CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS CREATIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PROPUESTAS POR ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO A TRAVÉS DE UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

LUIS MANUEL ORTIZ DURÁN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN

BOGOTA D.C. 2024

CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS CREATIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PROPUESTAS POR ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO A TRAVÉS DE UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

LUIS MANUEL ORTIZ DURÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID MACIAS MORA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN

BOGOTA D.C. 2024

DEDICATORIA

A mi esposa Alejandra y mi hija Guadalupe que su amor siempre ha sido el faro que me guía en esta tarea de prepararme y mejorar cada día. Por ellas y para ellas.

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a Dios que me ha sabido encaminar y guiar en sabiduría para cada día ser una mejor versión. A mis padres, mi esposa, mi hija, mi hermana y mis sobrinos que me han apoyado en cada momento de mi vida, con una sonrisa, un abrazo y el calor de hogar. Muchas gracias por mostrarme día a día que soy afortunado, que con disciplina y esfuerzo puedo lograr cualquier cosa que me proponga, pero sobretodo que tengo mil y una razones para ser feliz.

Entera gratitud a la Universidad Pedagógica Nacional, la Facultad de Ciencia y Tecnología, a cada docente del programa de la Maestría en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación, en especial al Doctor David Macías Mora, quien desde el primer encuentro presencial de la Maestría fue el asesor de mi tesis, gracias por todo el apoyo, compromiso y las valiosas enseñanzas que dieron como fruto esta investigación.

Gracias infinitas a todos.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

I

1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

La clase de matemáticas puede ser un desafío para muchos estudiantes. A menudo se percibe como una materia rígida y enfocada en la memorización, lo que puede dificultar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, pensamiento crítico y creatividad. Además, la enseñanza tradicional en el aula de matemáticas se centra en la repetición y la práctica de simples misceláneas de ejercicios o problemas similares, lo que limita la capacidad de los estudiantes para aplicar los conceptos a situaciones nuevas o más complejas. Los estudiantes pueden sentirse abrumados por la cantidad de información que deben aprender y la falta de conexión entre los conceptos matemáticos y su vida cotidiana lo que puede llevar a una falta de interés y motivación en la materia, ya que los estudiantes no ven la relevancia de lo que están aprendiendo.

En las recientes investigaciones realizadas en el área de la educación matemática se ha hecho un especial énfasis en la búsqueda de métodos de enseñanza innovadores que fomenten la exploración y la creatividad en el aula. La tecnología puede ser una herramienta valiosa en este sentido, permitiendo a los estudiantes interactuar con los conceptos matemáticos de una manera más dinámica e interactiva. Además, es importante que los docentes se enfoquen en el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas en lugar de la memorización y la repetición. Independiente del grado y hasta de las características del contexto se ha logrado evidenciar los enormes aportes que ha brindado la implementación de entornos y objetos virtuales de aprendizaje en la educación básica, media y superior. Los países de Latinoamérica y más específicamente Colombia no ha sido ajeno a esta realidad y es por ello que desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se han realizado esfuerzos para que estas puestas en práctica se lleven a cabo dentro de las aulas de los colegios públicos y se logren mejores resultados.

A pesar de estas directrices desde el MEN el panorama nacional, regional e internacional en las pruebas estandarizadas no es alentador, según resultados liberados por el ICFES (Instituto Colombiano para le Evaluación de la Educación) en los últimos 3 años el promedio en la prueba de matemáticas de los estudiantes de colegios públicos se ha mantenido en un rango de 51 a 52 puntos, sufriendo año tras año variaciones muy poco significativas y revelando una gran brecha que existe entre los resultados de los estudiantes de los colegios oficiales con respecto al sector privado, cuyo promedio en la prueba de matemáticas se encuentra en 59 puntos sobre 100 posibles. A nivel regional la prueba estandarizada ERCE (Estudio Regional Comparativo y Explicativo) aplicada en América Latina y el Caribe evalúa el aprendizaje de los estudiantes en distintas áreas del conocimiento entre ellas matemáticas, en la última aplicación en el año 2022 se encontró que los estudiantes colombianos obtuvieron resultados superiores a la media regional pero no se detectó avance entre 2013 y 2022. A nivel internacional el panorama sigue siendo desalentador, en el estudio de la prueba PISA (Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos, PISA por sus siglas en inglés) 2022 se encontró que los estudiantes colombianos tienen un rezago de más de dos años con respecto a los estudiantes de otros países evaluados. En PISA 2022 los estudiantes colombianos obtuvieron un rendimiento menor que la media de la OCDE en el área de matemáticas (383), este puntaje hizo que Colombia se ubicara en el puesto 64 de esta evaluación, cabe resaltar que este promedio había venido aumentado desde 2006 en que se presentó el país por primera vez en las pruebas PISA, sin embargo, el rendimiento en esta última prueba fue más bajo en comparación con la inmediatamente anterior del año 2018, se sigue siendo cercano solo al de los estudiantes de Albania, Brasil, República de Macedonia del Norte y Jamaica. Lo más preocupante es que únicamente el 30% de los estudiantes colombianos evaluados logran superar el nivel 1 de desempeño, es decir, el restante 70% solo pueden responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas.

Algo común en los fundamentos teóricos de estas pruebas estandarizadas es que todas reconocen la relevancia de la competencia en resolución de problemas de los estudiantes evaluados. Es así como por ejemplo el ICFES ve la resolución de problemas como “la comprensión de para qué sirve el conocimiento que se tiene. Ello incluye responder a las preguntas ¿qué se puede o no resolver con la información que se tiene?, ¿cómo se podría resolver el problema y cuáles son las maneras más eficientes para hacerlo? y ¿cómo contextualizar o interpretar la solución de la que se dispone?” (ICFES, 2020, pág.17), en los procesos que evalúa PISA se destaca la importancia de que los estudiantes evaluados puedan formular situaciones de forma matemática, emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático, interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos; esto nos permite entender la relevancia dada, pues esta competencia reúne la mayor parte de los procesos que realizan los estudiantes para demostrar la comprensión de los conceptos en matemáticas.

El concepto de creatividad matemática está en auge y construcción por parte de la comunidad de matemática educativa, hace referencia al aprovechamiento de la creación, lo nuevo, la propuesta, aprovechar las distintas representaciones que existen de un mismo objeto matemático y con ellas resolver situaciones problemas aplicadas en el contexto de los estudiantes de manera novedosa. Desarrollar la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. Algunos estudios realizados en el contexto colombiano como es el caso de Montoya (2014) han demostrado que existe una correlación positiva estadísticamente significativa entre la creatividad y la competencia general en el área de matemáticas en la prueba Saber 11, una correlación media (r=,379 p=,0001). Ahora bien, algunas investigaciones han indicado más creatividad en el diseño de estrategias que en la ejecución o revisión, pero una pobre capacidad de transmisión, organización y síntesis de las resoluciones; dado que en toda resolución participan aspectos creativos, este estudio realizado por Mallart & Deulofeu (2016) con estudiantes españoles finaliza sugiriendo mejorar la creatividad matemática en el aula y proponiendo nuevas líneas de investigación futuras como el tratamiento de las causas que originan la deficiente ejecución de la fase IV (síntesis, comunicación y redefinición), es decir, prestar especial atención no solamente a la novedad del planteamiento sino que es esencial identificar los aspectos creativos de la fase final del proceso resolutivo de las situaciones problema.

Un análisis detallado de los procesos realizados por los estudiantes en la resolución de problemas conlleva implementar recursos que apoyen a los docentes en el proceso de retroalimentación. Es por ello que esta propuesta se basa en un entorno virtual de aprendizaje que pretende reunir varios elementos que en conjunto favorecen las interacciones de aprendizaje, fomentarán la interacción entre pares, el trabajo colaborativo, el acceso a diferentes fuentes y recursos, enriqueciendo la socialización y la creatividad de las soluciones propuestas.

1.2 Pregunta de investigación

Todo esto nos conduce a cuestionarnos acerca de,

¿Qué tipo de estrategias creativas aplican los estudiantes de undécimo grado en la resolución de problemas matemáticos en un entorno virtual de aprendizaje?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar las estrategias con relación a la creatividad matemática asociadas al desarrollo de la competencia de resolución de problemas a través de un entorno virtual de aprendizaje.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar los elementos asociados a la creatividad matemática presentes en las estrategias aplicadas por los estudiantes en la resolución de problemas.
- Clasificar las diversas estrategias aplicadas por los estudiantes en la resolución de problemas con relación a la creatividad matemática.
- Modelar el proceso creativo seguido por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

II

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

El objeto del conocimiento tratado en la presente investigación ha tenido un auge en los últimos años, evidenciando la relevancia dada por la comunidad de educadores matemáticos por aprovechar la correlación evidenciada entre el indicador de la creatividad matemática y la competencia para resolver problemas matemáticos, es por esto que se presenta una síntesis del contexto general:

2.1.1 Nacionales

Hidalgo, Mera, López & Patiño (2015) realizaron una investigación con un enfoque de corte cuantitativo, de tipo empírico analítico con el objetivo de determinar la incidencia de la estrategia ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) sobre el resultado del área de matemáticas en las pruebas Saber 11. Esta investigación tuvo como sujetos a los educandos de la Institución Educativa Jorge Villamil Cordovez de Pitalito (Huila) y emergieron conclusiones que consolidan el ABP como una estrategia didáctica alternativa eficaz al proceso enseñanza aprendizaje.

Orozco (2016) realizó una investigación cuasi experimental dentro de un enfoque cuantitativo con el objetivo de determinar el impacto generado por la apropiación de recursos de visualización basados en TIC sobre el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos, la población estudio fueron 64 estudiantes del grado quinto del colegio Manuel Cepeda Vargas sede A jornada tarde en la ciudad de Bogotá. Gracias a este estudio se pudo concluir que se generó un impacto positivo en la competencia para resolver problemas matemáticos en los estudiantes gracias a la apropiación de diferentes recursos de visualización basados en las TIC, los cambios estadísticamente significativos se dieron específicamente en el componente geométrico-métrico contrario al numérico-variacional que no representó cambios significativos. Además, se pudo evidenciar que mediante la visualización como herramienta se hace más fácil acercar a los estudiantes a realidades desconocidas para ellos y de paso contextualizar las situaciones problema que se dan dentro del área de matemáticas.

Mazzilli, Hernández & De La Hoz (2016) realizaron una investigación no experimental de corte transversal utilizando una metodología cuantitativa, en este estudio diseñaron un procedimiento para desarrollar la competencia matemática de resolución de problemas, en el cual se proponen cuatro fases y se incluyen una serie de preguntas y acciones para realizar por parte del docente y los estudiantes de grado octavo del Nuevo Colegio Técnico del Santuario de la ciudad de Barranquilla. En este diseño se realizó una revisión bibliográfica donde se encontró que todos los autores convergen en lo importante que resulta el enseñar a los estudiantes procedimientos para desarrollar la competencia matemática de resolución de problemas, mejorando su desempeño académico y los resultados al momento de ser evaluados en cualquier ámbito nacional o internacional y se concluyó que se alcanzó el objetivo propuesto pues resulta conveniente para los estudiantes tener estrategias que ayuden a aprovechar todo su potencial y no solo en encontrar la respuesta correcta.

Sierra (2018) realizó una investigación con diseño etnográfico holístico enmarcada en un enfoque cualitativo que tenía como propósito caracterizar la incidencia de un ambiente b-learning basado en el modelo de Polya para la solución de problemas aditivos de cambio y combinación para niños de segundo primaria del Colegio John F. Kennedy ubicado en la ciudad de Bogotá. Este estudio permitió evidenciar que un ambiente b-learning incide altamente en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas desde la comprensión, la configuración de un plan (el software tiene herramientas que no permite que el estudiante avance si no cumple los procedimientos y rutas adecuadas), le brinda la posibilidad al estudiante de entender cada uno de los procesos requeridos en la ejecución del plan y le guía en la verificación para que tome conciencia de su trabajo, preguntando, contrastando y revalidando su trabajo, aunque la respuesta no sea la esperada por ellos.

2.1.2 Internacionales

Kattou et al. (2013) realizaron un estudio con el objetivo de investigar si existe una relación entre la habilidad matemática y la creatividad matemáticas, además de examinar la estructura de esta posible relación. Para este fin administraron dos pruebas (habilidades matemáticas y creatividad matemática) a 359 estudiantes de primaria de escuelas públicas promedio en Chipre en áreas urbanas y suburbanas. El análisis de este trabajo reveló que existe una correlación positiva entre la creatividad matemática y la habilidad matemática, así mismo, el análisis factorial confirmatorio sugirió que la creatividad matemática es un subcomponente de la habilidad matemática y se identificaron tres categorías diferentes de estudiantes que varían en habilidad matemática que se reflejan en tres categorías de estudiantes que variaba en creatividad matemática.

Orlando (2014) realizó su trabajo de investigación doctoral con el objetivo de identificar los procesos cognitivos y los factores contextuales asociados a la competencia para resolver problemas matemáticos en diferentes grupos de carreras de educación superior en la ciudad de Buenos Aires (Argentina) y determinar la relación con el rendimiento académico. Para poner la hipótesis del trabajo a prueba se administró el STAT (Sternberg Triarchic Abilities Test), nivel H (modificado) para valorar la habilidad cognitiva general en la resolución de problemas novedosos, una encuesta de factores contextuales y motivación de los alumnos y un test de razonamiento matemático. Esta investigación puso en evidencia que la organización adecuada del conocimiento para la adquisición de nuevos conocimientos y habilidades, es resultante de efectos aditivos; a mayor habilidad para resolver problemas y mayor calidad de la organización conceptual, mayor es el rendimiento. Además, se verificó que las mayores dificultades surgieron en la comprensión del problema, la argumentación y organización de las estrategias que lo resuelven; demostrando que más del 60% de los alumnos resuelven los problemas, de forma mecánica, realizando los cálculos necesarios sin conocer la naturaleza del problema (Sternberg, 1986).

Kang et al. (2015) realizaron su estudio mixto que incluyó investigación cuantitativa y cualitativa, además de examinar el efecto del programa desarrollado usando una prueba de creatividad aplicada a 24 estudiantes de quinto grado de una escuela primaria en Seúl (Corea del sur). Los análisis de este trabajo de investigación revelaron que el programa de resolución de problemas con las habilidades de pensamiento creativo tuvo efectos significativos sobre la fluidez y la originalidad que son subelementos de la creatividad. En la unidad de interacción, las frecuencias de “hacer preguntas” en la etapa de generación de ideas fueron altas, igual fenómeno se presentó en la etapa de verificación de la idea donde fueron significativas las frecuencias de “hacer sugerencia” y “recibir opinión”.

Defaz (2017) realizó su trabajo de investigación de modelo heurístico que tuvo como objetivo determinar los procedimientos mecánicos memorísticos en la resolución de problemas matemáticos y su incidencia en el desarrollo de habilidades cognitivas con un enfoque reduccionista, esta investigación tomó los datos del Ministerio de Educación Ecuatoriano correspondientes a las pruebas de 41.702 estudiantes de 588 establecimientos educativos públicos, municipales, físico misionales y particulares. Después del análisis de los datos recolectados se pudo concluir que la fundamentación teórica y metodológica sustenta el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas, lo que orienta el tratamiento de esta problemática en el desarrollo de habilidades cognitivas, los procedimientos utilizados, comunicar conclusiones, hallazgos o soluciones producidas como contenidos.

De La Cruz (2021) realizó una investigación de diseño no experimental, transversal de alcance descriptivo, correlacional y enfoque cuantitativo, que tuvo por objetivo comprobar la relación que existe entre la creatividad y la resolución de problemas matemáticos en una muestra de 156 estudiantes de quinto grado de primaria de instituciones educativas privadas en cuatro distritos de Lima (Perú). Como instrumento para medir la creatividad se utilizó la Evaluación de Indicadores Básicos de Creatividad EIBC-RD, Sánchez (2019) y para el caso de la resolución de problemas se aplicó la Prueba de Resolución Matemática RPM-5, Paico (2017). Se pudo concluir que existe una relación directa y estadísticamente significativa entre creatividad matemática y resolución de problemas matemáticos, sobre todo en problemas de combinación y comparación.

Hamid & Kamarudin (2021) realizaron una investigación cuasi experimental con 64 estudiantes de cuarto grado de escuelas secundarias en Kuala Lumpur, capital de Malasia, esta población fue elegida porque en esta edad, alrededor de los 16 años, es que presentan las pruebas estandarizadas internacionales como TIMMS y PISA. Estos estudiantes participantes se dividieron en dos grupos, uno de intervención y otro de control. Este trabajo encontró que los estudiantes expuestos al enfoque creativo matemático presentaron cambios positivos significativos tanto en los indicadores de creatividad matemática como en el rendimiento en el área de Matemáticas, gracias a estos resultados los autores sugieren la integración de este tipo de enfoques pedagógicos para fortalecer los aprendizajes de calidad entre los estudiantes y además el diseño de un plan de estudios innovador en los centros de educación superior que se encargan de formar profesores de Matemáticas.

De Vink et al. (2021b) realizaron un estudio para descubrir cómo se relaciona la creatividad y el rendimiento en matemáticas medido en la interacción de los pensamientos convergente y divergente de los niños cuando trabajan en tareas del área de Matemáticas, esta investigación se llevó a cabo con 229 estudiantes de quinto grado pertenecientes a 12 escuelas primarias de Países Bajos. Para lograr el objetivo de estudio se midieron estos dos tipos de pensamiento por medio de tareas visuales y verbales, a través de la solución de tareas matemáticas con solución única y múltiple. Gracias a este trabajo se encontró que el pensamiento convergente medido por medio de las actividades verbales predijo de manera positiva un buen desempeño en las tareas de solución única y múltiple, por el lado del pensamiento verbal divergente interactuó únicamente con el desempeño de tareas de solución única y en el caso de las tareas visuales tanto en el pensamiento convergente como divergente se encontró una relación directa con el desempeño de tareas de solución múltiple. Estos hallazgos les permitió concluir que el pensamiento divergente en los estudiantes de las escuelas primarias cumple un doble papel, por un lado, complementa el pensamiento convergente en las tareas de solución múltiple y por el otro lo compensa en las de única solución.

Kusuma et al. (2021) realizaron un estudio con métodos mixtos que contó con un diseño explicativo secuencial combinando análisis cuantitativo y análisis cualitativo. Los objetivos de esta investigación fueron dos, en primer lugar, hallar la efectividad del modelo b-learning con un entorno virtual para el mejoramiento de las habilidades del pensamiento creativo y, por otro lado, describir la capacidad de pensar creativamente de los estudiantes en términos de su metacognición. La población de estudio fueron estudiantes de decimo grado de la Escuela Secundaria Superior de Salatiga en Indonesia, para el análisis cuantitativo se dividió el grupo en dos, una clase de control y la otra de prueba con el entorno virtual de aprendizaje b-learning, en el caso del enfoque cualitativo se tomo una muestra de 6 sujetos que posteriormente se clasificaron según los procesos metacognitivos en alto, moderado o bajo. Finalizada la implementación se pudo concluir que el modelo b-learning es eficaz para aumentar la capacidad de pensar creativamente y presenta mejoras con respecto a la clase de control donde se aplicó el modelo ABP. En cuanto al análisis cualitativo se encontró que los estudiantes con alta metacognición cumplen con todos los indicadores que reflejan una excelente capacidad de pensamiento creativo, estos estudiantes comprenden los problemas, evidencian una resolución de problemas sistemática, son capaces de encontrar mas de una solución y realizar evaluaciones de los procesos llevados a cabo, por el contrario, los estudiantes con baja metacognición se limitan a memorizar soluciones, solo entienden los problemas pero hay una dificultad para aportar otras soluciones, no se evidencia un cumplimiento de los indicadores del pensamiento creativo.

Emre-Akdoğan, (2022) realizó una investigación con el fin de explorar el nivel de creatividad matemática evidenciada en el ejercicio de formular problemas matemáticos en el contexto de un proyecto de foto matemáticas, este trabajo se hizo con una muestra de 22 futuros profesores de matemáticas que se encuentran en primer año en un departamento de educación matemática en Turquía, específicamente en un curso de cálculo diferencial donde se trabajaron conceptos como el de función, limite y derivada. En concreto, gracias a esta investigación se pudo concluir que los futuros profesores de matemáticas pueden pensar creativamente mientras plantean problemas, por otra parte, forzarlos a plantear problemas matemáticos a través del uso de fotografías de objetos cotidianos los llevo a aumentar su pensamiento matemático y finalmente, uno de los hallazgos más relevantes fue el fuerte impacto que generan las experiencias previas de los estudiantes en el planteamiento y la resolución de problemas en entornos cotidianos del aula de matemáticas, es decir, aun cuando hayan contextos ricos ellos tienden a plantear reglas debido a su costumbre de trabajar con algoritmos.

Meier et al. (2023) realizaron un estudio para comparar 115 expertos en matemáticas, profesores de universidades de Austria, Alemania y Suiza con 109 novatos en el área, todos con género, edad y nivel educativo diferente, en primer lugar, realizar la comparación con respecto a una tarea de memoria matemática que requiere trabajar con información estructurada y no estructurada, por otro lado, compararlos a partir de tareas de dibujo que permiten analizar su nivel de creatividad matemática y creatividad general. Es así como los resultados de esta investigación les permitieron concluir que los expertos en matemáticas muestran una capacidad superior en el trabajo de memoria a corto plazo para el material del dominio especifico, en este caso, la matemática, así mismo, estos expertos también mostraron un mayor nivel de creatividad matemática pero no difirieron con respecto al grupo de novatos en el dominio de la creatividad general.

2.2 Marco teórico

Muchos autores han querido investigar y demostrar la relación que se prevé existe entre la creatividad matemática y el logro de aprendizaje en el área, en numerosos casos estos estudios han logrado resultados para apoyar esta dualidad como, por ejemplo, Mann (2005) quien postula que se puede fomentar el aprendizaje de la matemática de nuestros estudiantes a través del apoyo a su creatividad debido a su relación positiva. Sin embargo, para estudiar este tipo de relaciones a profundidad es imprescindible iniciar la revisión teórica desde el concepto general de la creatividad, analizar sus implicaciones en el aula, las formas como se ha evaluado, inspeccionar el camino histórico que ha llevado a hablar de creatividad en campos específicos como el que nos atañe que es puntualmente la creatividad matemática, explorar dentro del área cómo desarrollan nuestros estudiantes las competencias como la resolución de problemas y esta a su vez se convierte en una actividad que fomenta la creatividad en el aula, para finalmente hablar del potencial que tiene la tecnología como herramienta necesaria para promover la creatividad matemática.

2.2.1 Creatividad

Es común que escuchemos el término creatividad en cuantiosas conversaciones cotidianas, esto debido a que todos creemos tener claridad en su conceptualización y por ende lo usamos frecuentemente. Con todo y lo anterior surge una contradicción en el momento de rastrear la teoría acerca de la creatividad pues copiosos autores como es el caso de Kozlowski, Chamberlin & Mann (2019) han llegado a la conclusión que sigue siendo un desafío definir la creatividad, aunque sea una construcción psicológica que ha ganado popularidad en la investigación (Akgul & Kaveci, 2016).

En efecto, autores como Torrance (1966) definen la creatividad como el proceso de apreciar los problemas o lagunas de información, la formación de ideas o hipótesis, verificación y modificación de estas hipótesis y la comunicación de resultados, como un proceso (una sucesión de pasos) hasta obtener un producto, en otras palabras, de la misma Torrance (1984) la creatividad es un proceso en el que el individuo se vuelve sensible a los problemas. Es significativa la importancia que tiene desde las primeras concepciones el rol de las situaciones problema en el proceso creativo.

También cabe comparar que de manera concisa Simoton (2010) define la creatividad como la capacidad de producir cosas nuevas o conocimientos nuevos, un camino que había allanado Sternberg & Lubart (2000) quienes además postularon que estos resultados producto del proceso creativo deben ser útiles y adaptativos. Precisa advertir que, estas dos últimas características son más fáciles de evaluar a la luz de la definición de novedad y utilidad en los respectivos contextos sociales de los individuos o grupos que producen los resultados o productos creativos, tal como lo propone Plucker & Beghetto (2004). De esta manera, estas últimas características expuestas de la creatividad han llevado a los investigadores a proponer la distinción entre una creatividad extraordinaria y una cotidiana, haciendo especial énfasis en la utilidad del producto creativo y el contexto en el que se está evaluando, resultaría inadecuado valorar la creatividad de nuestros alumnos a la luz de los procesos creativos de matemáticos que han aportado a la construcción de la ciencia desde la postulación de axiomas y demostración de teoremas.

2.2.2 Proceso creativo

No cabe duda que existe un proceso creativo detrás de cada producto novedoso, algunos autores como Sadler-Smith (2015) citado por Kozlowski, Chamberlin & Mann (2019) han encontrado en el modelo Gestalt una guía para explicar este proceso creativo, este se expresa en cuatro etapas que son la preparación, la incubación, la iluminación y la verificación. Wallas (1926) desarrolló este sistema de cuatro etapas que se deriva en gran medida del trabajo de Poincaré (1948), justo es decir que se atribuye precisamente a Poincaré el nacimiento de la discusión sobre la creatividad matemática, este sistema se ha convertido en una guía aceptada y utilizada regularmente por muchos investigadores de la creatividad hasta el día de hoy (Sadler-Smith, 2015). La preparación y la verificación se consideran etapas conscientes, mientras que la incubación y la iluminación se consideran etapas inconscientes. Con respecto a esta distinción es pertinente recordar que Poincaré describe como las etapas inconscientes nunca dan fruto a menos que sean seguidas o precedidas por el trabajo consciente. Esto es importante aclararlo ya que en muchas ocasiones se ha dicho que las ideas para la solución de un problema llegan en momentos inesperados, pero esta iluminación es fruto de un trabajo inconsciente que el individuo realizó previamente de manera consciente y esa idea solución fue el resultado de las conexiones entre sus conocimientos, ideas preliminares y representaciones mentales.

De igual modo, Guilford (1975) postula que generalmente los académicos coinciden en considerar cinco y no solo cuatro fases del proceso creativo, tomando las enunciadas por Wallas y anexando la fase de concentración, en concreto cada etapa se puede definir como se muestra a continuación,

Preparación: adquirir habilidades, sentir y definir un problema.

Concentración: centrarse intensamente en el problema.

Incubación: retirarse del problema.

Iluminación: etapa que implica el surgimiento de una idea.

Elaboración (verificación): probar la idea.

Lo que nos lleva a apoyar la idea del proceso consciente e inconsciente del individuo en el proceso creativo, la etapa de concentración ayuda a que en la iluminación surjan las ideas que solucionaran el problema al que nos estamos enfrentando.

2.2.3 Creatividad matemática

Cuando pensamos en lo que significa realizar productos en el aula de matemáticas por lo general nos remitimos a las respuestas correctas de un conjunto de ejercicios propuestos por el docente, donde se espera que el estudiante aplique los algoritmos enseñados, sin embargo, Ginsburg (1996) plantea que la esencia de la matemática no es sólo producir respuestas correctas, sino pensar creativamente. Es decir, la creatividad matemática se manifiesta en los escolares en la formulación independiente de problemas matemáticos sencillos, en la búsqueda de formas y medios para resolverlos, la invención de pruebas y teoremas, la deducción independiente de fórmulas y la búsqueda de métodos originales para resolver problemas no estándar (Krutetskii, 1976).

Ahora bien, como en el caso de la creatividad acá tampoco hay una definición aceptada de manera general acerca de la creatividad matemática, haciendo que se convierta en un tema extremadamente difícil y probablemente imposible como lo menciona Leikin (2009). Desde luego, esta situación de ausencia de una definición aceptada en palabras de Mann (2006) se convierte en un obstáculo en el esfuerzo de la investigación en el campo, ya que sostiene que existen más de 100 definiciones contemporáneas de creatividad. En todo caso, se encuentran algunos puntos comunes en la teoría construída hasta el momento con relación a la creatividad matemática:

<u>Pensamiento divergente:</u> En este caso, se ha realizado la distinción entre pensamiento convergente y divergente, Guilford (1962) plantea que en el caso del primero se busca una solución única y correcta a un problema, mientras que en el pensamiento divergente se genera creativamente múltiples respuestas a un problema, dando paso con mayor frecuencia a un pensamiento flexible. Es por este mismo motivo que Haylock (1987) plantea la necesidad de explorar la posible relevancia de tareas de producción más divergentes, aunque parezca más natural asociar al tema con el pensamiento convergente en lugar de divergente.

<u>Capacidad de análisis y reflexión:</u> Como lo menciona Laycock (1970) esto se puede evidenciar en el análisis desde varias perspectivas de un problema dado, observando patrones, viendo semejanzas y diferencias, el estudiante es capaz de producir múltiples ideas y decidir

un método adecuado para abordar una situación matemática desconocida. Así mismo, Cornish & Wines (1980) plantean que esta capacidad permite extender patrones con números, formas, reorganizar modelos, redes, mapas, planos, transformar convenciones familiares en situaciones prácticas y predecir efectos.

Creatividad matemática profesional versus escolar: Debe existir una distinción entre la creatividad matemática a nivel profesional y a nivel escolar, esta última asociada a la resolución de problemas o planteamiento de problemas (Nadjafikhaha et al., 2013).

Etapas de la creatividad matemática: En este tema hay varias propuestas realizadas por investigadores que han categorizado la creatividad matemática de diversas maneras, algunas de las más aceptadas son,

Balka (1974) describió seis criterios diferentes para describir la creatividad matemática:

1. Capacidad de formular hipótesis en una situación matemática.

2. Capacidad para determinar patrones matemáticos en una situación matemática.

3. Capacidad de romper con los estereotipos mentales establecidos.

4. Capacidad de considerar y evaluar ideas matemáticas inusuales, pensar en sus consecuencias para una situación matemática.

5. Sentir lo que falta en una situación matemática y hacer preguntas que permitan completar la información matemática faltante.

6. Capacidad de dividir problemas matemáticos generales en subproblemas específicos.

Por su parte, Ervynck (1991) intentó describir tres niveles o etapas de la creatividad matemática, técnica preliminar, actividad algorítmica y creativa. Además, añade que el contexto para la creatividad establece una etapa preparatoria en la que los procedimientos matemáticos se vuelven interiorizados a través de la acción antes de que puedan ser objetos del pensamiento matemático.

1. Etapa preliminar: Consiste en algún tipo de aplicación técnica o práctica de reglas y procedimientos matemáticos, sin que el usuario tenga conocimiento alguno del fundamento teórico.

2. Etapa de la actividad algorítmica: consiste principalmente en realizar técnicas matemáticas, como aplicar explícitamente un algoritmo repetidamente.

3. Etapa de actividad creativa: conceptual, constructiva, la verdadera creatividad matemática ocurre y consiste en la toma de decisiones no algorítmica, las decisiones que deben tomarse pueden ser de naturaleza muy divergente y siempre implican una elección.

Siswono (2011) citado por Mann & Chamberlin (2019) describe cinco niveles de pensamiento creativo (LCT - Levels of Creative Thinking). Ella basa sus niveles en una combinación de fluidez matemática, flexibilidad y originalidad. Los estudiantes que obtengan los puntajes más altos del LCT en matemáticas demuestran las tres características y las utilizan para resolver, representar y plantear problemas, aunque tal vez no utilicen cada componente de la creatividad en cada situación de resolución de problemas.

2.2.4 Indicadores de la creatividad matemática

Mann & Chamberlin (2019) establecen que la relación entre el pensamiento creativo en matemáticas y las habilidades matemáticas radica en el pensamiento fluido, flexible y novedoso del individuo. En una prueba que evalúa algoritmos formales y definitivos, los procedimientos no recopilan evidencia precisa de la capacidad matemática general de un estudiante con altos niveles de pensamiento creativo matemático. Mirándolo así, la creatividad matemática en su conjunto puede interpretarse como una amalgama de cuatro indicadores (originalidad, fluidez, flexibilidad y elaboración).

En esta dirección Leikin (2007) define tres de los componentes de la siguiente manera, la fluidez como la capacidad de producir muchas ideas, en el caso de la flexibilidad es el número de enfoques que se observan en una solución y finalmente la originalidad matemática o también llamada novedad hace referencia a la posibilidad de albergar ideas extraordinarias, nuevas y únicas. El indicador final y más recientemente incorporado de la creatividad matemática es elaboración (Imai, 2010). Este describe la capacidad de un individuo para dar un razonamiento en profundidad, alguien que demuestre altos indicadores de elaboración podrá justificar un razonamiento matemático y proporcionar explicaciones sólidas de por qué es una solución adecuada (Kim, Cho & Ahn, 2004).

Evaluando el rastreo de los rasgos principales de la creatividad según diversos autores realizada por Mallart & Deulofeu (2016), se puede evidenciar cuales son los indicadores más frecuentes en las distintas investigaciones sobre la creatividad matemática, tal como se muestra a continuación,

Tabla 1. Rastreo indicadores creatividad matemática.

	Guilford 1950	Barron 1969	Logan 1980	Amabile 1983	Marín, Torre 1991	Sternberg 1999	Paz 2004	Violant 2006
Fluidez	✓		✓		✓		✓	✓
Flexibilidad	✓		✓		✓		✓	✓
Originalidad	✓	✓	✓		✓		✓	✓
Elaboración	✓		✓		✓		✓	✓
Análisis	✓		✓		✓	✓	✓	✓
Síntesis	✓		✓		✓	✓	✓	✓
Redefinición	✓		✓		✓		✓	✓
Tolerancia		✓	✓					
Independencia de juicio		✓	✓					
Energía		✓						
Apertura a impulsos y fantasías		✓	✓					
Intuición		✓						
Espontaneidad		✓						
ingenio			✓					
Inventiva			✓		✓		✓	✓
Curiosidad			✓					
Desafío al riesgo			✓					
Abierto			✓					
Comunicación			✓		✓		✓	✓
Sensibilidad a problemas			✓		✓		✓	✓
Destrezas de campo				✓				
motivación intrínseca				✓		✓		
Talento				✓				
Estilo cognitivo				✓				

Estilo de trabajo	✓				
Generación de ideas	✓				
Generación de actitudes	✓				
Apertura mental		✓		✓	✓
Pensamiento Práctico			✓		
Personalidad			✓		
Contexto medioambiental			✓		
Expresión				✓	
Sentido del humor				✓	
Factor sorpresa				✓	

Fuente: Tomado de Mallart & Deulofeu (2016).

De manera que, después del rastreo que se observa en la tabla 1 se puede identificar que además de los 4 indicadores de creatividad matemática trabajados generalmente se puede ver la convergencia de 5 indicadores más para describir en detalle las 4 fases del proceso creativo en la resolución de problemas matemáticos. Por esta razón, apoyados en el estudio de Mallart & Deulofeu (2016) se pueden definir estos 9 indicadores como se muestran a continuación en la tabla 2.

Tabla 2. Definición indicadores creatividad matemática.

Abrev.	Indicador	Definición
I_01	Sensibilidad a problemas	Se refiere a la habilidad de un individuo para comprender, analizar y resolver problemas matemáticos de manera efectiva y precisa.
I_02	Originalidad	Es la capacidad para producir respuestas novedosas, poco convencionales, lejos de lo establecido y de lo usual, únicas, irrepetibles y auténticas.
I_03	Flexibilidad	Capacidad de desplazarse de una idea a otra, de un contexto a otro, dando respuestas variadas, modificando y moldeando ideas, haciéndose replanteamientos, reorientaciones y transformaciones de las situaciones u objetivos originales, superando la propia rigidez.
I_04	Elaboración	Capacidad para desarrollar o perfeccionar una idea o producción original alcanzando niveles de complejidad y

		detalle. Es la capacidad de agregar elementos al procesar la información, ampliando y profundizando.
I_05	Análisis	Capacidad para estudiar una realidad determinando los límites del objeto, criterios de descomposición del todo, determinar las partes del todo y tratar cada parte por separado para así descubrir nuevos sentidos y relaciones entre los elementos del conjunto.
I_06	Síntesis	Capacidad para comparar las partes entre sí, rasgos comunes y diferencias, y descubrir nexos entre las partes para elaborar conclusiones acerca de un nuevo todo, elaborando esquemas, organizando la información y extrayendo los rasgos más valiosos.
I_07	Comunicación	Capacidad de transmitir y compartir mensajes de manera convincente; se captan las necesidades insatisfechas como mensajes, resolviendo dichas necesidades como mensajes de respuesta.
I_08	Redefinición	Capacidad de reestructuración y reconstrucción a partir de información conocida, con el objeto de transformar un fenómeno concreto de la realidad, encontrando aplicaciones y definiciones diferentes a las habituales.
I_09	Productividad o fluidez	Capacidad de generar una amplia gama de soluciones matemáticas de forma ágil y eficiente.

Fuente: Adaptado de Mallart & Deulofeu (2016).

2.2.5 *Creatividad matemática en el aula*

Sin lugar a dudas, un motivo que destaca en las investigaciones realizadas en este campo es la consecución de elementos que permitan fomentar la creatividad matemática en el aula, al respecto, Sternberg (2006) plantea que esta habilidad se debe tratar como una práctica deseable. Es decir, se necesitan oportunidades para ejercitar la creatividad, esto implica que los estudiantes deben estar dispuestos a tomar riesgos sensatos, a ver los problemas convencionales en nuevas formas. Por su parte, Haylock (1987) pone sobre la mesa la importancia del papel del docente de matemáticas en esta tarea, pues reconoce que existe una necesidad vital de que ellos identifiquen, fomenten y mejoren la capacidad matemática creativa en todos los niveles.

Para este fin, los profesores deben apoyar su tarea en el uso de patologías matemáticas, las cuales Sriraman & Dickman (2017) definen como los objetos matemáticos “preparados” para proporcionar ejemplos interesantes de comportamiento contrario a la intuición, estas patologías en conjunto forman entornos creativos donde los estudiantes compartan sus conocimientos, sus ideas, donde los profesores no ofrezcan la solución sino consejos necesarios que ayuden al estudiante a reflexionar sobres sus propias ideas e involucrarse en situaciones problema desafiantes (Nadjafikhah et al. 2013), apoyando esta tarea Neumann (2007) opina que estos entornos eficaces son el resultado de interacciones entre los estudiantes y además experiencias previas. Habría que decir también que no todo es el resultado de conocimientos que ya tienen los estudiantes sino que existen también elementos que enriquecen estos entornos como el estado de duda, es así que Beghetto & Schreiber (2017) resaltan la importancia de este circunstancia para desencadenar el proceso de aprendizaje creativo, así mismo propone para tal fin, el razonamiento abductivo como un enfoque para estimular la creatividad, este razonamiento comienza con una observación y luego busca encontrar la explicación más probable, representa una forma especial de razonamiento creativo que se desencadena por estados de duda genuina, como suele surgir cuando no podemos explicar un fenómeno observado.

Es importante recordar que existen unos indicadores y por lo tanto estos mismos serán la base para medir el fomento de la creatividad en el aula, partiendo de esto Silver (2007) propone lo que él llama las tareas de resolución y planteamiento de problemas o PSPPT (por sus siglas en inglés, Problem-solving and problem-posing tasks) las cuales requieren de una formulación de estrategia, un intento de implementar la estrategia, una reformulación de la estrategia y eventualmente, una solución al problema. Esta secuencia de modificación del pensamiento durante el proceso de resolución de problemas juega un papel importante en el desarrollo de una disposición general altamente creativa hacia las matemáticas. En este sentido, existen dos posibles planteamientos en el aula para el docente:

1. A través del proceso de resolución de problemas, los estudiantes demuestran la capacidad de resolver problemas encontrando múltiples caminos de solución (fluidez), cambiando de rumbo cuando encuentran un obstáculo (flexibilidad) y encontrando formas eficientes y originales de resolver problemas (novedad).

2. A través del proceso de plantear sus propios problemas, los estudiantes practican la escritura de una variedad de problemas (fluidez), crean problemas

que conducen a pensamientos divergentes y a impases mentales (flexibilidad) y analizar un problema y crear un problema que es diferente (novedad).

Esto quiere decir que los problemas planteados deben tener unas características muy específicas para poder cumplir con el objetivo que se propone en el entorno creativo, una de ellas mencionada por Mann (2006) es el tema de que los problemas sean de naturaleza abierta pues las experiencias con este tipo de situaciones brindan a los estudiantes oportunidades para revelar su comprensión conceptual y además en palabras de Leikin (2009) se evita el énfasis en algoritmos, reglas y procedimientos de modo que los estudiantes experimentaran los problemas con varias respuestas correctas, ver un problema de diferente manera y encontrar soluciones elegantes al problema. Estas tareas de solución múltiple (MST - Multiple-Solution task) definidas por Leikin (2009) son problemas matemáticos que podrían resolverse de diferentes maneras. Las soluciones se consideran diferentes si se basan en diferentes representaciones de algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea, diferentes propiedades (definiciones o teoremas) de objetos matemáticos dentro de un campo particular, o diferentes propiedades de un objeto matemático en diferentes campos (pág. 133).

2.2.6 Evaluación de la creatividad matemática

Hay que advertir la dificultad que representa la evaluación de estos indicadores dentro del aula para los docentes y aún más desafortunado es que las pruebas en el área de matemáticas que se usan en las instituciones educativas valoran principalmente la velocidad y la precisión, descuidando las habilidades de pensamiento crítico y creativo (Mann, 2005). En este sentido, Haylock (1987) plantea la necesidad de que las experiencias de los estudiantes con las matemáticas se amplíen para incluir, por ejemplo, trabajos de investigación matemática, de modo que se les sitúe en situaciones en las que no haya una única respuesta correcta o una línea de investigación aceptable. Por esta razón, varios educadores de matemáticas han explorado la viabilidad de utilizar actividades de producción divergentes en situaciones matemáticas como una forma de identificar la flexibilidad de los procesos mentales destacados por Krutetskii (1976) como un componente importante de la capacidad matemática. Así mismo, es importante mencionar que las diversas pruebas que utilizan producción divergente en matemáticas muestran de hecho una gran variedad tanto en términos de construcción como de administración. La mayoría son pruebas administradas en grupo, con papel y lápiz, pero algunas utilizan otros enfoques. Hay tres énfasis recurrentes que pueden discernirse mediante el análisis de muchas pruebas de producción divergente utilizadas en matemáticas. Estos pueden denominarse resolución de problemas, planteamiento de problemas y redefinición,

1. Resolución de problemas: Son simplemente problemas matemáticos con muchas soluciones.
2. Planteamiento de problemas: Prouse (1967) y Balka (1974) utilizaron preguntas en las que al estudiante se le presenta un párrafo que contiene información numérica y luego se le pide que escriba tantas preguntas como sea posible sobre la situación. Jensen (1973) utilizó un enfoque similar, pero las situaciones presentadas a los estudiantes también contienen información gráfica.
3. Redefinición: Dar a los alumnos situaciones a las que puedan responder de muchas maneras, variadas y originales, solo redefiniendo continuamente los elementos de la situación en términos de sus atributos matemáticos.

2.2.7 Uso de la tecnología en el desarrollo de la creatividad matemática

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en el año 2000 propuso que, con la ayuda de la tecnología, el docente puede abordar eficazmente el desafío de organizar la enseñanza de las matemáticas de tal manera que atraiga y desarrolle las habilidades del mayor número posible de estudiantes. En este caso puntual, nos referimos a la competencia de resolución de problemas y la habilidad de creatividad matemática, que definitivamente necesitan un trabajo que estimule la curiosidad y despierte el deseo de una comprensión profunda (Idris, 2010). Se ha demostrado que la tecnología puede estimular proyectos que enseñen a los estudiantes a trabajar en equipo, resolver problemas y potenciar el pensamiento crítico, además de aumentar su entusiasmo por aprender. Además, la tecnología puede empoderar y proporcionar a los estudiantes todas las herramientas necesarias para promover la creatividad ya que tiene la capacidad de enriquecer el contenido de las experiencias de aprendizaje de los estudiantes, brindar mayor flexibilidad y brindarles un papel más autosuficiente en su propia educación. Tener diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, compararlas simultáneamente y ahorrar tiempo valioso y limitado con el que cuentan los docentes. Desde luego, para motivar a los estudiantes y aumentar su entusiasmo no es únicamente papel de las herramientas tecnológicas, es importante también que la instrucción sea lo suficientemente flexible como para crear espacio y así prospere la creatividad.

2.2.8 Resolución de problemas y creatividad matemática

No es fortuito que la creatividad siempre se relacione con un producto fruto del proceso creativo, la creatividad matemática no es la excepción, siempre se espera evaluar esta habilidad de los estudiantes a partir de un producto novedoso que en esta coyuntura sería la solución a una situación problema, por tal motivo no es sorpresivo que Leikin (1997) postule a la competencia de la resolución de problemas como un vehículo para incitar el pensamiento creativo y de una manera más amplia no solo la solución sino también el planteamiento de situaciones que tiendan a provocar procesos matemáticos creativos. En investigaciones más recientes como es el caso de Nadjafikhah et al. (2013) no solo se destaca el papel de la creatividad como componente principal en la educación matemática sino se ha avanzado en el diseño de instrumentos para fomentar la creatividad matemática en el aula, donde muchos de estos giran en torno a las situaciones problema y sus características para ser realmente eficientes.

Según el Ministerio de Educación Nacional - MEN (2006) la competencia matemática de la resolución de problemas se define como el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contexto relativamente nuevos y retadores. Habría que decir también que para el MEN estas competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar niveles de competencia más y más complejos.

El modelo Polya (1984) aplicado a la resolución de problemas aritméticos se expone a partir de cuatro fases:

Fase 1: Entender el problema: Se debe entender lo que se pide. De esta manera, el estudiante podrá diferenciar cuál es la incógnita que debe resolver, cuáles son los datos y cuál es la condición.

Fase 2: Configurar un plan: El docente debe ayudar a sus estudiantes a concebir un plan a través de preguntas y sugerencias para que el alumno se vaya formando alguna idea hasta lograr completar el plan que le llevará a la solución.

Fase 3: Ejecutar el plan: El estudiante debe aplicar el plan que ha concebido, para ello debe aplicar los conocimientos ya adquiridos, hacer uso de las habilidades del pensamiento y de la concentración sobre el problema a resolver (Polya, 1984, p. 33).

Fase 4: Mirar hacia atrás: También llamada visión retrospectiva, se refiere al momento en que el estudiante vuelve a examinar el plan que concibió, así como la solución y el resultado obtenido.

Una tarea esencial para los docentes es encontrar problemas adecuados en los niveles apropiados para estimular la creatividad de los estudiantes dado que se requiere que los estudiantes sean reflexivos y se espera que sean conscientes de su propia cognición para monitorear su propio aprendizaje, es decir, debe existir una participación activa y constructiva para aprender con comprensión.

Como lo menciona Callejo (1996) el tipo de problema que se propone a los estudiantes debe ser un “verdadero problema” teniendo en cuenta los siguientes elementos, el pensamiento que se potencia (plausible y demostrativo), el uso y gestión del tiempo (no puede preverse de antemano) y la evaluación de los alumnos (valorar el proceso y progreso, no solo el resultado). Esto dado que en la mayoría de las situaciones dentro del aula de matemáticas se pone de relieve la justificación de la solución y no la génesis o el proceso de la misma, cuando ambas son caras indisociables de la actividad matemática, ya lo decía Lakatos et al. (1986) y es que muchas veces se oculta la aventura.

III

3. METODOLOGÍA

La metodología que se utilizó en esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo. Ahora bien, se analizaron protocolos de información verbal, respuestas dadas por los estudiantes en los dos formularios (comprensión y retroalimentación), pantallazos de las soluciones halladas y los procesos planteados por los estudiantes a través de la observación de las grabaciones de las pantallas de los equipos en que trabajaron los estudiantes.

3.1 Población

La población seleccionada son 65 estudiantes de undécimo grado del Colegio Facundo Navas Mantilla, colegio público que se encuentra en la zona urbana del municipio de Girón, departamento de Santander. Los estudiantes están organizados en 2 cursos, todos en jornada única; sus edades están comprendidas entre los 14 y los 19 años (promedio de 17 años), 57% de estudiantes mujeres.

3.2 Muestra

Se seleccionó una muestra aleatoria de 5 estudiantes para que interactuaran en dos sesiones de reconocimiento del AVA y cinco sesiones de solución de las situaciones problema propuestas. Se realizaron dos encuentros por semana, cada encuentro tuvo una duración de aproximadamente 2 horas.

3.3 Diseño del Ambiente Virtual de Aprendizaje

Para el AVA llamada Aula Creativa Creati-Math se eligió la aplicación en línea gratuita Google Sites que hace parte de la suite de Google, esta permite crear sitios web de manera intuitiva, adaptados a diferentes dispositivos y tamaños de pantalla y además funcionó de manera eficiente como integradora de los formularios, las imágenes interactivas realizadas en Genially para sintetizar el proceso cíclico de resolución de problemas y permitió incorporar todas las características que se necesitaban para la investigación.

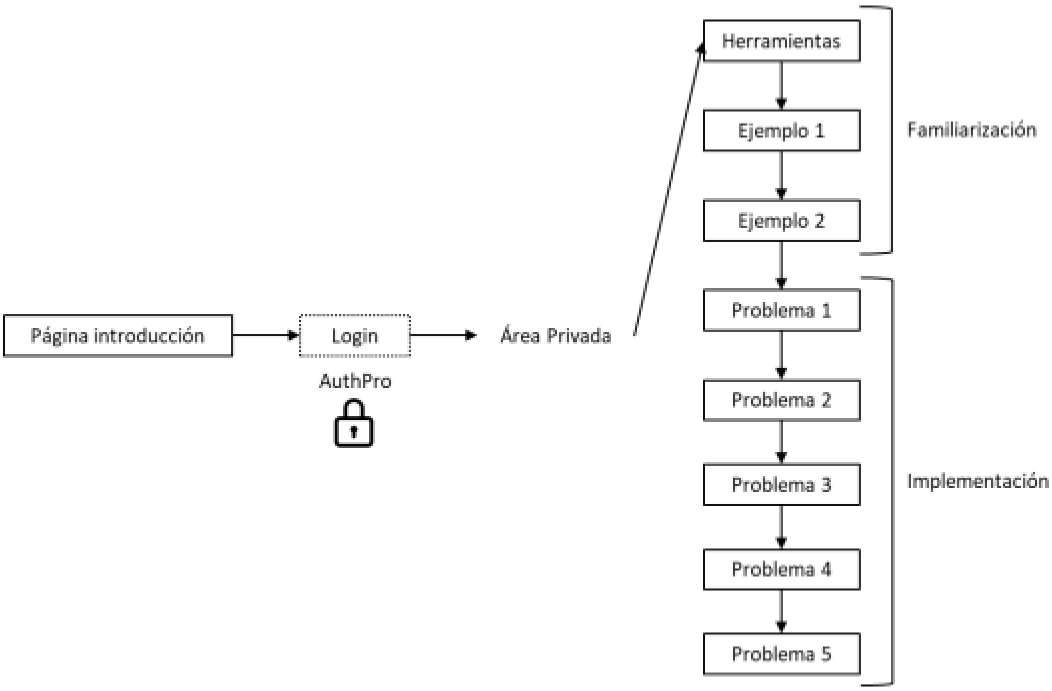
Figura 1. Pantallazo Aula Creati-Math

Fuente: Elaboración propia.

Para el diseño del ambiente se tuvieron presentes las siguientes características:

- <u>Acceso del sujeto</u>

Figura 2. Organización estructura AVA.



Fuente: Elaboración propia.

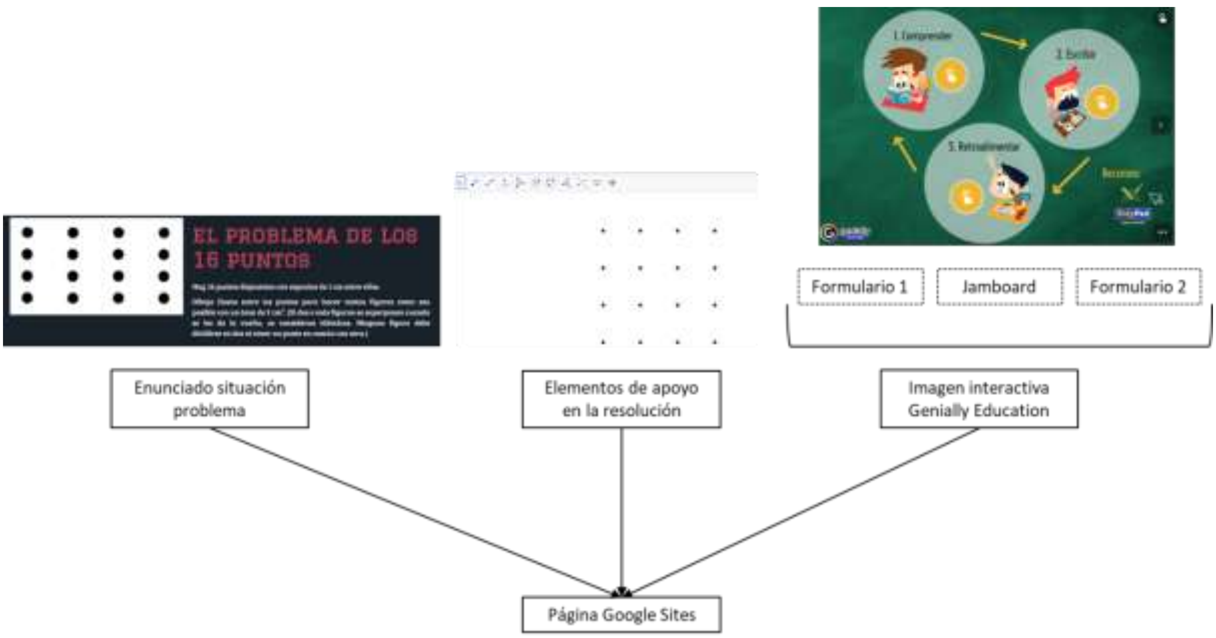
Este atributo se logró gracias a la integración del sitio web AuthPro dentro del AVA, en la página de inicio o introducción existe un botón de ingreso que está enlazado con AuthPro y permite loguear a los sujetos con usuarios y contraseña, los cuales fueron creados con anterioridad desde el perfil del investigador. Este sitio web en su versión gratuita permite la creación de máximo 10 perfiles y su correspondiente administración de datos como permanencia en el sitio, último ingreso, modificación de usuarios, entre otros.

- <u>Estructura de la navegación en cada situación problema</u>

Cada página del AVA en la que había una situación problema tenía tres elementos principales, el enunciado del problema, en la mayoría de los casos acompañados por un gráfico o imagen ejemplo, un elemento de apoyo para la solución, que eran simuladores hechos por el investigador en el software GeoGebra con la intención de brindar herramientas a los estudiantes como por ejemplo la construcción de objetos geométricos adicionales, la medición de longitudes, áreas, volúmenes, entre otras potencialidades que ofrece el software. Finalmente, se encuentra una imagen interactiva diseñada en Genially Education donde se integraban dos formularios y un Jamboard o pizarra.

Tanto los formularios como la pizarra de Jamboard también hacen parte de la suite de Google. En el caso de los últimos dos elementos de la página (simulador en GeoGebra e imagen de Genially) estaban incrustados por medio de código HTML, esto permitía que los sujetos realizaran la interacción dentro de la misma página de Google Sites.

Figura 3. Estructura página Google Sites AVA.



Fuente: Elaboración propia.

Tanto los sujetos como el investigador contaban con cuenta institucional de Google, por esta razón todos los avances quedaban guardados en tiempo real en la nube.

- Problemas seleccionados

Se seleccionaron 5 problemas en total, extraídos todos de pruebas realizadas en investigaciones anteriores y validadas por Lee, Hwang & Seo (2003) para evaluar la creatividad matemática, este test fue aplicado a 462 estudiantes de segundo grado de escuelas secundarias en Daejeon, Corea del Sur, en el mencionado estudio se obtuvo un coeficiente de confiabilidad ($\propto$ de Cronbach) de 0.80. El cuestionario original se encuentra en inglés por lo cual fue traducido y adaptado al contexto de los estudiantes participantes de la implementación, entre los criterios elegidos para esta selección se tuvo en cuenta el nivel de dificultad y la posibilidad de múltiples respuestas, en esta misma investigación se clasifican los cinco problemas según criterio numérico que representa su dificultad, siendo otorgado los menores valores para los problemas más fáciles y los valores mayores para los que se consideran los más difíciles,

Tabla 3. Nivel dificultad problemas AVA.

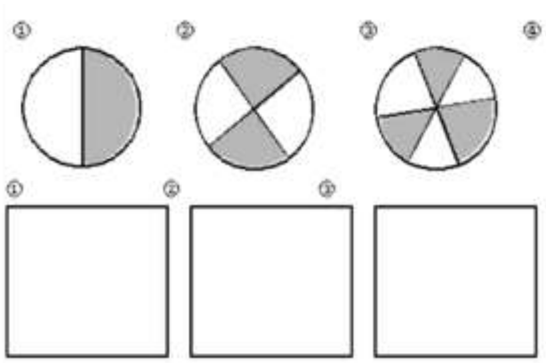
Ítem	1	2	3	4	5
Dificultad	-.22	-.41	.23	-.1	.4

Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Ejemplo 1.

Dividir el cuadrado dado de varias maneras de forma que el área sombreada sea igual al área no sombreada, como se muestra en el ejemplo del lado.

Figura 4. Ejemplo 1.

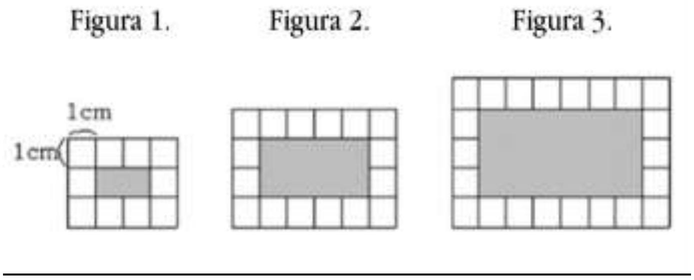


Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Ejemplo 2.

Las siguientes figuras están construidas con cuadrados de papel de 1 cm,

Figura 5. Ejemplo 2.



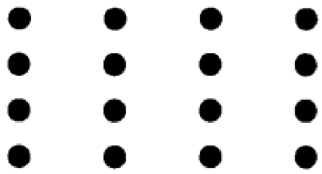
Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

- ¿Cuántos cuadrados se necesitarán para la figura 7?
- Puede existir otra forma de contar los cuadrados de papel de la figura 7, ¿puedes explicar esas formas?

Problema 1.

Dibuja líneas entre los puntos para hacer tantas figuras como sea posible con un área de 2 cm^2. (Si dos o más figuras se superponen cuando se les da la vuelta, se consideran idénticas. Ninguna figura debe dividirse en dos ni tener un punto en común con otra.)

Figura 6. Disposición puntos problema 1.



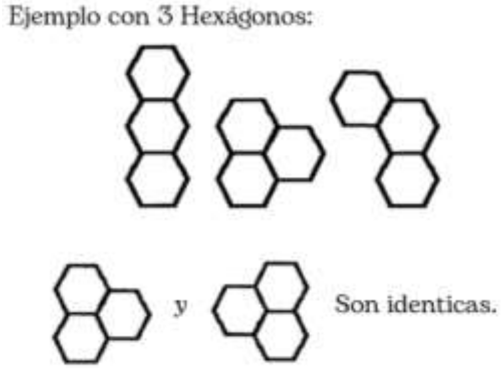
Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Problema 2.

Como se muestra en el siguiente ejemplo, se pueden unir 3 hojas de papel con forma de hexágono regular a lo largo de los lados de 3 maneras.

Luego, haz todos los dibujos de cómo unir 6 hojas de papel en forma de hexágono regular por los lados. Como en el siguiente ejemplo. (Si dos figuras se superponen cuando se les da la vuelta, se consideran idénticas).

Figura 7. Ejemplo y explicación problema 2.

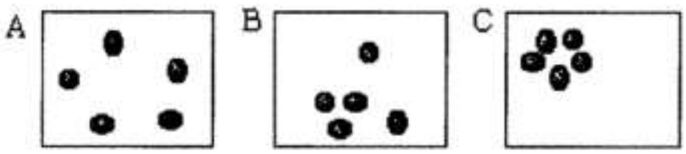


Fuente: Modificado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Problema 3.

Tres estudiantes, A, B, C, lanzaron cada uno cinco canicas, que quedaron en reposo como se muestra; en este juego, el ganador es el estudiante con la menor dispersión de canicas. El grado de dispersión parece disminuir en el orden A, B, C. Idee tantas formas como pueda para expresar numéricamente el grado de dispersión.

Figura 8. Disposición canicas problema 3.

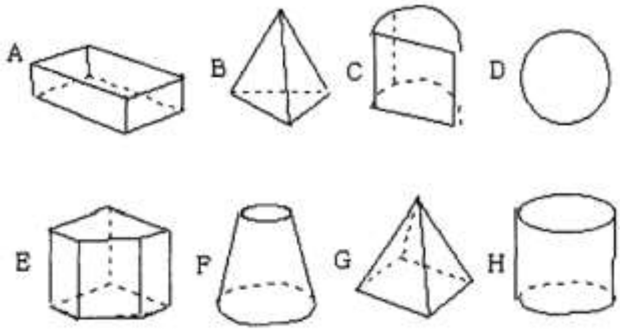


Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Problema 4.

Considere las figuras sólidas como se muestran. Elige una o más figuras que compartan las mismas características que la figura B y anota esas características.

Figura 9. Figuras geométricas problema 4.

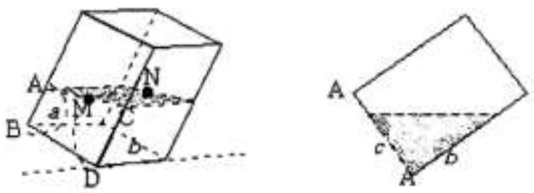


Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

Problema 5.

Un recipiente transparente con forma de prisma rectangular recto está parcialmente lleno de agua. Cuando se coloca sobre una mesa y se deja un borde de su base fijo, varias formas geométricas de varios tamaños se forman entre las caras del cuboide y la superficie del agua. Las formas y tamaños pueden variar según el grado de inclinación. Intente descubrir tantas relaciones invariantes (reglas) relativas a estas formas y tamaños como sea posible. Anote todos tus hallazgos.

Figura 10. Ejemplo recipiente problema 5.



Fuente: Tomado de Lee, Hwang & Seo (2003).

- Instrumentos

Para la recolección de los datos se crearon dos instrumentos que son formularios de Google, uno con el objetivo de evaluar la comprensión del problema y la concepción del plan y el otro para forzar la retroalimentación de los sujetos después de solucionados los problemas.

F1 - Formulario de comprensión:

P1: ¿Qué me están preguntando?

P2: ¿Cuáles son los datos que me ofrece el enunciado para la solución del problema?

P3: ¿Cuál es el plan a seguir para resolver la situación planteada?

P4: ¿Cuáles estrategias usara para solucionar la situación problema?

F2 - Formulario retroalimentación:

P1: Para solucionar el problema:

A. Aplicó el plan diseñado previamente
B. Lo aplicó, pero modificado.
C. No lo aplicó.

P2: ¿Cuántas soluciones diferentes al problema encontró?

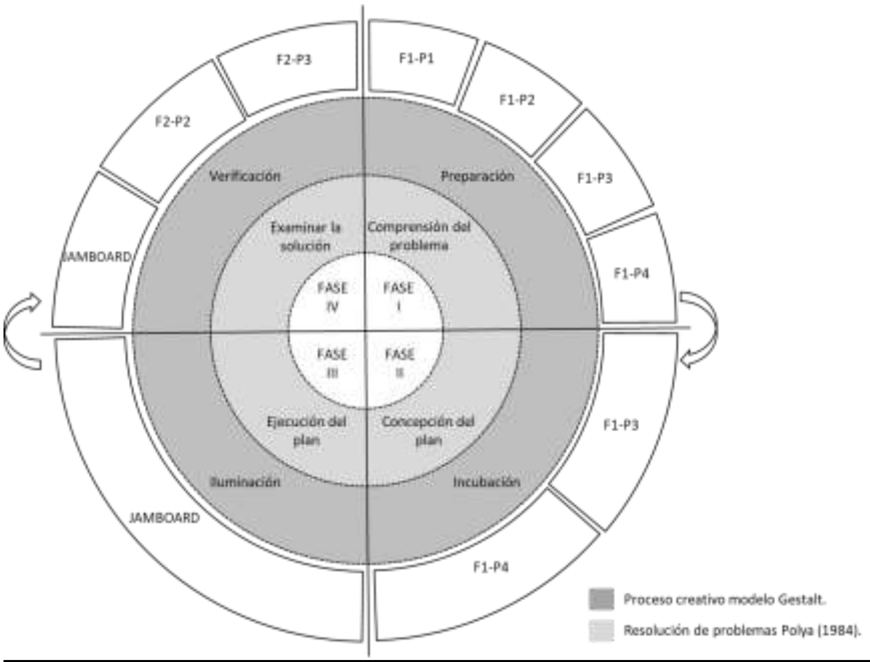
P3: ¿Por qué las soluciones planteadas responden a lo que pide la situación problema?

P4: ¿Por qué considera que las soluciones aportadas son creativas?

P5: ¿Qué elementos considera que harían sus soluciones más creativas?

Así mismo, como se observa en la figura 11, cada uno de estos instrumentos se relacionan con una de las fases del proceso de resolución y creativo. Además de los formularios descritos anteriormente, también se recolecto información proveniente de las pizarras del Jamboard que quedan almacenadas en la nube de la suite de Google.

Figura 11. Organización de los instrumentos en las fases del proceso.



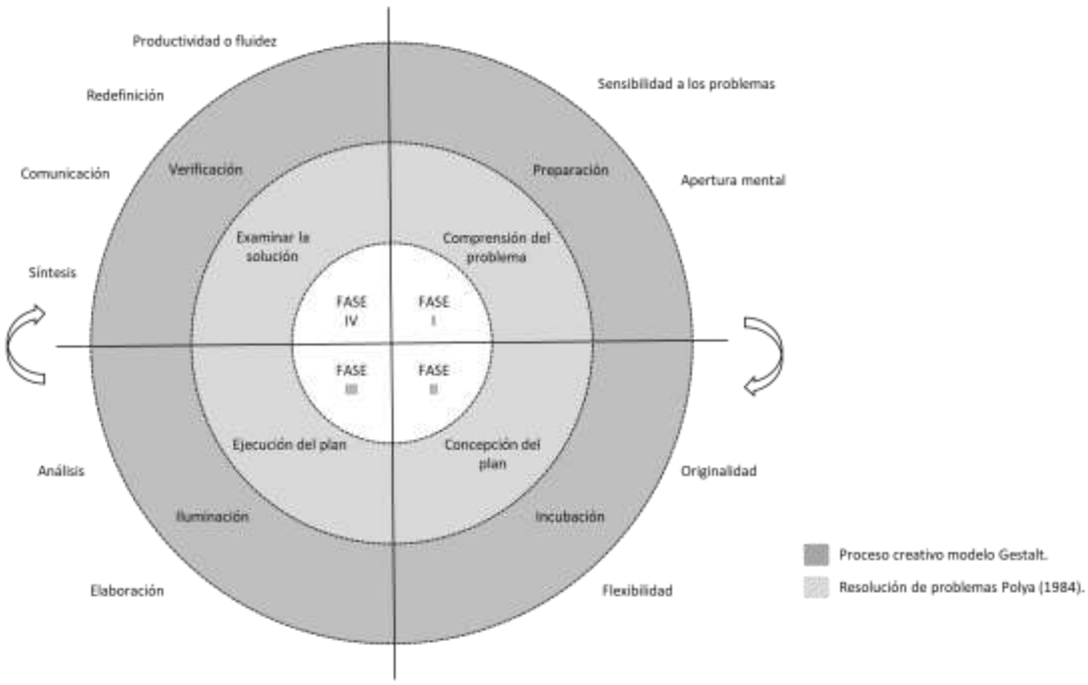
Fuente: Elaboración propia.

Con el ánimo de apoyar el análisis de la navegación del estudiante en el AVA se grabaron las pantallas de los computadores donde trabajaron, incluyendo el audio, con ayuda del programa gratuito OBS, estas grabaciones se utilizaron para la construcción de los protocolos verbales que se encuentran en el anexo 1 y se convierten en instrumentos fundamentales para el análisis del razonamiento y la implementación de las estrategias, debido a que no solo se transcribieron los diálogos de los estudiantes sino que también se cuenta con comentarios hechos a manera de observador por parte del investigador, estas líneas se encuentran subrayadas con otro color dentro de los protocolos para hacer la distinción.

- Fases del proceso:

Con el ánimo de organizar el proceso de análisis se definen cuatro fases que involucran tanto la resolución de problemas, el proceso creativo llevado a cabo en esta solución y los indicadores de la creatividad matemática. En la figura 12 se puede apreciar que el diseño de la estrategia corresponde a la Fase I y II, donde están involucrados la comprensión del problema y la concepción del plan, en cuanto a la ejecución de la estrategia se observa en la fase III y finalmente la evaluación de la estrategia planteada por cada estudiante se analizara y evaluara en la fase IV.

Figura 12. Fases del proceso resolutivo y creativo con sus indicadores.



Fuente: Elaboración propia.

IV

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El análisis de los resultados se segmentará en 3 partes principalmente, primero se identificarán los elementos asociados a la creatividad matemática presentes en las estrategias propuestas por los estudiantes para la solución de las situaciones problema, seguidamente se clasificarán estas estrategias y finalmente se propone un modelo del proceso creativo seguido por los estudiantes.

4.1 Elementos asociados a la creatividad matemática presentes en las estrategias

Para identificar los elementos asociados en estas estrategias propuestas por los estudiantes se seguirá el siguiente proceso:

i. Se analizarán los protocolos verbales presentes en el anexo 1 de este trabajo de investigación y se clasificarán las líneas según los indicadores de creatividad matemática y su definición presente en la tabla 2.

ii. Con ayuda de las preguntas 3 y 4 del formulario 1 (formulario de comprensión) se identificarán los planes y estrategias que proponen los estudiantes para la resolución de cada uno de las situaciones, estas se transcriben de manera literal.

iii. Para cada problema se hace un análisis cualitativo, organizado en forma de tabla con caracterización general y observaciones particulares para cada indicador. Además, se asigna un puntaje por indicador y por sujeto de acuerdo con la tabla 4. Vale la pena aclarar que en este mismo cuadro está indicado el instrumento o la parte de él que se evaluara para detallar este puntaje en cada sujeto, además, para el indicador de Originalidad se trabajó con una valoración presente en el anexo 2 y que fue adaptada de Lee, Hwang & Seo (2003) y para la Fluidez o Productividad todos los autores coinciden en que se debe puntuar de acuerdo a la cantidad de respuestas correctas halladas por los sujetos en estudio; particularmente la pregunta 1 del formulario 2 les preguntaba a los sujetos por el número de respuestas encontradas, sin embargo, estas respuestas son revisadas por el investigador para corroborar esa puntuación.

Tabla 4. Valoración indicadores creatividad matemática.

Indicador	Valor		Lugar evaluado
Sensibilidad a los problemas	0	No comprende la situación problema ni identifica los datos importantes para la solución.	P1 y P2 del formulario 1
	1	Comprende la situación problema o identifica los datos importantes para la solución.	
	2	Comprende la situación problema e identifica los datos importantes para la solución.	
Originalidad	Mayor puntaje según tabla de cuantificación del Anexo 2 (puntajes desde 0 hasta 3).		P3 y P4 del formulario 1
Flexibilidad	0	Rigidez en el razonamiento.	P3 y P4 del formulario 1
	1	Capacidad sesgada para dar todas las respuestas variadas.	
	2	Aborda el problema desde diferentes perspectivas.	
Elaboración	0	Desorganizado.	Jamboard
	1	Impreciso parcialmente.	
	2	Organizado.	
Análisis	0	Incapacidad de descubrir relaciones.	Jamboard
	1	Escaso descubrimiento de relaciones.	
	2	Descomposición en partes del todo, descubrimiento de relaciones.	
Síntesis	0	No se extraen ideas relevantes.	Jamboard + P3 del formulario 2
	1	Información sesgada.	
	2	Hilo coherente a partir de ideas relevantes.	
Comunicación	0	Difícil interpretación, no contesta la pregunta.	Jamboard + P3 del formulario 2
	1	Parcialmente inteligible.	
	2	Conciso y claro.	
Redefinición	0	No se desvía de las propiedades atribuidas a los objetos presentes.	Jamboard
	1	Usa algún método o propiedad deducida.	

Productividad o Fluidez	Cantidad de respuestas halladas.	P2 del formulario 2

Fuente: Elaboración propia.

iv. Finalmente, basados en estos análisis anteriores se redacta una descripción cualitativa de los elementos identificados para cada uno de los problemas planteados a los sujetos.

4.1.1 Análisis Problema 1

Protocolo verbal

Línea	Verbalización	Indicador
	Sujeto 1	
L3	Ninguna figura debe dividirse en 2, ¿cómo así?	I_03
L6	Supongo que hago así y así, como así y así (realiza cuadrados utilizando algunos de los 16 puntos), porque serían dos figuras.	I_05
L7	¿Será que le tomó captura o lo dibujo mejor?	I_07
L14	Empieza a realizar figuras con un área "más grande", quizás ya tiene un patrón de área regular y hace todas las figuras a partir de cuadrados y triángulos.	I_04
L17	Para que me dé el área toca con figuras que tengan cuadrados y triángulos.	I_03, I_04, I_05
L20	Piensa un momento y evidencia que el punto donde inicia debe ser el mismo punto donde "cierre" su polígono.	I_06
L23	Identifica cuando dos figuras son exactamente iguales, solo que han sido producto de rotaciones o traslaciones.	I_05, I_06
	Sujeto 2	
L2	Esto es lo mismo de la vez pasada pero con cuadritos.	I_01
L10	Sigo pensando en lo que dice de los puntos.	I_01
L16	A partir de una figura en la que se excede el área establecida construye una nueva figura que cumpla "quitando" un parte.	I_05
	Sujeto 3	
L3	Lo mismo que … lo mismo que antes.	I_01

L7	El estudiante realiza su segundo polígono de área 2 cm^2 y se percata que es el mismo que colocó como polígono 1 en el Jamboard, identifica que simplemente es el mismo triángulo trasladado.	I_05
L11	¿Hay un número de figuras que debamos encontrar?	I_05
	Sujeto 4	
L4	El estudiante obtiene una figura con área 0 dado que al construirla corta dos de sus aristas entre sí, entonces queda pensativo sobre lo que pudo ocurrir para que el software calcule esa área como 0.	I_05
L5	Esta figura sí me sirve.	I_05
	Sujeto 5	
L3	Reconoce la condición de evaluar las soluciones para garantizar que sean diferentes a las anteriormente propuestas.	I_05
L4	Con pocas figuras halladas intenta hacer una configuración donde hallan varias figuras de 2 cm^2 usando solo los 16 puntos y sin compartir vértices.	I_06
L5	Me he dado cuenta que las figuras que tienen área 2 son las que utilizan tres puntos seguidos, así sea diagonal, vertical u horizontal.	I_04, I_06, I_08

Estrategias propuestas

- *S1: Realizar figuras en los puntos que cumplan con las condiciones del ejercicio.*

Voy a apoyarme con el uso de cuadros para hallar las primeras figuras que tengan 2cm^2. Luego haré mas figuras y comprobaré si tienen o no 2cm^2.

- *S2: Crear todas las figuras posibles.*

ser ordenado para no confundirme.

- *S3: Hacer la mayor cantidad de figuras y que tengan un area de 2cm²*

Para solucionarel problema tomaria una figura como base para mirar la cantidad de puntos que debo que usar para hallar el area que me estan pidiendo.

- *S4: aprovechar la variedad de puntos para encontrar gran cantidad de figuras con un radio de 2 cm²...*

para hallar el radio que me piden usare una figura como base para ver la cantidad de puntos que tengo que usar para hallar el radio pedido...

- *S5: Probar dibujando distintas figuras hasta poder encontrar la mayor cantidad posible de figuras diferentes que tengan un área de 2.*

Intentar realizar distintas figuras, pero procurando que no se repitan al ser volteadas

Caracterización indicadores

Tabla 5. Análisis indicadores creatividad matemática problema 1.

Indicador	S1	S2	S3	S4	S5	Caracterización general	Observación
Sensibilidad a problemas	1	1	1	0	1	Identifican lo que se está preguntando, pero no reconocen los datos iniciales ofrecidos en la situación problema. La lectura que se hace del problema es muy superficial por lo que dejan de lado aspectos importantes en la solución y que están descritos literalmente en el enunciado como por ejemplo que la distancia entre los puntos es de 1 cm.	En ocasiones hay confusiones entre los términos geométricos. En el caso del sujeto 4 como se puede observar en las respuestas de las preguntan 3 y 4 del formulario, involucra en su plan y estrategias el concepto de un radio de $2\,cm^2$, mezclando dos conceptos diferentes en la geometría, el área con el radio en una figura geométrica.
Originalidad	0	0	0	0	0	No se evidencia la implementación de ninguna estrategia innovadora. Todos los sujetos siguen la misma idea de realizar las figuras en	

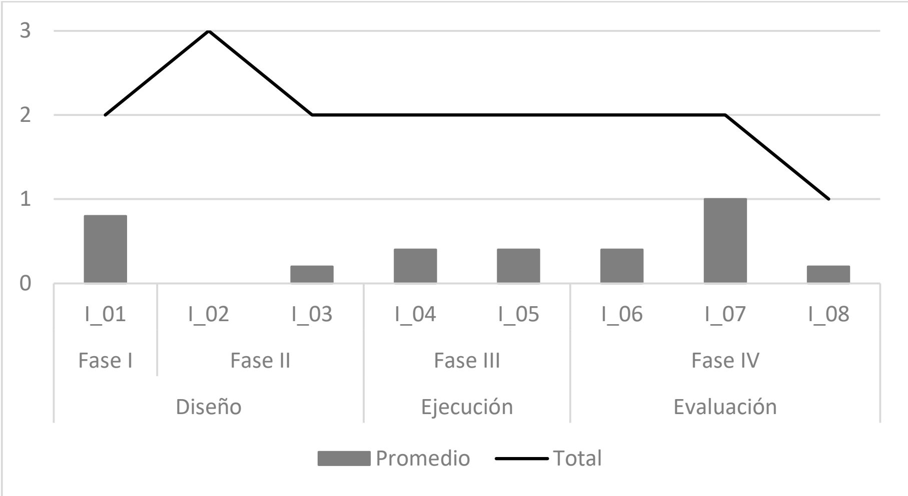
		GeoGebra y con la ayuda de la herramienta **Área** medir para comprobar si garantiza la medición de 2 cm^2 como lo pide la situación.	
Flexibilidad	1 0 0 0 0	Las estrategias en su mayoría muestran una rigidez en el diseño.	El sujeto 1 logra reorientar su estrategia como se observa en la L17 del protocolo verbal ya que en un principio planteó solo el uso de cuadros y en la implementación se da cuenta de la importancia de incluir los triángulos dentro de esta estrategia.
Elaboración	1 0 0 0 1	En la mayor parte de las estrategias no se logra profundizar en los niveles de complejidad y detalle.	En el caso de los sujetos 1 y 5, se aprecian elementos que permiten concluir un perfeccionamiento en sus estrategias, en L17 (sujeto 1) se incluye el uso de área diferentes a la de los cuadrados que propuso en un inicio y para L5 (sujeto 5) deduce un comportamiento relacionado con el uso de cierto número de puntos

							para garantizar el área que se pide.
Análisis	1	0	0	0	1	Son escasas las oportunidades en la que los sujetos examinan las partes de los objetos geométricos con los que están trabajando, esto dificulta el descubrimiento de relaciones.	El sujeto 1 en las líneas 6, 17 y 23 descubre que una herramienta que apoya su estrategia es el descomponer en figuras geométricas conocidas más que los cuadros para hallar nuevas figuras de área 2 cm^2, por su parte, en el caso del sujeto 5 en la línea 3 y 5 del protocolo verbal permite observar que tiene presente desde el primer momento que se debe analizar como cumplir la condición de garantizar la diferencia en las soluciones e incluye el papel de la cantidad de puntos para asegurar el cumplimiento con el área pedida.
Síntesis	1	0	0	0	1	Las ideas que se logran extraer tienen relación con las formas en que se pueden descomponer las figuras realizadas, cuadrados, rectángulos,	Algunos estudiantes logran establecer relaciones validas entre valor del área, figura realizada y puntos utilizados.

						triángulos, entre otros.	
Comunicación	1	1	1	1	1	Se sigue el mismo hilo comunicativo basado en pantallazos de las figuras realizadas sin más elementos que apoyen o expliquen.	
Redefinición	0	0	0	0	1	En general no hay profundidad en los análisis para encontrar nuevos caminos a partir del problema solucionado.	El sujeto 5 logra plantear una cuestión futura sobre el papel de los puntos que sirven como vértice, es decir, preguntar si se puede generalizar un número de puntos a usar para garantizar el área pedida.
Productividad o fluidez	22	20	14	17	21	Hay buena productividad en cuanto a las figuras solas, simples, pero se dificulta la producción de varias figuras al tiempo en los 16 puntos.	

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 1. Puntaje promedio indicadores problema 1.



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 1 se puede observar que el mejor desempeño se presenta en la fase I, esto se debe a que hay una comprensión parcial de la situación problema y este es el único indicador de esta fase. Es evidente que existen falencias notorias y bajos desempeños en las otras tres fases, especialmente en la fase de la planeación (Fase II), como se logró observar en los protocolos verbales y las respuestas a los formularios, los diseños de las estrategias creativas fueron carentes de un análisis profundo de las partes del problema y eso origino unos débiles planteamientos para hallar las soluciones de la situación problema, debilitando directamente los indicadores de originalidad y flexibilidad.

Ahora bien, aunque en el diseño de las estrategias los sujetos propusieron trabajar con elementos como el uso de cuadros, el orden y la cantidad de puntos, en definitiva, implementaron la estrategia de ensayo y el error, en muy pocas ocasiones se observó un aprovechamiento de esos errores como fuentes de potenciales planteamientos de nuevas estrategias, es decir, fue aplicada de manera fortuita, escogiendo casos aleatoriamente. No se hizo uso de líneas curvas que formaran polígonos con área de 2 cm^2, por este motivo las soluciones no mostraron indicador de originalidad sino por el contrario reforzaron la conclusión de una rigidez en el pensamiento y en el diseño de las estrategias, esa falta de flexibilidad desencadeno que todas las soluciones propuestas solo utilizaran polígonos formados con segmentos rectos como aristas.

4.1.2 Análisis Problema 2

Protocolo verbal

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L2	Salen muchas figuras.	I_01
L6	Creo que no hay 64.	I_03, I_05
L11	Estoy poniendo las idénticas.	I_05
L13	Yo creo que en total deben haber 32 porque la mitad son iguales.	I_03, I_05
L17	Ya está… ya está… (prueba con la ubicación del último hexágono para realizar una figura diferente a las que ya ha hecho anteriormente).	I_04
Sujeto 2		
L2	Se debe identificar que las hace idénticas.	I_01
L5	Sí con 3 salen 3 entonces con 4 salen 6 y con 6 deben salir 64 (dice el resultado con incredulidad).	I_03, I_04, I_05
Sujeto 3		
L2	Es probar colocando los papeles hexagonales en diferentes posiciones.	I_01
Sujeto 4		
L5	Es cuestión de cambiar un "cosito" y ya se tiene una nueva.	I_05
Sujeto 5		
L1	El estudiante inicia con las disposiciones de 3 hexágonos dadas en la instrucción, luego utilizó 4 hexágonos y finalmente a partir de ellas formó las figuras con 6 hexágonos que le pedía la situación.	I_01, I_03, I_04, I_05
L4	El estudiante no vuelve a las anteriores pizarras para comprobar si las nuevas figuras son idénticas a algunas anteriores. Además que no las repite, es un proceso eficiente, esto muestra un alto nivel de organización en la estrategia.	I_04, I_05

Estrategias propuestas

- *S1: Ir cambiando los hexágonos de posición para tratar de hallar todas las formas posibles, además ir comparando si es idéntico o no.*

Aprovechar la forma en que se pueden encajar los hexágonos para formar las figuras posibles.

- *S2: Experimentar haciendo formas y ir descartando las figuras que se superponen cuando se les da la vuelta o sea que son idénticas.*

Mirar y descartar hasta llegar a la solución.

- *S3: Realizar figuras e ir descartando.*

Mirando los ejemplos ir guiandome

- *S4: guiarme de los ejemplos y de las limitaciones que me están colocando para encontrar la cantidad exacta sin repeticiones.*

Realizar una figura donde una los 6 hexágonos, coger esta figura como base para realizar el máximo posibles

- *S5: Dibujar hexágonos en 6 hojas de papel distintas en diferentes formas y ver que no se repita la misma figura al voltearla.*

Utilizar los hexágonos dados y hacer otros más para poder formar todas las figuras que necesito

Caracterización indicadores

Tabla 6. Análisis indicadores creatividad matemática problema 2.

Indicador	S1	S2	S3	S4	S5	Caracterización general	Observación
Sensibilidad a problemas	1	1	1	1	1	Los sujetos logran identificar algunos elementos que son superficiales en la comprensión de la situación problema, identifican que se trata de hexágonos y que deben unirlos, pero realmente no profundizan en lo que representa este tipo de	Únicamente en el caso del sujeto 1 se hace mención de que los lados de los polígonos con los que trabajaran tienen la misma longitud ya que se trata de un polígono regular.

						atributos para la solución del problema. Además, ninguno hace énfasis en la condición más importante del enunciado y es el tema de evitar tener figuras idénticas producto de rotaciones de algunas ya realizadas.	
Originalidad	0	0	0	0	0	La estrategia usada por todos los sujetos (ensayo-error) no demuestra una característica de originalidad en la resolución de la situación, se desaprovecha la característica de la simetría para darle una organización a la estrategia y que no se haga una experimentación fortuita.	
Flexibilidad	0	1	0	0	0	La mayoría de los sujetos demuestran una rigidez en el pensamiento al seguir únicamente el camino de ensayar y evaluar cuales figuras	Solo el sujeto 2 evaluó desde otra perspectiva el problema, intentando realizar cálculos de combinaciones, permutaciones y variaciones para poder

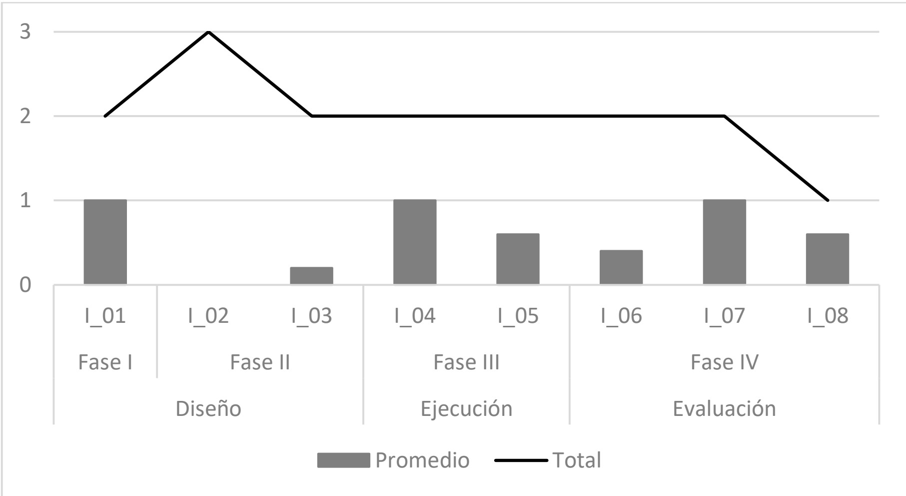
						cumplían con lo solicitado, nunca aprovecharon esos errores para replantear la estrategia o darle un orden.	conocer el número de figuras a las que debía llegar.
Elaboración	1	1	0	1	2	La profundización en este proceso tiene que ver con el interés de algunos sujetos por encontrar un número que represente una meta u objetivo en cuanto a las figuras que deben encontrar, llegando a dar valores, aproximaciones, hablar en términos de mitades para quitar del conteo las "figuras idénticas", entre otros.	El sujeto 5 demuestra un orden dentro de su estrategia, esto permitió que avanzara más eficientemente y teniendo mejores resultados en cuanto a la cantidad de respuestas diferentes halladas.
Análisis	1	1	0	0	1	En general hay un escaso descubrimiento de relaciones dentro de la resolución de este problema, un caso es partir de sucesiones de figuras con 3, 4 o 5 hexágonos para poder describir el comportamiento cuando son 6 hexágonos.	

Síntesis	1	1	0	0	0	No se evidencia un hilo conductor que logre organizar la información. Se desaprovecha el potencial de los errores en la estrategia elegida.	El sujeto 1 y el 2 intentan descubrir una relación que les permita conocer el número exacto de figuras que deben hallar.
Comunicación	1	1	1	1	1	Todos utilizan la misma forma de comunicar las respuestas, poner los pantallazos de las figuras encontradas sobre la pizarra del Jamboard.	
Redefinición	0	1	0	0	2	Debido a la estrategia elegida y la manera como se implementó no se logra deducir propiedades para redefinir la situación planteada.	El sujeto 2 utiliza algoritmos relacionados con cálculos de combinaciones y variaciones para poder concluir cuantas figuras debe encontrar, razonamiento erróneo pero que demuestra un intento de redefinir la situación. Por su parte, el sujeto 5 hace uso de un trabajo sucesivo iniciando con el ejemplo de 3 hexágono que se propone, para

							darle un orden a su estrategia.
Productividad o fluidez	32	37	23	23	42	Aunque se genera una amplia cantidad de respuestas no se hace de manera ágil y eficiente.	

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 2. Puntaje promedio indicadores problema 2.



Fuente: Elaboración propia.

En el grafico 2 se observa un bajo desempeño a nivel general, esto se debe en gran medida a la fase de diseño de la estrategia, se evaluó en todos los casos aplicar el ensayo y error de manera reduccionista, es decir, sin dar un orden u organización para la selección de los casos, se desaprovechó el potencial de los errores encontrados para mejorar la estrategia y tener un mejor desempeño en las fases de ejecución y evaluación.

Hubo un desgaste que fue notorio en todos los sujetos, en los protocolos verbales se evidencian agobiados constantemente por la pregunta sobre la cantidad de figuras que debían hallar, esto produjo un agotamiento mental en los sujetos, encontrando gran cantidad de respuestas, pero no de manera eficiente, muchos dirigieron el esfuerzo hacia la búsqueda del número de soluciones que debían encontrar, dejando de lado el objetivo real de la situación.

4.1.3 Análisis Problema 3

Protocolo verbal

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L2	El estudiante mueve los puntos que representan las canicas en GeoGebra para interactuar con la organización del arreglo de la situación.	I_01
L4	El estudiante hace uso de la herramienta *distancia* en GeoGebra y empieza a dar clic en los puntos para experimentar como la puede usar en su estrategia.	I_03
L5	El estudiante intenta ubicar los puntos que representan las canicas siguiendo las tres ubicaciones que se muestran de los tres estudiantes A, B y C.	I_03, I_04
L6	He estado pensando hacer estas figuras acá (las disposiciones mostradas en la figura de la situación problema) y hallar la medida entre algún punto y el promedio para determinar un número y que ese sea la dispersión. Entonces necesito que sea menor y mayor o mayor para que sea funcional. Pero no sé si realmente se pueda hacer así.	I_03
L8	También se me ocurre que se podría medir el perímetro.	I_03
L10	También se podría hacer una circunferencia, medir las distancias hasta el centro y dividir sobre cinco.	I_03, I_04, I_05
Sujeto 2		
L2	El estudiante interactúa con los puntos que representan las canicas en GeoGebra.	I_01
L3	El estudiante hace uso de algunas herramientas del software GeoGebra como por ejemplo realizar círculos señalando el centro y que pase por un punto, intentando ubicar un círculo que reúna todas las canicas.	I_03
L7	En definitiva, ¿qué se debe entregar en este problema 3?	I_01
L8	El estudiante intenta ubicar los puntos en GeoGebra de manera que sigan la ubicación exacta de la imagen dada en la situación problema, mide las distancias con la herramienta del software y halla el promedio de ellas con ayuda de la calculadora.	I_04
L12	¿La división será sobre 4 o sobre 5?	I_05
Sujeto 3		

L4	El estudiante ubica la imagen de la situación problema como guía para poder posicionar los puntos que representan las canicas, luego mide las distancias desde cada uno de ellos hasta un punto adicional aproximado en el centro, promedia estas distancias y multiplica por 100 para dar como resultado un porcentaje.	I_04
Sujeto 4		
L2	El estudiante ubica algunos puntos adicionales en lo que interactúa con GeoGebra para comprender la situación que le están planteando.	I_01
L4	El estudiante coloca la imagen de la situación problema como guía para la ubicación de los puntos que representan las canicas, mide las distancias y con ayuda de la aplicación de la calculadora hace un promedio de esas longitudes, finalmente multiplica por 100 para dar como resultado un número que represente esa dispersión.	I_04
Sujeto 5		
L3	Identifico ahí un eje x, un eje y.	I_01, I_03
L4	El estudiante interactúa con la aplicación de GeoGebra moviendo algunos de los puntos que representan las canicas y revisando las herramientas que le pueden resultar útiles para la solución de la situación.	I_03
L6	¿Puedo ubicar más puntos ahí?	I_03, I_05
L7	Ubica como fondo la imagen de la situación, trata de posicionar los puntos que representan las canicas lo más exacto posible sobre esa imagen de fondo, mide las distancia entre cada punto y el punto central (ubicado por él) con GeoGebra, con ayuda de la aplicación de la calculadora hace las cuentas para el promedio de las distancias medidas y finalmente multiplica por 100.	I_04

Estrategias propuestas

- *S1: Trataré de hallar la distancia entre los puntos y el promedio en X y en Y, luego tratare de hacer un porcentaje con los números.*

Voy a usar el plano cartesiano de GeoGebra y elementos en común de las figuras para hallar una forma de darle un numero a la dispersión.

- *S2: Buscar la solución sumando las distancias de las maras y dividirlas por las maras que están usando el plano cartesiano para saber la separación.*

Una estrategia sera usar el plano cartesiano.

- *S3: Ir mirando los ejemplos y ir solucionando.*

Buscar soluciones de dispersion

- *S4: mirar los ejemplos dados por el ejercicio para usarlos como base comprobando distintas dispersiones entre los puntos.*

buscar distintas soluciones que me puedan resolver el problema

- *S5: Encontrar diferentes formas para expresar esta dispersión en números.*

Buscar la distancia expresada en centímetros que hay entre los diferentes puntos

Caracterización indicadores

Tabla 7. Análisis indicadores creatividad matemática problema 3.

Indicador	S1	S2	S3	S4	S5	Caracterización general	Observación
Sensibilidad a problemas	2	1	1	0	2	Se observa que para los sujetos es claro lo que está pidiendo la situación problema pero en la mayoría de los casos dejan un detalle importante de lado, el enunciado plantea que el grado de dispersión parece disminuir a medida que se evalúan los 3 estudiantes.	En el caso del sujeto 4, no demuestra comprensión de la situación problema, pues manifiesta que le están pidiendo *"crear distintos grados de dispersión",* cuando en realidad el expresar numéricamente del enunciado hace referencia a calcular, en cuanto a los datos que ofrece el enunciado manifiesta *"me ofrecen*

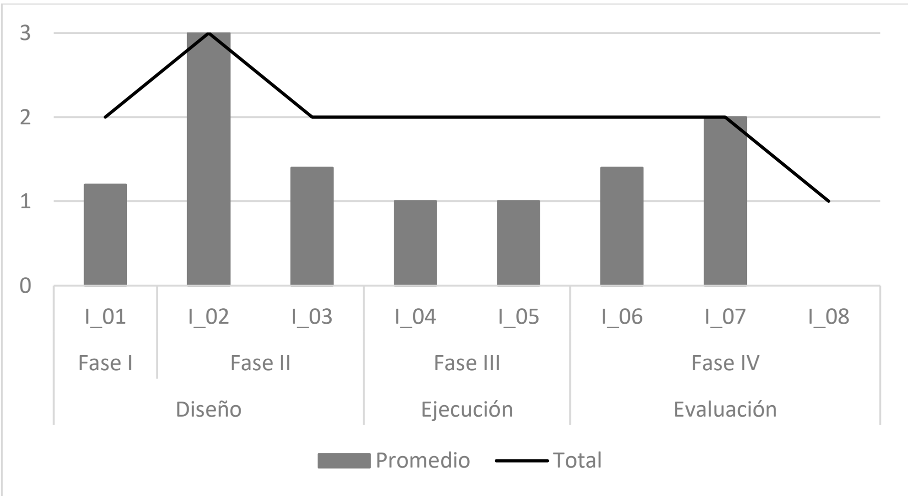
							tres ejemplos de la dispersión" lo que significa que está viendo fraccionado en tres partes lo que es un todo.
Originalidad	3	3	3	3	3	Es común el uso de la estrategia de promediar las distancias de cada punto hacia un centro aproximado y en algunos sujetos aparece la idea del porcentaje como representación de estas dispersiones.	
Flexibilidad	2	2	1	1	1	Se presenta un pensamiento rígido demostrado en el planteamiento de las estrategias de solución.	Al igual que en el indicador de apertura mental, los sujetos 1 y 2 evalúan una gama más amplia y flexible de estrategias, miden distintas longitudes con las herramientas de GeoGebra, esto les permite tener un abanico más amplio de posibilidades.
Elaboración	1	1	1	1	1	Hay una elaboración imprecisa parcialmente debido a que en ningún caso se contrasto la	

						respuesta producto de la estrategia aplicada, se malgastó la oportunidad de aplicar otros conceptos geométricos y estadísticos en esta solución, no se agregaron elementos relevantes a la estrategia inicial.	
Análisis	1	1	1	1	1	Las relaciones que se descubrieron partieron solo de un elemento geométrico adicional, el punto del centro del pentágono que formaban las 5 canicas.	
Síntesis	2	2	1	1	1	En general, se evidencia un sesgo de la información, acerca de lo que representa la dispersión y no se contrasta con el hecho de la disminución de la misma.	En el caso particular del sujeto 1 y 2, se evidencia en el protocolo verbal una coherencia en las ideas relevantes, sin embargo, esta no se termina concretando en la pizarra del Jamboard.
Comunicación	2	2	2	2	2	Todos los sujetos siguen una manera de comunicar similar, con apoyo de pantallazos de la ubicación de las canicas, de los cálculos	

						hechos en la aplicación y la descripción del proceso que se llevó a cabo con ayuda de post-it de la pizarra.	
Redefinición	0	0	0	0	0	No hay deducción de propiedades o nuevos planteamientos.	
Productividad o fluidez	2	1	1	1	1	Se cae en el pensamiento de los problemas matemáticos rutinarios, donde hay única respuesta y por lo tanto, consideran que con lo encontrado ya se respondió la situación.	

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 3. Puntaje promedio indicadores problema 3.



Fuente: Elaboración propia.

En esta situación problema hubo más espacio para el razonamiento por parte de los estudiantes, en el análisis de los protocolos verbales se puede evidenciar una construcción más sólida de la estrategia a aplicar. En comparación con los dos problemas anterior, en este caso todos los sujetos primero interactuaron con los elementos que se brindaban, usaron herramientas dentro del AVA, analizaron diferentes ideas y después de este proceso si decidieron responder el formulario 1 o de comprensión.

Esto también desencadeno un proceso resolutivo y creativo más enriquecedor, como se puede ver en el gráfico 3, al igual que en las anteriores situaciones, en general los estudiantes evidenciaron una comprensión parcial del problema pero en contraste esta vez tuvieron un muy buen desempeño en las otras tres fases, en este caso la falencia se evidencia en la fase de implementación de la estrategia, sobre todo por el tema de que se quedaron con una sola posibilidad, no dieron el espacio para pensar en otros enfoques para respaldas este hallazgo numérico de la dispersión.

Además de lo anterior, vale reconocer que los indicadores de Originalidad y comunicación presentaron un excelente puntaje en los 5 sujetos, sobretodo es importante destacar el desempeño del indicador segundo indicador y su relación con el buen rendimiento a nivel general en el proceso creativo.

4.1.4 Análisis Problema 4

Protocolo verbal

Línea	**Verbalización**	**Indicador**
Sujeto 2		
L2	Voy a empezar buscando características para la figura B que es la que menos tiene características, por ejemplo, tiene 1, 2, 3, 4 caras, ¿Cuál otra tiene 4 caras también?... ninguna.	I_04, I_05

Estrategias propuestas

- *S1: Comparar las caras y bases de las figuras.*

  Comparar y hallar similitudes entre las figuras.

- *S2: Comparar las figuras y busca similitudes.*

  copiar la imagen para ir comparando

- *S3: Por medio del ejemplo ir buscando características.*

Ir observando cada figura para mirar qué características o similitudes comparten con la figura B.

- *S4: analizar las figuras dadas*

Despues de realizar el analisis de las figuras buscar la mayor cantidad similitudes posibles

- *S5: Analizar las figuras e intentar encontrar similitudes en algunas cosas, ya sean lados o alguna otra característica que compartan*

Ver las figuras detalladamente

Caracterización indicadores

Tabla 8. Análisis indicadores creatividad matemática problema 4.

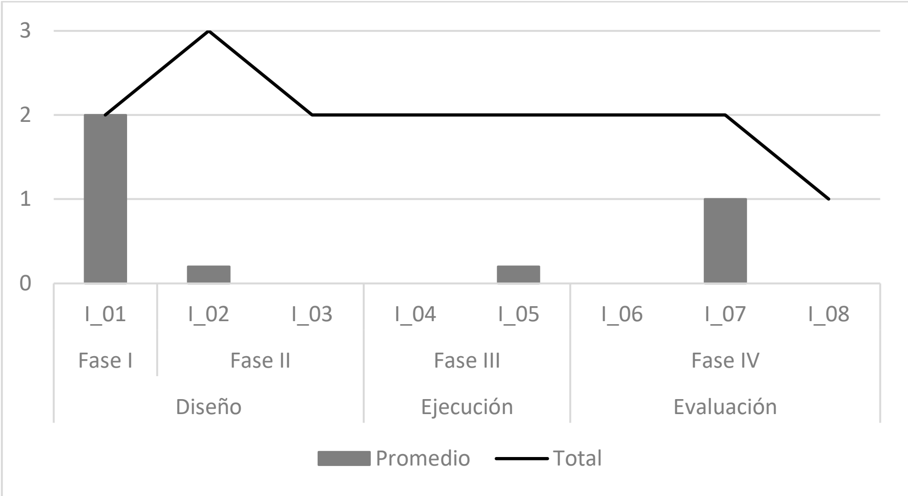
Indicador	S1	S2	S3	S4	S5	Caracterización general	Observación
Sensibilidad a problemas	2	2	2	2	2	Todos los sujetos logran identificar de manera efectiva los datos iniciales y lo que está pidiendo la situación problema.	
Originalidad	1	0	0	0	0	A pesar de que existió una excelente comprensión de la situación llegado el punto de implementar los resultados no fueron los mejores, postularon relaciones inexistentes, se pudo observar que esto se debe a falsas	El sujeto 1 logra postular tres relaciones validas entre las figuras con relación a la figura B, sin embargo, estos postulados son muy simples y por eso no recibe un alto puntaje en el indicador de originalidad.

						concepciones de atributos geométricos.	
Flexibilidad	0	0	0	0	0	En general se observó una rigidez para dar todas las respuestas variadas que se esperaban en esta situación problema.	
Elaboración	0	0	0	0	0	Los sujetos fueron imprecisos debido a errores que tienen su origen en las concepciones geométricas que poseen. No se logró alcanzar un buen nivel de complejidad en la estrategia planteada por los sujetos.	
Análisis	1	0	0	0	0	Es evidente que no se logró descubrir relaciones entre las partes con respecto al todo y en ese aspecto radico el inconveniente en las respuestas dadas.	El sujeto 1 logra descubrir de forma parcial y elemental algunas relaciones entre las figuras.
Síntesis	0	0	0	0	0	Como se evidencia en los pantallazos del Jamboard en el anexo 3, problema 4, no hay ideas relevantes extraídas como	

						producto de esta resolución.	
Comunicación	1	1	1	1	1	Todos los sujetos utilizan la misma forma de comunicación, la frase que reúne las características propuestas por ellos y la marcación de las figuras que la comparten, en algunos casos esto se queda corto para la interpretación.	
Redefinición	0	0	0	0	0	Ningún sujeto se desvía del camino marcado o intenta evaluar nuevos escenarios como resultado de cambios en las condiciones.	
Productividad o fluidez	3	1	1	0	0	A pesar de que hubo mayor cantidad de respuestas en el Jamboard, muchas fueron descartadas en el análisis debido a errores en la conceptualización o la elección de las figuras.	

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4. Puntaje promedio indicadores problema 4.



Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en el gráfico 4, en este problema los procesos resolutivos propuestos por los 5 sujetos tuvieron un excelente desempeño en la fase I, correspondiente a la comprensión de la situación problema. Sin embargo, en el resto del proceso hay un menor desempeño debido a que no se pudo implementar exitosamente la estrategia que se planeó en un principio, entre otras cosas por concepciones reduccionistas o erróneas de propiedades geométricas con las que se quisieron relacionar las figuras de la situación problema.

Este caso particular evidencia que una comprensión acertada de la situación problema no implica un buen proceso creativo o resolutivo de problemas, se deben tener en cuenta los otros dos indicadores de la fase de diseño para fortalecer el proceso en general de los estudiantes.

4.1.5 Análisis Problema 5

Protocolo verbal

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L2	¿Qué es un prisma?	I_01
L6	En este punto es un rectángulo, pero más arriba ya no es un rectángulo, bueno sí, es un cuadrilátero, pero no un rectángulo, porque no tiene dos lados iguales. Pero es similar.	I_03, I_04
L9	¿Esto no sería más como un triángulo equilátero en vez de un cuadrilátero? A ver este sí sería rectángulo… es verdad, estoy equivocado.	I_05

L10	El patrón tiene que ver con el cambio en el ángulo y como se cambia la figura del prisma.	I_04, I_05
L11	Yo creo que ahí es un triángulo, viene siendo como así (mueve uno de los puntos que cumple el papel de vértice del prisma dentro de GeoGebra).	I_05
L12	¿Cuál es la forma específica del rectángulo? En algún momento tiene otra que debe ser similar.	I_03, I_04
L13	No, eso es otro cuadrilátero.	I_05
Sujeto 2		
L3	¿Cómo puedo saber cómo está el agua?	I_01
L5	¿Qué forma es esa? Es como un triángulo, ¿no? Como triangulo rectángulo (busca en la red información sobre los triángulos rectángulos). Bueno en realidad podría ser un trapecio o un romboide, podría ser un trapezoide.	I_05
Sujeto 3		
L4	¿Esto es un cuadrado o un rectángulo?	I_05
Sujeto 4		
L5	Acá en este caso se forma un cuadrado.	I_05

Estrategias propuestas

- *S1: Mover la figura poco a poco para hallar una relación entre el Angulo y al figura del agua.*

Trataré de apoyarme en la figura del ejercicio para imaginarme el agua.

- *S2: Ir mirando y imaginándome el agua para saber que las reglas relativas que forma el agua.*

Imaginar el agua.

- *S3: Ir utilizando el ejemplo para ir dibujando la figura*

Mediante el ejemplo ir guiandome para ir solucionando

- *S4: hallar el maximo de figuras posibles*

con la cantidad de lineas que hay poder hallar la maxima cantidad de figuras posibles

- *S5: Ir girando la figura inicial para cambiar el ángulo de inclinación y formar figuras distintas*

Colorear la parte que forma la figura y cambiar el ángulo de inclinación

Caracterización indicadores

Tabla 9. Análisis indicadores creatividad matemática problema 5.

Indicador	S1	S2	S3	S4	S5	Caracterización general	Observación
Sensibilidad a problemas	1	1	1	1	1	Hubo una dificultad generalizada en la comprensión del concepto de "regla relativa", algunos decidieron usar los recursos en la red para solucionar su duda. Además, los elementos que tenía la situación problema como es el caso del recipiente en forma de prisma no eran comunes para ellos entonces desde ese punto generaban dudas en la comprensión del enunciado.	
Originalidad	1	1	1	1	1	Todas las soluciones planteadas por los sujetos, aunque para ellos fueron diversas, se reducen a un solo planteamiento,	

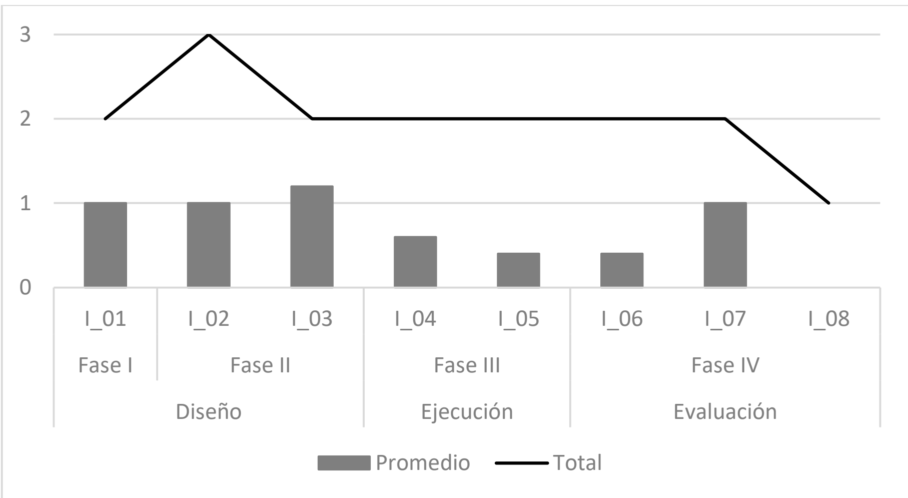
						relacionar la inclinación del recipiente con la forma del polígono de la cara lateral. Se deja de lado un aspecto fundamental de la situación y es el tema del agua dentro del recipiente, esto abre el espacio para profundizar en estrategias y tener planteamientos más originales.	
Flexibilidad	2	1	1	1	1	La rigidez en el pensamiento en esta situación problema en particular se encuentra en la mala comprensión del problema, no se puede ser flexible si no se entiende lo que se está haciendo.	El sujeto 1 logro abrir las posibilidades de relacionar los cambios con la inclinación, aunque por momentos se olvida de la naturaleza del recipiente como contenedor de un líquido.
Elaboración	1	1	0	0	1	En general la elaboración de las estrategias fue imprecisa parcialmente, fruto de comprensiones reduccionista de la situación.	

Análisis	1	1	0	0	0	Hubo un análisis insuficiente en la implementación de la estrategia, no se abrió el espacio para replantear las propuestas y esto desencadeno las escasas soluciones encontradas.	Los sujetos 1 y 2 se tomaron el tiempo de cuestionarse por lo que estaban realizando, como se evidencia en el protocolo verbal, aunque no se logró originar cambios significativos en la propuesta inicial.
Síntesis	1	1	0	0	0	No se evidenciaron ideas relevantes extraídas en el proceso que se llevó a cabo.	
Comunicación	1	1	1	1	1	El proceso comunicativo siguió la misma línea en los 5 sujetos, gráficos de cómo se vería el área lateral del recipiente y algunas notas explicando el razonamiento, que se convierte en un elemento importante en la comunicación. En comparación con el problema 3 acá hizo falta elementos adicionales en la comunicación y los modelos de visualización que	

						intentaron hacer los estudiantes, esto se puede corroborar en el anexo 3 del problema 5.	
Redefinición	0	0	0	0	0	Ningún sujeto fue más allá de lo que pedía la situación, no hubo oportunidad de preguntar ¿qué pasaría sí?	
Productividad o fluidez	1	1	1	1	1	Aunque ellos pensaron erróneamente que habían encontrado muchas respuestas en definitiva fue una sola, diferentes perspectivas, pero una sola regla relativa.	

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5. Puntaje promedio indicadores problema 5.



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 5 se puede observar un desempeño uniforme de los sujetos en las 4 fases. Este rendimiento tiene su puntaje más bajo en la fase III que tiene que ver con la implementación de la estrategia, esto en parte desencadenado por las falencias en la comprensión de la situación y la concepción del plan a seguir. Se puede explicar en parte porque la situación implica un manejo de un recipiente de 3 dimensiones en un ambiente en que aparentemente esta plano, por esta razón muchas de las respuestas encontradas giran en torno a relaciones del ángulo con polígonos y no con volúmenes o solidos de 3 dimensiones.

4.1.6 Indicadores generales

En general, al analizar los elementos de las 5 situaciones problema se pueden evidenciar algunas relaciones de estos indicadores de la creatividad matemática en las estrategias planteadas por los estudiantes, en el caso de la primera fase de preparación y que es la única que cuenta con un solo indicador, la sensibilidad a los problemas, se puede observar que los cambios en su desempeño no implican efectos significativos en el resto del proceso creativo. Aunque este elemento evalúa algo familiar para ellos en los problemas rutinarios (donde hay una solución única y que son los trabajados comúnmente en la clase de matemáticas) que es la pregunta de la situación y los datos que se ofrecen en el enunciado, los sujetos en muchos casos dejan detalles importantes a un lado.

Ahora bien, en la siguiente fase, de incubación de la idea, se destaca el impacto positivo de estrategias novedosas, originales, medidas por medio del indicador 2, este efecto significativo no solo es evidente en el proceso creativo sino también en la resolución de problemas, particularmente el mejor desempeño general se dio en el proceso del problema 3 en el que los 5 sujetos tuvieron un excelente desempeño en el indicador de originalidad. Así mismo, se evidencia una relación con el indicador de la flexibilidad, pues en las dos situaciones donde se evidenció el indicador de originalidad, los problemas 3 y 5, también se dio un alto desempeño del indicador 3, estos dos forman la etapa de concepción del plan o incubación del proceso creativo.

Otro indicador que muestra un desempeño estable en los cinco problemas analizados es la comunicación, en general se evidencia puntajes altos en los sujetos, esto puede deberse a que es uno de los elementos que se trabaja en el aula matemáticas para todo tipo de situación problema y desde todos los niveles, siempre se busca plasmar de la manera más eficiente los razonamientos para que la persona que lea la solución pueda entender el procedimiento.

Tabla 10. Indicadores creatividad matemática con alto desempeño.

Indicadores con alto desempeño			
Indicador	**Fase resolución de problemas**	**Fase proceso creativo**	**Estrategia**
Sensibilidad a los problemas	Comprensión del problema	Preparación	Diseño de la estrategia
Comunicación	Examinar la solución	Verificación	Evaluación de la estrategia

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11. Indicadores creatividad matemática con bajo desempeño.

Indicadores con bajo desempeño			
Indicador	**Fase resolución de problemas**	**Fase proceso creativo**	**Estrategia**
Análisis	Ejecución del plan	Iluminación	Ejecución de la estrategia
Redefinición	Examinar la solución	Verificación	Evaluación de la estrategia

Fuente: Elaboración propia.

4.2 Clasificación de las estrategias aplicadas con relación a la creatividad matemática

En esta sección se aprovechará la identificación que se realizó anteriormente para lograr clasificar las estrategias de los estudiantes con base en los elementos relacionados con la creatividad matemática evidenciados en el proceso de resolución de problemas.

Para llevar a cabo esta clasificación se inició identificando las características de cada situación problema, como el tipo, la dificultad, los datos que ofrece y lo que se está pidiendo como objetivo o solución válida, seguidamente se analizó el proceso de resolución en cuanto al tipo de estrategia que se usó, ya sea de naturaleza heurística, algebraica, de modelado, entre otras. Finalmente, para clasificar con relación a la creatividad matemática se valoraron las fortalezas y debilidades de cada fase evaluada desde los indicadores que se reconocieron en el análisis anterior para así poder identificar el momento en el que se produce el "Insight", definido por Gil (2009) como el proceso en que el resolutor logra repentinamente progresar de no saber a saber cómo se da solución a la situación a la que se enfrenta.

4.2.1 Estrategia 1

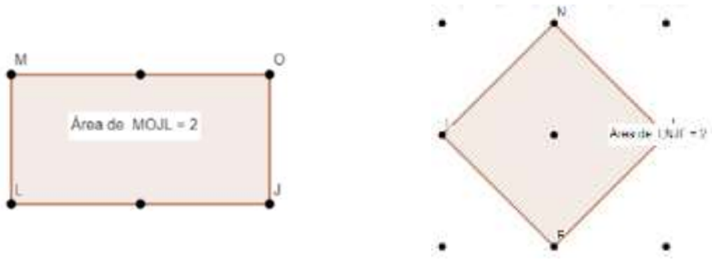
Para el caso de la situación de los 16 puntos se ha elegido la estrategia aplicada por el Sujeto 1, esta elección responde a que las 5 soluciones tienen muchas similitudes tanto en sus planteamientos como en los errores en la comprensión de la situación y la posterior aplicación de la estrategia planteada, pero en el caso del sujeto 1 se evidencia un proceso más sólido en cuanto a análisis en el momento de la ejecución del plan. Este primer problema planteado en el AVA es de tipo geométrico y con una dificultad definida en la categoría fácil. De esta manera, se puede entender que los sujetos en sus estrategias para este problema decidieron adoptar planteamientos heurísticos por el lado de la experimentación, el ensayo y el error.

El sujeto 1 lee la situación, y se evidencia una comprensión parcial ya que cuando responde por los datos que ofrece el problema el estudiante responde: "*Me dice que las figuras deben ser de dos cm^2, también me dice que las figuras que se superponen serán idénticas",* dejando de lado elementos importantes del enunciado como por ejemplo que la distancia entre los puntos es de 1 cm. Más allá de la comprensión parcial del enunciado, hay que destacar que inmediatamente el sujeto plantea su estrategia de la siguiente manera:

> *Sujeto 1: Voy a apoyarme con el uso de cuadros para hallar las primeras figuras que tengan 2cm^2. Luego haré mas figuras y comprobaré si tienen o no 2cm^2.*

No hubo una experimentación previa con los elementos que están involucrados en la situación, en este caso los 16 puntos, lo que permite concluir que el estudiante se siente seguro de su interpretación del problema. De la misma manera, es importante aclarar que tampoco hay algoritmos en la propuesta, en la estrategia se hace énfasis en el uso de "cuadros" (figura resultante al unir 4 puntos adyacentes del arreglo presentado), este razonamiento se verifica en la fase de ejecución como se observa en la figura 14.

Figura 13. Pantallazo solución problema 1.



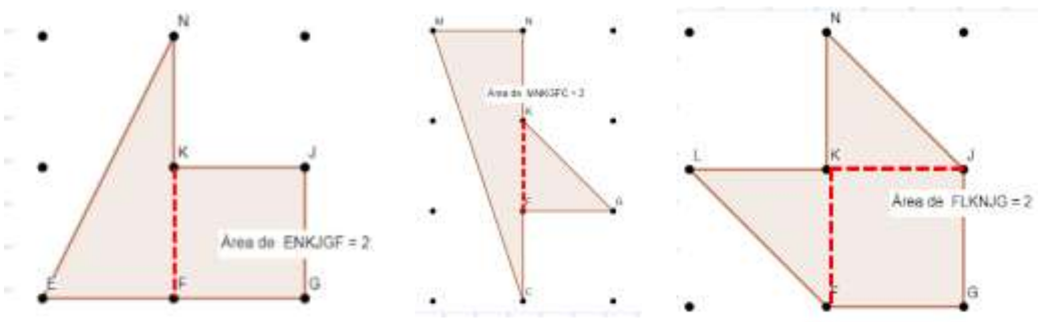
Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, después de un tiempo el estudiante logra darse cuenta que no solo "cuadros" pueden formar las figuras con el área que se está pidiendo, pues se reduciría el problema a 2 o 3 figuras, sigue aplicando la estrategia de ensayo y error de tipo fortuito, es decir, eligiendo casos de manera aleatoria, lo que no es eficaz. Ahora bien, este planteamiento y posterior análisis del sujeto 1 lo lleva a concluir lo siguiente:

Sujeto 1: Para que me dé el área toca con figuras que tengan cuadrados y triángulos.

Es así como se produce el "Insight" de esta estrategia, se consolida a través de la descomposición de figuras geométricas, en polígonos reconocidos por el estudiante, en este caso triángulos y cuadrados. A partir de este momento el sujeto 1 logra encontrar más figuras como se observa en la figura 14.

Figura 14. Pantallazo solución 2 problema 1.



Fuente: Elaboración propia.

Esta estrategia tiene su fortaleza en la fase de la ejecución del plan de resolución, es decir, la iluminación del proceso creativo, los indicadores que destacan son el análisis, flexibilidad y elaboración. Por el contrario, presenta falencias en la fase de la concepción del plan, no hay elementos que permitan hablar de originalidad en la estrategia y en gran medida se debe a la comprensión parcial de la situación problema, estas debilidades acarrean una mala verificación del proceso creativo, al final no hay muestra de síntesis y redefinición en la estrategia aplicada.

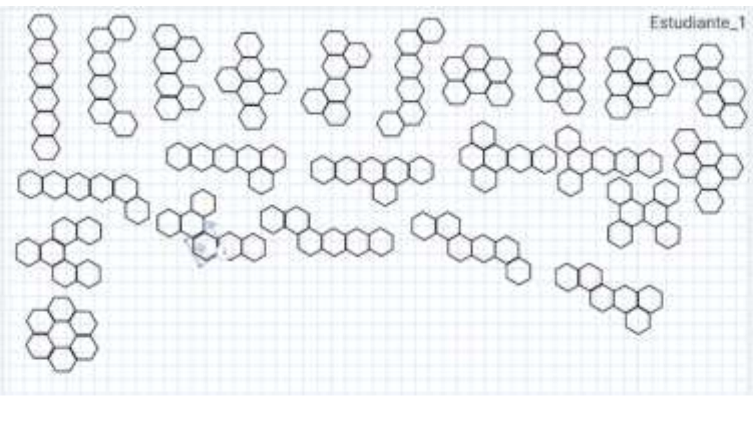
4.2.2 Estrategia 2

La situación 2 también presenta un problema de tipo geométrico, en este caso, se encuentra catalogado con una dificultad de muy fácil, por la naturaleza del problema, se puede considerar que ese bajo nivel de dificultad se debe a que brinda de entrada la oportunidad de visualizar, además que cuentan con el apoyo de las herramientas tecnológicas del AVA y los softwares como GeoGebra. Para este caso puntual, el indicador de sensibilidad a los problemas se evidenció de mejor manera, hubo una comprensión más completa de la situación, en general el único atributo que se dejó de lado fue que los hexágonos son regulares, es decir, tendrán sus lados iguales, esto es importante en el sentido que permite concluir que la tarea se dificulta para garantizar la diferencia de los arreglos encontrados, pues en definitiva son 6 hexágonos iguales que si se rotan ciertos grados van a terminar siendo exactamente las mismas figuras con las mismas medidas. Para este caso, el sujeto describe la estrategia que implementara de la siguiente forma:

Sujeto 1: Aprovechar la forma en que se pueden encajar los hexágonos para formar las figuras posibles.

Es llamativo el término “encajar” esto refuerza la idea de la baja dificultad de la situación, este estudiante puntualmente hace la concepción de su plan imaginando un rompecabezas donde las fichas son 6 hexágonos regulares, en cuanto a la resolución de problemas se puede ubicar dentro de la categoría de experimentación, ensayo y error. Ahora bien, al igual que en la anterior estrategia en esta tampoco hay una prueba previa a la concepción del plan, una interacción con los elementos de la situación problema, que en este caso serían los hexágonos regulares, evidencia cierto nivel de seguridad por parte del resolutor, sin embargo, en este tipo de razonamiento se puede identificar otro tipo de conflictos en el estudiante, en primera instancia tiene que ver con la característica fundamental de los problemas no rutinarios que son abiertos y es que admiten variadas respuestas diferentes y todas son válidas, lo que muchas veces rompe un paradigma que hay interiorizado en el estudiante, encontrar una única respuesta correcta y en el caso particular de este problema las soluciones siguiendo la estrategia planteada se encuentran de manera “sencilla”, es así como en un principio la pizarra del sujeto 1 se encuentra como se observa en la figura 15.

Figura 15. Pantallazo solución problema 2.



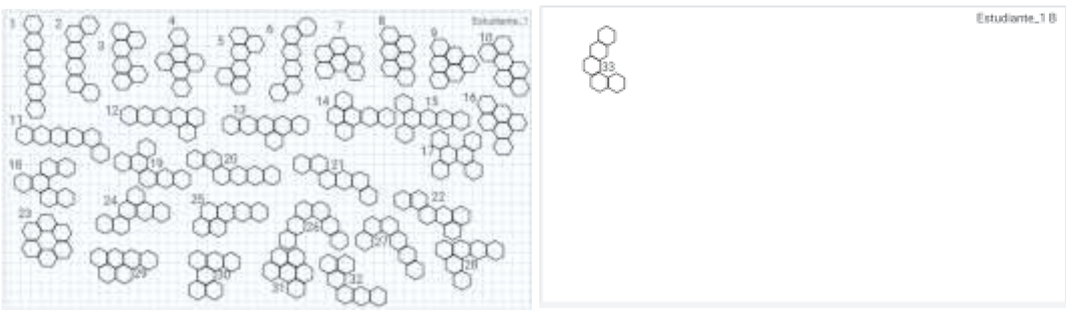
Fuente: Elaboración propia.

Una estrategia de ensayo y error de manera fortuita que aparentemente está dando los resultados esperados, como se observa hay ya varias figuras encontradas, que cumplen con las condiciones que se plantean en la situación. Sin embargo, por la naturaleza del problema, como se mencionaba anteriormente, admite múltiples respuestas por lo que es admisible que llegado cierto punto el estudiante pueda preguntarse, *¿Cuándo voy a terminar?* A raíz de esto, el sujeto evidencia dos nuevas estrategias en su plan, en primer lugar, empieza a numerar las figuras (como se observa en la figura 16) que va encontrando y de manera más profunda anexa algoritmos a su estrategia.

Sujeto 1: Yo creo que en total deben haber 32 porque la mitad son iguales.

El estudiante hace algunas cuentas usando teorías sobre combinaciones, permutaciones y variaciones, llega a un resultado de 64, luego concluye que para que no haya repetición de figuras es porque se debe eliminar la mitad de ellas, entonces debe hallar 32 en total para dar por terminado el trabajo, esto queda demostrado cuando encuentra la figura 33 y no examina otras posibles soluciones sino por el contrario contesta el formulario de retroalimentación.

Figura 16. Pantallazo solución final problema 2.



Fuente: Elaboración propia.

Cabe destacar que, aunque la cuenta se realizó de manera errónea, debido a que se dejaron de lado características importantes como la regularidad de los hexágonos, que son 6 figuras iguales, las rotaciones que dan como resultado la misma figura y la simetría que termina haciendo resultados idénticos. Aún con todo esto, el involucrar este tipo de algoritmos demuestra la existencia de los indicadores de flexibilidad, análisis, elaboración y redefinición en la estrategia. Acá se produjo el "Insight" en la etapa de la ejecución, nuevamente hay un fortalecimiento de la estrategia en la fase de la iluminación del proceso creativo, demostrando que este proceso de descubrir el camino a la solución no se acaba en la fase de la incubación.

Así mismo, este tipo de estrategia demuestra un débil desarrollo de la concepción del plan debido a una falsa confianza del estudiante por la comprensión de la situación problema.

4.2.3 Estrategia 3

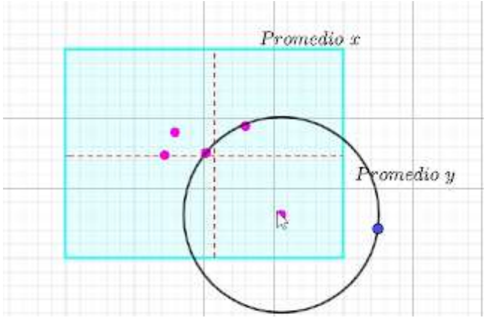
En el caso del problema 3, los estudiantes se enfrentaron a la primera de las situaciones que los enfrenta a responder con una cantidad numérica que representa en este caso la dispersión en un juego de cinco canicas. Este problema está categorizado con un nivel difícil de dificultad y en cuanto a su tipo es de naturaleza algorítmica, pues pide ideas para calcular el grado de dispersión de tres situaciones diferentes. En cuanto a la comprensión de la situación los estudiantes logran identificar de manera efectiva los datos que ofrece el problema y así mismo reconocer que está pidiendo como respuesta.

En contraste con las anteriores estrategias, en este caso hay interacciones y experimentos previos realizados por los estudiantes antes de concebir el plan, permite ver que hay una mayor dedicación en la fase de preparación del proceso creativo, esto lleva a que haya mayor cantidad de eventos antes de contestar el formulario de comprensión. Finalizada esta etapa de familiarización con la situación, se concibe la estrategia de la siguiente manera:

S2: Buscar la solución sumando las distancias de las maras y dividirlas por las maras que están usando el plano cartesiano para saber la separación. Una estrategia sera usar el plano cartesiano.

Con respecto a la resolución de problemas, esta estrategia puede clasificarse como del tipo algebraico ya que plantea la realización de un algoritmo, en definitiva, se propone hacer un promedio de las distancias de las canicas, por otro lado, también hay características geométricas ya que dentro de la estrategia se propone el uso del plano cartesiano y las canicas como puntos dentro de esa configuración. Todo esto demuestra en primera medida una estrategia más elaborada y con relación al proceso creativo evidencia la fortaleza en la etapa de la incubación, el peso recae sobre los indicadores de flexibilidad y originalidad.

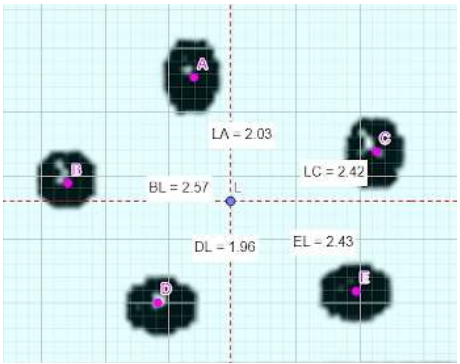
Figura 17. Pantallazo objeto auxiliar para estrategia de problema 3.



Fuente: Elaboración propia.

Así mismo, el “Insight” de este tipo de estrategia se produce precisamente en la incubación, la fortaleza está en la concepción del plan ya que el estudiante ha destinado una interacción previa a la estrategia, inconscientemente ha elaborado la estrategia agregando más detalles y complejidad, agregando objetos auxiliares como círculos y puntos que funcionen como centro del pentágono que forman las cinco canicas, esto se puede observar en la figura 17 y 18.

Figura 18. Pantallazo medición en GeoGebra de distancias de las canicas.



Fuente: Elaboración propia.

En general, una buena comprensión de la situación y una buena fase de incubación logra que el desempeño en general en las demás fases sea de buen nivel. Sin embargo, el problema en este tipo de estrategia tiene que ver con el indicador de fluidez en la etapa final de verificación, al ser un problema de tipo algorítmico y pedir como resultado una cantidad numérica, el estudiante considera que encontrar una respuesta es solucionar la situación, deja de lado la característica de apertura del problema. Además, que es importante la idea que determina más no el número producto de la cuenta.

4.2.4 Estrategia 4

Nuevamente se encuentra un problema de tipo geométrico, catalogado con un nivel medio de dificultad, al igual que en las dos primeras estrategias analizadas, en este caso los estudiantes en general no destinaron mucho tiempo para la concepción del plan a seguir para solucionar la situación, después de leer el enunciado se fueron a contestar el formulario de comprensión y postular como estrategia:

S4: despues de realizar el analisis de las figuras buscar la mayor cantidad similitudes posibles.

Ahora bien, la estrategia planteada es muy general y deja espacio a algunas ambigüedades, en este caso puntual, la falla ocurrió en la concepción de los elementos geométricos involucrados, se cometieron errores en las similitudes halladas por postular propiedades erróneas de los objetos que se estaban comparando.

En cuanto al proceso creativo, se puede concluir que no hubo "Insight", se hizo uso de un planteamiento valido para enfrentar múltiples situaciones problema, de este mismo y de otros tipos, no se puede evidenciar ese cambio, ese proceso de no saber a saber cómo solucionar, el sujeto siempre dejo leer que sabía lo que quería hacer y lo que estaba haciendo. Además, se evidencia un bajo desempeño en todas las fases del proceso, excepto en la comprensión de la situación, es decir, hubo una buena preparación, pero no se logró un producto creativo.

4.2.5 Estrategia 5

Para la situación 5, los sujetos se enfrentaban al problema de mayor dificultad, siendo este de tipo geométrico, analítico y con marcado carácter abstracto. En comparación con las anteriores estrategias, en este caso, quizás por la misma naturaleza del problema, a todos los estudiantes les llevo mayor tiempo y esfuerzo la fase de preparación en el proceso creativo, analizando los protocolos verbales se puede observar que en gran medida este problema en la comprensión se debe específicamente a lo que se está pidiendo, descubrir tantas reglas relativas como sea posible con respecto a las formas, tamaños e inclinación del recipiente, sumado a la creencia arraigada de los estudiantes con respecto a las soluciones numéricas y únicas en las situaciones problema que han enfrentado tradicionalmente en la clase de matemáticas.

En cuanto al planteamiento, los sujetos se inclinan por una estrategia resolutiva de experimentación, un tipo de ensayo y error. Valga la pena aclarar en este punto que al igual que en la estrategia 3, los estudiantes también decidieron interactuar con los modelos, las herramientas que ofrece el software, antes de completar el formulario de comprensión y proponer estrategias como la que se muestra a continuación,

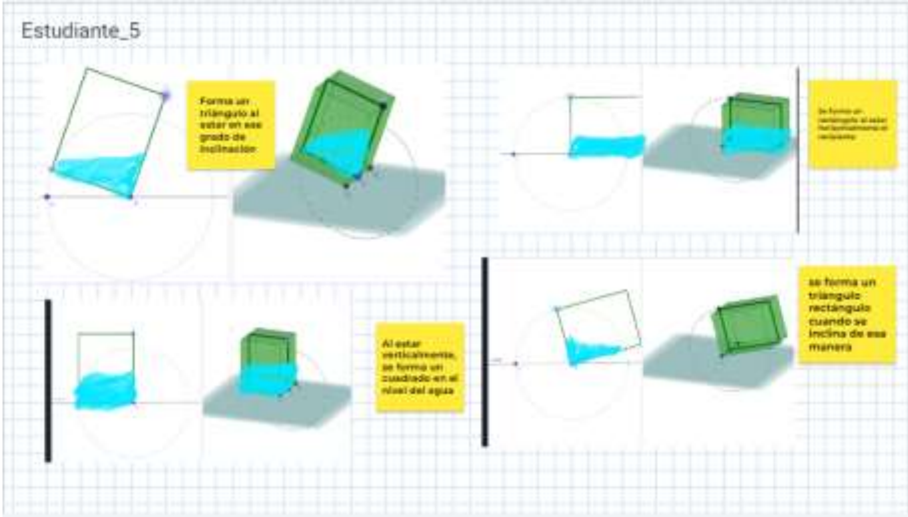
S5: Ir girando la figura inicial para cambiar el ángulo de inclinación y formar figuras distintas. Colorear la parte que forma la figura y cambiar el ángulo de inclinación.

Esta estrategia demuestra que el estudiante ha reconocido dos aspectos importantes en los objetos anexos que ofrece la situación, primero el aspecto interactivo de la variación que ofrece el modelo y se evidencia en el ángulo de inclinación y poder ver el cambio de manera inmediata en el recipiente en forma de prisma, además, identificar un elemento importante dentro del análisis pero que no está dentro del modelo, con una finalidad, es el tema del comportamiento del agua dentro del recipiente, se omitió esta característica para lograr evidenciar si el estudiante es capaz de reconocer los cambios que sufren las líneas superficiales con relación al grado de inclinación del prisma.

En el análisis de las grabaciones y los protocolos verbales se observa que los sujetos se quedan con solo una parte del análisis global que se les pide, evalúan solo la relación entre el ángulo de inclinación del recipiente y una cara lateral, esto demuestra que la estrategia tiene una debilidad desde la fase de preparación del proceso creativo, no hay una real comprensión de la dimensión general de lo que se está pidiendo en la situación, es decir, se presente un vacío en el indicador de sensibilidad a los problemas que repercute posteriormente en el desempeño de otros indicadores como la flexibilidad y en general en la etapa de incubación.

Ahora bien, partiendo de la idea anterior, es válido aclarar que el resolutor logra encontrar una posible respuesta a la situación, pero no realiza el análisis global que le permitiese hallar múltiples soluciones. En este tipo de estrategia, el momento del “Insight” se identifica en la concepción del plan, esta idea que nace en la incubación del proceso creativo finalmente se verá permeando el resto del proceso.

Figura 19. Pantallazo solución problema 5.



Fuente: Elaboración propia.

Cómo se observa en la figura 19, la estrategia también desarrolla elementos relevantes del indicador de comunicación, al igual que la estrategia 3 la presentación de la solución se hace apoyado en un elemento gráfico, pero además se usan las notas para explicar los razonamientos que produjeron esa visualización.

En definitiva, es una estrategia en la que los vacíos de comprensión de la etapa inicial del proceso creativo logran desencadenar debilidades en los indicadores de la iluminación y la verificación, se rescata la fase de la incubación por la característica de descubrimiento de la idea que se aplicara.

Tabla 12. Descripción general de estrategias aplicadas por los estudiantes.

Característica de la estrategia planteada	**Característica de la estrategia aplicada**	**Modificación de la estrategia**
Trabajo con una figura geométrica conocida.	Descomposición de una figura en polígonos básicos conocidos por el estudiante.	Se incorporaron varios polígonos con características y áreas conocidas por el estudiante.
Experimentación con polígonos manipulables dentro del AVA.	Figuras realizadas por medio de la manipulación, siguiendo un conteo algorítmico.	Se añadió un algoritmo para calcular el número de variaciones con relación al número de figuras utilizadas.

Promedio de longitudes de la distancia entre los vértices que componen un polígono.	Promedio de las longitudes de las distancias de los vértices hacia el centro del polígono evaluado.	Se construyeron elementos geométricos adicionales en los modelos dados por la situación problema para apoyar el uso de algunos algoritmos.
Experimentación con los elementos geométricos que componen el modelo de la situación problema.	Visualización realizada partiendo del modelo dado y adicionando elementos de apoyo para la comunicación del razonamiento.	Se incorporaron elementos geométricos por medio de herramientas de representación sobre el modelo dado en la situación.

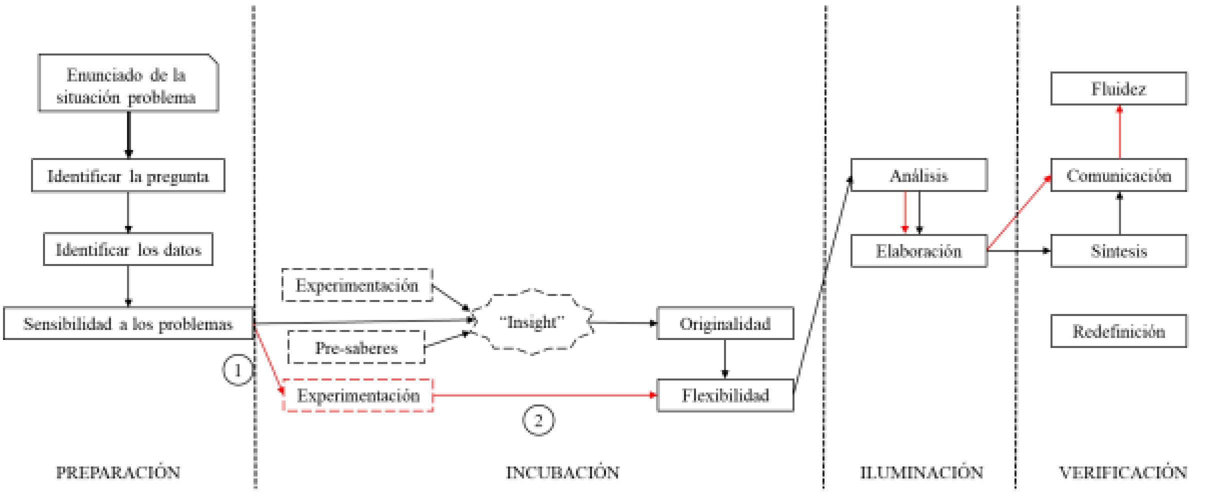
Fuente: Elaboración propia.

4.3 Modelo del proceso creativo

Otro de los objetivos de este trabajo de investigación tiene que ver con modelar el proceso creativo que han seguido los estudiantes, aprovechando los elementos que se han analizado previamente, la reflexión que se realizó sobre los indicadores de la creatividad matemática y los tipos de estrategias que aplicaron los estudiantes para la resolución de las situaciones planteadas se representara por medio de un modelo los principios, regularidades generales y esenciales del proceso creativo.

Sujeto 1

Figura 20. Modelo proceso creativo seguido por el sujeto 1.



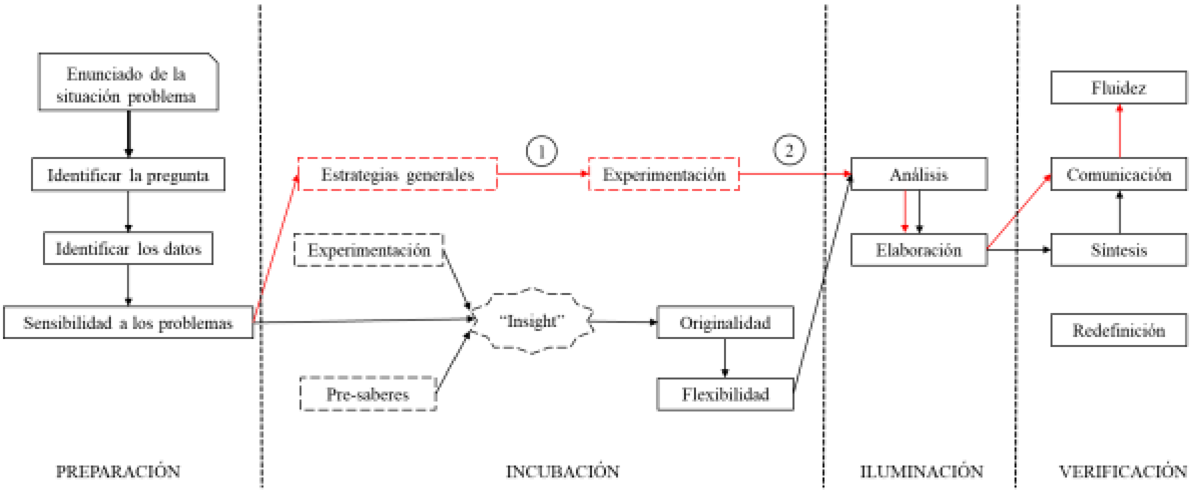
Fuente: Elaboración propia.

En el caso del proceso creativo seguido por el estudiante 1 se identifican dos elementos importantes para detallar:

1. El sujeto 1 siempre demostró el indicador de sensibilidad a los problemas, logrando identificar tanto la pregunta como los datos del problema, por este motivo, los dos procesos que se discriminan en la figura 20 inician la etapa de incubación desde el indicador de sensibilidad.
2. Cuando no se lograba el proceso del "Insgiht", el estudiante elaboraba su estrategia por medio de la experimentación y el uso de la estrategia del ensayo y el error con casos fortuitos, dando paso al indicador de flexibilidad ya que se evidenció que permitía diferentes enfoques para posteriormente analizar y elaborar una estrategia más robusta.

Sujeto 2

Figura 21. Modelo proceso creativo seguido por el sujeto 2.

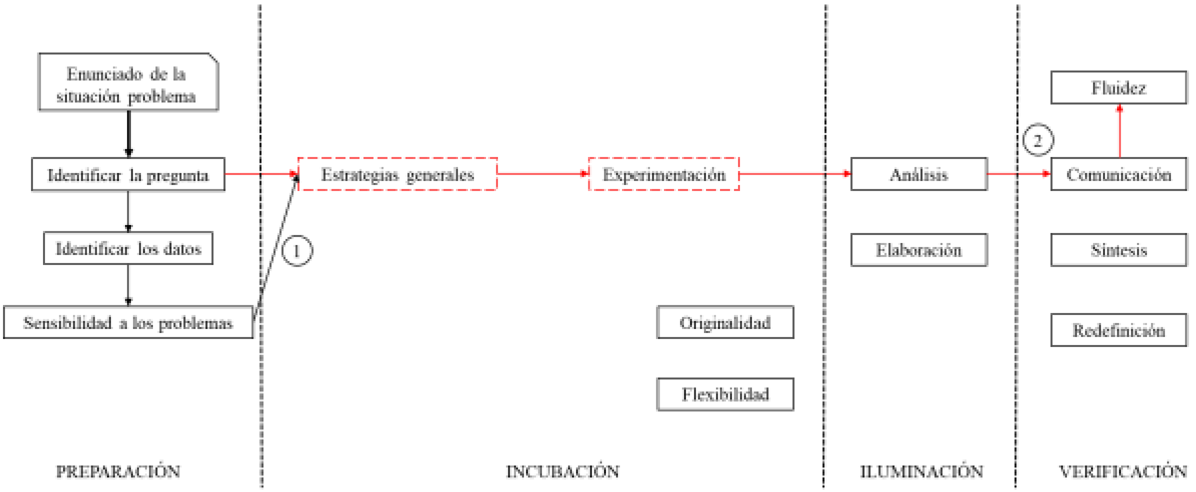


Fuente: Elaboración propia.

El sujeto 2 aunque también demostró una sensibilidad a los problemas hizo uso de estrategias generales antes de proceder a experimentar con los elementos que ofrecía la situación problema, es así como en el formulario de comprensión utilizó expresiones como "*ser ordenado para no confundirme*" lo que fácilmente podría aplicarse a una amplia gama de problemas diferentes.

Sujeto 3

Figura 22. Modelo proceso creativo seguido por el sujeto 3.

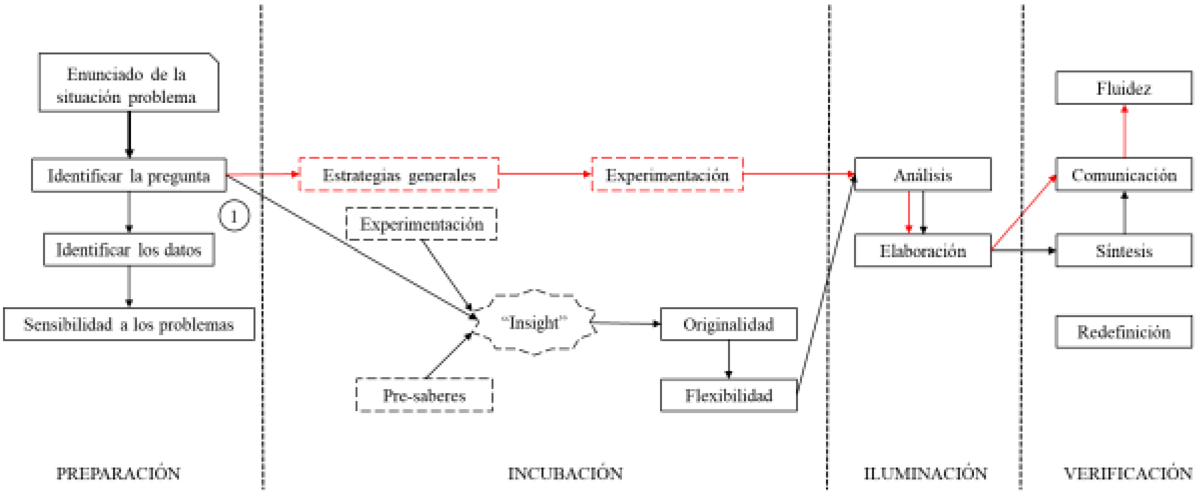


Fuente: Elaboración propia.

El sujeto 3 en sus planteamientos siempre evidenció un diseño de estrategias general y basado en la experimentación, utilizando expresiones como "*Ir mirando los ejemplos y ir solucionando*", valga la pena aclarar que, aunque en algunas soluciones hizo uso de conceptos matemáticos, estos fueron producto de análisis después de la experimentación. Así mismo, en este caso, como se logra observar en la figura 22, los análisis no desencadenaron un rendimiento en el indicador de elaboración sino simplemente un salto a la fase de verificación evidenciada en el indicador de comunicación.

Sujeto 4

Figura 23. Modelo proceso creativo seguido por el sujeto 4.

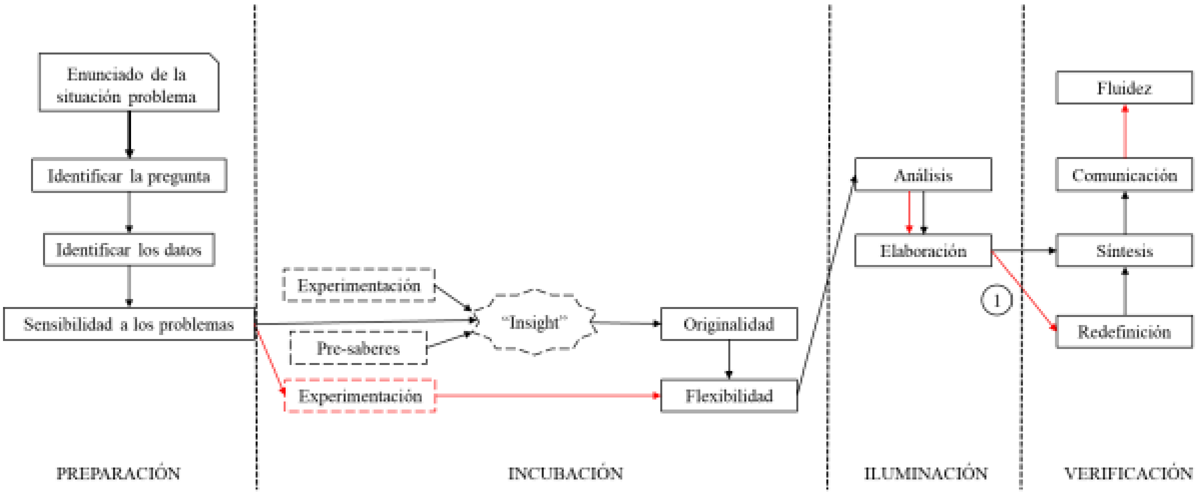


Fuente: Elaboración propia.

El sujeto 4 no logro demostrar una sensibilidad a los problemas, siempre dejo de lado los datos que ofrecían las situaciones problema, solo se logró evidenciar la identificación de la pregunta, es por esta razón que como se observa en la figura 23 en la etapa de la preparación se da por finalizada sin alcanzar un buen desempeño en el indicador de sensibilidad.

Sujeto 5

Figura 24. Modelo proceso creativo seguido por el sujeto 5.

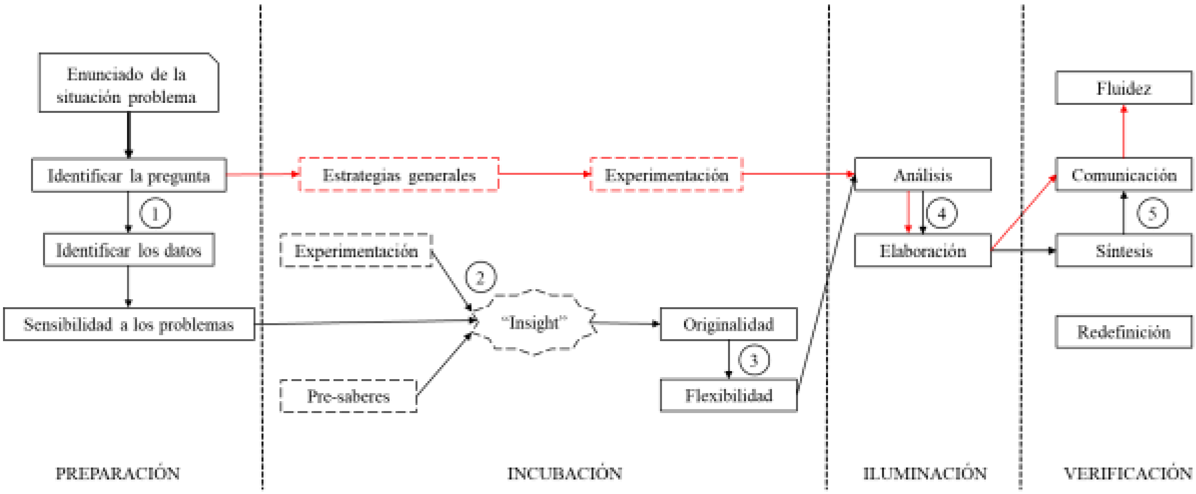


Fuente: Elaboración propia.

El sujeto 5 sigue un proceso muy similar al sujeto 1 en cuanto a las fases de preparación, incubación e iluminación, sin embargo, como se observa en la figura 24, el inicio de la etapa de verificación no se inicia con el indicador de síntesis exclusivamente, sino que cuando ha hecho experimentación logra plantear interrogantes que abren el camino a la formulación de nuevos problemas y la deducción de reglas para generalizar, es el único caso donde se evidencia el indicador de redefinición.

Ahora bien, en general como se puede observar en la figura 25, en las estrategias identificadas en la resolución de los 5 problemas propuestos a los estudiantes se identificó dos procesos realizados por los estudiantes principalmente. En primera medida, los dos comparten el primer paso que es la identificación de la pregunta después de la lectura del enunciado de la situación problema, sin embargo, en los eventos posteriores toman decisiones diferentes por eso los analizaremos por separado.

Figura 25. Modelo proceso creativo seguido por los estudiantes en general.



Fuente: Elaboración propia.

En el primer caso, el proceso señalado con el color rojo inicia con la implementación de estrategias generales en esta parte del diseño del plan, inmediatamente después de identificar el objetivo que se plantea en la situación procede a contestar el formulario de comprensión y plantea estrategias a implementar como ser ordenado, hacer una figura y luego evaluar las demás siguiendo algunas características, probar, encajar, etc. Finalizada esta etapa los sujetos proceden a experimentar para hallar posibles soluciones y con ello cierran esta etapa de diseño, en otras palabras, no se evidencia ni el indicador de originalidad o flexibilidad. Seguidamente conforme van encontrando respuestas a la situación problema entonces analizan en búsqueda de regularidades, en algunos casos agregan detalles a la estrategia, alcanzando mayores niveles en el indicador de elaboración y finalmente en la etapa de la verificación solo realizan la comunicación de sus múltiples respuestas (fluidez) productos en su mayoría de la aplicación del ensayo y el error de manera fortuita.

En cuanto a la estrategia planteada que refleja un proceso creativo, se encuentra marcada en la figura 20 con las flechas de color negro y se identifican unos momentos esenciales con círculos numerados, estos demarcan interacciones entre indicadores de la creatividad matemática y características que logran contribuir a la realización de un producto creativo, que es lo esperado. Por esta razón, se detallan los momentos ahí ubicados.

3. La primera parte diferenciadora está en la identificación correcta y completa de los datos iniciales, esto marca la distinción entre lograr o no una correcta evidencia del indicador de la sensibilidad a los problemas, este primer paso es fundamental porque un dato

que sea desestimado o con una concepción errónea puede desencadenar la omisión de una estrategia creativa.

4. El momento del “Insight” sucede en la fase de la incubación, justo antes de la concepción de la estrategia, se ubica detrás del indicador de originalidad y no es producto únicamente de la comprensión del problema sino de una experimentación e interacción de los sujetos con los elementos que ofrece la situación problema y los pre-saberes o conceptos previos.

5. Un buen desempeño del indicador de la originalidad, evidenciado en estrategias innovadoras, únicas y creativas, va a abrir el espacio para tener un pensamiento flexible, abierto a diferentes perspectivas para abordar el problema.

6. El indicador del análisis tiene una relación directa con la elaboración, no se puede pensar en desarrollar o perfeccionar una idea, agregando nuevos elementos sin la descomposición en partes del problema y el descubrimiento de relaciones entre estas partes.

7. A diferencia del anterior proceso evaluado, en este caso se establecen ideas relevantes producto del proceso de análisis y elaboración, esto se da como el primer indicador de la verificación y antes de comunicar las soluciones encontradas.

Ahora bien, es importante hacer la aclaración que, en este caso después de la comunicación no se evidencia el cumplimiento del indicador de fluidez o productividad, esto debido a que las estrategias donde se observó un producto creativo no se tuvo múltiples soluciones, por el contrario, los sujetos encontraron una respuesta y asumieron que habían acabado el proceso de resolución del problema, aun cuando los enunciados hacían la claridad de que se pedían todas las opciones posibles como solución. Esto podría explicarse por el fenómeno de que se pedían respuestas numéricas y tradicionalmente al dar el número como respuesta ahí termina el ejercicio en el aula o también se puede deber a que estos problemas eran los que tenían la mayor dificultad, esto implicaba que los sujetos destinaran mayor tiempo a la comprensión y diseño de la estrategia.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación se inició alrededor del cuestionamiento sobre los tipos de estrategias creativas que aplican los estudiantes de undécimo grado cuando se encuentran frente a la tarea de resolver problemas matemáticos, todo esto evaluado en un entorno virtual de aprendizaje. Es por este motivo que se planteó como objetivo principal caracterizar estas estrategias con relación a la creatividad matemática. Para avanzar en esta dirección, identificamos los indicadores de la creatividad matemática presentes en los planteamientos de los estudiantes, se clasificaron las estrategias aplicadas por los estudiantes y finalmente modelamos este proceso creativo en la resolución de problemas matemáticos.

Cierto es que el desarrollo de la competencia de resolución de problemas es un todo que engloba cuatro fases, planteadas por Polya (1945), que aún hoy continúan vigentes y que marcan el proceso de manera más puntual para poder analizar las oportunidades y los desafíos de nuestros estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problema en el aula de Matemáticas. No es fortuito que en general los estudiantes realicen estos procesos de manera mecánica, en muchas ocasiones realizando cálculos y aplicando algoritmos sin conocer realmente la naturaleza del problema como lo encontró Orlando (2014). Es por ello, que el AVA de Creati-Math incluyó diferentes instrumentos, integrados en un ambiente interactivo, que brindara herramientas a los estudiantes, pero sobretodo que permitiera forzar al sujeto a realizar el proceso de manera integral, interiorizando los elementos que brinda el enunciado y exteriorizando sus razonamientos, estrategias, procesos y soluciones. Esto es fundamental debido a que no solo permitió al investigador la exploración de los planteamientos de los estudiantes sino que los sujetos hicieron un trabajo consciente y enriquecedor, analizando los planes propuestos por ellos mismos para complementar las estrategias y alcanzar niveles más altos en el proceso de resolución, este aporte al desarrollo de la competencia de resolución de problemas se evidenció con el paso de las sesiones, en la apropiación de las herramientas, la experimentación y la solidez de los planteamientos de las estrategias, esto apoya trabajos como el de Mazzilli, Hernández & De La Hoz (2016), quienes reconocen lo conveniente que resulta para los estudiantes tener estrategias que ayuden a aprovechar todo su potencial y no solo encontrar la respuesta correcta. Esto muestra que la elección de los problemas de solución múltiple le permite al estudiante complementar entre los procesos de pensamiento convergente y divergente, como lo menciona De Vink et al. (2021b), se genera un solo proceso y no dos tipos de pensamiento disjuntos.

Ahora bien, Guilford (1950), Barron (1969), Logan (1980), Amabile (1983), Marín y De la Torre (1991), Sternberg (1999), Paz (2004) y Violant (2006) realizan cada uno estudios acerca de los indicadores de la creatividad. De este rastreo y revisión de las coincidencias en las investigaciones mencionadas, se seleccionaron nueve indicadores definidos en la tabla 2, distribuidos en las cuatro fases del proceso de resolución de problemas planteado por Polya (1945) y de su correspondencia con el proceso creativo, centrado en el análisis de las fases de preparación, incubación, iluminación y verificación, expresado como menciona Sadler-Smith (2015) en el modelo Gestalt. A diferencia de estudios anteriores como el de Mallart & Deulofeu (2016), en nuestra investigación se abordó también la primera fase que corresponde a la comprensión del problema o preparación del proceso creativo, en esta se ubicó el indicador de sensibilidad a los problemas, relacionándolo con dos tareas fundamentales, en primer lugar, identificar la pregunta que se plantea y luego los datos que ofrece la situación. Después del análisis de los elementos de las estrategias se encontró que un buen desempeño en este indicador no implica necesariamente la consecución de un producto creativo, para garantizar el éxito del proceso se debe abordar el diseño de la estrategia implicando la fase de incubación, es decir, complementar con un buen desempeño de los indicadores de originalidad y flexibilidad, se logró observar que un adecuado diseño de la estrategia a través del planteamiento de ideas novedosas y originales no solo logra un alto desempeño en el indicador de originalidad sino también repercute directamente en estrategias con razonamientos más flexibles.

Con todo y lo anterior, al revisar la tabla 10 se puede observar que los dos indicadores con mejor desempeño a nivel general en las cinco soluciones problema planteadas fueron el indicador 1, sensibilidad a los problemas, que se refiere a la habilidad del estudiante para comprender, analizar y resolver los problemas matemáticos planteados de manera efectiva y por otro lado el indicador 7, comunicación, que es la capacidad de transmitir y compartir sus razonamientos de manera convincente, esto responde a que estos dos indicadores son elementos presentes y que se fortalecen constantemente dentro del aula de matemáticas en el trabajo con problemas rutinarios de única solución. Sin embargo, es necesario aclarar que estos dos indicadores no evidencian un pleno desempeño y aún hay oportunidades de mejora tal como lo menciona el trabajo de Orlando (2014) en el que se verificó que las mayores dificultades surgieron en la comprensión del problema, la argumentación y organización de las estrategias que lo resuelven. Así mismo, Kusuma et al. (2021) sugiere hablar de un nivel metacognitivo bajo en el que no se ve un buen desempeño de la totalidad de los indicadores de la creatividad matemática al examinar el proceso resolutivo de los problemas, estos estudiantes se limitan en los conceptos matemáticos empleados o memorizan una solución. En el caso de nuestro estudio, la comprensión presentó dificultades en el reconocimiento de los datos iniciales y las propiedades de algunos objetos matemáticos, mientras la comunicación se vio fortalecida por el uso de herramientas de modelamiento, visualización, medición de distancias, cálculos de áreas, presentes en el AVA y los softwares adiciones de apoyo como GeoGebra.

Del mismo modo, se puede concluir que existe una estrecha relación entre el proceso de resolución de problemas y el proceso de creatividad matemática. Esto corresponde con lo planteado por trabajos como los de Mann (2005), Kattou et al. (2013), De La Cruz (2021) y Hamid & Kamarudin (2021), quienes encontraron correlaciones positivas entre estos procesos de los estudiantes. Además, que hay una gran oportunidad en el aprovechamiento de esa relación positiva para fomentar el aprendizaje de la matemática en los estudiantes, empleando la formulación independiente de problemas que involucren objetos y situaciones de su vida cotidiana como lo hicieron Emre-Akdoğan, (2022), a través del proyecto de foto matemática, la búsqueda de formas y estrategias, la deducción de fórmulas y la búsqueda de métodos originales para resolver problemas abiertos no rutinarios.

Basándose en el análisis de los procesos creativos eficientes, se encontró que existe un hábito arraigado hacia la solución de problemas con solución única y de tipo algorítmico, cuando se analiza el proceso resolutivo discriminado por fases, es evidente el desempeño significativo en la fase II o de incubación, esto concuerda con Mallart & Deulofeu (2016), que resalta la importancia del indicador de flexibilidad, aunque no al mismo nivel del indicador de originalidad. Contrario a la incubación, las fases III y IV no se presentan de manera predominante, sobretodo en el caso de la etapa de verificación, que corresponde al final del proceso, esto se debe a la poca importancia que se da a la retroalimentación dentro del aula, como menciona Mallart (2011) existe una falencia por parte de los docentes de matemáticas ya que no se enseña a los estudiantes lo provechoso que resulta revisar el proceso de solución en un problema matemático, haciendo énfasis en que nos encontramos con un proceso cíclico por lo tanto la retroalimentación puede ser la oportunidad de optimizar la estrategia inicial.

En definitiva, en los tipos de estrategias también se evidenció una estrecha relación entre lo heurístico en el proceso resolutivo y el “Insight” en el tema de la creatividad matemática, esta característica en los procesos creativos exitosos se ubicó en la fase de incubación, dentro del diseño de la estrategia, fue producto de una buena comprensión de la situación problema, de una experimentación preliminar, familiarización con los objetos matemáticos involucrados y uso de conceptos previos que tienen los estudiantes. Al mismo tiempo, las estrategias donde se dio el “Insight” en ese momento de la fase de incubación, fueron planteamientos específicos, novedosos y flexibles, características que Mann & Chamberlin (2019) exponen como atributos del pensamiento en los individuos donde se evidencia una relación entre el pensamiento creativo y las habilidades matemáticas, en algunos casos generando como lo menciona Meier et al. (2023) procesos de pensamiento creativo que son de tipo general, es decir, se originan ideas novedosas pero estas no concluyen en soluciones matemáticamente correctas.

Ahora bien, en torno a la pregunta problema con la que nació esta investigación, se puede afirmar que los estudiantes de undécimo grado cuando se enfrentan en un entorno virtual de aprendizaje a situaciones problema no rutinarias que admiten múltiples soluciones hacen uso de dos tipos de estrategias creativas, por un lado, planteamientos generales, que abren la oportunidad para abordar múltiples situaciones pero que dejan de lado la naturaleza del problema y que en el mejor de los casos finalizan con ajustes producto de los análisis hechos durante las fases del proceso. Vale la pena aclarar que este tipo de estrategias se caracteriza por el uso del ensayo y error, pero de manera fortuita, lo que no brinda eficiencia al proceso pues son casos seleccionado al azar, sin descubrimiento de regularidades. Por el contrario, en el otro tipo de estrategia creativa identificada se hace uso de la experimentación durante el proceso de diseño de la estrategia, lo que genera un impacto en los indicadores de originalidad y flexibilidad, a través de la aparición del “Insight”, este entendimiento del estudiante da mayor nivel al proceso creativo y permite fortalecer las siguientes fases, tanto de la iluminación o ejecución del plan como de la verificación por medio del descubrimiento de relaciones, la deducción de propiedades y la construcción de hilos de ideas coherentes. Al respecto conviene decir que la dificultad de este tipo de estrategia se encuentra en el indicador de fluidez pues los estudiantes no logran vencer su creencia de una solución única y en ese momento dan por finalizado el proceso de resolución del problema.

5.1 Conclusiones

En definitiva, los procesos creativos de resolución de problemas planteados por los estudiantes permitieron identificar diferencias entre los nueve indicadores de creatividad matemática, en el caso de la tabla 11 podemos ver que se debe prestar especial atención a desarrollar espacios dentro del aula de matemáticas para fortalecer las capacidades de análisis y redefinición, en primer lugar, el indicador de análisis hace referencia a la capacidad que tiene el estudiante para descomponer las partes del todo que es la situación problema, para de esta manera poder trabajar cada parte y descubrir nuevas relaciones. Por el lado de la redefinición, se evidencia en la capacidad de reconstruir a partir de la información que conoce, encontrar aplicaciones y definiciones que sean diferentes a las que habitualmente trabaja con este tipo de problemas. Esta tarea requiere que se subyugue el hábito de solucionar únicamente problemas rutinarios dentro del aula, el estudiante tiene que enfrentarse a situaciones problema en matemáticas que lo reten y le permitan explorar, analizar y llegar hasta la redefinición por medio de cambiar datos o condiciones iniciales, una oportunidad es aprovechar la resolución de problemas con múltiples soluciones y también la invención de estas situaciones por parte del estudiante.

Desde luego, estos tipos de estrategias diseñadas por los estudiantes y analizadas a lo largo de este trabajo tienen características particulares que nos han permitido identificar algunos patrones para definir los elementos pero también la tipología presente, una pieza fundamental tiene que ver con la distinción que se evidenció en el momento en que ocurre el proceso del "Insight" dentro de la estrategia planteada por el estudiante y como este elemento permite predecir si tendremos o no un producto creativo. La diferencia tiene relación con la experimentación previa que realiza el estudiante y el uso del "error" dentro del aula de matemáticas, se cae fácilmente en el castigo de la equivocación, generando ansiedad por el desacierto y temor a plantear una estrategia errada. Gracias al formulario de retroalimentación se logró evidenciar que en el 63% de las ocasiones los estudiantes reconocieron que aplicaron la estrategia planteada en un inicio, pero con modificaciones y por el contrario solo implementaron la estrategia tal cual como se había pensado desde el inicio en el 29% de los casos. Este fenómeno permitió que a lo largo de la investigación los estudiantes comprendieran que existe una alta probabilidad de analizar y elaborar mejoras a la estrategia en el trascurso del proceso de resolución, asimilar que el análisis para llegar a la idea en el proceso de solución de un problema no se queda en la fase del diseño o incubación, por el contrario, el análisis permanente perfecciona los planteamientos, enriquece el proceso y permite lograr mejores resultados en el producto creativo matemático.

También es cierto, que se pudo evidenciar la influencia directa del proceso creativo en el desarrollo de las habilidades matemáticas, en este caso puntual sobre la competencia de resolución de problemas, esto en gran medida gracias a las herramientas que ofrecía el AVA a los estudiantes permitiéndoles visualizar, modelar, representar, medir, calcular, entre otras. Estos instrumentos permiten que los estudiantes rompan las barreras que implican el lápiz y el papel y además dejar de lado la dependencia con respecto a los algoritmos, como se evidencia en los protocolos verbales del anexo 1 y los pantallazos del Jamboard en el anexo 3, los estudiantes profundizan en sus razonamientos y muchas veces sin tener conocimientos previos en temas específicos lograban plantear estrategias apoyados en la experimentación a través de la manipulación de los objetos que brindaban los softwares. En el caso de los docentes siempre será dispendiosa la revisión detallada de los procesos realizados por los estudiantes en la resolución de los problemas, por este motivo fácilmente podemos caer en la tentación de evaluar solo el resultado, pero, en definitiva, este tipo de ambiente virtual de aprendizaje también es una herramienta para el docente pues logra brindar una visión completa del proceso cíclico en que se convierten las fases, tanto del proceso resolutivo como del proceso creativo, sistematiza los planteamientos, los razonamientos, las estrategias y la implementación de los estudiantes, esto permite que como docentes en el área de matemáticas brindemos retroalimentaciones más completas, enfocadas en el razonamiento de cada estudiante y en sus diferencias para ayudar a reconocer los errores como fuente de mejora.

Futuras líneas de investigación

Pensando en futuros trabajos de investigación, se plantean dos líneas posibles. En primer lugar, se plantea continuar el presente trabajo con un estudio con enfoque cuantitativo que permita aumentar el tamaño de la muestra y adicionar instrumentos para realizar un análisis estadístico discriminado sobre los indicadores de la creatividad matemática y su relación con el rendimiento académico en el área de Matemáticas. Así mismo, una segunda línea de investigación se plantea a partir de la medición de la incidencia del entorno en el desarrollo de la creatividad matemática, algunos autores hablan del ambiente creativo, para ello se deben generar instrumentos que logren medir características del medio y acciones del sujeto como es el caso de los gestos a la hora de leer las situaciones problema, plantear las estrategias, aplicarlas, la relación de estas manifestaciones no verbales con las fases del proceso resolutivo y del producto creativo si lo hay.

REFERENCIAS

Akgül, S., & Kahveci, N. G. (2016). A Study on the Development of a Mathematics Creativity Scale. Eurasian Journal Of Educational Research, 16(62). https://doi.org/10.14689/ejer.2016.62.5

Balka, D. S. (1974). Using research in teaching: Creative ability in mathematics. The Arithmetic Teacher, 21(7), 633-636. https://doi.org/10.5951/at.21.7.0633

Beghetto, R. A., & Schreiber, J. B. (2017). Creativity in Doubt: Toward Understanding What Drives Creativity in Learning. En Advances in mathematics education (pp. 147-162). https://doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3_10

Callejo, M. L. (1996). "Evaluación de procesos y progresos del alumnado en resolución de problemas". UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas 8, 53-63.

Cornish, G., & Wines, R. (1980). ACER Mathematics Profile Series: Number Test. Australian Council For Educational Research. https://eric.ed.gov/?id=ED189173

Defaz Cruz, G. J. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. Journal of Science and Research, 2(5), 14–17. https://doi.org/10.26910/issn.2528-8083vol2iss5.2017pp14-17

De la cruz, A. M. (2021). Creatividad y resolución de problemas matemáticos en escolares de 5° grado de IIEE particulares. Universidad Femenina del Sagrado Corazón. Lima, Perú.

De Vink, I. C., Willemsen, R. H., Lazonder, A. W., & Kroesbergen, E. H. (2021). Creativity in mathematics performance: The role of divergent and convergent thinking. British Journal Of Educational Psychology, 92(2), 484-501. https://doi.org/10.1111/bjep.12459

Emre-Akdoğan, E. (2022). Examining mathematical creativity of prospective mathematics teachers through problem posing. Teaching Mathematics And Its Applications An International Journal Of The IMA, 42(2), 150-169. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac006

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In A. M. Thinking, & D. Tall (Eds.) Advanced mathematical thinking (pp. 42-53). Springer Netherlands.

Ginsburg, H. P. (1996). Toby's math. In R. J. Sternberg & T. BenZeev (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 175–282). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. American Psychologist/ The American Psychologist, 5(9), 444-454. https://doi.org/10.1037/h0063487

Guilford, J. (1962). Factors That Aid and Hinder Creativity. Teachers College Record, 63(5), 380-392. https://www.tcrecord.org/books/Content.asp?ContentID=3045

Hamid, N. H. A., & Kamarudin, N. (2021b). Assessing Students' Mathematics Achievement and Mathematical Creativity using Mathematical Creative Approach: A Quasi-Experimental Research. Asian Journal Of University Education, 17(2), 100. https://doi.org/10.24191/ajue.v17i2.13399

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school chilren. Educational Studies In Mathematics, 18(1), 59-74. https://doi.org/10.1007/bf00367914

Hidalgo Paredes, H. D., Mera Gutiérrez, E. A., López Ordoñez, J., & Patiño Giraldo, L. E. (2015). Aprendizaje basado en problemas como potencializador del pensamiento matemático. Plumilla Educativa, 15(1), 299–312. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.15.845.2015

ICFES (2020). Marco de referencia para la evaluación. Bogotá, D.C.

Idris, N., & Nor, N. M. (2010). Mathematical creativity: usage of technology. Procedia: Social & Behavioral Sciences, 2(2), 1963-1967. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.264

Imai, T. (2010). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 31(2), 187-193. https://doi.org/10.1080/002073900287246

Kahneman, D.; Slovic, P. y Tversky, A. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. (New York: Cambridge University Press).

Kang, G.-A., Yoon, J., & Kang, S.-J. (2015). Exploration of problem solving program including creative thinking skills in the idea generation and verification stages as method for fostering creativity of elementary school student. Journal of Korean Elementary Science Education, 34(1), 95–108. https://doi.org/10.15267/keses.2015.34.1.095

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 167–181. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2004). Development of Mathematical Creative Problem Solving Ability Test for Identification of the Gifted in Math. *Gifted Education International*, *18*(2), 164-174. https://doi.org/10.1177/026142940301800206

Kozlowski, J. S., Chamberlin, S. A., & Mann, E. (2019). Factors that Influence Mathematical Creativity. The Montana Math Enthusiast, 16(1), 505-540. https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1390&context=mathsci_facpub

Krutetskii, V. A., Teller, J., Kilpatrick, J., & Wirszup, I. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Journal For Research In Mathematics Education, 8(3), 237. https://doi.org/10.2307/748528

Kusuma, D., Zaenuri, N., & Wardono, N. (2021). Mathematic creative thinking ability based on student metacognition in blended learning model with e-module. Journal Of Physics Conference Series, 1918(4), 042103. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/4/042103

Lakatos, I., Worrall, J., Zahar, E., & Santos, C. S. (1986b). Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático. En Alianza Editorial eBooks. http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA24602260Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education—CERME-5 (pp. 2330–2339).

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. The Arithmetic Teacher, 17(4), 325-328. https://doi.org/10.5951/at.17.4.0325

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME-5 (pp. 2330–2339).

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. En BRILL eBooks (pp. 129-145). https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: teachers' choices. Journal of Mathematics Teacher Education, 16, 269-291.

Mann, E. L. (2005). Mathematical Creativity and school Mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students. University Of Connecticut. Doctoral dissertation.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. journal for the education of the gifted. 30. 236-260. 10.4219/jeg-2006-264.

Mazzilli D.M., Hernández, De La Hoz S.I. (2016). Procedimiento para Desarrollar la Competencia Matemática Resolución de Problemas. Escenarios, 14 (2), 103-119.

Meier, M. A., Gross, F., Vogel, S. E., & Grabner, R. H. (2023). Mathematical expertise: the role of domain-specific knowledge for memory and creativity. Scientific Reports, 13(1). https://doi.org/10.1038/s41598-023-39309-w

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá.

Montoya-Olivares, J. E. (2014). Relación entre creatividad e inteligencias múltiples con competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato.

Nadjafikhah, M., & Yaftian, N. (2013). The Frontage of Creativity and Mathematical Creativity. Procedia: Social & Behavioral Sciences, 90, 344-350. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.07.101

National Council of Teachers of Mathematics (2000), Principles and Standards for School Mathematics, Reston Va.,National Council of Teachers of Mathematics.

Neumann, C. J. (2007). Fostering creativity. EMBO Reports, 8(3), 202-206. https://doi.org/10.1038/sj.embor.7400913

Orlando, M. (2014). Razonamiento, solución de problemas matemáticos y rendimiento académico. Universidad de San Andrés. Buenos Aires, Argentina.

Orozco, J. (2016). Apropiación de recursos de visualización mediados por tic, en el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos, de los estudiantes del grado 5° del colegio Manuel Cepeda Vargas IED. Universidad Libre, Bogotá, Colombia.

Plucker, J. A., Beghetto, R. A., & Dow, G. T. (2004). Why Isn't Creativity More Important to Educational Psychologists? Potentials, Pitfalls, and Future Directions in Creativity Research. Educational Psychologist :/Educational Psychologist, 39(2), 83-96. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3902_1

Poincaré, H. (1948). Science and method. New York: Dover.

Polya, G. (1984). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Prouse, H. (1967). Creativity in school mathematics. Mathematics Teacher, 60(3), 876-879.

Sadler-Smith, E. (2015). Wallas' Four-Stage Model of the Creative Process: More Than Meets the Eye? Creativity Research Journal, 27(4), 342-352. https://doi.org/10.1080/10400419.2015.1087277

Sierra, C. (2018). Diseño de un ambiente b-learning basado en el modelo de Pólya para la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación por los niños de segundo de básica primaria. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM. Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik. Articles, 29(3), 75-80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Simonton, D. K. (2000). Creativity: Cognitive, personal, development, and social aspects. American Psychologist, 55(1), 151-158.

Siswono, T. Y. E. (2011). Level of student's creative thinking in classroom mathematics. Educational Research and Reviews, 6, 548-553.

Sriraman, B., & Dickman, B. (2017). Mathematical pathologies as pathways into creativity. ZDM, 49(1), 137-145. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0822-8

Sriraman, B. (2017). Mathematical creativity: psychology, progress and caveats. ZDM, 49(7), 971-975. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0886-0

Sternberg, R. J. (1986). Intelligence applied: Understanding and incresing your intelectual skills. San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich.

Sternberg, R. J. (2000). Handbook of creativity. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (2006), "The nature of creativity", Creativity Research Journal, Vol. 18/1, pp. 87- 98.

Torrance, E. P. (1966). Torrance Tests of Creative Thinking: Norms Technical Manual, Personell Press, New Jersey.

Torrance, E.P. & Ball, O. (1984). Streamlined scoring and norms for figural forma A and B. Benseville, IL: Scholastic Testing Service.

Wallas, G. (1926). The art of thought. https://ci.nii.ac.jp/ncid/BA23227381

ANEXO 1 – PROTOCOLO VERBAL

PV - Problema 1

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Ay no sé	
L3	Ninguna figura debe dividirse en 2, ¿cómo así?	I_03
L4	Aquí le falta un paréntesis.	
L5	No entiendo esta parte (señala con el cursor la última indicación del enunciado).	
L6	Supongo que hago así y así, como así y así (realiza cuadrados utilizando algunos de los 16 puntos), porque serían dos figuras.	I_05
L7	¿Será que le tomó captura o lo dibujo mejor?	I_07
L8	Yo creo que cuando se refiere a dividir supongo que se refiere a esto (dibuja dos cuadros iguales con diferentes puntos como vértice), ahí tiene dos pero ósea están divididas.	
L9	Pero es que es con el triángulo.	
L10	Lo logré.	
L11	Ese ya lo hice.	
L12	¿Cuántas llevo?	
L13	¿Será que puede borrar esto? (señala los 16 puntos que se pusieron como muestra en la pizarra del jamboard).	
L14	Empieza a realizar figuras con un área "más grande", quizás ya tiene un patrón de área regular y hace todas las figuras a partir de cuadrados y triángulos.	I_04
L15	Oh ¿Por qué? (preguntándose por qué un figura construida midió 3 cm^2 de área).	
L16	Revisa en el Jamboard que la figura que acaba de realizar no se encuentre dentro de las halladas anteriormente.	
L17	Para que me dé el área toca con figuras que tengan cuadrados y triángulos.	I_03, I_04, I_05
L18	¡Dios mío! El quiz de física.	
L19	Según el enunciado, solo puedo usar los 16 puntos.	

L20	Piensa un momento y evidencia que el punto donde inicia debe ser el mismo punto donde "cierre" su polígono.	I_06
L21	No me sirve.	
L22	Una figura y luego otra que no se crucen los puntos.	
L23	Identifica cuando dos figuras son exactamente iguales, solo que han sido producto de rotaciones o traslaciones.	I_05, I_06
L24	Profe, ¿estas figuras entonces cumplen?	
L25	Alguien está usando mi cuaderno (hace referencia a que un compañero está poniendo sus soluciones en su pizarra de Jamboard).	
L26	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	

Sujeto 2

L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Esto es lo mismo de la vez pasada pero con cuadritos.	I_01
L3	O sea que cualquier área que haga debe ser de 2 cm.	
L4	No solo ubica los puntos que funcionan como vértices sino también los que hacen parte de las aristas de los polígonos.	
L5	Todas tienen que ser de 2 cm porque si no, no.	
L6	Las figuras no deben partirse o dividirse en dos.	
L7	Hace uso de muchos cuadrados para formar los polígonos pero no relaciona la medida de las áreas con la figura que acaba de construir para encontrar una generalización.	
L8	¿Cómo calcular el área?	
L9	¿Cómo se puede tomar captura de pantalla? ¿Usando Windows, control? Ay no, ah es Windows, shift, s.	
L10	Sigo pensando en lo que dice de los puntos.	I_01
L11	Debe ser algo más o menos así (intenta dibujar una figura en Geogebra), ¿este mouse qué? Se está moviendo muy raro.	
L12	¿Pero esto sí cuenta como una figura? ¿O sería de las que están divididas?	
L13	Bueno ahora, ¿cómo uno los puntos?	
L14	¿Es viable que una forma quedé así? (hace referencia a un polígono cuyo vértice inicial es diferente al final).	
L15	Ay, ¿por qué da 2.5?	

L16	A partir de una figura en la que se excede el área establecida construye una nueva figura que cumpla "quitando" un parte.	I_03
L17	¿Cuál será la regla para que de 2?	
L18	Uy me faltó.	
L19	¿Tienen que utilizarse exactamente esos punticos o pueden hacer así? (dibuja figuras con puntos como vértice entre los 16 puntos que se pusieron de muestra)	
L20	Me estresa estar busque y busque y no encontrar.	
L21	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 3		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Me quedaron los puntos como separados.	
L3	Lo mismo que … lo mismo que antes.	I_01
L4	Bueno, ya vamos en el test.	
L5	Estoy sintiendo que graficar acá me está quedando grande.	
L6	Ah ya sé cómo.	
L7	El estudiante realiza su segundo polígono de área 2 cm^2 y se percata que es el mismo que colocó como polígono 1 en el Jamboard, identifica que simplemente es el mismo triángulo trasladado.	I_05
L8	Esto es como un área de 3… sí.	
L9	Al verificar el área y no ser 2 cm^2 procede a borrar el polígono y no se toma el tiempo de analizar cómo podría modificar esa figura para lograr una correcta.	
L10	Realiza muchas veces la misma figura incorrecta y se evidencia una tendencia a realizar polígonos que terminen en triángulos.	
L11	¿Hay un número de figuras que debamos encontrar?	I_05
L12	No he encontrado un patrón, creo que apenas estoy iniciando.	
L13	Me falta una figura todavía.	
L14	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 4		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	

L2	El estudiante identifica una figura de partida como lo es el cuadrado y utiliza otras herramientas para dibujar cuadrados de lado 2.	
L3	Voy a guardar las imágenes y luego coloco todas las soluciones al tiempo.	
L4	El estudiante obtiene una figura con área 0 dado que al construirla corta dos de sus aristas entre sí, entonces queda pensativo sobre lo que pudo ocurrir para que el software calcule esa área como 0.	I_05
L5	Esta figura sí me sirve.	I_05
L6	Al principio se supone que había entendido, pero ahora creo que no.	
L7	Cuando se empiezan a ubicar varias figuras quedan unas encima porque comparten puntos que están en la mitad de otras figuras.	
L8	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 5		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	El estudiante aplica el ensayo y error para encontrar las figuras que cumplan con las condiciones dadas en la situación problema.	
L3	Reconoce la condición de evaluar las soluciones para garantizar que sean diferentes a las anteriormente propuestas.	I_05
L4	Con pocas figuras halladas intenta hacer una configuración donde hallan varias figuras de 2 cm^2 usando solo los 16 puntos y sin compartir vértices.	I_06
L5	Me he dado cuenta que las figuras que tienen área 2 son las que utilizan tres puntos seguidos, así sea diagonal, vertical u horizontal.	I_04, I_05, I_06, I_08
L6	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	

PV - Problema 2

Línea	**Verbalización**	**Indicador**
Sujeto 1		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Salen muchas figuras.	I_01
L3	Toca hacer las figuras más pequeñas porque van a salir muchas.	

L4	El estudiante realiza nuevos hexágonos de tamaño más pequeño y borra las dos figuras que ya había realizado.	
L5	Ya se me acabo la hoja (haciendo referencia a que no le queda más espacio en la pizarra de Jamboard).	
L6	Creo que no hay 64.	I_03, I_05
L7	Yo creo que salen bastantes.	
L8	El estudiante realiza las que él considera son posibles combinaciones pero no evalúa que algunas son idénticas a otras solo que están rotadas.	
L9	Es que están saliendo demasiadas.	
L10	Creo que allá me hace falta una figura.	
L11	Estoy poniendo las idénticas.	I_05
L12	Las voy a eliminar porque no cuentan las idénticas. Están volteadas entonces son idénticas prácticamente.	
L13	Yo creo que en total deben haber 32 porque la mitad son iguales.	I_03, I_05
L14	Esta no es igual (señala dos figuras adyacentes que acaba de realizar).	
L15	No sé cómo más.	
L16	El estudiante realiza rotaciones de la figura intentando cambiar el resultados pero como no hay una estrategia planteada termina realizando las mismas figuras.	
L17	Ya está… ya está… (prueba con la ubicación del último hexágono para realizar una figura diferente a las que ya ha hecho anteriormente).	I_04
L18	Pensemos… ¿qué más se puede hacer?	
L19	Bueno 27, ¿cuántos son en total?	
L20	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 2		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Se debe identificar que las hace idénticas.	I_01
L3	Eso es lo que dice ahí, toca leer, leer y leer.	
L4	A este paso van a salir muchas.	
L5	Sí con 3 salen 3 entonces con 4 salen 6 y con 6 deben salir 64 (dice el resultado con incredulidad).	I_03, I_04, I_05

L6	Pero con 3 salen más… ah no sí, es la misma.	
L7	Voy a hacer figuras hasta que se acaben… sigan viendo.	
L8	Lo que si toca hacer es hacer las figuras más pequeñitas, porque necesito espacio para muchas.	
L9	El estudiante en repetidas ocasiones vuelve a leer la instrucción con el fin de resolver dudas que surgen en la realización de las figuras, concretamente con la condición de que no sean respuestas idénticas.	
L10	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 3		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Es probar colocando los papeles hexagonales en diferentes posiciones.	I_01
L3	Ya voy a necesitar una segunda hoja (haciendo referencia a que se agotó el espacio en la primera pizarra del Jamboard).	
L4	El estudiante no muestra un orden a la hora de realizar sus figuras, esto se puede evidenciar en que no hay si quiera un orden para la numeración.	
L5	En este punto ya no sé ni por donde voy.	
L6	Al utilizar una nueva pizarra para seguir colocando las figuras se hace más complejo garantizar que la nueva forma no se ha hecho anteriormente.	
L7	Son muchos “cosos” y ya no sé por dónde voy.	
L8	Yo creo que me voy a volver loca con tantos hexágonos.	
L9	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 4		
L1	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L2	El estudiante manifiesta el uso de una figura guía inicial para con ella empezar a realizar las demás.	
L3	¿Hay manera de poner otra hoja? O ¿debo hacer que todas las figuras queden en esta?	
L4	Bien, ahora intentar no repetir.	
L5	Es cuestión de cambiar un “cosito” y ya se tiene una nueva.	I_05
L5	Bueno, ya alcance las primeras 30.	
L6	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	

Sujeto 5		
L1	El estudiante inicia con las disposiciones de 3 hexágonos dadas en la instrucción, luego utilizó 4 hexágonos y finalmente a partir de ellas formó las figuras con 6 hexágonos que le pedía la situación.	I_01, I_03, I_04, I_05
L2	El estudiante lee la situación y contesta el formulario de comprensión.	
L3	Definitivamente son muchas respuestas.	
L4	El estudiante no vuelve a las anteriores pizarras para comprobar si las nuevas figuras son idénticas a algunas anteriores. Además que no las repite, es un proceso eficiente, esto muestra un alto nivel de organización en la estrategia.	I_04, I_05
L5	El estudiante responde el formulario de retroalimentación.	

PV – Problema 3

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	El estudiante mueve los puntos que representan las canicas en GeoGebra para interactuar con la organización del arreglo de la situación.	I_01
L3	No, ¿qué hice? (se hace la pregunta debido a que ya no puede mover los puntos en GeoGebra).	
L4	El estudiante hace uso de la herramienta *distancia* en GeoGebra y empieza a dar clic en los puntos para experimentar como la puede usar en su estrategia.	I_03
L5	El estudiante intenta ubicar los puntos que representan las canicas siguiendo las tres ubicaciones que se muestran de los tres estudiantes A, B y C.	I_03, I_04
L6	He estado pensando hacer estas figuras acá (las disposiciones mostradas en la figura de la situación problema) y hallar la medida entre algún punto y el promedio para determinar un número y que ese sea la dispersión. Entonces necesito que sea menor y mayor o mayor para que sea funcional. Pero no sé si realmente se pueda hacer así.	I_03
L7	El estudiante pega la imagen que acompaña la situación problema dentro de GeoGebra para que la ubicación de los puntos sea lo más exacto posible.	
L8	También se me ocurre que se podría medir el perímetro.	I_03

L9	El estudiante contesta el formulario de comprensión.	
L10	También se podría hacer una circunferencia, medir las distancias hasta el centro y dividir sobre cinco.	I_03, I_04, I_05
L11	El estudiante ubica un punto auxiliar en el centro aproximado de los cinco puntos que representan las canicas.	
L12	El estudiante utiliza la herramienta de distancia para medir y luego realiza cálculos en la aplicación de la calculadora para presentar la dispersión con un número.	
L13	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 2		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	El estudiante interactúa con los puntos que representan las canicas en GeoGebra.	I_01
L3	El estudiante hace uso de algunas herramientas del software GeoGebra como por ejemplo realizar círculos señalando el centro y que pase por un punto, intentando ubicar un círculo que reúna todas las canicas.	I_03
L4	No sé qué hice.	
L5	El estudiante realiza algunas sumas con ayuda de la aplicación de la calculadora del computador.	
L6	Contesta el formulario de comprensión.	
L7	En definitiva, ¿qué se debe entregar en este problema 3?	I_01
L8	El estudiante intenta ubicar los puntos en GeoGebra de manera que sigan la ubicación exacta de la imagen dada en la situación problema, mide las distancias con la herramienta del software y halla el promedio de ellas con ayuda de la calculadora.	I_04
L9	Esta entonces sería mi estrategia.	
L10	Ahora necesito medir ese perímetro (señalando un círculo que acaba de construir).	
L11	El estudiante empieza a utilizar la imagen dada en la situación problema en el fondo como base para que la ubicación de los cinco puntos sea con mayor exactitud.	
L12	¿La división será sobre 4 o sobre 5?	I_05

L13	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 3		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	¿Cuál es la diferencia entre un plan y una estrategia? Definitivamente no es lo mismo.	
L3	El estudiante contesta el formulario de comprensión.	
L4	El estudiante ubica la imagen de la situación problema como guía para poder posicionar los puntos que representan las canicas, luego mide las distancias desde cada uno de ellos hasta un punto adicional aproximado en el centro, promedia estas distancias y multiplica por 100 para dar como resultado un porcentaje.	I_04
L5	Acercando el zoom de GeoGebra ahí sí permite ver las medidas.	
L6	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 4		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	El estudiante ubica algunos puntos adicionales en lo que interactúa con GeoGebra para comprender la situación que le están planteando.	I_01
L3	El estudiante contesta el formulario de comprensión.	
L4	El estudiante coloca la imagen de la situación problema como guía para la ubicación de los puntos que representan las canicas, mide las distancias y con ayuda de la aplicación de la calculadora hace un promedio de esas longitudes, finalmente multiplica por 100 para dar como resultado un número que represente esa dispersión.	I_04
L5	Contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 5		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	¿Cuál será el plan a seguir?	
L3	Identifico ahí un eje x, un eje y.	I_01, I_03
L4	El estudiante interactúa con la aplicación de GeoGebra moviendo algunos de los puntos que representan las canicas y revisando las herramientas que le pueden resultar útiles para la solución de la situación.	I_03

L5	Contesta el formulario de comprensión.	
L6	¿Puedo ubicar más puntos ahí?	I_03, I_05
L7	Ubica como fondo la imagen de la situación, trata de posicionar los puntos que representan las canicas lo más exacto posible sobre esa imagen de fondo, mide las distancia entre cada punto y el punto central (ubicado por él) con GeoGebra, con ayuda de la aplicación de la calculadora hace las cuentas para el promedio de las distancias medidas y finalmente multiplica por 100.	I_04
L8	Contesta el formulario de retroalimentación.	

PV – Problema 4

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	
L2	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 2		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Voy a empezar buscando características para la figura B que es la que menos tiene características, por ejemplo, tiene 1, 2, 3, 4 caras, ¿Cuál otra tiene 4 caras también?... ninguna.	I_04, I_05
L3	¡Ah! Ya encontré una característica, las figuras B y G tienen las mismas caras, excepto por la base.	
L4	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 3		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	
L2	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 4		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	

L2	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 5		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	
L2	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	

PV – Problema 5

Línea	Verbalización	Indicador
Sujeto 1		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	¿Qué es un prisma?	I_01
L3	No entiendo.	
L4	El estudiante interactúa con el modelo del prisma que ofrece GeoGebra acerca de la situación planteada.	
L5	¿Cada cuánto debo buscar las formas?	
L6	En este punto es un rectángulo, pero más arriba ya no es un rectángulo, bueno sí, es un cuadrilátero, pero no un rectángulo, porque no tiene dos lados iguales. Pero es similar.	I_03, I_04
L7	Pero en ese caso, ¿Cuál sería la regla relativa?	
L8	El estudiante contesta el formulario de comprensión.	
L9	¿Esto no sería más como un triángulo equilátero en vez de un cuadrilátero? A ver este sí sería rectángulo… es verdad, estoy equivocado.	I_05
L10	El patrón tiene que ver con el cambio en el ángulo y como se cambia la figura del prisma.	I_04, I_05
L11	Yo creo que ahí es un triángulo, viene siendo como así (mueve uno de los puntos que cumple el papel de vértice del prisma dentro de GeoGebra).	I_05
L12	¿Cuál es la forma específica del rectángulo? En algún momento tiene otra que debe ser similar.	I_03, I_04
L13	No, eso es otro cuadrilátero.	I_05
L14	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 2		

L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	¿Qué son reglas relativas? (procede a buscar información en la red sobre la definición de regla relativa).	
L3	¿Cómo puedo saber cómo está el agua?	I_01
L4	Contesta el formulario de comprensión.	
L5	¿Qué forma es esa? Es como un triángulo, ¿no? Como triangulo rectángulo (busca en la red información sobre los triángulos rectángulos). Bueno en realidad podría ser un trapecio o un romboide, podría ser un trapezoide.	I_05
L6	¿Eso que formaría?	
L7	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 3		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	Las reglas relativas tienen que ver con establecer las relaciones, relaciones con algo, ¿no?	
L3	Contesta el formulario de comprensión.	
L4	¿Esto es un cuadrado o un rectángulo?	I_05
L5	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 4		
L1	El estudiante lee la situación problema.	
L2	¿Qué se debe relacionar? Es una relación con algo, pero ¿con qué?	
L3	El estudiante busca en la red una definición para el concepto de regla relativa.	
L4	El estudiante contesta el formulario de comprensión.	
L5	Acá en este caso se forma un cuadrado.	I_05
L6	No voy a colorear, voy a utilizar las formas.	
L7	El estudiante contesta el formulario de retroalimentación.	
Sujeto 5		
L1	El estudiante lee la situación problema y contesta el formulario de comprensión.	
L2	Contesta el formulario de retroalimentación.	

ANEXO 2 - TABLA INDICADOR ORIGINALIDAD

Problema 1

Clasificación	Descripción estrategia	Puntuación
Usar una simple figura básica	Segmento lineal	0
	Punto simétrico	0
	Asimetría	1
Usar más de dos figuras	Segmento lineal	0
	Punto simétrico	0
	Asimetría	0
Usar líneas curvas	Línea	3
	Asimetría	3

Problema 2

Clasificación	Descripción estrategia	Puntuación
	Segmento lineal	0
	Asimetría	0
	Punto medio	0

Problema 3

Clasificación	Descripción estrategia	Puntuación
Unión de puntos	Medir el área del pentágono resultante.	0
	Medir la circunferencia del pentágono.	0
	Medir y sumar la distancia entre los puntos y luego dividir por el número de líneas.	2
Línea diagonal	Medir todas las diagonales y elegir el valor más largo.	0
	Hallar el promedio de las diagonales.	2
	Ordenar de mayor a menor las 4 diagonales.	1
	Sumar las 4 diagonales que une uno de los 5 puntos con los otros 4.	0
	Medir la totalidad de las líneas diagonales.	3
Punto interior	Sumar las longitudes que conectan un punto interior con los otros 5 puntos.	2

	Hallar la longitud media de los 5 puntos exteriores al punto interior.	3
Usando circunferencia	Medir el radio de la circunferencia menor que incluye los 5 puntos.	3
Usando cuadrados	Medir el área del gran cuadrado que excluye al pentágono.	2
Otros	Dibujar triángulos y calcular el área mayor de ellos.	3
	Medir la desviación estándar usando el sistema de coordenadas.	3

Problema 4

Clasificación	Descripción estrategia	A	B	C	D	E	F	G	H	Puntos
Forma de las caras (lados y bases)	Tener una sola base.		x					x		0
	El lado es un triángulo.		x					x		0
	La superficie es plana.	x	x			x		x		1
	Tener cuatro caras.		x	x						0
	La forma vista desde arriba es un polígono.	x	x			x		x		0
	La base no es un circulo.	x	x	x		x		x		3
	La base es la misma que la cara lateral.	x	x							1
Número de aristas, caras y relación entre ellos.	Número de aristas.		x					x		3
	Aristas que tiene solo líneas rectas.	x	x					x		1
	Tener vértices.	x	x			x		x		0
	Tener aristas.	x	x			x		x		3
	La longitud de las aristas de los lados es la misma.	x	x	x		x	x	x	x	3
	Número de vértices = Número de aristas de la base +1		x					x		3
	Número de caras = Número de aristas de la base + 1		x					x		3

	Número de aristas de la base = Número de caras laterales.		x					x	3
	Número de vértices = número de aristas *2/3	x	x						3
	El número de vértices de la base es impar.		x			x			3
Forma de una proyección	La forma de la sombra es un triángulo.		x					x	0
	La forma vista desde arriba es un polígono.	x	x			x		x	3
Forma de una sección transversal	Sección transversal paralela a la base es similar.		x				x	x	3
	La sección transversal perpendicular a la base es un rectángulo.		x				x	x	3
	La sección transversal perpendicular a la base a través del vértice es un triángulo.		x					x	3
Pirámide	Pirámide		x					x	0

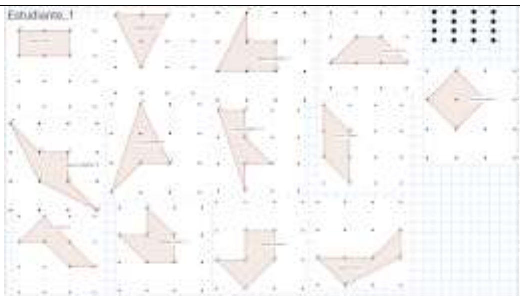
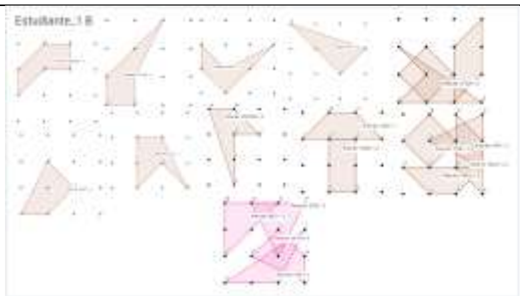
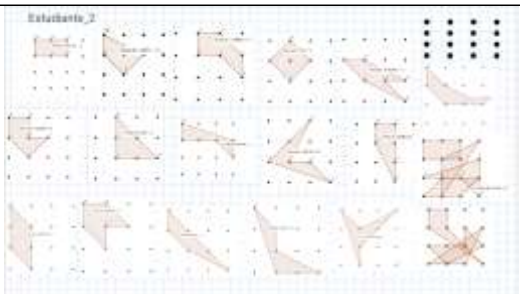
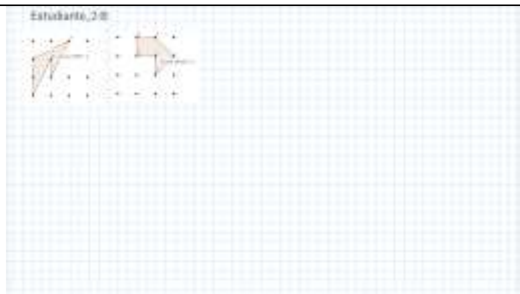
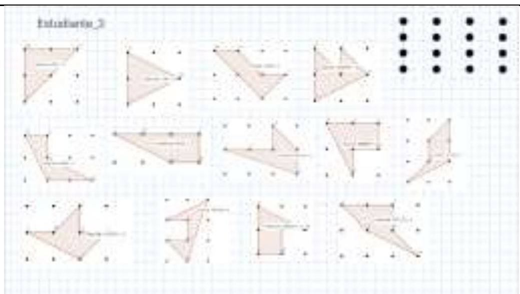
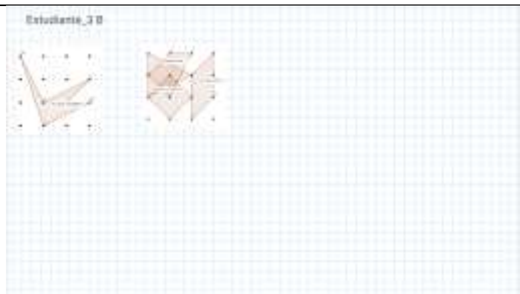
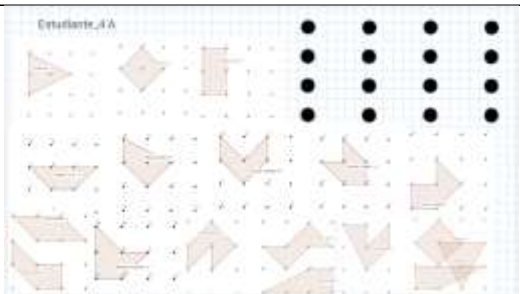
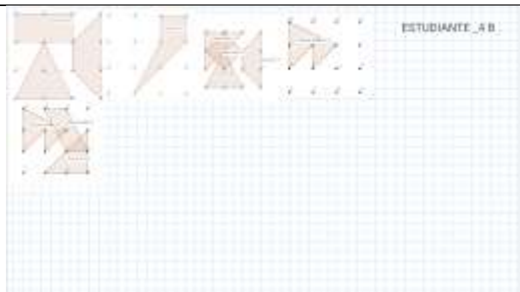
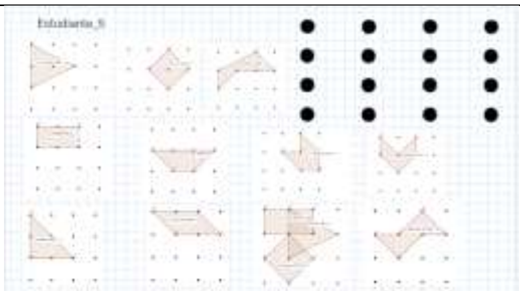
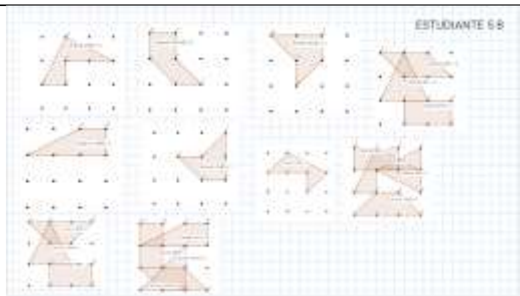
Problema 5

Clasificación	Descripción estrategia	Puntuación
Suma constante	La suma de las longitudes de los bordes sobre la superficie del agua es constante.	3
Variación	Un borde disminuye en la medida que aumenta el otro.	3
	Cuando un borde aumenta, el otro disminuye.	1
	Las longitudes de los bordes varían.	3
	Cuando un borde se vuelve 0, el otro borde se vuelve el doble de su longitud original.	3
Pendiente	Cuando la pendiente disminuye, el área de la superficie del agua se vuelve menor.	3

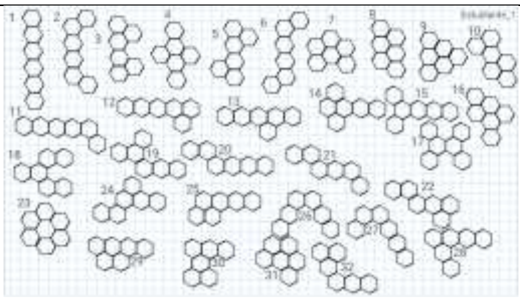
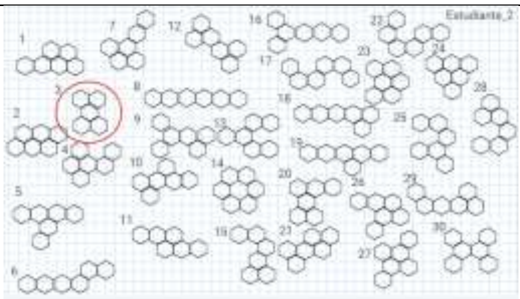
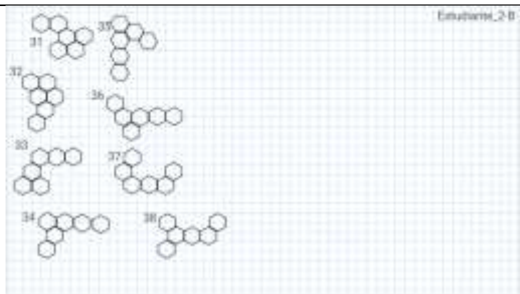
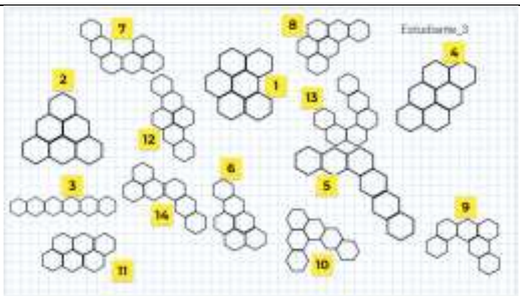
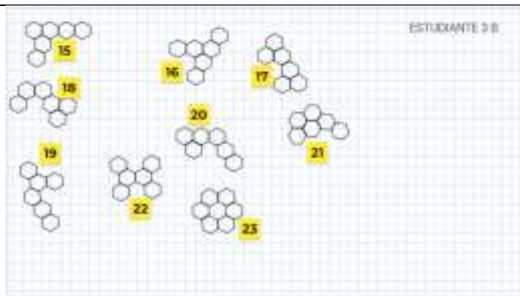
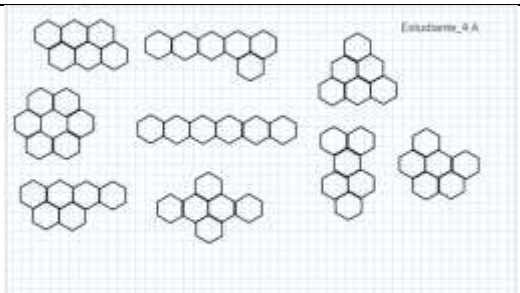
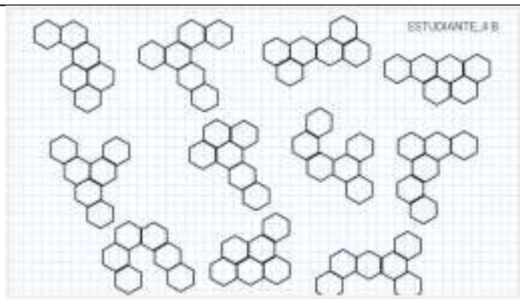
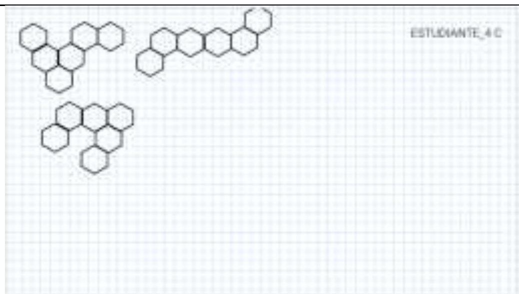
	El plano lateral es rectangular, cuando la pendiente es ángulo recto.	3
Rango	El límite de la longitud de un borde es de 15 cm.	3
Forma de la superficie del agua	La superficie del agua (superior) y la base son rectángulos.	3
	La superficie del agua es un rectángulo o un cuadrilátero.	1
	La forma o el plano lateral cambia de trapezoide a triangulo.	0
	La vista lateral es un trapezoide.	1
Área	El área total de las caras laterales no cambia.	3
	El área del agua en la superficie no cambia.	3
	El área de la superficie del agua se hace más grande.	2
Volumen	El volumen no cambia	0

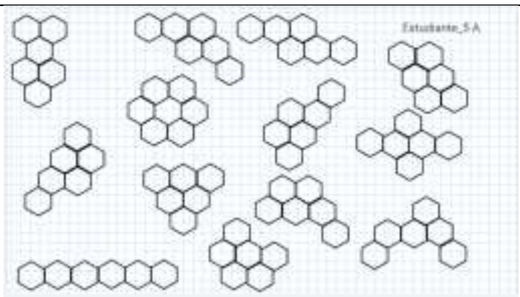
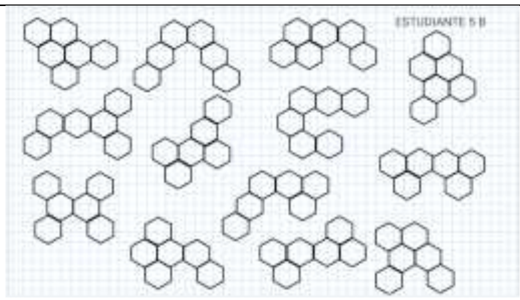
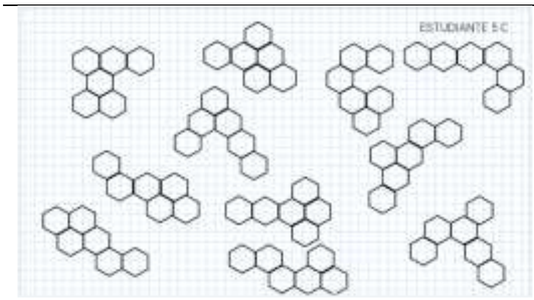
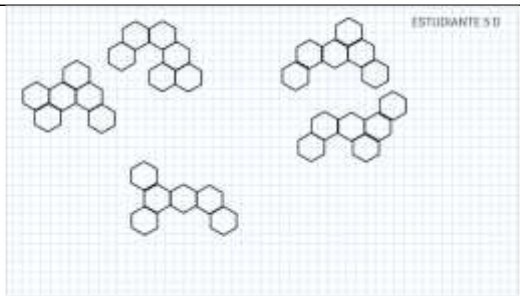
ANEXO 3 – PANTALLAZOS JAMBOARD

Problema 1

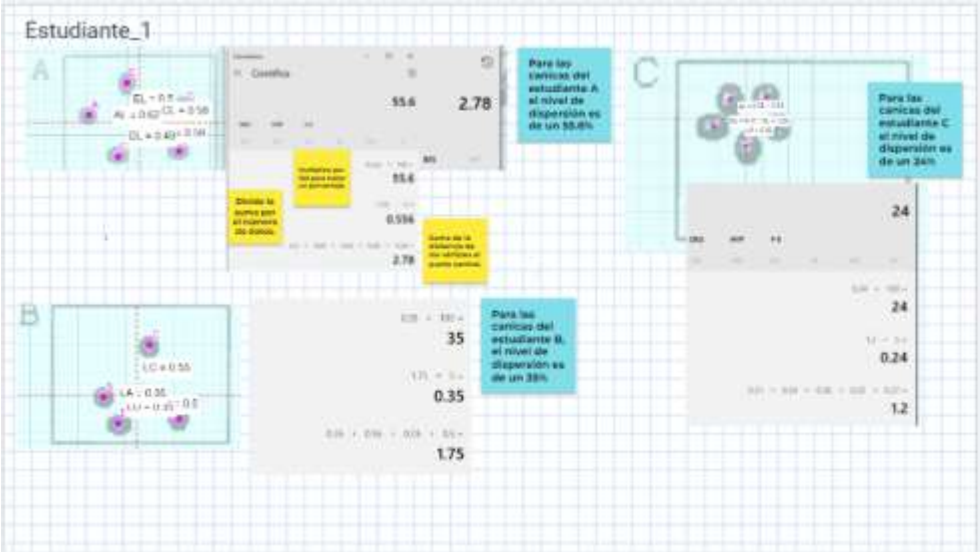
Sujeto 1		
Sujeto 2		
Sujeto 3		
Sujeto 4		
Sujeto 5		

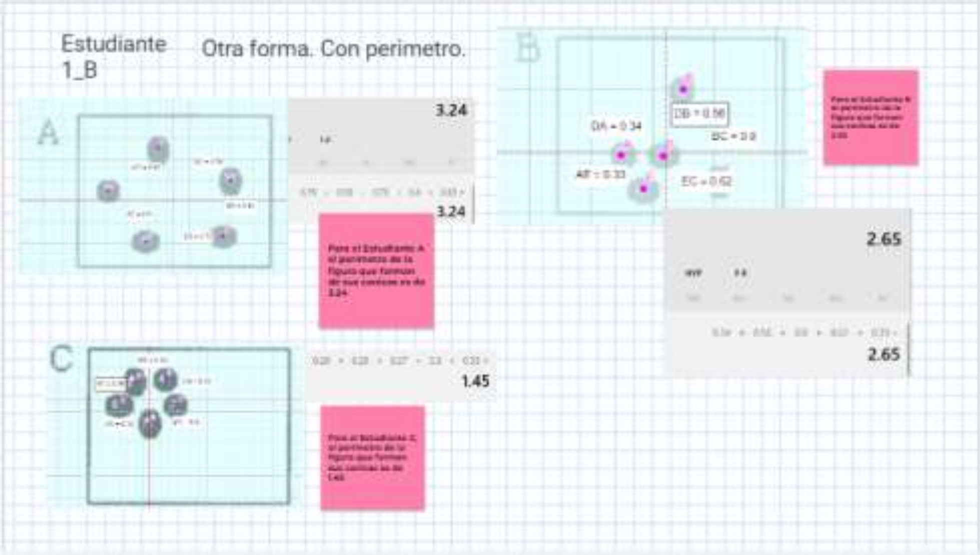
Problema 2

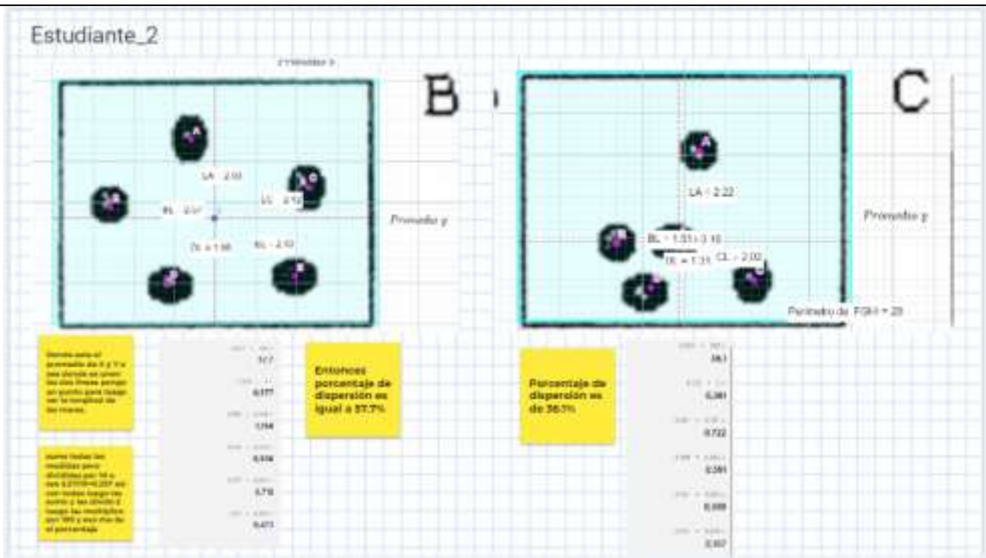
Sujeto 1		
Sujeto 2		
Sujeto 3		
Sujeto 4		
		

Sujeto 5		
		

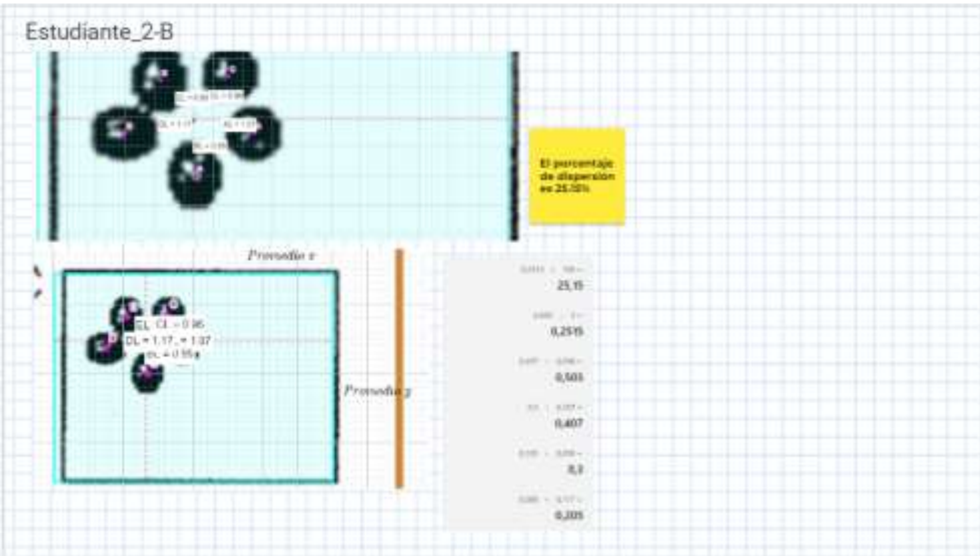
Problema 3

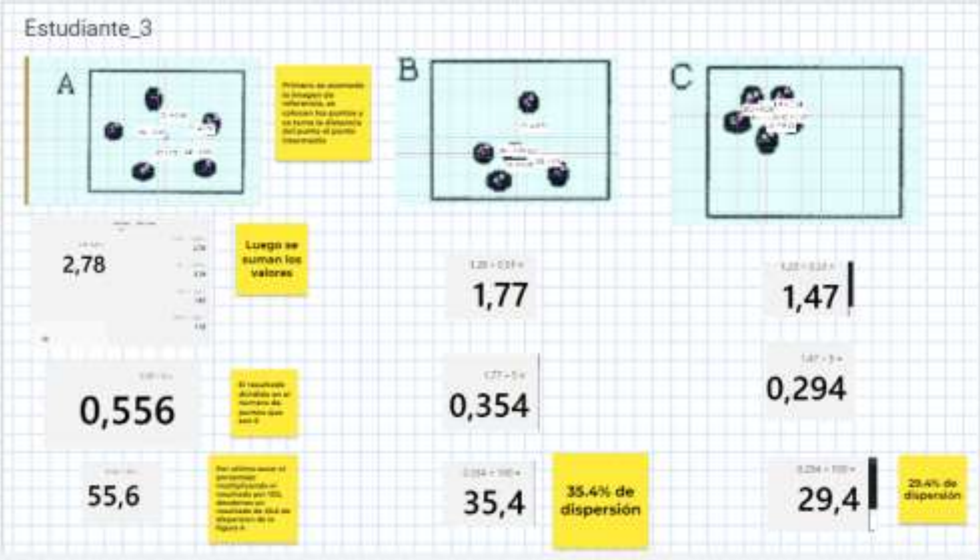
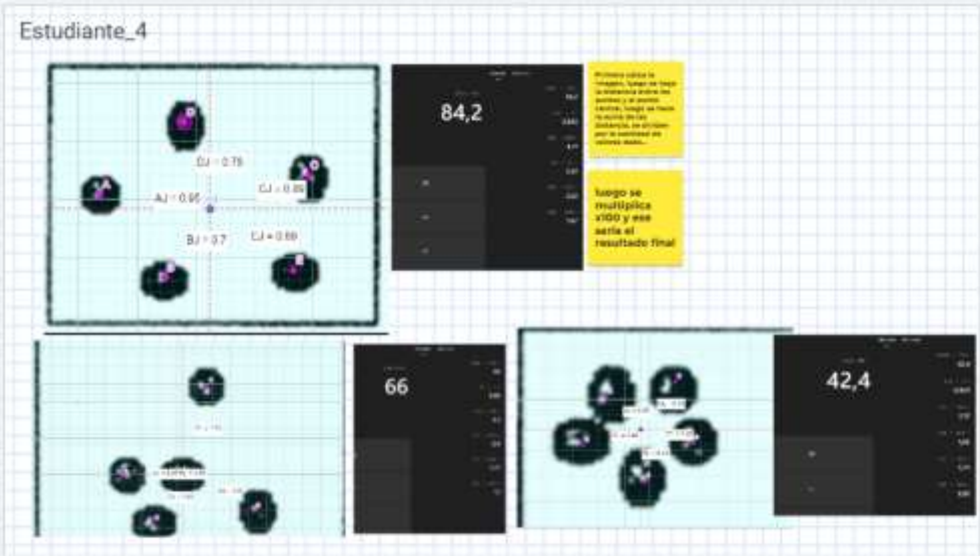
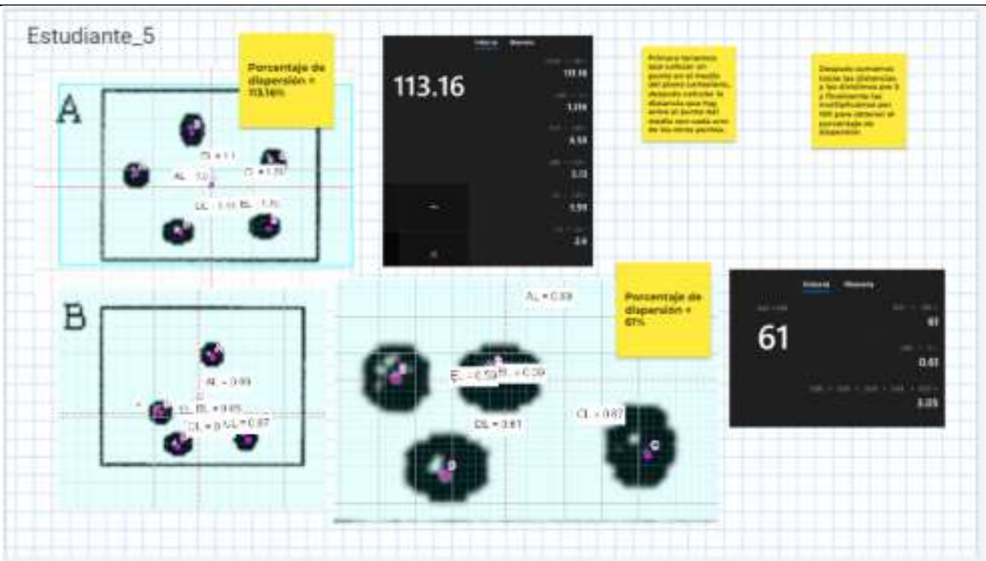
Sujeto 1	

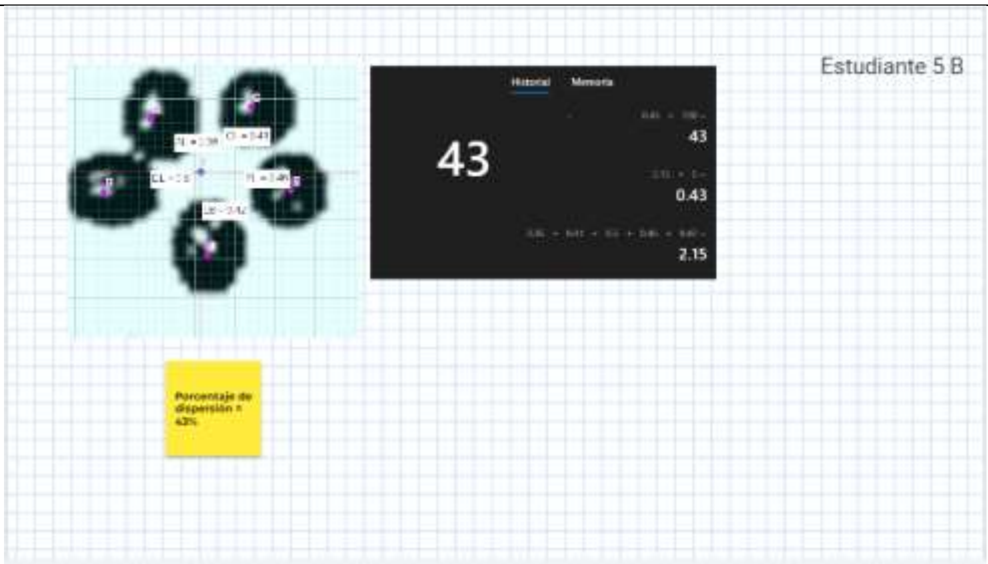

Estudiante
1_B
Otra forma. Con perimetro.
A
B
C
3.24
3.24
2.65
2.65
1.45


Estudiante_2
B
C
Promedio y
LA = 2.22
Entonces
porcentaje de
dispersion es
igual a 37.7%
Porcentaje de
dispersion es
de 36.1%

Sujeto 2


Estudiante_2-B
El porcentaje
de dispersion
es 25.15%
Promedio x
Promedio y
25,15
0,2515
0,503
0,407
0,3
0,205

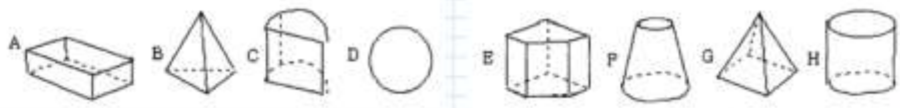
<table>
<tr><td>Sujeto 3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Sujeto 4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Sujeto 5</td><td>
</td></tr>
</table>



Problema 4

Sujeto 1

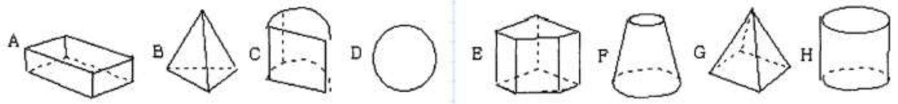
E_1



Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Tienen bases planas.	X	X	X		X	X	X	X
Tiene triangulos como caras		X					X	
Tiene una figura plana como cara	X	X	X		X		X	
Tiene 3 dimensiones	X	X	X		X	X	X	X

Sujeto 2

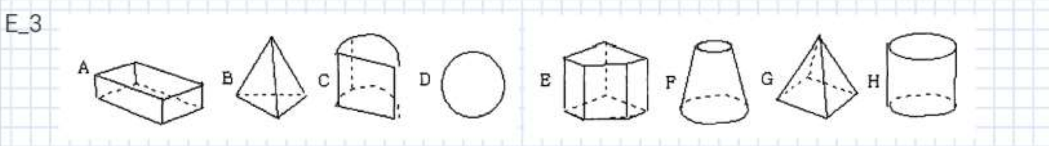
E_2



Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Las figuras tienen mismas caras excepto por la base		X					X	
Las figuras son un triagulo		X					X	
Las figuras tienen la misma cantidad de caras		X	X					
Las figuras tiene una altura similar		X	X		X	X	X	X
Las figuras tiene un area similar		X				X	X	
Las figuras son en 3 Dimensiones	X	X	X		X	X	X	X
Las figuras tienen bases	X	X	X		X	X	X	X

Sujeto 3

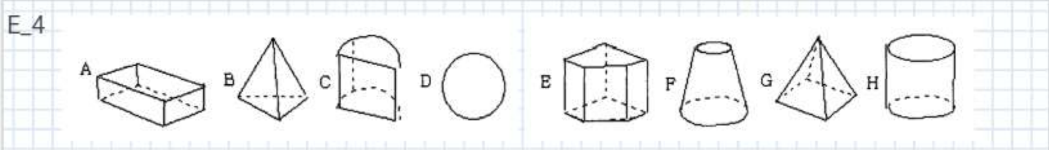
E_3



Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Son triangulos		X					X	
Tienen dimensiones	X	X	X		X	X	X	X
Su altura es parecida		X	X		X	X	X	X
Tienen una base	X	X	X		X	X	X	X
Su base forma alguna figura	X	X			X	X	X	X
La base forma un triangulo		X			X			

Sujeto 4

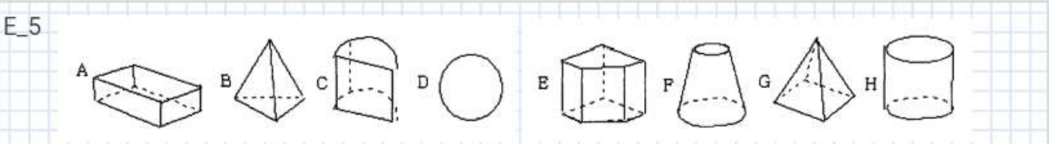
E_4



Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Tiene 4 lados		X					X	
Tienen aunque sea un triangulo		X			X		X	

Sujeto 5

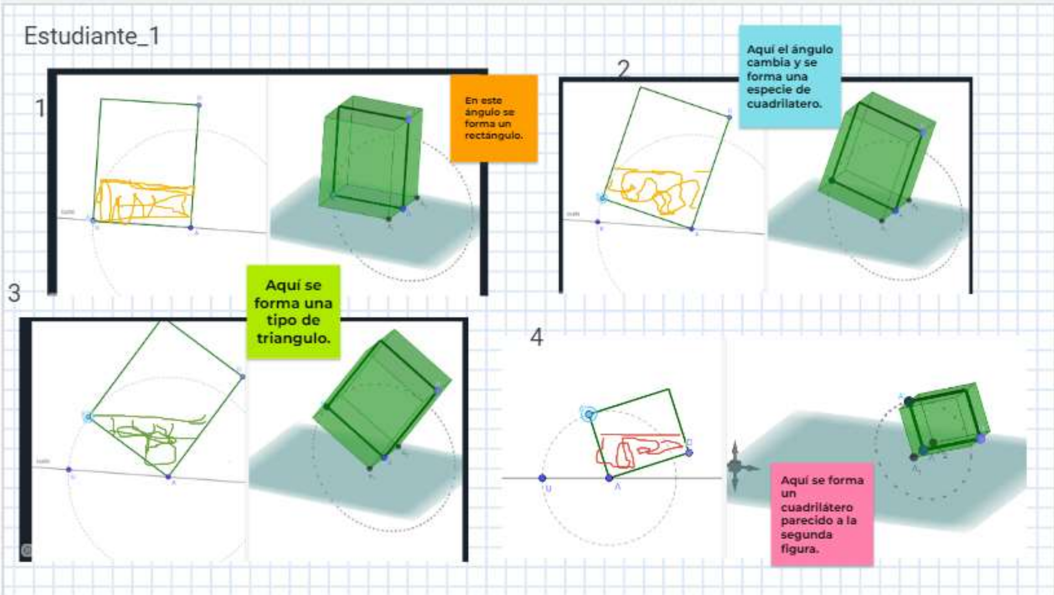
E_5

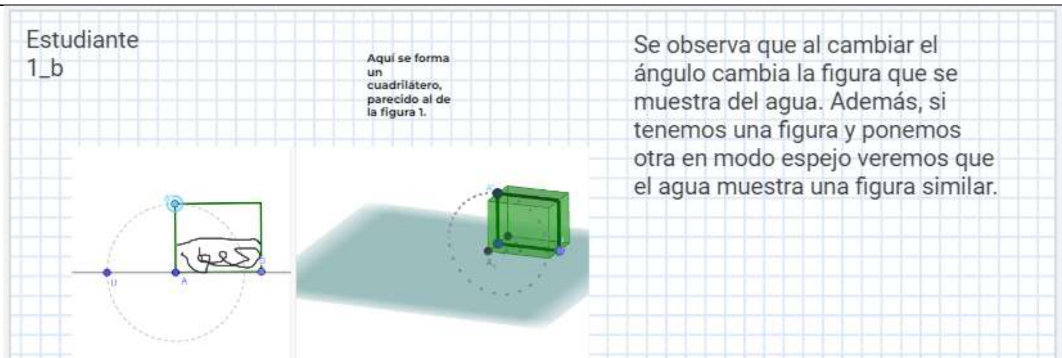


Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Ambas figuras son una piramide compuesta por 2 triangulos							X	
Algunos de sus lados están en diagonal	X				X	X		
estan en 3 dimensiones las figuras	X	X	X		X	X	X	
su base forma una figura con las lineas trazadas	X	X			X	X	X	X

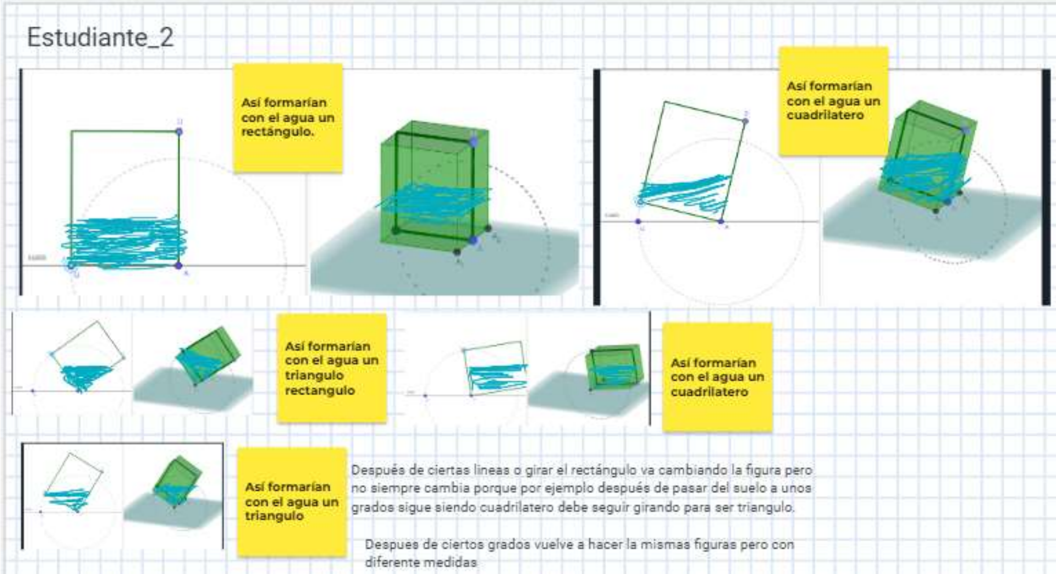
Problema 5

Sujeto 1

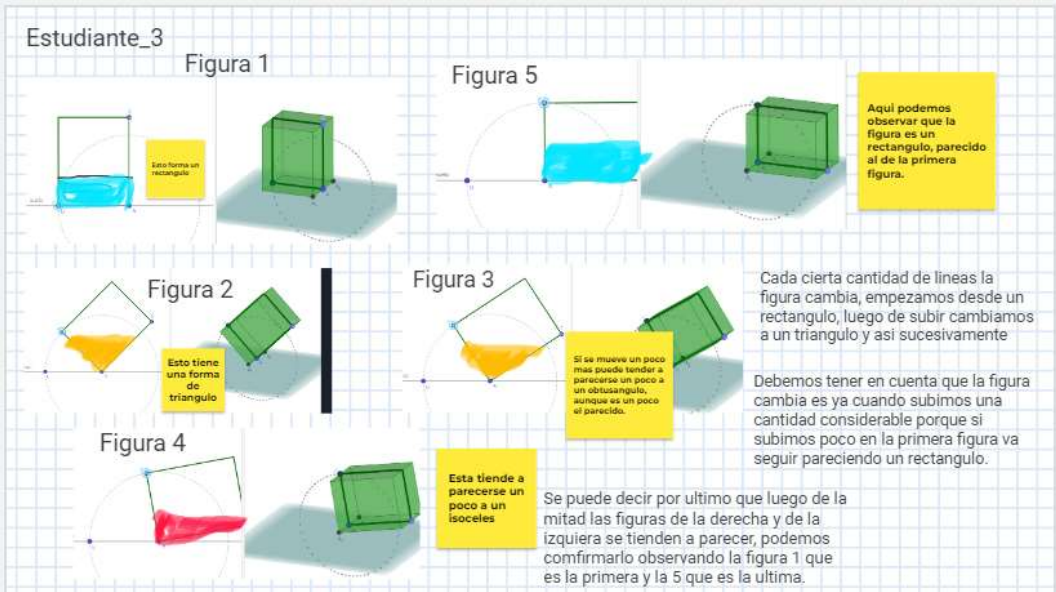


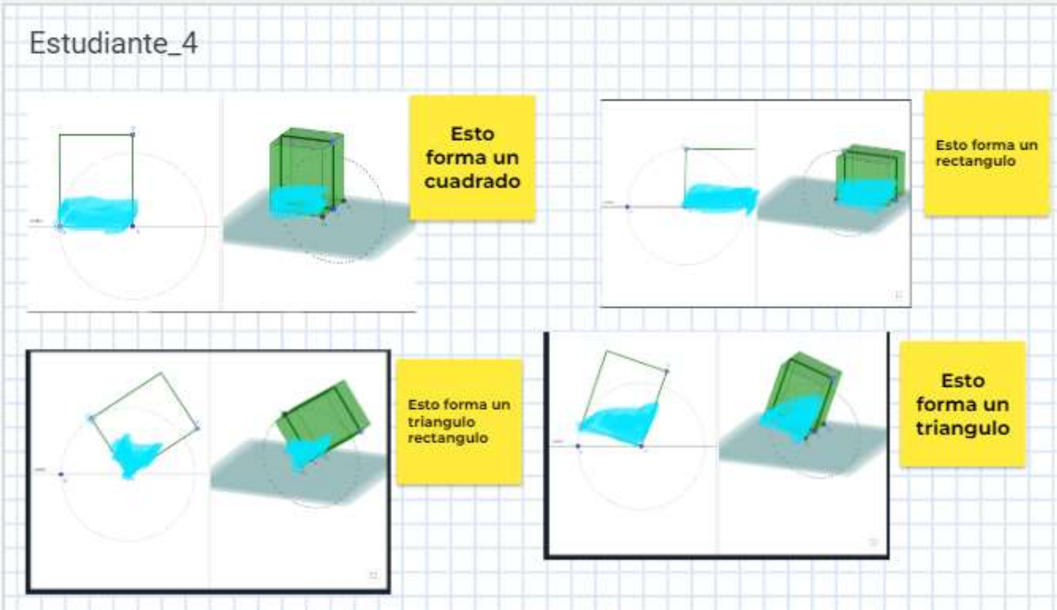


Sujeto 2



Sujeto 3



Sujeto 4	
Sujeto 5