Equivalentes Relativistas de las Leyes Termodinámicas Aplicadas a un Universo Homogéneo No Estático

Por

Cristhian Iván Santoyo Panche

Código: 2009246047

Presentada como requisito para la obtención del título de

Licenciado en Física

Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá, Colombia

Agosto de 2015

Agradecimientos

Para mí es un gran placer agradecer a todas aquellas personas que de alguna u otra manera me han apoyado, enseñado y corregido. En especial quiero agradecer a mis papas y hermanos por siempre brindarme su apoyo incondicional. También agradezco a todas las personas que he conocido en el ámbito académico por sus enseñanzas; a los profesores del departamento de física, por formarme y enseñarme, me llevo grandes recuerdos y ejemplos a seguir, por ultimo agradezco a mis compañeros de física: Faiber, Michael, Jeisson, Consuelo y Edier por su amistad.

CRISTHIAN IVÁN SANTOYO PANCHE

Universidad Pedagógica Nacional

Agosto 2015

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 09-09-2015	**Página 1 de 3**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	EQUIVALENTES RELATIVISTAS DE LAS LEYES TERMODINÁMICAS APLICADAS A UN UNIVERSO HOMOGÉNEO NO ESTÁTICO
Autor(es)	Santoyo Panche, Cristhian Iván
Director	No Aplica
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 42 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	COSMOLOGÍA, TERMODINÁMICA RELATIVISTA, RELATIVIDAD GENERAL, RELATIVIDAD ESPECIAL, LORENTZ.

2. Descripción

En este documento se pretende hacer un estudio de las transformaciones obtenidas por Planck de las variables termodinámicas y las leyes de la termodinámica en sistemas en movimiento relativo y las desarrolladas por Tolman en relatividad general, para ser aplicadas en un modelo de universo.

3. Fuentes

[1] R.C. Tolman, Relativity, *Thermodinamics and Cosmology*, Clarendom Press, Londres (1934).
[2] R. Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* , Clarendon Press (1992).
[3] J. M. Sánchez, *El origen y desarrollo de la relatividad*, Editorial Alianza Universidad, España (1983).
[4] Serway, *Física*. Editorial McGraw-Hill (1992).
[5] G. Smoot and K. Davidson, *Arrugas En EL Tiempo*, Plaza and Janes Editores S.A, España (1994).
[6] D. Giancoli, *Física*, Pearson Educación, México (2008).
[7] Y. A. Cengel and M. A. Boles, *Termodinámica*, McGraw-Hill, México (2009).
[8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, San Francisco (1972).
[9] J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.
[10] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York (1958).
(1989).

4. Contenidos

Esta investigación se basa en el estudio de los equivalentes relativistas en relatividad general aplicados a un universo homogéneo no estático. Se presentan los principios básicos de la relatividad general y cosmología para entender la dinámica de un universo no estático. Se desarrollan las transformaciones de las variables termodinámicas para un sistema en movimiento relativo y los equivalentes relativistas de las leyes termodinámicas en relatividad especial y general. Los equivalentes relativistas de las leyes termodinámicas en relatividad general son aplicados a un universo homogéneo no estático.

5. Metodología

Enfoque Cuantitativo:

El enfoque cuantitativo es secuencial y probatorio. Parte de una idea que va acotándose y, una vez delimitada, se derivan objetivos y preguntas de investigación, se revisa la literatura y se construye un marco o una perspectiva teórica. De las preguntas se establecen hipótesis y determinan variables, se miden las variables en un determinado contexto, se analizan las mediciones obtenidas y se establece una serie de conclusiones respecto de las hipótesis.

Metodología de Investigación Transversal Descriptiva:

Tiene como objetivo indagar la incidencia de las modalidades o niveles de una o más variables en un fenómeno. El procedimiento consiste en ubicar en una o diversas variables a un grupo de fenómenos y así proporcionar su descripción. Es por tanto un estudio puramente descriptivo, y cuando se establecen hipótesis, estas son también descriptivas.

6. Conclusiones

El estudio de la termodinámica relativista nos permite ampliar el estudio de la relatividad especial a sistemas con una presión, temperatura y densidad determinada.

Los equivalentes de las leyes termodinámicas en relatividad especial, no cambian las ideas clásicas si no que amplían el campo de estudio de la termodinámica a sistemas con movimiento relativo.
El equivalente de la primera ley de la termodinámica en relatividad general está intrínseca en el tensor energía momento ya que al hacer la derivada covariante de este el tensor se conserva.

En las trasformaciones de las variables termodinámicas en relatividad especial la presión es invariable, en el equivalente de relatividad general se encuentra que la presión no depende de la posición corroborando la homogeneidad del modelo estudiado y a su vez el principio copernicano.

Elaborado por:	Cristhian Iván Santoyo Panche
Revisado por:	No Aplica

Fecha de elaboración del Resumen:	09	09	2015

Índice general

Introducción

La cosmología es la rama de la física más específicamente, la rama de la astrofísica que estudia la dinámica y la estructura a gran escala del universo. Particularmente intenta responder las preguntas relacionadas con el origen, evolución y destino del universo. Por medio de modelos y con el avance de la tecnología, la cosmología tal y como se entiende actualmente, nace en el siglo XX con el desarrollo de la relatividad general. Todo el compendio de la cosmología actual se conoce como el modelo estándar de la cosmología.

La cosmología se basa principalmente en la teoría de la relatividad general, pero ha necesitado de otras teorías de la física como la termodinámica y la mecánica cuántica para poder explicar la evolución del universo. Poder relacionar las teorías centrales de la física ha sido todo un desafío para los científicos contemporáneos. A lo largo de la de la historia se han logrado unificar teorías que se creía no tenían coincidencias, como las teorías que explicaban los fenómenos eléctricos y magnéticos. Maxwell llevó a cabo la unificación de los campos magnéticos y eléctricos en lo que se conoce como electromagnetismo. El 13 de junio de 1907 Max Planck escribe un artículo para la revista Akad der Wissensch titulado Zur Dynamik bewegter Systeme donde propone las transformaciones de las variables termodinámicas para un sistema en movimiento relativo. En este artículo Planck relaciona la teoría de la relatividad especial con la termodinámica por medio de transformaciones de Lorentz, desarrollando lo que se conoce actualmente como termodinámica relativista.

En este documento se pretende hacer un estudio de las transformaciones obtenidas por Planck de las variables termodinámicas y las leyes de la termodinámica en sistemas en movimiento relativo y las desarrolladas por Tolman en relatividad general, para ser aplicadas en un modelo de universo. Para este fin el documento está dividido en tres capítulos. El primer capítulo trata del modelo estándar de la cosmología, comenzando con los conceptos principales de la relatividad general.

El segundo capítulo trata los equivalentes relativistas de las leyes termodinámicas y las variables termodinámicas en relatividad especial y general. El tercer y último capítulo detalla la aplicación de los equivalentes relativistas a un universo estático homogéneo.

La gran herramienta para la elaboración de esta monografía fue el libro Relativity, Thermodinamics and Cosmology de Tolman. Para el estudio de relatividad general el libro Introducing Einstein's Relativity de Ray d'Inverno. La clase de cosmología dictada por el profesor Yesid Cruz de la Universidad Pedagógica Nacional fue referencia permanente para el trabajo.

Antecedentes

- Y. López and M. Castillo, *Modelo estándar de la cosmología*, Universidad Pedagógica Nacional. Asesor: Juan Manuel Tejeiro, 1992.

  Estudio de los diferentes modelos de universo de acuerdo a los parámetros de densidad y soluciones de las ecuaciones de Friedman.

- A. Bonilla, *Análisis fisicomatemático de la constante cosmológica con base en el modelo de universo de Einstein*, Universidad Pedagógica Nacional, 2007.

  Estudio de los cambios que se obtienen física y matemáticamente, al introducir la constante cosmológica. Solución de las ecuaciones de campo para el universo de Einstein y la explicación de la incorporación la constante cosmológica para la obtención de un universo estático.

- F. Rota, *Extensiones del modelo estándar del universo primitivo: nucleosíntesis primordial, axiones y materia oscura*, Universidad Autónoma de Barcelona. Asesor: Dr. Eduard Massó i Solder.

  Estudio del modelo estándar de la cosmología y la historia térmica del universo, centrándose en la nucleosíntesis primordial. Se hace un estudio de las etapas y los elementos que se crean en los primero tres minutos del universo y en que objetos astronómicos se encuentran dichos elementos.

Justificación

La física actual nos da explicación de fenómenos que se encuentran en diferentes escalas lo micro, lo macro y lo local. Cuando pensamos en termodinámica solo pensamos en procesos termodinámicos a nuestra escala, dejando a un lado las teorías termodinámicas de lo micro y lo macro. La cosmología apoyada en la teoría de la relatividad general y en las observaciones astronómicas de objetos extremadamente distantes, nos da la explicación de lo macro, más específicamente la historia, la evolución, la composición y la dinámica del universo. Gracias a la teoría de la relatividad general el universo se describe como un todo por medio de unas ecuaciones que describen la íntima relación del espacio, el tiempo y la materia.

La descripción del universo como un todo nos permite estudiar su termodinámica a través del tiempo, modelando el universo como un fluido perfecto este estudio nos da la posibilidad de entender qué sucedió unos cuantos segundos después del Big Bang y la explicación de las diferentes etapas del universo, La comprensión de estos fenómenos son de gran importancia para los físicos porque nos da la posibilidad de entender que le sucedió y que le sucederá al universo. Este es un tema que nos acerca a la investigación de punta que se hace actualmente en física, que debe ser divulgado para estar al tanto de las teorías modernas.

La importancia de la ciencia en la preparación de los docentes y su incidencia en la formación de nuevas generaciones hace, entonces, necesaria la formación de los educadores para los diferentes niveles del sistema educativo, tanto en las dinámicas del saber científico, que garantiza su aporte al conocimiento del mundo, como en la dinámica pedagógica, mediante la cual el discurso científico se transforma y adquiere un nuevo significado (Ibarra, 2005). Este trabajo está basado en la primera dinámica, el saber científico, ya que en la educación el conocimiento que posee el profesor es de gran importancia, ya que a mayor conocimiento, más posibilidades existirán para poder ayudar a sus alumnos a sus tareas de aprendizaje (Labatut, 2003).

El profesor siempre puede y debe, continuar aprendiendo, concibiendo el aprendizaje como una actividad estratégica, planificada y controlada por la persona que aprende y que se construye a lo largo de toda la vida (Moreno, 1989), en otras palabras es un proceso en construcción y constante cambio. El tomar conciencia de lo aprendido, es posible cuando el sujeto utiliza la actividad metacognitiva, entendida la metacognición como la autoregulación y comprensión de nuestro aprendizaje, comprende procesos de planificación, supervisión y evaluación (Labatut, 2003). El problema se resolverá utilizando la actividad metacognitiva, cuando el sujeto adquiere el conocimiento y resuelve el problema de una manera automática, esto indica que está en la primera fase; ya en la segunda fase, las acciones son conscientes y dirigidas a una meta (Labatut, 2003).

Problema

La unificación de las teorías físicas ha sido un gran desafío para los científicos del siglo pasado y el presente. En especial unificar la mecánica cuántica y la relatividad general. Han surgido varias teorías con el fin de lograr crear una base unificada que describa el comportamiento de las cuatro interacciones fundamentales. También se han construido teorías para poder comprender procesos termodinámicos en sistemas que se mueven cercanos a la velocidad de la luz o comprender la evolución del universo. El desarrollo de la formulación relativista de la termodinámica fue propuesta por Max Planck en 1907[1] y validada por otros autores como Einstein[2], Tolman[3] y W. Pauli[4]. Otro tipo de transformaciones fue propuesto por Ott[5] en 1963. En esta monografía se tendrán en cuenta las trasformaciones formuladas por Plank. Las transformaciones de las variables termodinámicas propuestas por Planck, fueron desarrolladas en el contexto de la relatividad especial, lo que nos lleva a preguntarnos si es posible una formulación para la relatividad general y de ser el caso puede ser aplicada a un modelo de universo.

- ¿De qué manera a través de la formalización de la termodinámica y las teorías de relatividad especial y general obtener una mejor comprensión de las variables termodinámicas y las leyes termodinámicas que rigen a un universo modelado como un fluido perfecto?

[1]M. Planck, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, p. 542 (1907); *Ann. der Phys.*, 76, 1 (1908).
[2]A. Einstein, *Jahrb. F. Rad. and El.*, 4, 411 (1907).
[3]R.C. Tolman, *Relativity, Thermodinamics and Cosmology*, Clarendom Press, Londres (1934).
[4]W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York (1958).
[5]H. Ott, *Zeits. f. Phys.*, 175, 70 (1963).

Objetivos

Objetivo General

Analizar las variables termodinámicas y las leyes termodinámicas en un contexto relativista con aplicación a un universo homogéneo no estático modelado como un fluido perfecto.

Objetivos Específicos

- Describir los diferentes tipos de universo de acuerdo a los parámetros de densidad.
- Describir los equivalentes relativistas de la primera y segunda ley de la termodinámica.
- Describir las transformaciones de las variables termodinámicas en relatividad especial.
- Describir los equivalentes relativistas de las leyes termodinámicas en relatividad especial y relatividad general.

Capítulo 1

Relatividad General

Albert Einstein, en 1907, por petición de Johannes Stark[1] escribe un artículo para la revista *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* (Anuario de Radiactividad y Electrónica) titulado *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen* (Sobre el principio de la relatividad y las conclusiones extraídas de la misma), donde escribe todo lo relacionado con la relatividad especial que se conocía hasta ese momento. En 1907 se conocían solo dos fuerzas: la electromagnética y la gravitacional. Estas fuerzas están basadas en las formulaciones de la electrodinámica de Maxwell y la teoría gravitacional de Newton respectivamente, la formulación maxwelliana es invariante bajo transformaciones de Lorentz, pero la formulación newtoniana no, Einstein decide formular la teoría de la gravitación que sea compatible con los principios relativistas, en dicho artículo, Einstein, sienta las bases para resolver este problema, en una de las secciones titulada "Sistemas de referencia acelerados y campos gravitacionales", enunciando dos principios; el primero, *"El principio de covariancia"*, las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistema de referencia; el segundo, *"El principio de equivalencia"*, un sistema inmerso en un campo gravitatorio es localmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial.

Las herramientas conceptuales y matemáticas para alcanzar los objetivos de la monografía se encuentran en la teoría de relatividad general. En este capítulo se abordaran tópicos de esta rama de la física.

---

[1]Johannes Stark(15 de abril de 1874 - 21 de junio de 1957) físico alemán, ganador del Premio Nobel de Física de 1919 por su descubrimiento del efecto Doppler en los rayos canales y por el desdoblamiento de las líneas espectrales en campos eléctricos

En 1915 Albert Einstein formula la teoría de la relatividad general, presentando en 1916 una solución de las ecuaciones de campo, esta solución es el primer modelo matemático del universo basado en la relatividad general, a la cual se conoce con el nombre de "universo estático", para llegar a esta solución Einstein introduce la constante cosmológica[2] y formula el principio cosmológico[3]. A partir de esto se crea la cosmología, entendida como disciplina auténticamente científica.

1.1. Principios de Equivalencia

1.1.1. Equivalencia en el Contexto Newtoniano

Newton había considerado en su época, la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional de un cuerpo. La masa inercial (m_i) es la resistencia que presenta un cuerpo al cambio de movimiento, la masa gravitacional (m_g) es la medida de la reacción que experimenta un cuerpo en un campo gravitatorio. La masa inercial es la tratada en la segunda ley de Newton, se conoce también con el nombre de "inercia del cuerpo". Más exactamente es

$$F = m_i a$$

Como se puede ver en la fórmula la masa inercial no tiene nada que ver con la gravedad. Por el contrario, la masa gravitacional es la medida de la fuerza de atracción gravitatoria que experimenta un cuerpo dentro de un campo gravitatorio. Esta fuerza es hallada gracias a la Ley de Gravitación Universal de Newton donde se tiene

$$F = m_g g$$

La relación de estas masas en el contexto newtoniano, viene de la experimentación, suponiendo dos cuerpos de masas distintas, si se dejan caer al mismo tiempo de cierta altura, despreciando las fuerzas no fundamentales como el rozamiento con el aire, se tiene que los dos cuerpos tocan el suelo al mismo tiempo. Los dos sufren la misma aceleración independientemente de su composición. Si

[2]Propuesta para modificar las ecuaciones de campo, de tal forma que este factor anulara la atracción de la gravedad, dando como resultado un universo estático y uniforme(Denotada por Lambda: Λ).

[3]En escalas espaciales suficientemente grandes (cientos de megapárcecs; 1 pársec= $3,2616$ años luz $= 3,0857 \times 10^{16} m$), el Universo es isótropo (las propiedades físicas no dependen de la dirección en que son examinadas) y homogéneo (cualquier punto del Universo luce igual y tiene las mismas propiedades que cualquier otro punto dado).

tenemos una partícula en caída libre obtenemos

$$m_i a = m_g g$$

Como la partícula se encuentra en un campo gravitatorio uniforme tenemos $a = g$, de esto se deduce que la masa inercial es igual a la masa gravitacional.

1.1.2. Principio de Equivalencia Débil

El principio es demostrado gracias a los experimentos mentales de Einstein, llamados experimentos de elevación, enuncian lo siguiente: Una persona en un ascensor, sin vista y comunicación con el exterior, en el interior del ascensor se encuentran equipos que le permiten llevar a cabo experimentos sencillos de dinámica, el objetivo de la persona en el ascensor es tratar de determinar su estado de movimiento, teniendo en cuenta dos movimientos:(Ver figura 1.1)

1. El ascensor se coloca en una nave espacial en una parte del universo lejos de los cuerpos gravitantes, la nave se encuentra en reposo, si la persona suelta un objeto dentro del ascensor notara que este está en reposo con respecto a él, la persona deduce que está en caída libre.

2. La nave se acelera en la dirección del techo del ascensor, con una aceleración g constante, la persona en el ascensor suelta un objeto y observa que este cae con una aceleración g.

De los dos movimientos se deduce el principio de equivalencia débil: Un observador en reposo inmerso en un campo gravitatorio uniforme es localmente idéntico a un observador en un marco acelerado con una aceleración igual a la producida por el campo gravitatorio.

1.1.3. Principio de Equivalencia Fuerte

Considerando una partícula de prueba gravitatoria, se encuentra que su movimiento gravitacional depende únicamente de su posición en el espacio-tiempo, pero en sí misma no altera o contribuye al campo. El principio de equivalencia fuerte es propuesto de la siguiente forma: El movimiento de una partícula de prueba gravitacional en un campo gravitatorio es independiente de su masa y composición.

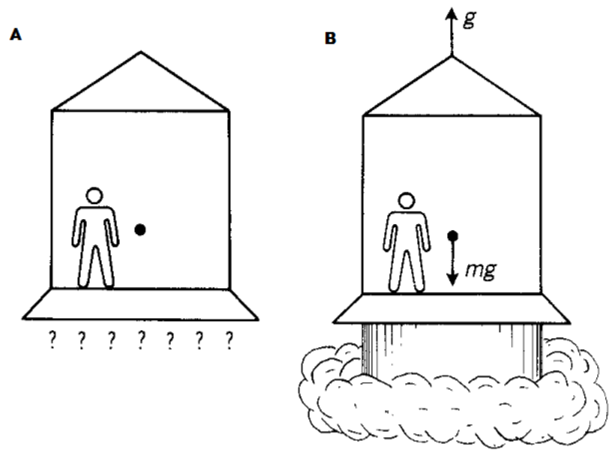

Figura 1.1: En la parte A de la figura el ascensor se encuentra en reposo en el espacio. En la parte B el ascensor es acelerado por la nave espacial.Imagen obtenida de R. Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* , Clarendon Press (1992)

1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein

El 25 de noviembre de 1915, Albert Einstein presenta a la Real Academia Prusiana de Ciencias la formulación definitiva de la teoría general de la relatividad, en su artículo titulado *Die Feldgleichungen der Gravitation* (Las Ecuaciones de Campo de la Gravitación), donde expone las ecuaciones correctas del campo gravitacional[4], expresadas en forma tensorial, que describen la íntima relación entre el espacio, el tiempo y la materia, como se muestra a continuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

La primera parte de la ecuación describe la curvatura del espacio-tiempo[5] y la segunda la distribución energía-momento[6]. Los términos se describen así: $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de curvatura de Ricci o la contracción $R_{\mu\mu}$, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ depende del elemento de línea utilizado , Λ es la constante cosmológica, G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento (Rota, 2005).

[4]Veintiún días antes, Einstein leía un artículo en la sesión plenaria de la Real Academia Prusiana de Ciencias, quedando a un paso de formular la versión final de la teoría de la relatividad general.

[5]$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$

[6]$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$

1.3. Modelo Estándar de la Cosmología

1.3.1. Principio Cosmológico

Introducido por Einstein, fue motivado particularmente por las ideas de Ernst Mach, más específicamente el Principio de Mach. En términos generales, las leyes de la física deben ser invariantes o independientes del espacio absoluto. Einstein pensaba que la única manera de dar una base teórica firme a la cosmología era suponer que existe una simplicidad básica en la estructura global del universo. El principio cosmológico logra esta simplicidad basado en dos principios básicos, la homogeneidad e isotropía del universo. El principio cosmológico plantea, a escalas espaciales suficientemente grandes; del promedio de celdas de diámetro de 10^8 años luz, estas celdas son lo suficientemente grandes para incluir varios cúmulos de galaxias, el universo a estas escalas cumple con estos dos principios:

- Homogeneidad, es la generalización del principio copernicano, el cual nos dice que no vivimos en un lugar privilegiado del espacio. Einstein lo generaliza afirmando, no hay un punto en el espacio que sea indistinguible de otro.
- Isotropía, no hay dirección privilegiada, al medir una variable física en cierta dirección, esta medición debe ser igual en todas la direcciones.

1.3.2. Postulados de Weyl

Hermann Weyl se preguntó cómo una teoría como la relatividad general se podía aplicar a un sistema único como el universo, para lograr obtener una medida del tiempo en cualquier momento del pasado a partir de la época de Planck[7], para esto se introducen las coordenadas comóviles[8] y se modela el espacio como un fluido donde las galaxias se mueven como partículas fundamentales en el fluido, en los puntos donde las hipersuperficies intersectan ortogonalmente a las líneas de

[7]Es la unidad más pequeña de tiempo en la que se puede empezar a estudiar la evolución del universo, en otras palabras representa la unidad mínima de tiempo que podría medirse, en consecuencia de esto la historia del universo es estudiada a partir de la culminación de un tiempo de Planck ($t_P = 10^{-43}s$), este tiempo es lo que demora un fotón en recorrer una distancia igual a la longitud de Planck ($l_P = 1{,}6x10^{-35}m$).

[8]Sistema de referencia que se mueve con la partícula, la partícula permanece en reposo con respecto al marco.

universo de las galaxias, se puede definir un tiempo cósmico global, gracias a las coordenadas comóviles la expansión del universo es despreciada a la hora de medir distancias y tiempos en este sistema de coordenadas. Los postulados de Weyl son:

- Las líneas de mundo de las partículas divergen a un punto en el pasado. En otras palabras las geodésicas[9] solo se encontraran en un punto singular en el pasado y posiblemente también en un punto similar en el futuro. A través de cada punto del espacio tiempo pasa solo una geodésica, en consecuencia la materia en un punto posee una única velocidad. Esto significa que el fluido puede ser considerado como un *fluido perfecto*, esta es la esencia del postulado de Weyl.
- El plano Ortogonal a las líneas de mundo es localmente homogéneo e isotrópico (Ver figura 1.2)

.

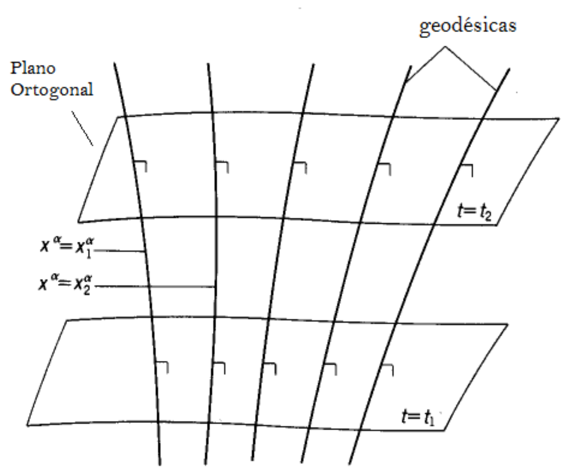

Figura 1.2: La superficie en dos tiempos y las geodésicas. Imagen obtenida de R. Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* , Clarendon Press (1992).

1.3.3. Tensor Energía-Momento

Las ecuaciones de Einstein nos dicen que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a la presencia de materia. Entonces se debe formular unas ecuaciones

[9]Línea de mínima longitud que une dos puntos en una determinada geometría.

que describan como la curvatura del espacio-tiempo en un punto está relacionado con la materia en ese punto. Las ecuaciones deben ser covariantes, covariante se refiere a que las leyes de la física deben tomar la misma forma para todos los marcos de referencia; ser invariantes ante las transformaciones de Lorentz, por lo que las leyes deben ser expresadas tensorialmente ya que los tensores son covariantes.

Consideremos una distribución de un fluido que dependa del tiempo y cuyas partículas componentes no interactúan entre ellas, todas de masa m_o, la distribución se puede caracterizar por la densidad de materia ρ del fluido y el trivector velocidad $\vec{u}$ medido desde un sistema inercial S, para este caso se toma el fluido en reposo teniendo $\vec{u} = 0$, la densidad de materia propia es $\rho_o = m_o n_o$ donde n_o es el número de partículas por unidad de volumen N/V_o . Ahora si tomamos un marco de referencia S' con una velocidad relativa respecto a S, tenemos que el número de partículas por unidad de volumen medida desde S' sufrirá una contracción $n' = \gamma n_o$ la masa ahora será $m' = \gamma m_o$ por lo que tenemos que la densidad medida desde S' es igual a $\rho' = \gamma^2 \rho_o$. Con esto concluimos que el tensor Energía-Momento debe ser de rango dos, en cualquier punto del espacio se puede escribir un tensor de rango dos T a partir del producto tensorial de los cuadrivectores velocidad

$$T(x) = \rho_o u_o(x) \otimes u_o(x) \tag{1.2}$$

En un sistema de coordenadas x^u donde el cuadrivector velocidad es u^u las componentes contravariantes de $T(x)$ son:

$$T^{\mu\nu} = \rho_o u_o^\mu u_o^\nu \tag{1.3}$$

Para conocer el significado físico de cada componente vamos a considerar T en algún punto P en un sistema de coordenadas S inercial:

T^{oo}: Es la densidad de energía total, incluyendo cualquier energía potencial debida a las fuerzas entre las partículas y a la energía cinética derivada de su movimiento térmico.

T^{oi}: Aunque no hay movimiento del volumen total del fluido, la energía puede ser transmitida por conducción de calor, así pues, este es básicamente un término de conducción en S.

T^{io}: De nuevo, aunque las partículas no sufren un movimiento global, si el calor es transmitido entonces la energía conllevara a un transporte de momento.

T^{ij}: El movimiento térmico de las partículas daría un aumento del flujo de momento, de modo que T^{ij} es la presión isotrópica en la dirección i y $T^{ij}(i \neq j)$ son los esfuerzos viscosos en el fluido.

Tensor energía-momento de un fluido perfecto

Un fluido perfecto es aquel que no tiene viscosidad; resistencia nula a las deformaciones. Las componentes del tensor T son:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_o c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_o \end{pmatrix}$$

Escribiendo la forma completamente covariante para las componentes del tensor energía-momento de un fluido perfecto:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_o + p_o/c^2)u^\mu u^\nu - p_o g^{\mu\nu} \tag{1.4}$$

1.3.4. Métrica de Robertson-Walker

Los principios básicos del modelo estándar de la cosmología; son la homogeneidad e isotropía de el universo a grandes escalas. La evidencia más clara de estos principios la encontramos en las observaciones a la radiación cósmica de fondo de microondas, que nos revelan que la anisotropía del universo es de una parte en 10^5. El principio copernicano nos dice que no vivimos en un lugar privilegiado del universo, de esta manera se dice que el universo es homogéneo. Bajo estas condiciones de homogeneidad e isotropía, la métrica que describe el espacio tiempo del universo viene dado por la forma simétrica de Robertson-Walker.

$$ds^2 = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2(\theta)d\varphi^2\right] \tag{1.5}$$

Donde t, r, θ, φ, son las coordenadas comóviles. El parámetro k caracteriza la curvatura espacial y puede valer $1, 0, -1$, según el universo sea espacialmente cerrado, plano o abierto, respectivamente (Ver figura 1.3). El parámetro $R(t)$ es el factor de escala del universo y su dependencia temporal describe la expansión cosmológica.

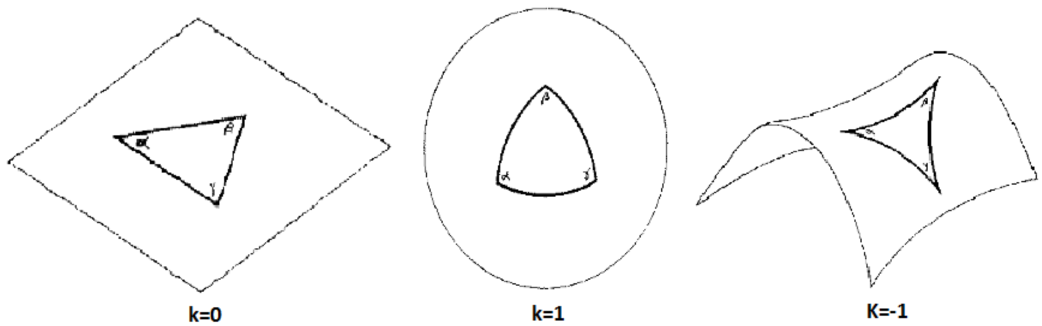

Figura 1.3: Tipos de geometría según el parámetro de curvatura k. En el espacio plano $k = 0$ la suma de los ángulos en radianes es: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, la suma de los ángulos en el espacio cerrado $k = 1$ es: $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ esto es denominado *espacio de curvatura positiva*, la suma de los ángulos en el espacio abierto $k = -1$ es: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ esto es denominado *espacio de curvatura negativa*.

1.3.5. Ecuaciones de Friedman

Determinadas por Alexander Friedman en 1922 a partir de las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica Robertson-Walker y un fluido con una densidad de energía ρ y una presión p. Resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein con el tensor materia energía de un fluido perfecto y la métrica de Robertson-Walker se encuentran las ecuaciones principales que rigen la dinámica del universo. Las ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho \tag{1.6}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^4}(\rho + 3p) \tag{1.7}$$

La ecuación $(1{,}6)$ es de gran importancia ya que relaciona la dinámica del factor de escala con el contenido del universo. Donde $\frac{\dot{R}}{R}$ es el parámetro de Hubble $H(t)$ (Lopez, 1992).

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho - \frac{k}{R^2} \tag{1.8}$$

Las hipótesis sobre las que sustenta esta ecuación son la homogeneidad e isotropía del universo, y la validez de la relatividad general, que a su vez se basa en el principio de equivalencia. Cualquier tipo de cambio supondría una violación a alguna de las hipótesis.

La ecuación de Friedman también se puede utilizar para definir en cualquier instante una densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3c^4 H^2}{8\pi G} \Rightarrow \rho_c = 1,8x10^{-29} g/cm^3 \tag{1.9}$$

Introduciendo la constante cosmológica en la ecuación de Friedman (Bonilla, 2007)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho \tag{1.10}$$

Dividiendo por el parámetro de Hubble al cuadrado (H^2) se obtiene:

$$\frac{8\pi G}{3c^4 H^2}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{R^2 H^2} = 1 \tag{1.11}$$

Donde:

- Parámetro de densidad $\Omega_\rho = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3c^4 H^2}\rho$
- Parámetro de la densidad de la constante cosmológica $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$
- Parámetro de curvatura $\Omega_k = \frac{k}{R^2 H^2}$

$$\Omega_\rho + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \tag{1.12}$$

La fuerza de gravedad que actúa en contra de la expansión depende de la cantidad de masa existente en el universo. Si la cantidad de masa es menor que una cierta densidad crítica el universo seguirá en expansión.

Según los valores de las densidades sabremos si el universo es cerrado, abierto, o plano. Los valores de las densidades han sido aproximados a los siguientes valores, parámetro de densidad son los factores que contribuyen en la masa y energía, por lo tanto se tiene en cuenta materia bariónica, radiación y materia oscura, para un total de 0.3. El parámetro de curvatura medido experimentalmente arroja que es aproximadamente cero. Según estos datos estaríamos viviendo en un universo plano ya que la densidad de energía es aproximadamente el valor de la densidad critica, pero las investigaciones arrojan que la expansión del universo se está acelerando, esta aceleración se atribuye al parámetro de la densidad de la constante cosmológica, que se puede entender como un factor que actúa como una presión contraria a la gravedad,a esta densidad se le atribuye el 0,7 faltante, para así completar el 1 del contenido energético.

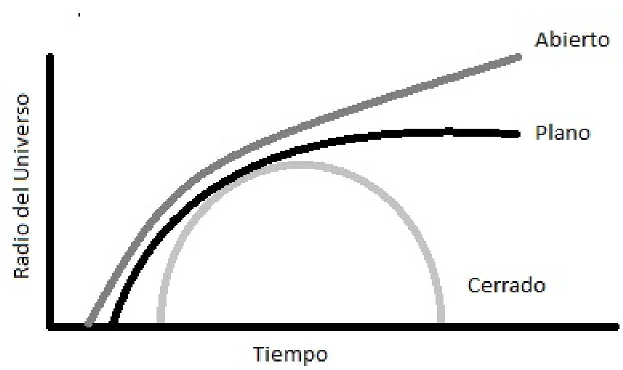

Figura 1.4: Dependiendo los valores de las densidades el universo será cerrado, abierto o plano

Más información sobre el factor de escala lo encontramos haciendo la conservación del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Fijando el índice $\mu = 0$ en esta expresión obtenemos:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) \tag{1.13}$$

Donde el primer término de la derecha describe cómo se diluye la energía debido a la expansión del universo y el segundo corresponde al trabajo realizado por la presión.

Para saber cómo se relaciona la presión con la densidad de energía suponemos una relación lineal

$$p = \omega\rho \tag{1.14}$$

Donde ω es una constante independiente del tiempo

$$\omega = \frac{P}{\rho} \tag{1.15}$$

Reemplazando en la ecuación de la conservación de la energía tenemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}(1 + \omega) \tag{1.16}$$

Resolviendo la ecuación encontramos la relación entre p y R

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)} \tag{1.17}$$

Para saber cómo se relaciona la densidad de energía con el factor de escala le damos distintos valores a ω teniendo en cuenta el tipo de fluido, los más importantes son la materia, la radiación y el vacío.

Para la densidad de energía de la materia se tiene que $\omega = 0$ entonces la relación queda

$$\rho_m \propto R^{-3} \tag{1.18}$$

Para la ecuación de estado de la radiación tenemos

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r \tag{1.19}$$

Para este caso la energía de densidad decrece como:

$$\rho_r \propto R^{-4} \tag{1.20}$$

Para el caso de la densidad de energía del vacío tenemos que $\omega = -1$

$$\rho_v = constante \tag{1.21}$$

La densidad de energía del vacío es constante.

Capítulo 2

Primera y Segunda Ley de la Termodinámica

La termodinámica se inicia en la primera mitad del siglo XVII, con la construcción de la primeras máquinas de vapor atmosféricas exitosas. Estas máquinas eran lentas e ineficientes. El término termodinámica proviene de las palabras griegas therme (calor) y dynamis (fuerza), lo cual corresponde a lo más descriptivo de los primeros intentos de mejorar el rendimiento de las máquinas de vapor destinadas a transformar el calor en trabajo mecánico.

En la actualidad, gracias a los principios termodinámicos se han logrado mejorar o crear dispositivos, se ha extendido su campo de acción; en lo que conocemos como físico-química es en gran parte aplicaciones de la termodinámica a la química, en la teoría de la información es utilizado el concepto de entropía para medir la incertidumbre de una fuente de información, en las últimas décadas se ha extendido al estudio a los agujeros negros para entender la perdida de información que se transporta, la producción de temperaturas muy bajas está basada en principios termodinámicos aplicados a imanes moleculares. En este capítulo se mostrara la primera y segunda ley de la termodinámica y sus respectivos equivalentes en las teorías de relatividad especial y relatividad general.

2.1. Primera ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica, conocida también como el principio de conservación de la energía, nos brinda una base para estudiar las relaciones entre las diversas formas de interacción de energía. Al aplicar la primera ley a un proceso dado se tiene en cuenta el sistema y sus alrededores, donde el sistema es la parte en donde se lleva a cabo el proceso y todo aquello con lo que interactúa el sistema se considera como sus alrededores. El sistema puede ser de cualquier tamaño, sus fronteras pueden ser reales o imaginarias, rígidas o flexibles. La ley de la termodinámica en su forma más sencilla puede escribirse como

$$\Delta \text{ energía del sistema} + \Delta \text{ energía de los alrededores} = 0 \tag{2.1}$$

Los cambios del sistema pueden darse en su energía interna, su energía cinética o potencial. El trabajo y calor en términos termodinámicos se refieren a energía en tránsito a través de la frontera que divide el sistema de sus alrededores, si un sistema es cerrado, todo intercambio de energía entre un sistema y sus alrededores se hace como calor o trabajo. El cambio total de energía de los alrededores es igual a la energía neta transferida desde o hacia él como trabajo y calor:

$$\Delta \text{ energía de los alrededores} = Q - W \tag{2.2}$$

Si en el sistema no hay cambio de masa y solo se presenta cambios en la energía cinética, potencial e interna el primer término de la ecuación (2.1) se puede escribir como:

$$\Delta \text{ energía del sistema} = \Delta U + \Delta K + \Delta P \tag{2.3}$$

Donde ΔU es la energía interna, ΔK energía cinética y ΔP energía potencial. Reemplazando (2.2) y (2.3) en (2.1) obtenemos la siguiente ecuación

$$\Delta U + \Delta K + \Delta P = Q - W \tag{2.4}$$

La forma en que se escriba la ecuación depende de la convención de signos utilizada, si el trabajo es realizado por los alrededores será positivo en cambio sí es realizado por el sistema será negativo, si el flujo de calor es del sistema a sus alrededores será negativo por el contrario si es de los alrededores al sistema será positivo.

Para un sistema estacionario[1] el cambio de energía cinética y potencial es cero ($\Delta K = \Delta P = 0$), obteniendo en su forma matemática más sencilla el principio de conservación de la energía para cualquier sistema cerrado:

$$\Delta U = Q - W \tag{2.5}$$

2.2. Segunda ley de la termodinámica

La base de la primera ley de la termodinámica es la conservación de la energía, pero hay ciertos procesos imaginarios donde se puede conservar la energía. Para solo tener en cuenta los procesos que suceden en la naturaleza, los científicos del siglo XIX formularon una nueva ley conocida como la segunda ley de la termodinámica. Distintos científicos formularon enunciados equivalentes, uno de estos enunciados es el formulado por Rudolf Clausius, el cual afirma que, el calor no puede fluir espontáneamente de un objeto frío a otro caliente, la única manera para que suceda este proceso es ejerciendo trabajo sobre el sistema. Este enunciado nos muestra un caso muy particular. Se necesita un enunciado más general que tenga en cuenta los demás procesos.

Un enunciado más general es formulado gracias al estudio de la maquinas térmicas. Una maquina térmica es todo equipo destinado a la producción de trabajo mecánico por medio de energía térmica. La primera máquina térmica con fines prácticos fue la máquina de vapor inventado por Thomas Newcomen en 1712. El principio básico de cualquier maquina térmica es la obtención de trabajo mecánico mediante un flujo de energía térmica de un foco a alta temperatura a otro de menor temperatura, por lo tanto deben haber al menos dos focos para que el funcionamiento sea cíclico, de lo anterior se deduce el enunciado formulado por Kelvin-Plank el cual afirma que no se puede crear una maquina térmica que convierta toda la energía térmica en trabajo mecánico operando cíclicamente.

El enunciado de Kelvin-Planck no incluye todos los procesos por lo cual se formuló un tercer enunciado en términos de una cantidad llamada entropía introducida por Rudolf Clausius en 1865. Para entenderla definimos los procesos reversible e irreversibles.

Todo proceso reversible es aquel que transcurre infinitamente lenta de tal manera que el sistema

[1]No hay cambios de velocidad y de posición del sistema como un todo.

pasa por una sucesión de estados en equilibrio, el cual se puede graficar en un diagrama pV, por medio de un cambio diferencial en el entorno el proceso se puede realizar a la inversa dejando el sistema y el entorno en su estado original, en el proceso inverso no hay cambio en la magnitud del trabajo efectuado o el calor intercambiado. Los procesos irreversibles por el contrario son los que es imposible regresar al estado original, debido a fricción, turbulencia del gas o cualquier otra situación, en este proceso es imposible definir una presión o una temperatura a cierto volumen por lo cual no se puede graficar en un diagrama pV, el sistema pasa de un estado de equilibrio a otro por medio de una serie de estados de no equilibrio, en la naturaleza todos los procesos son irreversibles pero los procesos reversibles tienen un gran valor teórico ya que permitieron el desarrollo de la segunda ley termodinámica así como el planteamiento de la máquina de Carnot.

La entropía es una variable de estado que depende de un estado inicial y un estado final, en otras palabras nos interesa el cambio de entropía en un proceso, está definida para un proceso reversible como:

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{2.6}$$

Donde dQ es el calor absorbido en el proceso y T la temperatura, la entropía se puede definir como la parte de energía que ya no se puede utilizar para generar trabajo. Todos los procesos en la naturaleza son irreversibles, entonces siempre va haber un aumento de entropía en el universo, la entropía para procesos irrreversibles es definida como:

$$\Delta S > \frac{dQ}{T} \tag{2.7}$$

En todos los procesos la entropía aumenta excepto en los procesos adiabáticos ya que no hay intercambio de calor.

2.3. Equivalente relativista de la primera ley de la termodinámica

Cuando ocurre un cambio de estado de un sistema, es importante tener en cuenta las dos maneras en que el contenido energético es alterado. La primera el flujo de calor y el segundo la realización de trabajo. Teniendo en cuenta estas dos maneras la primera ley de la termodinámica establece el principio de la conservación de la energía como (2.5):

$$\Delta U = Q - W \tag{2.8}$$

Donde ΔU es el cambio de energía del sistema correspondiente a un cambio de estado, Q es el flujo de calor de los alrededores al sistema y W es el trabajo realizado por el sistema sobre el entorno.

La teoría de la relatividad especial no cambia nuestras ideas en cuanto a la conservación de la energía y la distinción de calor y trabajo. Por esto la primera ley de la termodinámica en relatividad especial es tomada sin ninguna alteración como $\Delta U = Q – W$ (Tolman, 1934).

2.4. Equivalente relativista de la segunda ley de la termodinámica

Además de su energía E, la termodinámica también reconoce la entropía S de un sistema como una función definida de su estado. La primera ley relaciona el cambio de energía interna con el calor y trabajo, la segunda ley relaciona el cambio de entropía del sistema con la cantidad de calor absorbida en el proceso en cuestión. El cambio de contenido en la entropía para un proceso reversible está dado por:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} \tag{2.9}$$

donde T es la temperatura para cada elemento de dQ calor transferido a través del límite de los alrededores en el sistema. Para cualquier proceso irreversible tenemos la definición general de la segunda ley de la termodinámica:

$$\Delta S > \int \frac{dQ}{T} \tag{2.10}$$

donde la integral ahora se puede dar para cualquier proceso en estudio por el cual el sistema pasa de su estado inicial a su estado final (Tolman, 1934).

2.5. Transformación de Lorentz

Los equivalentes relativistas mostrados anteriormente solo nos proporcionaban información de cómo obtener el contenido energético de un sistema estacionario teniendo en cuenta la relatividad especial. Pero la relatividad especial nos provee de herramientas para estudiar sistemas que están en movimiento relativo al conjunto de ejes utilizados por el observador. Para hacer el estudio utilizaremos las dos leyes de la termodinámica en su forma clásica:

$$\Delta E = Q – W \tag{2.11}$$

para el cambio de energía por de medio de calor y trabajo, y:

$$\Delta S > \int \frac{dQ}{T} \tag{2.12}$$

para el cambio de entropía en términos de calor absorbido y temperatura.

Para poder utilizar las formulaciones anteriores se debe formular calor, trabajo, temperatura, energía y entropía de tal manera que cumplan con el sistema de referencia utilizado. Para que se sean válidas las transformaciones de las cantidades anteriores de un sistema en movimiento uniforme estas deben ser validas en el sistema de referencia en que se está movimiento el sistema y validas en el sistema de referencia en que el sistema se encuentra en reposo.

Para ello utilizamos la transformación de Lorentz en las cantidades involucradas. Para hacer los cálculos tenemos en cuenta un sistema sencillo donde se encuentra un fluido termodinámico que ejerce una presión igual en todas las direcciones, y cuyo estado se puede describir por dos variables como energía y volumen o temperatura y presión. Escribimos las ecuaciones de transformación de tal manera que relacionen la cantidad de interés en un sistema de coordenadas S, con un sistema de coordenadas S' que se mueve con el sistema termodinámico.

2.5.1. Volumen

El volumen de sistema termodinámico lo podemos escribir por medio de la contracción de Lorentz como:

$$V = \frac{V_o}{\gamma} \tag{2.13}$$

$$V = V_o\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{2.14}$$

donde V_o es el volumen propio medido en S' (Tolman, 1934).

2.5.2. Presión

Para la presión utilizamos la definición de fuerza por unidad de área, el sistema se mueve con una velocidad v en la dirección de las x, las fuerzas F_x, F_y, F_z actúan perpendicularmente al eje indicado, obteniendo las siguientes transformaciones:

$$F_x = F'_x \tag{2.15}$$

$$F_y = F'_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{2.16}$$

$$F_z = F'_z\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{2.17}$$

Donde F_x, F_y, F_z son medidas en el sistema de coordenada S'. El área perpendicular al eje x no es afectado por el factor de Lorentz y las otras dos áreas perpendiculares a los ejes y y z tienen un factor de Lorentz igual a uno ($\gamma = 1$), por lo cual obtenemos (Tolman, 1934):

$$p = p_o \tag{2.18}$$

La presión que ejerce el gas sobre las paredes es la misma para los dos observadores, uno en reposo relativo y el otro que se mueve con el sistema termodinámico, luego ésta constituye un invariante termodinámico.

2.5.3. Energía

Para obtener la ecuación de energía no utilizamos el sistema en movimiento, si no en reposo, y obtenemos un expresión de la fuerza necesaria para cambiar el sistema de su estado original. La aceleración no debe alterar el estado interno del sistema por lo cual internamente debe suceder un proceso adiabático cuasiestático. Para definir la fuerza primero expresamos el equivalente relativista de la cantidad de movimiento P de un fluido de volumen V como:

$$P = \frac{E + pV}{c^2} u \tag{2.19}$$

Utilizando la expresión de fuerza en términos de cantidad de movimiento $F = \frac{dP}{dt}$ y reemplazando se obtiene la expresión para la fuerza externa ejercida para acelerar el sistema.

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{E + pV}{c^2} u\right) \tag{2.20}$$

La razón de cambio de la energía del sistema es la suma del trabajo realizado por la fuerza F y el trabajo realizado por la presión

$$W = \int F \cdot dr \qquad \text{y} \qquad W = \int -pdV \tag{2.21}$$

$$\frac{dE}{dt} = F \cdot u \, - \, p\frac{dV}{dt} \tag{2.22}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior (2.20), se obtiene:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E + pV}{c^2} u\right) \cdot u - p\frac{dV}{dt} \tag{2.23}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt}\frac{u^2}{c^2} + p\frac{u^2}{c^2}\frac{dV}{dt} + \frac{E + pV}{c^2} u\frac{du}{dt} - p\frac{dV}{dt} \tag{2.24}$$

$$\frac{dE}{dt} - \frac{dE}{dt}\frac{u^2}{c^2} - p\frac{u^2}{c^2}\frac{dV}{dt} + p\frac{dV}{dt} = \frac{E + pV}{c^2} u\frac{du}{dt} \tag{2.25}$$

$$\frac{dE}{dt}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + p\frac{dV}{dt}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{E + pV}{c^2} u\frac{du}{dt} \tag{2.26}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}+p\frac{dV}{dt}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{E+pV}{c^2}u\frac{du}{dt} \tag{2.27}$$

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{d}{dt}(E+pV)=\frac{E+pV}{c^2}u\frac{du}{dt} \tag{2.28}$$

Integrando y evaluando en $u=0$

$$E+pV=\frac{E_o+p_oV_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.29}$$

Reemplazando (2.18) y (2.14), despejando se obtiene la transformación de Lorentz para la energía

$$E=\frac{E_o+p_oV_o\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.30}$$

2.5.4. Trabajo

El sistema se mueve a una velocidad constante u, el dW de trabajo realizado en el cambio del estado interior se puede escribir como la suma del trabajo realizado por la fuerza externa ($-\ u\cdot P$) para mantener una velocidad constante y el trabajo de la presión (pV):

$$dW=pV\ -\ u\cdot P \tag{2.31}$$

Sustituyendo la cantidad de movimiento (2.19):

$$dW=pV\ -\ u\cdot\frac{E+pV}{c^2}u \tag{2.32}$$

Reemplazando las transformaciones de presión (2.18), volumen (2.14) y la cantidad $E+pV$ (2.29)

$$dW=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}dW_o\ -\ \frac{\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}d(E_o+p_oV_o) \tag{2.33}$$

2.5.5. Calor

Para obtener la transformación de calor utilizamos la fórmula de la primera ley de la termodinámica para sistemas en movimiento

$$dE = dQ - dW \tag{2.34}$$

reemplazando el dE (2.30) y dW (2.33)obtenidos anteriormente

$$dQ = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}dW_o \ - \ \frac{\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}d(E_o + p_oV_o) + \frac{dE_o + d(p_oV_o)\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.35}$$

Restando y factorizando

$$dQ = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}(dW_o + dE_o) \tag{2.36}$$

Por lo tanto la ecuación tiene una corrección dada por el inverso del factor de Lorentz

$$Q = \frac{1}{\gamma}Q_o \tag{2.37}$$

2.5.6. Entropía

El proceso interno del sistema es adiabático cuasiestático lo que quiere decir que es reversible. Si hacemos el proceso inverso cambiamos la dirección de la fuerza y el entorno ejerce trabajo sobre el sistema, este regresará a su estado original teniendo un cambio de entropía nulo. Por lo cual podemos afirmar que el equivalente relativista de la entropía medido desde el observador que se encuentra en reposo con el sistema o el que está en movimiento relativo siempre va hacer igua. Por lo tanto la entropía es un invariante termodinámico.

$$S = S_o \tag{2.38}$$

2.5.7. Temperatura

Para hallar la transformación de la temperatura utilizamos la segunda ley de la termodinámica y las transformaciones de la entropía (2.37) y calor (2.38)

$$S \geq \frac{dQ}{T} \tag{2.39}$$

Reemplazando

$$S \geq \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}Q_o}{T} \tag{2.40}$$

Como $S = S_o$ necesariamente T tiene que tener una corrección dada por el factor de Lorentz para poder hacer la transformación del sistema S a S' (Tolman, 1934):

$$T = \frac{1}{\gamma}T_o \tag{2.41}$$

2.6. Primera Ley en Relatividad General

La primera ley de la termodinámica nos dice que la energía se conserva, para hallar un equivalente en la relatividad es necesario un tensor que cumpla con la condición de conservación, si hacemos la derivada covariante del tensor energía momento tenemos que se conserva la energía y el momento. En el contexto clásico en la primera ley de la termodinámica no se tiene en cuenta la cantidad de movimiento porque se trabaja con sistemas estacionarios. En relatividad especial se trabaja con sistemas que se mueven relativamente a determinada velocidad y en relatividad general se debe tener en cuenta el espacio-tiempo y la extensión del sistema estudiado por los efectos de la curvatura. La ecuación que relaciona el contenido energía-momento con la curvatura del espacio-tiempo, es la ecuación de campo de Einstein: en la cual se encuentra el tensor energía momento. Haciendo la derivada covariante del tensor energía momento tenemos (Tolman, 1934):

$$(T^{\mu\nu})_\nu = 0 \tag{2.42}$$

Por lo cual es un buen análogo ya que cumple los principios de conservación de energía y momento.

2.7. Segunda Ley en Relatividad General

Para expresar el análogo de la segunda ley de la termodinámica utilizamos la expresión cuadrimencional del equivalente relativista

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\phi\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\delta x\delta y\delta z\delta t \geq \frac{\delta Q_o}{T_o} \tag{2.43}$$

Donde ϕ_o es la densidad de entropía en el punto y tiempo de interés según lo medido por un observador local en reposo en un fluido termodinámico. La cantidad dx^{μ}/ds son las componentes de la velocidad macroscópica del fluido en ese punto con respecto a las coordenadas en uso. dQ_o es el calor medido por un observador local que fluye a la temperatura T_o adecuada en el elemento de fluido y durante el tiempo indicado por $\delta x\delta y\delta z\delta t$, y los dos signos de la igualdad y la desigualdad se refieren, respectivamente, a los casos de reversible y procesos irreversibles. Para cumplir los postulados de la relatividad general el equivalente relativista debe cumplir el principio de equivalencia y el principio de covariancia. El principio de equivalencia se cumple al utilizar siempre coordenadas naturales en el punto de interés y el principio de covarianza nos dice que todas las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los marcos de referencia, para cumplir hacemos la transformación covariante de la ecuación (2.43), el equivalente de la segunda ley de la termodinámica en relatividad general queda de la siguiente forma (Tolman, 1934):

$$\left(\phi\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)_{\mu}\sqrt{-g}\,\delta x^1\delta x^2\delta x^3\delta x^4 \geq \frac{\delta Q_o}{T_o} \tag{2.44}$$

Capítulo 3

Aplicación al Universo Homogéneo no Estático

En este capítulo se aplicaran los dos equivalentes de la primera y segunda leyes de la termodinámica en relatividad general, a modelos de universo homogéneos no estáticos que corresponden al elemento de línea:

$$ds^2 = -\frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_o^2]^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) + dt^2 \tag{3.1}$$

Utilizamos el equivalente relativista de la primera ley termodinámica como:

$$\frac{\partial \Im_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\Im^{\alpha\beta}\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \tag{3.2}$$

Como modelamos el universo como un fluido perfecto, los valores del tensor energía-momento que no son nulos son los de la diagonal:

$$T^{11} = -g^{11}p_o \quad T^{22} = -g^{22}p_o \quad T^{33} = -g^{33}p_o \quad T^{44} = \rho_o \tag{3.3}$$

Donde ρ_o y p_o son la densidad y la presión del fluido, medidos por un observador local que se encuentra en reposo. Sustituyendo (3.3) en (3.2) obtenemos para el caso de $\mu = 1$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(p_o\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}p_o\sqrt{-g}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{dr} + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{dr} + g^{33}\frac{\partial g_{33}}{dr} + g^{44}\frac{\partial g_{44}}{dr}\right) = 0 \tag{3.4}$$

Si simplificamos la ecuación obtenemos

$$-\sqrt{-g}\frac{\partial p_o}{\partial r} - p_o\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial r} + p_o\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial r} = 0 \tag{3.5}$$

Para $\mu = 1, 2, 3$ tenemos resultados similares lo cual nos comprueban la independencia de la presión de la posición, lo cual nos demuestra la homogeneidad del modelo del universo. No hay lugares privilegiados: siempre que medimos un invariante este debe ser el mismo en todas partes

$$\frac{\partial p_o}{\partial r} = \frac{\partial p_o}{\partial \theta} = \frac{\partial p_o}{\partial \phi} = 0 \tag{3.6}$$

Sustituyendo para el caso $\mu = 4$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{oo}\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}p_o\sqrt{-g}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{dt} + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{dt} + g^{33}\frac{\partial g_{33}}{dt}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Utilizando las expresiones para el g_{uv} dadas por el elemento de línea obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{oo}\frac{r^2\sin\theta e^{3/2g(t)}}{[1+r^2/4R_o^2]^3}\right) + p_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r^2\sin\theta e^{3/2g(t)}}{[1+r^2/4R_o^2]^3}\right) = 0 \tag{3.8}$$

La propiedad de volumen de cada elemento de fluido en cualquier intervalo está dada por

$$\delta V_o = \frac{r^2\sin\theta e^{3/2g(t)}}{[1+r^2/4R_o^2]^3}\delta r\delta\theta\delta\phi \tag{3.9}$$

Por lo tanto la ecuación la podemos escribir de la siguiente manera (Tolman, 1934)

$$\frac{d}{dt}(\rho_{oo}\delta V_o) + p_o\frac{d}{dt}(\delta V_o) = 0 \tag{3.10}$$

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo es obtener los equivalentes relativistas de la primera y segunda ley de la termodinámica aplicados a un universo homogéneo no estático, empezando por el estudio de la relatividad general, cosmología, termodinámica y relatividad especial con el fin de poder encontrar las transformaciones de las variables termodinámicas en la relatividad especial y los equivalentes relativistas de las dos leyes en relatividad general, del estudio anterior se llegó a las siguientes conclusiones:

Los equivalentes de las leyes termodinámicas en relatividad especial, no cambian las ideas clásicas si no que amplían el campo de estudio de la termodinámica a sistemas con movimiento relativo, donde las trasformaciones de las variables termodinámicas vienen desarrolladas por el factor de Lorentz. Se encontró que el volumen, la temperatura y el calor sus transformaciones de un sistema S a S' tienen una corrección dada por el inverso del factor de Lorentz y la presión es una invariable termodinámico bajo estas transformaciones.

El equivalente de la primera ley de la termodinámica en relatividad general está intrínseca en el tensor energía momento ya que al hacer la derivada covariante de este el tensor se conserva.

En las trasformaciones de las variables termodinámicas en relatividad especial la presión es invariable, en el equivalente de relatividad general se encuentra que la presión no depende de la posición corroborando la homogeneidad del modelo estudiado y a su vez el principio copernicano.

Bibliografía

[1] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodinamics and Cosmology*, Clarendom Press, Londres (1934).

[2] R. Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* , Clarendon Press (1992).

[3] J. M. Sánchez, *El origen y desarrollo de la relatividad*, Editorial Alianza Universidad, España (1983).

[4] Serway, *Física*. Editorial McGraw-Hill (1992).

[5] G. Smoot and K. Davidson, *Arrugas En EL Tiempo*, Plaza and Janes Editores S.A, España (1994).

[6] D. Giancoli, *Física*, Pearson Educación, México (2008).

[7] Y. A. Çengel and M. A. Boles, *Termodinámica*, McGraw-Hill, México (2009).

[8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, San Francisco (1972).

[9] J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

[10] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, New York (1958).

[11] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, New York (2008).

[12] P. Labatut, *Aprendizaje Universitario: Un enfoque metacognitivo*, Universidad Complutense, Madrid, (2004).

[13] O. Ibarra, *Saber pedagógico y saber disciplinar ¿Convergencia o divergencia?*, Revista paideia Surcolombiana, Edición 15, Neiva (2005).

[14] R. Sampieri and C. Fernández and M. Baptista, *Metodología De La Investigación*, Mc GRAW-HILL, Quinta edición, México (2010).

[15] A. Moreno, *Metaconocimiento y aprendizaje escolar*. Cuadernos de Pedagogía, Ed. 173, pag 53-58 (1989).

[16] Y. López and M. Castillo, *Modelo estándar de la cosmología*, Universidad Pedagógica Nacional. Asesor: Juan Manuel Tejeiro, 1992.

[17] A. Bonilla, *Análisis fisicomatemático de la constante cosmológica con base en el modelo de universo de Einstein*, Universidad Pedagógica Nacional, 2007.

[18] F. Rota, *Extensiones del modelo estándar del universo primitivo: nucleosíntesis primordial, axiones y materia oscura*, Universidad Autónoma de Barcelona. Asesor: Dr. Eduard Massó i Solder, 2005.