MANIM COMO MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA CREACIÓN DE UN RECURSO VIRTUAL ORIENTADO A LA ENSEÑANZA DE TEOREMAS SOBRE TRIÁNGULOS

Brian Stif Chacón Hernández

Manuel Alejandro Fernández Cifuentes

Tesis de grado presentada como

requisito parcial para optar por el título de

Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Dr. Oscar Javier Molina Jaime

Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2024

DEDICATORIA

Dedico todo este trabajo primeramente a mis padres, Marisol y Víctor; gracias a ellos estoy aquí y gracias a ellos he podido superar cada dificultad.

A mis hermanos, Jhon y Santiago, quienes me han acompañado y brindado momentos de felicidad durante toda mi vida.

A mi pareja, Meysi, que ha estado conmigo incondicionalmente apoyándome en momentos cruciales; ella es mi compañera de vida, mi equipo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a cada integrante de mi familia, padre, madre, hermanos, abuelos, tíos y tías; su amor y fuerza fueron combustible durante todo este trayecto.

Gracias a mi compañero, Alejandro Fernández, por sus aportes y su trabajo hombro a hombro para construir este trabajo que permitió el logro de este sueño. De corazón le deseo éxitos en todas las áreas de su vida.

Gracias a mis amigos de la Universidad Pedagógica Nacional, quienes, a partir de sus consejos, sus enseñanzas y su amistad he podido aprender significativamente a amar mi profesión y a ver de manera diferente el mundo.

Gracias a la Universidad Pedagógica Nacional y a cada profesor; ellos aportaron a mi formación tanto personal como profesional, siendo guías excepcionales y ejemplos a seguir.

Agradecimiento especial al profesor Oscar Molina por su paciencia, sus consejos, su ayuda, su vasto conocimiento y, por, sobre todo, su guía. Aprendí mucho de él y marcó un precedente en mi formación docente. Él hizo posible la culminación de este trabajo.

Brian Stif Chacón Hernández

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres, Manuel y Emilse. Ellos siempre me han mostrado un apoyo incondicional.

Un mensaje espacial para mi tío Eduardo. Sus consejos me permitieron persistir en este proceso.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a aquellos miembros de mi familia; no los menciono, pero los llevo en mi corazón. Todos sus aportes han sido esenciales en estos últimos años, en cada aspecto de mi vida.

Gracias a mi compañero, Brian Chacón, cuya paciencia solo se condice con el hecho de poder considerarlo como uno de mis entrañables amigos, pocos, a decir verdad. Sé que su empatía y compromiso le traerán grandes alegrías durante toda su vida.

Agradezco mucho al profesor Óscar Molina. Su paciencia, consejos, orientaciones y conocimientos fueron los que generaron los cimientos de este proyecto. Trabajar con él me ha mostrado un referente de lo que es ser profesor.

Manuel Alejandro Fernández Cifuentes

RESUMEN

La pandemia del COVID-19 permitió identificar el gran potencial didáctico que tienen muchos recursos digitales en el campo de la educación. Abierta esta posibilidad, surge la idea de proveer a la comunidad con una herramienta digital, esto es, una página web con video dinámicos hechos es en el entorno *Manim*, que pueda complementar o apoyar procesos de enseñanza y de aprendizaje entorno a teoremas de la matemática escolar sobre triángulos: Teorema de Pitágoras, Ley de Cosenos y Ley de Senos. De manera más específica, este recurso digital abierto (que se puede ver en el siguiente enlace https://brianstiffchacon.wixsite.com/fcm-matematicas) se compone de tres conjuntos de videos, cada uno referente a uno de los hechos matemáticos protagónicos (Teorema de Pitágoras, Ley de Cosenos y Ley de Senos). Por cada uno de tales hechos fueron elaborados cuatro videos, que se distinguen entre sí por las siguientes características: un video plantea una situación problema que sirve como introducción al teorema correspondiente y expone la exploración para su posible solución; el segundo video expone una solución a la situación problema usando el hecho matemático protagónico; el tercer video está dedicado a ilustrar una prueba dinámica del hecho protagónico, a la vez que invita al estudiante a encontrar los argumentos teórico-deductivos que se usan en dicha prueba. El cuarto video se centra en proveer una prueba dinámica, justificada teóricamente paso a paso, del hecho matemático en cuestión. La página contiene también un sistema teórico de apoyo y algunos consejos sobre el orden en el que consideramos adecuado abordar el material presenta en esta.

Los videos fueron elaborados a partir de una adaptación de los criterios de idoneidad propuestos por Godino (2018) y contemplan una aproximación a la geometría que se condice con la exploración empírica de situaciones problemas y la justificación teórica del hecho que permita solucionar dichas situaciones siguiendo las ideas de espacio geométrico propuestos por Kuzniak y Rauscher (2014).

Palabras clave: Página web como recurso digital abierto, Teorema de Pitágoras, Ley de Senos, Ley de Cosenos, espacios de trabajo geométrico, criterios de idoneidad, medición indirecta de longitud, medición indirecta de amplitud angular.

ABSTRACT

The pandemic of COVID-19 allowed us to identify the great educational potential that many digital resources have in the field of education. Having opened up this possibility, the idea arose to provide the community with a digital tool: a website with dynamic videos. Facts are in the Manim environment, which can complement or support teaching and learning processes around school mathematics theorems on triangles: Pythagorean Theorem, Cosines Law, and Sinus Law. More specifically, this open digital resource (which can be seen at the following link: https://brianstiffchacon.wixsite.com/fcm-matematicas) consists of three sets of videos, each referring to one of the main mathematical facts (Pythagorean Theorem, Cosines Law, and Sinus Law). For each of these events, four videos were produced, which are distinguished by the following characteristics: One video poses a problem situation that serves as an introduction to the corresponding theorem and exposes the exploration for its possible solution; the second video exposes a solution to the problem situation using the main mathematical fact; and the third video is dedicated to illustrating a dynamic proof of the main fact while at the same time inviting the student to find the theoretical-deductive arguments that are used in that test. The fourth video focuses on providing a dynamic, theoretically justified, step-by-step proof of the mathematical fact in question. The page also contains a theoretical support system and some tips on the order in which we deem it appropriate to address the material presented on it.

The videos were developed from an adaptation of the criteria of suitability proposed by Godino (2018) and contemplate an approach to geometry that is compatible with the empirical exploration of problem situations and the theoretical justification of the fact that it allows to solve these situations following the ideas of geometric space proposed by Kuzniak and Rauscher (2014).

Keywords: Pythagorean Theorem, Law of sines, Law of Cosines, geometric working spaces, criteria of suitability, length, distance, indirect measurement, theoretical reference system, open digital resource.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Este documento consigna la memoria del trabajo de grado, requisito para optar por el título de Licenciado en matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Con él, describimos el desarrollo las actividades realizadas para lograr el propósito de diseñar un recurso virtual abierto (una página web con videos construidos en el software *Manim*, que se puede ver en el siguiente enlace https://brianstiffchacon.wixsite.com/fcm-matematicas) orientado a la enseñanza y aprendizaje de teoremas sobre triángulos, a saber, el Teorema de Pitágoras, la Ley de Cosenos y la Ley de Senos. Al tener en cuenta algunas investigaciones que indican la poca idoneidad de algunos videos orientados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre estos temas, decidimos tomar como referencia dos teorías para diseñar un recurso adecuado. Primero, adaptamos los criterios de idoneidad propuestos por Godino (2013) para procesos de instrucción matemática, a recursos digitales como el construido. Por otra parte, decidimos recurrir a los espacios de trabajo geométrico (ETG) descritos por Kuzniak y Rauscher (2014) para enmarcar el enfoque del trabajo matemático que pretendemos promover con el recurso. El proceso de elaboración de la página web lo describimos a través de cinco capítulos.

El primero presenta las razones que nos llevaron a decidir crear un recurso virtual abierto dedicado a la enseñanza de los teoremas referenciados sobre triángulos. El segundo capítulo presenta el marco de referencia que nos proveyó las herramientas para llevar a cabo el diseño. Este capítulo tiene tres partes: la primera está orientada a la presentación de los referentes de orden didáctico que nos permitieron enmarcar la actividad matemática que pretendimos promover mediante el recurso y precisar criterios que guiaron el diseño; describimos, entonces, las propuestas de Kuzniak (2006) y Kuzniak y Rauscher (2014) en relación con las aproximaciones a la geometría escolar y los espacios de trabajo geométrico, y los indicadores de idoneidad propuestos por Godino (2013) para evaluar o diseñar procesos de instrucción. La segunda está dedicada a exponer aquellos referentes matemáticos que nos permitieron un abordaje diverso de los objetos matemáticos centrales de este trabajo. En específico, brindamos una breve descripción de cada tipo de objeto matemático, aquellas características que los relacionan, algunas situaciones problema que sirven como introducción a cada teorema de interés, los procedimientos de solución de dichas situaciones problema, los argumentos que sustentan tales teoremas y aquellos tipos de representación potenciados en el recurso virtual. La última parte de este capítulo se dedica a la descripción de aquellos recursos digitales que utilizamos para la creación de la página web, siendo estos Wix, Manim y algunos editores de voz y sonido.

El tercer capítulo se concentra en la descripción sobre cómo elaboramos la página web. En ese sentido, presenta la forma en que todos los referentes teóricos tuvimos en cuenta al momento de diseñar el recurso virtual abierto. Además, presentamos las propias fases de diseño de la página, más específicamente de los videos hechos en *Manim*. Por último, siguiendo lo propuesto por Kuzniak y Rauscher (2014), exponemos también una ruta de abordaje del recurso virtual que fue sugerida por nosotros.

El cuarto capítulo de este trabajo expone las características del recurso virtual abierto resultado de este trabajo. Esto mediante la división en tres fases: la descripción del recurso virtual en general, la descripción de los momentos específicos de cada video y la descripción del material adicional de la página web.

Por último, el quinto capítulo presenta las conclusiones que obtuvimos durante la elaboración del recurso virtual abierto. Esto mediante un análisis del cumplimiento de cada uno de los objetivos de este trabajo, la exposición de aquellos aportes del trabajo a nuestro futuro profesional y la presentación de las dificultades experimentadas durante la elaboración de este trabajo; así mismo, exponemos algunas proyecciones que tenemos con respecto al futuro de la página.

CAPÍTULO 1

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo está dividido en dos secciones, *Justificación* y *Objetivos* del trabajo. En la primera exponemos las razones y motivaciones que nos condujeron a pensar en la elaboración de un recurso educativo web potenciado por videos hechos con el software *Manim* como herramienta de apoyo, con el propósito de que pueda ser de utilidad en procesos de enseñanza y aprendizaje de teoremas sobre triángulos, frecuentemente usados para el cálculo de medidas de longitud; es ese contexto, indicamos la pertinencia de abordar el Teorema de Pitágoras, la Ley de Seno y la Ley de Coseno. Así mismo, se describe la importancia de los recursos educativos digitales, de cómo estos, pese a existir en gran cantidad, son poco aprovechados y pueden generar una mayor motivación en el estudiante; en ese marco, describimos el potencial de usar videos hechos en el Software *Manim*. En la segunda, se plantea el objetivo general que orienta nuestro trabajo y se expresan los objetivos específicos que describen aquello que consideramos necesario para llevar a cabo nuestro objetivo general.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Las exigencias de la actual sociedad, que se han exteriorizado aún más producto de la pandemia originada por el COVID-19, imponen retos mayúsculos al sector educativo; entre otras cosas, implica repensar en los recursos que podrían apoyar y fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, transformando las metodologías tradicionales y, por tanto, generando un cambio en el paradigma de enseñanza y aprendizaje. Como respuesta a este fenómeno, las prácticas educativas se han visto abocadas a llevar la virtualidad o las tecnologías digitales al aula; las clases de matemáticas no han sido la excepción. Nuestra experiencia como estudiantes y como profesores en formación inicial, nos desvela que entre los recursos educativos digitales usualmente se recurre al uso de plataformas mundialmente conocidas como Teams, Meet, Zoom, Moodle o YouTube, a través de las cuales existe una "lógica de importación" (UNESCO, 2013). Esta lógica indica que la clase tradicional se traslada a medios virtuales soportados por tales plataformas, sin alguna intención de explotación de las funciones inmersas en tales recursos.

Estas experiencias se condicen con estudios, según los cuales no hay un uso adecuado de las TIC en el currículo implementado, bien sea por desconocimiento de los profesores, por la falta de recursos tecnológicos o por la subutilización de los recursos disponibles (UNESCO, 2013). De hecho, se han producido estudios que analizan la idoneidad didáctica de videos educativos cargados en la plataforma YouTube (por ejemplo, Beltrán-Pellicer, (2018); Suárez y Zubieta, (2022); y Santamaría, (2023)). Estos estudios advierten que tal idoneidad no es la más afortunada en lo que respecta al tratamiento o estudio de los objetos matemáticos involucrados (procedimientos, lenguajes, argumentos, situaciones, etc.) –denominada idoneidad epistémica–. En particular, el estudio de Suárez y Zubieta (2022) advierte que el tratamiento que se hace en los videos más populares sobre el Teorema de Pitágoras no es el más apropiado, por cuanto carecen de: un lenguaje especializado, de una representatividad de aproximaciones al Teorema, de una diversidad de argumentación para su validez o de una representatividad de situaciones para su uso.

Tomando en cuenta el escenario planteado en los párrafos previos, como futuros educadores creemos que tenemos la responsabilidad de generar material idóneo que nos permita apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje. La propuesta que presentamos en este trabajo de grado apunta a atender dicha responsabilidad en dos sentidos: por un lado, pretendemos hacer un diseño de un recurso educativo virtual abierto, específicamente una página web, que permita trabajar sobre algunos hechos que son enunciados explícitamente conocidos como teoremas o leyes de la geometría o trigonometría escolar (Teorema de Pitágoras, Ley de Senos y Ley de Cosenos); por otro lado, pretendemos que ese diseño tengan una cierta idoneidad y esté acompañado de alguna orientaciones que permita a los usuarios, especialmente a los profesores de matemáticas, sacar el máximo provecho de la misma.

Nuestro interés en el teorema y las leyes mencionadas, radica en que aun cuando estos se enuncian con tales estatus teóricos en el currículo de matemática escolar (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006; Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016), su tratamiento o estudio no se condice con esos estatus; en otras palabras, aunque estos hechos sí se abordan desde su parte operacional o utilitaria para situaciones semi-reales o puramente matemáticas, no se justifican en el marco de un sistema axiomático (aunque sea local).

Con el propósito de que el recurso virtual tenga una idoneidad por lo menos en aspectos epistémicos (en relación con el conocimiento matemático para la enseñanza), adaptamos la propuesta de paradigmas de la geometría escolar de Kuzniak (2006) y los criterios de idoneidad de Godino (2013) como herramientas de diseño que nos permitan identificar componentes necesarios para tener en cuenta en la creación del recurso virtual abierto, más específicamente, que los videos cuenten con una estructura adecuada.

Considerando que el recurso virtual abierto requiere una variada gama de contenido audiovisual, tales como imágenes y videos, decidimos emplear un recurso especializado para la creación de los mismos, esto con el propósito de acatar varias de las condiciones adaptadas desde las propuestas mencionadas anteriormente. Al haber valorado algunas opciones, consideramos que *Manim* es un recurso adecuado para el objetivo mencionado, siendo que este es un recurso creado particularmente para la creación de videos explicativos y animados sobre matemáticas.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Crear una página web compuesta principalmente de videos hechos en *Manim*, alusiva a los hechos Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno, que sea apoyo de procesos de enseñanza o aprendizaje a partir de promover el estudio de las facetas utilitaria y teórica de tales hechos.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Decantar objetos matemáticos relacionados con hechos geométricos escogidos (procedimientos, situaciones, representaciones, argumentos, lenguajes) que se involucrarían en el diseño y creación del material presentado en el recurso virtual.
2. Lograr una apropiación del software *Manim* que propicie la elaboración del material a la luz de libretos elaborados.
3. Realizar el diseño de una página web, para enseñar el contenido matemático escogido, teniendo en cuenta una adaptación de los criterios de idoneidad propuestos del Enfoque Onto-Semiótico para procesos de instrucción de las matemáticas escolares.

CAPÍTULO 2. REFERENTES CONCEPTUALES

En este capítulo presentamos los principales referentes conceptuales que permiten sustentar y desarrollar nuestro trabajo de grado (TG). Específicamente, consta de tres secciones: una de orden didáctico, otra que refiere a lo matemático, y finalmente, aquella que alude a los componentes o etapas de un recurso virtual. En la primera, presentamos las ideas de Kuzniak (2006) sobre espacios de trabajo geométrico y las tres aproximaciones a la geometría escolar que él propone. Este referente es clave porque es a partir de los constructos *aproximaciones a la geometría* en las matemáticas escolares y *espacio de trabajo* que nosotros vamos a tener una idea sobre los asuntos que nos interesa abordar en la página web; por otra parte, exponemos criterios de idoneidad propuestos desde el Enfoque Onto-Semiótico, adaptados al diseño de un recurso virtual idóneo.

En la segunda sección, presentamos diferentes aspectos de orden matemático que vamos a abordar en el TG, cómo se vinculan los paradigmas y los espacios de trabajo citados previamente, con los tres hechos teóricos principales de estudio (Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno), más concretamente con los tipos de objetos primarios (Godino, 2013) relacionados con estos (e.g., argumentos que los validan, situaciones que dan pie para su uso, principales representaciones asociadas). Por último, en la tercera, presentamos los componentes de nuestro recurso virtual; en ese marco, describimos el software *Manim*, cuál es su principal utilización en la actualidad, los programas en los que se apoya para su funcionamiento y la estructura principal que se utiliza en el código al momento de crear los videos e imágenes; además, exponemos las etapas que se deben tener en cuenta para la creación, estructuración y presentación de los contenidos de una página web.

2

2.1 REFERENTES DIDÁCTICOS

En este apartado presentamos los referentes didácticos que tuvimos en cuenta al momento de diseñar el recurso virtual abierto. Inicialmente, exponemos los paradigmas geométricos planteados por Kuzniak (2006), los cuales describen maneras para estudiar aspectos de la geometría en los diversos niveles educativos. Mostramos, además, razones para tener en cuenta dos paradigmas en específico, basados en los intereses del trabajo. Luego describimos lo que el mismo autor denomina Espacio de Trabajo Geométrico, constructo mediante el cual se plantea ciertas condiciones que se deben cumplir para que este garantice el trabajo de las personas que resuelven problemas en geometría; en este sentido, este es un referente clave para el diseño del recurso abierto (la página web). La última sección de este apartado expone los referentes de idoneidad didáctica (Godino, 2013; Hummes, Moll y Breda, 2019; y Godino, Batanero y Burgos, 2023), los cuáles, tal como sugieren los autores, pueden ser usados como parámetros base para orientar un diseño; en este caso, nosotros los concebimos razonables para diseñar la página web.

2.1.1 Las tres geometrías elementales

Considerar las matemáticas como una actividad social puede ayudarnos a entender cómo las comunidades y los individuos adoptan un paradigma geométrico u otro en la práctica cotidiana de la disciplina. Cuando los especialistas intentan resolver algunos problemas geométricos, van y vienen entre paradigmas; por ejemplo, pueden utilizar diagramas con diversos fines, a veces como objetos de estudio y otras, aunque sólo sea temporalmente, como medio de validación de algunas propiedades.

Esa actividad social depende del papel que se otorgue a los instrumentos de visualización y dibujo en el proceso de validación, por ejemplo. También depende del modelo de propiedades y definiciones de los objetos geométricos. En última instancia, depende de la creencia y los conocimientos personales de cada alumno. Por ello, para describir la complejidad del trabajo geométrico, se introdujo la noción de espacio de trabajo geométrico (ETG). El ETG es un lugar organizado para garantizar el trabajo de las personas que resuelven problemas de geometría (por ejemplo, los estudiantes en clase de matemáticas). Establece la referencia del entorno complejo (el descrito previamente) en el que actúa el solucionador de problemas. En ese sentido, un ETG sólo existe a través de sus usuarios, actuales o potenciales. Su constitución depende de la forma en que los usuarios “vivan” ese entorno complejo para resolver problemas geométricos. También depende de las capacidades cognitivas de un usuario concreto, experto o principiante. La constitución de un ETG variará en función del sistema educativo (el ETG previsto), de las circunstancias escolares (el ETG implementado) y de los practicantes (el ETG personal de alumnos y profesores). En la práctica, la constitución de un ETG no depende de un único paradigma, sino más bien de la interacción entre diferentes paradigmas.

Con el propósito de vislumbrar y diferenciar los posibles enfoques que se pueden presentar para estudiar la geometría en contextos escolares, Kuzniak (2006) propone tres paradigmas que permiten una caracterización de las clases de contextos, las metodologías y las validaciones que ocurren en el proceso de estudio dependiendo de distintos factores. Enseguida, describimos los rasgos que caracterizan a cada uno:

La Geometría I encuentra su validación en el mundo material y tangible; de ahí su nombre de *geometría natural*. En esta geometría, las afirmaciones válidas se generan usando argumentos basados en la percepción, la experimentación y, eventualmente, la deducción. De hecho, las pruebas dinámicas y experimentales son aceptables en la Geometría I.

En la Geometría II (geometría axiomática natural), cuyo arquetipo es la geometría euclidiana clásica, la geometría se construye sobre un modelo que se acerca a la realidad sin fundirse con ella. Una vez se establecen los axiomas, la prueba tiene que desarrollarse dentro del sistema de axiomas para ser válido. Los axiomas están estrechamente asociados con nuestra percepción del espacio, de ahí el nombre geometría axiomática natural. El sistema de axiomas puede quedar incompleto.

La Geometría III (geometría axiomática formal), está poco presente en la escolarización obligatoria, pero es la referencia implícita de profesores de matemáticas con formación universitaria. En esta, es central el sistema de axiomas el cual está desconectado de la realidad. Se supone el sistema completo y despreocupado de cualquier posible aplicación al mundo real. Se corta la conexión con la realidad, e interesa una consistencia intrínseca en las matemáticas.

Como se dijo antes, esto paradigmas pueden vivir en ETG específicos. Kuzniak y Rauscher (2014) has determinado los siguientes luego de varios estudios exploratorios. Describimos esos ETG.

Geometría I. El estudio de configuraciones del mundo real es el objetivo de la Geometría I (Guzmán y Kuzniak, 2006); en él se permite, e incluso se anima, a tomar medidas sobre una figura para resolver problemas. Algunos teoremas también pueden utilizarse como herramientas técnicas para sustituir las mediciones por cálculos: es el caso del Teorema de Pitágoras o del Teorema de Thales.

Geometría II. La Geometría II (Vivier & Kuzniak, 2009) se apoya en un conjunto de propiedades y experimentos proporcionados por la Geometría I y es intuitivamente útil. Sin embargo, el horizonte axiomático forma claramente parte de esta geometría, lo que la acerca a la geometría euclidiana.

Geometría fragmentada o Geometría III. Como en el caso anterior, la Geometría fragmentada III se basa en un conjunto de propiedades y experimentos emitidos a partir de la Geometría I. Pero a diferencia del caso anterior, esta geometría se caracteriza por bloques discretos de razonamiento hipotético deductivo organizados en torno a propiedades y a algunas configuraciones geométricas básicas. Estos bloques de razonamiento se basan en unas pocas propiedades justificadas por un experimento validado por una medición o por un programa informático.

En el capítulo 3 precisamos los ETG y, con ellos, los paradigmas que pretendemos promover con el recurso diseñado. Esto tomando en cuenta aspectos como el tipo de situaciones analizadas y nivel educativo al cual se dirige el recurso.

2.1.2 Indicadores de idoneidad

En este apartado describimos los Criterios de Idoneidad Didáctica –CI– (Godino, 2013; Hummes et al., 2019; y Godino et al., 2023), que abarcan las diferentes dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La idoneidad didáctica de un proceso instruccional es el grado en que dicho proceso (o una parte de él) cumple con ciertas características que lo califican como óptimo o adecuado y pretenden ser una respuesta parcial a la problemática. Ahora bien, los CI también pueden servir para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, logrando así la adaptación entre los significados personales de los estudiantes, los objetivos pretendidos o implementados y los significados institucionales, considerando las circunstancias y recursos disponibles. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

Desde hace varios años, la tecnología ha tomado un papel importante en la vida cotidiana y las clases de matemáticas no han sido la excepción. Como señalan Bolio y Lara (2021), con los avances tecnológicos se han desarrollado diversas herramientas digitales que pretenden mejorar la calidad en la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos. Es fácil identificar que una de las herramientas digitales más utilizadas para procesos de enseñanza y aprendizajes son los videos cargados a internet, específicamente a YouTube; dicho contenido tiene cientos de miles o en ocasiones, millones de visualizaciones. Sin embargo, diversos estudios como los presentados por Beltrán-Pellicer (2018), Suárez y Zubieta (2022) y Santamaría (2023), que analizan la idoneidad didáctica de videos subidos a la web, concluyen que el contenido suele tener ciertas carencias. Entre ellas están: mostrar procedimientos formalmente incorrectos, no mencionar el nivel educativo al cual está dirigido el contenido y usar lenguaje muy poco riguroso.

Teniendo en cuenta lo anterior, surge la necesidad de identificar algunos criterios que permitan evaluar la idoneidad didáctica, no solo de los videos, sino también de todo el recurso virtual producto de este trabajo. Tenemos en cuenta los criterios de idoneidad didáctica expuestos en Godino (2013); sin embargo, dada la naturaleza de este proyecto, nos enfocamos en aquellas facetas y criterios que podemos considerar directamente; en lo que sigue, hacemos la descripción correspondiente:

Idoneidad epistémica. Un programa formativo o un proceso de estudio matemático (que contempla situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades, lenguaje y argumentos) tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. La Tabla 1 presenta algunos componentes e indicadores que permiten entender y caracterizar de mejor forma esta idoneidad.

Tabla 1. Componentes e indicadores de la Idoneidad Epistémica

Componentes	Indicadores	Código[1]
Situaciones – problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).	ES
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. Nivel del lenguaje adecuado.	EL
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.	ERS
Argumentos	Los argumentos son adecuados al nivel educativo a que se dirigen. Se promueven situaciones donde el usuario tenga que argumentar.	EA
Relaciones	Los objetos matemáticos (situaciones, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.	ER

[1] Estos códigos estarán presentes durante todo el texto, con el objetivo de poder evidenciar y expresar con mayor facilidad sus usos para el desarrollo del recurso diseñado.

Idoneidad cognitiva. Se define la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados son adecuados para los usuarios, es decir, que están en la zona de desarrollo potencial de los usuarios. Teniendo en cuenta la naturaleza de este trabajo, nos es imposible evaluar algunos de los componentes e indicadores que caracterizan este tipo de idoneidad. Por esto, solo mencionamos aquellos componentes de los cuales podemos dar cuenta mediante el diseño de nuestro recurso virtual.

Tabla 2. Componentes e indicadores de la Idoneidad Cognitiva

Componentes	Indicadores	Código
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que se utilizan para la idoneidad epistémica)	Los usuarios tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor ha planificado su estudio). Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	CC

Idoneidad interaccional. La idoneidad interaccional se entiende como el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favoreciendo la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. Los componentes e indicadores referidos a la idoneidad interaccional que se muestran en la Tabla 3 se pueden promover de cierta forma desde un recurso virtual, ya sea por medio del chat de la comunidad, las sugerencias que se hacen para el abordaje de cada material creado y la cantidad de información presentada en cada situación o tema.

Tabla 3. Componentes e indicadores de la Idoneidad Interaccional

Componentes	Indicadores	Código
Interacción recurso-discente	El recurso hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se usan diversos recursos retóricos (modelos, representaciones, metáforas, etc.) y argumentativos para implicar y captar la atención de los usuarios.	IR

Idoneidad mediacional. Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza. En la Tabla 4 se presentan algunos de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad mediacional.

Tabla 4. Componentes e indicadores de la Idoneidad Mediacional

Componentes	Indicadores	Código

Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	Se usan materiales manipulativos o informáticos que permiten introducir lenguajes, procedimientos, argumentos y reglas adaptadas al contenido pretendido.	MR

Idoneidad ecológica. La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza; en este caso, nosotros podemos trabajar estos componentes e indicadores (Tabla 5) dando sugerencias dentro del recurso virtual para contextos generales que pueden tener los estudiantes (por medio de las publicaciones, descripciones y comentarios), basándonos principalmente en los aspectos de índole curricular.

Tabla 5. Componentes e indicadores de la Idoneidad Ecológica

Componentes	Indicadores	Código
Adaptación al currículo	Los contenidos y su implementación se corresponden con las directrices curriculares	EcA
Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.	EcI
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.	EcC

Todos estos criterios que acabamos de definir se aterrizan a los objetos y al entorno (recurso digital abierto) de nuestro interés en el Capítulo 3, dejando con mayor claridad el cómo correspondemos a cada uno de los componentes de cada idoneidad. Para que el lector tenga evidencia de ello, usamos los códigos expuestos en las tablas 1 a la 5 tanto en el Capítulo 3 como en el Capítulo 4.

2.2 REFERENTES MATEMÁTICOS

En esta sección, presentamos los aspectos centrales de orden matemático, que atienden principalmente a las propuestas de Godino, (2013), Hummes, Moll y Breda, (2019); Godino, Batanero y Burgos, (2023) y Kuzniak (2011). Para ello, tomando la idea de Kuzniak, los espacios de Trabajo que se pretenden promover son los de la Geometría I y la Geometría II. En este sentido, primero describimos brevemente los Objetos protagónicos (Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno), su utilidad y que relación pueden tener entre estos.

Por otra parte, para observar cada aspecto que involucra a los objetos matemáticos, se presentan diferentes secciones que apuntan a cada componente de la idoneidad epistémica propuesta por Godino. En este marco, se hace necesario que los objetos protagonistas del TG se presenten mediante situaciones problema, las cuales tienen una gran relevancia en el marco de los ETG, Geometrías I y II. Ya especificadas estas situaciones, se presentan los argumentos que sustentan la validez de los objetos.

Para efectos de nuestro trabajo, solo se presentarán demostraciones de carácter geométrico algebraico y dinámicas (su caracterización se presenta más adelante). Por un lado, las demostraciones dinámicas son necesarias, porque son las que se potencian con el software *Manim*; y por otro, las demostraciones geométrico algebraico porque son la base de las demostraciones dinámicas que se van a ilustrar (y, por ende, diseñar) mediante *Manim*.

2.2.1 Objetos matemáticos centrales

Los objetos matemáticos centrales que elegimos para este trabajo son el Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos y la Ley de Cosenos. En esta sección hacemos una breve descripción de cada uno de ellos y de los objetos matemáticos que relacionan. Iniciamos con el Teorema de Pitágoras, aludiendo a dos maneras de anunciarlo, una de ellas mediante la aproximación por áreas de cuadrados y la segunda a través de la aproximación por longitudes de segmentos. La primera forma puede encontrarse incluso en libros como Los Elementos de Euclides. En dichos libros se demuestra que el área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas que tienen como lado cada uno de los catetos de ese mismo triángulo. Como podemos observar, en dicho enunciado no se hace mención alguna a longitudes de segmentos; las únicas relaciones presentes se dan ente áreas de cuadrados.

La segunda manera de anunciar el Teorema de Pitágoras nos brinda una relación algebraica entre las longitudes de los tres lados de cualquier triángulo rectángulo. Usualmente, se catalogan los lados de dicho triángulo como catetos e hipotenusa, siendo la hipotenusa el lado opuesto al ángulo recto y los catetos los lados restantes. El enunciado que usamos en este trabajo se extrajo de Samper y Molina (2013), y es el siguiente:

Teorema de Pitágoras. Dado cualquier triángulo ABC con $\angle B$ recto, tenemos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, consideramos pertinente mencionar que la utilidad del Teorema de Pitágoras como herramienta de medición indirecta, está presente en aquellas situaciones en las cuales se identifica un triángulo rectángulo y la medida de dos de sus lados; a partir de la información obtenida, la relación de igualdad proporcionada por el hecho geométrico y propiedades de operaciones definidas para el conjunto de números reales, permiten encontrar la longitud del lado restante del triángulo.

La Ley de cosenos, a diferencia del Teorema de Pitágoras, es válida para cualquier triángulo, sin restricciones impuestas por las medidas de alguno de sus ángulos. Por otra parte, aunque en este trabajo nos centramos en la utilidad de la Ley de Cosenos, como herramienta de medición indirecta de longitudes de segmentos, es prudente mencionar que este hecho geométrico también tiene utilidad para calcular la amplitud de los ángulos de un triángulo; esto, si tenemos como información previa todas las longitudes de todos los lados de dicho objeto geométrico.

Ley de Cosenos. Dado cualquier triángulo ABC, con $AB = c, BC = a$ y $AC = b$ tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, Cos\, A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, Cos\, B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, Cos\, C$$

La ley de Cosenos puede verse como una generalización del Teorema de Pitágoras; esto debido a que, si alguno de los ángulos del triángulo ΔABC llegara a ser recto, entonces la expresión dada por la Ley del Coseno que involucre de dicho ángulo se transformaría en el caso específico del Teorema de Pitágoras (claro, producto de que el coseno de 90° es igual a 0).

La utilidad de la Ley de Cosenos, como herramienta de medición indirecta, para calcular la longitud de uno de los segmentos de un triángulo, está presente en aquellas situaciones en las que se tienen las medidas de longitudes de dos lados de un triángulo y la medida de la amplitud angular del ángulo determinado por estos. Sustituyendo los datos dados en una de las expresiones de la Ley, y aplicando propiedades de operaciones definidas para el conjunto de números reales, es posible hallar el dato restante sin medir directamente.

La Ley de Senos, al igual que la Ley de Cosenos, es aplicable a cualquier triángulo. Por otra parte, aunque en este trabajo nos centramos en la utilidad de este hecho geométrico para la medición indirecta de segmentos, esta Ley también puede ser usada para calcular la amplitud angular de los ángulos de un triángulo; esto teniendo como información previa las medidas de dos segmentos de un triángulo y la amplitud angular de uno de los ángulos opuestos a dichos segmentos.

Ley de Senos. Dado cualquier triángulo ABC, con $AB = c, BC = a$ y $AC = b$, tenemos que:

$$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}$$

La utilidad de la Ley de Senos, como herramienta de medición indirecta de segmentos, está presente en aquellas situaciones en las cuales se tienen las medidas de la amplitud de dos ángulos (gracias al T. 180, se puede inferir el tercero) y la medida de uno de los lados opuestos a dichos ángulos, por cuanto, mediante la selección de la igualdad entre dos de las razones proporcionadas por el hecho geométrico, y la aplicación de propiedades de operaciones definidas para el conjunto de números reales, es posible encontrar la longitud deseada de uno de los lados restantes del triángulo.

2.2.2 Ejes articuladores de los objetos protagónicos

Teniendo de antemano la breve descripción de los objetos matemáticos centrales de este trabajo, esta sección pretende exponer aquellas similitudes que nos llevaron a seleccionar dichos objetos. Para dicho propósito, proponemos los siguientes ejes articuladores: su utilidad como herramientas de medición indirecta, y objetos usados principales en su validación desde el punto de vista teórico.

Como se puede inferir de la sección previa, los usos de los hechos protagonistas de este trabajo se concentran en la medición indirecta de magnitudes geométricas (longitud y amplitud angular). Este es un asunto que tienen en común los tres objetos. No obstante, también como se mostró en la sesión previa, cada objeto tiene una particularidad respecto de lo que se requiere como condición y lo que necesariamente se establece de estas. Así, el T. Pitágoras está enfocada en la medición de segmentos, mientras que tanto la Ley de Senos, como la Ley de Cosenos, tienen la posibilidad de hacer una medición indirecta de los lados o ángulos de un triángulo.

Comentamos ahora sobre aspectos que tienen en común los objetos en relación con aspectos relativos a su validación teórica, esto es a sus demostraciones en el marco de cierto cuerpo teórico. Nosotros hemos escogidos demostraciones en las que es posible identificar un trasfondo común que tiene que ver con la semejanza de triángulos, en algún caso no tan evidente como en los demás. Como se expone más adelante, hemos escogido dos maneras de demostración para el Teorema de Pitágoras y para la Ley de Cosenos. En la primera manera, los criterios de semejanza se usan de manera directa; en la segunda manera, el objeto clave en el que se apoya demostración es el Teorema Potencia de un Punto, el cual, se sustenta también en la semejanza. Para el caso de la Ley de Senos, el argumento no hace un uso directo de los criterios de semejanza, ni del teorema Potencia de un punto; no obstante, la semejanza fundamenta la definición de razón trigonométrica Seno, la cual, al generalizarse para un ángulo que no esté basado en una circunferencia unitaria necesariamente, usa criterios de semejanza para validar tal generalización.

Tabla 6. Relaciones centrales entre los objetos matemáticos

	Teorema de Pitágoras	**Ley de Cosenos**	**Ley de Senos**
Utilidad como herramienta de medición indirecta	Medición indirecta de uno de los lados de un triángulo rectángulo, teniendo la medida de dos de sus lados.	Medición indirecta de uno de los lados de un triángulo, teniendo la medida de sus otros dos lados y la magnitud del ángulo que forman. Medición indirecta de cualquier ángulo teniendo la medida de los tres lados del triángulo.	Medición indirecta de uno de los lados de un triángulo, teniendo la medida de su ángulo opuesto, y la medida de otro lado junto con la magnitud de su correspondiente ángulo opuesto. Medición indirecta de cualquier ángulo teniendo la medida de su lado opuesto y la medida de otro ángulo junto con su correspondiente lado opuesto
Elementos claves de la justificación teórica que empleamos en el recurso diseñado	Semejanza de triángulos; teorema potencia de un punto	Semejanza de triángulos; teorema potencia de un punto	Semejanza de triángulos

En lo que sigue, presentamos la información de orden matemático. Para generar una articulación con la propuesta de Kuzniak y Raushcer (2014) respecto a los espacios de trabajo y los paradigmas de la geometría en los niveles educativos, primero presentamos situaciones en las que emergerían los objetos protagonistas a partir de su utilidad para estudiar tales situaciones; en ese marco, enunciamos los problemas cuya solución se expone en el recurso digital diseñado. Luego, presentamos información teórica relativa a dichos objetos, que son los referentes tomados en cuenta tanto para el diseño de la página web como para la información misma dispuesta en ella.

En esta presentación, vimos pertinente usar los tipos de objetos primarios propuestos desde el Enfoque-Ontosemiótico (Godino 2013); así las cosas, primero presentamos las *situaciones*, para luego aludir a los *procedimientos* deseables de abordaje de cada situación y los *argumentos* (demostraciones de la validez del Teorema y las Leyes) y las *reglas* (definiciones, propiedades) relacionadas.

2.2.3 Situaciones problema

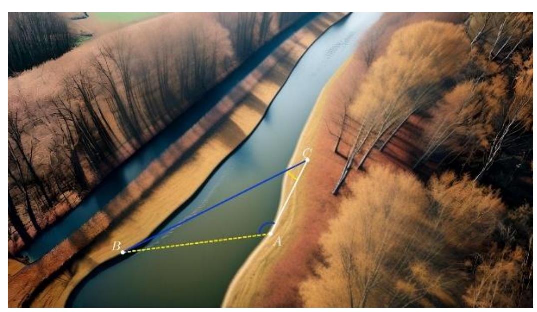
Según Diaz y Poblete (2001, citado en Suárez & Zubieta, 2022) las situaciones problema o situaciones matemáticas se clasifican tomando en cuenta sus contextos, siendo estos: real, semi-real, fantasioso y puramente matemático. A continuación, describiremos lo que describe cada tipología:

- Real: Es una situación que se da en un contexto real, que puede involucrar al estudiante directamente.
- Semi-real: La situación puede pasar, pero no es tan común. Por este motivo es una simulación que toma parte de la realidad.
- Fantasioso: Estas situaciones son creadas sin tener un fundamento en la realidad.
- Puramente matemático: Estas situaciones se centran exclusivamente en el objeto matemático, dejando de lado el contexto o la situación.

Para este trabajo de grado (en adelante TG), se propondrán situaciones de tipo semi-real, que buscan establecer o calcular de manera indirecta medidas de longitud o distancia entre dos puntos. A la luz de estas situaciones, es menester utilizar los siguientes hechos geométricos: Teorema de Pitágoras, Ley de Seno y Ley de Coseno. A continuación, se presentan las situaciones problemas junto al objeto matemático que tienen como propósito introducir.

Las tres situaciones tienen un mismo contexto (construir un puente a través de un lago, desde un punto A hasta un punto B, cuya medición directa se puede hacer con los recursos con los que cuenta la constructora contratada), pero mediante representaciones gráficas, cada una impone condiciones diferentes que inducen el uso de una herramienta intelectual diferente. Presentamos los respectivos enunciados:

Tabla 7. Situaciones problema, representaciones y objetos matemáticos implicados

Objeto matemático	Situación problema	Representación
Teorema de Pitágoras	Se le asigna a una constructora el trabajo de hacer un puente a través de un lago de gran tamaño, desde el punto A hasta el punto B como se muestra en la Figura 1. Para empezar, un ingeniero de la empresa debe estimar la cantidad de material necesario para hacer la construcción tomando de base la distancia entre los puntos A y B. Sin embargo, se da cuenta de la dificultad que presenta medir directamente tal longitud. ¿Cómo podría el ingeniero calcular la distancia que necesita, si solo sabe que el ángulo C es recto?	 *Figura 1. Situación I* *Fuente: Elaboración propia*
Ley de cosenos	Se le asigna a una constructora el trabajo de hacer un puente a través de un gran lago, desde el punto A hasta el punto B como se muestra en la Figura 2. Para empezar, un ingeniero de la empresa debe estimar la cantidad de material necesario para hacer la construcción tomando de base la distancia entre los puntos A y B. Sin embargo, se da cuenta de la dificultad que presenta medir directamente tal longitud. ¿Cómo podría el ingeniero calcular la distancia que necesita si se el ingeniero usa otro punto de referencia C?	 *Figura 2. Situación II* *Fuente: Elaboración propia*
Ley de seno	Bajo la necesidad de crear nuevas rutas de comercio, los dirigentes de una ciudad deciden construir un puente a través de un río, desde el punto A hasta el punto B, (Figura 3) para tener una vía de acceso fácil hacia otra ciudad. Un ingeniero de la constructora encargada de la obra desea estimar la cantidad de material necesario para hacer dicha construcción. Así, que necesita saber la distancia entre los extremos del puente: sin embargo, debido a las fuertes corrientes del río no es fácil hacer medición de manera directa de las distancias sobre el río. ¿Cómo podría el ingeniero calcular la distancia que necesita si se el ingeniero usa otro punto de referencia C?	 *Figura 3. Situación III* *Fuente: Elaboración propia*

2.2.4 Procedimientos de solución

Sabemos que existen maneras de resolver estos problemas directamente; esto es, que existen instrumentos especializados que suelen estar al alcance del ser humano (e.g. distanciómetros laser o sónicos, instrumentos satelitales, etc.). Sin embargo, cuando estos instrumentos no están al alcance, debemos valernos de herramientas de tipo intelectual que permiten, mediante el cálculo de medición indirecta, resolver los problemas planteados. Justo en este escenario, es que empiezan a tomar protagonismo los objetos matemáticos mencionados en este trabajo de grado.

Como se dijo antes, los tres problemas propuestos exigen establecer una manera de hallar una cantidad de longitud específica; sin embargo, es posible identificar que la información que puede obtenerse de cada contexto es distinta, ya sea por la imagen que representa el problema o por el enunciado de este; así las cosas, el objeto matemático más adecuado para resolver el problema será aquel que, mediante su enunciado, provea la información suficiente para usar la herramienta intelectual correspondiente.

2.2.4.1 Situación problema Teorema de Pitágoras – Procedimiento de solución deseado

Pretendemos que la persona que resuelva los problemas propuestos por cada situación pase por una serie de etapas en dicho proceso: ubicación conveniente de un tercer punto C, obtención de magnitudes medibles directamente, selección de un objeto matemático pertinente y manipulación algebraica de la información obtenida, con base en el enunciado del objeto matemático escogido.

La ubicación conveniente de un punto C, en el problema 1, consiste en, mediante la prueba de distintas coordenadas de este punto, seleccionar aquella que cumpla con dos condiciones; que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ no pasen por el lago y que las magnitudes de dichos segmentos sean tan pequeñas como sea posible. La primera condición obedece a que la medición de magnitudes de longitud a través de cuerpos de agua, sin los instrumentos adecuados, puede resultar muy imprecisa, teniendo como alternativa la medición de las distancias por tierra firme. La segunda condición intenta economizar lo más posible el tiempo que se requiera usar para medir los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

En el caso del lago del problema 1, el punto C seleccionado, determina, junto a los puntos A y B, un triángulo ΔACB (ver Figura 1) del cual se pueden medir directamente dos magnitudes fundamentales, las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, teniéndose dado que $\angle ACB$ es recto.

Finalizada la medición de las magnitudes medibles directamente, continuamos con el proceso de selección de un objeto matemático pertinente. Para hacer dicho proceso tenemos que contemplar los datos que hemos podido obtener y la magnitud que queremos calcular. Tenemos un triángulo determinado, la posibilidad de acceder a la medida de dos de sus lados, y la de uno de sus ángulos; la cual es de 90°; queremos determinar la magnitud del tercer lado. Como se mencionó en la sección 2.2.2, el objeto matemático idóneo para esta situación es el teorema de Pitágoras.

Una vez identificados los catetos e hipotenusa del triángulo ΔACB, y aplicado el Teorema de Pitágoras, el último paso para calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ sería reemplazar los valores que se obtendría mediante una medición directa de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Al usar la expresión dada por el consecuente del teorema mencionado y propiedades de los números reales se podría establecer la medida AB. Por ejemplo, si AC es 4.25 km y BC es 6.74 km, el cálculo por hacer sería:

$$AB^2 = (4.25Km)^2 + (6.74Km)^2$$
$$AB^2 \approx 63.49Km^2$$
$$AB \approx \sqrt{63.49Km^2}$$
$$AB \approx 7.97Km$$

2.2.4.2 Situación problema Ley del Coseno – Procedimiento de solución deseado

La ubicación conveniente del punto C de manera análoga a como se explicó para el problema 1, se debe ubicar un punto C de forma tal que AC y BC se puedan medir directamente por tierra. Las condiciones de este problema exigen poner el punto C de forma tal que el ΔABC (ver Figura 2) no sea rectángulo en C.

Habiendo pasado el proceso de exploración para ubicar el punto C y teniendo la posibilidad de establecer las medidas AC y BC directamente, se debe precisar la medida de la longitud del segmento $\overline{AB}$. Para ello, procedemos a seleccionar el objeto matemático pertinente para esta situación. Dado que tenemos la medida de dos de los lados de un triángulo y la magnitud del ángulo determinado por dichos segmentos, podemos afirmar que el objeto matemático idóneo para resolver este problema es la Ley de Cosenos.

Posterior a haber seleccionado el objeto matemático pertinente para la resolución de este problema, el paso a seguir es reemplazar los datos que se puedan obtener por medición directa, en la expresión de la tesis del enunciado de la ley de Cosenos expuesta antes, y aplicar propiedades de operaciones definidas para el conjunto de los números reales. Si, por ejemplo, las medidas que se obtienen son $AC = 6.71\ Km$, $BC = 7.21\ Km$ y $m\angle C = 39.5°$ como se puede ver a continuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, C$$

$$c^2 = (6.71Km)^2 + (7.21Km)^2 - 2(71Km)(7.21Km)\cos(39.5°)$$
$$c^2 \approx 22.35Km^2$$
$$c \approx 4.73Km$$

2.2.4.3 Situación problema Ley de Senos – Procedimiento de solución deseado

Aunque las etapas de solución del problema 3 son parecidas a las de los problemas 1 y 2, tanto las condiciones que tiene el punto C, como los datos que se pueden obtener al hacer mediciones directas son distintos, lo cual cambia sustancialmente el procedimiento de solución de la situación problema.

La ubicación conveniente del punto C, en este caso, cumple con dos condiciones. La primera condición requiere que solo uno de los segmentos cuyo uno de sus extremos sea el punto C pase a través del rio. La segunda condición consiste en que dicho punto debe estar ubicado una orilla del rio, esto con el propósito de facilitar la medición del segmento determinado por los puntos ubicados en una misma orilla.

Teniendo en cuenta la amplia gama de ubicaciones posibles que tiene el punto C en esta situación, y que su elección no afecta de sobremanera la solución del problema, se tomó una ubicación que permitiera mostrar un triángulo con segmentos de magnitudes no demasiado distantes (ver Figura 3).

El punto C seleccionado, determina, junto a los puntos A y B, un triángulo ΔACB del cual se pueden medir directamente tres magnitudes fundamentales; la cantidad de longitud del segmento

$\overline{AC}$ y las medidas de los ángulos $\angle ACB$ y $\angle BAC$ (esto con el uso posible de un instrumento como el teodolito).

La elección del objeto matemático apropiado para la resolución de este problema no es tan directa como en los casos anteriores, debido a que, aunque tener la medida de dos de los ángulos de un triángulo y la longitud de uno de sus segmentos, parezca suficiente para aplicar la Ley de Senos, hemos de recordar que en la sección 2.2.1 mencionamos que, para que estos datos fueran útiles, deberíamos tener la magnitud de un segmento y un ángulo opuestos. Como se infiere del contexto del problema, los datos que se tienen no cumplen con estas exigencias, pero son suficientes para establecerlos; específicamente, hace falta la medida de un ángulo. Es aquí donde toma importancia un hecho geométrico muy conocido, el teorema 180, el cual nos permite hallar la medida del ángulo $\angle ABC$ (opuesto al segmento $\overline{AC}$) usando las medidas de los ángulos $\angle ACB$ y $\angle BAC$ mediante la aplicación de propiedades de los números reales. Por ejemplo, se obtiene como se muestra a continuación.

$$\mathrm{m}\angle ACB + \mathrm{m}\angle BAC + \mathrm{m}\angle ABC = 180^0$$
$$\mathrm{m}\angle ABC = 180^0 - \mathrm{m}\angle ACB - \mathrm{m}\angle BAC$$
$$\mathrm{m}\angle ABC = 180^0 - 123.69° - 36.87°$$
$$\mathrm{m}\angle ABC \approx 19.44^0$$

Siendo que ya tenemos las condiciones suficientes para poder aplicar la Ley de Senos, el paso a seguir es reemplazar los datos obtenidos por medición directa, en la expresión de la tesis del enunciado de tal hecho geométrico, y aplicar propiedades de operaciones definidas para el conjunto de los números reales, como se puede ver a continuación.

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$
$$\frac{\sin(19.44^0)}{2.44Km} = \frac{\sin(36.87°)}{c}$$
$$\frac{2.44Km}{\sin(19.44^0)} = \frac{c}{\sin(36.87°)}$$
$$c = \frac{2.44Km\ (\sin(36.87°))}{\sin(19.44^0)}$$
$$c \approx 4.03Km$$

2.2.5 Argumentos

Dado nuestro interés por involucrar el paradigma de geometría axiomática natural en este trabajo, es menester presentar las demostraciones (o argumentos deductivos) relativos a los objetos protagonista. Loomis (1968) propone una clasificación para los tipos de argumentos del Teorema de Pitágoras, que vimos razonable extenderlos para la Ley del seno y la Ley del coseno. Para efectos de este trabajo, nos centramos en demostraciones de tipo geométrico-algebraica y dinámica; esta últimas sustentadas en las herramientas del software Manim. En lo que sigue, presentamos una breve descripción de estas categorías justo con las demostraciones correspondientes a estas para los hechos objetos de estudio.

2.2.5.1 Argumentos Geométrico-Algebraicos

Este tipo de argumentos involucran tanto el conocimiento geométrico como el algebraico, lo que implica el uso de representaciones gráficas y simbólicas de una manera relativamente equilibrada. Esto quiere decir que, por medio de las propiedades de figuras geométricas, ya sea mediante la relación entre longitudes, áreas o proporciones, se llegan a las expresiones algebraicas. Dentro de esta categoría, se pueden identificar tres subcategorías principales de argumentos: La primera se enfoca en la concepción basada en la relación entre áreas, donde se da prioridad a la composición de figuras a partir de triángulos congruentes. La segunda, se centra en la relación de semejanza entre triángulos, que se enfoca principalmente en la relación que hay entre las longitudes de los lados. La tercera se apoya en las propiedades métricas de la circunferencia. No obstante, aunque estas subcategorías son específicamente para el T. Pitágoras, se pueden hacer extensibles para la Ley del Coseno y la Ley del Seno, especialmente para las dos últimas subcategorías. Estas dos subcategorías se pueden usar para el T. Pitágoras y la Ley del Coseno, dado que al usar Teorema potencia de un punto -asunto que nos interesa abordar por lo novedoso curricularmente, pero cercano a la zona de desarrollo próximo de los estudiantes Vygotsky (1978) para presentar los argumentos- y, este se basa en la semejanza de triángulos. Por otro lado, la segunda subcategoría se relacionó con la Ley del Seno, por cuanto se basan en la medida de longitud de los lados de un triángulo.

Extendemos la explicación de por qué nuestro interés en exponer demostraciones asociadas a las subcategorías citadas, las cuales se basan en la semejanza de triángulos. Primero, esta relación es un objeto curricular de las matemáticas escolares, y consideramos pertinente su uso en demostraciones de otros hechos protagonistas en la matemática escolar; segundo, porque muestra una manera no conocida de demostraciones para estos hechos que se basan en la potencia de un punto y con ello, en la semejanza de triángulos en el marco del objeto circunferencia, aspectos que en cualquier caso, son accesibles a los estudiantes de grado 9° y 10°.

Argumentos a partir de relaciones de semejanza entre triángulos

Estos argumentos centran su atención en la relación que hay entre las cantidades de longitudes de dos o más triángulos semejantes, permitiendo así una manipulación algebraica de los símbolos que representan las medidas de longitud implicadas. A continuación, presentamos las demostraciones correspondientes a los hechos protagonistas. Lo hacemos basados en el modelo de Birkhoff para la geometría euclidiana (Moise y Downs, 1986).

Tabla 8. Demostración Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos

Enunciado Teorema de Pitágoras. Dado cualquier triángulo ABC con $\angle B$ recto, tenemos que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Figura 4)

	Núcleos	Pilares[2]
1	Sea ΔABC con $\angle B$ recto	Dado
2	Sea $\overline{BD}$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $D = \overline{AC} \cap \overline{BD}$.	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo
3	$A - D - C$	T. Desigualdad – Punto interior
4	Sea ΔABD con $\angle D$ recto Sea ΔCBD con $\angle D$ recto	D. Triángulo
5	$\Delta ABD \sim \Delta ABC$, $\Delta CBD \sim \Delta ABC$	C. Semejanza triángulos rectángulos
6	$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$	D. Semejanza
7	$AD = \frac{AB^2}{AC}, DC = \frac{BC^2}{AC}$	P. Reales
8	$AC = AD + DC$	D. Interestancia
9	$AC = \frac{AB^2}{AC} + \frac{BC^2}{AC}$	P. Sustitución
10	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	P. Reales

[2] Los enunciados de todos los elementos teóricos se presentan en el ANEXO (C) ELEMENTOS TEÓRICOS – SISTEMA DE REFERENCIA

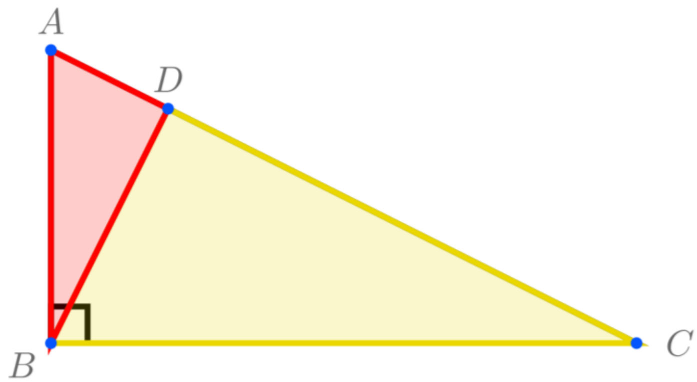


Figura 4. Semejanza en el T. Pitágoras

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9. Enunciado y Demostración de la Ley del Coseno con el Teorema de Pitágoras

Enunciado. Dado cualquier triángulo ABC, con $AB = c, BC = a$ y $AC = b$ tenemos que (Ver Figura 5):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

	Núcleos	Pilares
1	Sea ΔABC	Dado
2	Sea $\overline{BD}$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $D = \overline{AC} \cap \overline{BD}$.	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo
3	$\overline{BD}$ altura del ΔABC por B	D. Altura de un triangulo
4	Si $A - D - C$	Hipótesis 1
5	$AB^2 = BD^2 + AD^2$ $BC^2 = BD^2 + DC^2$	T. Pitágoras
6	$AC = AD + DC$	D. Interestancia
7	$DC = AC - AD$ $BD^2 = AB^2 - AD^2$	P. Reales

8	$BC^2 = AB^2 - AD^2 + (AC - AD)^2$	P. Sustitución
9	$BC^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 - 2(AC)(AD) + AD^2$	Binomio al cuadrado
10	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AC)(AD)$	P. Reales
11	$Cos(A) = \frac{AD}{AB}$	P. Trigonométricas
12	$AD = (AB)(CosA)$	P. Reales
13	$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)[(AB)(CosA)]$	Prin. Sustitución
14	$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(BC)[(AB)(CosB)]$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2(BC)[(AC)(CosC)]$	Análogamente con las alturas restantes del triángulo
15	Si $D - A - C$	Hipótesis 2
16	$AB^2 = BD^2 + AD^2$ $BC^2 = BD^2 + DC^2$	T. Pitágoras
17	$DC = AD + AC$	D. Interestancia
18	$BD^2 = AB^2 - AD^2$	P. Reales
19	$BC^2 = AB^2 - AD^2 + (AD + AC)^2$	P. Sustitución
20	$BC^2 = AB^2 - AD^2 + AD^2 + 2(AD)(AC) + AC^2$	Binomio al cuadrado
21	$BC^2 = AB^2 + 2(AD)(AC) + AC^2$	P. Reales
22	$Cos(180 - A) = \frac{AD}{AB}$ $Cos(180 - A) = -CosA$	P. Trigonométricas
23	$AD = (AB)(-CosA)$	P. Reales
24	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AC)[(AB)(CosA)]$	P. Sustitución y P. Reales
25	$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(BC)[(AB)(CosB)]$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2(BC)[(AC)(CosC)]$	Análogamente con las alturas restantes del triángulo

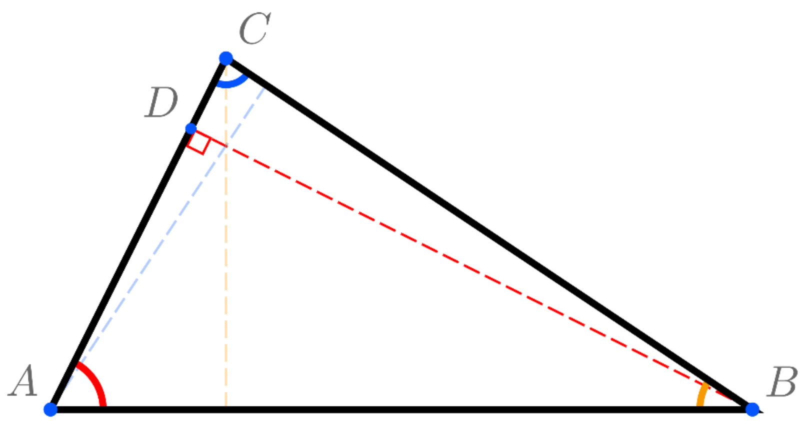


Figura 5. Ley del Coseno

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Demostración Ley del Coseno por semejanza de triángulos

Enunciado Ley del Coseno. Dado cualquier triángulo ABC, con $AB = c, BC = a$ y $AC = b$ tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, Cos\, A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, Cos\, B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, Cos\, C$		
	Núcleos	Pilares
1	Sea ΔABC	Dado
2	Sea $\odot P$ con radio AB y centro en A	T. Existencia de la circunferencia
3	Si $AC < AB$	Caso 1 (Figura 6)
4	Sea $D = \overrightarrow{AC} \cap \odot P$ Sea $E = \overrightarrow{BA} \cap \odot P$ Sea $F = \overrightarrow{BC} \cap \odot P$ Sea $G = \overrightarrow{CA} \cap \odot P$	T. Punto interior circunferencia - secante
5	$AD = AB = AG$	D. Circunferencia
6	Sea $\overline{BE}$ diámetro de $\odot P$ $BE = 2AB$	D. Diámetro
7	$AD = AC + CD$ $BF = BC + CF$	D. Interestancia

	$GC = AG + AC$	
8	Sea ΔEFB con $\angle BFE$ recto	T. Circunferencia circunscrita en triángulo rectángulo
9	$Cos\ (B) = \frac{BF}{BE}$	P. Trigonométricas
10	$(BE)(CosB) = BF$ $BF - BC = CF$ $AD - AC = CD$	P. Reales
11	$(BE)(CosB) - BC = CF$ $2(AB)(CosB) - BC = CF$ $GC = AD + AC$	P. Sustitución
12	$\angle FBD \cong \angle FGD$	T. Ángulos inscritos en circunferencia
13	$\angle FCG \cong \angle DCB$	T. Ángulos opuestos vértice
14	$\Delta FCG \sim \Delta DCB$	C. Semejanza (AA)
15	$\frac{CF}{CD} = \frac{GC}{BC}$	D. Semejanza
16	$(CF)(BC) = (GC)(CD)$	P. Reales
17	$(2(AB)(CosB) - BC)(BC) = (AD + AC)(AD - AC)$	P. Sustitución
18	$2(AB)(BC)(CosB) - BC^2 = AD^2 - AC^2$	P. Reales
19	$AC^2 = BC^2 + AD^2 - 2(AB)(BC)(CosB)$	P. Reales
20	$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(AB)(BC)(CosB)$	P. Sustitución
21	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AC)(AB)(CosA)$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2(BC)(AC)(CosC)$	Análogamente con los lados restantes
22	Si $AC > AB$ entonces $A - D - C$	Caso 2
23	Sea $D = \overline{AC} \cap \odot P$ Sea $E = \overrightarrow{BA} \cap \odot P$ Sea $F = \overline{BC} \cap \odot P$	D. Intersección

	Sea $G = \overrightarrow{DA} \cap \odot P$	
24	$AD = AB = AG$	D. Circunferencia
25	Sea $\overline{BE}$ diámetro de $\odot P$ $BE = 2AB$	D. Diámetro
26	$AC = AD + DC$ $BC = BF + CF$ $GC = AC + AG$	T. Punto interior - secante
27	Sea ΔEFB con $\angle F$ recto	T. Circunferencia circunscrita en triángulo rectángulo
28	$Cos\ (B) = \frac{BF}{BE}$	P. Trigonométricas
29	$(BE)(CosB) = BF$ $BC - BF = CF$ $AC - AB = DC$	P. Reales
30	$BC - (BE)(CosB) = CF$ $BC - 2(AB)(CosB) = CF$ $GC = AC + AB$	P. Sustitución
31	$\angle FBD \cong \angle FGD$	T. Ángulos inscritos en circunferencia
32	$\angle FCG \cong \angle DCB$	P. Reflexiva
33	$\Delta FCG \sim \Delta DCB$	C. Semejanza (AA)
34	$\frac{GC}{BC} = \frac{CF}{CD}$	D. Semejanza
35	$(GC)(DC) = (BC)(CF)$	P. Reales
36	$(AC + AB)(AC - AB) = (BC)\big(BC - 2(AB)(CosB)\big)$	P. Sustitución
37	$AC^2 - AB^2 = BC^2 - 2(AB)(BC)(CosB)$ $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(AB)(BC)(CosB)$	P. Reales
38	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AC)(AB)(CosA)$	Análogamente con los lados restantes

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2(BC)(AC)(CosC)$

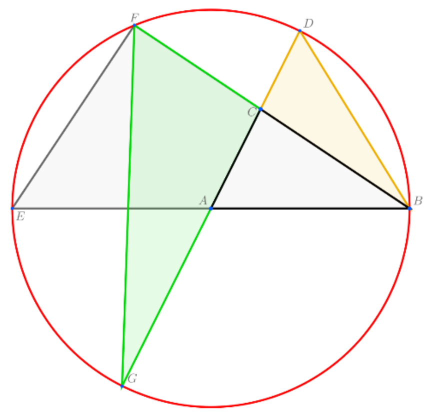


Figura 6. Ley del Coseno por semejanza de triángulos (Caso 1)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 11. Enunciado y Demostración de la Ley del Seno

Enunciado Ley del Seno. Dado cualquier triángulo ABC, con $AB = c, BC = a$ y $AC = b$, tenemos que $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

	Núcleos	Pilares
1	i. ΔABC acutángulo ó ii. ΔABC obtusángulo con $\angle BAC$ obtuso	Dado
2	ΔABC acutángulo	Caso 1
3	Sea $\overline{CD}$: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $D \in \overleftrightarrow{AB}$	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo.
4	$D \in \overline{AB}$	T. Desigualdad – Punto interior
5	Sea $\overline{AE}$: $\overline{AE} \perp \overline{CB}$ y $E \in \overleftrightarrow{AB}$	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo.
6	$E \in \overline{CB}$	T. Desigualdad – Punto interior
7	$\angle CDB$ y $\angle BEA$ rectos	D. Recta perpendicular

8	$sen\ B = \frac{CD}{BC} = \frac{AE}{AB}$, $sen\ A = \frac{CD}{AC}$, $sen\ C = \frac{AE}{AC}$	D. Seno de un ángulo en triángulos rectángulos
9	$\frac{sen\ B}{AC} = \frac{CD}{(BC)(AC)} = \frac{AE}{(AB)(AC)}$,	P. Reales
10	$\frac{sen\ B}{AC} = \frac{sen\ A}{CB} = \frac{sen\ C}{AB}$	P. Sustitución
11	ΔABC obtusángulo con $\angle BAC$ obtuso	Caso 2
12	Sea $\overline{CD}$: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $D \in \overleftrightarrow{AB}$	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo.
13	$D \notin \overline{AB}$ $D \in \overrightarrow{BA}$	T. Desigualdad – Punto interior
14	$B - A - D$	T. Desigualdad - Interestancia
15	$m\angle CAD = 180 - m\angle CAB$	T. Par lineal y D. Ángulos suplementarios
16	Sea $\overline{AE}$: $\overline{AE} \perp \overline{CB}$ y $E \in \overleftrightarrow{CB}$	T. Existencia de recta perpendicular por punto externo.
17	$E \in \overline{CB}$	T. Desigualdad – Punto interior
18	$\angle CDA\ y\ \angle BEA$ rectos	D. Recta perpendicular
19	$sen\ B = \frac{CD}{CB} = \frac{AE}{AB}$, $sen\ (180 - \angle CAB) = \frac{CD}{CA}$, $sen\ C = \frac{AE}{CA}$	D. seno de un ángulo en triángulos rectángulos
20	$sen\ (180 - \angle CAB) = sen\ A$	P. Reales
21	$sen\ A = \frac{CD}{CA}$	P. Sustitución
22	$\frac{sen\ B}{CA} = \frac{CD}{(CB)(CA)} = \frac{AE}{(AB)(CA)}$,	P. Reales
23	$\frac{sen\ B}{CA} = \frac{sen\ A}{CB} = \frac{sen\ C}{AB}$	P. Sustitución

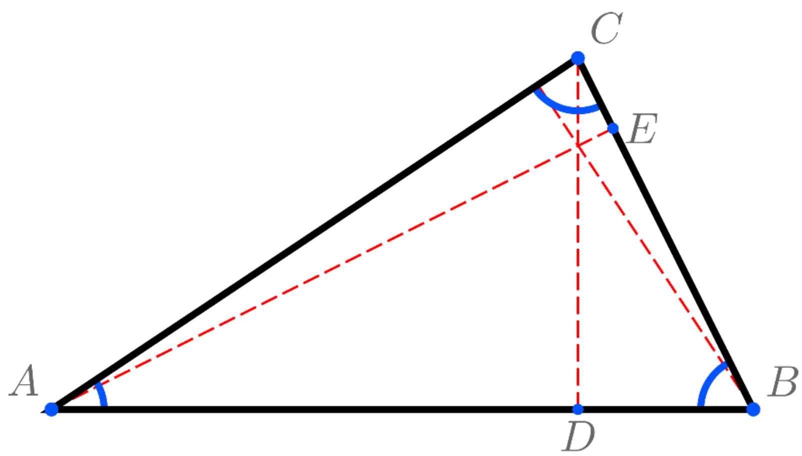


Figura 7. Ley de Senos

Fuente: Elaboración propia

Argumentos a partir de propiedades métricas de la circunferencia

Similar a los argumentos anteriores, estos privilegian la relación que hay entre las longitudes de los lados. En este caso, esta relación se da mediante propiedades geométricas de la circunferencia; estas particularmente se ven reflejadas de fondo en las demostraciones anteriores de la Ley del Coseno (Tabla 10) que dan pie a la congruencia de ángulos, logrando la semejanza mediante estas. Por otra parte, estas semejanzas dan lugar a introducir el T. Potencia de un punto. Este teorema nos dice lo siguiente:

> **Teorema Potencia de un punto.** Sea P un punto y sea una recta que pase por P que interseque a una circunferencia en A y B, el producto de la longitud de los segmentos PA y PB es constante (dicho producto se denomina potencia de P). Si la recta que pasa por P es tangente a la circunferencia, entonces esta constante estará dada por el cuadrado de la medida del segmento cuyos extremos son el punto de tangencia y P.

El Teorema Potencia de un punto nos permite economizar las demostraciones encaminadas a la semejanza que hemos expuesto anteriormente, dado que, la demostración de este teorema está implícita por una parte en la Tabla 10 (ver pasos 12 al 16, cuando el punto se encuentra en el interior de la circunferencia y pasos del 31 al 35, cuando el punto está en el exterior de esta); por otra parte, en la Tabla 8 creando circunferencias con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (ver Figura 8), se ve reflejado el caso donde la recta es tangente a la circunferencia y su demostración está dada en los pasos del 5 al 7 de la demostración de la tabla (poner lo que corresponda)

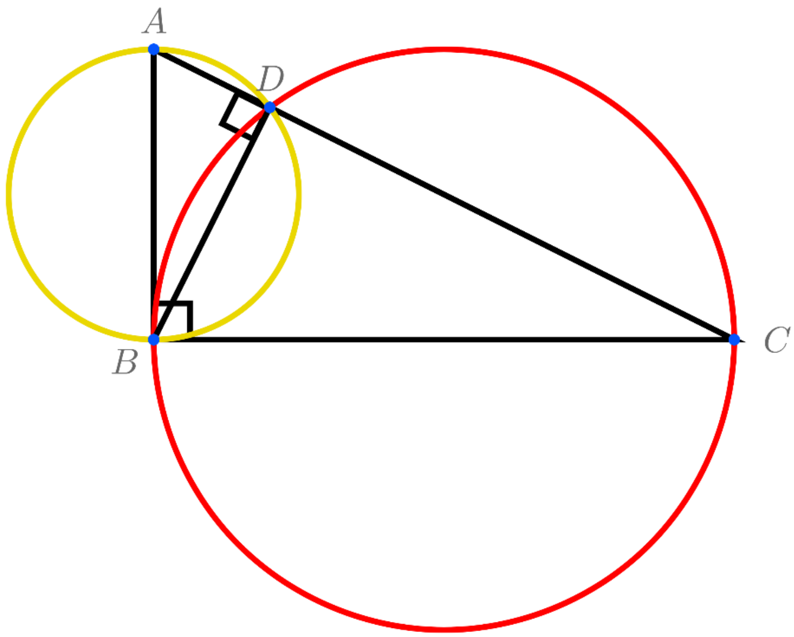


Figura 8. Teorema de Pitágoras por el T. Potencia de un Punto

Fuente: Elaboración propia

2.2.5.2 Argumentos dinámicos

Un argumento que se base en una transformación de los objetos para verificar una cierta propiedad se denomina argumento dinámico o transformacional (Torres, 2017). Las conocidas pruebas sin palabras, pruebas visuales o mostraciones de Roger Nelsen publicado en 1993 son un ejemplo de este tipo de argumentos. Con la incursión de los softwares de geometría que posibilitan el "movimiento" de representaciones gráficas de los objetos, este tipo de argumentos se han potencializado y ganado un espacio en procesos educativos por cuanto facilitan la visualización de la transformación de los objetos mediante el mencionado "movimiento" de objetos en las correspondientes representaciones. Vale recordar que los softwares de geometría dinámica son un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Este recurso se fundamenta en la tecnología y las herramientas proporcionadas por el entorno computacional, las cuales permiten, a través del dinamismo, hacer un seguimiento de transformaciones de objetos que permiten entender de mejor manera el abordaje tanto geométrico como algebraico presentes en un argumento (Barrantes, Rodríguez y López, 2021).

Las demostraciones que presentamos en la sección previa son susceptibles de ser presentadas como pruebas visuales (o mostraciones) mediante este tipo representaciones dinámicas proporcionadas por este tipo de softwares. *Manim*, software protagonista de este trabajo de grado (que describimos a profundidad en la siguiente sección), es una herramienta que permite crear este tipo de representaciones, privilegiando la visualización y el movimiento de objetos geométricos y representaciones simbólicas de estos.

En los capítulos 3 y 4 presentamos la manera como estas pruebas dinámicas fueron creadas y describimos el sentido de presentarlas de esta manera. Invitamos al lector a visitar la página web que diseñamos (https://brianstiffchacon.wixsite.com/fcm-matematicas) la cual contiene, en videos, las pruebas dinamizadas de aquellas que presentamos en la sección previa.

2.2.6 Principales representaciones

Presentada esta información podemos indicar que las principales representaciones que están presentes en el recurso virtual (página web) son algebraicas, y gráficas dinámicas. Son transformaciones animadas, que permiten vislumbrar diferentes relaciones que apoyan los argumentos. Al usar el *software Manim*, pretendemos privilegiar la articulación entre estos tipos de representaciones, con el fin de promover una mejor comprensión de los argumentos que ilustramos con este recurso.

Las representaciones algebraicas nos permitieron expresar todas las magnitudes que resultaban útiles al momento de solucionar problemas, además de resolver estos mismos mediante la manipulación de propiedades de los números reales.

Las representaciones gráficas dinámicas resultaron útiles en una gran variedad de aspectos, siendo uno de los más destacables la “exploración”, que consistía en la ubicación conveniente de puntos mediante el tanteo hasta encontrar una posición que cumpliera las condiciones que requería, implícitamente, cada teorema. Además, como mencionamos en la sección anterior, las representaciones gráficas dinámicas nos permitieron mostrar algunos argumentos de forma visual.

Aunque parezca que haya una gran diferencia entre los dos tipos de representaciones, debemos pensar que estas van de la mano en todo el recurso virtual abierto, siendo usualmente una relación que va desde las representaciones gráficas dinámicas, que actúan como punto de referencia para inferir muchas propiedades de los objetos geométricos, hacia las representaciones algébricas que interpretan todas las propiedades obtenidas de las representaciones gráficas.

2.3 COMPONENTES DEL RECURSO VIRTUAL

Nuestro objetivo es diseñar un recurso digital virtual, para nuestro caso, una página web, que promueva el estudio de tres hechos geométricos específicos, siguiendo la idea de espacios de trabajo y de paradigmas de la geometría escolar propuestos por Kuzniak y Rauscher (2014). En ese marco, vimos pertinente usar un software que nos posibilite una presentación distinta a la tradicional de dichos objetos, que no solo vincule representaciones dinámicas, sino que presente las situaciones descritas previamente y los argumentos visuales.

Así las cosas, en este apartado incluimos las etapas que se deben tener en cuenta al momento de crear una página web. Por otra parte, proporcionamos una descripción del software *Manim* en la que exponemos para qué se utiliza, qué programas necesita para crear textos, imágenes y videos, algunos aspectos básicos de lo que implica programar en *Manim*, cómo funciona la renderización de los videos y cuáles son algunos comandos del llamado a escena de *Manim*.

2.3.1 Características de videos educativos

Algunas características que deben tener los videos educativos son propuestas por Suárez y Vallin (2017). Nosotros procuramos tenerlo en cuenta para la creación de los videos y de la página web. Estos elementos son:

- Está diseñado para cumplir un objetivo formativo.
- La duración debe ser corta, de 1 a 6 minutos, aunque habría que valorar el tipo de contenido.
- El contenido cuenta con una estructura lógica y coherente.
- Cuenta con claridad en la presentación de los contenidos, es decir, cuida que los receptores no tengan dificultad en el seguimiento de los conceptos.
- Es creativo, dinámico y motivador.
- La función básica del texto, escrito o hablado es completar la imagen.

- Facilita el recuerdo y la comprensión de la información.
- Promueve la reflexión, imaginación e intuición en el alumno, para favorecer el autoaprendizaje.
- Incluye gráficos estáticos y dinámicos, como elementos que facilitan la comprensión y el seguimiento de la información.
- Genera procesos de micro comunicación originales.

Presentamos en la Tabla 12, cuatro aspectos centrales que creemos agrupan estas características e indicamos a que apunta cada uno respecto a los CI:

Tabla 12. Aspectos centrales de los videos y su relación con los CI

Aspectos centrales	Descripción	Criterios de Idoneidad	Códigos
Coherencia temática	Es de suma importancia tener en cuenta el propósito, la coherencia y la forma de relacionar cada objeto, situación y lenguaje utilizado en los videos, apuntando a un desarrollo continuo y sin saltos.	Epistémicos	ES – EL – ER
Pertinencia educativa	Las situaciones deben presentar de manera significativa cada objeto y conectar diferentes tipos de argumentos que sean acordes al nivel de los posibles usuarios con base en los lineamientos curriculares; además, deben en lo posible conectarse con aspectos reales o semi-reales.	Epistémicos, Cognitivos y Ecológicos	CC – EcA – EcC
Interactividad y participación	Los videos deben, a quien los ve, promover interactividad, motivación e interés, indagación o curiosidad, y la resolución de problemas, relacionados con los objetos de interés.	Interaccionales y cognitivos-afectivos	IR – EL
Calidad audiovisual	Los videos deben ser creativos, presentando argumentos dinámicos, que mantenga la atención de quien los ve, procurando una presentación clara de los contenidos para que los usuarios no encuentren dificultades	Mediacionales y Epistémicos	MR – ERS – EA

	en el seguimiento de los conceptos; además, se debe asegurar que tengan una duración corta, para evitar la dispersión.

Dado que nuestro recurso requiere una estructura que permita al usuario cierta fluidez y que sea de facil entendimiento, creemos pertienente extender los aspectos señalados en la tabla 12 a las cinco estapas propuestas por Garrett (2011) que procuran la idoneidad en cuanto a la interacción del usuario con la misma:

- La estrategia: Es donde se describen las posibles necesidades que tiene el usuario al entrar en la página y los objetivos que tenemos nosotros como proveedores con la página.
- El alcance o contexto: Son los elementos y características específicas de la página que nos facilitan el cumplir con las necesidades y objetivos de esta.
- La estructura: Esta se refiere a cómo se articula y distribuye el contenido presentado en la página y su interacción con los diferentes elementos, para que le sea posible al usuario seguir de manera cómoda el contenido presentado.
- El esquema: Esto va más relacionado con donde se ubica cada elemento de la página (botones, fotografías, textos, etc.), con el propósito de optimizar la navegación del usuario.
- La superficie o diseño visual: Como su nombre lo indica, esto se relaciona a la parte estética de la página, su atractivo visual, que llame la atención del usuario.

Estas etapas fueron fundamentales al momento de estructurar nuestro recurso virtual. Sin embargo, en el Capítulo 3 profundizamos sobre cómo tuvimos en cuenta cada aspecto central y qué hicimos para cumplir con cada uno.

2.3.2 Descripción del software Manim

El software *Manim* lo usamos principalmente para crear los videos e imágenes de la mayor parte del recurso virtual. Más precisamente, con el software se ilustran principalmente las figuras geométricas, los argumentos y las situaciones problema; por medio del dinamismo que este proporciona (relativo a rotaciones, traslaciones y modificaciones visuales) pretendemos dar un mejor entendimiento de cada uno de estos aspectos. En lo que sigue, presentamos una breve descripción del software y cómo se programa en él.

Manim es un software creado por Grant Sanderson (matemático graduado de la Universidad de Stanford). Este software está enfocado en temas de índole matemático principalmente, y tiene el propósito de generar videos que apoyen con animaciones de tipo ilustrativo, el estudio de objetos. *Manim* permite crear, animar y dinamizar todo tipo de objetos matemáticos, como figuras geométricas, funciones, ecuaciones, vectores, matrices, tanto en el espacio bidimensional como tridimensional.

Dicho lo anterior, todo esto es posible a través de líneas de comando que utilizan principalmente el lenguaje Python; *Manim* utiliza también otros lenguajes y programas como LaTeX, PyCairo, FFmpeg y SoX. LaTeX, por ejemplo, es el que le permite a *Manim* interpretar las ecuaciones y textos Matemáticos que se quieran presentar, utilizando los comandos predeterminados que LaTeX ofrece. Por otro lado, *Manim* convierte todas las líneas de comando que se escriben en Python a un lenguaje que PyCairo pueda interpretar y este se encarga de crear cada escena por separado; luego FFmpeg articula todas las escenas para crear el video. En la Figura 9 ilustramos cómo interactúan estos programas al momento de renderizar el video; por último, SoX es el que soporta o se encarga de incluir he interpretar los audios que el usuario quiera colocar en cada video.

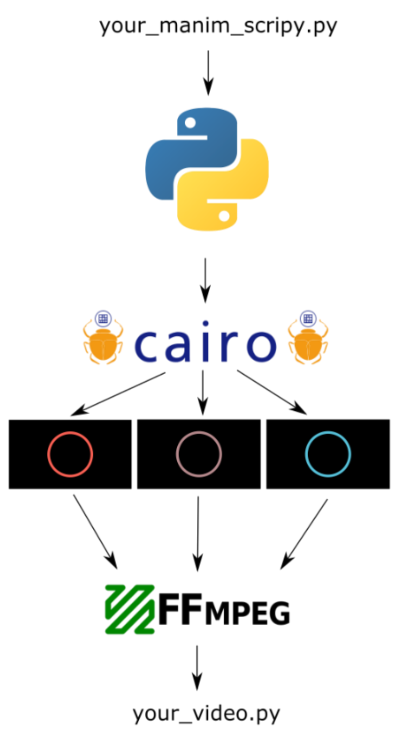


Figura 9. Esquema del funcionamiento interno de Manim

Fuente: docs.devtaoism.com/docs/html/contents/_1_basic_elements.html

2.3.2.1 Estructura general de Manim y renderización de los videos

Para entender mejor cómo funciona *Manim* es necesario saber que este software realmente es un conjunto de librerías que Python utiliza con el fin de saber qué hacer con cada línea de comando. Por este motivo, para comenzar a programar con *Manim*, se debe primero hacerle saber a Python que debe utilizar dichas librerías. Luego de esto, se debe crear una clase de tipo escena; esta clase, en términos simples, nos da una hoja en la que vamos a poder crear todo. A ella debemos colocarle el nombre que queramos y definir o crear el método con el que vamos a construir cada animación. Toda la estructura mencionada anteriormente se puede ver en la Figura 10.

```python
from manim import *

class Nombredeclase(Scene):
    def construct(self):
```

Figura 10. Estructura inicial para comenzar a programar con Manim

Fuente: Elaboración propia

Además, en un mismo archivo de Python (.py) podemos crear más de una clase, con diferentes nombres que sirven como hojas separadas; en ellas, se pueden hacer animaciones nuevas sin afectar las otras clases y a cada clase se le debe definir un método para construir las animaciones.

Para renderizar[3] y crear nuestros videos se necesita ir al terminal de Python, donde debemos escribir un comando específico para decirle a Manim qué debe hacer con los comandos al momento de crear los videos. Estos comandos varían dependiendo de lo que necesitemos por medio de las *Flags,* pero su estructura general es la siguiente: *Manim -pql NombreArchivo.py Nombreclase*; este comando, como se aprecia anteriormente, contiene el nombre de la librería "*Manim*" que se va a ejecutar sobre el archivo.py. Seguido a esto vienen los *Flags*, los cuales permiten modificar varios

[3] Renderizar un vídeo es un proceso técnico que forma parte de la edición final. Gracias a este proceso, podemos exportar el video de manera correcta para su exhibición y con un formato que se adapte a un medio en concreto.

aspectos de la creación del material (*e.g* Mayor o menor resolución, renderizar únicamente una parte del código, cambiar el nombre del archivo de salida, aumentar o disminuir los FPS, etc). En el ejemplo de etiqueta anterior, la "*p*" le indica a Python que se debe iniciar automáticamente el video o imagen cuando finalice el renderizado; el "*ql*" le dice al programa que debe crear el video en baja calidad. Actualmente, se cuenta con cinco calidades predeterminadas diferentes.

Un dato importante es que el tiempo de renderizado aumenta dependiendo principalmente de la calidad del video (excluyendo la potencia del computador). Por último, en el comando se debe nombrar el "archivo.py" donde se encuentra (y también se escribe) la "clase-escena" que vamos a renderizar.

Existen otras *Flags* que se pueden utilizar, pero no profundizamos en estas ahora mismo; sin embargo, más adelante hablamos en dénde podemos aprender a utilizar otras opciones del renderizado. Todos estos videos e imágenes se guardan en unas carpetas que tienen el nombre del archivo y la clase.

2.3.2.2 Comandos de llamado a escena de Manim

En Manim hay diferentes objetos que se pueden mostrar en la pantalla y que en este ámbito son llamados principalmente como Mobjects[4] e ImageMobjects[5]. Todos estos se pueden agregar a la pantalla mediante el método *self.add*. Este método agrega en la pantalla el objeto sin ninguna animación; se utiliza principalmente para crear imágenes, ya que, al renderizar el código *Manim* interpreta lo que se va a crear como una imagen al no haber ningún tipo de animación.

---

[4] Mobjects: Esta palabra es la abreviación en ingles de objetos matemáticos (*e.g.* puntos, funciones, figuras geométricas, áreas, etc…).
[5] ImageMobjects: Es un subconjunto de los Mobjects y son imágenes de cualquier tipo como PNG, JPG, etc.

Figura 11. Función del comando self.add

Fuente: Elaboración propia

Con respecto a las animaciones, existen dos métodos diferentes para poder crearlas, el *self.play* y los *Updaters*; en la primera, los tipos de animaciones que están predefinidos dentro del método son los de creación, indicación, eliminación y transformación; los *Updaters* son animaciones que permiten actualizar en todo momento (dentro de los videos) los frames (o marcos) de un objeto, logrando así que este cambie constantemente según se necesite. El método *self.wait* es un comando que le indica a Manim un tiempo de espera, que puede colocarse entre cada animación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo presentamos la metodología utilizada para la realización de este trabajo, la cual es en sí nuestro producto final. Específicamente, mostramos cómo se elaboró la página web, los elementos que la componen (videos, publicaciones e información relacionada) y la ruta de abordaje que sugerimos, teniendo en cuenta los referentes de orden didáctico y los cuatro aspectos centrales propuestos con anterioridad. Con ello en mente, la metodología cuenta con tres fases. En la Fase 1 precisamos con detalle la manera en la que utilizamos los referentes de orden didáctico para seleccionar el contenido que queríamos presentar en la página web y los ETG que pretendimos promover mediante esta.

En la Fase 2, describimos el proceso de elaboración del recurso virtual. Repartimos esta fase en tres sub-fases. La primera sub-fase alude a la creación y estructuración de la página web; la segunda sub-fase se concentró en el proceso de elaboración de los videos Manim: ello implicó la elaboración de los libretos, la precisión de los programas de edición y la programación propia relativa a la construcción de los videos mismos; la tercera sub-fase refiere a la construcción y el contenido de carácter informativo de las publicaciones.

Finalmente, en la última fase describimos cómo establecimos una ruta de abordaje que sirve como guía para que un profesor promueva el estudio de los objetos expuestos en el recurso; esta ruta procura expresar una forma que, a nuestro parecer, es la más idónea para sacar el máximo provecho al material creado.

3.1 Fase 1. Precisión de los referentes didácticos

En la Fase 1, precisamos una justificación de la necesidad del recurso virtual y le da sentido al mismo por medio de los espacios de trabajo geométrico dados por las geometrías I y II propuestas por Kuzniak (2006). En lo que sigue, describimos la utilidad de las geometrías elementales y cuáles de estas pretendemos trabajar en el recurso virtual dado el contexto de nuestro TG. Luego damos respuesta al cómo tuvimos en cuenta cada componente e indicador al momento de crear todos los elementos del recurso virtual.

3.1.1 Precisión de los tres Espacios de Trabajo Geométrico

Al iniciar con el desarrollo de este trabajo, parecía menester especificar algunos parámetros que nos indicaran todo aquello que se debería tener en cuenta al momento de la creación de un recurso virtual abierto. Sin embargo, fue necesario recordar que dicho recurso tiene el propósito de servir como material de enseñanza y aprendizaje de teoremas que se desarrollan en la geometría; siendo así, encontramos que los paradigmas planteados en Kuzniak (2006) nos proporcionaban buena parte de aquellos parámetros que buscábamos.

Teniendo en cuenta que el recurso virtual está dirigido a sujetos que no tienen necesariamente un amplio conocimiento de los sistemas axiomáticos y que, además, nuestro recurso virtual tiene como eje central a los videos, descartamos el paradigma de geometría axiomática formal. Así, el ETG de geometría fragmentada no se sigue a cabalidad. Habiendo precisado que los paradigmas de geometría natural y axiomática natural son aquellos que nos brindan los parámetros para este trabajo, pasamos directamente a observar lo que necesitaba el recurso virtual para ser adecuado desde el punto de vista de los paradigmas de las geometrías elementales, cumpliendo así con las condiciones que enmarcan los ETG de geometrías establecidas I y II.

Inicialmente identificamos que los ETG de geometrías I y II requieren, de un proceso de percepción de la “realidad”. Sin embargo, esto no es del todo posible en un contexto virtual; no obstante, identificamos que es plausible suplir esta necesidad mediante la experimentación de situaciones semi-reales en los videos que hacen parte del recurso virtual.

Recordando algunas de las características que nos brinda la geometría I para un ETG adecuado, encontramos que esta tiene una fuerte conexión con la realidad, además, muchos de los argumentos que se presentan dentro de este paradigma son basados en la percepción.

Teniendo esto en cuenta, nuestro trabajo cumple en gran medida con las dos características mencionadas anteriormente. Prueba de ello son las situaciones problema, de carácter semi-real; además, algunos de los argumentos y pruebas que son usados en la exploración están basados específicamente en las imágenes, representaciones y animaciones que nos proporciona Manim. Con lo anterior podemos ver que el ETG de geometría I convive y fundamenta gran parte de este trabajo, sobre todo en lo concerniente al material audiovisual producido con Manim en los videos que próximamente serán llamados “problemas, exploración y solución”.

Primordial es recordar que una de las características que diferencia las geometrías I y II, es que la geometría II exige un sistema teórico, que puede ser incompleto, y que sus pruebas y argumentos se basan en este. Teniendo en cuenta lo anterior, es posible observar la influencia del paradigma de geometría II y, por consiguiente, del ETG que este fundamenta, en los aspectos de índole geométrico involucrados.

El sistema teórico de referencia presente en la página -un modelo de geometría euclidiana propuesto por Samper y Molina, 2013, que se basa en la propuesta de Birkhoof (1932)-, además de permitirnos cumplir con un parámetro de la geometría II, ayuda a maestros y estudiantes a tener un contexto adecuado de las definiciones y hechos geométricos que justifican partes de los videos. En cuanto a los videos de posteriormente llamados "Argumento dinámico del teorema", estos están fuertemente influenciados por el sistema teórico de referencia, siendo este primordial para entender los argumentos presentados. Con lo anterior, podemos observar que el paradigma de geometría II, no exigió añadir información externa a los videos para potenciarlos. Además, nos ayudó a entender la necesidad de flexibilizar un poco las pruebas de los hechos geométricos principales de este trabajo, esto mediante el uso de argumentos visuales generados con Manim.

3.1.2 Precisión de los indicadores de idoneidad didáctica

Los criterios de idoneidad mencionados en el capítulo anterior nos fueron de utilidad para la creación del material y del recurso virtual; con la idoneidad epistémica pudimos determinar, en primera instancia, cuántos videos eran necesarios para lograr un desarrollo idóneo de cada uno de nuestros objetos protagónicos, permitiéndonos vislumbrar un camino que responde a cada uno de los componentes. En segunda instancia, en los videos, procuramos presentar diferentes tipos de argumentos y a su vez promover la generación de argumentos por parte de los usuarios. La idoneidad cognitiva, nos dio paso a pensar que conocimientos previos son necesarios para el aprendizaje de cada objeto y, en consecuencia, dentro del recurso, mencionamos los conocimientos previos que deben tener los usuarios, para poder abordar el material. La idoneidad interaccional, fue base para estructurar de mejor manera cada video haciendo énfasis en los tiempos, la voz y en la forma de captar la atención de los usuarios. Además, dentro del recurso virtual creamos un espacio (o comunidad) donde los usuarios puedan resolver sus dudas. La idoneidad mediacional, realmente se suple gracias a que todo el material presentado esta dentro de un recurso virtual y cada video introduce diferentes tipos de argumentos, lenguajes (representaciones) y relaciones entre objetos. Por último, la idoneidad ecológica, nos llevó paso a inspeccionar por medio de las directrices curriculares a qué grados va dirigido el material; esto toma mayor importancia en el siguiente capítulo, con las sugerencias para su respectivo abordaje.

Dicho lo anterior, en este apartado concretamos los CI descritos en el capítulo 2 de forma particular a los objetos principales de nuestro TG, atendiendo a los componentes de las cinco facetas organizados en las Tablas 13 a 17, presentando los componentes de cada idoneidad y el cómo se expresa en todo el recurso virtual.

Idoneidad epistémica. Se refiere a la coherencia y pertinencia de los contenidos educativos presentados en el recurso virtual.

Tabla 13. Precisión de indicadores de la Idoneidad Epistémica

Componentes	Precisión de indicadores	Código
Situaciones – problemas	Se presentan tres situaciones similares que conllevan al estudio de los objetos principales en los cuales gira nuestro TG (Teorema de Pitágoras, Ley de Seno y Ley de Coseno).	ES
Argumentos	Procuramos que los argumentos se presenten mediante dos versiones de los videos en Manim, uno más elaborado que el otro, por cuanto uno pretende que el usuario haga la labor de argumentar cada acción, mientras que el segundo presenta una información más completa de las acciones realizadas.	EA
Lenguajes	En el recurso virtual se manejan, las representaciones graficas estáticas, graficas dinámicas y el lenguaje simbólico tanto en los videos, como en las publicaciones y sugerencias para los diferentes usuarios.	EL
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Se explicitan las definiciones y propiedades presentes en los argumentos mostrados de cada uno de los objetos protagónicos	ERS
Relaciones	Se presenta cada objeto protagónico mediante una situación específica, partiendo desde lo experimental de las matemáticas a lo concreto, para generar una necesidad de introducción de los objetos. Además, se cuenta con argumentos articuladores, que permiten visualizar una relación entre estos. Por otra parte, mediante la manipulación que nos permite *Manim* hemos transformado las situaciones problema, para deslumbrar los casos en que es mejor utilizar un objeto matemático u otro.	ER

Idoneidad cognitiva. Es el grado en que los contenidos implementados son adecuados para los usuarios.

Tabla 14. Precisión de indicadores de la Idoneidad Cognitiva

Componentes	Precisión de indicadores	Código
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos	En el recurso virtual realmente no podemos partir de lo que han estudiado con anterioridad los estudiantes; por este motivo, procuramos	CC

elementos que se utilizan para la idoneidad epistémica)	explicitar los conocimientos previos que son necesarios para abordar cada objeto matemático.	

Idoneidad interaccional. Se entiende como el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favoreciendo la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas.

Tabla 15. Precisión de indicadores de la Idoneidad Interaccional

Componentes	Precisión de indicadores	Código
Interacción recurso-discente	Procuramos que todo el material creado se presente al usuario de manera articulada y clara, resaltando una relación situación-objeto. Por otra parte, en los videos se dan tiempos de espera adecuados entre cada acción, que permiten un mejor entendimiento de las acciones realizadas; también, por medio de la dinamización de los argumentos presentes en los videos, se pretende captar la atención de los usuarios. Como complemento a la introducción de cada objeto, invitamos a los usuarios a resolver las situaciones planteadas en los videos. Por otra parte, hay fragmentos en los videos que invitan al usuario a complementar acciones o pasos de las demostraciones que se están presentando El recurso virtual cuenta con un espacio de interacción que permite a la comunidad escribir sus preguntas, estas pueden ser respondidas por usuarios o por nosotros los creadores.	IR

Idoneidad mediacional. Supone el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos didácticos y tecnológicos que promuevan la construcción de conocimientos para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tabla 16. Precisión de indicadores de la Idoneidad Mediacional

Componentes	Precisión de indicadores	Código
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	El material se encuentra en un recurso virtual (informático) que permiten mediante las sugerencias, situaciones, objetos y videos, introducir lenguajes, procedimientos, argumentos y reglas adaptadas.	MR

Idoneidad ecológica. Es el grado en que la acción formativa es adecuada dentro del entorno, esto se refiere a la adaptación del recurso educativo de manera que responda a las características y necesidades de los estudiantes.

Tabla 17. Precisión de indicadores de la Idoneidad ecológica

Componentes	Indicadores	Código
Adaptación al currículo	Se tuvieron en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (2016) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para determinar los grados a los que van dirigidos	EcA

	los objetos protagónicos. Estos objetos son accesibles para los grados de 9° (Teorema de Pitágoras) y 10° (Ley de Seno y Coseno).	
Apertura hacia la innovación didáctica	Dada la naturaleza de nuestro TG, esta propuesta nos permite directamente entrar en el campo de la innovación didáctica mediante el recurso mismo.	EcI
Conexiones intra e interdisciplinares	Se usan los objetos matemáticos en situaciones no matemáticas	EcC

3.2 Fase 2. Diseño y creación del recurso virtual

Enseguida, describimos las sub-fases que fueron esenciales para la creación del material y el recurso virtual. En la primera sub-fase se describe la herramienta que utilizamos para crear la página web y cómo se involucran los cuatro aspectos centrales (*Coherencia temática, Pertinencia educativa, Interactividad y participación, Calidad audiovisual*) para definir cada sección que conforma el recurso virtual; además, de qué manera expandimos, con las cinco etapas propuestas por Garrett (2011), el aspecto relacionado a la interactividad del usuario con la página. En la segunda sub-fase presentamos los aspectos relacionados a la creación de los videos; esto incluye su código de programación, sus libretos, los programas de edición utilizados principalmente para añadir audios a los videos y el papel que tuvieron los cuatro aspectos centrales para la creación de los mismos.

3.2.1 Subfase 1. Elaboración de una página web mediante la herramienta digital Wix

Para crear una página web usamos las cinco etapas dadas por Garrett (2011) que nos brindan un horizonte o un camino que debemos considerar para ofrecer al usuario la mejor interacción posible. Estas etapas nos ayudaron a cubrir algunos aspectos de los CI, mayormente la idoneidad interaccional; no obstante, aún es necesario profundizar sobre cómo fueron tenidos los demás criterios y qué tuvimos en cuenta para hacerlo; por este motivo utilizamos también los cuatro aspectos mencionados en la sección 2.3.2 relacionados a las características de los videos educativos, que nos permiten responder a los demás criterios de mejor manera. A continuación, abordaremos esos asuntos.

La estrategia (IR – EcA): Esta corresponde al poder describir las posibles necesidades que tiene el usuario al entrar en la página y los objetivos que tenemos nosotros al crearla. Concebimos que el TG aborda las posibles necesidades que podría tener un usuario en relación con aspectos de orden matemático (situaciones, procedimientos, reglas, argumentos, lenguajes) relativos a los objetos protagónicos (T. Pitágoras, ley del seno y del coseno); así mismo, podría suplir necesidades del profesor a proponer un recurso que podría usar para promover el aprendizaje de esos aspectos en un proceso de instrucción que él oriente. Esto, mediante un enfoque que promueve las Geometría I y II en el sentido descrito en secciones anteriores.

El alcance o contexto (IR - ER): Nuestro recurso apunta al estudio de diferentes tipos de objetos matemáticos asociados a los teoremas específicos, en el marco de un ETG que apunta a la resolución de problemas y al sustento de la validez de tales teoremas (ver sección de referentes matemáticos). Por otro lado, pretende ser una herramienta que pueda usar el profesor como complemento del proceso de instrucción bien sea en la clase o en actividades extraclase; de ninguna manera pretende sustituirlo.

La estructura (IR): La página cuenta con siete apartados; cada uno trata de suplir un aspecto diferente con miras a satisfacer criterios para su diseño. El primer apartado (Inicio), contiene una breve descripción del recurso virtual y lo que se puede encontrar dentro de este, para que el usuario pueda conocer el contenido de la página. El segundo (Blog), muestra todas las publicaciones subidas exclusivamente por nosotros los creadores y en donde se encuentra el material creado (separado por publicaciones), esto incluye los videos referentes a las situaciones y los videos de argumentación dinámica de cada objeto protagónico, ordenados por fecha de salida, donde el usuario puede interactuar con cada publicación dejando un comentario, una reacción o compartiendo el contenido. Así mismo, puede entrar en cada publicación, para interactuar con la comunidad. El tercer apartado (Comunidad) se centra en fomentar la interacción entre los usuarios; allí, ellos podrán postear sus inquietudes, respuestas y comentarios El cuarto apartado (Portafolio), se encuentran dividido por temas (en nuestro caso objetos protagónicos), cada uno con las publicaciones hechas en el Blog. El quinto (Consejos), contiene las sugerencias de abordaje que creemos, son pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos expuestos en la página (estas sugerencias serán abordadas con mayor profundidad en el siguiente capitulo junto a una descripción detallada de cada apartado mencionado anteriormente). Por ultimo los dos últimos apartados (Nosotros y Contacto), se describe el objetivo del recurso virtual, quienes son sus creadores y una forma de contacto vía Email, para un mensaje más privado.

A continuación presentamos en la Tabla 18 las secciones de la pagina web y como estas atienden a los cuatro aspectos mencionados en la sección 2.3.2, quá abarca cada CI y los codigos con mayor relación.

Tabla 18. Apartados de la página web y su relación con los aspectos centrales

Sección	Aspectos centrales	Códigos
Inicio	***Calidad audiovisual:*** Procuramos que esta sección se presente al usuario de manera articulada y clara, permitiéndole ver y disponer de un resumen de todas las demás secciones que conforman el recurso.	EL – ER
Blog	***Coherencia temática:*** Cada publicación se relaciona y articula con las demás. ***Pertinencia educativa:*** Se plasma en la descripción de cada publicación los conocimientos necesarios requeridos para abordar las situaciones y se parte de un sistema teórico de referencia determinado por los aprendizajes dados en lineamientos curriculares de los grados a los que van dirigidas las publicaciones. ***Interactividad y participación:*** El usuario puede comentar, compartir y reaccionar a las publicaciones.	EL – ERS – ER – IR
Comunidad	***Interactividad y participación:*** En esta sección los usuarios pueden interactuar entre sí con mayor libertad, proponiendo temas de discusión o preguntas que pueden ser respondidas por usuarios y creadores.	IR
Portafolio	***Coherencia temática:*** Se presentan todas las publicaciones divididas por objeto matemático, dando prioridad a la relación que hay entre publicaciones. ***Calidad audiovisual:*** Procuramos que esta sección presente al usuario de manera articulada y clara las publicaciones que estén relacionadas a un objeto matemático especifico.	ER
Consejos	***Coherencia temática:*** Se sugieren caminos de abordaje que cumplen las condiciones para ser idóneos. ***Pertinencia educativa:*** Se procura trazar un camino a favor del entendimiento y el aprendizaje de los usuarios, teniendo en cuenta las relaciones existentes de cada publicación y al nivel educativo al que van dirigidos	EcC – EcA – CC – MR
Contacto y Nosotros	***Interactividad y participación:*** Los usuarios pueden enviar un correo con preguntas específicas, que serán respondidas directamente por nosotros; además, los usuarios podrán saber más sobre qué es y para qué es la página web	IR
Búsqueda	***Calidad audiovisual:*** El buscador le permite al usuario disponer de cualquier elemento del recurso virtual, para ir al apartado o publicación que necesite.	IR

El esquema y la Superficie (IR): Cada botón texto o fotografía está diseñado con el fin de ser agradable a la vista y de fácil acceso, los colores del recurso están dentro de una gama de blancos y negros.

Wix como herramienta para crear una Página web

La herramienta virtual Wix, fue la forma en la que logramos crear el recurso virtual y que nos permitió estructurar la superficie. Esta plataforma permite a las personas crear una página web de cualquier tipo (blogs, micrositios, portafolios, sitios educativos, wikis, foros, etc), sin que tengan conocimientos profundos o específicos en esta área; este simplifica el proceso de construir un sitio web, mediante un editor que es intuitivo y que ofrece una amplia gama de herramientas y características para adaptarse a las diferentes necesidades del usuario. Por otra parte, Wix provee los servicios de hospedaje web; esto quiere decir que al momento en que el usuario decida hacer pública su página de forma gratuita, está se mantendrá en el dominio de Wix, proveyendo su etiqueta en el URL. Si el usuario quiere que el dominio de su página le pertenezca al 100% este debe comprar un dominio a través de Wix. A continuación, se podrá apreciar en la Figura 12 la estructura del editor de Wix.

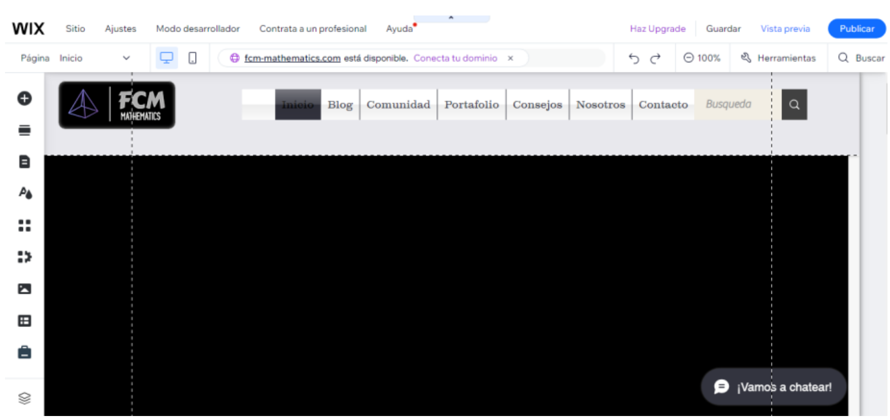


Figura 12. Estructura del editor Wix

3.2.2 Subfase 2. Proceso de creación del material audio visual

Para crear los videos Manim establecimos diferentes elementos a lo largo de los dos primeros capítulos que nos ayudaron a determinar todos los aspectos que deben suplir cada uno de los videos; lo primero que se determinó fue los tipos de videos necesarios para un aprendizaje idóneo.

Esto lo determinamos, por una parte, gracias a los cuatro aspectos mencionados en la sección 2.3.1, respecto a la *Coherencia temática (1)*, *Pertinencia educativa (2)*, *Interactividad y participación (3)*; y *Calidad audio visual (4)*. Por otra parte, para un ETG adecuado encontramos que la geometría I tiene una fuerte conexión con la realidad y que la geometría II se desconecta moderadamente de esta y exige un sistema teórico, que puede ser incompleto. Por estos motivos, los videos diseñados apuntan a dos escenarios diferentes (uno relativo a la Geometría I y el otro la Geometría II). El primero alude a las situaciones problema; para este se diseñaron seis videos, cada uno asociado a uno de los problemas. En estos se indica cómo surge el objeto matemático a través del abordaje de cada problema y qué datos son necesarios para utilizar dicho objeto matemático, dando a su vez solución a los problemas en cuestión. El segundo alude a la presentación de argumentos dinámicos que le dan validez a cada teorema protagonista en nuestro TG (Teorema de Pitágoras, Ley de Sebo y Ley de Coseno); para ello fueron creados doce videos los cuales serán descritos con detalle en el capítulo siguiente. Por lo pronto, indicamos que los videos diseñados fueron clasificados en cuatro tipos, los dos primeros tipos centrados en los videos relativos al primer escenario; los otros dos, relativos al segundo:

- **Situación problema – Exploración:** Estos videos atiende al análisis y la exploración mediante voz en off[6] de una situación problema de la cual surge cada objeto matemático protagonista, dando una relación breve de los datos necesarios para utilizarlo.
- **Situación problema – Solución:** Estos videos presentan la misma situación problema y la solución a la misma explicitando los datos con los que se cuentan y cómo estos se pueden usar, junto con alguno de los Teoremas protagonistas, para establecer la solución.
- **Argumento dinámico del teorema (sin apoyo verbal):** Estos videos presentan únicamente los argumentos dinámicos que dan validez a cada uno de los teoremas protagonistas. No usan voz en off.
- **Argumento dinámico del teorema con apoyo verbal:** Estos videos presentan los argumentos dinámicos, acompañados de una voz en off que explica todos los pasos que dan validez al teorema respectivo.

[6] Voz en off: Es una voz que narra y no pertenece a ninguno de los personajes que aparecen en escena o en las imágenes.

Es necesario aclarar que cada uno de estos videos están autocontenidos; esto quiere decir, que el usuario no necesita ver los demás videos para entender el que está observando. Por este motivo hay elementos que se repiten en cada uno de estos. Considerando que estamos trabajando con tres objetos matemáticos en nuestro TG (Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno), los videos creados por cada objeto son un total de cuatro, siguiendo las cuatro clasificaciones mencionadas con anterioridad; dando un total de doce videos.

En la Tabla 19 presentamos, por cada tipo de videos, la relación con los ETG y los códigos más influyentes relacionados con los CI.

Tabla 19. Tipos de videos y su relación con los cuatros aspectos centrales

	Tipo de videos	**Aspectos centrales**	**Códigos**
Geometría I	*Situación problema – Exploración*	**(1)** El propósito de estos videos es generar la necesidad de introducción del objeto matemático. **(3)** Se hacen preguntas que invitan al usuario a relacionar la cantidad de datos necesarios para hacer mediciones indirectas. **(4)** Se presenta un contexto que ayuda a mantener la atención y facilita el seguimiento de cada acción.	ES – EL – EA – ER – IR – EcC
	Situación problema – Solución	**(1)** El propósito de estos videos es, por un lado, dar solución a la situación problema y por el otro, profundizar en la relación que existe entre las diferentes magnitudes presentes en el objeto matemático y que datos son necesarios para utilizarlo. **(3)** Se hacen preguntas que invitan al usuario a reflexionar sobre el porqué se utiliza específicamente un objeto matemático y que relaciona. **(4)** Se presenta un contexto que ayuda a mantener la atención y facilita el seguimiento de cada acción.	ES – EL – ERS – EA – IR – EcC
Geometría II	*Argumento dinámico si apoyo verbal*	**(1)** El propósito de este video, por un lado, es validar únicamente por medio de argumentos dinámicos el objeto matemático. **(2)** Los argumentos presentes en los videos están en el alcance o van en relación al grado (9°-10°) en el que se pretenden abordar según los lineamientos curriculares. **(3)** Estos videos invitan al usuario a justificar cada acción presente el video. **(4)** Mediante la dinamización de los argumentos (Traslaciones, rotaciones, transformaciones, etc.) se pretende mantener la atención del usuario, haciendo uso de diferentes representaciones que permitan seguir con mayor facilidad cada argumento.	EL – ERS – IR – EcA

Argumento dinámico si apoyo verbal)	**(1)** El propósito de este video, es validar por medio de argumentos dinámicos el objeto matemático, dando la justificación de cada argumento mediante voz en off. **(2)** Los argumentos presentes en los videos están en el alcance o van en relación al grado (9°-10°) en el que se pretenden abordar según los lineamientos curriculares. **(3)** Estos videos se invita al usuario a reflexionar sobre el objeto matemático, su nombre y el porqué de sus igualdades. **(4)** Mediante la dinamización de los argumentos (Traslaciones, rotaciones, transformaciones, etc.) se pretende mantener la atención del usuario, haciendo uso de diferentes representaciones que permitan seguir con mayor facilidad cada argumento.	EL – ERS – EA – ER

Para la creación de todos los videos, se tuvo en cuenta un sistema teórico de referencia, que va en relación con el grado en el que se pretende enseñar cada objeto, esto con el objetivo de que cada argumento del video este en el alcance potencial de los usuarios. -CC-

Con la estructura general de los videos cubierta y el cómo fueron requeridos cada uno de los elementos del capítulo 2, profundizamos en cómo se crearon, en que herramientas tanto digitales como no digitales utilizamos para crear cada uno de los videos, por este motivo, en lo que sigue se presenta el proceso de creación y elaboración de los videos.

3.2.2.1 Recursos digitales, técnicos y logísticos para la creación de los videos

Para la creación de estos videos fueron necesarios tres programas que nos permitieron diseñar y dar vida a cada video, estos son *Manim*, *Audacity* y *OpenShot Video Editor.* Estos programas nos permitieron plasmar de manera audiovisual lo que se tenía planeado y construido en los libretos, permitiéndonos articular todo de manera fluida en cada video. Como en el capítulo anterior ya hemos hablado con mayor detalle del *software Manim*, ahora hablamos de los otros dos programas que hicieron posible la creación total de los videos.

Audacity es una herramienta gratuita que nos permite grabar y editar audios, dándonos la facilidad de subir o bajar los tonos de la voz, regular la entrada de sonido, recortar o silenciar ruidos indeseados y aplicar todo tipo de efectos o de cambios de voz. Esta herramienta fue necesaria para grabar y editar los audios de cada video, con el fin de brindar la mayor calidad posible.

Figura 13. Logo Audacity

Figura 14. Interfaz de OpenShot Video

OpenShot Video Editor es un editor de videos gratuito, sencillo y fácil de utilizar. Este tiene diferentes apartados que permiten al usuario agregar animaciones, videos y audios propios o externos al programa. Este editor fue requerido dado que *Manim tiene restricciones.* Aunque se le pueden incluir audios a los videos desde la programación, estos deben ser muy cortos, ya que este no cuenta con un desarrollado profundo en los aspectos relacionados con el sonido. Por este motivo usamos el editor específicamente para unir y articular los audios con los videos creados mediante *Manim*.

Ahora bien, al no tener experticia al momento de crear y editar videos en software *Manim*, crear cada código para las animaciones se hizo tedioso y demorado en un principio. Sin embargo, la primera acción que llevamos a cabo para la creación de los videos fue la elaboración de bocetos muy superficiales respecto al orden en el que deberían ir las situaciones y los argumentos relativos al teorema involucrado en cada una. Estos bocetos fueron detallándose de tal forma que luego se convirtieron en los libretos de cada uno de los videos. Estos libretos fueron teniendo cambios y precisiones constantes a medida que se iban poniendo en discusión con nuestro asesor. A continuación, presentamos un fragmento de uno de los libretos creados. En el ANEXO (B) LIBRETO DEL VIDEO presentamos el libreto completo de uno de los videos.

Tabla 20. Libreto perteneciente a uno de los videos

Libreto
Situación problema – Exploración Teorema de Pitágoras (problema 1)
El video inicia presentando y contextualizando una situación problema, siendo esta el proyecto asignado a una empresa, que desea construir un puente a través de un lago muy particular.
- En esta ocasión observaremos la situación de una compañía que quiere construir un puente que pase a través del siguiente lago (en la pantalla aparece el lago de la Figura 1). En este caso, la compañía quiere que el puente cruce el lago desde el punto A hasta el punto B (aparecen los puntos en la pantalla). 

- Para esto, un ingeniero de la empresa debe estimar la cantidad de material necesaria para construir el puente, para dicho propósito, el ingeniero necesita saber qué distancia hay entre estos dos puntos A y B (en la pantalla aparece una línea punteada del punto A al punto B).

Una vez hechos los libretos, nos centramos en crear los videos con *Manim*.

Los videos relacionados a las situaciones y su solución tienen aproximadamente 300 a 400 líneas de código y los videos referentes a la presentación de los argumentos tienen un aproximado de 600 a 800 líneas. Vale decir que el programador tiene total control de los tiempos de animación, los tiempos de espera entre animaciones y la calidad visual de los videos. El proceso en sí consta de escribir varias líneas de código y que a su vez le sigue un renderizado piloto del video, esto para verificar el funcionamiento de cada animación.

Luego de crear todos los videos y de adaptar los libretos, grabamos el audio que los acompaña, agregando tiempos en la programación, para lograr que el audio y los videos se sincronicen; y así los unimos con el editor de videos. La Figura 15 muestra un breve segmento de la programación de uno de los videos. En el ANEXO (A) REFERENTES A LOS VIDEOS presentamos el código de programación relativo a uno de los videos.

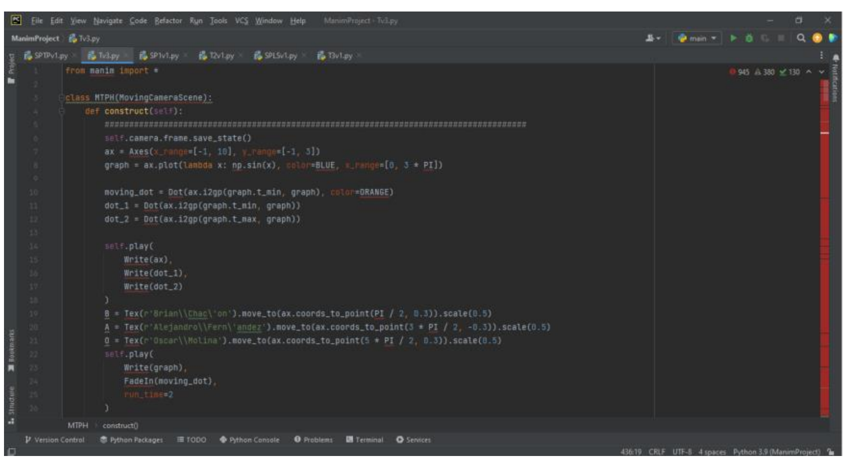


Figura 15. Lineas de codigo perteneciente a uno de los videos

3.3 FASE 3 - SUGERENCIAS PARA ABORDAR EL MATERIAL

Aunque el material presente en el recurso virtual abierto fue creado para que se pueda abordar libremente, prescindiendo de un orden específico, consideramos que es adecuado el presentar una ruta de acción para aquellos que quieran utilizar el material. En la fase tres de la elaboración del recurso digital precisamos un orden de abordaje que se definimos según tres parámetros; videos referentes al mismo objeto matemático, similitud entre objetos matemáticos y necesidad de conocimientos previos para el abordaje del material. En esta sección presentamos cada parámetro y la forma en que este fue aplicado para crear la ruta de acción.

3.3.1 Videos relacionados al mismo objeto matemático

Como mencionamos en la sección 3.2.2, creamos cuatro videos autocontenidos para el estudio de cada objeto matemático protagónico. Sin embargo, el que sean autocontenidos, no implica que no se hayan creado con un orden preestablecido por parte de los diseñadores para sacar su máximo provecho y a su vez atender a los referentes de orden didáctico. Inicialmente, consideramos que, para que el estudio de cada objeto matemático se dé de forma continua y centrada, se debe estudiar un objeto protagónico a la vez. Consideramos pertinente, entonces, abordar los cuatro videos orientados al estudio de un hecho protagónico antes de empezar con el estudio de otro de estos.

Además de la creación de los conjuntos de videos mencionados anteriormente, consideramos que es importante que cada conjunto de videos tenga un orden de visualización. Dada la importancia del proceso de resolución de problemas Estándares básicos de Competencias (2006), consideramos que esta perspectiva puede ser adecuada para dar forma al orden de visualización de los videos, siendo así, cada conjunto de videos obedece a un orden de visualización basado en el proceso de resolución de problemas.

3.3.2 Similitud entre los objetos matemáticos

En la sección 2.2 mencionamos algunas similitudes entre los objetos protagónicos de este trabajo, y aunque observamos que estos tres guardan una gran relación, es claro que ciertas relaciones son más explícitas que otras. Consideramos que hacer un estudio continuo de dos objetos matemáticos, con dicho tipo de relaciones, puede ayudar a una transición progresiva entre el estudio de los distintos objetos protagónicos. Con base en lo anterior, el orden en que se abarcan los conjuntos de videos de los tres objetos protagónicos obedecerá a la similitud que guarden estos mismos objetos, tanto en su enunciado, su justificación y los objetos matemáticos que relacionan. El orden específico se mostrará en el Capítulo siguiente.

3.3.3 Necesidad de conocimientos previos

Las propias sugerencias para abordar el material son fundamentales para facilitar el abordaje de los contenidos. Tanto Kuzniak (2006) a partir de su propuesta de paradigmas, como Godino (2013) en su propuesta de idoneidad (epistémica), hacen referencia a la importancia de contar con un sistema de referencia y de conocimientos previos para el estudio de situaciones problema. Debido a esto, en el Capítulo 4 describimos la forma en que creemos que las herramientas diseñadas suplen las necesidades mencionadas. Las sugerencias para abordar el material se crearon a partir de los parámetros mencionados en este capítulo. Estas proporcionan una guía general para el manejo de la página, una ruta de acción para el estudio de los videos y sugerencias de estudio del sistema teórico de referencia para el abordaje de cada video. En el capítulo 4, exponemos estas sugerencias. Los elementos del sistema teórico de referencia se seleccionaron tras revisar cada definición y hecho geométrico usado en los videos, los enunciados se extrajeron principalmente de Samper y Molina (2013) y estudiamos los documentos curriculares colombianos (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006; Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016) para hacer referencia al grado de escolaridad necesario (según los documentos curriculares colombianos), para abordar cada objeto matemático con suficientes conocimientos.

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN DEL RECURSO VIRTUAL

En este capítulo describimos con detalle la estructura y contenido de la página web diseñada. Primeramente, describimos cada uno de los apartados de la página web; esto incluye pestañas, publicaciones, botones y encabezados. Enseguida, presentamos cada uno frames asociados a cada teorema protagonistas; con ello, describimos los videos protagónicos hechos con *Manim* y el material adicional que contiene la página web en relación con cada video. Por último, presentamos con detalle la trayectoria de estudio que para nosotros es la más idónea (ello, en relación con lo indicado al final del Capítulo 3).

4.1 Descripción del recurso virtual

En el capítulo anterior mencionamos el proceso llevado a cabo para diseñar nuestra página web (que se puede ver en el enlace https://brianstiffchacon.wixsite.com/fcm-matematicas). En esta sección describimos con mayor detalle cada apartado de él. Además, se resaltamos los aspectos relevantes de cada tipo de video, dando como ejemplo un video de cada tipo y mostramos cómo atendemos a los CI mediante los códigos.

Empezamos por decir que los campos en común que tiene el recurso virtual para cualquier apartado o frame, es el encabezado, el pie de página y el botón de chat. De la

Tabla 21 a la Tabla 27 se presentan las Figuras correspondientes a cada una de tales pestañas del recurso virtual junto con otras auxiliares que apuntan a estimular potencial interacción entre los diseñadores del recurso (nosotros) y los posibles usuarios.

Tabla 21. Imagenes relacionadas a la estructura de la Página web

Encabezado

Como se puede apreciar en la Figura 16 el encabezado tiene en la parte superior izquierda el logo, que contiene las iniciales de los autores y el asesor de este trabajo, y a su derecha el menú principal. Este último cuenta con botones que llevan a cada uno de los apartados del recurso junto el botón de búsqueda, donde el usuario podrá buscar cualquier tema o palabra relacionada al contenido del recurso virtual. A su lado derecho se encuentra un icono que lleva un canal de YouTube que contiene todos los videos creados en este proyecto.

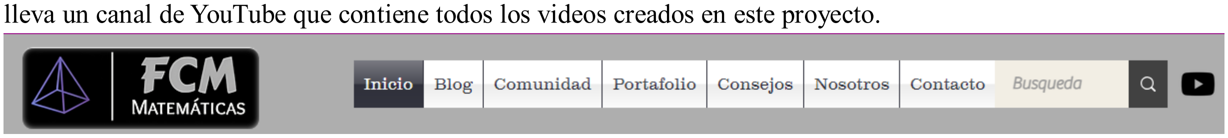


Figura 16. Encabezado de la Página web

Pie de Página

En el pie de página (ver Figura 17) los usuarios podrán encontrar el nombre del recurso, junto al correo designado para este y los nombres de sus creadores.

Figura 17. Pie de Página y su contenido

Chat

El botón de chat, está siempre posicionado en la parte inferior izquierda. Permite al usuario enviar a los creadores un mensaje directo. En la Figura 18 podrán apreciar su interfaz

Figura 18. Interfaz del chat

Pestaña de Inicio: En la pestaña principal de la página web, los usuarios encontrarán, al desplazarse de manera vertical (Ver Tabla 22), un video corto, en bucle que da la bienvenida al usuario a nuestra página web. Debajo de este, se presenta una breve introducción que tiene como objetivo informar al usuario qué contenido se va a encontrar en la página y quienes fueron sus creadores. Además, al finalizar dicha introducción se podrá encontrar nuevamente el menú principal; esto para facilitarle al usuario la exploración de la página web.

Tabla 22. Imagenes relacionadas a la pestaña de Inicio

Pestaña de Inicio

Figura 19. Mensaje de bienvenida

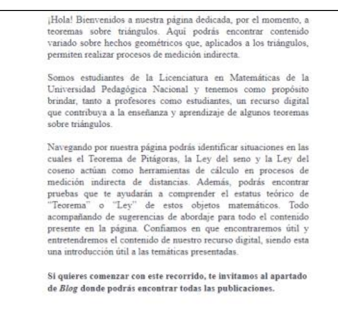


Figura 20. Introducción a la página web

Pestaña de Blog: En este apartado los usuarios podrán encontrar todas las publicaciones realizadas, ordenadas por fecha de publicación. La estructura de estas publicaciones en este apartado, consta del video en miniatura que está posicionado a la izquierda, a la derecha de este se encuentra: el título de la publicación junto a la categoría a la que pertenece, su fecha de salida, su descripción, la cantidad de visualizaciones y de comentarios que tiene este. Todo esto con el objetivo de favorecer aspectos de la idoneidad interaccional.

Por otra parte, al seleccionar alguna de las publicaciones, esta lleva al usuario a otra subpestaña donde se encuentra con mayor detalle cada elemento mencionado anteriormente, introduciendo únicamente nuevos botones que sirven para compartir la publicación en diferentes plataformas, toda esta estructura se puede apreciar de mejor manera en la

Tabla 23. Este apartado está creado en parte, para cumplir con la idoneidad ecológica y con la cognitiva, dado que, en la descripción de algunas de las publicaciones se proporcionan los objetos matemáticos que los usuarios requieren para abordar la publicación. Tomamos como base los lineamientos curriculares. Además, pretendemos que se mantengan en la zona de desarrollo de los potenciales usuarios.

Tabla 23. Imágenes relacionadas a la pestaña de Blog

Pestaña de Blog	
 *Figura 21. Publicaciones en la pestaña Blog*	 *Figura 22. Estructura de cada publicación*

Pestaña de Comunidad: En la Tabla 24 se aprecia la estructura de la pestaña Comunidad. En esta se encuentra primeramente el nombre del apartado, seguido de un recuadro donde los usuarios pueden publicar sus dudas, adjuntando alguna imagen o video. Los recuadros siguientes son las publicaciones. La estructura de estas es similar a las descritas en el apartado de *Blog*, añadiendo un pequeño botón de reacciones con emojis. Esta pestaña tiene la finalidad de cumplir con la idoneidad interaccional, dado que, está hecha para que los usuarios, logren expresar sus dudas y que estas sean respondidas tanto por otros usuarios como por los creadores.

Tabla 24. Imágenes relacionadas a la pestaña de Comunidad

Pestaña de Comunidad

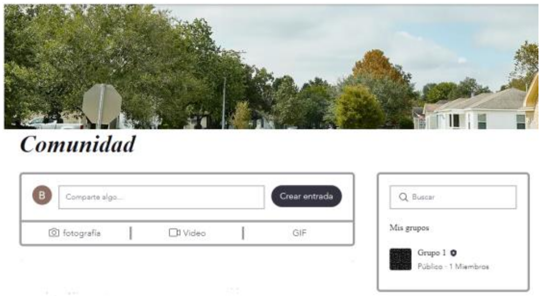


Figura 23. Apartado para publicaciones de usuarios

Figura 24. Estructura de las publicaciones en la comunidad

Pestaña de Portafolio: En la pestaña del portafolio, como se aprecia en la Figura 25 se encuentran diferentes botones, cada uno de estos, llevan al usuario al apartado de *Blog*, pero dependiendo el botón seleccionado la página filtra las publicaciones por categorías, que se rigen por nuestros objetos matemáticos (Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno), todo esto con el fin de cumplir aspectos de tipo mediacional en cuanto se dispone la información de cada objeto matemático de manera accesible y ordenada, para facilitar el estudio de estos.

Tabla 25. Imágenes relacionadas a la pestaña de Portafolio

Pestaña de Portafolio

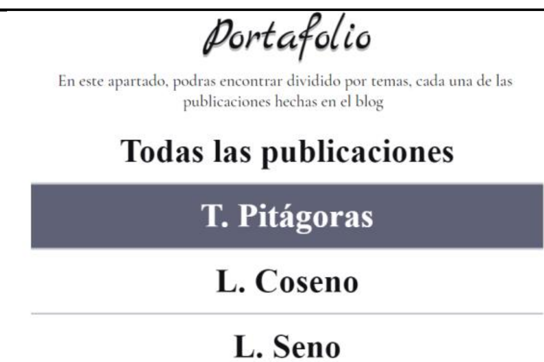


Figura 25. Categorías de cada publicación

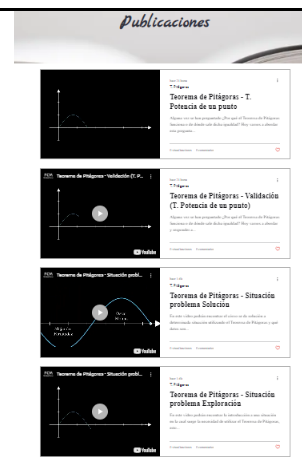


Figura 26. Filtración de las publicaciones

Pestaña de Consejos: La pestaña de consejos, está dividida en dos subpestañas. En la primera (Objetos protagónicos) se describe una trayectoria de estudio enfocada al orden de abordaje de los objetos matemáticos. La segunda (Videos relacionados) se describe una trayectoria más específica aludiendo directamente al orden en el que deben ser abordadas las publicaciones, más específicamente los videos.

Tabla 26. Imágenes relacionadas a la pestaña de Consejos

Pestaña de Consejos

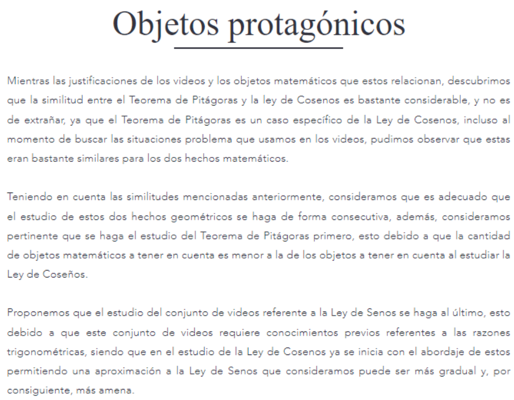


Figura 27. Subpestaña relacionada a objetos protagónicos

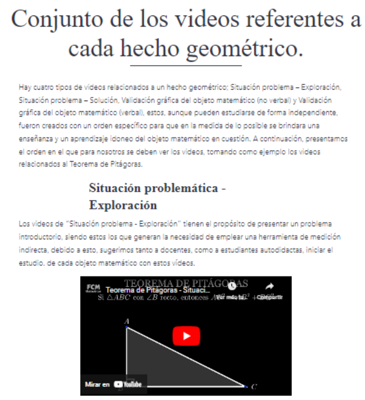


Figura 28. Subpestaña sobre videos relacionados

Pestañas de Nosotros y Contacto: Los usuarios podrán encontrar en el apartado de *Nosotros* una breve descripción sobre qué es la página, quienes son sus creadores y el motivo de su creación. Por otra parte, en la pestaña de *Contacto* los usuarios pueden expresar sus comentarios y dudas de manera privada (Ver Tabla 27), estos apartados y principalmente el ultimo, atienden a criterios de índole interaccional en cuanto se pretende con estos, lograr una interacción entre creadores y usuarios.

Tabla 27. Imágenes relacionadas a las pestañas de Nosotros y Contacto

Pestañas de Nosotros y Contacto

Figura 29. Contenido de la pestaña Nosotros

Figura 30. Contenido de la pestaña Contacto

4.2 Descripción de momentos específicos de cada video

Describimos ahora las secciones de la página relativa al tratamiento de los objetos matemáticos protagonistas, por supuesto, dando principal importancia al material audiovisual creado con *Manim*. Empezamos por los videos relativos al Teorema de Pitágoras. En las Tabla 28,

Tabla 29 y Tabla 30 presentamos los aspectos relevantes de cada uno de los cuatro videos asociados (organizados por momentos) y los CI usados para su diseño (indicados con su respectivo código).

Tabla 28. Momentos del video exploratorio

	Situación problema – Exploración	
Momentos	**Descripción**	**Código**
Momento 1  *Figura 31. Introducción a la Situación*	En este momento se presenta la *Situación I*, donde un ingeniero tiene que calcular la distancia que hay entre los dos extremos de un puente, para poder hacer este cálculo, la empresa le proporciona al ingeniero los planos del lago y un Teodolito[7]. El ingeniero al no contar con suficientes instrumentos de medición decide medir la distancia de forma indirecta.	ES – EcC
Momento 2  *Figura 32. Preguntas al público*	Se hace la invitación a pausar el video, dando un tiempo para responder la siguiente pregunta: ¿Puedes sugerir un camino para calcular la distancia entre estos dos puntos teniendo en cuenta la situación del ingeniero?	IR

[7] Teodolito: Es un instrumento topográfico de precisión para medir ángulos de distintos planos (Verticales y Horizontales)

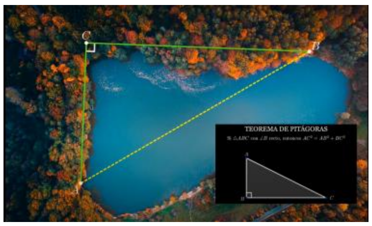
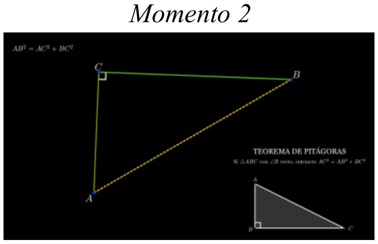
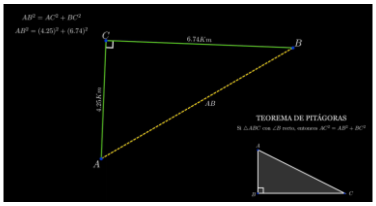
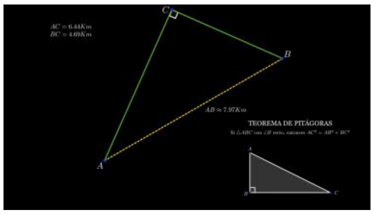
Momento 3  *Figura 33. Exploración*	En la exploración, se ubica el punto C en diferentes lugares y a su vez se resaltan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, esto para dar a entender al espectador la posibilidad de medir dichos segmentos y al final se ubica el punto en el lugar adecuado.	EL
Momento 4  *Figura 34. Introducción del objeto matemático*	Para poder introducir el objeto matemático, mediante la exploración se posiciono el punto C de tal forma que se cumplan ciertas condiciones en el triángulo formado, para que a través de este se vea la necesidad de utilizar el objeto matemático, que en este caso resulta ser el Teorema de Pitágoras.	ER

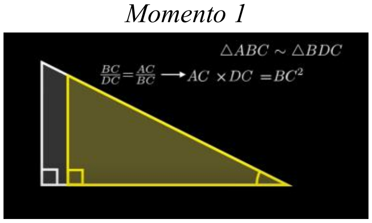
Tabla 29. Momentos del video Solución

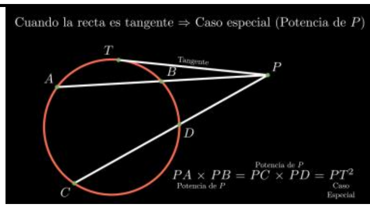
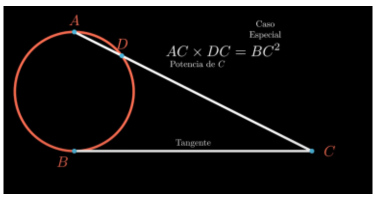
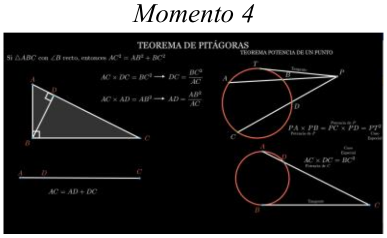
Situación problema – Solución		
Momentos	**Descripción**	**Código**
Momento 1  *Figura 35. Introducción rapida a la Situación*	En este momento se presenta la *Situación I*, donde un ingeniero tiene que calcular la distancia que hay entre los dos extremos de un puente, en esta ocasión se aborda la situación de manera rápida, sin dar una exploración tan detallada.	ES – EcC
Momento 2  *Figura 36. Relaciones del objeto matemático*	Se introduce el objeto matemático y se hace un cambio de fondo dejando de lado la imagen del lago, esto para detallar el por qué se utiliza el objeto matemático y que relaciona dicho objeto en el triángulo.	ERS

Momento 3  *Figura 37. Solución a la situación problema*  *Figura 38. Invitación a aplicar el T. Pitágoras*	En este momento, se dan los datos tomados por el ingeniero y mediante sustituciones y despejes, se da solución a la situación del ingeniero. Por otra parte, luego de dar la solución, se invita al usuario a comprobar la respuesta, utilizando el objeto matemático con otras medidas para las longitudes de los lados del triángulo y otra ubicación para el punto C.	IR – EL – ERS

Dado que los videos de argumentación dinámica con o sin apoyo verbal asociados a cada teorema protagonista no presentan cambios significativos entre uno y otro (salvo voces en off como apoyo a lo mostrado en el video), presentamos únicamente los momentos de la argumentación con apoyo verbal.

Tabla 30. Momentos del video de algumento dinámico

Argumento dinámico (verbal)		
Momentos	**Descripción**	**Código**
Momento 1  *Figura 39. Igualdad dada por la semejanza*	En este momento gracias a que se creó el segmento BD perpendicular al segmento AC del triángulo ABC con $\angle B$ recto, se ha formado un triángulo rectángulo BDC y si lo comparamos con el triángulo ABC, estos comparten el ángulo C y al ser triángulos rectángulos, estos resultan ser semejantes. Por la semejanza se cumple la igualdad (ver Figura 39) y por medio de algunas propiedades en el conjunto de los reales se llega a la expresión $AC * DC = BC^2$	EL – ERS – EA – ER – IR – MR
Momento 2	Gracias al momento anterior, se da paso al Teorema potencia de un punto con el objetivo de simplificar los pasos para llegar a la igualdad dada por la semejanza, dejando al final un ejemplo claro del Teorema y sus diferentes casos.	EL – ERS – EA – CC

 *Figura 40. Introducción del T. Potencia de un punto*		
Momento 3  *Figura 41. Igualdad dada por el T. Potencia de un punto*	Sabiendo que hace el teorema potencia de un punto, se utiliza en la situación que se tenía antes, para poder utilizarlo, se crea una circunferencia que tenga como diámetro el $\overline{AB}$ y por propiedades de la circunferencia, D pertenece a dicha circunferencia. Con esto, tenemos un caso similar al ejemplo dado con anterioridad, donde el segmento BC es tangente y la potencia de C está dada por el producto de las longitudes de los $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$, esto va a ser igual a la longitud del $\overline{BC}$ elevado al cuadrado. Gracias al teorema hemos llegado con mayor facilidad a la misma expresión dada por la semejanza. Este mismo procedimiento se hace nuevamente, luego de crear una circunferencia que tenga como diámetro el $\overline{BC}$	EL – ERS – ER
Momento 4  *Figura 42. Igualdad del T. Pitágoras*	Teniendo las dos expresiones, aún falta poder relacionarlas para llegar a la igualdad dada por el Teorema de Pitágoras. Por este motivo vamos a fijarnos en el $\overline{AC}$, dicho segmento está dividido en dos partes por el punto D, entonces podemos expresar la longitud del $\overline{AC}$ en términos de una suma, dándonos como resultado, que: $AC = AD + DC$. Gracias a las dos expresiones halladas anteriormente, se puede saber a qué equivalen las longitudes AD y DC. Por esto se puede reestructurar la suma y desarrollando la igualdad se llega a la igualdad del Teorema de Pitágoras[8].	EL – ERS – EA – ER

4.3 Descripción del material adicional de la página web

Además de los videos, hemos mencionado que el recurso virtual contiene algunos elementos adicionales necesarios para cumplir con algunas condiciones requeridas para que el recurso sea un

[8] En el video relacionado al argumento dinámico de la Ley del Coseno, se hace una invitación a los usuarios a que sigan un procedimiento similar al del video, utilizando el Teorema de potencia de un punto, para llegar a las otras dos igualdades que no se abordaron dentro del video.

espacio de trabajo geométrico y cumpla con los criterios de idoneidad seleccionados con anterioridad. En lo que sigue, hacemos una descripción del recurso relativa a estos aspectos.

4.3.1 Sistema teórico de referencia

El sistema teórico de referencia está conformado por aquellas definiciones y hechos geométricos que consideramos necesarios para el abordaje del material que se encuentra dentro del recurso virtual abierto. Este sistema se presenta en un documento PDF, que es accesible en cada publicación.

Este contiene aquellas definiciones que consideramos determinantes para interpretar gran parte del contenido presente en los videos. Teniendo en cuenta que el recurso virtual está orientado a cumplir características de las geometrías I y II, este sistema teórico de referencia no tiene que ser completo, razón por la cual esta sección del documento obvia algunas definiciones que pueden ser intuitivas para aquellos que aborden el material.

Por otro lado, el documento contiene aquellas propiedades de los números reales necesarias para abordar la soluciones y pruebas presentes en los videos. De forma similar a la primera sección del documento, en esta se obvian algunas propiedades que no tienen una mayor relevancia a la hora de abordar el material. Además, este sistema teórico contiene los enunciados de aquellos hechos geométricos que juegan un papel crucial en el contenido presentado en los videos.

Vale decir que en cada video de "Situación problema - Exploración" se anima al espectador a proponer una solución para la situación. Desde esta perspectiva, consideramos necesario que el estudiante cuente con las herramientas necesarias para comprender los objetos involucrados en la situación; por supuesto, no mencionamos la forma en que el objeto que será introducido por medio de estos videos sirve para solucionar la situación problema.

Por otra parte, con el propósito de dinamizar la identificación de los elementos del sistema teórico a estudiar por parte del usuario, antes del abordaje de cada video, al momento de entrar a cada una de las pestañas en las cuales se presentan los videos, se pueden observar los nombres de los elementos del sistema teórico de referencia que recomendamos estudiar antes abordar dicho video y una opción para hacer clic y acceder al sistema teórico.

4.4 Ruta de acción para el abordaje de la página

Aunque el recurso virtual no obliga al usuario a seguir una ruta de estudio en específico, sí brinda una tentativa. Esta se define por los criterios mencionados en la sección 3.3. En la presente sección describimos la ruta de estudio mencionada, la cual está orientada a: profesores que deseen usar la página para dirigir procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos protagónicos; o estudiantes que quieran estudiar dichos objetos de forma autodidacta.

Los videos presentes en el recurso virtual contienen procesos y argumentos matemáticos semi formales. Debido a esto, se hace necesario que los estudiantes que aborden dicho material audiovisual hagan un estudio previo del sistema teórico de referencia. Sin embargo, consideramos que los objetos estudiados deben ser específicamente aquellos que se usen en el video concreto que se vaya a abordar. La Tabla 31 presenta un ejemplo específico de esta situación.

Tabla 31. Ejemplo de elementos teoricos utilizados en un video

Video por abordar	**Elementos del sistema teórico a estudiar**
"Situación problema - Exploración"	**Definición triángulo rectángulo** Un triángulo ΔABC es rectángulo si uno de sus ángulos es recto.

Cada sección de videos contiene, dentro de las publicaciones, los nombres de los elementos del sistema teórico con mayor relevancia para el estudio de cada video, esto con el propósito de que los estudiantes puedan buscar dicha información dentro del sistema teórico, al cual podrán acceder dándole clic a una opción que los lleva a este en cada una de las publicaciones de los videos.

4.4.1 Población pertinente para el abordaje de la página

Como se mencionó en la sección **Error! Reference source not found.**, mediante la búsqueda de los objetos matemáticos del sistema teórico de referencia en los documentos curriculares colombianos, concluimos que, para Colombia, el contenido de la página es accesible a estudiantes de grado octavo o novenos (en relación con el T. Pitágoras) o de grado décimo u once que tenga como propósito involucrar las razones trigonométricas y, con ellos, los otros teoremas protagonistas de este trabajo de grado (Ley de Seno y de Coseno). En cualquier caso, sugerimos al profesor que desee usar la página como apoyo que haga las adaptaciones que considere necesarias en su implementación a fin de las expectativas de aprendizaje que tenga en relación con los teoremas ya mencionados.

Por otro lado, el abordaje del sistema teórico por parte de estudiantes autodidactas no dista mucho de aquel que hace el docente. Sin embargo, hay una variación importante y es que sugerimos que el estudiante revise cada uno de los elementos teóricos relevantes previos antes de abordar cualquiera de los videos. Ahora bien, dada la posibilidad de que el estudiante no sepa cómo encontrar material de estudio adecuado, el recurso virtual le brinda el sistema teórico de referencia para facilitar el entendimiento de los objetos matemáticos a estudiar.

4.4.2 Trayectoria de estudio de los videos

Como se mencionó en el capítulo 0, cada video presente en el recurso virtual fue creado para ser autocontenido. Sin embargo, dicho material audiovisual también se creó con un orden lógico de abordaje, orientado por el proceso de resolución de problemas, que consideramos puede potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje. El orden de abordaje sugerido tiene dos parámetros; orden de estudio dependiendo de los objetos protagónicos y orden de estudio dependiendo del tipo de video.

4.4.2.1 Orden de estudio dependiendo de los objetos protagónicos

Mientras las justificaciones de los videos y los objetos matemáticos que estos relacionan, descubrimos que la similitud entre el Teorema de Pitágoras y la ley de Cosenos es bastante considerable. No es de extrañar, ya que el Teorema de Pitágoras es un caso específico de la Ley de Cosenos. Incluso al momento de buscar las situaciones problema que usamos en los videos, pudimos observar que estas eran bastante similares para los dos hechos matemáticos.

Tabla 32. Elementos teoricos utilizados en los videos

	Videos por abordar	
	Argumento dinámico del Teorema de Pitágoras con apoyo verbal	*Argumento dinámico de la Ley del Coseno con apoyo verbal*
Elementos del sistema teórico a estudiar	**Definición triángulo rectángulo** Un triángulo ΔABC es rectángulo si uno de sus ángulos es recto. **Teorema Potencia de un Punto** Sea P un punto y sea una recta que pase por P e inteseque a una circunferencia en A y B, el producto de las medidas de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ es constante. **Definición Recta Tangente a una circunferencia** Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un solo punto. **Definición de Semejanza de Triángulos** Dos triángulos son semejantes si la razón de sus lados correspondientes es constante **Criterio de Semejanza AA** En dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes	**Definición de Coseno** El coseno de un ángulo es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa **Teorema Potencia de un Punto** Sea P un punto y sea una recta que pase por P e inteseque a una circunferencia en A y B, el producto de las medidas de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ es constante. **Teorema Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo** Dado un ΔABC y una $\odot$P que lo circunscribe: i. Si el AC es diámetro de $\odot$P, entonces el ΔABC es rectángulo con el $\angle$B recto. ii. Si el ΔABC es rectángulo con el $\angle$B recto, entonces el AC es diámetro de $\odot$P. **Definición de Semejanza de Triángulos** Dos triángulos son semejantes si la razón de sus lados correspondientes es constante **Criterio de Semejanza AA** En dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes

Como se puede observar en la Tabla 32, los elementos a estudiar provistos por esta son casi los mismos para cada teorema, siendo el estudio de razones trigonométricas la variación más importante entre estos.

Teniendo en cuenta las similitudes mencionadas anteriormente, y los pocos elementos teóricos que discrepan entre contenidos previos del Teorema de Pitágoras y la Ley de Cosenos, consideramos que es adecuado que el estudio de estos dos hechos geométricos se haga de forma consecutiva; además, consideramos pertinente que se haga el estudio del Teorema de Pitágoras primero, dado que la ley de Coseno generaliza este último, o más bien dicho, el T. Pitágoras es un caso particular de este.

Proponemos que el estudio del conjunto de videos referente a la Ley de Senos se haga de último, esto debido a que este conjunto de videos requiere conocimientos previos referentes a las razones trigonométricas. Esto por cuanto, al abordarse previamente la Ley de Cosenos, los elementos teóricos para abordar la Ley de Senos se encontrarían ya instaurados.

4.4.2.2 Orden de estudio entre el conjunto de los videos referentes a cada hecho geométrico

Como se mencionó en la sección 3.2.2, hay cuatro tipos de videos asociados a cada teorema protagonista en la página: situación problema – exploración, situación problema – solución, argumento dinámico del objeto matemático sin apoyo verbal y argumento dinámico del objeto matemático con apoyo verbal. Estos, aunque pueden estudiarse de forma independiente, fueron creados con un orden específico premiando un mejor abordaje por parte del usuario en relación con un desarrollo teórico específico que se comentó en la sección previa.

Los videos de "Situación problema - Exploración" tienen el propósito de presentar a los estudiantes un problema introductorio. Son estos los que generan la necesidad de emplear una herramienta de medición indirecta. Sugerimos tanto a profesores como a estudiantes autodidactas, iniciar el estudio de cada objeto matemático con estos videos.

Los videos de "Situación problema – Solución" son aquellos que presentan parte de la utilidad que tienen los objetos protagónicos como herramientas de medición indirecta que permiten solucionar el problema. En ese sentido, consideramos prudente que estos videos sean los segundos en estudiarse. Como hemos dicho antes, estos videos inducen un espacio de trabajo geométrico basado en la exploración y la utilidad de hechos geométricos (los protagonistas de este trabajo) para resolver problemas sobre cálculo de medidas de longitud.

Los videos de "argumento dinámico del objeto matemático sin apoyo verbal" tienen el propósito de motivar al estudiante a entender, por sí mismo, los argumentos usados en la prueba del hecho geométrico correspondiente al video en cuestión; debido a esto, sugerimos que estos videos sean estudiados antes de ver las pruebas con voz.

Los videos de “argumento dinámico del objeto matemático con apoyo verbal” tienen el propósito de mostrar al estudiante una prueba que valide el Teorema o Ley de los objetos matemáticos centrales de este trabajo. Teniendo en cuenta que estos videos muestran todos los argumentos de su justificación, con una voz en off que explica lo que dinámica se ilustra en el video, recomendamos que estos sean los últimos en estudiarse.

Como resultado de las condiciones mencionadas, proponemos el siguiente mapa (ver Figura 43. Esquema grafico de la ruta de abordaje que plasma la ruta de acción sugerida para abordar la página. En este, la curva amarilla indica el primer conjunto de videos que se debe abordar, las curvas rojas muestran el primer video que se debe abordar en cada conjunto de videos, las curvas negras representan el orden en el cual se deben estudiar los videos de cada conjunto y las curvas verdes denotan el orden de abordaje de los conjuntos de videos.

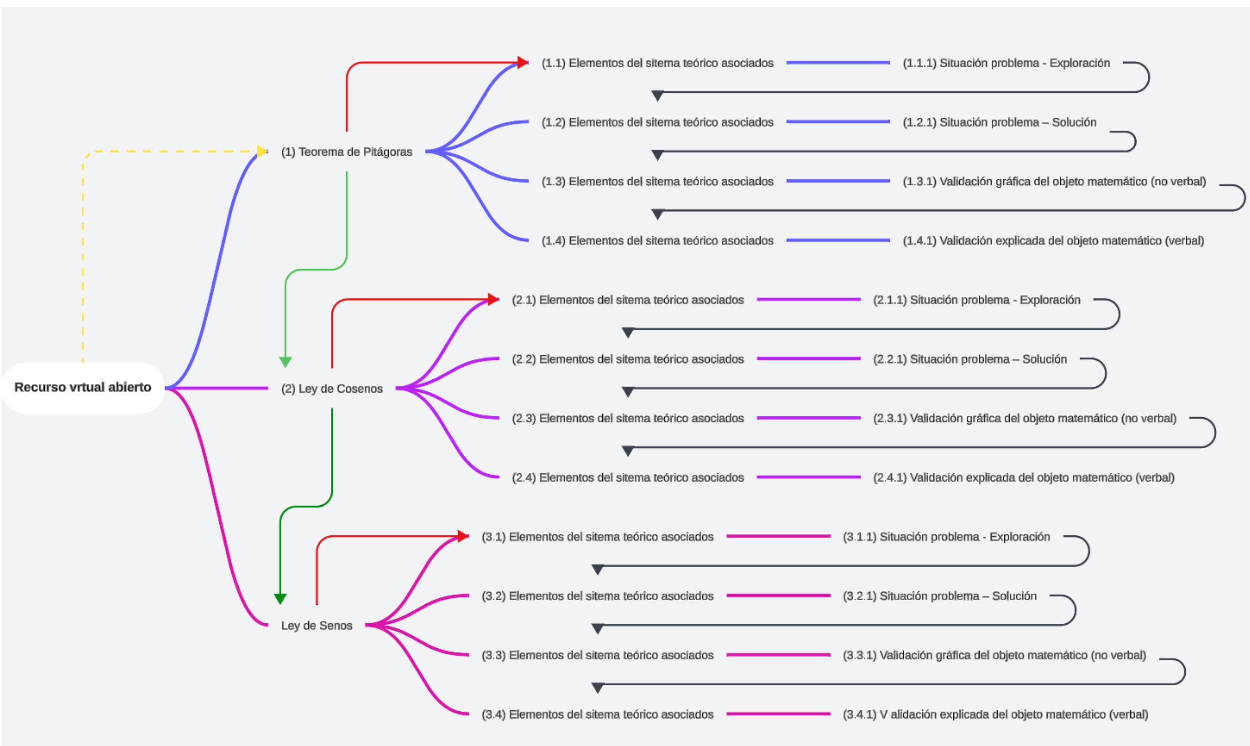


Figura 43. Esquema grafico de la ruta de abordaje

CAPITULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones relativas a nuestro trabajo de grado en relación con tres apartados específicos: el cumplimiento parcial o completo de los objetivos planteados en este TG; los aportes y aprendizajes que nos dejó a nosotros como futuros profesores; y, las dificultades presentadas durante la elaboración del recurso virtual junto con el panorama de nuestro recurso a futuro.

5.1 Cumplimiento de objetivos

Por medio de la Tabla 33 presentamos el enunciado de cada uno de los objetivos de nuestro trabajo junto con el grado de su cumplimiento, detallando como se intentó alcanzar cada objetivo durante la elaboración del mismo.

Tabla 33. Cumplimiento parcial o completo de los objetivos

Objetivo general	
Crear una página web compuesta principalmente de videos hechos en *Manim*, alusiva a los hechos Teorema de Pitágoras, Ley del Seno y Ley del Coseno, que sea apoyo de procesos de enseñanza o aprendizaje a partir de promover el estudio de las facetas utilitaria y teórica de tales hechos.	Creamos un recurso digital abierto centrado en la Ley de Senos, Ley de Cosenos y Teorema de Pitágoras, esto es, una página web principalmente compuesto por videos desarrollados con el software *Manim*. Este recurso promueve un estudio de los teoremas mencionados que alude a su faceta como herramienta para resolver problemas como a una faceta teórica que provee sus de mostraciones en el marco de un sistema de conocimiento que se asume conocido o accesible por los sujetos que deseen usar el recurso.
Objetivos específicos	
Decantar los objetos matemáticos relacionados con hechos geométricos escogidos (procedimientos, situaciones, representaciones, argumentos, lenguajes) que se involucrarían en el diseño y creación del material presentado en el recurso virtual.	Identificamos una variada tipología de objetos y procesos matemáticos relacionados con los hechos geométricos principales. Ello se logró a partir de tres recursos fundamentales; una tipología de problemas, una precisión de argumentos deductivos para validar los teoremas protagonistas y la identificación de hechos claves para la elaboración de tales argumentos en los documentos curriculares colombianos. La indagación sobre los argumentos nos llevó a identificar y aclarar aún más la relación que guardan estos teoremas entre sí.

Lograr una apropiación del software *Manim* que propicie la elaboración del material a la luz de los libretos elaborados.	La apropiación del software *Manim* tomó más tiempo del planeado. Sin embargo, se logró por medio de un estudio dedicado de diversos materiales, una apropiación suficiente del software que nos permitió elaborar el material de una manera que se correspondiera con lo deseado (según los criterios de idoneidad tomados en cuenta para ello). El hecho de contar con los videos mismos en el ambiente *Manim* son muestra de ello. En cualquier caso, el lector puede consultar un ejemplo del código de programación asociado a uno de los videos tipo *Manim***Error! Not a valid result for table.**.
Realizar el diseño de una página web, haciendo una adaptación de los criterios de idoneidad propuestos del Enfoque Onto-Semiótico para procesos de instrucción de las matemáticas escolares.	El hecho de contar con la página web es evidencia del logro de este objetivo. Procuramos cuidar su idoneidad cumpliendo los indicadores estipulados para ello. Esos criterios de idoneidad fueron, en un principio, seleccionados y adaptados a las condiciones de nuestro trabajo (un recurso virtual con videos tipo *Manim*); luego, tomamos todos estos criterios para diseñar, elaborar y estructurar el recurso virtual, su contenido y la trayectoria de estudio de manera idónea.

5.2 Aportes y aprendizajes a nuestro futuro profesional

El desarrollo de este trabajo dejó en nosotros muchos aprendizajes que influyeron directamente nuestra formación como educadores matemáticos. Estos aprendizajes se encaminan en rumbos diferentes, los cuales describimos enseguida:

Aprendizajes de orden didáctico: La mejor manera de apreciar los aprendizajes didácticos obtenidos es describiendo, a grandes rasgos, la idea inicial de nuestro proyecto y como esta fue evolucionando gracias a lo aprendido desde lo didáctico. Esta idea comenzó únicamente con la creación de videos a través del software *Manim*, para enseñar teoremas sobre triángulos. Pero, a medida que profundizábamos en esta idea, nos encontramos con el constructo *criterios de idoneidad* como el medio que nos permitiría crear los videos con una estructura adecuada. Por otra parte, al indagar y profundizar más sobre el Enfoque Onto-Semiótico y los criterios de idoneidad, nos dimos cuenta de que los videos en sí mismos no eran suficientes para poder generar un espacio de enseñanza y aprendizaje idóneo. En este punto, toma su rol el constructo *espacios de trabajo geométricos*, que nos expandió el panorama aclarando varias aproximaciones al contenido geométrico escolar y por ende, escenarios para contemplar en el recurso (uno exploratorio-herramienta, otro más de corte teórico).

Aprendizajes de orden matemático: Aunque solo estudiamos con cierta profundidad tres hechos matemáticos, tuvimos una amplia gama de aprendizajes referentes a estos. Identificamos que el Teorema de Pitágoras es un caso específico de la Ley de Cosenos, y que estos suelen desempeñar un papel similar en la resolución de problemas asociados al cálculo de longitud o de amplitud angular, pero diferenciados por los datos necesarios para poder usarlos. Además, identificamos cómo los tres hechos matemáticos pueden ser organizados a partir de sus demostraciones basada en la semejanza de triángulos o la potencia de un punto. Por supuesto, tuvimos la oportunidad de conocer esas demostraciones y apropiarlas para poderlas dinamizar en el software *Manim*.

Aprendizajes informáticos: Durante la elaboración de nuestro recurso virtual y el material audiovisual, pudimos aprender y conocer diferentes herramientas que nos fueron de ayuda para crear todo lo que necesitamos en nuestro trabajo. Dado que nuestro objetivo era la creación de videos con el software *Manim*, pudimos aprender sobre la creación y edición de videos con este software; y en consecuencia, aprender incluso con mayor profundidad sobre programación en Python y en LaTeX. Por otra parte, como los videos están cargados en una página web, también logramos aprender cómo crear una página web sencilla y subir videos, con herramientas de Wix y YouTube.

Proyección como futures educadores: Gracias a este trabajo hemos podido vislumbrar un posible camino relacionado a la divulgación matemática. Además, expandimos nuestra perspectiva sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con herramientas fuertes para poder lograr un cambio de nuestra metodología en el aula y aprendimos cómo podemos introducir objetos matemáticos dentro de esta, apoyándonos especialmente en los recursos digitales para generar motivación en nuestros estudiantes.

Creemos y esperamos que este trabajo de grado motive y produzca interés en otros estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas o de cualquiera otra carrera, a realizar trabajos similares utilizando el software *Manim* que es una herramienta muy potente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

5.3 Dificultades en la elaboración y futuro panorama de nuestro recurso virtual

La mayor dificultad que tuvimos al momento de crear el recurso virtual fue la elaboración de los videos. Como lo mencionamos en la sección anterior, nosotros no teníamos ningún conocimiento acerca de programación en Python y mucho menos sobre utilizar *Manim* para crear videos. Por otra parte, lo que fue un gran muro a superar, fue buscar las ayudas necesarias para poder aprender, dado que no se cuenta con mucho material en español para poder aprender a programar en *Manim*.

Apropiarnos de las herramientas necesarias de programación y luego usarlas para el diseño de los videos en Manim nos implicó un retraso en los tiempos establecidos para la elaboración del trabajo de grado.

Finalmente, queremos indicar que, con nuestro trabajo de grado, se abre un camino que todavía podría ser allanado en los siguientes sentidos. En primer lugar, crear algunos tutoriales de Manim, en habla hispana, para aprender a programar en él. Además, ampliar la gama de temáticas que estarían presentes en la página, tanto de la geometría, como de otras áreas de las matemáticas, principalmente en lo que respecta a la posibilidad de ilustrar argumentos visuales de hechos matemáticos. Adicionalmente, mejorar el diseño de la página web, para hacerla más interactiva y atractiva a la vista.

Referencias

Barrantes Masot, M. C., Zamora Rodríguez, V., & Barrantes López, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Revista De Educación Matemática*, 36(1), 27–42. https://doi.org/10.33044/revem.32658

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics / Los Vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Culture and Education*, 30(4), 633-662. https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651

Burgos, M., Pellicer, P., & Godino, J. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista española de pedagogía*, *78* (275), 27-49. https://doi.org/ 10.22550/REP78-1-2020-07

Garrett, J. J. (2011). Meet the elements en *The elements of user experience.* Rose Weisburd. (2da ed., pp 18-31)

Godino , J. D. (2013). *Indicadores de idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matematicas.* Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. Eurasia Journal of Mathematics, *Science and Technology Education*, 19(6), 2-14. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Hummes, V. B., Moll, V. F., & Breda, A. (2019). Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 21(1), 64-82. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6(2), 167-187. https://doi.org/10.1080/14926150609556694

Kuzniak, A., Rauscher, JC. How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?. Educational Studies in Mathematics 77, 129–147 (2011). https://doi.org/10.1007/s10649-011-9304-7

Loomis, E. (1968). *The Pythagorean Proposition.* Washington, D.C: Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas v.2.* MEN.

Samper, C., & Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje.* Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/3435

Suárez Carrasco, L., & Vallin Gallegos, A. (2017). Cómo elaborar Videos educativos. *Red universitaria de julisen.*

Suárez, A. F., & Zubieta, C. F. (2022). Análisis de Idoneidad Epistémica de videos de YouTube relacionados con el Teorema de Pitágoras. *Trabajo de grado de pregrado.* Universidad Pedagógica Nacional. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12209/17694

Torres G, M. D. (2017). El Teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria. *Universidad de Granada*.

UNESCO. (2013). *Enfoques estratégicos sobre las TICS en América Latina y del Caribe.* Santiago: ORLEAC/UNESCO.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Massachusetts: Harvard University Press.

ANEXO (A) REFERENTES A LOS VIDEOS

Código del video “Argumento dinámico de la Ley del Coseno (Verbal)”

```
from manim import *

class MCHv1(MovingCameraScene):
    def construct(self):
        #rejilla = NumberPlane()
        #self.add(rejilla)
##############################################################################
########################################
        self.camera.frame.save_state()
        ax = Axes(x_range=[-1, 10], y_range=[-1, 3])
        graph = ax.plot(lambda x: np.sin(x), color=BLUE, x_range=[0, 3 * PI])

        moving_dot = Dot(ax.i2gp(graph.t_min, graph), color=ORANGE)
        dot_1 = Dot(ax.i2gp(graph.t_min, graph))
        dot_2 = Dot(ax.i2gp(graph.t_max, graph))

        self.play(
            Write(ax),
            Write(dot_1),
            Write(dot_2)
        )
        B = Tex(r'Brian\\Chac\'on').move_to(ax.coords_to_point(PI / 2,
0.3)).scale(0.5)
        A = Tex(r'Alejandro\\Fern\'andez').move_to(ax.coords_to_point(3 * PI
/ 2, -0.3)).scale(0.5)
        O = Tex(r'Oscar\\Molina').move_to(ax.coords_to_point(5 * PI / 2,
0.3)).scale(0.5)
        self.play(
            Write(graph),
            FadeIn(moving_dot),
            run_time=2
        )
        self.play(
            Write(B),
            Write(A),
            Write(O)
        )
        self.play(self.camera.frame.animate.scale(0.5).move_to(moving_dot))

        def update_curve(mob):
            mob.move_to(moving_dot.get_center())

        self.camera.frame.add_updater(update_curve)

        self.play(
            MoveAlongPath(moving_dot, graph, rate_func=linear),
            run_time=3
        )
```

```
        UPNL = ImageMobject("IA/PNG/UPNLogo.png")

        A2 = Tex(r'Alejandro Fern\'andez', r' - ', r'Brian
Chac\'on').next_to(UPNL, DOWN, buff=-0.5).scale(0.25)
        O2 = Tex(r'Oscar Molina').next_to(A2, DOWN, buff=-0.1).scale(0.25)
        self.add(UPNL)
        self.play(
            moving_dot.animate.move_to(ORIGIN).set_fill(opacity=0),
            Create(A2[1]),
            Transform(A, A2[0]),
            Transform(B, A2[2]),
            Transform(O, O2),
            FadeOut(ax, graph, dot_1, dot_2),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        self.add(A2, O2)
        self.remove(A, B, O)
        self.camera.frame.remove_updater(update_curve)
        self.wait()
        self.play(
            Restore(self.camera.frame),
            FadeOut(UPNL,A2,O2)
        )
        self.wait(2)

###############################################################################
########################################
        text1 = Text("LEY DEL COSENO").move_to(3.7 * UP).scale(0.5)
        text2 = Tex(r'Sea $\triangle ABC$, con lados $a$, $b$, $c$; se
cumple:').move_to([-4, 3.3, 0]).scale(0.5)
        text3 = Tex(r'$a^2=b^2+c^2-2bc \times cos(A)$\\',
                    r'$b^2=a^2+c^2-2ac \times cos(B)$\\',
                    r'$c^2=a^2+b^2-2ab \times cos(C)$').next_to(text2,DOWN,
buff=-0.3).scale(0.5)
        PA = Dot(color="#11DD00").move_to(np.array([-5, -1, 0])).scale(0.5)
        PB = Dot(color="#0354FD").move_to(np.array([-3, -1, 0])).scale(0.5)
        PC = Dot(color="#EB7C0C").move_to(np.array([-3.5, 1.5,
0])).scale(0.5)
        tA = Tex(r'$A$', color="#11DD00").next_to(PA, UL, buff=-
0.05).scale(0.5)
        tB = Tex(r'$B$', color="#0354FD").next_to(PB, DR, buff=-
0.05).scale(0.5)
        tC = Tex(r'$C$', color="#EB7C0C").next_to(PC, UL, buff=-
0.05).scale(0.5)
        LAB = Line(PA.get_center(), PB.get_center())
        LAC = Line(PA.get_center(), PC.get_center())
        LBC = Line(PB.get_center(), PC.get_center())
        TR1 = Polygon(PA.get_center(), PB.get_center(), PC.get_center(),
color=WHITE, fill_opacity=0.2)
        Ang1 = Angle.from_three_points(PC.get_center(), PB.get_center(),
PA.get_center(), radius=0.2, other_angle=False,color="#0354FD")
        ta =
Tex(r'$a$',color="#11DD00").next_to(LBC.get_midpoint(),RIGHT,buff=0.1).scale(
0.5)
        tb = Tex(r'$b$', color="#0354FD").next_to(LAC.get_midpoint(), LEFT,
buff=0.1).scale(0.5)
```

```
        tc = Tex(r'$c$', color="#EB7C0C").next_to(LAB.get_midpoint(), DOWN,
buff=0.1).scale(0.5)
        self.play(
            Write(text1)
        )
        self.wait()
        self.play(
            Write(text2),
            run_time=4
        )
        self.wait()
        self.play(
            Write(text3),
            run_time=3
        )
        self.wait(2)
        self.play(
            self.camera.frame.animate.scale(0.5).move_to(np.array([-4, 0,
0])),
            Create(Ang1),
            Create(TR1),
            Write(tA),
            Write(tB),
            Write(tC),
            Write(ta),
            Write(tb),
            Write(tc),
            GrowFromCenter(PA),
            GrowFromCenter(PB),
            GrowFromCenter(PC),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        G1 = VGroup(Ang1,TR1,tA,tB,tC,ta,tb,tc,PA,PB,PC)
        text4 = Tex(r'Circunferencia con radio $\overline{AB}$\\y centro
$A$').move_to([0, 0.5, 0]).scale(0.5)
        self.play(
            self.camera.frame.animate.scale(1.4).move_to(np.array([-3, -1,
0])),
            G1.animate.shift(RIGHT),
        )
        Cc1 =
Circle(2,stroke_width=1.9).move_to(PA.get_center()).set_color(color="#FF0000"
)
        self.play(
            Create(Cc1),
            Write(text4),
            run_time=2
        )
        self.add(PB)
        self.wait(4)
        self.play(
            Unwrite(text4, reverse=False),
            run_time=2
        )
        self.wait(3)
        PD = Dot(color="#0354FD").move_to(np.array([-2.97, 0.71,
```

```
0])).scale(0.5)
        PE = Dot(color="#0354FD").move_to(np.array([-6, -1, 0])).scale(0.5)
        PF = Dot(color="#0354FD").move_to(np.array([-2.15, -0.23,
0])).scale(0.5)
        tD = Tex(r'$D$', color=WHITE).next_to(PD, UP, buff=0.05).scale(0.5)
        tE = Tex(r'$E$', color=WHITE).next_to(PE, LEFT, buff=-
0.05).scale(0.5)
        tF = Tex(r'$F$', color=WHITE).next_to(PF, RIGHT, buff=-
0.05).scale(0.5)
        LAE = Line(PA.get_center(), PE.get_center(), color="#0354FD",
stroke_width=1.4)
        TR2 = Polygon(PB.get_center(), PF.get_center(), PE.get_center(),
color="#FCB900", fill_opacity=0.1,stroke_width=1.9)
        TRC2 = TR2.copy()
        Sq1 = Square(color="#FCB900",stroke_width=1.9).move_to(np.array([-
2.22, -0.33, 0])).rotate(11.31*DEGREES).scale(0.08)
        Ang2 = Ang1.copy().set_stroke(width=1.9)
        tc2 = tc.copy().next_to(LAE.get_midpoint(), DOWN, buff=0.1)
        self.play(
            GrowFromCenter(PD),
            GrowFromCenter(PF),
            Write(tD),
            Write(tF),
            run_time=2
        )
        self.add(PA)
        self.wait(17)
        self.play(
            GrowFromCenter(PE),
            Write(tE),
            Create(LAE),
            Write(tc2),
            run_time=3
        )
        self.wait(5)
        self.play(
            Create(TR2),
            run_time=3
        )
        self.wait()
        self.play(
            Create(Sq1)
        )
        self.wait(3)
        G2 = VGroup(TR2,Sq1,Ang2)
        self.add(TRC2)
        self.play(
            G2.animate.rotate(-
101.31*DEGREES,about_point=PB.get_center()).shift(RIGHT+1.5*DOWN).flip(UP),
            run_time=2
        )
        self.wait(4)

        text5 =
Tex(r'$Cos(B)$=',r'$\frac{BF}{2c}$',color="#FCB900").move_to(np.array([0.5,
0, 0])).scale(0.5)
        self.play(
```

```
            Write(text5),
            run_time=4
        )
        self.wait(2)
        text6 = Tex(r'$2c$$\times$$Cos(B)$',
r'=$BF$',color="#FCB900").move_to(np.array([0.5, 0, 0])).scale(0.5)
        self.play(
            FadeIn(text6[1]),
            Transform(text5,text6[0]),
            run_time=2
        )
        self.add(text6)
        self.wait(2)
        text7 = Tex(r'$2c$$\times$$Cos(B)$', color="#FCB900").next_to(TR2,
DOWN, buff=-0.1).scale(0.3)
        self.play(
            text5.animate.next_to(TR2, DOWN, buff=0.02).scale(0.6),
            FadeOut(text6),
            run_time=2
        )
        self.wait(4)
        #LBF = Line(PB.get_center(), PF.get_center(), color="#FCB900")
        LCF = Line(PC.get_center(), PF.get_center(), color="#FCB900")
        self.add(text7)
        text8 = Tex(r'$a$ ',r'$- 2c$$\times$$Cos(B)$',
color="#FCB900").next_to(LCF.get_midpoint(), RIGHT, buff=-1.5).rotate(-
78.69*DEGREES).scale(0.4)
        text8[0].set_color("#11DD00")
        text8[1][0].set_color(WHITE)
        self.play(
            FadeIn(LCF),
            FadeOut(TR2, Sq1, Ang2, text7, TRC2,ta),
            Transform(text5,text8),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        self.play(
            FadeOut(LCF)
        )
        self.wait(13)
        LAD = Line(PA.get_center(), PB.get_center(), color="#FCB900")
        LCD = Line(PC.get_center(), PD.get_center(), color="#FCB900")
        self.play(
            FadeIn(LAD)
        )

        self.play(
            Rotating(LAD,radians=59.04*PI/180, about_point=PA.get_center()),
            FadeOut(tb),
            run_time=1
        )
        self.wait(5)
        tc5 = tc.copy().next_to(LAD.get_midpoint(), LEFT, buff=0.1)
        self.play(
            FadeIn(tc5)
        )
        self.wait(4)
```

```
        text9 = Tex(r'$b-c$', color="#FCB900").next_to(LCD.get_midpoint(),
LEFT, buff=-0.3).rotate(59.04*DEGREES).scale(0.4)
        text9[0][0].set_color("#0354FD")
        text9[0][1].set_color(WHITE)
        self.play(
            FadeOut(LAD),
            FadeIn(LCD),
            Write(text9),
            tD.animate.next_to(PD,LEFT,buff=0.15),
            run_time=2
        )
        self.wait(6)
        PG = Dot(color="#0354FD").move_to(np.array([-5.03, -2.71,
0])).scale(0.5)
        tG = Tex(r'$G$', color=WHITE).next_to(PG, DL, buff=-0.05).scale(0.5)
        LAG = Line(PA.get_center(), PG.get_center(), color="#0354FD",
stroke_width=1.4)
        TR3 = Polygon(PB.get_center(), PD.get_center(), PC.get_center(),
color="#FCB900", fill_opacity=0.1,stroke_width=1.9)
        TR4 = Polygon(PC.get_center(), PF.get_center(), PG.get_center(),
color="#11DD00", fill_opacity=0.1,stroke_width=1.9)
        tc6 = Tex(r'$c$', color="#EB7C0C").next_to(LAG.get_midpoint(), LEFT,
buff=0.1).scale(0.5)
        self.play(
            FadeOut(LAE,PE,tE,tc2,LCD),
            Create(LAG),
            FadeIn(PG,tc6),
            Write(tG),
            run_time=3
        )
        self.add(PA)
        self.wait(2)
        self.play(
            Create(TR4),
            run_time=2.5
        )
        self.wait()
        self.play(
            Create(TR3),
            run_time=2
        )
        AngC = Angle.from_three_points(PG.get_center(), PC.get_center(),
PB.get_center(), radius=0.2, other_angle=False,
                                    color="#FCB900")
        AngG = Angle.from_three_points(PF.get_center(), PG.get_center(),
PC.get_center(), radius=0.2, other_angle=False,
                                    color="#F90000")
        AngB = Angle.from_three_points(PC.get_center(), PB.get_center(),
PD.get_center(), radius=0.2, other_angle=False,
                                    color="#F90000")
        self.wait()
        self.play(
            Create(AngC),
            run_time=1
        )
        self.wait()
        self.play(
```

```
            Create(AngB),
            run_time=1
        )
        self.play(
            Create(AngG),
            run_time=1
        )
        self.wait(5)
        text10 = Text("SEMEJANTES").move_to(np.array([3.5,1,0])).scale(0.5)
        self.play(
            self.camera.frame.animate.shift(7*RIGHT),
            Write(text10),
            FadeOut(AngG,AngC,AngB),

TR3.animate.rotate(60.48*DEGREES,about_point=PB.get_center()).flip(UP).shift(
7.6*RIGHT),
            TR4.animate.rotate(-40.83 * DEGREES,about_point=[-3.04,-
1,0]).shift(7*RIGHT),
            run_time=2
        )
        ta2 =
Tex(r'$a$',color="#FCB900").next_to(TR3.get_center(),UL,buff=0).scale(0.5).ro
tate(
            18.21 * DEGREES)
        text9c = Tex(r'$b-c$',
color="#FCB900").next_to(TR3.get_center(),RIGHT,buff=0.3).scale(0.5).rotate(
            60.48 * DEGREES)
        text11 = Tex(r'$b+c$', color="#11DD00").next_to(TR4.get_center(), UL,
buff=-0.2).rotate(
            18.21 * DEGREES).scale(0.5).shift(0.2*UR)
        text12 = Tex(r'$a$ ',r'$- 2c$$\times$$Cos(B)$',
color="#11DD00").next_to(TR4.get_center(), RIGHT, buff=0.46).rotate(
            60.48 * DEGREES).scale(0.5)
        self.play(
            Write(ta2),
            Write(text9c),
            Write(text11),
            Write(text12),
            run_time=2
        )
        text13 = Tex(r'$\frac{b+c}{a}$',r' = ',r'$\frac{a-2c\times Cos(B)}{b-
c}$').move_to(np.array([3.7,-1.5,0])).scale(0.7)
        self.play(
            Indicate(text11,color="#FF0000"),
            Indicate(ta2,color="#FF0000"),
            Write(text13[0]),
            Write(text13[1]),
            run_time=1
        )
        self.play(
            Indicate(text12, color="#FF0000"),
            Indicate(text9c,color="#FF0000"),
            Write(text13[2]),
            run_time=2
        )
        text14 = Tex(r'$(b+c)(b-c)$', r' = ', r'$a(a-2c\times
Cos(B))$').move_to(
```

```
            np.array([3.7, -2, 0])).scale(0.5)
        self.play(
            Write(text14),
            run_time=2
        )
        self.play(
            FadeOut(text13),
            text14.animate.shift(0.5*UP)
        )
        text15 = Tex(r'$b^2-c^2$', r' = ', r'$a^2-2ac\times
Cos(B)$').move_to(
            np.array([3.7, -2, 0])).scale(0.5)
        self.play(
            Write(text15),
            run_time=2
        )
        self.play(
            FadeOut(text14),
            text15.animate.shift(0.5 * UP)
        )
        text16 = Tex(r'$b^2$', r' = ', r'$a^2+c^2-2ac\times
Cos(B)$').move_to(
            np.array([3.7, -2, 0])).scale(0.5)
        self.play(
            Write(text16),
            run_time=2
        )
        self.play(
            FadeOut(text15),
            text16.animate.shift(0.5 * UP)
        )
        self.wait()
        self.play(
            Restore(self.camera.frame),
            FadeOut(TR3,TR4,ta2,text9c,text11,text10, text12),
            text16.animate.next_to(text3[1],RIGHT)
        )
        self.play(
            Circumscribe(text16, Rectangle, time_width=5, color="#1ACB01"),
            Circumscribe(text3[1], Rectangle, time_width=5, color="#1ACB01")
        )
        self.wait()
        self.play(
            self.camera.frame.animate.scale(0.7).move_to(np.array([-3, -1,
0])),
            FadeOut(text16)
        )
        text17 = Tex(r'Todo esto se puede'
                     r'\\simplificar, utilizando el'
                     r'\\Teorema potencia de un punto').move_to(np.array([-
0.1,0.5,0])).scale(0.5)
        self.wait(2)
        self.play(
            Write(text17),
            run_time=4
        )
        self.wait()
```

```
        self.play(
            FadeOut(text17),
            run_time=2
        )

##############################################################################
###T.PP
        text1TPP = Tex(r'El teorema nos dice lo
siguiente:').move_to(np.array([3.5, 2.6, 0])).scale(0.5)
        text2TPP = Tex(r'Sea $P$ un punto y sea una recta que pase por $P$\\'
                       r'e interseque a una circunferencia en $A$ y $B$,
el\\'
                       r'producto de las medidas de los $\overline{PA}$ y
$\overline{PB}$ es constante').move_to(
            np.array([3.5, 2.6, 0])).scale(
            0.5)
        Cc1TPP = Circle(1.3).move_to(0.6 * UP + 2 * RIGHT)
        PPTPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([5, 1.6, 0])).scale(0.5)
        tPTPP = Tex(r'$P$').next_to(PPTPP, UR, buff=-0.05).scale(0.5)
        PATPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([0.95, 1.37,
0])).scale(0.5)
        tATPP = Tex(r'$A$').next_to(PATPP, UL, buff=-0.05).scale(0.5)
        PBTPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([2.95, 1.48,
0])).scale(0.5)
        tBTPP = Tex(r'$B$').next_to(PBTPP, UR, buff=-0.02).scale(0.5)
        PCTPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([1.28, -0.48,
0])).scale(0.5)
        tCTPP = Tex(r'$C$').next_to(PCTPP, DL, buff=-0.05).scale(0.5)
        PDTPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([3.3, 0.65, 0])).scale(0.5)
        tDTPP = Tex(r'$D$').next_to(PDTPP, DR, buff=-0.05).scale(0.5)
        PTTPP = Dot(color=GREEN).move_to(np.array([2.13, 1.89,
0])).scale(0.5)
        tTTPP = Tex(r'$T$').next_to(PTTPP, UL, buff=-0.02).scale(0.5)

        LAPTPP = Line(PPTPP.get_center(), PATPP.get_center())
        LCPTPP = Line(PPTPP.get_center(), PCTPP.get_center())
        LTPTPP = Line(PPTPP.get_center(), PTTPP.get_center())
        BR5 = BraceBetweenPoints([5, 1.6, 0], [0.95, 1.37, 0], buff=0.1)
        BRT5 = BR5.get_tex(r'PA', buff=0).scale(0.5)
        BR6 = BraceBetweenPoints([5, 1.6, 0], [2.95, 1.48, 0], buff=0.1)
        BRT6 = BR6.get_tex(r'PB', buff=0).scale(0.5)
        BR7 = BraceBetweenPoints([1.28, -0.48, 0], [5, 1.6, 0], buff=0.1)
        BRT7 = BR7.get_tex(r'PC', buff=0).scale(0.5).shift(0.27 *
LEFT).rotate(29.21 * DEGREES)
        BR8 = BraceBetweenPoints([3.3, 0.65, 0], [5, 1.6, 0], buff=0.1)
        BRT8 = BR8.get_tex(r'PD', buff=0).scale(0.5).shift(0.27 *
LEFT).rotate(29.21 * DEGREES)
        BR9 = BraceBetweenPoints([5, 1.6, 0], [2.13, 1.89, 0], buff=0.1)
        BRT9 = BR9.get_tex(r'PT', buff=0).scale(0.5)
        text3TPP = Tex(r'$PA$ ', r'$\times$', r' $PB$ ', r'=', r' $PC$ ',
r'$\times$', r' $PD$ ', r'=',
                       r' $PT^2$').move_to(
            0.3 * DOWN + 4.9 * RIGHT).scale(0.5)
        text4TPP = Tex(r'Tangente').next_to(LTPTPP, UP, buff=-
0.25).scale(0.3).rotate(-5.84 * DEGREES)
        self.play(
            self.camera.frame.animate.move_to(np.array([3.5, 1.1,
```

```
0])).scale(0.7143),
            Write(text1TPP),
            run_time=2
        )
        self.play(
            FadeOut(text1TPP),
            run_time=1
        )
        self.play(
            Write(text2TPP),
            Create(Cc1TPP),
            Create(LAPTPP),
            Create(PPTPP),
            Create(PATPP),
            Create(PBTPP),
            Write(tPTPP),
            Write(tATPP),
            Write(tBTPP),
            run_time=6
        )

        self.play(
            FadeIn(BR5),
            Write(BRT5),
            run_time=1
        )
        self.play(
            Transform(BRT5, text3TPP[0]),
            FadeOut(BR5),
            run_time=2
        )
        self.play(
            FadeIn(BR6),
            Write(BRT6),
            run_time=1
        )
        self.play(
            Write(text3TPP[1]),
            Transform(BRT6, text3TPP[2]),
            FadeOut(BR6),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        self.play(
            Create(LCPTPP),
            Create(PCTPP),
            Write(tCTPP),
            Create(PDTPP),
            Write(tDTPP),
            run_time=2
        )
        self.wait(2)
        self.add(PPTPP)
        self.play(
            FadeIn(BR7),
            Write(BRT7),
            run_time=1
```

```
        )
        self.play(
            Write(text3TPP[3]),
            Transform(BRT7, text3TPP[4]),
            FadeOut(BR7),
            run_time=2
        )

        self.play(
            FadeIn(BR8),
            Write(BRT8),
            run_time=1
        )

        self.play(
            Write(text3TPP[5]),
            Transform(BRT8, text3TPP[6]),
            FadeOut(BR8),
            run_time=2
        )

        self.play(
            FadeOut(text2TPP),
            run_time=3
        )
        self.play(
            Create(LTPTPP),
            Create(PTTPP),
            Write(text4TPP),
            Write(tTTPP),
            run_time=2
        )
        self.add(PPTPP)
        self.play(
            FadeIn(BR9),
            Write(BRT9),
            run_time=1
        )

        self.play(
            Write(text3TPP[7]),
            FadeOut(BR9),
            Transform(BRT9, text3TPP[8]),
            run_time=2
        )
        text5TPP = Tex(r'Cuando la recta es tangente $\Rightarrow$ Caso
especial (Potencia de $P$)').move_to(
            np.array([3.5, 2.6, 0])).scale(0.5)
        text6TPP = Tex(r'Potencia de $P$').next_to(text3TPP[1], DOWN, buff=-
0.05).scale(0.3)
        text6CTPP = text6TPP.copy().next_to(text3TPP[5], UP, buff=0.1)
        text7TPP = Tex(r'Caso\\Especial').next_to(text3TPP[8], DOWN, buff=-
0.3).scale(0.3)
        self.play(
            Write(text5TPP),
            Write(text6TPP),
            Write(text6CTPP),
```

```
            Write(text7TPP),
            run_time=2.5
        )
        self.wait()
        self.add(text3TPP)
        self.remove(BRT5, BRT6, BRT7, BRT8, BRT9)
        Group = VGroup(Cc1TPP, LTPTPP, LAPTPP, LCPTPP, PPTPP, tPTPP, PATPP,
tATPP, PBTPP, tBTPP, PCTPP, tCTPP, PDTPP,
                       tCTPP, PDTPP, tDTPP, PTTPP, tTTPP, text3TPP, text4TPP,
                       text6TPP, text6CTPP, text7TPP)
        text8TPP = Text("TEOREMA POTENCIA DE UN
PUNTO").move_to(np.array([3.5, 3.2, 0])).scale(0.3)
        self.play(
            Restore(self.camera.frame),
            FadeOut(text5TPP),
            Write(text8TPP),
            Group.animate.shift(0.7 * UP + 0.4 * RIGHT),
            run_time=2
        )

#############################################################################
########
        text18 = Tex(r'Utilizando el T. Potencia de un punto'
                     r'\\obtenemos:').move_to(np.array([-8, 0.5,
0])).scale(0.5)
        self.wait()
        self.play(
            self.camera.frame.animate.move_to(np.array([-6, -1,
0])).scale(0.7),
            run_time=2
        )

        self.play(
            Write(text18),
            run_time=2
        )
        self.wait(2)
        text19 = Tex(r'$(b+c)$',r'$(b-c)$', r' = ', r'$a$',r'$(a-2c\times
Cos(B))$').next_to(text18,DOWN, buff=0).scale(0.5)
        LCG = Line(PC.get_center(), PG.get_center(), color="#FCB900")
        self.play(
            Create(LCG)
        )
        self.play(
            Transform(LCG,text19[0]),
            run_time=2
        )
        self.play(
            Create(LCD)
        )
        self.play(
            Transform(LCD, text19[1]),
            Write(text19[2]),
            run_time=2
        )
        LCB = Line(PC.get_center(), PB.get_center(), color="#FCB900")
        self.play(
```

```
            Create(LCB)
        )
        self.play(
            Transform(LCB, text19[3]),
            run_time=2
        )
        self.play(
            Create(LCF)
        )
        self.play(
            Transform(LCF, text19[4]),
        )
        self.wait()
        self.add(text19)
        self.remove(LCF,LCD,LCG,LCB)
        text20 = Tex(r'$b^2-c^2$', r' = ', r'$a^2-2ac\times
Cos(B)$').next_to(text19,DOWN, buff=0).scale(0.5)
        text21 = Tex(r'$b^2$', r' = ', r'$a^2+c^2-2ac\times
Cos(B)$').next_to(text20, DOWN, buff=0).scale(0.5)

        self.play(
            Transform(text19, text20),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        self.play(
            Transform(text19, text21),
            run_time=2
        )
        self.wait()
        self.play(
            Restore(self.camera.frame),
            FadeOut(text18),
            text19.animate.next_to(text3[1], RIGHT),
            run_time=2
        )
        self.play(
            Circumscribe(text19, Rectangle, time_width=5, color="#1ACB01"),
            Circumscribe(text3[1], Rectangle, time_width=5, color="#1ACB01")
        )
        self.wait(22)
        self.play(
            self.camera.frame.animate.scale(0.5),
            FadeOut(Group,text8TPP,TR1,Ang1, Cc1, LAG,
PF,PD,PG,tD,tF,tG,PA,PB,PC,tA,tB,tC,
text5,text9,tc5,tc,tc6,text1,text2,text3,text19 ),
            FadeIn(UPNL, A2, O2),
            run_time=4
        )
        self.wait(15)

# manim -pql T2v1.py MCHv1
# manim -pqm T2v1.py MCHv1
# manim -pqh T2v1.py MCHv1
```

ANEXO (B) LIBRETO DEL VIDEO

Argumento dinámico de la Ley del Coseno (verbal)"

"Alguna vez se han preguntado ¿por qué la ley del coseno funciona? ¿Por qué se le dice Ley? que es lo que válida estas igualdades o que lo garantiza. En este video vamos a responder estas preguntas. (Sale ley del coseno y su definición)

- Para esto, vamos a crear un triángulo ABC como se muestra en pantalla; ahora creamos una circunferencia que tenga centro en A y que el radio sea la longitud AB. Dicha circunferencia interseca los segmento AC y BC del triángulo, en D y F respectivamente, con esto, tanto el lado a como el lado b, quedan divididos en dos segmentos, por este motivo, necesitamos hallar expresiones para cada uno de estos segmentos.

- Comencemos hallando la expresión para el segmento BF, para esto, vamos a extender el segmento AB desde A, de tal forma que el segmento BE sea el diámetro de la circunferencia, gracias a esto, podemos crear el triángulo BFE, este resulta ser un triángulo rectángulo por las propiedades de la circunferencia (añadir el teorema específico).

- Como este triángulo es rectángulo, podemos utilizar la propiedad trigonométrica que nos dice que el coseno del ángulo B va a ser igual a la medida del segmento BF sobre 2c y despejando esta ecuación ya sabemos la expresión para la medida del segmento BF, con este dato, inmediatamente podemos decir que la longitud del segmento CF es igual al lado a - BF que es el segmento mencionado previamente.

- Una vez tengamos la expresión para estos dos segmentos, vamos a hallar la expresión para los dos segmentos restantes, en la representación podemos notar rápidamente que el segmento AD es radio de la circunferencia, por lo tanto, la medida de este segmento va a ser igual al lado c y con esto podemos decir que la medida del segmento CD va a ser igual a b – c, al saber las expresiones de los cuatro segmentos, ahora vamos a extender el segmento AC desde A, hasta intersecar la circunferencia en un punto G, gracias a esto, podemos crear un triángulo CFG y un triángulo CDB.

- Estos triángulos comparten el ángulo C y, además, los ángulos CBD y CGF son ángulos congruentes por las propiedades de la circunferencia, por lo tanto, estos resultan ser semejantes (se muestra la semejanza). Por la semejanza podemos afirmar que se cumple la siguiente igualdad y por medio de algunas propiedades para la multiplicación y la adición en el conjunto de los reales hemos llegado a una de las tres ecuaciones que nos da la ley del coseno (se comparan los resultados). (Dejar un tiempo para comenzar con lo demás)

- Todo esto que acabamos de hacer gracias a la semejanza se puede simplificar, utilizando el teorema potencia de un punto. (Dejar un tiempo para comenzar con lo demás)

- Este teorema dice lo siguiente: Sea P un punto y sea una recta que pase por P e interseque a una circunferencia en A y B, el producto de la longitud de los segmentos PA y PB es constante, esto quiere decir que es constante para cualquier recta que pase por P e interseque a la circunferencia (Aparece definición y la representación), un caso especial de este teorema sucede cuando la recta que pasa por P es tangente a la circunferencia lo que nos da como resultado que la constante en este caso sería la longitud de dicho segmento elevada al cuadrado (Aparece el caso especial).

- Sabiendo que hace este teorema, vamos a utilizarlo en la situación que teníamos antes, en este caso el punto C es nuestra potencia y por esto el producto dado por la longitud de los segmentos CG y CD va a ser igual al producto de la longitud de los segmentos CB y CF. Luego, por medio de las mismas propiedades para la multiplicación y la adición hemos llegado nuevamente a la igual dada para la Ley del coseno de una manera más rápida.

- Como acabamos de observar, estas igualdades se cumplen para cualquier tipo de triángulo y quizás por este motivo se le ha dado el nombre de Ley del coseno, sabemos que en este video no hemos abordado la validación para las tres igualdades de la Ley del coseno, sin embargo, te invitamos a realizarlas utilizando el teorema potencia de un punto siguiendo un procedimiento similar al que acabamos de abordar en el video.

- Si quieres ver una exploración de una situación donde surge la necesidad de utilizar la Ley del coseno, puedes dar clic en el enlace a tu izquierda y si quieres ver su solución puedes dar clic en el link a tu derecha.

ANEXO (C) ELEMENTOS TEÓRICOS – SISTEMA DE REFERENCIA

Definiciones

Definición triángulo rectángulo

Un triángulo ΔABC es rectángulo si uno de sus ángulos es recto.

Definición Recta Tangente a una circunferencia

Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un solo punto.

Definición de Semejanza de Triángulos

Dos triángulos son semejantes si la razón de sus lados correspondientes es constante

Definición de Seno en Triángulos Rectángulos

Dado un triángulo rectángulo con Alpha uno de sus ángulos agudos, se define:

$$Sen\ (\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Definición de Seno en Triángulos Rectángulos

Dado un triángulo rectángulo con Alpha uno de sus ángulos agudos, se define:

$$Cos\ (\theta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Hechos Matemáticos

Teorema Potencia de un Punto

Sea P un punto y sea una recta que pase por P e inteseque a una circunferencia en A y B, el producto de las medidas de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ es constante.

Criterio de Semejanza AA

En dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes

Teorema Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo

Dado un ΔABC y una $\odot P$ que lo circunscribe: i. Si el AC es diámetro de $\odot P$, entonces el ΔABC es rectángulo con el $\angle B$ recto. ii. Si el ΔABC es rectángulo con el $\angle B$ recto, entonces el AC es diámetro de $\odot P$.

Propiedades de los números reales

Uniformidad de la adición. Para todo a, b, c, d, números reales, si

$$a = b \text{ y } c = d, \text{ entonces } a + c = b + d$$

En particular como $c = d$, tenemos que, si

$$a = b \text{ entonces } a + c = b + c$$

Uniformidad de la multiplicación. Para todo a, b, c, d, números reales, si

$$a = b \text{ y } c = d, \text{ entonces } a \times c = b \times d$$

En particular como $c = d$, tenemos que, si

$$a = b \text{ entonces } a \times c = b \times c$$