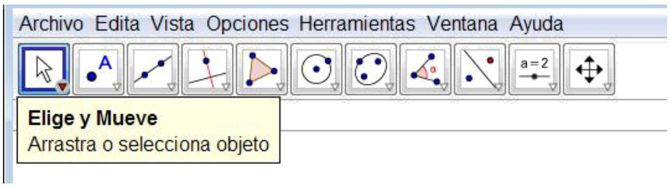
Momento 1: Abrir GeoGebra

Cuando se abre el programa aparece una vista gráfica, al lado una algebraica y abajo, una barra de entrada para escribir comandos. Se explica a los estudiantes las posibilidades que tiene el software en cuanto a que permite explorar situaciones matemáticas desde distintas perspectivas como lo es la algebraica, mediante programación y comandos, y la geométrica mediante visualización y construcciones.

En primer lugar, le mostráremos a los estudiantes algunas de las herramientas y luego nos centraremos en actividades cuyo objetivo sea el arrastre.

Antes de comenzar la actividad, se aclara que como se trabajará en geometría, la pantalla debe estar sin ejes y cuadrícula, pues ello no es parte del mundo de la geometría. Para lo anterior, como se trabaja en computadores, los estudiantes deben encontrar un pequeño triángulo que aparece al lado derecho de la pantalla. Al dar clic sobre este, se despliega una lista de los campos de la matemática en los que se puede usar GeoGebra. Uno de los campos es geometría, por lo que se indica que se debe escoger esta opción. Cabe mencionar que, para actividades, más adelante desarrollados con el programa, los estudiantes que puedan utilizar este software en otro dispositivo, deben dar clic derecho y clic sobre la opción **Ejes** y **Cuadrícula** para que desaparezcan.

En seguida, para explorar las distintas posibilidades, se pide que recorran con el ratón los distintos íconos que aparecen en la parte superior de la pantalla. Se explica que al mover el ratón sobre los íconos aparecerá entonces una breve descripción de lo que se puede hacer con esa herramienta.



Cada botón tiene en la parte inferior derecha un triángulo. Si se da clic sobre él, se despliegan opciones de más herramientas.

Momento 2: Instrucciones generales

Se indica que antes de comenzar a construir figuras geométricas, se debe desplegar el menú titulado Opciones (Parte superior de la pantalla), escoger la opción Etiquetado, y entre las posibles opciones desplegadas, hacer clic sobre Solo puntos nuevos. Así, cada vez que se represente un punto, aparecerá de manera automática el nombre de este.

Momento 3: Actividad 1

Se solicita a los estudiantes desplegar el menú del tercer botón de izquierda a derecha, y escoger (dando clic) la opción segmento. Se indica que para construir el segmento se debe dar clic sobre la pantalla (más adelante la llamaremos plano), para crear uno de los extremos del segmento (punto), moverse hacia el sitio en el plano en el que se quiere colocar el otro extremo del segmento (punto), y hacer clic para que aparezca.

A continuación, se indica que es posible medir el segmento construido. Para ello se despliega el menú del cuarto botón de derecha a izquierda y se elige la opción **Distancia o longitud**. Para que aparezca el valor de la medida de longitud del segmento basta con dar clic sobre el segmento.

En este momento, se comenta que GeoGebra es un programa de geometría dinámica. Recibe ese calificativo porque los objetos que aparecen en el plano pueden moverse. Para ello, es necesario seleccionar la opción *Elige y mueve* disponible en el primer botón. Cuando se acerca a cualquier objeto representado, el cursor cambia de apariencia (se vuelve una mano) que indica que se puede mover el objeto. Manteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón, al moverlo se mueve la figura sobre el plano.

Se pregunta:

- Al colocar la mano (cursor) sobre el segmento, no en alguno de los puntos extremos, y moverlo, ¿qué ocurre?
- Al colocar la mano (cursor) sobre uno de los extremos del segmento y moverlo sobre el plano, ¿qué ocurre?

Luego, se precisa lo que se puede deducir de lo que ocurre cuando se arrastra uno de los extremos del segmento, la figura sigue siendo un segmento, pero más largo o corto y ocupa otro lugar del plano. Por tanto, la medida del segmento cambia. Ello significa que no todos los segmentos tienen la misma medida; la medida varía, pero ser segmento no varía (es invariante). El arrastre es una función que permite determinar qué propiedades de la figura varían con el arrastre y cuáles son invariantes con el arrastre. Varía: longitud y posición; invariante: ser segmento.

Momento 4: Actividad 2

En el archivo Tarea 2, se ha representado un ángulo recto.

1. Abra el archivo de GeoGebra Tarea 2
2. Describa lo que se observa en la pantalla.
3. Arrastre la figura. ¿Tiene la figura alguna propiedad que no cambia al arrastrarla?

Se pide que los estudiantes escriban sus respuestas. Luego se solicita en voz alta las respuestas a las anteriores preguntas. Lo ideal es que hablen sobre ángulo recto. Si es así se explica cómo se puede medir el ángulo y se solicita que arrastren. Si no mencionan ángulo recto, se harán preguntas que ayuden a inducir la respuesta, aprovechando sus respuestas para llevarlos a esta.

El objetivo es mostrar que hay relaciones que se mantienen a pesar de usar el arrastre.

Momento 5: Actividad 3

Abrir el archivo de GeoGebra con Nombre: Segmento y puntos entre.

En esta última tarea se indica la relación del punto entre. El archivo muestra dos situaciones, cuando ocurre "estar entre" y cuando no. El objetivo es que utilizando la herramienta arrastre puedan identificar esta relación.

Para lo anterior se les preguntará qué ocurre con respecto al primer ejemplo (parte superior del plano), esto es, que describan verbalmente lo que sucede cada vez que arrastran un punto extremo del segmento, el segmento, o el punto que se encuentra visible dentro del segmento. Luego, análogo para el siguiente ejemplo (parte inferior del plano).

Inducir de manera intuitiva los no-ejemplos con geometría dinámica cuando siempre cumple esta propiedad y cuando no la cumple.

Objetivos y expectativas

Momentos	**Objetivo de enseñanza**	**Intención**	**Uso o no de tecnología digital**
1. ***Abrir GeoGebra***	Reconocer la ventana principal de GeoGebra junto con las herramientas que serán usadas para trabajar en el ambiente de geometría.	Determinar y comprender los usos y posibilidades que ofrece el software.	Exploración en la ventana de geometría en GeoGebra.
2. ***Instrucciones generales***	Identificar opciones del software adicionales.	Observar que cada objeto o relación en GeoGebra tiene nombre y por ende es más fácil de mencionarlo.	Exploración en la paleta de opciones o barra de herramientas que ofrece la ventana de GeoGebra.
3. **Actividad 1**	Avanzar en el manejo del software.	Reconocer a GeoGebra como un programa de	Visualización de medidas y de movimiento en el

		geometría dinámica en el cual los objetos que aparecen en el plano pueden moverse, para esto se resalta la importancia de la función arrastre.	plano mediante clic sostenido en la ventana de GeoGebra.
4. **Actividad *2***	Avanzar en el manejo del software.	Mostrar que hay relaciones que se mantienen a pesar de usar el arrastre.	Ventana de GeoGebra.
5. **Actividad 3**	Identificar mediante la herramienta arrastre relaciones en objetos.	Inducir de manera intuitiva los no-ejemplos con geometría dinámica	Uso de archivo construido previamente en GeoGebra.

ANEXO 2: Tarea 1
DEFINICIÓN DE TRIÁNGULO

(Actividad individual) 1. Defina triángulo.

(Actividad grupal)

1. Comparen sus definiciones de triángulo. Si hay diferencias, escriban cuáles son.

____
____
____
____

2. A partir de lo anterior, escriban lo que consideran es una buena definición de triángulo.

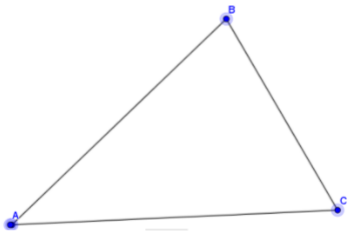
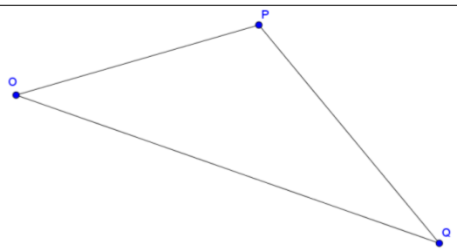
____

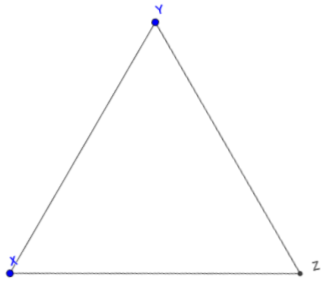
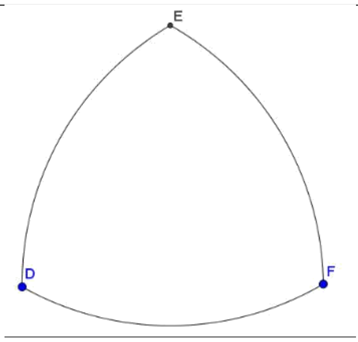
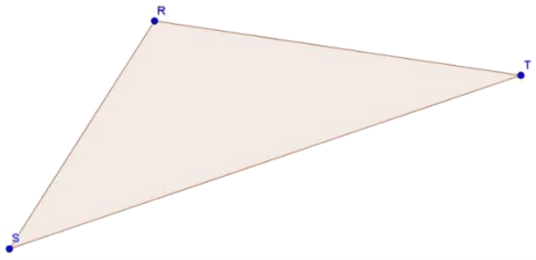
____

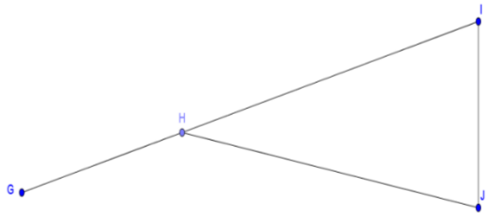
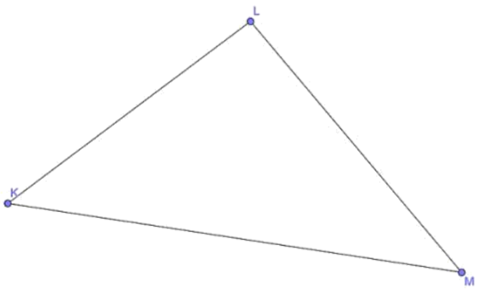
____

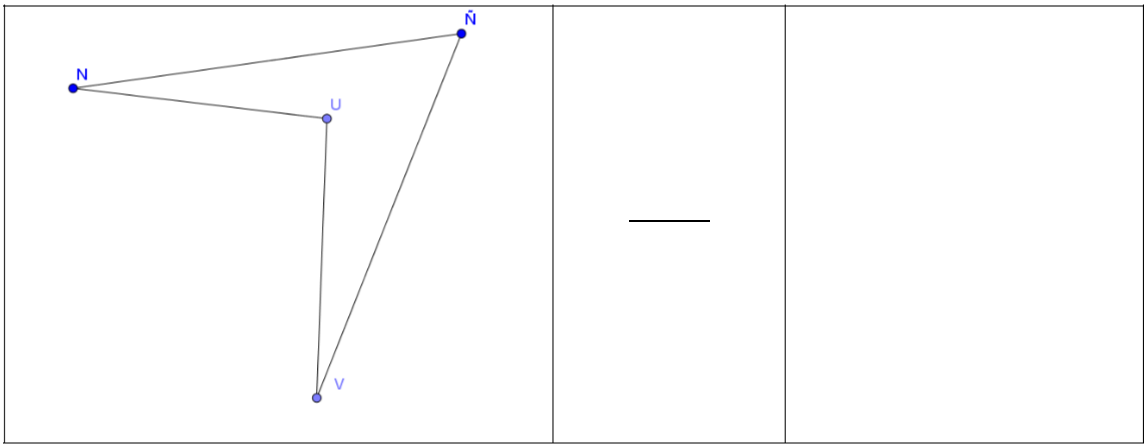
____

3. Según lo que observan en la primera columna, ¿cuáles figuras de las que están representadas, no son triángulos? Para cada una de ellas, escriba en la siguiente columna SI, si cumple ser triángulo o NO si no lo es. Luego, en la tercera columna expliquen por qué no es un triángulo.

<table>
<tr><td>Figura 1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>
</td><td>____</td><td></td></tr>
<tr><td>Figura 2</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>
</td><td>____</td><td></td></tr>
<tr><td>Figura 3</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

	______	
Figura 4		
	______	
Figura 5		
	______	
Figura 6		

 Figura 7	______	
 Figura 8	______	



Abran el archivo Tarea 1 en GeoGebra.

1. Según lo que observan, ¿cuáles figuras de las que están representadas, no son triángulos? Para cada una de ellas, expliquen por qué no es un triángulo.

2. Para cada una de las figuras que parecen ser triángulo, arrastren los vértices y describan lo que sucede.

3. Después de realizar el arrastre, completen la tabla escribiendo cuáles de las figuras no son triángulos y porqué. Dejen la celda en blanco para las que consideran que si son triángulos.

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**

Figura 5	**Figura 6**	**Figura 7**	**Figura 8**

4. Revisen su definición de triángulo. Teniendo en cuenta lo que hicieron, decidan si toca cambiarla, y escriban la nueva definición.

ANEXO 3: Tarea 2
Definición de triángulos acutángulos y triángulos obtusángulos

Primera parte

Abre el archivo de GeoGebra llamado Tarea 2.

1. Realiza todas las exploraciones y mediciones necesarias para estudiar las propiedades de lados y ángulos de los triángulos que son acutángulos. Completa las siguientes tablas.

TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS

Lado	Algunas medidas			Propiedad

≡
≡
∠
∠
∠

		∆		
Lado	Algunas medidas			Propiedad
≡				
≡				
≡				
∠				
∠				
∠				

		∆		
Lado	Algunas medidas			Propiedad
≡				
≡				
–				
∠				
∠				
∠				

TRIÁNGULOS NO ACUTÁNGULOS

△				
Ángulo	Algunas medidas			Propiedad
∠				
∠				
∠				

△				
Ángulo	Algunas medidas			Propiedad
∠				
∠				
∠				

△				
Ángulo	Algunas medidas			Propiedad
∠				
∠				
∠				.

2. Comparen las propiedades de los triángulos que sí son acutángulos con las que no son. Escriban una definición para triángulo acutángulo.
3. Con base en su definición, escribe que hace que cada uno de los NO triángulos acutángulos no sean un triángulo acutángulo.

Segunda parte

1. En el cuaderno, elabora tres dibujos de triángulos diferentes que sean acutángulos y tres diferentes que NO sean acutángulos.

Triángulos acutángulos	Triángulos no acutángulos

2. Muestra tu trabajo a tus padres y pídeles que observen tus dibujos y escriban cuál creen que es la propiedad que hace que un triángulo sea acutángulo.

Tercera parte

Abre el archivo de GeoGebra llamado Tarea 2 Obtusángulos.

1. Realiza todas las exploraciones y mediciones necesarias para estudiar las propiedades de ángulos de los triángulos que son obtusángulos. Escríbelas en las siguientes tablas:

TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS

Δ				
Lado	Algunas medidas			Propiedad
$\angle$				
$\angle$				

∠

△				
Lado	Algunas medidas			Propiedad
∠				
∠				
∠				

△				
Lado	Algunas medidas			Propiedad
∠				
∠				
∠				

2. Examinen las medidas de los ángulos de los triángulos que son acutángulos. Comparen con las medidas de los ángulos que son obtusángulos. ¿Hay alguna diferencia entre las medidas de los unos y los otros?

3. Escriban la definición de triángulo obtusángulo.

4. Para cada triángulo que no es obtusángulo, explique por qué no lo es.

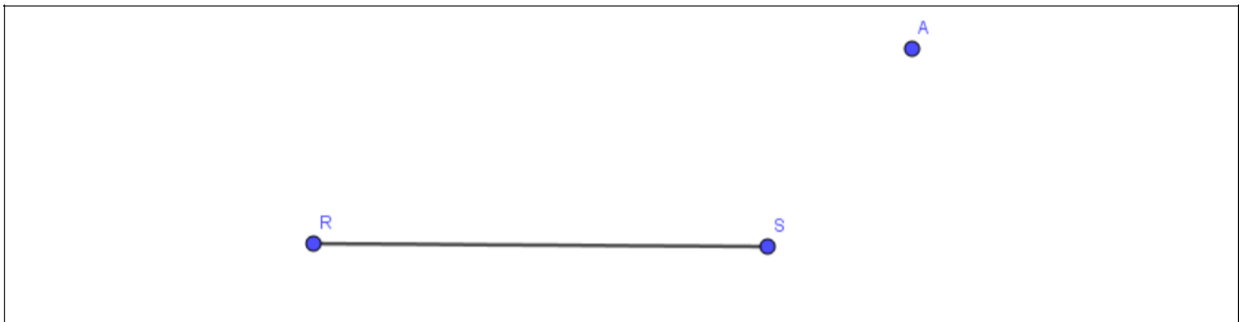
Cuarta parte

Escribe la respuesta a cada ítem.

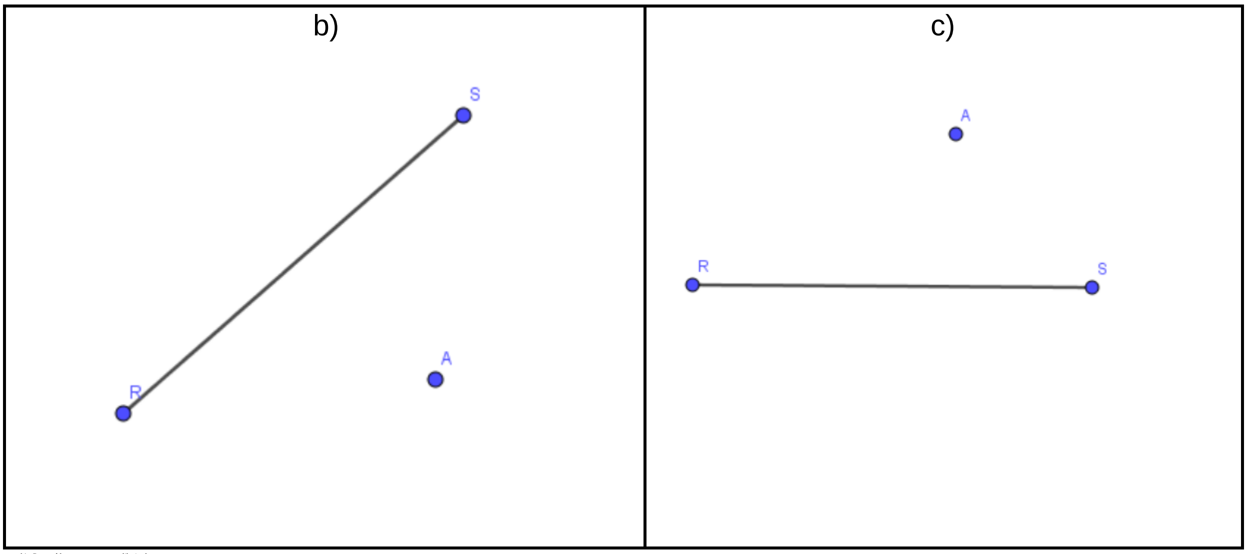
1. Otra clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos son los triángulos rectángulos. Defina ese tipo de triángulo.
2. ¿Pueden los triángulos isósceles ser acutángulos?
3. ¿Pueden los triángulos isósceles ser obtusángulos?
4. ¿Pueden los triángulos isósceles ser rectángulos?
5. Cuando el triángulo es obtusángulo, responda:
   a) ¿Puede tener un ángulo agudo?
   b) ¿Puede tener dos ángulos agudos?
   c) ¿Puede tener un ángulo recto?

ANEXO 4: Tarea 3
DEFINICIÓN DE ALTURA DE UN TRIÁNGULO.

1. a) En cada ítem a continuación, se tiene un (segmento) y un puntoque no pertenece a la(recta). En cada caso, construyan una recta , en la cual está el punto , que sea perpendicular a la(recta RS) Nombre con al punto de intersección de las dos rectas.



a)

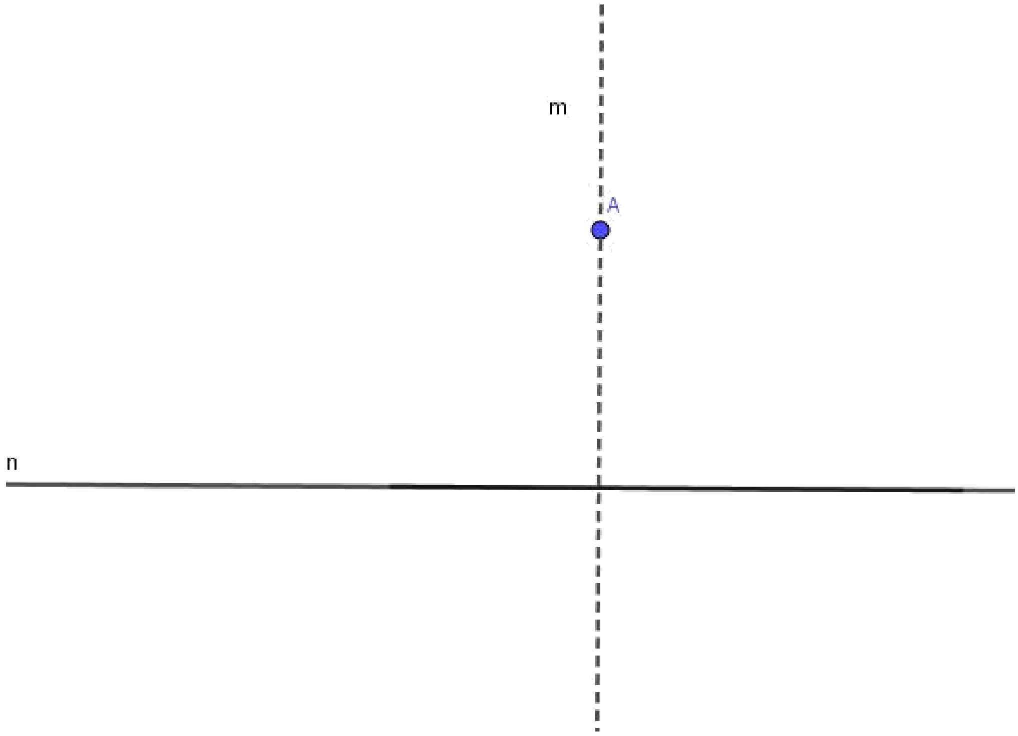


b) ¿Por qué lo que usaron para dibujar la recta

(segmento)?

c) En cada caso, ¿es la recta perpendicular al (segmento *RS*)?

2. a) En la siguiente representación, la rectaes perpendicular a la recta y contiene al punto ;es el punto de intersección de las dos rectas. Dibujen con color rojo el (segmento) y borren el resto de la recta .



b) Dibujen 4 triángulos diferentes, cada uno con un color distinto, utilizando como uno de los vértices al punto ; los otros dos vértices deben ser puntos que pertenecen a la recta . No olviden nombrar los vértices de cada triángulo.

c) Expliquen por qué cada figura que dibujaron es un triángulo.

d) ¿Qué hace que los triángulos sean distintos?

Abran el archivo de GeoGebra llamado Tarea 3.

≣

3. a) Con Geogebra, construyan el (segmento) perpendicular a la recta . Escriban

los pasos que siguieron.

Construyan un triángulo Δ con vértice en y dos vértices, y , en la recta .

b) ¿Cuáles de los elementos que están en la representación se pueden arrastrar? Explique su respuesta. ¿Qué cambia bajo el arrastre y qué no cambia?

NOTA: El ≣ (segmento) representado anteriormente es una **altura** del Δ (triángulo Δ).

c) ¿Cuántos triángulos tienen al ≣ como altura?

d) Si hay más de un triángulo, ¿en qué difieren los triángulos?

4. Abran el archivo Altura pasos. Escriban los pasos que siguen para que el segmento que ven en la pantalla sea altura del Δ (triángulo PQR) representado.

5. A) Observen las siguientes figuras.

EJEMPLOS DE ALTURA

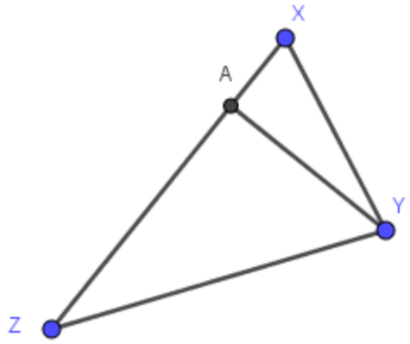


figura 1

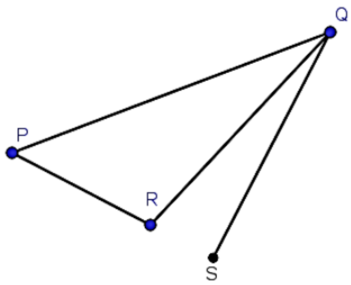


figura 2

(Segmento QS) es altura del Δ (Triángulo PQR)

El (segmento AY) es altura del Δ (Triángulo XYZ)

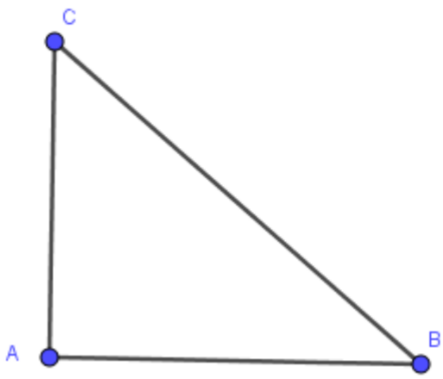


figura 3

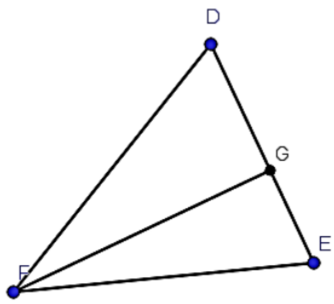


figura 4

≡

(segmento FG) es altura del Δ (triángulo DEF)

≡

El (Segmento AC) es altura del Δ (Triángulo ABC)

b) Escriban las propiedades que caracterizan y comparten todas las alturas de los triángulos.

____

____

____

c) Observen las siguientes figuras.

NO EJEMPLOS DE ALTURA

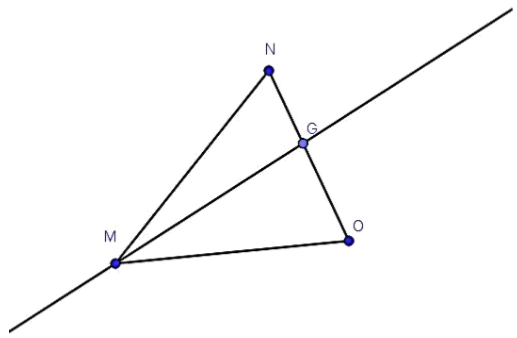


imagen 1

La $\leftrightarrow$ (recta) no es altura del ΔMNO
(triángulo)

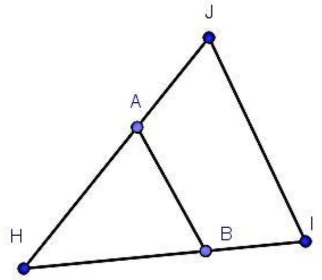


imagen 2

El (segmento) no es altura del
ΔHIJ (triángulo)

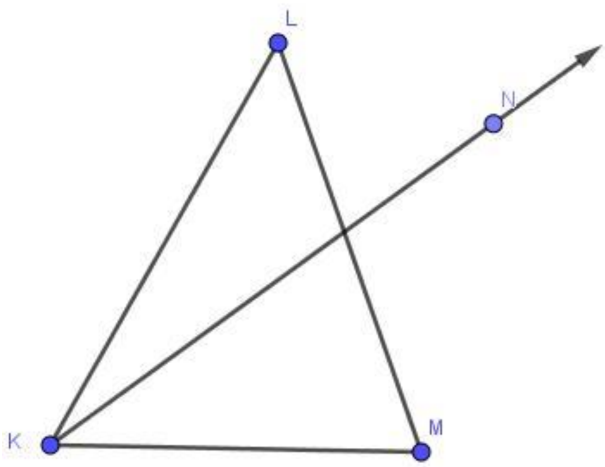


imagen 3

El (rayo) no es altura del ΔKLM (triángulo)

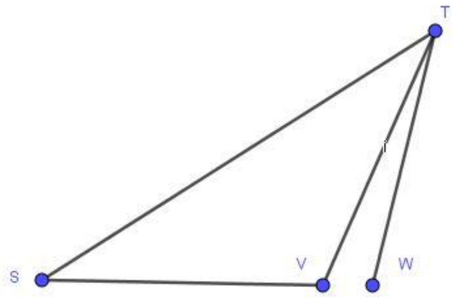


imagen 4

El (segmento) no es altura del ΔSVT (triángulo)

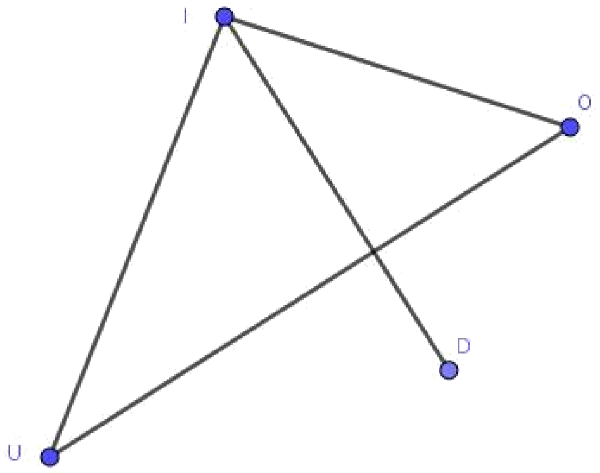


imagen 5

El rayo no es altura del ΔUIO (triángulo)

d) Para cada objeto geométrico que no es altura de un triángulo, expliquen por qué no lo es.

__1.____

_2.____

3.____4.

____

_______5. ____

e) Revisen las propiedades de altura de triángulo que escribieron en el ítem b. Teniendo en cuenta lo que escribieron en el ítem d, decidan si hay que quitar o añadir más propiedades en el ítem b.

____

____

____

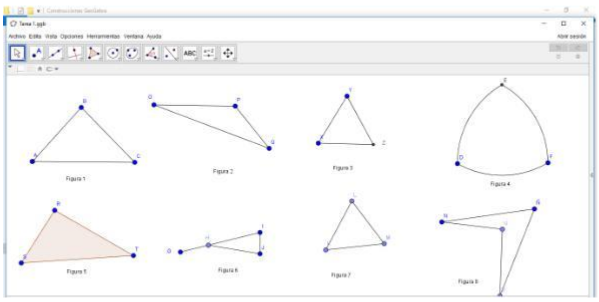
6. Abrir el archivo de GeoGebra llamado Punto 8 Tarea 3.

a) Construyan la altura del Δ desde el vértice . ¿Se pueden construir también alturas desde los otros dos vértices? Expliquen su respuesta

b) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo cualquiera? Explique su respuesta.

ANEXO 5: Transcripciones grupo A

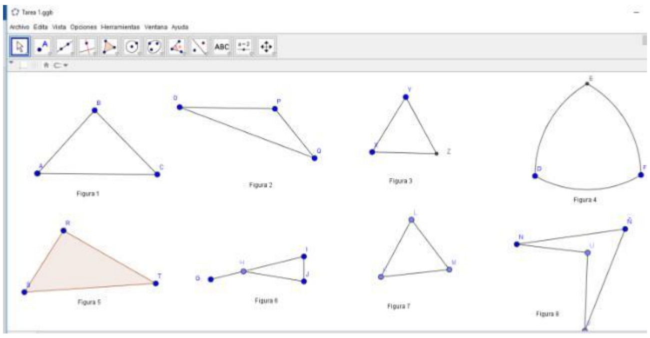
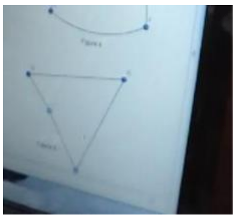
Tarea 1

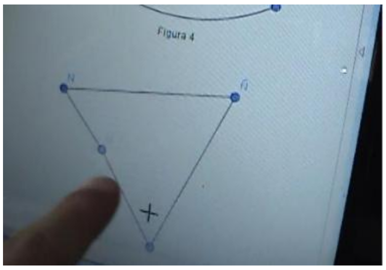
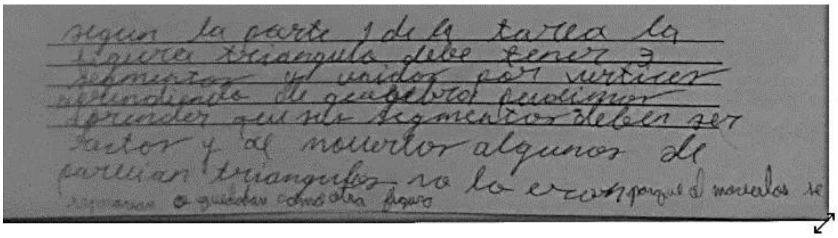
1.	Pa	Ustedes dicen que la 1, la 2 y la 5, de ese archivo [Archivo de GeoGebra que muestra ejemplos y no ejemplos de triángulos] (…) no son triángulos porque, ustedes escribieron acá, que al moverlos [con arrastre] (…) quedaban como un segmento. 
2.	J y T	¡Ajá!
3.	Pa	¿Se acuerdan? Entonces mi pregunta es: ¿qué quiere decir eso (…) con segmento?, ¿a qué se refieren con segmento? Muéstrenme ahí en los triángulos. Recuerden que es el 1, 2 y 5… ¿Qué quieren decir con lo de segmento?
	J	[J arrastra las figuras hasta que los tres puntos sean colineales] Así (…)

		
4.	Pa	¿Para ustedes que significa “volverse un segmento”?
5.	J	Que se vuelve una línea terminada (…) comenzada en un punto y terminada en un punto.
6.	Pa	En su definición final… ¿Se acuerdan de la definición final?
7.	J	Mmm… [Señala y observa la hoja de la Tarea 1 donde se encuentra escrita la definición]
8.	Pa	Ustedes ahí no dicen nada de que se vuelva un segmento; es decir, si ustedes leen la definición, ahí no aparece lo de segmento. Léela T, por fa.
9.	T	[Lee] Según la parte 1 de la tarea, la figura triángulo debe tener 3 segmentos y unidos por vértices. Aprendiendo de GeoGebra, pudimos aprender que sus segmentos deben ser rectos y al moverlos algunos que
10.	Pa	¿En alguna parte [de su definición] dice que eso no se puede volver segmento? [mientras tanto los estudiantes releen la definición]… ¿No? Entonces, ¿es necesario incluir eso en la definición de triángulo? ¿Qué creen?
11.	T	Sí.
12.	Pa	¿Sí? ¿Cómo lo incluirían?

13.	J	Profe, pero o sea…nosotros pusimos o sea no segmentos pero si pusimos mmm…como…ehh… [lee parte de la definición escrita en la tarea] parecían triángulos. No lo eran porque al moverlos se separaban o quedaban como otra figura.
14.	Pa	…como otra figura y ¿ser segmento es otra figura? O sea, ¿tú crees que ahí va involucrado lo de ser segmento?
15.	J	Ajá.
16.	Pa	Entonces, ahora (…) ¿se acuerdan de la figura sombreada que fue la Figura 5? Acá me dijeron que si era [señalando el papel] y allá no [señala la pantalla de GeoGebra]. ¿Por qué?
17.	J	Porque acá [señalando al papel] sí se veía como un triángulo y allá [en la pantalla], al moverlo se convertía en un segmento.
18.	Pa	Vamos a ver ahora la misma figura y me van a decir si todavía sigue siendo un triángulo o no. [Abre archivo en GeoGebra, donde se visualiza una región triangular sombreada.]
19.	J	¿La podemos mover?
20.	Pa	Claro… Entonces, ¿es o no es un triángulo?
21.	T	Sí.
22.	J	Porque al moverlo no cambia de ser un triángulo a otra cosa y permanece siendo triángulo aunque lo movamos.
23.	Pa	¿Y esa parte sombreada? [región poligonal]
24.	J	Mmm(…)eso(…)
25.	T	Que es lo que sí importaba que hubiera algo, sin importar que este coloreado o tuviera una figura adentro (…)
26.	Pa	Ehh(…) Entonces eso también de la parte sombreada, que ustedes me dicen, ¿ lo involucraron en la definición final? (…)
27	J y T	(…)(…)[leen nuevamente la definición que escribieron en la guía]

28.	Pa	¿No?(…) ¿Entonces vale la pena involucrar eso o no?
29.	J	Sí.
30.	Pa	¿Cómo lo escribirían? (…) ¿Cómo lo dirían?
31.	J	Que seguiría siendo un triángulo, aunque tenga sombreado o coloreado por dentro.
32.	Pa	Vale. Ustedes escriben: es una figura que debe tener tres segmentos unidos por vértices, que sus segmentos deben ser rectos y al moverlos algunos parecían triángulos (…), Ustedes creen que, si otro compañero lee eso, ¿le entenderían qué es un triángulo? Por ejemplo, cuando ustedes dicen: “al moverlo”, cuándo tú le muestras eso a alguien, ¿cómo así al moverlo? ¿Será que lo entiende?
33.	J	Mm (…) no, porque eso es en el computador.
34.	Pa:	Entonces la definición que ustedes dieron fue a partir
35.	J	[completa la frase de la Pa] del computador.
36.	Pa:	Y, ¿entonces? ¿Cómo cambiaría ese “moverlos” por otra palabra?
37.	J	Mm (…) (…) ¿deformarlos?
38.	Pa:	¿Deformarlos? ¿Y tú? [dirigiéndose a T] ¿Qué palabra utilizarías?
39.	T	(…)(…)
40.	J	Como cambiar su apariencia (…)
41.	Pa:	Bueno. Les voy a mostrar esta definición, que fue hecha por unos compañeritos suyos [lee hoja de respuestas de otra pareja de estudiantes]. Dice: es una figura geométrica que tiene tres lados y tienen que ser rectos y no se vuelvan línea recta.
42.	J	¿Qué?
43.	Pa:	¿Otra vez? [lee nuevamente la definición]
44.	J	O sea, ¿qué no se vuelva un segmento?
45.	Pa	(hace gesto que indica no saber sobre la respuesta a la pregunta) Me imagino (…) Eh (…) ¿Ustedes qué opinan? ¿Está bien definido [triángulo]? ¿Le falta o le sobra algo?
46.	T	Creo (…) que no tengan ninguna figura por dentro.
47.	J	Y como explicarse mejor en la última parte, porque casi no se le entiende.
48.	Pa	¿Cómo lo dirías tú?

49.	J	Eh (…) que no se vuelvan (…) eh (…) un segmento
50.	Pa	Entonces le mejorarían esa última parte
51.	J	¡Aja!
52.	Pa	Listo. Vamos a ir a este archivo [Archivo de GeoGebra que muestra ejemplos y no ejemplos de triángulos] y van a mirar la Figura 8. ¿Si la ven? En la Figura 8, ustedes dicen que esa figura no es triángulo, ¿cierto? Si yo hago esto [intenta arrastrar el punto U, pero es interrumpida por J] 
53.	J	[interrumpe acción de la Pa] Sí. Si la mueves, sí queda.
54.	Pa	¡Ah! ¿Cómo?
55.	J	[utiliza el cursor y arrastra el vértice , quedan los puntoscolineales] Así. 
56.	Pa	Ahí [señalando figura 8 transformada en la pantalla de GeoGebra], ¿es un triángulo?
57.	T y J	Ahí, sí.
58.	Pa	¿Ahí, si? ¿Tú qué crees? [preguntando a T] ¿También crees qué es un triángulo? Mira cuantos puntos tiene.
59.	J	¡Ay no! No es un triángulo.
60.	Pa	¿Por qué?

61.	J	Porque tiene más de tres vértices.
62.	Pa:	¿En serio? ¿Qué es un vértice?
63.	J	mm…Es lo que une dos segmentos.
64.	Pa:	Y ahí [señalando el punto], ¿une dos segmentos?
65.	J	mm…si. Este y este [señala con el dedo, sobre la pantalla, el segmentoy el segmento] 
66.	Pa:	O sea, esos son dos segmentos. Si yo llego a poner otro punto acá [señala con el dedo el segmento Ñ], ¿está uniendo otros dos segmentos? 
67.	T y J	[al unísono] Sí.
68.	Pa:	Pero, según su definición, si sería triángulo. Porque dice
69.	J	[lee definición escrita en la hoja de respuestas] la figura triángulo debe tener tres segmentos unidos por vértices, aprendiendo de GeoGebra pudimos aprender que sus segmentos deben ser rectos y al moverlos algunos de ellos se separan o quedan como otra figura. 
70.	Pa:	¿Entonces? Según la definición, ¿sí es o no es [la figura 8 un triángulo]?

71.	Jmm…	nos faltaría como (…) tres vértices, pero pusimos vértices y ya.

1.	G[T le	dicta la medida del ánguloa G] esperáte [se dirige a T], mientras termine de copiar, intenta que este [ángulo] de menos de 90 [grados]

Tarea 2

Transcripción tarea 2 T y G

Los dos estudiantes desarrollan parte 3 de la Tarea 2, realizan exploraciones (arrastrando vértices) y mediciones

2.	Pa	¿Para qué?
3.	G	Para ver si eh (…) pues (…) puede dar menos de (…) eh (…) ¿cómo se dice? Eh (…) de 90 o 100
4.	T	Este, el del medio, por el momento no lo he hecho, pero, pero el y el [ángulo y ángulo] si pueden ser menores de 90
5.	Pa	¿Cómo se le llaman a esos ángulos menores a 90?
6.	G	(…) acutángulo
7.	Pa	Ah, muy bien.
8.	T y G	[continúan midiendo y registrando las medidas en la hoja de respuestas]
9.	G	Esta rarito porque da muy poquito [la medida es 0.97 grados]
10.	Pa	Y el otro [ángulo DGC] da 0.84
11.	G	¿O sea que tenemos que hacer un triángulo acutángulo? [en voz baja] ah no, no, no.
12.	T	Espérate, que estoy moviendo este
13.	Pa	Pues dime tú [refiriéndose a G] ¿Ese [triángulo GCD] es un triángulo acutángulo?
14.	T y G	[arrastran vértices del triángulo]
15.	G	Sigue intentándolo deformar [dirigiéndose a T mientras arrastra vértices de triángulo] para ver que, de menos de 90, a ver si se puede (…) 90, 95, 88, ¡88! ¡Es un acutángulo!
16.	T	88 es lo máximo
17.	G	No, no es acutángulo porque puede pasar
18.	Pa	¿No es acutángulo por que qué? ¿por qué puede pasar?
19.	G	Si se puede pasar por que mira, T mueve este acá, si ves, (…) nunca tiene una medida que sea (…) o sea sería el(…) ángulo CGD es un triángulo que (…) eh (…) en sus ángulos nunca van a dar (…)
20.	T	[interrumpe] el triángulo CGD
21.	G	Nunca van a dar lo mismo los dos ángulos. Bueno, algo así.

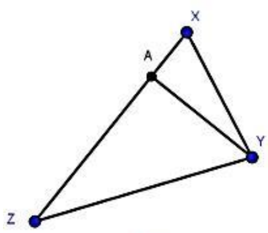
22.	T y G	[continúan arrastrando y observando la medida de los ángulos de los triángulos representados con GeoGebra]
23.	G	Mira a ver si puede dar 90 exactos, porque esa es la guía para ver si el ángulo puede ser (…) (…) no, se pasa mucho (…) (…) ya casi (…) [Mientras arrastran vértices para observar la medida del ángulo] Ok, ya descubrimos que no puede dar 90 exactos.
24.	T	Espérate (…) ¡noventa!
25.	G	Solo puede llegar hasta noventa. Y no lo deformes más porque no va a funcionar. ¡Ya supimos! Bueno, misterio resuelto. Eh (…) no puede dar más pero si baja de 90 grados
26.	T	¡ajá! Y cuando muevo otros [vértices]
27.	G	Pues (…) pueden [vértices] subirse hasta (…)
28.	T	¡ajá! ¿Cuál sigue?
29.	G	Sigue el [triángulo]
30.	T y G	[miden ángulos del triánguloy los registran en hoja de respuestas]
31.	Pa	Bueno en el triángulo, ¿qué propiedad encontraron?
32.	G	Eh (…) en el, dos ángulos (…) menores de 90 y el otro no puede bajar de 90
33.	Pa	Cuándo un ángulo es menor a 90, ¿cómo se llama?
34.	T	90, 3
35.	G	Lo mismo en este [triángulo] pasa lo mismo (…) pero la cosa es que no sabemos muy bien sobre ángulo obtu (…) sángulo…
36.	Pa	¡Ajá! Que eso es lo que tienen que encontrar (…) Bueno, cuando ustedes dicen que no puede dar más de 90, ¿Qué quieren decir con eso? ¿Para qué creen que les serviría los triángulos acutángulos que encontraron? ¿Qué son los triángulos acutángulos?
37.	G	Pues que no pueden dar más de 90, pero (…) es que solo hemos encontrado un obtusángulo [Triángulo] que es isósceles y si lo deformamos no da más de 90
38	Pa	¿qué propiedad encontraron el triángulo?
39.	G	Lo que dijimos… un ángulo no puede pasar de 90 (…) dos no pueden pasar de 90 y uno no puede bajar de 90 [lo escribe en la hoja de respuestas]

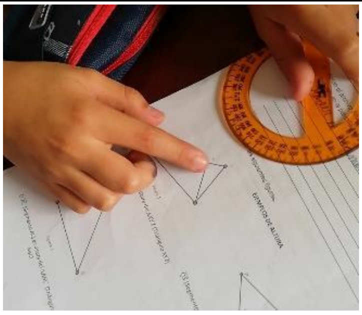
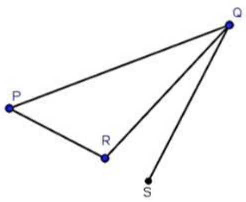
40.	Pa	O sea que Cuándo no pasan de 90, ¿cómo es que se llaman?
41.	G	¿Qué no baja o pasa?
42.	Pa	Bueno, que no (…) bajan de 90 (…) ¿Qué es bajar de 90?
43.	G	Mm que la medida no puede (…) ser menor de 90
44.	Pa	¿cómo se llaman esos ángulos que pueden ser menores a 90?
45.	G	¡Acutángulos!
46.	Pa	Entonces, en lugar de escribir: “que bajan” , escriban que son acutángulos. (…) yo pregunto algo: al otro lado están los no obtusángulo…
47.	T	Si, eso es lo que estaba viendo
48.	Pa	Se necesitan para poder definir en el siguiente punto que dice: Escriba la definición de triángulo obtusángulo. ¿Será que necesitamos los no obtusángulos? O ¿ya con esto saben que es un obtusángulo?
49.	G	Mm no sé qué es un obtusángulo, porque puede llegar a 90, pasar de 90 (…) y (…) me confundí…
50.	Pa	Entonces miremos los no obtusángulos a ver qué pasa
51.	G	[Observa no ejemplos de obtusángulos en GeoGebra] Ah ya entendí, tenemos que hallar la diferencia y esa diferencia es lo que define los obtusángulos
52.	Pa	Si señor.
53.	G	Ok. Está fácil.
54.	T	Otro [ángulo de triángulo] de 90
55.	G	Ya entendí. Eh (…) un triángulo rectángulo no puede ser un triángulo obtusángulo.
56.	Pa	Bien. Escribe eso (…) (…) Entonces, ¿Siempre se necesitan de los no ejemplos?
57.	T	mm..si
58.	G	Si
59.	Pa	¿Para poder definir?
60.	G	Si
61.	G	[Mientras escribe en la hoja de respuestas] ah ya entendí…

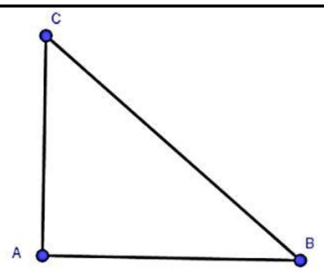
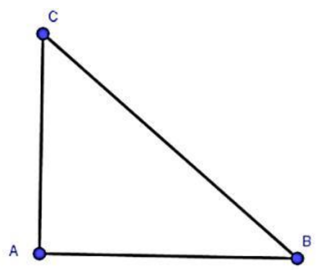
62.	Pa	¿qué encontraste?
63.	G	Que los acutángulos no pueden ser obtusángulos porque los obtusángulos siempre tiene que dar uno de 90 o que pase a 100, ok ¿lo escribo?
64.	Pa	Si, pero mira [señala hoja de respuestas] aquí dicen que escriban la definición de triangulo obtusángulo ¿crees que ya puedes escribirla?
65.	G	[Gesto y sonido de sorpresa]
66.	Pa	¿qué encontraron?
67.	G	Ay ya, que un triángulo obtusángulo no puede ser equilátero
68.	Pa	Si, muy bien. Ahora, ¿Cómo escribirían qué es un triángulo obtusángulo?
69.	G	(…)(…) un triángulo obtusángulo es el que tiene uno mayor a 90 o que llega a 90
70.	Pa	¿Un qué?
71.	G	Un ángulo que sea mayor a 90 y el resto [ángulos] sean acutángulos.

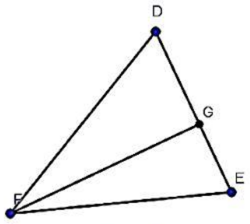
Tarea 3

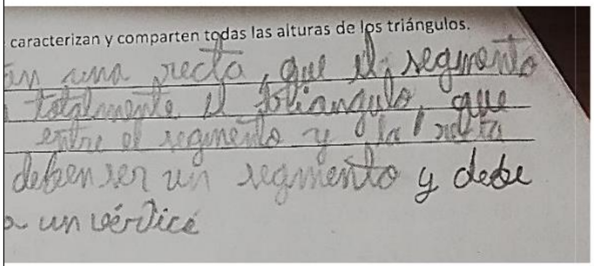
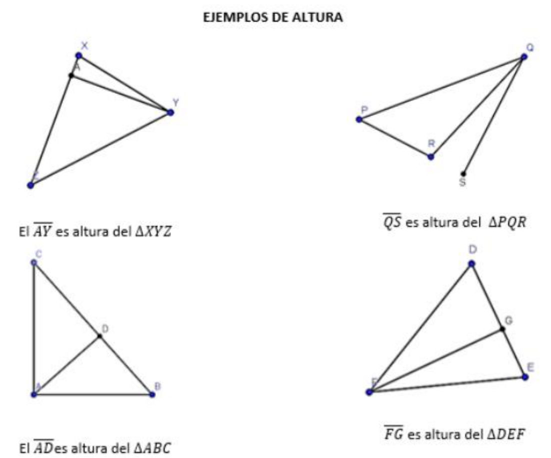
Transcripción Tarea 3.

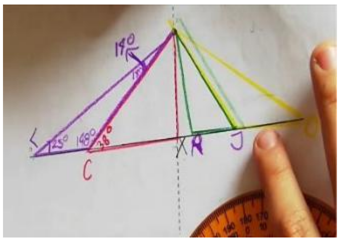
1	G	[observando ejemplos de altura] ¡Sí! Es una intersección de una recta (...) ¿No? (…)
2.	J	¿Si mide 90 grados? Espera [utiliza el transportador para medir el ∠ (Figura 1)]  figura 1
3.	P	¿Qué vas a medir?
4.	J	Este de acá [Señala punto A (imagen 1)]. A ver si sí mide 90 grados.

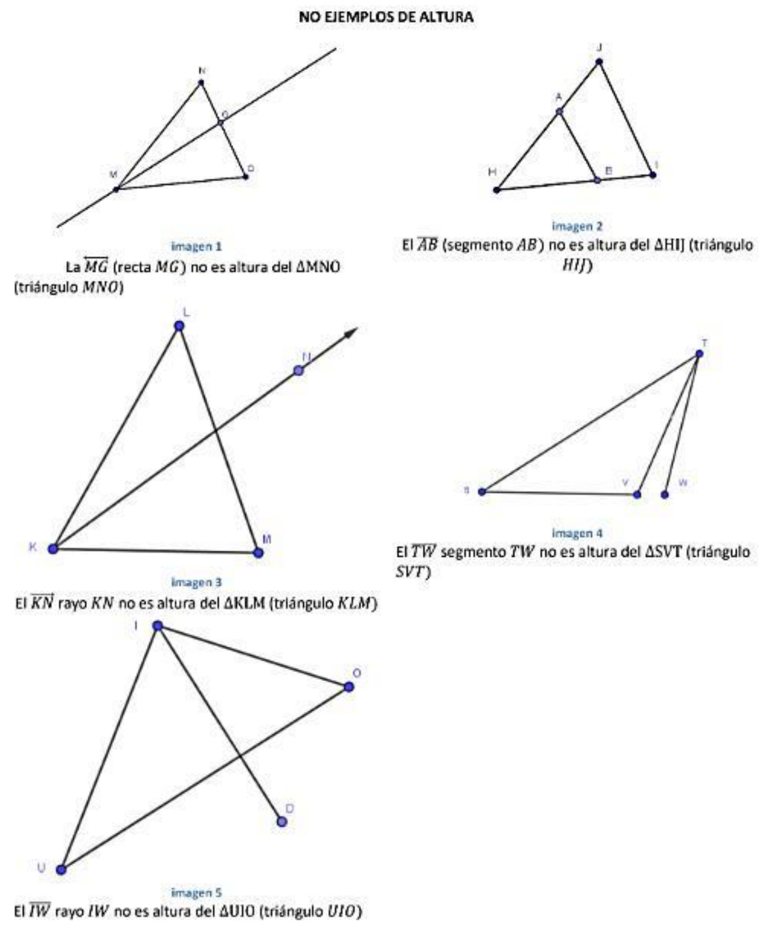
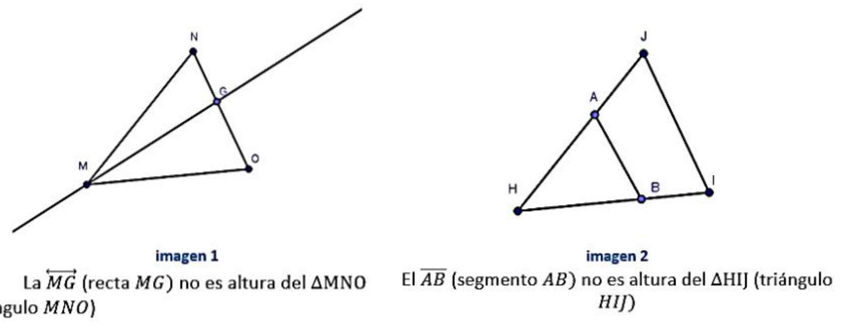
		
5.	G	Si da 90 [grados] (...) A mi sí me da 90[grados]. (…)
6.	P	Entonces, si es altura, ¿qué otra [figura] es altura?
7.	J	Esta [Señala la Figura 2], a ver si es segmento (…) [G lo interrumpe y empieza a medir con el trasportador. Mientras tanto, J continúa leyendo la descripción de la imagen, descripción que se muestra en la parte inferior de la Figura 2].  figura 2 $\overline{QS}$ (Segmento QS) es altura del ΔPQR (Triángulo PQR)
8.	P	Ahí [señalando la Figura 2], ¿cuál es la altura?
9.	J	El triángulo…mm el segmento que está dentro del triangulo
10.	P	¿Dentro del triángulo?
11.	J	No. ¡Ah! Este. [señala al y luego mide el ∠]
12.	G	Da 90 [grados]
13.	P	¿Qué otra es altura?
14.	J	Este [Señala el segmento Figura 3] (…) ¿No? ¿What?

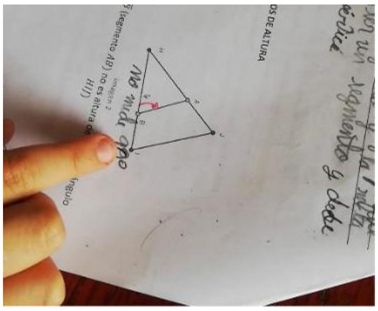
		 figura 3 El $\overline{AC}$ (Segmento AC) es altura del ΔABC (Triángulo ABC)
15.	Pa	¿Qué ocurre con la altura?
16.	J	No está.
17	P	Pero ahí están diciendo que la altura [interrumpe G y afirma que en la leyenda de la Figura 3 se dice] (…) ¿Cuál es la altura?
18.		[J y G miden con el trasportador y obtienen 90° como medida de dicho ángulo]
19.	P	¿Qué pasa ahí con la altura? (…) ¿Qué se hizo?
20.	G	Que ya no es una línea intervenida (…) en la recta.
21	J	Intersecada(…) [corrigiendo a G]
22.	G	Intersecada en el triángulo.
23.	J	[Después de medir el ∠ con el trasportador] Si da 90 grados. (…) O sea que ya no es una línea que interrumpe el triángulo (…)
24.	G	Ya no es un segmento [corrige a J]
25.	P	¿Ya no es un segmento? Entonces, ¿esto qué es? [señala segmento AC]  figura 3 El $\overline{AC}$ (Segmento AC) es altura del ΔABC (Triángulo ABC)
26.	J	Es un segmento (…) o sea, es como si la altura hiciera parte del triángulo.

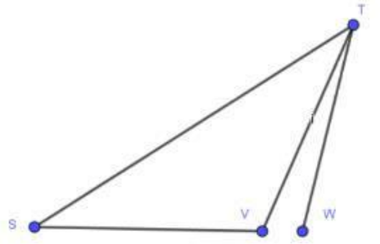
27.	P	¡Ah! muy bien (…) y ¿qué pasa acá? [señala Figura 4] ¿Cuál es la altura ahí?  figura 4 $\overline{FG}$ (segmento FG) es altura del ΔDEF (triángulo DEF)
28.	G	Es[lee la leyenda de la Figura 4 y luego mide con el transportador]. Da (…) 90° 
29.	P	O sea, ¿qué si es?
30.	J y J	¡Si¡[al unísono]
31.	P	¿Todas esas [Figura 1, 2, ¿3 y 4] son alturas? (…)
32.	G	¡Si!
33.	P	Ahora, [lee ítem b, numeral 5] b) Escriban las propiedades que caracterizan y comparten todas las alturas de los triángulos.
34.	J y J	[Escriben la respuesta del ítem b]

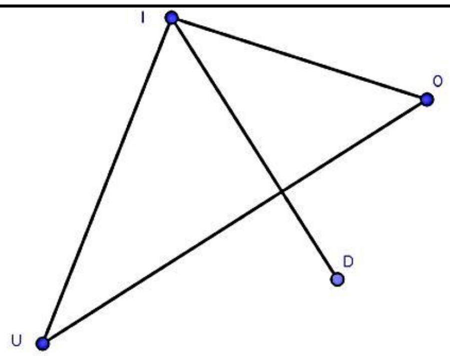
		 “que no necesitan una recta, que el segmento no interseca totalmente el triángulo, que la intersección entre el segmento y la recta mide 90°, todos deben ser un segmento y debe estar conectado a un vértice”
35.	P	Dime una propiedad de las que viste acá [señala ejemplos de altura, numeral 5a, ver imagen] 

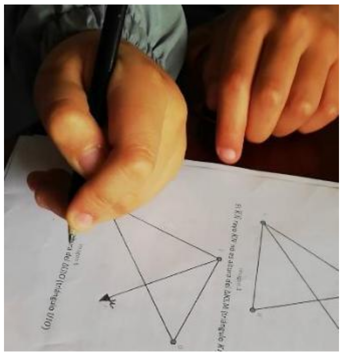
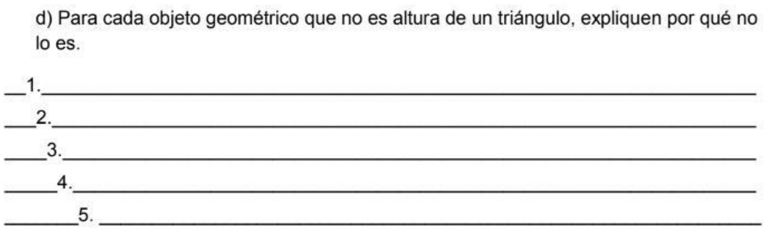
36.	G	Mm de que tiene que tener un ángulo de 90 grados.
37	P	¿Qué es una altura?(…) ¿Una recta?, ¿Un ángulo?, ¿Un triángulo?(…)¿Un segmento?
38.	Jy j	[al unísono] Un segmento.
39.	G	Un segmento, sí, porque la recta es infinita.
40.	J	Y la recta acá escribimos que no se podía, que no era necesaria, porque en el computador tú nos mostraste la vez pasada.
41.	G	La vez pasada nosotros habíamos hecho esto [señala numeral 2, ítem a, ver Imagen] 
42.	P	¿Qué otra propiedad debe tener la altura? Primero tiene que ser segmento,(…)
43.	G	[interrumpiendo a la profesora] Primero tiene que tener 90 grados [la medida del ángulo determinado por el segmento y el lado opuesto del vértice del triángulo que es extremo dedicho segmento]
44.	P	Que se interseque a un lado del triángulo y forme 90 grados (…)¿Qué otra?(…) Miren todas las alturas que hay acá [señala ejemplos de altura, numeral 5a]
45.	J	Que siempre este pegada, pues sí, que haga parte del triángulo.
46.	P	¿Qué quiere decir “que haga parte del triángulo”?
47.	J	O sea que esté (…)
48.	G	Que esté conectada con un vértice del triángulo
49.	P	Muy bien (…) ¿eso está acá escrito? [señala ítem b, numeral 5]
50.	J	Mm No [lo escriben]
51.	P	Siguiente punto (…) Observe las siguientes figuras. ¿Qué son esas figuras? [numeral 5, ítem c, ver imagen]

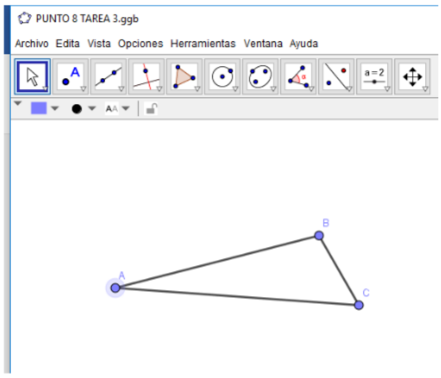
		
52.	J	Que no son altura (…) Esta no mide 90° [señala Imagen 1, mientras mide con transportador]. Esta tampoco [señala Imagen 2] 
53.	P	¿Por qué sabes?
54	J	¡Ah! Esta sí [señala Imagen 1]
55	G	[lee leyenda de Imagen 1 mientras mide el ángulo]

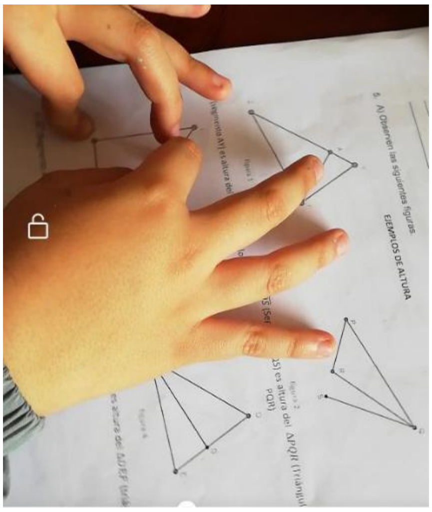
		
56.	p	¿Por qué no será altura?
57.	J	Por qué no mide 90°.
58.	p	Mm. ¿Seguro?
59.	G	No. Si da. Mira. (…) Pero, no está conectada con un vértice del triángulo.
60.	J	Está conectado con dos [Señala el punto y el punto , G intersección en]
61.	G	¡Ah! Sí.
62.	P	¿Qué será lo que hace que no sea altura?
63.	G	¡Que tiene recta!
64.	P	Ah, que es una recta. (…)¿Acá? [señala Imagen 2]
	J	No mide 90°. [señala Imagen 2] Ese sí ya la habíamos hecho. 
65.	P	Listo y ¿este? [señalando Imagen 3]
66.	J	¿What? ¿Este punto [punto del rayo] qué hace por acá?
67.	G	Igualmente es una recta; así que no (…) ¡Ah! Es un rayo.
68.	P	¿Entonces? (…)

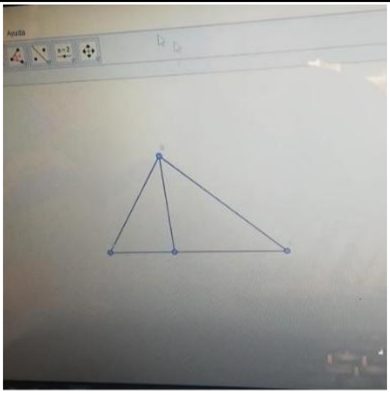
69.	G	El rayo también es infinito, ¿no?
70.	J	Entonces tampoco es altura con un rayo.
71.	P	¿Esta? [señala la Imagen 4 para que los niños lean].  imagen 4 El $\overline{TW}$ segmento TW no es altura del ΔSVT (triángulo SVT)
72.	J	Esa [∠] sí no mide 90°.
73.	P	¿Será?
74.	G	[Mide con el transportador el ∠TWS] Sí da 90° (…) mm
75.	J y J	[Luego de ubicar correctamente le trasportador] No, no mide 90° [vuelve a medir, J].
76.	P	Pero (…) es un segmento pero no mide 90° (…) Bueno [murmura G].
77.	G	[en voz baja] No cumple con todas (…)
78.	P	¿Qué pasa si solamente cumple con una [propiedad]? Por ejemplo, acá [señala Imagen 4] es segmento y esta “conectado”, como ustedes dicen (…)
79.	J	[interrumpe a profesora] Tiene que cumplir con todas.
80.	G	O si no, no cumpliría con altura.
81.	J	O si no, no es una (…) altura.
82.	P	¿Y este? [Señala Imagen 5], ¿qué pasa con este [Imagen 5]?

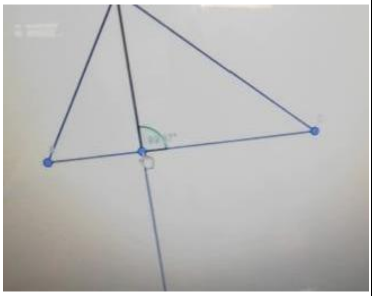
		 imagen 5 El $\overline{IW}$ rayo IW no es altura del ΔUIO (triángulo UIO)
83.	G	[mide el ángulo determinado por la intersección entre el rayoy el segmento]Da 90 grados (…) pero se sale del triángulo [señala punto] . 
84.	J	Pero está unido con un vértice [Señala punto I]
85.	Profesora	Mide 90 grados, está unido con un vértice (…) ¿Qué le faltará para ser altura?
86.	G	Mmm (…) mide 90 °, es un segmento (…) [recordando propiedades de altura de un triángulo]
87.	Profesora	¿Esto es un segmento? ¿Acá qué dice? [señala descripción imagen 5]

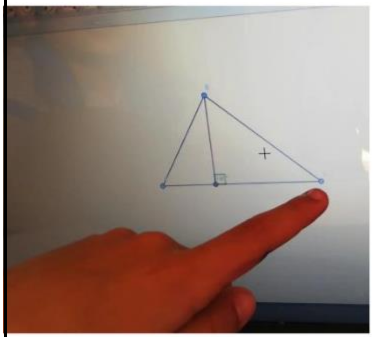
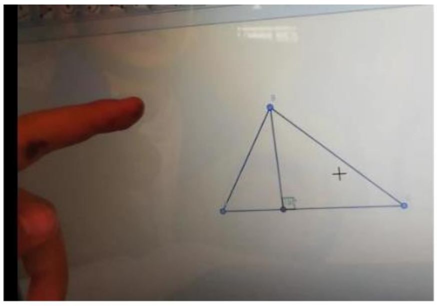
88.	G	¡Ah! Es un rayo. ¿Entonces por qué no tiene la liniecita? [dibuja flecha] 
89.	P	Listo, muy bien (…) Siguiente [muestra ítem d para que estudiantes lo lean]  d) Para cada objeto geométrico que no es altura de un triángulo, expliquen por qué no lo es. __1.________________________ ___2.________________________ ____3.________________________ _____4.________________________ _______5. ________________________
90.	G	[mientras J termina de leer] Porqueno mide 90 grados (...)
91.	J	¡Ah! (…) [señal de que no había comprendido la instrucción del ítem leído]
92.	P	Para cada uno. Entonces, para el primero, que es este, [señala Imagen 1], ¿por qué este no es altura?
93.	G	Porque tiene recta en vez de segmento.
94.	P	Listo. [señala hoja para que escriban la respuesta]
95.	J y J	[escriben en la hoja, sus respuestas]

		d) Para cada objeto geométrico que no es altura de un triángulo, expliquen por qué no lo es. 1. Porque encima de un segmento hay uno recto 2. Porque el angulo no mide 90° y no se une con 1 vertice del Δ 3. Porque es un rayo encima de un segmento 4. Porque no mide 90° el angulo 5. Porque es un rayo encima de un segmento
96.	J	[lee ítem e y relee las respuestas del ítem d] e) Revisen las propiedades de altura de triángulo que escribieron en el ítem b. Teniendo en cuenta lo que escribieron en el ítem d, decidan si hay que quitar o añadir más propiedades en el ítem b. ____ ____ _______________________________________
97.	J	No hace falta nada.
98.	G	Así que no hay [Escribe N/H en la hoja de respuesta, haciendo referencia a las palabras no hay, porque consideran que no hay que añadir o quitar propiedades]
99.	J	[lee numeral 6, ítem a, este incluye archivo de GeoGebra, ver imagen] 6. Abrir el archivo de GeoGebra llamado Punto 8 Tarea 3. a) Construyan la altura del ΔABC desde el vértice B. ¿Se pueden construir también alturas desde los otros dos vértices? Expliquen su respuesta 
100.	P	¿Cómo así? [pregunta para determinar si los estudiantes entendieron la instrucción]
101.	J	¡Ah! Que si podemos hacer como este [señala figura 3, numeral 5, ítem a, ver imagen], que si con este [Figura 3] podemos hacer una altura (…) con los

		mismos vértices. 
102.	G	¡No!, añadir dos vértices, dice añadir dos vértices (…) decía, ¿no? [releen el numeral 6 a]
103.	J	Añadir (…) dos vértices (…) Pero ¿solo añadiendo dos vértices?
104.	G	[interrumpe] ¡No! No porque no sería altura porque si añades dos vértices (…)
105.	P	¡Cuidado como están leyendo!
106.	J	A ver. [relee numeral 6 a]
107.	P	¿Por dónde van a construir la primera altura?
108.	G	Eh (…) pues (…) desde el vértice , o sea, necesitamos hacer otro vértice (…)
109.	J	¡Ah! ¿Qué si se puede hacer una altura desde estos dos?[señala en el archivo de GeoGebra los vértices del triángulo]
110.	P	¡Exacto! (…) Primero la van [altura] a construir desde el [vértice] (…) ¿Cómo van a construir una altura desde el vértice ?
111.	G	Necesitamos poner (…)
112.	J	Un segmento
113.	G	Sí, pero (…) no. Este, este [señala en la pantalla del computador, la herramienta segmento]
114.	J	[Construye segmento con extremos, uno en el vértice y el otro sobre el segmento]

		
115.	G	Que no quede tan chueco porque después deja de ser (…)
116.	P	¿Cómo saben qué es perpendicular? [Segmento construido]
117.	G	¿Perpendicular? ¡Ah sí, sí! (…) Te falta ponerle nombre. [señala el otro extremo del segmento]
118.	P	¿Eso [segmento] ya es altura?
119.	J	No, falta medirlo []
120.	G	[utiliza herramienta medida en GeoGebra para medir ángulo]
121.	J	Desde el [dar clic en el vértice],después el y luego .
122.	G	Ah (…)si (…) [observan medida en la pantalla]
123.	J	No, toca moverlo [punto lo desplazan sobre el segmentopara intentar que la medida obtenida sea igual a 90 grados]
124.	P	Está como muy difícil esa idea, ¿no?
125	J y J	Sí[al unísono]
126.	P	En GeoGebra hay una opción que se llama recta perpendicular.
127.	G	Ah, cierto, cierto. [se dirige con el apuntador hacia la barra de herramientas de GeoGebra y selecciona el comando recta perpendicular]
128.	P	Por (…) [indica que la recta debe pasar por el vértice]
129.	G	[traza la recta perpendicular sobre el segmento]

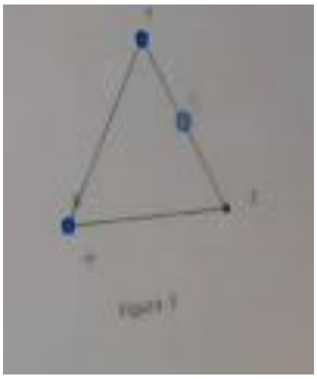
		
130.	P	[explica cómo construir un nuevo segmento sobre la recta perpendicular construida para luego ocultar la recta con el fin de que el nuevo segmento sea perpendicular]
131.	J y J	[borran la anterior construcción y la realizan nuevamente sin instrucción de la profesora, construyen recta perpendicular por el vértice al segmento, no ocultan la recta]
132.	P	Falta algo, porque la altura no es una recta.
133.	J	¡Borrar! [apuntador sobre recta perpendicular, clic derecho y escoge la opción borrar]
134.	G	[se desaparece la recta] Se nos olvidó poner el segmento [risas].
135.	J	[utiliza el comando CTRL + Z]
136.	P	¿Qué pasó?
137.	J	No sé, pero (…) ¡Ah! (…) [construye segmento con extremos enen la intersección entre recta perpendicular y ladodel triángulo. Luego oculta recta] ¡Ya, lo logramos!
138.	G	¡Ah! ¡No! Pero ahora (…) después de hacer todo eso, tenemos que ahora (…)
139.	P	¡Ah! ¿Ahora qué? [retomando la idea de G] Ya construyeron una. ¿Qué toca hacer más?

140.	J	Después de hacer todo eso para solo una, nos tocará hacer eso [procedimiento de construcción de altura] (…) ¡Ah! Podemos hacerlo desde aquí [señala vértice] hacia allá [realiza trayectoria con el dedo desde el vértice hacia el segmento o lado opuesto al vértice]  
141.	J	[Construye recta perpendicular que pasa por el vértice y el segmento, luego mide el ángulo determinado por la intersección de la recta perpendicular y el segmento. Luego, oculta recta]
142.	G	[realiza el procedimiento para construir la altura desde el vértice]
143.	P	[luego de construir las tres alturas del triángulo ABC] ¿Se pueden construir [las alturas del triángulo]?
144.	J	Sí porque (…) se puede hacer más de un (…) segmento que mida 90 grados.
145.	P	¿Segmento? (…)
146	J y G	alturas
147.	P	[Mientras escriben en la hoja guía, la respuesta al numeral 6 ítem a] ¿Por qué no se pueden hacer cuatro?
148.	J	Porque solo hay tres vértices iniciales.
149.	G	Porque sino tocaría hacerlo con un cuadrado [risas]
150.	P	¿Iniciales?, ¿Qué es eso de vértices iniciales?
151.	J	O sea, con las que se inicia
152.	J y G	[leen numeral 6, ítem b] b) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo cualquiera? Explique su respuesta.
153.	J	Porque sólo tiene tres vértices.

ANEXO 6: Transcripciones grupo B
Tarea 1

Transcripción de la entrevista realizada con las estudiantes M e I.

1.	Profesor (P):	Buenos días, nos encontramos con las estudiantes Mariana e Isa del Colegio Internacional Camino a la Cima y son estudiantes del grado cuarto.
		Niñas, cuando ustedes realizaron la actividad en la parte de GeoGebra, quedaron descartadas las figuras 2, 5 y 7. Del conjunto de las figuras que sí eran triángulos, verdad La razón que ustedes dieron fue: [se les muestra en la parte que escribieron eso]… “Al arrastrar sobre la misma línea que es un segmento” Yo quiero saber en qué parte de su definición dice que eso no puede suceder.
		Recuerdan la pregunta y [...].
		¿O más bien, en alguna parte de la definición dice que eso no puede suceder?
2.	María (M):	Porque cuando arrastramos [Isa toma el ratón del computador y arrastra la figura 2] este punto (imagen 1) [Señala el punto R] a la misma línea, se formaba un segmento.  *imagen 6*
3.	P:	Ok. ¿Y díganme, en dónde dice en su definición que eso no puede suceder? ¿Lo dice o no lo dice?
		Eso que me dijiste dice acá o no lo dice [Señala la definición de las estudiantes].

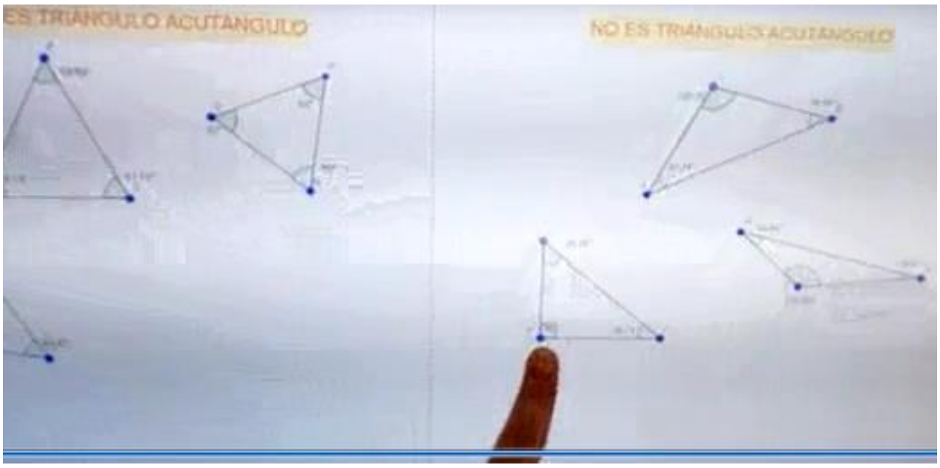
		Es decir, eso que tú me estás diciendo lo tuviste en cuenta.
4.	Estudiantes:	Ehhhhhhh no.
5.	P:	¿Por qué?
6.	Isabel (I):	Por qué después cuando tú lo mueves ya no es un triángulo y ahora es un segmento.
7.	P:	Es decir que, ¿pueda que en algunas ocasiones sea triángulo y en otras no?
8.	Estudiantes:	Eh sí.
9.	P:	¿Y por eso no lo incluyeron en su definición?
10.	Estudiantes:	Siii, no lo pusimos.
11.	M:	Es porque sabíamos que tú nos habías preguntado ¿qué si al arrastrar que se formaba o que figura se hacía?
12.	P:	Con base en la definición que ustedes dieron voy a ubicar un punto, sobre uno de estos segmentos. [Usa el programa para poner punto en objeto]. Entonces les pregunto ¿cumple esa figura 3 con su definición? [pide que una de ellas la vuelve a leer]
13.	M:	[Al leer la definición] el triángulo es un polígono que tiene tres lados iguales o diferentes y al moverlos sigue siendo un triángulo.
14.	P:	¿Cumple esa figura con su definición? [3:50]
15.	P:	Si la respuesta es sí, díganme por qué y si la respuesta en no, también díganme por qué, porfa.
16.	M:	¿Pero cómo así?
17.	P:	Mira la figura 3 como está ahora. 

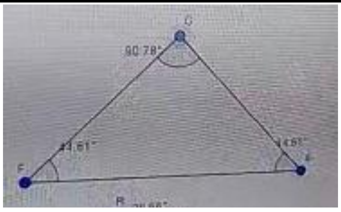
		¿Cumple con la definición que ustedes dieron de triángulo, o no?
18.	I:	No. Porque ya con este punto ahora tiene más lados, mira [señalando y cuenta 1, 2, 3, 4]
19.	P:	¿Qué le cambiarían a su definición?
20.	Se realiza nuevamente la pregunta por problemas técnicos con la videograbadora	
21.	M:	Diría que sí. Porque, aunque le sumaste un punto sigue siendo el mismo triángulo.
22.	P	O sea, que cumple [lee la definición]. Tú que dices Isa.
23.	I:	[Segundos después de manipular el software]. Que no. Porque ahora tiene más lados con ese punto y los cuenta señalándolos.
24.	P:	Ok. ¿Simplemente es por los lados?
25.	I:	Sii.
26.	P:	Pero, hay algo, se acuerdan que en algún momento hablamos sobre las rectas ¿cuántos puntos tienen?
27.	M:	Dos.
28.	I:	Infinitos.
29.	P:	Infinitos, cierto. Y el segmento ¿cuántos puntos creen que tiene? Si el segmento es un subconjunto de la recta.
30.	I:	Infinitos
31.	P:	En ese sentido, esto [señalando el punto] es únicamente un punto de ese segmento, yo puedo hacer miles de puntos ahí, pero esto sigue siendo un punto
32.	M:	Sigue siendo un triángulo
33.	P:	¿Por?
34.	M:	Porque eso, aunque tenga un punto más sigue siendo el mismo triángulo, porque esto [el punto] no le suma ni le resta algún segmento.
35.	P:	Bueno, vale gracias.

Tarea 2

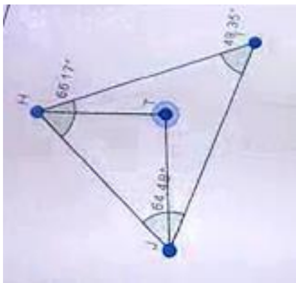
Transcripción de la entrevista realizada con dos estudiantes de grado cuarto, con relación a la Tarea 2.

1.	Isabel (I)	Que aquí [acutángulos], como es acutángulo. Podríamos decir que las medidas dan menos.
2.	María (M)	[Interrumpe] de noventa.
3.	I	Y acá [no acutángulos] dan más.
4.	Profesor (P)	Otra pregunta, que me surgió, pues al revisar. Su definición de triángulo fue: “el triángulo acutángulo nunca da noventa, porque nunca es recto”. Es cierto lo que ustedes dicen, ningún ángulo es recto. Pero, tampoco lo es para el triángulo ese segundo Δ [segundo cuadro de no acutángulos] ni para el triángulo Δ , que son no acutángulos. ¿Falta otra condición que defina acutángulo? ¡Cuál sería? (..) Ustedes dicen que ningún ángulo es recto, ¿cierto? Pero si ustedes se fijan aquí [Δ], pues ningún ángulo es recto.
5.	M	Ujum [afirmando]
6.	P	¿Les falta añadir algo a su definición o no? ¿Si me di a entender? (..) Su definición es que nunca da noventa.
7.	M	Ujum.
8.	P	Los acutángulos, pero estos no son acutángulos [los mencionados Δ y Δ] y estos nunca dan noventa. ¿Qué le cambiarían a su definición para que estos no entren?
9.	I	Pero es que en los triángulos acutángulos. No, no dan más de noventa.
10.	P	Ahh ok más de 90. ¿O sea, que si pueden dar 90?
11.	M	No.
12.	P	¿Tampoco?
13.	M	No porque cuando yo hice la tarea, pues a mí, los únicos que me daban 90 eran los no acutángulos, los otros no.

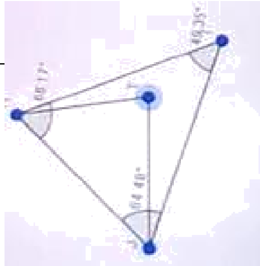
14.	P	¿Cuál tarea?
15.	M	Cuando dibujamos los triangulitos.
16.	P	¿Para la casa?
17.	M	Sí.
18.	P	Luego como la hiciste, cuéntame ya que estamos en estas.
19.	M	Bueno, pues, yo me acorde de esto y pues me acordé que con Isa habíamos dicho que los no acutángulos son menores de 90, ehh, los acutángulos son menores de 90 y los no acutángulos dan más de 90 o 90. Entonces pues, eso fue lo que yo dibujé.
20.	P	Ah bueno, ¿entonces si le cambiarían esa parte a la definición?
21.	I	Sí. Y acá nos muestra, aquí nunca dan 90, pero acá sí, en no acutángulos. 
22.	P	Vale gracias. Bien, quiero que ubiquen el triángulo Δ Y AL Δ . O sea, ¿solo para esos dos triángulos es verdad? (..)
23.	I	Nos dimos cuenta que no siempre tiene que dar menos, porque mira que en este [un ángulo de un triángulo acutángulo] da más que este [ángulo de un no acutángulo]. Y si tú lo mueves va a dar lo mismo.
24.	M	Y este por ser acutángulo debería dar más, no [señala un no acutángulo].
25.	P	¿Cuál es acutángulo?
26.	M	Este [señala un acutángulo] y este no [señala un no acutángulo] Este [imagen] solamente este ángulo [G] da más de 90, pero estos no.

		
27.	I	Y este [ángulo B de acutángulos] da más.
28.	P	¿Qué concluyen ahí entonces? Porque es que en ultimas, ¿ustedes definieron que todos los ángulos son menores de 90?
29.	I	No.
30.	P	Porque es que dijeron, el triángulo acutángulo nunca da 90 porque nunca es recto. ¿Es el triángulo el que nunca da 90?
31.	I	Los ángulos.
32.	P	¿Cuáles? ¿Cuántos?
33.	M	Porque en el programa se pueden medir los tres ángulos. Ya al hacerlo con el transportador ya solo se puede uno.
34.	P	¿Por qué?
35.	I	No porque si uno, hace el triángulo y comienza a medir todas las esquinas.
36.	M	Sí, pero es que ahí hay que hallar una forma para medir el ángulo por qué. Una forma es la fácil que es de ahí, acá así [dibuja un triángulo con sus dedos]. Pero también cuando, ¿cómo uno va a medir este? [Dibuja un triángulo con sus dedos.
37.	P	Eh, si quieren pueden, lo que están hablando, dibujarlo con eso nos entendemos más fácil.
38.	M	[Dibuja y muestra uno de los ángulos] (No quedó grabado el desarrollo de esta parte).
39.	P	Ubiquen el triángulo Δ y otra vez el Δ . Tienen la misma propiedad si se fijan, ¿en qué se diferencian? Mira la propiedad es qué siempre dan lo mismo esos dos ángulos [son Isósceles]. Dijeron que hay dos ángulos que siempre dan el mismo resultado en ambos, entonces en qué se diferencian esos dos triángulos, si ambos tienen la misma propiedad. Pueden mirar o arrastrar lo que deseen.

40.	I	Arrastra en el programa los vértices de los triángulos.
41.	M	Pues la diferencia que yo encontré, es que pues, pueden dar la misma propiedad, pero estos resultados son menores de 90 no, porque son acutángulos.
42.	P	Si.
43.	M	Y estos pues por ser no acutángulos pues… Ah no espera. Espera que me equivoqué [miro las medidas de los ángulos en la hoja de respuestas].
44.	M	Parecen los lados iguales.
45.	P	¿Lo podemos asegurar?
46.	I	Pues de aquí, a aquí son iguales, parece [midiendo los lados con los segmentos]
47.	P	¿Lo podemos asegurar o cómo hacemos para asegurarlo?
48.	I	No lo podemos asegurar.
49.	P	Bien. Una última cosa. Vamos a poner un punto T acá [en el interior de un triángulo acutángulo] Entonces, si les digo construyan el triángulo Δ , ¿cómo lo harían?
50.	M	Puedes repetir la pregunta.
51.	P	El triángulo, lo voy a hacer. H, T, J. Efectivamente ¿T se puede mover cierto?
52.	M	Sí.
53.	P	Entonces, ¿qué tenemos que hacer para saber si el triángulo Δ es un triángulo acutángulo?
54.	I	¿Medir los ángulos?
55.	P	Medir los ángulos, ¿es necesario medirlos todos?
56.	M	No.
57.	P	¿No?
58.	I	Si si si.
59.	P	¿Sí? Entonces ¡por qué?
60.	I	Porque pues en este puede dar 90 o menos o uno nunca sabe.
61.	P	Yo pienso que no es necesario medirlos todos, ¿por qué creen que digo eso?

62.	M	Porque digamos uno al medir este [T]. Si el ángulo, primero ángulo, pues uno ya se da cuenta, si mide más de 90 o menos de 90. 
63.	P	Como.
64.	M	Midiendo el ángulo.
65.	P	Si quieres arrastra T, para visualizar cosas. Ustedes, ¿qué prefieren hacer para resolver ese problema? ¿Usar GeoGebra o usar papel y lápiz?
66.	M	Papel y lápiz.
67.	P	Papel y lápiz, ¿Por qué?
68.	M	Pues es que no sé, siento que es más fácil.
69.	P	Mmm. ¿Y tú qué piensas?
70.	I	GeoGebra.
71.	P	GeoGebra ¿por qué?
72.	I	Porque pueden dar los resultados, más como, verdaderos. Si uno no sabe cómo medir muy bien en el transportador, puede quedar mal, en cambio GeoGebra nos ayuda a eso.
73.	P	¿Hay alguna otra razón?
74.	I	Solo esa.
75.	P	Bueno, bien eh ¿cuál es la respuesta del problema?, ¿cuál creen que será? ¿Si es necesario medir todos los ángulos o no?
76.	I y M	No.
77.	P	No.

Así como vez este triángulo Δ . ¿Te atreverías a decir que es acutángulo?

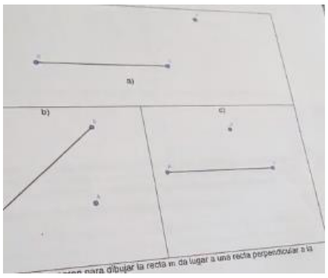
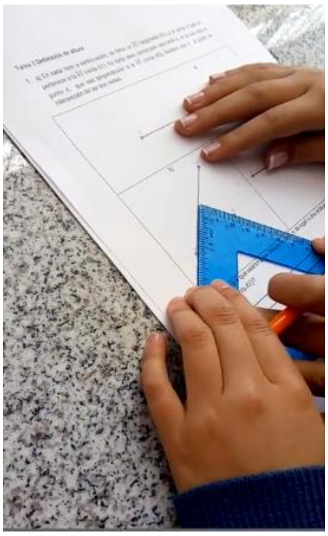


Tarea 3

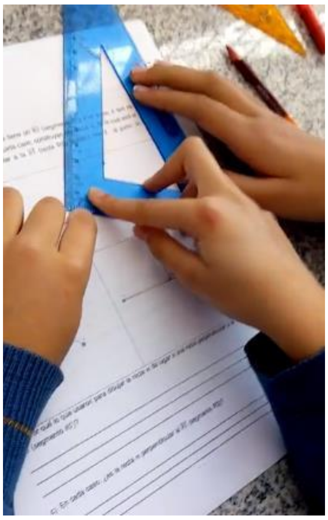
Transcripción de la entrevista realizada con dos estudiantes de grado cuarto, con relación a la Tarea 3. (25 de febrero, 2019)

1.	Profesor (P)	Hola, cómo están vamos a realizar la Tarea 3 y esta tiene como objetivo que logren identificar características de la definición de la altura de un triángulo, bueno. Entonces dale comencemos.
2.	María (M):	(realiza la lectura del primer punto)
3.	P	Pregunta, ¿saben qué diferencia hay entre… lo que leías RS
4.	M	RS, el segmento RS
5.	P	Y esta, [señalando la recta Rs,]
6.	M	Por es la que muestra la hoja
7.	P	Vale, en qué se diferencian entonces sino estuviera el paréntesis. ¿Logran identificar en qué se diferencian?
8.	M	En la liniesita [señalando el símboloy]
9.	P	Listo, solo era eso. Ah y una preguntilla, ¿qué quiere decir recta perpendicular? Tómense su tiempo tranquilas, o si quieren pueden contestarme también con un dibujo sería muy útil. O sea, que me muestren dos rectas perpendiculares. (las estudiantes toman una escuadra y el docente les indica que si quieren usen el reverso de la hoja)
10		(…) La estudiante dibuja una línea recta utilizando la escuadra y pone un punto exterior a esta.

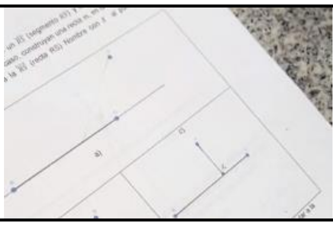
		Y usando el borde de la recta realizan el bosquejo. 
11	P	Si quieren a mano alzada, como sea no hay lio.
12	P	Entonces, para ustedes qué quiere decir recta perpendicular. Ahí ya dibujaron, pero qué quiere decir eso, por qué creen que son perpendiculares.
13	Isabel (I):	Porque tiene punto de intersección.
14	P	Cuál, (en un momento señalan el punto , luego se arrepienten y señalan el punto de intersección)
15	Estudiantes (E):	Porque se unen las dos rectas
16	P	¿Y alguna condición más?
17	M	Que uno tiene que tener los puntos nombrados.
18	P	¿Y algo más? Que las caracterice.
19	M	El ángulo que sea así [Isabella señala uno de los ángulos que se forman con las rectas]
20	P	¿Qué significa que sea así?
21	M	Recto.
22	P	Y recto es…
23	I	90 grados.
24	P	Bueno, quería saber, aclarar un poco la concepción que tenían de eso. Continúen.
25	M	Entonces acá tocaría, […]

26	P	¿Si entendieron el enunciado?
27	E	No.
28	P	¿qué tienen en común cada una de ellas [refiriéndose a las representaciones del primer punto] 
29	M	Son líneas, segmentos.
30	I	Tienen la misma letra en el punto [refiriéndose, al punto exterior]
31	P	Listo, necesito lo que está pidiendo exactamente es construir una recta perpendicular y nombrar el punto de intersección de las dos rectas, con una . Lo que me explicaste ahorita del punto de intersección. Adelante.
32	E	[entre ambas acomodan la escuadra como se ve en la imagen] 
33	E	[Comienzan en el punto b y Mariana traza un segmento, mientras Isabella sostiene la escuadra, lo hacen sin conversar sobre ello]

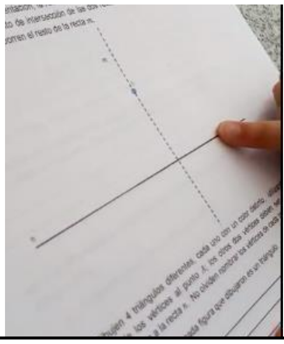
		
34	M	Y ahora el punto de intersección lo nombre con una .
35	P	Les puedo preguntar algo, aquí [señalando con su dedo el Segmento que dibujaron] ¿ustedes dibujaron una recta?
36	E	[silencio de 8 segundos]
37	M	Eh sí.
38	P	Ah, o sea, esto es una recta.
39	E	Si [dudando]
40	P	¿O sea, que la recta y el segmento se ven igual?
41	M	Pues es que la recta, seria esta ¿cierto? [señalando el segmento]
42	P	A lo que voy es que, un segmento se dibuja como lo dibujaron ahí, entonces cómo una recta ¿cómo se dibuja?
43	E	Mmm no.
44	P	Mmm bueno, continuemos haciendo las demás rectas perpendiculares.
45	E	[nuevamente sin conversar, dibujan el segmento usando la escuadra, esta vez en el punto c]
46	P	¿Listo?
47	I	Toca nombrar el punto de intersección.
48	P	Nos falta una [refiriéndose al punto A]
49	M	Mira aquí la debemos ubicar.

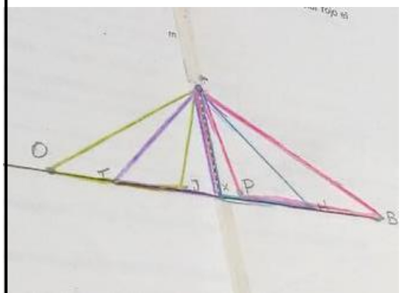
		
50	P	¿Qué estrategia utilizar?
51	M	Mmm no sé, es que es muy raro esto.
52	I	Así, [mostrando como la han usado siempre] es que toca poner siempre este [el lado de la escuadra] y buscar el punto.
53	M	Es que el punto está por allá.
54	E	[Tratando de ubicar el punto sobre la línea de la escuadra] pero es que esto se va corriendo. 
55	P	¿Cómo lo solucionan?
56	E	Así

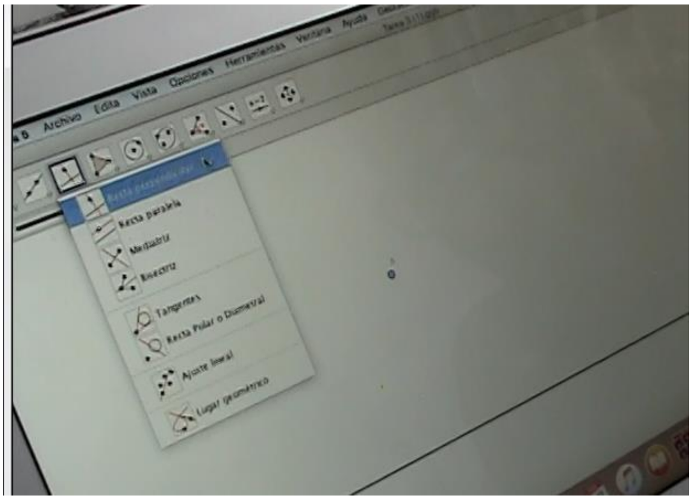
		
57	P	Tú me dirás, ¿así es una recta perpendicular?
58	I	No Mariana, no sé si sea así y funcione [reacomodando el lado de la escuadra sobre el segmento representado] Ubica el punto (vértice) de la escuadra en donde se interseca con el segmento. Luego lo une con el punto 
59	P	Visualmente, ¿esas son rectas perpendiculares?
60	M	Eso está muy raro.
61	P	Díganme ustedes, si yo les dibujara en el tablero, por ejemplo, ustedes me dicen: eso es una recta perpendicular profe, o de una me dicen profe eso no es una recta perpendicular.
62	M	No pareciera.

63	I	Porque no esta recta.
64	P	Entonces, que solución le proponen al ejercicio para poder dibujarla.
65	M	No sé qué cambies este punto y lo muevas aquí [es decir, arriba del segmento dado]
66	P	¿Cuántos puntos necesitan para dibujar una recta?
67	I	Una recta, dos.
68	P	¿Cuántos puntos tiene el segmento?
69	P	Yo puedo representar ese segmento de otra manera
70	M	Es que el segmento tiene muchos puntos.
71	P	¿Cuál es la diferencia entre recta y segmento? Será que yo puedo hacer, seguir dibujando ese segmento.
72	M	No. Porque el segmento solo están esos dos puntos.
73	P	¿Y la recta?
74	M	Las rectas pueden ser infinitas.
75	P	Exacto, ¿y yo no puedo hacer una recta en ese segmento? Digamos que tú tienes una recta como dices, tú puedes dibujar un segmento en esa recta.
76	M	Sii.
77	P	Si lo realizan análogo, tienen el segmento, dibujen la recta.
78	M	Pues es que, la idea de la recta perpendicular no es conectar esto [se refiere a la recta dada y el punto exterior a esta recta]
79.	P	Exacto, pero se dieron cuenta que no es suficiente.
80.	I	Vamos a alargar esto para que llegue hasta acá [refiriéndose a la recta dada y que quede debajo del punto dado]
81	P	Vale, la palabra no es alargar, sino que van a dibujar, construir la recta, tú no puedes alargar una recta o estirarla
82.	D	 Se dan cuenta, siempre que tengan un segmento, ¿pueden hacer eso?

83.	I	Siii.
84.	P	¿Cuántos puntos necesitaste para dibujar la recta?
85.	M	Dos.
86	P	Listo, nos falta ahora sí la recta perpendicular. Se dan cuenta que el ejercicio les está pidiendo que dibujen una recta perpendicular. ¿Lo que ustedes dibujaron es una recta perpendicular?
87	I	[Diciéndole a Mariana, señalando la recta dada] yo entiendo que esta es una recta.
88	P	Bien, sin embargo, miren que ahí dibujaron un segmento no, como para tenerlo en cuenta.
89	M	[realiza la lectura del segundo punto, punto b]
90	P	¿Qué usaron?
91	I	Una escuadra
92	P	¿Por qué creen que da lugar a eso?
93	M	[simula de nuevo el movimiento de la construcción]
94	I	Es por la norma, no.
95	P	¿Por qué? ¿Qué forma tiene?
96	I	De recta perpendicular [Desliza su dedo sobre una de las orillas de la escuadra]
97	M	De un ángulo.
98	P	¿Y qué ángulo?
99	M	Recto [se disponen a escribir en la hoja de respuestas de la tarea]
100	E	[Leen el punto c]
101	M	Un simple sí.
102	P	Como volvemos estos segmentos [refiriéndose a los segmentos que dibujaron] rectas, porque me están pidiendo rectas.
103	M	Lo alargamos, [interrumpe Isa mmm lo dibujamos]
104	P	¿Qué es lo que más se les dificulto en este punto? ¿Y qué fue lo que más se les facilitó?
105	I	El que se mas nos facilitó fu esta [refiriéndose al punto c de las representaciones y muestra cómo posicionaron la escuadra].

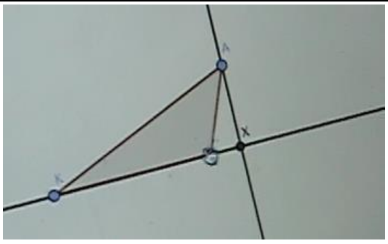
		Y el que más se nos dificulto fue esta [representación a] tocaba dibujar la recta.
106	M	Cuando lo hicimos no quedaba [simulando una recta perpendicular]
107	P	Ok vale.
108	M	Realiza la lectura del segundo punto.
109	I	¿Cómo así?
110	M	Toca hacer como una línea así. [Desplazando el dedo desde el punto que se ve en la imagen, hasta el punto exterior .  Luego señala desde el punto de intersección de las rectas hasta el punto . [algo insegura]
111	P	Vuelvan a leer despacio, donde estaría y cuál sería el segmento.
112	I	[Leyendo para cuando aparece el objeto: recta y señala cuál es esa recta. Lo mismo realiza con la recta] sería el punto de intersección [ambas estudiantes señalan la intersección entre las dos rectas y marcan el punto]
113	M	Continúa leyendo [con sus dedos realiza un movimiento, simulando un ángulo recto]
114	I	[Interrumpe, señalando el segmento] eso es un segmento no una recta
115	P	[mientras pintan de rojo el segmento] ¿Qué entienden por el resto de la recta?
116	E	O sea, esta parte [señalan lo que queda en línea puntiaguda]
117	P	[mientras intentan borrar el resto de la recta] ¿Qué quiere decir eso de contiene el punto ?]
118	M	Que se puede encontrar el punto de intersección […]
119	P	Contener el punto querrá decir eso
120	E	No, que está el punto .
121	M	[realiza la lectura del punto b, del segundo punto]

		Ok, entonces los vamos a dibujar [buscan colores mientras, vuelven a leer] O sea, que esto [se refiere al punto] es un vértice. Entonces sería como [con su dedo dibuja un triángulo con vértices en , luego sobre la recta y el último el punto .]
122	I	Y si no así [con su dedo dibuja un triángulo con vértices en , luego sobre la recta (pero en la otra semirrecta) y el último el punto .]
123	P	Son cuatro triángulos distintos. Colores los que deseen, excepto el rojo.
124	E	Primero dibujan el que señalo Mariana.
125	P	No olviden porfa nombrar los vértices de cada triángulo.
126	M	Reafirma preguntando, siempre un punto tiene que ser un vértice de los cuatro triángulos.
127	I	Tiene que estar en la [realizan el triángulo, que había señalado con el dedo Isabella] [Luego, realizan otros dos triángulos de manera similar, es decir, un vértice en cada uno de los rayos determinados por . 
128	P	Y qué se acuerdan de la definición de triángulo, porque estamos hablando de triángulos.
129	M	Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados, tiene tres vértices.
130	P	Vale, recordemos que esos tres puntos no pueden ser…
131	I	Colineales.

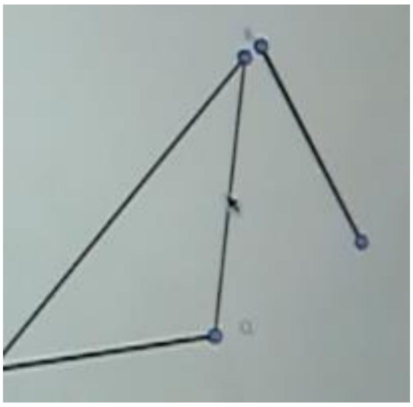
132	P	Listo, y ¿por qué son diferentes esos triángulos?
133	M	Porque tienen diferentes colores, tienen diferentes medidas, diferentes nombres, tamaños. [continúan leyendo los puntos y se disponen a escribir lo que dijeron oralmente]
134	M	(Lee el punto 3, ítem a)
135	I	Vamos a hacer una recta perpendicular  Usa la herramienta como se ve en la imagen.
136	I	Y le ponemos , al punto de intersección
137	P	Como le van a poner?
138	I	. Utiliza la casilla de punto de intersección.
139	M	(como en el programa el punto no sale con la letra que desean Mariana dice) Ahora le vamos a poner . (Mo191)
140	P	Eh porfa, en la hoja escriban los pasos que siguieron.
141	E	Conversan de los pasos que siguieron para escribir.
142	M	(Lee el punto b)
143	P	¿Qué será arrastre?
144	E	Arrastrar las líneas, los puntos…
145	I	Es como correrlo para un lado, eso es arrastrar
146	M	En GeoGebra es ver qué cambia y qué no cambia.

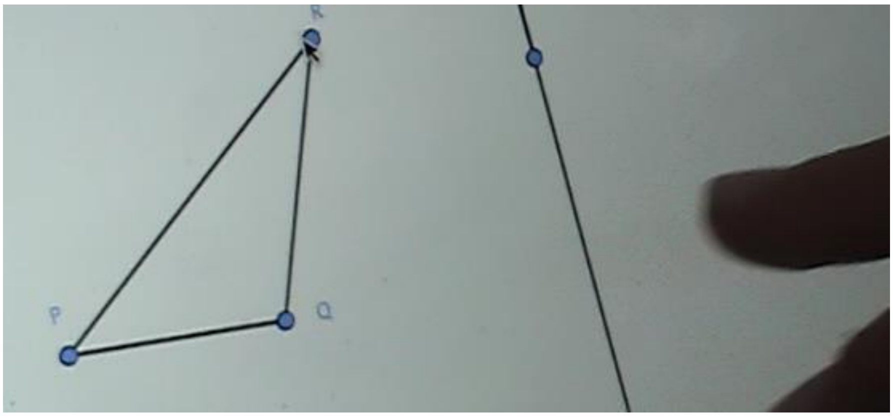
147	P	Una pregunta ¿para ustedes fue más sencillo realizar la construcción en papel o en GeoGebra?
148	E	En GeoGebra.
149	P	¿Y por qué?
150	M	Porque es más fácil, solo es seleccionar y poner, saber lo que hay que hacer.
151	I	Sí, no necesitas la regla
152	P	¿Qué herramienta creen que es más precisa o son iguales?
153	I	Yo siento que GeoGebra es más preciso
154	M	Porque uno se puede equivocar en cualquier momento (refiriéndose al momento en que usan la escuadra).
155	I	Se le puede correr la regla.
156	P	¿Y cuál es más valida? Cuando digo valido, me refiero a cual quedo bien hecho ambas o solo una.
157	M	Pues tocaría verificar a ver (refiriéndose a lo hecho en el papel)
158	P	Y a este le creen totalmente (refiriéndose a GeoGebra)
159	I	Pues si uno no lo pone bien también se equivoca.
160	M	Si no hace los pasos que se debe, o sea, hay que saber los pasos.
161	P	Bueno, gracias. Retoma la tarea. (Van a averiguar cuáles elementos es posible arrastrar y cuáles no).
162	I	El punto se puede mover [mientras Mariana verifica usando el programa] y la recta también. Pero me doy cuenta que el punto de intersección no se mueve, o sea, no se puede mover.
163	P	Listo, expliquen su respuesta, con eso nos referimos a pues que intenten decir porque se puede y porque no se podría mover, vale, desde lo que saben. (Mo194)
164	M	Pero no sabemos porque no se puede arrastrar el punto .
165	P	No pero tratemos de decir por qué.
166	I	Porque siempre tienen que estar juntas como las líneas para que sea un punto de intersección.
167	P	Listo, gracias. Lean la nota que es súper importante.

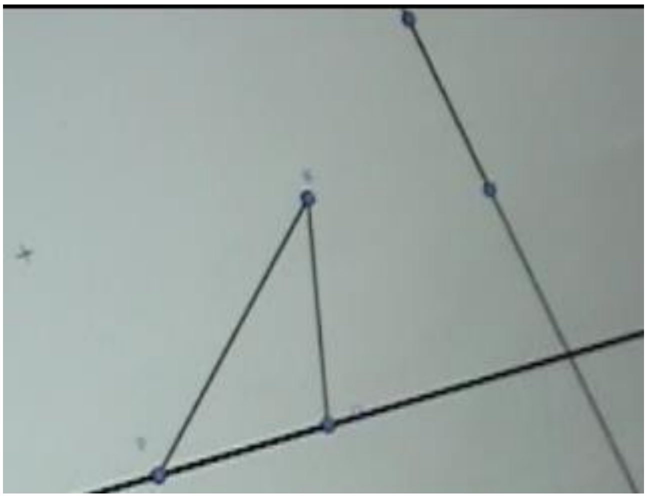
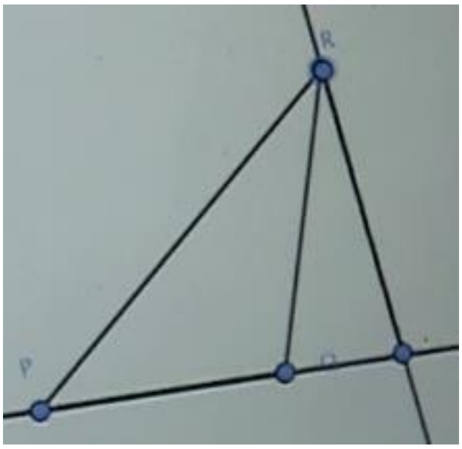
168	P	Ahora haciendo uso del arrastre, quiero que me digan ¿cuántos triángulos tienen al como altura. O sea, ese sería (refiriéndose a la imagen que muestra el programa) el único triángulo Δ  Hay una manera de representar o mostrar otro.
169	I	Voy a mirar a ver si… [Mientras arrastra al punto . Dice si porque es un triángulo de diferentes medidas.
170	P	¿Cuántos?
171	I	Muchos
172	M	Pueden ser mmm no sé. ¿Infinitos?
173	P	Me están preguntando o respondiendo
174	E	Infinitos
175	I	Porque podemos alargarlo acá (refiriendo al punto)
176	P	Siempre esta entre
177	E	Sí, [Mariana prosigue] tiene que ser el punto de intersección de las dos rectas.
178	P	Utilicen el arrastre para verificar, muéstrenme que sí, que siempre.
179	E	Ohh (con asombro) [luego de arrastrar]
180	I	No va a estar.
181	M	No necesariamente. Puede estar a veces así y puede estar algunas veces así y no.

		 Depende como tú lo muevas.
182	P:	Ok, creo que con lo que ya me contaron, pueden escribir en la hoja.
183	M:	[Lee y se responde en el punto en el que se pregunta en qué difieren los triángulos] en su tamaño, en que en todos siempre esto [punto] es el punto de intersección.
184	I:	En sus medidas. (Mo 195).
185	M:	Si arrastramos el punto de intersección no siempre es, porque si tú
186	Isabel:	[interrumpiendo]El punto de intersección, es el punto de intersección [se dirige al computador y arrastra el punto de intersección]. Lo mueves
187	Maria:	Si tú lo mueves esto por acá [Señala punto de intersección para que este quede entre].  [cuando ya está como se ve en la imagen] Ya no es.
188	P:	¿No es qué Mariana?
189	M:	Este ya no es el punto de intersección
190	P:	Entre quien. Recuerdan como lo construyeron.
191	I:	Entre y .
192	P:	¿Quién es ?
193	I:	Eh, la recta [señalándola con el dedo]
194	P:	Entonces por qué. Vuélvelo a poner donde Maria dijo que no era el punto de intersección.

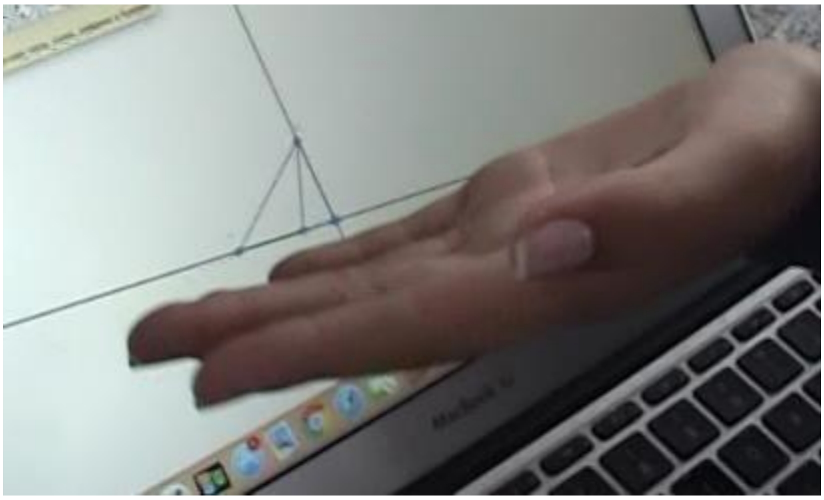
		[Luego de que lo ubican] ¿Por qué ahí no es?
195	M	Porque siento que ahí al moverlo pues ya no es. (0:39) Para mí no.
196	P:	Para ti no, ¿por qué? Explícanos, para entenderte.
197	M:	Porque no me parece, porque es que (..) Es que al momento de moverlo [el punto] pues puede cambiar.
198	P:	¿Quién puede cambiar?
199	M:	Pues el triángulo
200	P:	El triángulo. Pero repito el punto de intersección. Entonces cambia si el triángulo cambia. Eso es lo que estás diciendo.
201	M:	No. No estoy segura.
202	P:	No, pues es lo que consideres. Dime tu idea, que es importante reconocer. Y pues Isa qué piensas, Si Maria te convence o no, si tú la convences.
203	M	Es que también Isabel tiene la razón porque este [refiriéndose al punto de intersección] es el punto de intersección entre esto y esto, la y esta [refiriéndose a la recta y la recta perpendicular]. Y entonces, al momento de moverlo pues yo no lo puedo separar. Entonces pues este siempre va a hacer [señala las rectas] como la base por decirlo así. Entonces si este está conectado a este [las rectas] este [punto] va a hacer el punto de intersección, eso es lo que también tiene la razón.
204	P:	¿Tú qué opinas? [preguntándole a Isabel]
205	I:	Pues, lo que yo he dicho. Pues es que es de la recta perpendicular, que se saca el punto de intersección. Entonces, si tú igualmente mueves la recta [mientras arrastra el punto] sigue siendo el punto de intersección, porque se tocan con la recta [señalándola].
206	P:	[hablándole a Maria] Convencida o no convencida, o dudas.
207	M:	Sí, ya maso menos.
208	P:	Vale, igual piensa en el asunto y si más adelante se te ocurre una explicación, de tus ideas, pues nos cuentas. Bueno, vamos con el punto 4. (2:34)

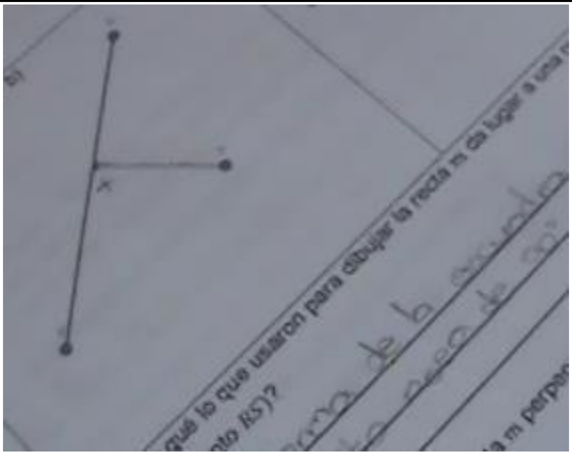
209	M:	Realiza la lectura del punto 4. [el de altura pasos].
210	P:	[una vez abierto el archivo] como pueden ver hay un Δ y un segmento. ¿Qué harán primero?, ya está abierto el archivo.
211	M:	Nuevamente lee lo que deben hacer.
212	P:	Necesitamos volver ese segmento, altura de ese triángulo
213	I:	O sea
214	M:	[Interrumpiendo] o sea, toca mover el triángulo para e segmento.
215	P:	¿el triángulo o el segmento? Ustedes saben que son libres de hacer rectas, de hacer perpendiculares, de hacer intersecciones.
216	M:	Entonces cómo hago para mover esto [el triángulo] pa aca [el segmento].
217	P:	Como mueves cualquier figura.
218	M:	[Seleccionó el segmento y lo movió todo].
219	P:	Igual puedes mover el segmento.
220	M:	Ahora vamos a ver si el triángulo lo podemos mover aquí [al lado del segmento]. 
221	P:	Recuerdan esa palabra altura ¿dónde apareció?
222	I:	Sí, en los triángulos, ¿cuántos triángulos pueden haber
223	P:	Pueden minimizar este archivo un segundo y si necesitan revisar más [mientras abre el archivo anterior] pueden hacerlo. Recuerden, el segmentoes la altura del triángulo. Entonces, pueden moverlo como deseen y mirarlo como deseen.
224	M	Pues sería poner, en que en el otro. Hagamos así [mientras señala] como la recta perpendicular y mover el triángulo.
225	P:	Ok, si lo deseas.

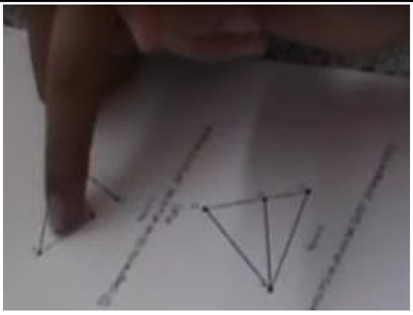
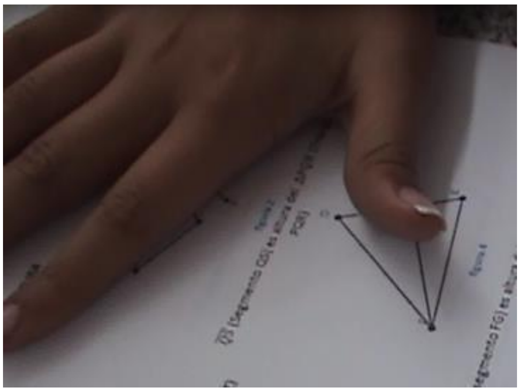
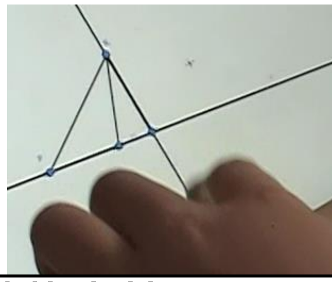
226	I:	Sí, es muy buena idea
227	M:	[Mientras se volvió al altura archivo pasos] sería volver este [segmento] como recta perpendicular y hacer que este como en el otro [archivo], sea este la altura.
228	P:	Ok.
229	I:	Toca hacer una recta. [va a la opción]
230	M:	[Mientras señala con sus manos, cómo se ven las rectas perpendiculares].
231	P:	Recuerda que para hacer una recta debes seleccionar dos puntos.
232	M	O sea, este y este. [Refiriéndose a los puntos extremos del segmento]. (Mo 197).
233	P:	(..)Recuerden que el segmento lo pueden mover. (2:12) ¿Cuál es el plan?
234	M:	Poner esto [triángulo] acá [segmento] y que se vea como el otro.
235	P:	¿Acá dónde?
236	M:	O sea, poner la línea de acá [con su dedo dibuja una línea perpendicular a la construida por ellas]:  La recta y hacer que este puntico [ ] llegue acá [al punto que se ve sobre la recta perpendicular] para que se vea como el punto de intersección.
237	P:	¿Cuál punto va a ser el punto de intersección?
238	M:	Pues este no [señala el punto sobre la recta]
239	P:	Ok. Bien, eh pues, entonces en ese sentido lo que vas a hacer es la recta. Entonces seleccionas la opción de recta y das click sobre y sobre .

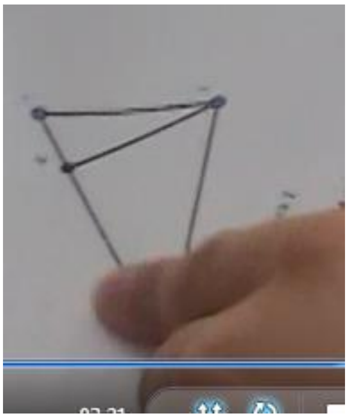
240	M:	[una vez construida la recta] está re chueca 
241	I:	Sí eso está más.
242	M:	Toca enderezarla
243	P:	¿a quién?
244	M:	A la recta [ ] para que se vea
245	P:	En realidad, ¿eso es lo importante o qué será lo importante? (3:45)
246	M:	Pues que esto llegue a.. es que eso esta tan raro profe.
247	P	Pero el triángulo, no lo puedes arrastrar. Puedes arrastrar es el segmento.
248	M	Ah ok, entonces muévelo para abajo [indicándole a Isabel]
249	P	Pueden mover los puntos si desean, puesto que quedaban muy cerca al vértice .
250	M	Ahí, ahí! 

251	P	¿Ahí? Listo. ¿Qué les asegura entonces que ese segmento que arrastraron, es la altura de ese triángulo?
252	M	Porque pues, queda igual [señalando la perpendicularidad]
253	P	y.. tiene que cumplir una condición específica. Que cumplieron los demás o ustedes dicen listo ahí. O sea, que hay que tener en cuenta entonces para la altura de un triángulo.
254	M	Pues mmm no sé.
255	P	Porque precisamente los puntos tienen que estar ahí.
256	M	Porque este es la intersección de esos dos [las rectas] y este otro [el punto extremo del segmento] pues la altura.
257	P	Ok, ¿no se les está olvidando nada más?
258	M	Humm, no sé, no me acuerdo. Ponerle un número, ah nombre a esto [señalando el punto de intersección].
259	P	Ah ok sí, ponle el nombre. Aunque si les sirve de algo pueden mirar [mostrando en el archivo anterior y les recuerda como arrastraron].
260	P	Porque es que inicialmente diste una idea de una recta perpendicular.
261	M	Por eso, es esta.
262	P	¿Es esa?
263	M	Sí.
264	P	Ah bueno listo, ¿qué es una recta perpendicular?
265	I	Una recta ..
266	M	Es una recta con un punto de intersección.
267	P	¿Y ya?
268	I	Dos rectas que se unen con un punto de intersección.
269	P	¿Y no sucede nada con esas rectas? O sea, dos rectas cualquiera son rectas perpendiculares. Miren las del primer punto.

270	M	Por eso es lo mismo.
271	P	¿Seguro?
272	M	Es que es demasiado chuecote.
273	P	Pero, me falta aún una condición para eso. Para la recta perpendicular.
274	M	Que no esta recta.
275	P	¿No, no recuerdan nada?
276	E	No
277	P	Ok, pues escriban los pasos que realizaron para construir la altura.
278	M	Pero es que tú nos dijiste falta algo. Entonces aún no porque falta algo. Será que yo puedo poner esta línea recta, mientras realiza una horizontal con sus manos. 
279	P	¿Te refieres a que esta inclinada?
280	E	Sí.
281	P	Porque la línea esta recta si te fijas, yo no la veo curva.
282	M	Es que está rara no me gusta que este así. Se ve rara.
	P	Es porque están acostumbradas a verla horizontal. Pero miren por ejemplo hay una así [mostrando el primer punto].

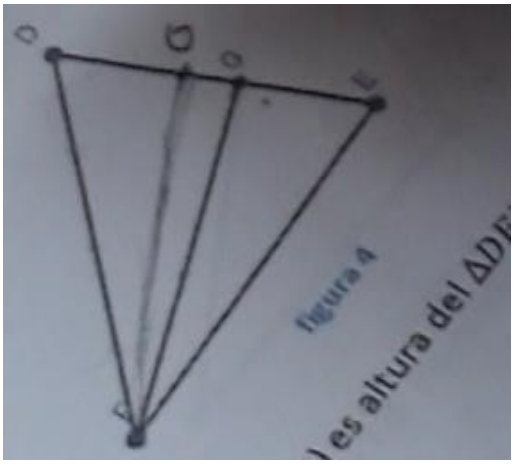
		
283	I	Es que esta si tiene sentido y este triángulo está muy raro.
284	P	Será que eso es importante entonces, más allá de que se vea feo.
285	M	No lo sé, mr ayuda. [intentando mover la recta] no se puede mover
286	P	Porque recuerda que está construida a partir de los puntos del triángulo, y el triángulo no se puede mover. (Mo 198)
287	I	[Después de escribir los pasos que hicieron en el punto anterior] observa las siguientes figuras.
288	M	[Lee las siguientes descripciones de las figuras de ejemplos de altura].
289	P	Ok, ¿observadas no? Todas son ejemplos de la altura de un triángulo.
290	M	¿Escriban las propiedades, o sea lo que debe tener la altura de un triángulo?
291	P	Ujum [asintiendo] si, digamos que las características. (1:52)
292	M	(…) que no se pueden pasar de (..) como de la figura.
293	P	Ok, tú qué opinas [refiriéndose a Isabel] ¿No te convence?
294	I	No sé qué decir. Pues si me convence lo de la línea porque aquí no hay ninguna que se salga.
295	M	Y acá si no está unida pero pues no se sale.

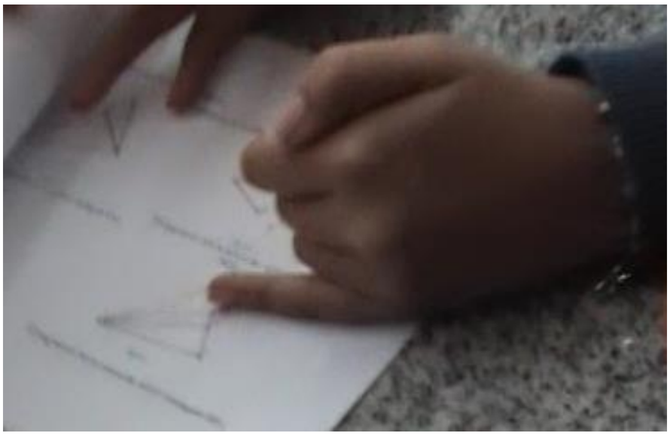
		
296	P	Podrías comprobar de alguna manera, si ese segmento, como dices, se pasa.
297	M	Regla. Regla del dedo no se pasa. (2:38) 
298	P	La regla del dedo, ok. ¿Te convenció Isa?
299	I	No sé, hay algo que no me cuadra.
300	P	¿Qué?
301	I	Porque acá se sale de la figura.
302	P	¿A qué te refieres con se sale de la figura?
303	I	O sea, la línea. La línea [señalando con su dedo la recta que se ve en la imagen]. Las líneas se salen de la figura. Tal vez pueden ser invisibles las líneas. 
304	M	Pero estas hablando de una recta perpendicular. Y están hablando del segmento.
305	P	María te está diciendo que están hablando del segmento y no de una recta perpendicular. ¿Esta [refiriéndose nuevamente a la que muestra el computador] es una recta

		perpendicular?
306	M	Pues si porque [con sus dedos hace un movimiento en cruz].
307	I	Pero esta también es perpendicular [mostrando en un ejemplo el segmento y un lado del segmento]. 
308	M	Y además ahí dice el segmento.
309	P	Pues, escriban esa primera que encontraron. (…) ¿Qué más?
310	I	Mmm. (…)
311	P	Digamos que en qué se parecen esos segmentos.
312	M	La altura del triángulo.
313	P	Sí, son la altura del triángulo. O sea, cada una ya es la altura del triángulo. Pero, digamos qué hace que ese segmento sea altura la altura del triángulo y no otro segmento.
314	M	Porque tiene como la misma medida del triángulo.
315	P	¿De pronto yo podría hacer esa altura en cualquier lugar?
316	M	Como así.
317	I	[interrumpiendo] no se puede por fuera
318	I	¿Cómo así por fuera?
319	M	Por fuera de la figura.
320	P	¿Y entonces la figura 2? [Cuya altura se señala en el exterior de la figura].
321	M	Es esta. [señalándola]

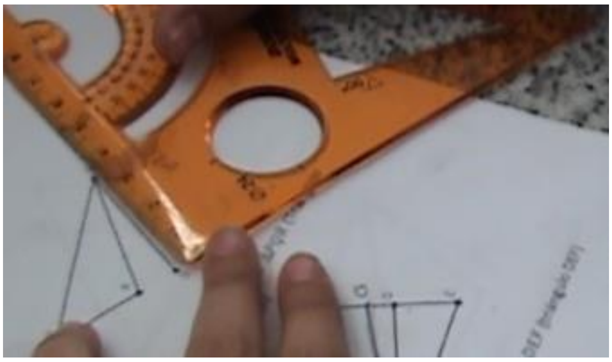
322	P	Ella es una altura.
323	M	Pues para que sean las alturas, pues tienen que
324	I	[interrumpe] tienen que estar tocando
325	P	Digamos que en qué parte especifica se están fijando en las figuras.
326	E	[Señalan las alturas, el segmento].
327	P	¿Cómo están observando, todas al tiempo o una por una?
328	I	Una por una. Esta [figura 1] y esta [figura 2].
329	P	Por ejemplo, en qué se parecen esas dos, ya que son tan distintas y estamos hablando de ellas. ¿Qué tienen en común?
330	M	Que las dos tienen altura.
331	P	Sí.
332	M	Y que son triángulos.
333	P	¿Algo más?
334	I	Tienen un puntico de estos negros [uno de los extremos de la altura].
335	P	Siii
336	M	Qué más…
337	I	Que están tocando de alguna forma la figura.
338	P	¿De qué forma?
339	M	En un vértice.
340	P	En un vértice, ahora fíjense si en todas sucede eso.
341	I	En esta sí [figura 3] En esta también [figura 4].
342	M	Sí, en esta también. [Señalando el vértice].
343	P	Ok, si consideran que también es una característica.
344	M	[Interrumpiendo] se puede conectar con un vértice o.. Entonces, el segmento está conectado a uno o más vértices del triángulo [dictándole

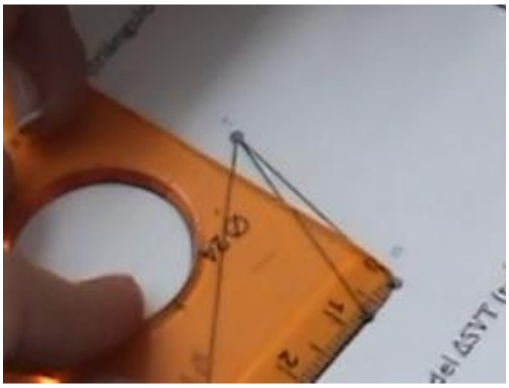
		a Isabel]. (Mo198)
345	P	Porqué creen que en la figura 3, digamos por qué es distinta.
346	M	Porque digamos que no está, por acá dentro del triángulo. Está en el segmento [mientras la señala con el dedo].
347	P	¿Qué crees que hace que esa altura este ahí en ese segmento entonces? (..)¿qué tipo de triángulo crees que es?
348	M	Es uno de 90 grados.
349	P	Se llama rectángulo vale, para recordar. Tú ibas a decir algo Isa.
350	I	Se me olvido.
351	P	Vale entonces eso que les dice, lo que han trabajado con la altura y el hecho de que este sea un triángulo rectángulo.
352	I	O sea, lo ponen aquí porque está. Esta si es la altura, o sea, es de largo ahí.
353	P	Y entonces así [le gira la hoja para cambiarle el ángulo desde el que ve el triángulo].
354	I	Pues lo mismo estuviera acá [señalando la misma altura]
355	P	Y qué propiedades debe tener un segmento para ser la altura de un triángulo.
356	M	Que se conecte con alguno de los vértices.
357	I	No puede pasar de
358	M	[interrumpe] no puede digamos comenzar acá y fuu [simulando una recta]
359	P	Ok, bien. ¿Algo más? ¿No les dice nada el triángulo rectángulo de algo que tiene que cumplir la altura?
360	I	Que tiene que estar parado para ser la altura.
361	P	A qué te refieres con un lado parado.
362	I	O sea, recto.
363	M	O sea, que no esté así [con sus manos hace o simula una diagonal]
364	I	O sea como nosotras estamos, paradas.
365	P	Y hay alguna de decir, tiene que cumplir tal cosa para que este parado.

366	M	Comenzar en un vértice.
367	P	De acuerdo. Muéstrame con el lápiz, por ejemplo, ¿qué es estar parado?
368	M|	Puede estar así  Pero no así [inclinando el lápiz un poco].
369	P	Ahhh a eso se refieren, ¿qué me dicen de esta altura, la altura de la figura 4? Yo no la veo muy parada como el lápiz.
370	M	Porque empieza en un punto y está por dentro del triángulo.
371	P	Por ejemplo, si yo hago esta altura, entonces. 
372	M	¿Hiciste esa línea conectada?

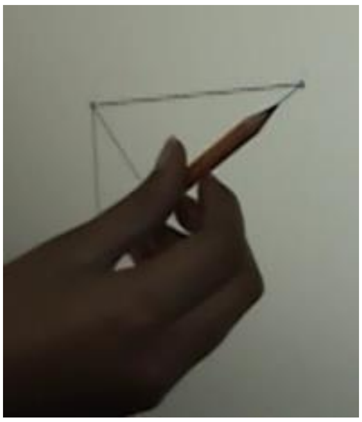
373	P	Sí.
374	M	Porque no está por la mitad.
375	I	No porque este [figura 3] no está por la mitad ni este [figura 2].
376	P	¿Qué crees que hace que el segmento sí sea segmento y elno?
377	M	Déjame pensar un momento.
378	I	Esta no [Mira las hojas y cuando llegan a la primera parte]
379	P	¿Por qué descartan esa parte?
380	I	Porque esto es de rectas perpendiculares y estamos hablando de triángulos.
381	P	Entonces, ¿para qué creen que hicimos eso?
382	I	Para (..)
383	M	Ah, déjame mirar un segundo eso [el ejemplo de altura] esto parece una recta perpendicular. Cógela así [gira la hoja como se ve en la imagen] le haces acá y acá [le pone el dedo a las rectas que forman el ángulo recto]  Y acá señalando la figura 3.
384	P	¿Si es un triángulo rectángulo, que condición tiene?
385	M	Qué forma un ángulo recto.
386	P	Y la recta perpendicular, ¿qué condiciones tiene?
387	M	También tiene que ser recto.
388	P	Entonces, porque dijiste (muy pasito) que no tendría una recta perpendicular.

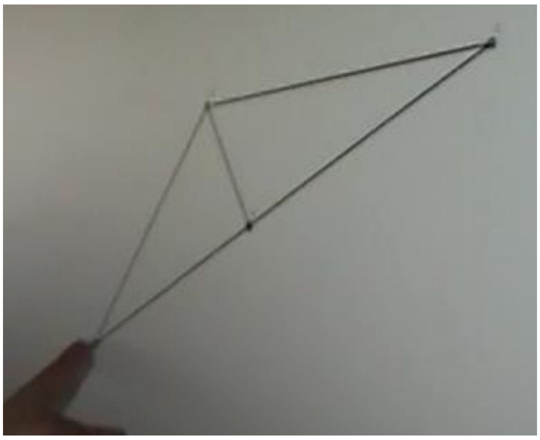
389	I	Porque no tiene la línea [refiriéndose a que no está la recta sino solo el segmento]
390	P	Pero puedes dibujar la recta. Entonces, ¿qué concluyen? (7:13)
391	M	El triángulo está formado por una recta perpendicular
392	P	¿El triángulo?
393	M	La medida, perdón.
394	P	La medida, ¿cuál medida?
395	M	Mm como se dice. La altura.
396	P	Listo.
397	I	Pero, aun no entiendo. Tú dices que se forma una recta perpendicular. Pero si tapo la que esta dibujada en la hoja y dejo la que tu dibujaste, entonces también es una recta perpendicular.
398	P	¿Segura? Compruébalo. ¿Tienen una escuadra?
399	I	Está mal [mientras ubica la escuadra.
400	P	¿Por qué crees que está mal?
401	I	Porque mira, no cuadra. [Refiriéndose a que el borde de la escuadra no pasa sobre el segmento dibujado].
402	P	Ah, por eso. ¿Eso no te dice algo’
403	M	Que no es. No es.
404	P	Ok. Escriban la última condición descubierta y pasamos a la siguiente hoja. (..) (1:43)
405	M	Dice no son ejemplos de altura. Ves, lo que te decíamos, se sale [el segmento de la frontera del triángulo] uhhh. Es perfecto.
406	P	Listo.
407	I	La altura, esta [imagen 2, del archivo] no es perpendicular.
408	M	No está conectada a un vértice. O sea, uy Dios mío.
409	I	[Sobre la imagen 3] se pasa [de la frontera del triángulo].

410	M	Y esto, uy [imagen 4].
411	I	Ese está complicado.
412	M	Es que esto, se parece mucho a esta [imagen 2 de los ejemplos].
413	I	Tiene que. Espera, préstame la, la, la
414	M	La escuadra.
415	P	Mira.
416	I	Es que quería hacer algo, pero no me acuerdo qué.  [Después de medir] la altura de acá, no tiene recta perpendicular.
417	P	¿No?
418	I	Ah, esta pal otro lado.
419	P	Pero tu puedes unir esos dos [puntos] por medio de una recta.
420	I	Pero dijimos que tenía que estar conectado al vértice y este no está conectado al otro vértice.
421	M	No porque, te acuerdas que habíamos dicho que el segmento, siempre está conectado a uno o más vértices. Y es que acá [no ejemplo], también está conectado a uno.
422	P	Hay algo que lo hace no sea. (..)
423	I	[Intenta mirar con la escuadra]
424	M	[Mientras lee las condiciones que hicieron para la altura de un triángulo]. No está cumpliendo la de ser perpendicular
425	P	¿Y cómo lo sabes?
426	M	Porque no está recto

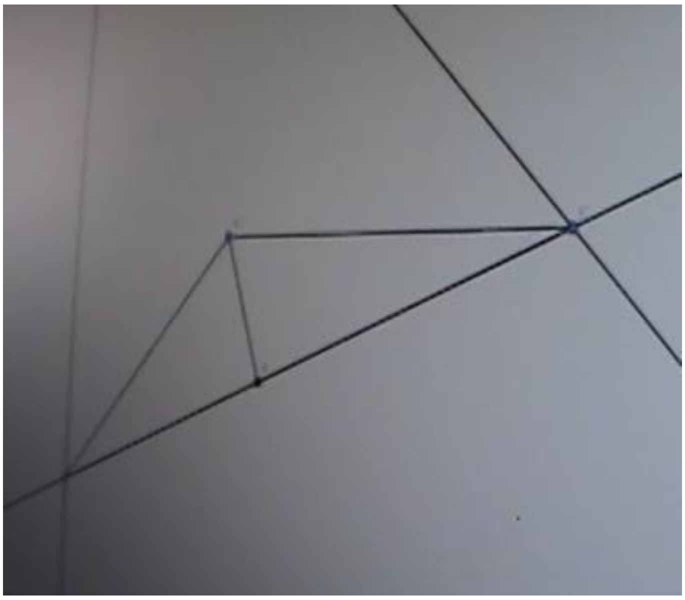
427	I	No está recto.  Debería ser así [pasando su dedo sobre el borde de la escuadra].
428	P	Listo. ¿Y la figura 5?
429	E	Se pasa.
430	P	Ok. Eh, avancemos.
431	M	Ese punto estaba medio, medio. Lee el punto que van a realizar.
432	P	Esos números corresponden a las imágenes de los no ejemplos.
433	M	Ah ok.
434	P	[Mientras escriben] explícame, porfa que es que no se pase.
435	M	Que no es de la altura. O sea, se pasa demasiado, es más larga.
436	M	[Refiriéndose a la imagen 3] es un rayo, para que sea altura no se usa, se usa recta.
437	P	¿Recta?
438	M	¿Recta o segmento? No sé.
439	I	Segmento.
440	P	¿Por qué segmento?
441	I	Porque el segmento tiene dos puntos y la recta pues, se extiende [mientras abre sus manos].
442	P	Y María, si quieres muéstrame con un ejemplo porque recta.
443	M	Mmm, perdón es segmento.
444	P	[mientras escriben la condición de la imagen 4]El segmento es perpendicular o que

		sería más allá de eso.
445	I	Que sea de 90
446	P	O sea, un ángulo recto. ¿Con el primero [imagen] algo más que decir?
447	M	Que no se une con un vértice.
448	P	Vale. [Les ayuda a entender el punto e de la guía].
449	M	Las mantenemos.
450	I	Que no puede ser rayo.
451	P	Pero, esa se quita con lo que pusieron que es un segmento.
452	I	Listo no hace falta nada más. Lee el punto 8 (en GeoGebra).
453	P	Hagámoslo por partes, primero construyan la altura desde el punto B. Obvio, si quieren arrastrar el triángulo que se muestra pueden hacerlo.
454	M	O sea, toca hacer una recta perpendicular. [Mientras Isabel arrastra uno de los vértices del triángulo]. [Después de construirla] ¿y ahora qué hacemos?
455	I	Construir la altura.
456	M	Es que no quiero que se vea así [el triángulo inclinado].
457	P	Ah, un poco más estándar.
458	I	Falta, espera miramos aquí [en las hojas]. No se puede pasar el segmento de la figura, entonces.
460	M	Toca hacer otro punto.
461	P	¿Qué tipo de punto recuerdan?
462	M	Intersección.
463	I	Listo y vamos a ponerle el nombre.
464	M	Y ahora.

		La recta perpendicular, ya la hicimos.
465	P	¿Pero la altura es una recta perpendicular?
466	I	No, está conformada. El segmento
467	P	Construyan el segmento y ya les muestro como ocultar la recta. Bien, ahora va la segunda pregunta. ¿Se pueden construir las dos alturas desde los otros dos vértices?
468	I	Este y este
469	P	Tienen nombre.
470	M	Punto A y punto C.
471	I	Yo creo que no, porque la altura siempre tiene que estar derecha.
472	M	Sí, te acuerdas lo que habíamos dicho de parada. O sea, no puede estar acostada.
473	P	Puedo hacer algo [mientras continúan diciendo lo mismo].
474	M	Sí.
475	P	Mientras están discutiendo y ustedes me dicen si sigue siendo altura o no. [Cambia el triángulo de posición].
476	I	Estamos diciendo que no puede estar así
477	M	Así como acostado. [como se ve posicionado el lápiz].  Porque ese sería como el largo no. En cambio [el segmento] ese si sería la altura.
478	I	La altura, necesitamos la altura. O sea, lo alto del triángulo

479	P	[Moviendo aún más el triángulo] ¿Y ahí? ¿Si sigue siendo altura?
480	I	Sí.
481	P	¿Entonces desde el vértice A y vértice C, no se puede?
482	I	No, no sé.
483	M	Es que mira esto es acostado [horizontal] y esto es paradito [diagonal].
484	P	Ah, horizontal acostado y con alguna inclinación es parado.
485	M	Entonces no puede estar horizontal
486	P	¿La altura?
487	I	Sí. Pero acá, puede dar la altura.  Lo que estoy diciendo es que puede estar inclinada y si lo ponemos acá no estaría acostado.
488	M	Pero no daría la recta perpendicular.
489	P	Prueben.
490	I	¿Tú qué dijiste María?
491	M	Es que no estoy segura, porque ¿te acuerdas que esto [altura] lo construimos por medio de una recta perpendicular?
492	I	Mmm
493	M	Entonces, en el momento de hacerlo no quede. Pues hagámosle a ver cómo queda (8:20)
494	P	[mientras María construye un segmento] ¿pero primero haces el segmento o qué

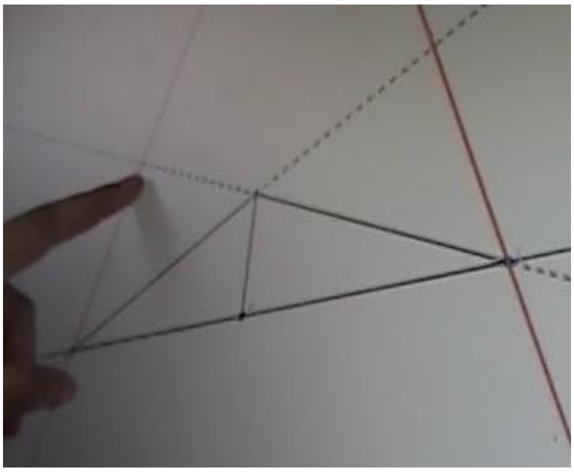
		haces?
495	M	La recta.
496	I	Pero, no se puede.
497	P	Pero, ni siquiera lo han intentado. (8:48)
498	M	O sea, pero espérate ¿cómo era que la construimos?
499	I	La recta perpendicular tiene que estar en él, dentro de la figura.
500	M	Y tiene que estar así, te acuerdas.
501	I	Recto.
502	M	90 grados.
503	P	Por eso de 90. ¿O sea, que los ángulos de 90 no pueden estar en esta posición? [Estándar]. No lo puedo construir así [cambiando la posición]. Pero, dijeron que lo iban a intentar, inténtenlo.
504	I	[En voz baja] inténtalo tú María.
505	P	Ya hicieron desde el vértice B, ahora desde el vértice C o A, no sé.
506	M	Como era qué se hacía. [click sobre el punto y el segmento adyacente] (Reacciona) ush. Es que no me acuerdo
507	P	Recuerda, como hiciste desde el B y haz el análogo.
508	I	[Recrea los pasos] así y acá.
509	P	Será que necesita la misma base del lado del triángulo.
510	M	Creo que no se puede.
511	P	Fíjense la relación entre el lado del triángulo y el punto B.
512	M	Ah! Pues poniéndola acá arriba. Toca borrar esa, esa quedó mal [la anterior].
513	I	Da la misma [obtuvieron la misma anterior].

514	P	No se acuerdan de algo en un punto, que ustedes tuvieron que hacer una construcción extra.
515	I	Ah sí! Tuvimos que alargar la recta para que diera una recta perpendicular.
516	M	Alargar
517	I	Estirar
518	P	No se dice alargar, tampoco estirar. O sea, la van a construir no. (11:36)
519	M	[Hacen la recta sobre el segmento en el cual pertenece un extremo de la altura ya construida y 4na recta perpendicular desde A]. 
520	P	Y entonces, ¿qué falta para mostrarme la altura? Porque la altura es un segmento.
521	M	Falta ocultarlo.
522	P	Pero
523	I	Es un segmento
524	P	¿Pero cómo lo van a hacer? (13:35)
525	M	Ehhh no lo sé.
526	P	Ustedes estaban hablando de una recta.
527	I	Ya me perdí.
528	P	No pierdan la idea.
529	M	Es que uno se pierde profe.

530	I	A ver, tocaba hacer. Ver si se podía construir la recta desde la A a la C
531	P	Ya la hicieron.
532	M	Ya las hicimos.
533	P	Dos rectas perpendiculares e hicieron la recta.
534	I	Entonces, ahora toca sacar la altura.
535	P	Bueno y ahí es que necesitan para hacer el segmento.
536	M	Espérate me acuerdo del B [punto B]
537	P	[Mientras María realiza un segmento desde el punto A hasta el lado opuesto del triángulo] ¿Seguras que esa es la altura? ¿Entonces para qué hicieron la recta perpendicular?
538	I	Es que nosotros hicimos la recta perpendicular y la línea de la recta perpendicular nos quedó acá [es decir en el interior del triángulo]. O sea, tocaría hacer eso pero desde acá [punto A]. Esta afuera de la figura [la recta perpendicular] entonces no sería altura.
539	P	¿No? ¿Entonces porque aquí [ejemplos de altura] nos dimos cuenta que sí existían alturas así? Falta una condición que ya la dieron en algún momento para que les ayude.
540	I	Seria de acá a acá [como debería ir la altura, del punto al segmento opuesto]
541	P	Claro. Estas razonándolo bien Isa, pero ¿cómo haces para saber el otro punto del segmento?
542	I	No sé. Nos falta el punto de intersección.
543	P	Les voy a ayudar en algo. Recuerden que en los segmentos, son subconjuntos de las rectas. Y que por dos puntos pasa una única recta.
544	I	Esto es una recta [la perpendicular que pasa por A] cierto, entonces pueden haber muchos puntos.
545	P	Cierto, pero solo nos sirve uno en particular.
546	M	Este [punto A]
547	I	Pero debe haber otro, recuerdan que había que tener dos puntos para poder hacer la

		altura.
548	P	Por eso ya tienen uno que es el vértice, les falta el otro. Es que ya hicieron una construcción antes y ya se dieron cuenta de algo antes.
549	M	Entonces quitamos.
550	P	Recuerden las condiciones de altura.
551	I	El segmento no se puede pasar de la figura.
552	M	Te acuerdas que tocaba desaparecer una cosa.
553	I	Pues esta, pero ahí está todavía [la recta perpendicular]
554	M	Entonces, porque cuando hicimos la primera [altura] desaparecimos la recta porque teníamos ya los dos puntos. Entonces en esta nos falta encontrar un punto y así, desaparecer la recta.
555	P	Exacto.
556	I	El segmento siempre está conectado con un vértice.
557	P	O más con tilde.
558	I	Oye, pero podría, podría, en este triángulo estaba en el lado [figura 3]
559	P	¿Y por qué en ese triángulo estaba ahí?
560	M	Era recto.
561	P	[Leyendo] y la altura está conformada por una recta perpendicular.
562	I	Eso está imposible.
563	P	No, no es imposible. Hay una manera de ver ¿esos segmentos del triángulo en qué rectas están contenidos?
564	I	En que rectas. No entiendo.
565	P	Fijenese en los lados y
567	M	Ahhh
568	I	Estaba pensando en los puntos (..) (19:39) Entonces tal vez está invisible no.
569	P	O tal vez hay una manera de hacerla visible.
570	I	[Utiliza la herramienta ocultar/mostrar] No, no está.

571	P	No. Recuerden que por dos puntos, pasa una única recta.
572	I	Pero, si la recta tiene puntos infinitos, ¿sí? Pasan más de dos puntos.
573	P	¿Cuántas rectas puedes construir que tengan contenidos a los dos puntos? [mientras ella dibuja dos puntos sobre un papel]
573	I	Solo una. (..) Ah! Y si hacemos una recta de aquí a acá [punto A y punto B] y de aquí a acá [punto C y punto B].
574	P	Hazlo.
575	M	Daría lo mismo, sería como una recta.
576	P	Pues, constrúyanlo y revísenlo a ver.
577	I	[mientras construye las rectas] Esto confunde tantas cosas.
578	P	Voy a ayudarles en el estilo con esta recta para que la vean mejor [con la recta que construyen se las puntea]. (21:46)
579	I	A mí me dice que esa si lleva el lado del triángulo, de los dos puntos [Ay B].
580	P	Ok sí. Pero recuerden que el objetivo es la altura.
581	M	Pero ya hicimos muchas cosas, no funciona.
582	P	Pero, es la primera vez que hacen una construcción auxiliar.
583	I	Y falta construir la otra recta.
584	P	Ok.
585	I	Entonces (..) Pero es que el único lado recto de este (..)
586	P	La altura recordemos que esta sobre la perpendicular. ¿Cuáles son las perpendiculares?
587	I	[Las señala con sus dedos]
588	P	Se las voy a pintar de rojo para que no lo olvide, vale. [Luego de pintarlas] recordemos que te faltaba para construir la altura.
589	I	Eh, nos dijiste que para hacer…

590	M	Que faltaba un punto.
591	P	Sí, pues si es un segmento ya tienen un punto les faltaba el otro.
592	I	Ahh, ya me acordé del otro pedazo. Nos dijiste que eso no importaba [segmento fuer del triángulo] porque en esta imagen muestra la altura fuera del triángulo [imagen 2, de la sección de ejemplos de altura].
593	M	Tiene que estar de 90 grados. Recto.
594	I	¿Y este está recto? [dedo sobre una de las rectas perpendiculares]
595	P	Claro porque es una perpendicular, esa recta.
596	I	Entonces toca, ponerle el punto acá. 
597	M	Dale.
598	I	Segmento [lo construye sin poner antes el punto de intersección]
599	P	Pero espera, lo que pasa es que punto [lo arrastra para que vea que deja de ser el de intersección [. Ves.
560	I	Ah ese no es.
561	P	Primero debes hacer algo.
562	M	Poner el punto [intersección] . Ahora tenemos que hacer el segmento.
563	I	Pero espérate le ponemos letra.
564	P	Bien.
565	I	Listo, ahora si tenemos. Podemos hacer el segmento. [Construye el segmento]

		Y ya quedó la altura porque está tocando un vértice.
566	P	¿Y es perpendicular a quién?
567	M	Ahhh (risas)
568	I	Al triángulo.
569	P	No. ¿Al triángulo?
570	M	¿Al punto A?
571	P	No. Tiene que ser perpendicular a una recta o a un segmento.
572	I	A esta [la señala]
573	P	Ah ok. O sea, a la recta que contiene al segmento. Y pregunto, ¿es posible construir la altura también desde el vértice C?
574	I	Sí, obvio si se puede en esta, se puede en esta.
575	P	Hazlo.
576	M	Pero no se puede hacer por ahí.
577	P	¿Por qué no lo puedes hacer por ahí María? ¡esas rectas rojas que son?
578	M	Perpendiculares. Pero acá [sobre la recta perpendicular que pasa por C], cómo le hacemos, por debajo o por arriba [toma como referencia el segmento]
579	I	Como se pasaba.
580	M	Acuérdate de los ejemplos de no se pasa.
581	I	Y a la vez no hay donde este recto, o sea noventa.
582	P	Les voy a recordar cómo construyeron la recta roja.
583	I	¿Y si la enderezamos? [Luego de la explicación del profesor]
584	M	Es que estoy pensando tantas cosas, de esa línea roja.
585	P	Ustedes saben que pueden hacer, arrastrar todo lo que quieran.
586	M	Podemos mover los vértices.

587	P	¿Cómo quieren construir la altura?
588	M	Queremos que esto quede recto [quede horizontal]
589	P	Pero igual es perpendicular. Lo que pasa es que tú lo estás viendo desde otra perspectiva, pero no significa que no sea recto. GeoGebra te lo construyó recto.
590	I	Ah entonces tocaría ponerlo acá [punto de intersección]
591	M	¿Podemos ponerlo de acá a acá?
592	P	¿Por qué no? Háganlo.
593	M	Toca poner entonces el segmento para que sea la altura [luego de hacer el punto de intersección]
594	I	Ya quedó. Ahí quedó la altura.
595	P	Bien y entonces. ¿se pueden construir alturas desde los otros dos vértices?
596	I	Sí.
597	P	Expliquen.
598	M	Por todo lo que hicimos.
590	P	Pero ahí no van a dar una explicación, que sea por todo eso que hicimos en el programa.
591	M	Si se podía porque todavía no habíamos encontrado (..)
592	I	Se puede pues porque
593	M	[interrumpe] A través de las rectas perpendiculares, pudimos hacer la altura.
594	P	¿Y también que necesitaron?, porque no fue solamente eso.
595	I	Con los segmentos del y.
596	P	¿Cómo harías para explicarle a un compañero que llegue de quinto y le expliques y te entienda. El punto C y tal lado del triángulo?
597	I	El punto C y el segmento.
598	P	Bueno, vale. Listo.
599	I	¿Le ponemos sobre como construimos las rectas perpendiculares?
600	P	Mmm déjame ver. Sí, si me gustaría ver.
601	M	Primero hicimos dos rectas perpendiculares.

602	P	¿A quién? Eso es importante decirlo.
603	M	Del punto C y del punto A.
604	P	¿Del punto C a quién?
605	I	Al segmento.
606	P	Ok. Saben cómo se dice, del punto C al segmento opuesto. Y lo mismo del punto A. ¿Qué más hicieron?
607	M	Estos segmentos.
608	P	¿Segmentos?
609	M	Rectas [las dey]
610	P	¿Y luego?
611	M	Y luego encontramos el puntico [intersección] y dimos la opción de segmento e hicimos la altura.
612	I	Y quedó la altura.
613	P	Ok, la b y la última.
614	M	Tres, ¿no? Ah alturas, creí que era lados.
615	I	Una, dos, tres [Las cuenta del computador]
616	P	Expliquen su respuesta.
617	M	Entonces se pueden tres, porque no se puede de ninguna otra manera.
618	P	¿Y por qué no se puede?
619	M	Porque queda mal.
620	P	¿Y por qué queda mal?
621	I	Porque la altura tiene que se lo alto.
622	M	No lo
623	I	[interrumpe] lo largo
624	P	¿Y con lo alto se refieren a qué propiedades, o qué características cumple la altura?

625	I	Que tiene que tocar uno o más vértices.
626	M	Y cuando lo hicimos no había quedado,.
627	P	Ok, muchísimas gracias.