

**Descripción del Movimiento de dos Cuerpos bajo Fuerzas Centrales
Para Sistemas Relativistas**

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Licenciado en Física

Rubén Darío Zamora Duarte

**Asesor
Ignacio Alberto Monroy
Magister en Física**

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento De Física
Ciudad Bogotá
2013**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Descripción del movimiento de dos cuerpos bajo fuerzas centrales para sistemas relativistas.
Autor(es)	Zamora Duarte Rubén Darío
Director	Monroy Cañón Ignacio Alberto
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional 2013, 39 páginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Fuerzas centrales, relatividad especial, leyes de conservación, energía mecánica, momentum angular relativistas, momentum lineal, momentum angular.

2. Descripción
<p>Documento en el que se realiza una investigación documental, de la temática de fuerzas centrales de dos cuerpos para sistemas relativistas haciendo énfasis en los nuevos fenómenos que podrían aparecer y que no están contemplados en la mecánica clásica. En adición a esto se diseñará una rutina numérica en un software como una herramienta computacional para la descripción de las posibles trayectorias que tendría diferentes tipos de fuerzas centrales de dos cuerpos en sistemas relativistas.</p>

3. Fuentes
<p>Boyer, T. H. (2004, August). Unfamiliar trajectories for a relativistic particle in a Kepler. <i>American Journal of Physics.</i>, 72(8).</p> <p>Goldstein, H. (2002). <i>Mechanics classical</i>. Adisson Wesley.</p>

<http://home.web.cern.ch/>. (n.d.).

Keppner, D., & Kolenkow, R. (1978). *An Introduction To Mechanics*. McGraw Hill.

Marion, J. B. (2004). *Clasical Dinamics of Particles and Systems*. Thomson.

Serway, J. (2005). Relatividad especial. In J. Serway, *Introducción a la física para ingenieros* (pp. 145- 157). México: Mc Graw Hill.

4. Contenidos

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero se realiza una investigación documental; tanto histórica como matemática, en la cual se recopilará información sobre el problema de fuerzas centrales que comenzó rigurosamente desde kepler.

En el segundo capítulo se hace un estudio de la relatividad especial y se hace una presentación de las nociones en el cual se llega al concepto cinemático y dinámico de la relatividad especial para una partícula.

En el capítulo 3 se hace el estudio del problema de fuerzas centrales para sistemas relativistas. Se estudiará las posibles trayectorias de diferentes potenciales, en particular el que genera la fuerza tipo inverso al cuadrado, junto con el de una fuerza de tipo inverso al cubo. Se contrastarán los resultados de las órbitas obtenidas con las clásicas.

5. Metodología

El desarrollo del trabajo de grado está basado aprendizaje investigativo. Se hace una revisión del estado del arte entorno al problema de fuerzas centrales. Se encuentra que existe un trabajo parcial de la temática de fuerzas centrales para sistemas relativistas dado por la referencia de Boyer, con el problema de la fuerza tipo inverso al cuadrado de la distancia. Se reproduce algunos resultados en la obtención de las posibles órbitas. Se generaliza el trabajo teórico de Boyer para otros tipos de sistemas de fuerzas centrales. Por medio de una rutina numérica se estudia un caso particular de una fuerza tipo inverso al cubo de la distancia y se determinan unas posibles gráficas de trayectorias.

6. Conclusiones

1. Se hizo una revisión del problema de fuerzas centrales desde la mecánica clásica.
2. Se hizo una descripción del problema de fuerzas centrales a sistemas relativistas. Se obtuvo la ecuación de la trayectoria en una versión relativista.
3. Se analizó el problema de la fuerza tipo inverso al cuadrado, se obtuvieron las posibles órbitas para este caso, en las cuales coincidían con el trabajo del artículo (Boyer, 2004), se resalta en los resultados las diferencias de las órbitas clásicas y relativistas.
4. Se hizo el análisis la descripción del problema de fuerzas centrales relativistas para el caso de una fuerza tipo inverso al cubo, se obtuvieron las posibles órbitas a partir de una solución numérica y se contrastaron con las órbitas clásicas

Elaborado por:	Rubén Darío Zamora Duarte
Revisado por:	Ignacio Alberto Monroy

Fecha de elaboración del Resumen:	30	05	2013
--	----	----	------

Tabla de contenido

Introducción	6
Problema	7
Objetivo General	8
Objetivos específicos	8
Metodología de trabajo	9
Capítulo 1	10
1.1 El problema de fuerzas centrales en la mecánica clásica	10
1.2 Leyes de conservación	12
1.3 Análisis de la ecuación radial	17
1.4 Solución de la ecuación radial para el problema de una fuerza del inverso al cuadrado	19
Capítulo 2.	27
2.1 Relatividad especial	27
2.2 energía mecánica, momentum angular relativistas	28
2.2.1 Energía Mecánica	29
2.2.2 Momentum Lineal	30
2.2.3 Momentum angular	31
Capítulo 3.	33
3.1 Problema de fuerzas centrales para sistemas relativistas	33
3.2 Análisis del Problema de Fuerzas Centrales	34
3.3 Solución de la ecuación radial relativista para el problema de una fuerza del inverso al cuadrado	37
3.4 Solución de las ecuaciones de la órbita	38
3.5 Ejemplo de una fuerza del tipo inverso al cubo	41
Resultados y Conclusiones	47
Bibliografía	48

INTRODUCCIÓN

El problema de fuerzas centrales ha sido una temática fundamental en la mecánica clásica, como en la descripción del movimiento de los planetas en el sistema solar. En algunos casos esta temática da lugar a hacer extensiones al estudio de algunos sistemas microscópicos en una forma semiclásica, como el modelo de Borh en el átomo de hidrógeno. En particular en algunos campos el conocimiento de las trayectorias de estos sistemas juega un interés especial en diferentes contextos académicos, ya sea de enseñanza o de investigación.

La relatividad especial es una de las teorías físicas modernas la cual se estudia los fenómenos físicos con velocidades cercanas a la de la luz. La descripción de los fenómenos físicos de la mecánica clásica puede tratarse como casos particulares de esta. Es común que los sistemas mecánicos clásicos sean extendidos a la relatividad especial, como por ejemplo la cinemática, choques de partículas, y algunos fenómenos de electromagnetismo. Sin embargo el estudio de estos sistemas de la relatividad especial los resultados que se obtienen no tienen una correspondencia clásica como por ejemplo el concepto de la energía en reposo, la contracción y dilatación del tiempo del tiempo visto desde diferentes tipos de sistemas inerciales entre otros.

En la literatura el enfoque propio de la relatividad especial hacia problemas puramente mecánicos son pocos, en parte es por la falta de aplicaciones y experimentos. Un caso de estos es el problema histórico de la mecánica clásica como es el de fuerzas centrales; quizás el más próximo a este es el de un átomo, que en el modelo de Borh las velocidades orbitales de los electrones alrededor del núcleo son 10^6 m/s. Sin embargo a pesar de su entorno histórico, el modelo de Borh no es un trabajo extendido a sistemas relativistas.

En el artículo de Boyer (**Boyer, 2004**), que es un artículo más o menos reciente se estudia este problema pero solamente para el caso de una fuerza tipo inverso al cuadrado de la distancia. Se obtienen en este trabajo unos resultados interesantes que se discutirán más adelante.

Inspirados en este trabajo del artículo mencionado antes, se contempló la posibilidad de ampliar el estudio de este problema físico matemático a otros tipos de fuerzas aparte de la inverso al cuadrado de la distancia, y contrastar los resultados obtenidos en torno a la mecánica clásica.

En este contexto se plantea la siguiente pregunta problema:

¿Cómo se describiría el problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales desde la relatividad especial y qué nuevos fenómenos físicos podrían establecerse tales que no sean contemplados en la mecánica clásica?

El eje central de este trabajo de grado se basa en hacer una descripción física matemática del problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales extendida a sistemas relativistas, basados en el artículo de Boyer (**Boyer, 2004**); se hace una descripción física matemática del problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales extendida a sistemas relativistas, considerando otros ejemplos de fuerzas aparte de la fuerza inverso al cuadrado de la distancia, contrastando los resultados obtenidos con los que son dados en la mecánica clásica.

En el capítulo 1 se hace una revisión del sistema del problema de fuerzas centrales desde la mecánica clásica, en el capítulo 2 se hace una revisión de los conceptos de la relatividad especial, como energía mecánica, momentum lineal y angular.

En el capítulo 3 se hace el estudio del problema de fuerzas centrales para sistemas relativistas. Se estudiará las posibles trayectorias de diferentes potenciales, en particular el que genera la fuerza tipo inverso al cuadrado, junto con el de una fuerza de tipo inverso al cubo. Se contrastarán los resultados de las órbitas obtenidas con las clásicas.

Objetivo General

Analizar y describir el problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales incluyendo efectos relativistas.

Objetivos Específicos

- Hacer una revisión del problema de fuerzas centradas de dos cuerpos en la mecánica clásica.
- Hacer una revisión de la dinámica relativista del problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales.
- Hacer un énfasis en la descripción de los nuevos fenómenos que podrían aparecer en el problema de fuerzas centrales de dos cuerpos para sistemas relativistas en contraste a lo conocido en la mecánica clásica.
- Hacer uso de una rutina numérica en un software para la descripción de las posibles trayectorias que tendrían diferentes tipos de fuerzas centrales de dos cuerpos para sistemas relativistas.

Metodología de Trabajo

La metodología que se propone en el trabajo tiene un aspecto cognoscitivo en el desarrollo de los cálculos teóricos y resultados que se presentan en los libros y artículos: esta parte se desarrollan en los capítulos 1 y 2 y la primera parte del capítulo 3. El otro componente de la metodología se basa en unos aspectos cualitativos y cuantitativos, es decir que al generar un proceso de aprendizaje en el cual se desarrollen unos resultados que no se evidencian en los libros ni en ningún artículo. Esto es reflejado en algunos resultados teóricos con unas graficas obtenidas a partir de métodos numéricos

CAPITULO 1

1.1 El problema de fuerzas centrales en la mecánica clásica

En la mecánica clásica el problema de las fuerzas centrales comenzó rigurosamente desde Kepler con sus trabajos observacionales de los planetas alrededor del Sol, enmarcadas en lo que se conoce hoy como las leyes de Kepler. Más adelante Newton dio un gran soporte teórico en su trabajo de la teoría universal de la gravitación. A continuación se hará la descripción de unos aspectos importantes del problema de fuerzas centrales de dos cuerpos basado a partir de las referencias (Marion, 2004), (Goldstein, 2002). Este problema consiste de dos cuerpos que interactúan con una fuerza central de la forma

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}, \quad (1.1)$$

donde $f(r)$ es función de la distancia de las dos partículas y \hat{r} es un vector unitario a lo largo de la línea recta entre ellas.

Presentaremos el problema de fuerzas centrales a partir de la formulación lagrangiana. El lagrangiano en general de cualquier sistema es dado por:

$$\mathcal{L} = T - U, \quad (1.2)$$

con T como la energía cinética del sistema y U es la energía potencial del sistema.

Podemos describir el problema de fuerzas centrales escogiendo el sistema del centro de masa y nos restringimos a sistemas sin fricción; la energía potencial es una función de la distancia relativa $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, como se esquematiza en la Figura 1

Para el sistema de dos partículas dado en la Figura 1, el lagrangiano, desde el sistema de referencia de laboratorio es igual a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1|\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{r}_2|^2 - U(r) \quad (1.3)$$

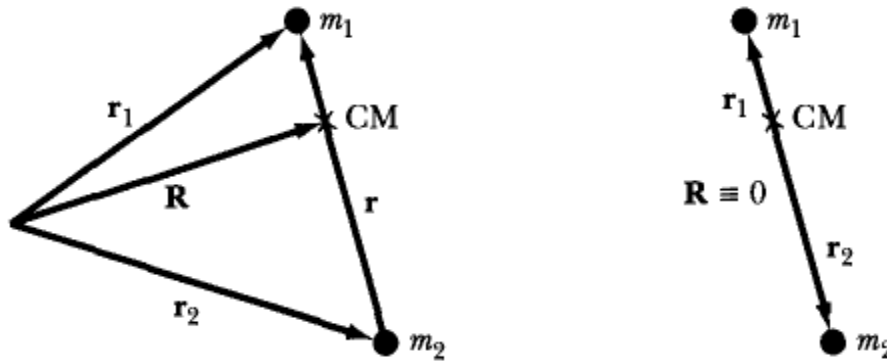


Figura 1.1 Representación de dos coordenadas para el problema de fuerzas centrales: en la izquierda el sistema de referencia del laboratorio y el de la derecha, el del centro de masa.

Como el movimiento de traslaciones del sistema como un todo no tiene interés desde un punto de vista de la órbita a la partícula con respecto a otro, podemos escoger el origen del sistema de coordenadas del centro de masa igual a cero. Así

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (1.4)$$

Esta ecuación combinada con $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ produce

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r} \quad (1.5)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}, \quad (1.6)$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores, el lagrangiano queda expresado de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu |\vec{v}|^2 - U(r). \quad (1.7)$$

Se estudia el sistema de las dos partículas en términos de la masa reducida

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.8)$$

1.2 Leyes de conservación

Dado que el potencial es de tipo radial, el torque neto resulta siendo cero

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

Por el hecho de que la fuerza $\vec{F} = F(r)\hat{r}$, en este caso el momento angular \vec{L} resulta siendo una constante de movimiento. La dirección de este momento angular es perpendicular al plano del movimiento del sistema. Como el movimiento resulta siendo en un plano, podemos escribir la velocidad en las coordenadas polares,

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (1.10)$$

Con

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}. \quad (1.11)$$

Y

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (1.12)$$

Así el Lagrangiano en coordenadas polares desde el centro de masa es igual a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - U(r). \quad (1.13)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange para este problema serían así:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0. \quad (1.15)$$

Como el lagrangiano es cíclico en θ , el momento angular conjugado con la coordenada θ se conserva, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = p_{\theta} = 0, \quad (1.16)$$

lo cual obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0. \quad (1.17)$$

Pero $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}$, y se obtiene que

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (1.18)$$

$$\mu r^2 \dot{\theta} = cte. \quad (1.19)$$

La cantidad

$$l = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (1.20)$$

es el momento angular para el problema de fuerzas centrales. Se puede expresar $\dot{\theta}$ en términos del momento angular. Así la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) \quad (1.21)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r \dot{\theta}^2) + U(r), \quad (1.22)$$

puede escribirse en términos del momento angular l , quedando de la forma

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right) + U(r). \quad (1.23)$$

La energía mecánica resulta siendo así otra constante del movimiento.

Una expresión importante del problema de fuerzas centrales es la ecuación de la trayectoria, que en este caso sería $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$. Esta se obtiene combinando las ecuaciones (1.20) y (1.23) cuyo resultado es

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^3} - U(r) \right)}}. \quad (1.24)$$

Su integración nos daría las posibles órbitas dependiendo del potencial $U(\mathbf{r})$. Por otra parte, la ecuación (1.23) nos da la velocidad radial de una partícula en movimiento en un campo central; dicha expresión nos indica que \dot{r} será nula para aquellos valores de r que sean raíces del radicando; o sea, en aquellos puntos para los que

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0. \quad (1.25)$$

La anulación de \dot{r} implica que se ha alcanzado un punto de inversión del movimiento en general, la ecuación (1.25) posee dos raíces, $r_{m\acute{a}x}$ y $r_{m\acute{i}n}$ y por lo tanto el movimiento de la partícula queda confinado a la región anular definida por $r_{m\acute{a}x} \geq r \geq r_{m\acute{i}n}$. Para ciertas combinaciones de la función potencial $U(\mathbf{r})$ y los parámetros E y l , la ecuación (1.25) dará una raíz doble, cuyo valor es $\dot{r} = 0$, en todo instante, y de aquí $r = ct.$, siendo la órbita circular.

Cuando el movimiento de una partícula dentro del potencial $U(\mathbf{r})$ sea periódico, la órbita será *cerrada*. Es decir tras un número finito de viajes entre los límites $r_{m\acute{i}n}$ y $r_{m\acute{a}x}$, el movimiento vuelve a repetirse. Por otra parte, si la órbita no se cierra sobre sí misma después de un número finito de oscilaciones es *abierto*; tal es el caso que se muestra en la siguiente figura.

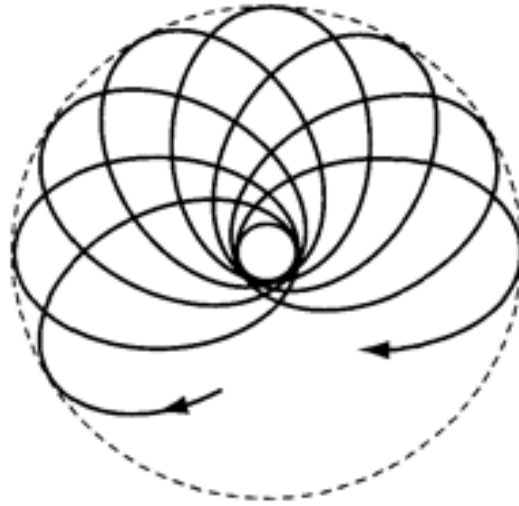


Figura (1.2) esquema de una órbita abierta, donde está oscilando y que nunca se cierra.

Si integramos la ecuación (1.19) obtenemos la ecuación de la órbita:

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu\left(E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}, \quad (1.26)$$

podemos calcular la variación del ángulo θ producida por un viaje completo desde r_{min} hasta $r_{máx}$ y vuelta a r_{min} ; como el movimiento es simétrico respecto al tiempo, esta variación del ángulo será el doble de la que resultaría del paso de r_{min} a $r_{máx}$. Entonces

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{min}}^{r_{máx}} \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu\left(E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}. \quad (1.27)$$

La trayectoria será cerrada sólo si $\Delta\theta$ es una función racional de 2π ; es decir, si $\Delta\theta=2\pi (a/b)$, donde a y b son números enteros. En estas condiciones, después de b periodos, el vector de posición de la partícula habrá dado a revoluciones completas y vueltas a su posición original.

Bertrand (**J, Bertrand** , 1873) en 1873 planteó un teorema donde afirmaba que solamente cuando $n = -2$ ó $+1$ las órbitas son cerradas. El caso $n = -2$ corresponde al de una fuerza

inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; por ejemplo a la fuerza gravitatoria o a la electrostática, mientras que el caso $n = +1$ corresponde al potencial del oscilador armónico.

1.3 Análisis de la ecuación radial

Retomando la ecuación radial de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \quad (1.28)$$

Y usando el lagrangiano de la ecuación (1.14), obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = f(r). \quad (1.29)$$

Esta es la ecuación radial del movimiento. Sin embargo un análisis en términos de la variable

$$s \equiv \frac{1}{r}. \quad (1.30)$$

Nos permite obtener una expresión soluble. A partir de esta variable se va a obtener una ecuación diferencial que es la ecuación de la trayectoria, es decir una ecuación de la distancia radial en función de ángulo, es decir, $r = r(\theta)$.

Derivando (1.30) en términos del ángulo y con regla de la cadena obtenemos

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}. \quad (1.31)$$

Usando la ecuación (1.20),

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (1.32)$$

Entonces:

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \dot{r} \quad (1.33)$$

Calculando la segunda derivada de la nueva variable s se llega a

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\mu}{l\dot{\theta}} \ddot{r}. \quad (1.34)$$

Sustituyendo $\dot{\theta}$ de la ecuación (1.20) obtenemos

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2} r^2 \ddot{r} = -\frac{\mu^2}{s^2 l^2} \ddot{r}. \quad (1.35)$$

Despejando \ddot{r} obtenemos

$$\ddot{r} = -\left(\frac{s^2 l^2}{\mu^2} \right) \frac{d^2s}{d\theta^2}. \quad (1.36)$$

Escribiendo $\dot{\theta}$ en términos de s

$$\dot{\theta} = \frac{ls^2}{\mu}. \quad (1.37)$$

Uniendo los resultados de las ecuaciones (1.36) y (1.37) e introduciéndolos en la ecuación de movimiento radial (1.29) se obtiene una ecuación diferencial de la órbita en términos de la variable s .

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{s^2} f(1/s). \quad (1.38)$$

A continuación se trata el problema de Kepler de las fuerzas centrales.

1.4 Solución de la ecuación radial para el problema de una fuerza del inverso al cuadrado

Uno de los problemas históricos del sistema de fuerzas centrales es el caso del tipo inverso al cuadrado, donde en un sistema gravitacional como el movimiento de los planetas alrededor del Sol o un sistema de estrellas binarias. Su entorno se basa en la teoría de la gravitación de Newton y las leyes de Kepler. El otro caso es el sistema de un átomo, el donde un electrón interacciona con el núcleo a través de la fuerza eléctrica de Coulomb, en donde la constante de la fuerza es directamente proporcional al producto de sus cargas. Se hace énfasis en el último caso que su tratamiento en este contexto del escrito se basa en ideas clásicas.

La solución de la ecuación (1.38) nos describe la órbita del sistema físico (gravitacional o eléctrico) de interés.

A continuación se presenta la solución de la ecuación diferencial de la órbita (1.38), es decir:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{-\mu}{l^2} \frac{1}{s^2} f(1/s) \quad (1.39)$$

Como la fuerza tipo inverso al cuadrado es

$$F = -\frac{k}{r^2} = -kS^2 \quad (1.40)$$

Reemplazando en la ecuación (1.39) tenemos que:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{s^2} (-kS^2) \quad (1.41)$$

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{k\mu}{l^2} \quad (1.42)$$

Su solución de esta ecuación diferencial se hace con el cambio de variable

$$y = s - \frac{\mu k}{l^2} \quad (1.43)$$

Entonces la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2s}{d\theta^2} \quad (1.44)$$

Así

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0 \quad (1.45)$$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = A \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.46)$$

Remplazando y en términos de s obtenemos

$$s - \frac{\mu k}{l^2} = A \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.47)$$

Se despeja s cuyo resultado es

$$s = \frac{\mu k}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.48)$$

Remplazando s en función de r se obtiene

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.49)$$

Factorizando el término $\frac{\mu k}{l^2}$ en la ecuación anterior

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \frac{Al^2}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0) \right] \quad (1.50)$$

Organizando la ecuación anterior de la forma

$$\frac{l^2}{\frac{\mu k}{r}} = \left[1 + \frac{Al^2}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0) \right], \quad (1.51)$$

y con $\alpha = \frac{l^2}{k\mu}$ y $\epsilon = \frac{Al^2}{\mu k}$ obtenemos la ecuación de la órbita

$$\frac{\alpha}{r} = [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]. \quad (1.52)$$

Esta solución es conocida como la ecuación de la órbita. Sus figuras dentro del ámbito de la matemática son conocidas como cónicas, y dependiendo de los valores de ϵ se obtienen trayectorias como elipses, círculos, parábolas e hipérbolas. A continuación se ilustran el rango de valores de la excentricidad y su trayectoria

$\epsilon > 1$	Hipérbola
$\epsilon = 1$	Parábola
$0 < \epsilon < 1$	Elipse
$\epsilon = 0$	Círculo

Tabla 1.1

Estas son las gráficas para cada uno de los valores de las excentricidades dadas

Figura (1.3) para la hipérbola con $\alpha = 1$, $\epsilon = 1.4$ y $\theta_0 = 0$, la ecuación es

$$\frac{1}{r} = [1 + 1.4 \cos(\theta)],$$

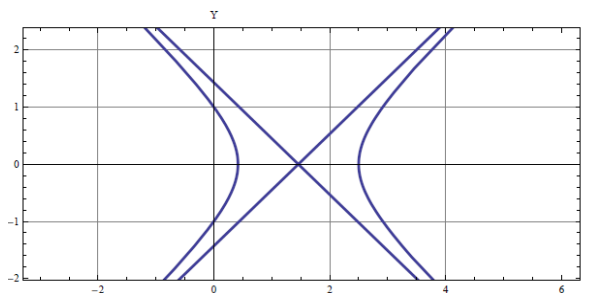


Figura 1.3 órbita tipo hipérbola

Figura (1.4) para la parábola con $\alpha = 10, \varepsilon = 1$ y $\theta_0 = \pi/4$, La ecuación es

$$\frac{10}{r} = [1 + \cos(\theta - \pi/4)],$$

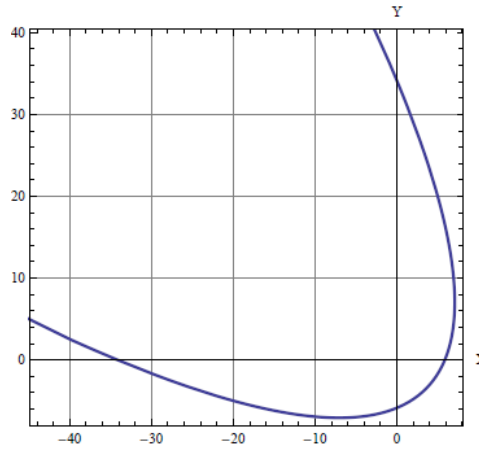


Figura 1.4 órbita tipo parábola

Figura (1.5) para la elipse con $\alpha = 4, \varepsilon = 0.6$ y $\theta_0 = \pi/4$, la ecuación es

$$\frac{4}{r} = [1 + 0.6\cos(\theta + \pi/4)],$$

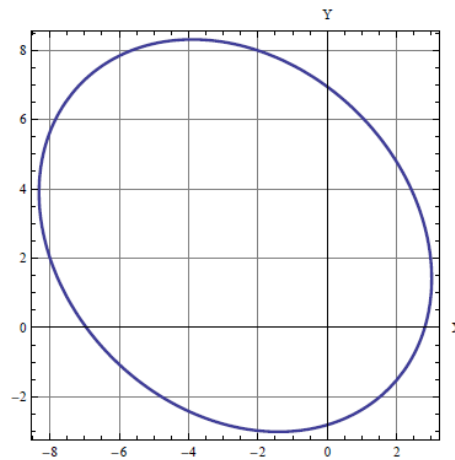


Figura 1.5 órbita tipo elipse

Figura (1.6) para el círculo con $\alpha = 2, \varepsilon = 0$, la ecuación es

$$\frac{2}{r} = [1],$$

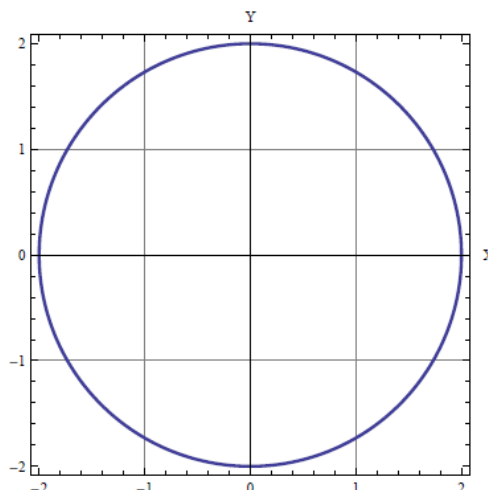


Figura 1.6 órbita tipo círculo

Es común en este problema expresar la excentricidad en términos de la energía mecánica total E .

Para esto la energía mecánica con el potencial de Kepler es

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (1.53)$$

Ahora se escribe esta ecuación en términos de la variable $s = \frac{1}{r}$

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\frac{ls'}{\mu} \right)^2 + \frac{l^2 s^2}{2\mu} - ks \quad (1.54)$$

En donde

$$s' = \frac{ds}{d\theta} \quad (1.55)$$

Así la energía mecánica en términos de s es dada por

$$E = \frac{l^2}{2\mu} s'^2 + \frac{l^2}{2\mu} s^2 - ks \quad (1.56)$$

Como

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0), \quad (1.57)$$

entonces

$$\alpha s = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0). \quad (1.58)$$

Así:

$$s' = -\frac{\varepsilon}{\alpha}(\theta - \theta_0) \quad (1.59)$$

Y como $\alpha = \frac{l^2}{k\mu}$ entonces

$$s'^2 = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \text{sen}^2(\theta - \theta_0) \quad (1.60)$$

Con los otros términos de la energía mecánica obtenemos

$$s = \frac{1}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha} + \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.61)$$

$$s^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \cos^2(\theta - \theta_0) \quad (1.62)$$

$$-ks = -\frac{k}{\alpha} - \frac{\varepsilon k}{\alpha} \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.63)$$

Reemplazando cada uno de los términos de las ecuaciones la (1.60), (1.62) y (1.63), la energía mecánica total en términos de la variable θ es

$$E = \frac{l^2}{2\mu} \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \text{sen}^2(\theta - \theta_0) + \frac{l^2}{2\mu} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{2\varepsilon}{\alpha} \cos(\theta - \theta_0) \right] + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \cos^2(\theta - \theta_0) - \frac{k}{\alpha} - \frac{\varepsilon k}{\alpha} \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.64)$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene

$$E = \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} + \frac{l^2}{2\mu} + \frac{l^2 \varepsilon}{\mu \alpha} \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{\alpha} - \frac{\varepsilon k}{\alpha} \cos(\theta - \theta_0) \quad (1.65)$$

Pero como $\alpha = \frac{1}{\alpha\mu}$, entonces

$$\frac{\varepsilon k}{\alpha} = \frac{\varepsilon l^2}{\alpha \alpha \mu} = \frac{\varepsilon l^2}{\alpha^2 \mu} \quad (1.66)$$

Y como $k = \frac{l^2}{\alpha\mu}$

$$E = \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} + \frac{l^2}{2\mu \alpha^2} - \frac{k}{\alpha} \quad (1.67)$$

ó

$$E = \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} + \frac{l^2}{2\mu \alpha^2} - \frac{l^2}{\alpha^2 \mu}. \quad (1.68)$$

Con un poco de procedimiento algebraico se llega a un resultado más simplificado, esto es

$$E = \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} - \frac{l^2}{2\mu \alpha^2} \quad (1.69)$$

$$E + \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} = \frac{l^2 \varepsilon^2}{2\mu \alpha^2} \quad (1.70)$$

$$\frac{2\mu \alpha^2}{l^2} \left[E + \frac{l^2}{2\mu \alpha^2} \right] = \varepsilon. \quad (1.71)$$

Así finalmente la excentricidad ε queda expresada en términos de la energía mecánica E , dada por la ecuación

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu \alpha^2}{l^2}\right) E + 1} = \varepsilon. \quad (1.72)$$

Los valores de la excentricidad en términos de la energía mecánica representan las posibles trayectorias en el problema de Kepler son las mismas que fueron dadas en la Tabla (1.1). De esto se determinan los posibles valores de E

CAPITULO 2

2.1 Relatividad especial

La relatividad especial fue una de las teorías pilares del siglo XX, puesto que fue presentada por Albert Einstein en su trabajo sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, en 1905. El formalismo básico de la teoría ya había sido descubierto un año antes por Poincaré y por Lorentz, aunque Einstein desconocía estos trabajos. **(Serway R. A., 2005)**

El éxito de Einstein consistió en eliminar un gran número de hipótesis hechas por Lorentz hasta reducir la teoría de la relatividad a dos postulados muy simples que parten de la experimentación **(Jackson, 1999)**.

El primer postulado nos habla de las leyes que rigen los fenómenos físicos son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales. Hay que tener en cuenta que este postulado implica que solo se pueden medir movimientos relativos de los sistemas inerciales, la idea de movimiento respecto a algo que este quieto no tiene sentido. En particular las ecuaciones matemáticas que describen las leyes físicas se mantienen invariantes por medio de las transformaciones de Lorentz. El segundo postulado nos habla de la velocidad de la luz en el vacío que se denota como c , que es una constante universal, independiente de todo movimiento relativo entre la fuente y el observador. No cabe decir que en este segundo postulado nos dice que la velocidad de la luz en el vacío es una constante, y que es la velocidad máxima a la que se puede transmitir la información.

Posteriormente, en 1915, Einstein publicó la teoría de la relatividad general, dedicando diez años de su vida a desarrollar un programa de investigación científica cuyo fin último consistió en generalizar el principio de la relatividad, cuando Einstein llegó a la formulación definitiva de la

teoría general de la relatividad, el objetivo de Einstein, al generalizar el principio de relatividad consistía en eliminar la posición privilegiada que ostentaban los sistemas inerciales en la relatividad especial. Para ello había que encontrar la formulación adecuada por la que la relatividad fuese aplicable sin restricciones a los sistemas de referencia acelerados entre sí **(Serway R. A., 2005)**.

En este capítulo se hará una presentación de los conceptos elementales de magnitudes dinámicas en la relatividad especial. A continuación se hará una presentación de los conceptos cinemáticos y dinámicos de la relatividad especial para una partícula basados en las referencias **(Goldstein, 2002)** **(Marion, 2004)** **(Keppner & Kolenkow, 1978)**. Se excluye en este escrito la transformación de las magnitudes físicas en diferentes marcos de referencia inerciales

2.2 Energía mecánica, momentum angular relativistas

El estudio de sistemas relativistas fue una de las temáticas de gran interés a comienzos del siglo XX. Quizá los ejemplos más conocidos entorno a este ámbito son las partículas eléctricas bajo un campo eléctrico o magnético **(French, 1988)** **(Jackson, 1999)**. Aplicaciones de estos sistemas son encontrados bajo choques de partículas, como el laboratorio del CERN en Suiza donde partículas como protones se mueven en un acelerador circular bajo un campo magnético externo **(CERN)**. Otros ejemplos, como de aplicación de ejercicios que aparecen en los textos son el movimiento de una partícula bajo una fuerza constante y el problema de un oscilador armónico en una dimensión. **(Goldstein, 2002)**. El énfasis de estos textos se basa en la representación de las magnitudes como energía, momentum angular y lineal en su versión

relativista y su posible uso en aplicaciones. En este capítulo se hará una presentación de estos conceptos.

2.2.1 Energía Mecánica

La Energía cinética de una partícula que se mueve con una rapidez v es dada por (Serway R. A., 2005) (French, 1988)

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \quad (2.1)$$

El último término de la ecuación anterior se conoce como la energía en reposo

$$E_0 = mc^2 \quad (2.2)$$

La cual es una nueva forma de energía que plantea Einstein la masa tiene ahora un papel de una nueva forma de energía, lo cual clásicamente no se concebía así. Esto se ha evidenciado experimentalmente en procesos atómicos de creación de partículas y decaimientos

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética más la energía potencial más la energía en reposo:

$$E = K + U(r) + mc^2, \quad (2.3)$$

sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación anterior obtenemos

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 + U(r) + mc^2 \quad (2.4)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U(r). \quad (2.5)$$

Esta es finalmente la expresión de la energía mecánica de una partícula.

2.2.2 Momentum Lineal

El momentum lineal de una particular de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} es dada por

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Como ejemplo en coordenadas polares, la velocidad es dada por la ecuación (1.10):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (2.7)$$

y así el momentum lineal en estas coordenadas es:

$$\mathbf{P} = \frac{m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = P_r\hat{r} + P_\theta\hat{\theta}. \quad (2.8)$$

Con

$$P_r = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.9)$$

$$P_\theta = \frac{mr\dot{\theta}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.10)$$

La energía mecánica puede expresarse en términos del momentum lineal, es decir, la ecuación (2.5) está dada de la forma (Goldstein, 2002) (Marion, 2004)

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r). \quad (2.11)$$

2.2.3 Momentum angular

El momentum angular de una particular de masa m que se mueve con un radio de giro \vec{r} y una velocidad \vec{v} es dada por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.12)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (2.13)$$

como ejemplo en coordenadas polares el radio de giro:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (2.14)$$

la velocidad de la ecuación (1.10) es

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (2.15)$$

El producto cruz

$$\vec{r} \times \vec{v} = (r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}), \quad (2.16)$$

cuyo resultado es

$$\vec{r} \times \vec{v} = r^2\dot{\theta}\hat{k}. \quad (2.17)$$

Así el momento angular es igual a:

$$\vec{L} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\hat{k}. \quad (2.18)$$

El momento angular, como se vio en el capítulo anterior del problema de fuerzas centrales resultó siendo una constante de movimiento. En la relatividad especial también hay situaciones en lo cual ocurre esto.

CAPITULO 3

3.1 Problema de fuerzas centrales para sistemas relativistas

En los textos de relatividad especial no se hace una descripción de la dinámica de una partícula sujeta a un campo de fuerzas centrales si esta tuviera velocidades relativistas. En el libro de **(Goldstein, 2002)** se presenta un ejemplo del oscilador armónico, en una dimensión donde se estudia las ecuaciones de movimiento. Un problema de dos dimensiones en este contexto de la relatividad especial no es presentado en ningún libro. En el artículo **(Boyer, 2004)** se hace un estudio acerca de las trayectorias relativistas para una partícula sujeta a una fuerza central tipo inverso al cuadrado y sus implicaciones. La importancia de los resultados de este artículo son las posibles nuevas trayectorias que podría tener este sistema en contraste a las trayectorias clásicas presentadas en el capítulo anterior. Esto se discutirá más adelante con detalle.

En este escrito se pretende hacer una generalización al problema de fuerzas centrales para sistemas relativistas, no solamente al problema del inverso al cuadrado como fue presentado en el artículo de Boyer **(Boyer, 2004)**. Se hace énfasis que en este escrito no se hará un enfoque en el estudio de este problema físico visto desde diferentes sistemas de referencias, ni su conexión con la relatividad general.

j

3.2 Análisis del Problema de Fuerzas Centrales

Las ecuaciones de órbita $\mathbf{r}(\theta)$ se pueden encontrar mediante el análisis tradicional de las ecuaciones de Euler Lagrange como en el caso clásico, pero el procedimiento por este camino es muy dispendioso. Es más conveniente a partir de las ecuaciones de las constantes de movimiento como la energía mecánica y el momento angular. Comenzando con el momentum lineal, en coordenadas polares el cual es

$$\mathbf{P} = \frac{m(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{mr\dot{\theta}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.1)$$

La componente angular θ del momento lineal se puede expresar en términos de la magnitud del momentum angular si se tiene en cuenta que

$$\frac{m\dot{\theta}r^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{L}{r} \quad (3.2)$$

Así el momentum lineal en términos del momentum angular es igual a

$$\mathbf{P} = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{L}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.3)$$

En la cual lo organizamos en términos de sus componentes polares

$$\mathbf{P} = P_r\hat{\mathbf{r}} + P_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.4)$$

Con

$$P_r = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.5)$$

$$P_\theta = \frac{L}{r} \quad (3.6)$$

La energía de la partícula relativista E dada por la ecuación

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r) \quad (3.7)$$

Pasando el último término de la derecha a la izquierda y elevando al cuadrado obtenemos

$$[E - U(r)]^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.8)$$

Con la expresión del momentum en las coordenadas polares

$$\vec{P}^2 = P_r^2 + P_\theta^2 \quad (3.9)$$

y con las expresiones (3.5) y (3.6) de las componentes del momentum, la ecuación (3.8) se puede escribir como

$$[E - U(r)]^2 = P_r^2 c^2 + \frac{L^2 c^2}{r^2} + m^2 c^4 \quad (3.10)$$

Ahora, retomando las ecuaciones (2.9) y (2.10) del capítulo 2

$$P_r = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.11)$$

$$P_\theta = \frac{mr\dot{\theta}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.12)$$

Obtenemos el cociente

$$\frac{P_r}{P_\theta} = \frac{\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{mr\dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (3.13)$$

Cuyo resultado final es

$$\frac{P_r}{P_\theta} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \quad (3.14)$$

con la expresión podemos escribir

$$P_r = P_\theta \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (3.15)$$

Por lo tanto la ecuación (3.9) se convierte

$$[E - U(r)]^2 = \left(\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 c^2 + \frac{L^2 c^2}{r^2} + m^2 c^4. \quad (3.16)$$

Si se introduce usualmente la variable inversa $r, s = 1/r$, y haciendo uso de la ecuación (1.33)

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad (3.17)$$

la ecuación (3.16) se convierte

$$\left[E - U\left(\frac{1}{s}\right) \right]^2 = L^2 c^2 \left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 + s^2 L^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (3.18)$$

la ecuación de la órbita puede hallarse si la ecuación diferencial (3.18) se deriva con respecto ha

θ , Para el término izquierdo de la ecuación su derivada es:

$$\frac{d}{d\theta} \left[E - U\left(\frac{1}{s}\right) \right]^2 = 2 \left[E - U\left(\frac{1}{s}\right) \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] \frac{ds}{d\theta} \quad (3.19)$$

Similarmente para el término de la derecha

$$\frac{d}{d\theta} \left[L^2 c^2 \left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 + s^2 L^2 c^2 + m^2 c^4 \right] = 2L^2 c^2 \left(\frac{ds}{d\theta} \right) \frac{d^2 s}{d\theta^2} + 2sL^2 c^2 \frac{ds}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[L^2 c^2 \left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 + s^2 L^2 c^2 + m^2 c^4 \right] = 2 \frac{ds}{d\theta} \left[L^2 c^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2} + sL^2 c^2 \right] \quad (3.20)$$

Igualándolas las dos derivadas

$$2 \frac{ds}{d\theta} \left[E - U \left(\frac{1}{s} \right) \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] = 2 \frac{ds}{d\theta} \left[L^2 c^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2} + s L^2 c^2 \right] \quad (3.21)$$

Eliminado el término $\frac{ds}{d\theta}$ de las dos ecuaciones obtenemos

$$L^2 c^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2} + L^2 c^2 s = \left[E - U \left(\frac{1}{s} \right) \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] \quad (3.22)$$

Organizando la ecuación anterior se llega a la ecuación de movimiento para el problema de dos cuerpos sujetos a una fuerza central para sistemas relativistas:

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \left[\frac{E-U}{L^2 c^2} \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] \quad (3.23)$$

3.3 Solución de la ecuación radial relativista para el problema de una fuerza del inverso al cuadrado

A continuación se estudiará el caso de la fuerza tipo inverso al cuadrado. Para este caso la fuerza $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ se halla a partir del potencial $U = -\frac{\alpha}{r} = -\alpha s$. Así con esta expresión:

$$f(1/s) = -\frac{dU}{ds} = -\alpha \quad (3.24)$$

Entonces el término derecho de la ecuación de la órbita es:

$$\left[\frac{E-U}{L^2 c^2} \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] = \left(\frac{E-\alpha s}{L^2 c^2} \right) \alpha \quad (3.25)$$

Así

$$\left[\frac{E-U}{L^2 c^2} \right] \left[-\frac{dU}{ds} \right] = \frac{E\alpha}{L^2 c^2} + \frac{\alpha^2 s}{L^2 c^2} \quad (3.26)$$

Remplazando la expresión anterior en la ecuación de la órbita obtenemos:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{E\alpha}{L^2c^2} + \frac{\alpha^2s}{L^2c^2} \quad (3.27)$$

Organizando la ecuación de la órbita del problema de la fuerza tipo inverso al cuadrado

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + \left[1 - \left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2\right]s = \frac{E\alpha}{L^2c^2} \quad (3.28)$$

3.4 solución de las ecuaciones de la órbita

Se obtienen diferentes soluciones de la ecuación diferencial (3.28) en función del valor del momento angular L .

CASO 1. Si $L > \alpha/c$, entonces

$$1 - \left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2 > 0 \quad (3.29)$$

Y su solución es de la forma

$$s = \frac{1}{r} = A \cos \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2} (\theta - \theta_0) \right] + B. \quad (3.30)$$

CASO 2. Si $L = \alpha/c$ tenemos que la solución de la ecuación (3.28) es

$$s = \frac{1}{r} = A(\theta - \theta_0)^2 + C. \quad (3.31)$$

CASO 3. Si $L < \alpha/c$, entonces

$$1 - \left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2 < 0 \quad (3.32)$$

Y su solución de la ecuación (3.28) es de la forma

$$s = \frac{1}{r} = A \cosh \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2 - 1} (\theta - \theta_0) \right] + C. \quad (3.33)$$

Los tres casos presentan las tres posibles soluciones con la cual están dadas en la referencia (Boyer, 2004).

Si se contrastas los resultados clásicos, que vienen dados por la ecuación (1.52), que es una solución analítica, en el caso de las órbitas relativistas aparecen tres soluciones con los resultados de los CASOS 1, 2, Y 3.

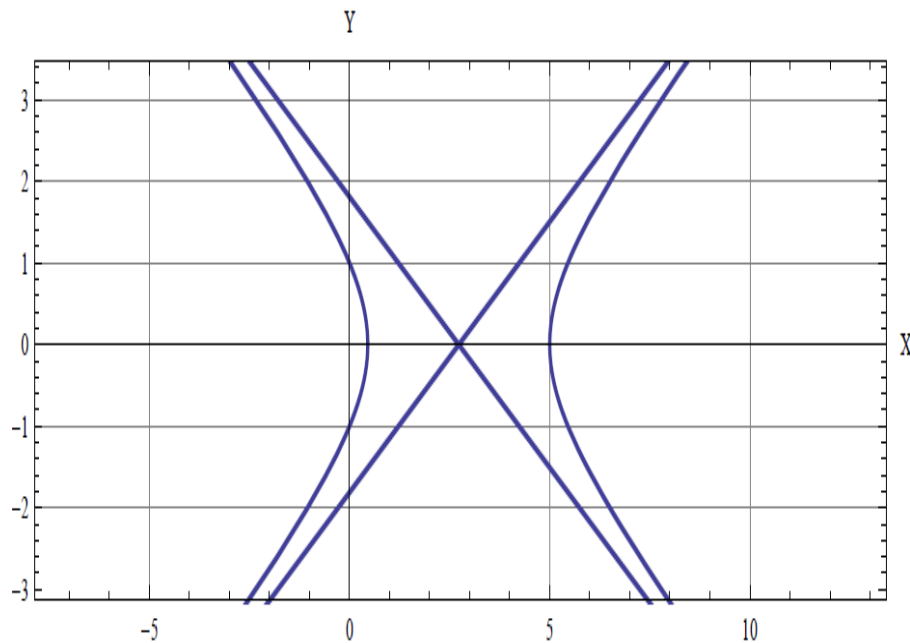


Figura (3.1), órbita relativista del caso 1, análogo a una hipérbola encontrada en la mecánica clásica.

La figura (3.1) es la **órbita relativista** descrita para el CASO 1. Se graficó la ecuación (3.30)

del **CASO 1** con valores de $A = 20$, $\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{Lc}\right)^2} = 0.99$, $\theta_0 = 2\pi$ y $B = 14$ la ecuación

$$s = \frac{1}{r} = 20 \cos[0.99 (\theta - 2\pi)] + 14,$$

Esta trayectoria relativista es similar a la órbita clásica correspondientes a las posibles hipérbolas, que en este caso sería de una energía mecánica positiva.

La Figura (3.2) es una solución del caso 2 equivalente a una **órbita relativista** que no tiene ninguna correspondencia con la mecánica clásica, la parte espiral de la figura representaría una situación de dispersión en la que una partícula se acerca a la región de origen del campo de fuerzas, pero da un giro alrededor de este campo y lo abandona.

La ecuación es $s = \frac{1}{r} = 100 \cos[0.33 (\theta)] + 2$,

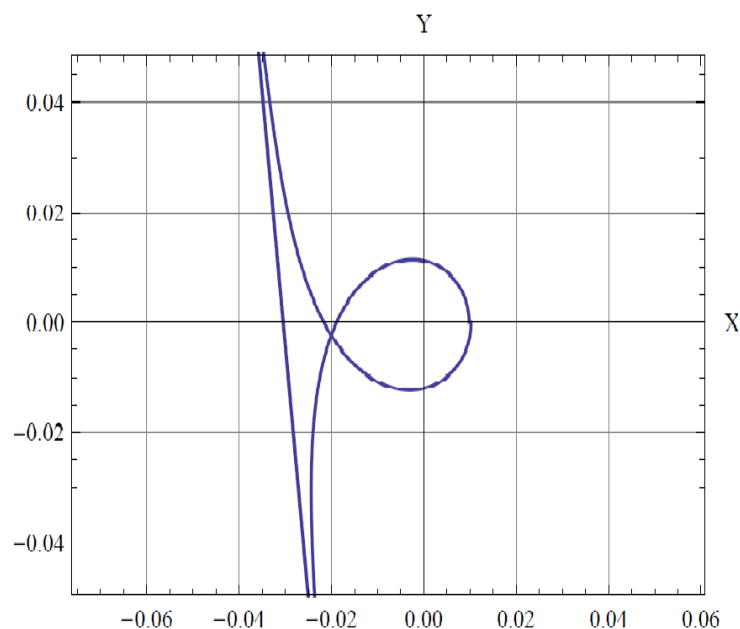


Figura (3.2). Una órbita del caso 1, la cual es una órbita que no tiene correspondencia con alguna clásica.

La figura (3.3) representa una órbita relativista del **CASO 3**, la ecuación de la trayectoria es

$$r = \frac{10}{1.5 \cosh(0.4\theta) - 2}$$

El posible resultado de esta trayectoria sería la de un sistema de una partícula no ligada

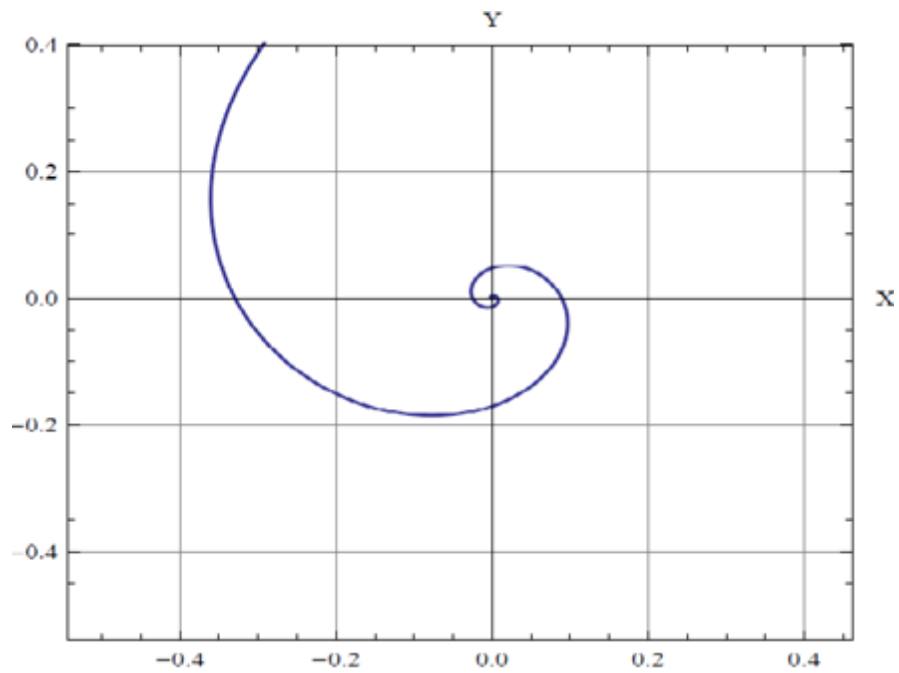


Figura (3.3) trayectoria del caso 3: órbita en forma de espiral, que no se contempla dentro de las órbitas clásicas

La figura (3.4) representa una órbita del caso 1 cuya ecuación es

$$r = \frac{1}{4.5 \cos(0.62\theta) + 39}$$

Como es referenciado por el artículo de Boyer (**Boyer, 2004**) representaría un sistema ligado con dos puntos de retorno como lo representa la figura.

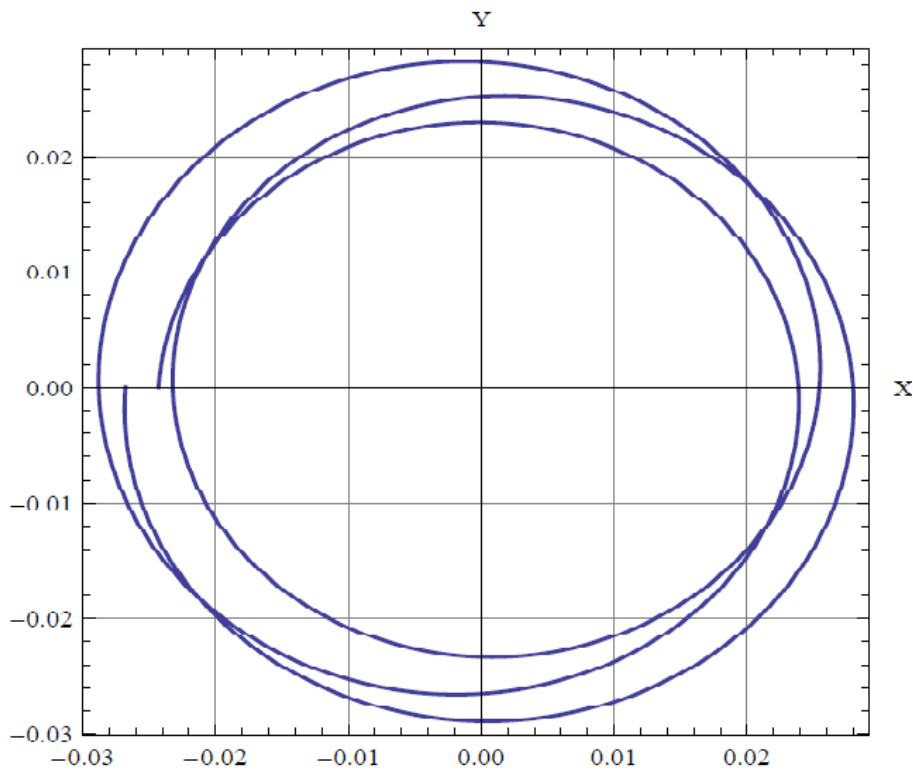


Figura (3.4), una trayectoria del caso 1, la cual es una posible órbita cerrada

La órbita de la figura 3.4 representa una posible órbita del caso 1. En la cual debe ser una trayectoria cerrada, con energía mecánica negativa.

3.5 Ejemplo de una fuerza del tipo inverso al cubo

Considérese el ejemplo de una partícula sujeta a una fuerza del inverso al cubo de la forma

$$f = -\frac{dU}{dr} = -\frac{\alpha}{r^3}$$

Si esta expresión es expresada en términos de la variable s , entonces $f = -\alpha s^3$

$$U = -\frac{\alpha}{r^2} = -\alpha s^2 \tag{3.34}$$

Si se usa esta fuerza en la ecuación de la órbita clásica en la cual es dada por la ecuación (1.39)

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{-\mu}{l^2} \frac{1}{s^2} f(1/s)$$

Entonces la ecuación diferencial de movimiento es

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu\alpha s^3}{L^2 s^2} \quad (3.35)$$

ó

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu\alpha s}{L^2} \quad (3.36)$$

Organizándola en una forma más adecuada se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right] s = 0 \quad (3.37)$$

Es común en este tipo de fuerza considerar la situación $1 - \frac{\mu\alpha}{L^2} < 0$. La solución de la ecuación diferencial (3.37) es de la forma

$$s = A \cosh \sqrt{\frac{\mu\alpha}{L^2} - 1} (\theta - \theta_0) \quad (3.38)$$

La forma de la órbita es similar al caso 3 del problema del tipo inverso cuadrado, es decir de la ecuación (3.33). Queremos contrastar la forma de esta órbita clásica con la ecuación de la órbita relativista dada por la dada ecuación (3.23). si remplazamos los términos de la energía potencial en esta ecuación en términos de la variable s obtenemos

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \left(\frac{E + \alpha s^2}{L^2 c^2}\right) \left[-\frac{d}{ds}(-\alpha s^2)\right] = \left(\frac{E + \alpha s^2}{L^2 c^2}\right) 2\alpha s \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{2E\alpha s}{L^2c^2} + \frac{2\alpha^2s^3}{L^2c^2}. \quad (3.40)$$

Organizando la ecuación anterior obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{2E\alpha}{L^2c^2}\right]s = \frac{2\alpha}{L^2c^2}s^3. \quad (3.42)$$

El inconveniente de esta ecuación diferencial es que es de tipo no lineal, por lo cual a simple vista pues su solución analítica no es posible. Sin embargo con el uso de una solución numérica se pueden estudiar diferentes curvas dependiendo de las condiciones iniciales. Estos cálculos numéricos fueron realizados en el software Wolfram Mathematica.

Se considera la situación donde el término $1 - \frac{2E\alpha}{L^2c^2} < 0$. Para el caso donde el término

$\frac{2\alpha}{L^2c^2} > 0$ pero con un número pequeño, se tiene una órbita similar al caso clásico, es decir en

forma de espira similar a la figura 3.3, la cual es dada en la figura 3.5

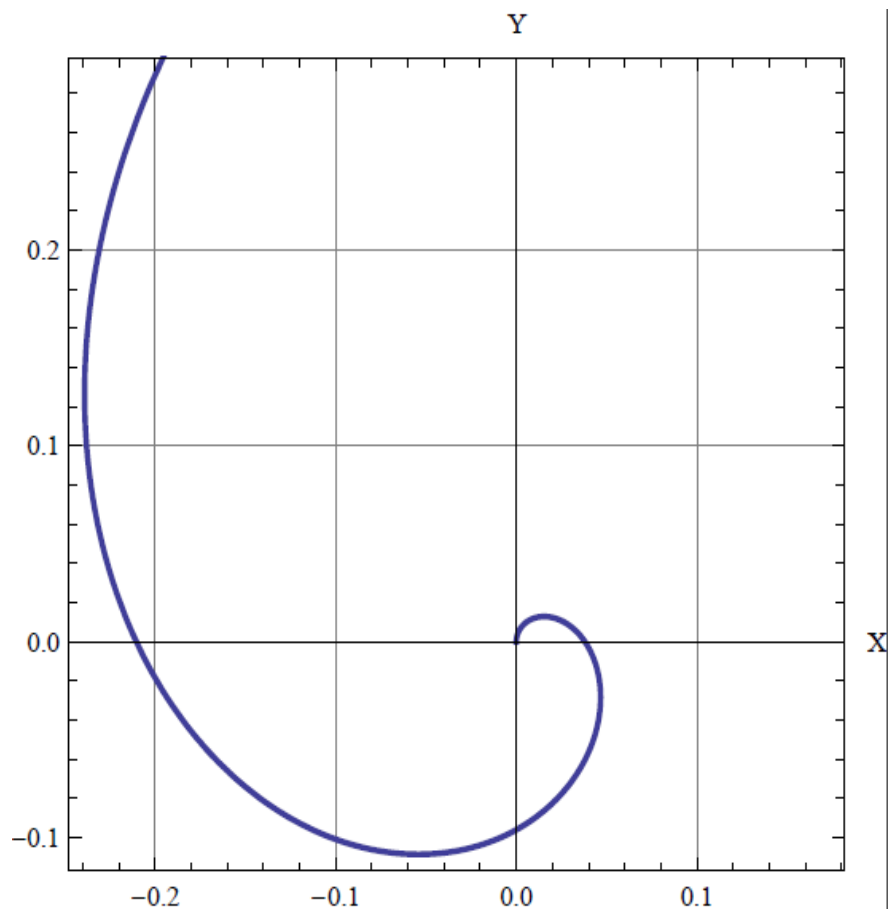


Figura 3.5 Posibles órbitas para una fuerza tipo inverso al cubo.

Se puede estudiar otra situación en la que $\mathbf{1} - \frac{2E\alpha}{L^2c^2} = \mathbf{0}$

La figura (3.6) es la gráfica obtenida a partir también de un método numérico. En ambos casos de los dos resultados numéricos la diferencia no es notable en el caso clásico.

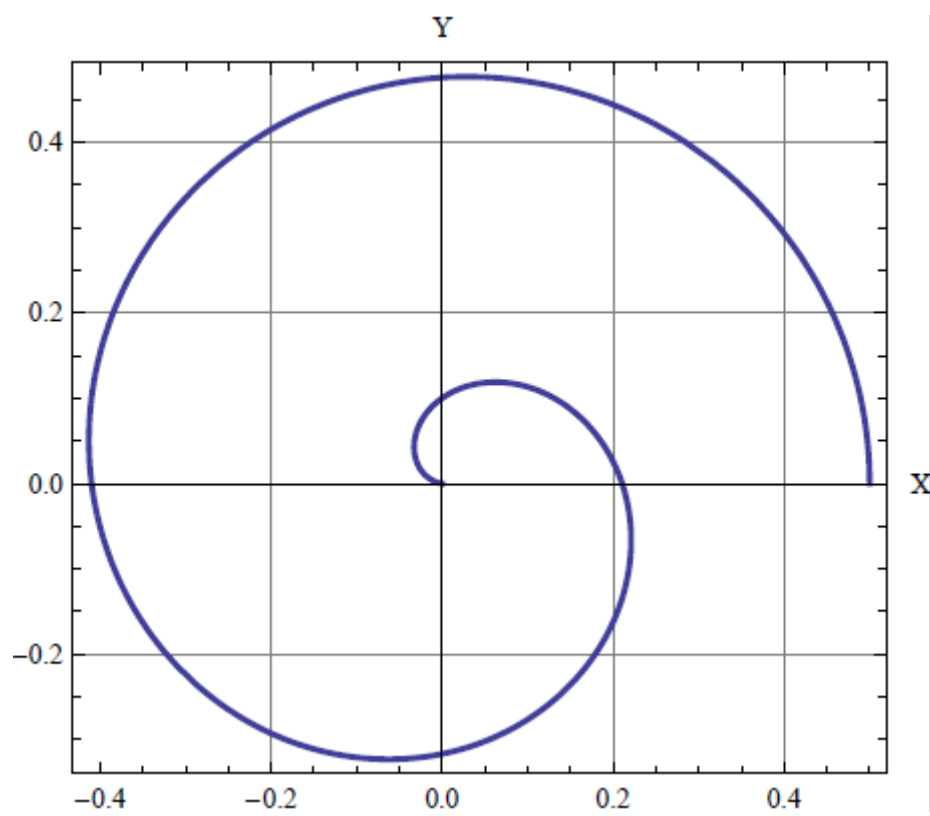


Figura 3.6 posibles órbitas para una fuerza inverso al cubo

Resultados Finales

1. Se hizo una revisión del problema de fuerzas centrales desde la mecánica clásica.
2. Se hizo una descripción del problema de fuerzas centrales a sistemas relativistas. Se obtuvo la ecuación de la trayectoria en una versión relativista.
3. Se analizó el problema de la fuerza tipo inverso al cuadrado, se obtuvieron las posibles órbitas para este caso, en las cuales coincidían con el trabajo del artículo **(Boyer, 2004)**, se resalta en los resultados las diferencias de las órbitas clásicas y relativistas.
4. Se obtuvo una ecuación diferencial de la órbita relativista para dos cuerpos, para un potencial de fuerzas centrales.
5. Se hizo el análisis la descripción del problema de fuerzas centrales relativistas para el caso de una fuerza tipo inverso al cubo, se obtuvieron las posibles órbitas a partir de una solución numérica y se contrastaron con las órbitas clásicas.

Bibliografía

Boyer, T. H. (2004, August). Unfamiliar trajectories for a relativistic particle in a Kepler. *American Journal of Physics.*, 72(8).

CERN. (n.d.). <http://home.web.cern.ch/>.

French. (1988). *Relatividad Especial*. Reverté.

Garrao, R. B. (2007). "estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la física . Lat.Am.j.phys.Educ.

Goldstein, H. (2002). *Mechanics classical* . Adissson Wesley.

J, Bertrand . (1873). *comptes Rendus*.

Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Wiley.

Keppner, D., & Kolenkow, R. (1978). *An Introduction To Mechanics*. McGraw Hill.

Marion, J. B. (2004). *Clasical Dinamics of Particles and Systems*. Thomson.

Serway, R. A. (2005). *Física para ciencias e ingenierias*. Mexico: Thomson.

