Representaciones gráficas, presentes en documentos históricos, que aluden a la idea de variación y covariación

Jhon Alejandro Larrota Garzón

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C., 2024

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Representaciones gráficas, presentes en documentos históricos, que aluden a la idea de variación y covariación

Jhon Alejandro Larrota Garzón

Código: 2019240026

C. C.: 1007365450

Director:

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D. C., 2024

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"**Representaciones gráficas, presentes en documentos históricos, que aluden a la idea de variación y covariación", elaborado por el estudiante **Jhon Alejandro Larrota Garzón,** identificado con el Código **2019240026** y Cédula **1007365450** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y seis** (46) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los cinco (5) días del mes de junio de 2024.

Edgar A. Guacaneme S.

Dr. EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ
Director del Trabajo de grado

Dr. JOSÉ LEONARDO ÁNGEL BAUTISTA
Jurado del Trabajo de grado

Mg. MAURICIO BAUTISTA BALLÉN
Jurado del Trabajo de grado

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Edgar, quien con paciencia y dedicación me apoyó constantemente en la construcción de este trabajo. Su guía experta y apoyo incondicional han sido importantes para mí. También quiero agradecer a mis dos evaluadores, debido a que su intervención y comentarios contribuyeron a la construcción de este trabajo. Su perspectiva crítica fue fundamental para enriquecer el contenido y mejorar la calidad de esta producción.

Adicionalmente, quiero dedicar un agradecimiento especial a mi familia. A mi querida madre, quien me acompañó con amor y constancia durante este proceso, aunque ella quizás no haya sido consciente de ello. A mi padre, quien con su aliento me ayudó a llegar hasta el final de esta jornada académica. Y a mi hermano, mi compañero de vida, quien siempre estuvo ahí para escuchar mis ideas y ocurrencias, brindándome su apoyo incondicional. A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento. Este logro no habría sido posible sin su amor, apoyo y comprensión constantes.

Gracias UPN, gracias Licenciatura en Matemáticas, gracias *alma mater* con grandes maestros.

Resumen

La actividad matemática requiere, en muchos casos, usar representaciones para su desarrollo; así, cuando se construye un objeto matemático se hace uso de distintas representaciones. Ejemplo de esto aparece en el video titulado "¿Qué hace hoy un matemático?" (NGCmatem, 2011); en este un periodista se da a la tarea de escribir un artículo sobre el trabajo de los matemáticos. Recurrentemente, cuando se presentan entrevistas a los matemáticos para indagar qué hacen, se evidencian distintas representaciones (p. e., algebraicas, verbales, gráficas, icónicas, etc.). De manera semejante ocurre cuando un estudiante desea aprender conceptos o procesos matemáticos nuevos, ya que necesita una representación que exhiba o haga ostensivos tales objetos. Así, podría afirmarse que la actividad matemática se realiza principalmente con el uso de representaciones.

Basados en el interés sobre las representaciones, se realizó un reconocimiento de algunos de aquellos hitos históricos relevantes para las representaciones gráficas sobre la covariación y, en ellos, se ubicaron obras matemáticas o tratamientos desde la Historia de las Matemáticas de estas. Así, el trabajo de grado se centró en el estudio de las representaciones gráficas sobre la covariación (especialmente las creadas por figuras históricas como Nicolás Oresme (1323 - 1382), Galileo Galilei (1564 - 1642), René Descartes (1649 - 1700) y Leonhard Euler (1720 - 1723)), aunque, se debe indicar que también se refirieron y estudiaron algunas representaciones ajenas a estos autores, como las producciones en las matemáticas egipcias y en las griegas.

Las representaciones seleccionadas se analizaron y clasificaron según la aproximación lograda de las teorías de Duval (1988, 2004) y Kaput (1987). Para ello, primero fue necesario estudiar y sintetizar algunos aspectos de cada una de las teorías; a este respecto es importante

reconocer cómo estas teorías fueron afines y permitieron evidenciar conceptos utilizados en las representaciones gráficas sobre la covariación.

Segundo, se tomaron las teorías como ópticas para analizar las representaciones halladas con anterioridad. Finalmente, siguiendo unas orientaciones propuestas en la tesis doctoral del asesor del trabajo de grado (Guacaneme, 2016) para guiar la reflexión y análisis de lo desarrollado, se obtuvieron resultados significativos y reflexiones importantes que contribuyeron a la formación del autor.

Abstract

Mathematical activity requires, in many cases, the use of representations for its development; thus, when a mathematical object is constructed, different representations are used. An example of this appears in the video entitled "What does a mathematician do today?" (NGCmatem, 2011); in this video a journalist is given the task of authoring an article about the work of mathematicians. Recurrently, when interviews with mathematicians are presented to find out what they do, different representations (e.g., algebraic, verbal, graphical, iconic, etc.) are evidenced. Similarly, when a student wishes to learn new mathematical concepts or processes, he/she needs a representation that exhibits or makes such objects ostensive. Thus, it could be said that mathematical activity is performed with the use of representations.

Based on the interest in the representations, a recognition of some of the relevant historical milestones for the graphical representations of covariation was conducted and, in them, mathematical works or treatments from the History of Mathematics were located. Thus, the degree work focused on the study of graphical representations of covariation (especially those created by historical figures such as Nicolas Oresme (1323 - 1382), Galileo Galilei (1564 - 1642), Rene Descartes (1649 - 1700) and Leonhard Euler (1720 - 1723)), although it should be noted that some representations outside these authors were also referred to and studied, such as those produced in Egyptian and Greek mathematics.

The selected representations were analyzed and classified according to the approximation achieved from the theories of Duval (1988, 2004) and Kaput (1987). To do so, it was first necessary to study and synthesize some aspects of each of the theories; in this respect it is important to recognize how these theories were related and allowed to evidence concepts used in the graphic representations on covariation.

Second, the theories were taken as optics to analyze the representations previously found. Finally, following some guidelines proposed in the doctoral thesis of the advisor of the degree work (Guacaneme, 2016) to guide the reflection and analysis of what was developed, significant results and important reflections were obtained that contributed to the formation of the author.

Tabla de contenidos

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

El trabajo consistió en investigar y analizar cómo los matemáticos, en la Edad Media, comprendieron elementos relacionados con la covariación y cómo representaron gráficamente la covariación entre dos o más magnitudes.

Se abordó una clasificación de las representaciones gráficas asociadas a las ideas de variación y covariación durante la Edad Media, esencialmente desde el siglo XIV hasta el siglo XVIII. Dichas representaciones fueron identificadas en trabajos que aluden a las matemáticas de algunos personajes históricos, como Nicolás Oresme (1323 - 1382), Galileo Galilei (1564 - 1642), René Descartes (1649 - 1700) y Leonard Euler (1720 - 1723). A pesar de que las representaciones gráficas en la Edad Media son el objeto de estudio, se debe tener en cuenta que fueron influenciadas por elaboraciones de épocas anteriores y aportaron en elaboraciones de épocas posteriores. En consecuencia, se tuvieron en cuenta representaciones de estos otros momentos históricos, aunque en menor medida.

La justificación, los antecedentes, los objetivos y la metodología del estudio se expondrán a lo largo del primer capítulo, para luego, en el segundo capítulo, presentar las gráficas identificadas y exhibir algunos resultados de un estudio que se realizó sobre algunos documentos relacionados con la historia del movimiento y sobre otros documentos que plantean ideas históricas sobre la representación gráfica aplicadas al aula. Este estudio permitió también ubicar los hitos históricos sobre la temática y luego analizar las representaciones haciendo uso de las propuestas teóricas de James Kaput (1987) y Raymond Duval (1988, 2004), asuntos desarrollados en el tercer y cuarto capítulos.

Finalmente, en el quinto y último capítulo, el documento presenta los resultados y una reflexión basada en unas orientaciones propuestas por el profesor Guacaneme (2016); estas ofrecen la posibilidad de un abordaje a una pregunta en el marco de la pertenencia y trascendencia de este trabajo de grado.

Es importante tener en cuenta que muchos de los documentos estudiados se encuentran escritos en idiomas distintos al español, por tanto, algunas citas y menciones se han traducido con ayuda de herramientas *online*.

Capítulo 1: Generalidades del estudio

En este primer capítulo se abordará la justificación, los antecedentes, los objetivos y la metodología del estudio. Para ello, primero se presentará la justificación, teniendo en cuenta aspectos que se consideran argumentos del trabajo de grado. Segundo, se abordarán los antecedentes, fundamentalmente teniendo en cuenta autores como Boyer (1949), Oliveira (2014), Grant (1960) y Sattler (2020). Tercero, se expondrá una aproximación a la conceptualización de las ideas de cambio, variación y covariación. En cuarto lugar, se presentarán los objetivos que se perseguían con el desarrollo de este trabajo. Finalmente, al exponer la metodología se considerarán los momentos relevantes para el desarrollo del trabajo.

Justificación

En esta sección se darán detalles acerca de mi interés por la Historia de las Matemáticas [HM], el reconocimiento logrado sobre la importancia de la HM en la formación de un profesor, la importancia de la HM en el aula, y el lugar de las representaciones en el aula y su conexión con las representaciones históricas.

Un aspecto clave que sustenta la aproximación empleada en el trabajo de grado refiere al interés que como futuro profesor de matemáticas he tenido por la HM. Ese interés emerge en al menos tres ámbitos de acción vividos en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; estos son: algunos cursos, un semillero de investigación y algunas conversaciones con un formador de profesores de matemáticas.

Inicialmente, debo reconocer mi interés en la HM, especialmente en la historia de la variación y la covariación. Este interés surgió, desde varios espacios académicos cursados en la Licenciatura en Matemáticas (por ejemplo, *Programación en matemática*; *Modelos Pedagógicos*; *Aritmética; Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo*; *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*; *Geometrías no euclidianas*; *Tópicos de Historia de las Matemáticas*). Por ejemplo, en *Programación en matemáticas*, con el profesor Benjamín Sarmiento, se abordaron distintos métodos de aproximación para las integrales; la metodología allí empleada implicó trabajar primero el concepto desde la historia y, a partir de su desarrollo matemático, culminar en un proceso de programación de este. Otro ejemplo proviene del curso *Tópicos de Historia de las Matemáticas*, dirigido por el profesor Leonardo Ángel; allí se abordaron algunas curvas mecánicas las cuales se caracterizaban teniendo en cuenta el cambio que presenta una variable respecto a otra. A través de este ejemplo se observaron las genialidades producidas por las culturas y los matemáticos para poder caracterizar dichas curvas. Estos espacios académicos no fueron los únicos en fomentar mi interés por la HM. Aquellos espacios académicos en donde se tocaba el tema de la HM, comúnmente seguían un orden para abordarlos: primero, se estudiada el concepto desde la historia (ya sea con un relato, una lectura o siguiendo pasos para las producciones), luego se presentaban discusiones frente a las producciones estudiadas, y, finalmente, se concluía o se introducía a un objeto relacionado.

Otro lugar en donde se fomentó mi gusto por la HM fue el *Semillero de Historia y Filosofía de las Matemáticas* al cual asistí durante el segundo semestre del 2022. Este espacio extracurricular fue guiado por la profesora Natalia Morales y el profesor Pablo Beltrán; ellos presentaban problemas matemáticos históricos y promovían dar solución mediante la matemática del momento. Un momento importante fue una explicación de un problema que se solucionaba con la regla de la doble falsa posición. Para su presentación decidí hacer un paralelo entre la notación utilizada en el documento de consulta y una notación algebraica moderna; a través de este paralelismo reconocí cómo existen relaciones imperceptibles entre las distintas maneras de representar.

Finalmente, desde varias conversaciones académicas con el profesor Edgar Guacaneme sobre la HM, la historia de la variación y sus representaciones, identifiqué como tema de interés para este trabajo de grado, las representaciones gráficas usadas para la covariación y la manera en que estas representaciones se encuentran relacionadas con la manera en que se trabaja un concepto matemático. Estas conversaciones fueron previas al planteamiento del anteproyecto de grado y se llevaron a cabo de manera remota.

Las experiencias reportadas en los ámbitos descritos antes participaron de manera importante del reconocimiento de la importancia de la HM para el futuro profesor de matemáticas. La HM es un elemento necesario para la formación de profesores de matemáticas; este aspecto justifica el trabajo de grado porque permite, en mi posición de futuro profesor de matemáticas, reconocer la epistemología de las representaciones de la variación y covariación.

En relación con el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas sobre la HM, se reconoce que los objetos matemáticos pueden abordarse desde: su epistemología, las formas de pensamiento y los razonamientos realizados en la construcción y la evolución de las Matemáticas. En este sentido, Guacaneme (2016) plantea que es deseable que el profesor de matemáticas conozca los siguientes asuntos en relación con HM para gestionar de manera profesional procesos ligados a la educación matemática:

- Las maneras de integración de la HM en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Los modos en que la HM determina los currículos o programas de estudio para educar matemáticamente a la sociedad en ambientes escolares.
- Las formas en que la HM participa de las interacciones en las comunidades de práctica de profesores de matemáticas en ejercicio.
- La necesidad, surgida de la práctica, de recurrir al estudio del discurso histórico como medio para la acción docente y los aprendizajes logrados a través de este. (Guacaneme, 2016, p. 22)

La HM es importante en el aula de matemáticas porque es parte de las matemáticas, porque es una herramienta en el aula y porque fomenta actividades propias de la enseñanza y el aprendizaje; a continuación, se argumentará de mejor manera estas tres ideas. Primero, contestar al "¿Por qué enseñar la historia de las matemáticas?" Guacaneme argumenta que "porque la historia de un asunto es parte del asunto" (2016, p. 164), es decir, la HM es parte de las matemáticas en sí misma y desligarlas es ignorar parte de las matemáticas. Segundo, la HM en el aula es una herramienta; Rodríguez y Vicario mencionan que "La historia de la matemática juega un papel importante en la enseñanza de ésta, dada su riqueza cultural y su vinculación con los hechos de origen" (2015, p. 441). Tercero, la HM fomenta el uso de las matemáticas en diferentes contextos, la resolución de problemas haciendo uso de las matemáticas contextualizadas y el pensamiento crítico al reconocer cómo los matemáticos afrontaron algunos problemas.

Finalmente, a continuación, se presentarán argumentos sobre la importancia de: las representaciones, la importancia de la variación en el aula y cómo esto nos lleva al objeto de estudio del trabajo de grado. Se presentan argumentos para resaltar la relevancia de los dos primeros y su importancia en el tercero.

Para la educación matemática las representaciones son reconocidas por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] ligadas a una competencia que deben alcanzar los estudiantes, esta es: "Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista" (MEN, 2006). De ello se puede entender que las representaciones funcionan como una herramienta que permite abordar ideas matemáticas; es así como la representación es necesaria dentro del aula. En otras palabras, las distintas formas de presentar ideas en las matemáticas con argumentos son en sí mismas representaciones, que en el contexto del estudiante se traducen en escritura, dibujo y vocabulario.

A raíz de mi interés, de la importancia de HM en la formación de profesores y de la importancia de la HM en el aula, decidí enfocar el trabajo de grado en una temática que acogiera todos estos elementos. Por ello en este se consideran las representaciones gráficas de la covariación de dos magnitudes que históricamente desarrollaron algunos matemáticos.

Antecedentes

En este apartado se tienen en cuenta documentos que aludan a: el estudio de la variación y covariación, el estudio de las representaciones gráficas y las perspectivas de

Kaput (1987) y Duval (1988, 2004) sobre el estudio de representaciones gráficas. Antes de empezar es importante mencionar que en este apartado no se abordarán profundamente los documentos porque esto es ocurrirá a lo largo del segundo capítulo.

El estudio de las matemáticas desarrolladas en momentos específicos de la historia es un campo extenso. En concreto, en relación con el **estudio de la variación y covariación** es posible identificar trabajos realizados por Boyer (1949), Oliveira (2014), Grant (1960) y Sattler (2020), entre otros.

El libro de Boyer (1949) es un trabajo en el que el autor desarrolla la historia del Cálculo partiendo del concepto de semejanzas y proporcionalidades en la antigüedad hasta la formalización. Este documento se tuvo en cuenta para identificar aquellos hitos históricos relevantes en el estudio de la variación y covariación; no obstante, se debe resaltar que el documento no cuenta con un amplio tratamiento y desarrollo de las representaciones.

El documento escrito por Oliveira (2014) presenta un desarrollo del concepto de función desde las ideas de Nicolás Oresme (1323-1382) hasta las de Peter Dirichlet (1805-1859). El documento nos permitió identificar a Oresme como un hito histórico en el desarrollo de las representaciones para la variación y covariación; además, Oliveira compara las producciones de Oresme con las de Dirichlet (concepto moderno) y de esta comparación se reconoce cómo las ideas de Oresme son ideas fundamentales en el desarrollo de la función y, por consecuencia, de la variación y covariación.

El libro de Grant (1960) es una traducción e interpretación del libro de Oresme, titulado *De Proportionibus Proportionum and Ad Pauca Respicientes.* Este documento a pesar de carecer de representaciones gráficas nos permite identificar las ideas de Oresme frente a la proporción. Estas ideas se culminan o analizan a lo largo del cuarto capítulo del trabajo de grado, teniendo en cuenta documentos que presentan las representaciones realizadas por Oresme.

El libro de Sattler (2020) es un documento en el que se desarrolla el concepto de movimiento en la Antigua Grecia. El trabajo de Sattler (2020) se utiliza para identificar la idea de movimiento, que se estudia mediante la variación y covariación, en el periodo de la Antigua Grecia. El documento nos permite identificar hitos históricos relacionados con la paradoja de Zenón para la cual se estudian conceptos matemáticos como el infinito potencial.

Estos trabajos comparten el interés por las producciones matemáticas históricas y estudios sobre objetos particulares como las funciones, el movimiento, la solución de diversos problemas, etc.

En los siguientes párrafos se hablará de documentos que aluden a las representaciones.

Concretamente, en relación con el **estudio propio de las representaciones**, se pueden identificar autores como Anderson (2008), Bonetto (1999), Nicomedi (2010), entre otros, quienes particularmente trabajaron sobre algunas representaciones históricas y el desarrollo de estas.

En su documento, Anderson (2008) nos presenta el desarrollo de las coordenadas cartesianas; allí realiza menciones a Oresme y Descartes como hitos históricos del desarrollo de este concepto. Este documento es importante en cuanto permite identificar los dos hitos históricos mencionados antes y, además, nos presenta las representaciones que incentivaron el desarrollo de estas coordenadas desde la perspectiva del autor.

Concretamente, Bonetto (1999) desarrolla una reconstrucción de las representaciones gráficas partiendo desde el papel de la función en el desarrollo de estas gráficas, luego abordando las construcciones gráficas utilizadas en la geometría analítica y, particularmente, aborda las representaciones y su desarrollo en la educación brasileña. Para el trabajo de grado el documento es relevante porque permite identificar representaciones gráficas de aquellos hitos históricos ubicados por los autores antes mencionados.

El documento de Nicomedi (2010) aborda el desarrollo del movimiento desde la perspectiva de Galileo y Oresme. El documento se usó porque nos permite identificar nuevamente a Oresme como un hito, además de Galileo como otro hito. De este documento fue posible identificar aquellas representaciones utilizadas por estos autores para el estudio del movimiento.

Teniendo en cuenta los autores antes mencionados, es posible identificar cómo este estudio se ha realizado desde diferentes perspectivas. Además, algunos autores reconocen y desarrollan el estudio de las representaciones gráficas en el aula, caso particular de Bonetto (1999). Cabe resaltar, que las producciones de estos autores se abordarán de manera concreta en el Capítulo 2.

Finalmente, el **estudio de las representaciones** y categorización de estas es fundamentado en las producciones de Kaput (1987) y Duval (1988, 2004). La primera teoría es la de Kaput (1987), quien propone la teoría de las representaciones en matemáticas resaltando la importancia de las representaciones en el aula; nos menciona que “A causa de la construcción del sistema de representación y el diseño del algoritmo, podemos estar seguros de que el símbolo producido por la manipulación simbólica del algoritmo representa la respuesta verdadera.” (Kaput, 1987). Es decir que la representación y la manipulación de estas es un medio por el cual se construye conocimiento. Además, resalta la importancia que tienen los cambios de representación entre distintos sistemas. De lo anterior, propone las siguientes categorías en las representaciones matemáticas estas son: Morfismos, Construcciones algebraicas genéricas, Construcción canónica *Building-block* (externo), Construcción canónica *Building-block* (interna), Aproximación, Aislamiento de rasgos de propiedad y Modelos lógicos.

Estas categorías se tuvieron en cuenta durante la categorización de las representaciones.

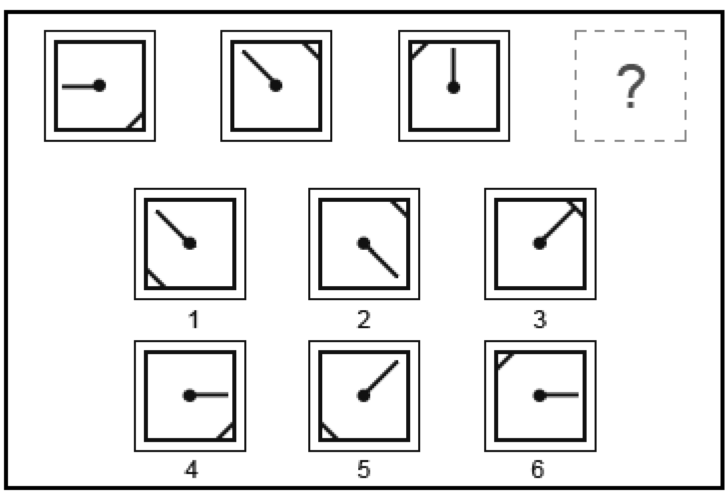
La segunda teoría es la de Duval (1988, 2004). En estos documentos se resalta teóricamente la necesidad de realizar cambios entre representaciones semióticas que permitan explorar y estudiar los objetos matemáticos. Además, propone las siguientes categorías en las representaciones semióticas gráficas (nombradas vías), y son: la vía del punteo, en el que “por referencia a ejes graduados, una pareja de números permite identificar un punto” (Duval, 1988, p. 2) y el conjunto de puntos son concretamente parte de una representación gráfica; una vía de extensión del trazo efectuado, que “corresponde a las actividades de interpolación y de extrapolación” (Duval, 1988, p. 2) y una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras; esta es la capacidad de observar una gráfica y realizarle cambios dentro de la representación sin perder sus propiedades permitiendo una extrapolación que es netamente un proceso mental.

Se debe aclarar que los documentos y planteamientos se abordaron de manera más profunda a lo largo del tercer capítulo.

¿Qué es cambio, variación y covariación?

A continuación, se presentará una descripción y definición del cambio, la variación y la covariación, junto con ejemplos específicos de cada uno de estos conceptos. El primer concepto; cambio, implica transformar un objeto, situación, medición o emoción en otro de la misma naturaleza. Es decir, cualquier cosa es susceptible de cambio; sin embargo, muchos de estos cambios no son cuantificables. Ejemplo de cambio es la siguiente situación:

Figura 1: Representación de cambio, tomada de: *https://www.nibcode.com/es/formacion-psicometrica/test-de-razonamiento-abstracto#google_vignette*

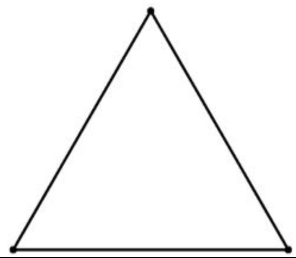
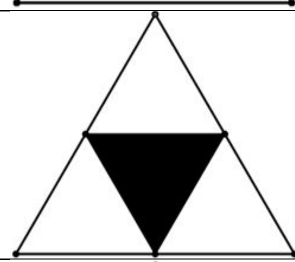
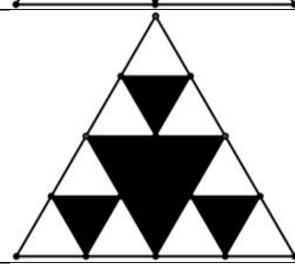
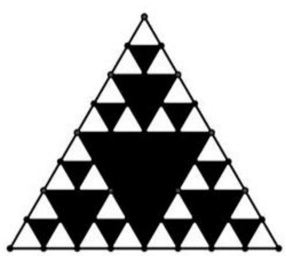


Como se puede observar, la secuencia de figuras presenta un cambio entre sí. El segmento interior gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que el cuadrilátero gira en sentido horario, lo que permite afirmar que la figura faltante es la número 5. En este caso, el cambio ocurre en ambas figuras mencionadas; sin embargo, no existe una magnitud que cambie y nos permita hablar de variación.

El segundo concepto, variación, se refiere al cambio presente en magnitudes. Otra manera de interpretarlo es que cuando cambia un valor numérico, esto es variación. El tercer concepto, covariación, según Confrey citado por García (2022), es "la coordinación de valores de dos variables a medida que cambian" (2022, p. 32). Sin embargo, García (2022) menciona a Thomson (1998), quien considera la covariación como "conceptualizar los valores de las cantidades (magnitudes) individuales como variables y luego hacer que varíen simultáneamente, es decir, acoplarlas formando un objeto multiplicativo (explícito y persistente) que describa la relación entre sus valores" (2022, p. 32). Otra manera de interpretar la covariación, desde la variación, es identificar cómo varía una variable en correspondencia con otra variable.

Un ejemplo de variación y covariación es el siguiente: en la geometría fractal, es posible identificar las primeras iteraciones para la construcción del triángulo de Sierpinsky y el número de triángulos (de color blanco) formados en cada iteración, posibilitando la siguiente tabla:

Tabla 1: Ilustración sobre el número de figuras y forma del triángulo de Sierspinsky, con imágenes tomadas de https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo1/procesos-infinitos/problema-2-triangulo-de-Sierpinsky

Figuras	Construcción
Figura 1	
Figura 2	
Figura 3	
Figura 4	

Existe un cambio en el número de las figuras y también en las representaciones de las figuras para los triángulos. Sin embargo, para el caso del ejemplo, tomaremos en cuenta la cantidad de triángulos de color blanco. Teniendo en cuenta estas consideraciones, es posible reconstruir la tabla de la siguiente manera:

Tabla 2: Sobre el número de figura y la cantidad de triángulos para cada una.

Numero de figura.	Cantidad de triángulos (de color blanco).
1	1
2	3
3	9
4	27

Es posible afirmar que existe variación en la columna del número de figura, y que esta variación ocurre de uno en uno. De manera análoga, la columna de cantidad de triángulos presenta variación, pero esta variación parece ser un múltiplo de 3. Es por ello que podemos analizar la variación de la segunda columna respecto a la primera y afirmar que existe una covariación, según la cual la cantidad de triángulos es igual a 3^{n-1} , donde n es el número de la figura.

Objetivos

General

Identificar y caracterizar la representación gráfica de la variación y covariación en algunos momentos históricos.

Específicos

- Reconocer los tipos de representación gráfica que se realizaron para la covariación en la Historia de las Matemáticas e identificar hitos históricos de dichas representaciones.
- Caracterizar, teóricamente, los tipos de representación gráfica de la covariación de magnitudes.

- Establecer el impacto que tiene para el conocimiento del autor del estudio, el trabajo con la HM.

Momentos metodológicos

El trabajo de grado empezó con una consultar bibliografía sobre la historia de la variación y la covariación, realizando un énfasis en la identificación de las representaciones realizadas por los matemáticos y científicos. A través de ello se logra el reconocimiento de hitos históricos sobre la representación de la covariación.

Después, sin dejar de lado el hallazgo de nuevos documentos, nos dedicamos a identificar y estudiar teorías de la representación en matemáticas, en las que se tenía la existencia de dos propuestas, una elaborada por James Kaput (1987) y otra por Raymond Duval (1988, 2004). Esto para tener una óptica con la que caracterizar los hitos históricos previamente identificados. Por tanto, el trabajo que continuó fue la caracterización de los hitos históricos partiendo de las teorías de James Kaput (1987) y por Raymond Duval (1988, 2004). Sin embargo, en algunas ocasiones se reconocían nuevos documentos que contenían otros hitos históricos o reforzaban hitos ya identificados.

Se reflexionó frente al desarrollo del trabajo realizado y las implicaciones que este tiene para el conocimiento del profesor de matemáticas. Para poder realizar una reflexión se contó constantemente con la compañía del profesor Guacaneme, esto porque durante nuestras sesiones de asesoría se presentaron discusiones frente al desarrollo del trabajo, discusiones que permitieron identificar dudas y cuestionar afirmaciones.

Finalmente, todo este trabajo se compilaron los resultados de las actividades anteriores en este documento, tipo monografía. Para dar forma a la quinta actividad, las cuatro primeras actividades se consolidaron en los capítulos siguientes. Teniendo esto en cuenta, a continuación, se presentará el segundo capítulo del documento donde se abordará la consulta bibliográfica antes planteada.

Capítulo 2: Investigación bibliográfica y análisis de documentos encontrados

Este capítulo contiene una presentación de los documentos encontrados al hacer una búsqueda bibliográfica sobre las representaciones gráficas de la variación y la covariación. Adicionalmente, incluimos una suerte de justificación sobre la selección de los documentos en cuestión. Debemos aclarar que en los documentos aquí tratados no se suele hacer uso de las palabras "variación" y "covariación"; sin embargo, estos hacen uso de conceptos relacionados con estas nociones (por ejemplo, la idea de movimiento).

Varios de tales documentos refieren aspectos históricos de estas nociones; otros aluden a consideraciones didácticas, con fundamento en lo histórico, para su enseñanza o aprendizaje. Por ello, y para proponer una organización de los documentos, el conjunto de estos se dividirá en tres grupos, de acuerdo con las siguientes temáticas:

- Documentos que aluden a la noción de movimiento en las matemáticas existentes antes del siglo XVIII.
- Las representaciones gráficas sobre la variación en la historia del Cálculo.
- El estudio de la covariación y variación en el aula de matemáticas.

Debemos advertir que estos grupos no generan una clasificación estricta de los documentos, puesto que algunos se encuentran en más de un grupo; cuando esto suceda se hará mención explícita.

La presentación de los documentos tendrá un esquema similar en las tres secciones siguientes. Primero se presentará el título del documento, segundo una descripción de los contenidos del documento, tercero se discutirá su importancia en el desarrollo del trabajo de grado y, finalmente, se presentarán las representaciones gráficas allí encontradas. Se debe aclarar que no en todos los documentos fue posible encontrar representaciones gráficas. Ahora presentaremos los documentos teniendo en cuanto lo antes mencionado.

Documentos que aluden a la noción de movimiento en las matemáticas existentes antes del siglo XVIII

El primer documento reportado es el tercer volumen de la serie de libros *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, titulado *Ancient Egyptian Mathematics* (Clagett, 1989) en el que el autor aborda las matemáticas del Antiguo Egipto.

Figura 2: Portada y facsímiles de la tabla de contenido del libro Ancient Egyptian Mathematics

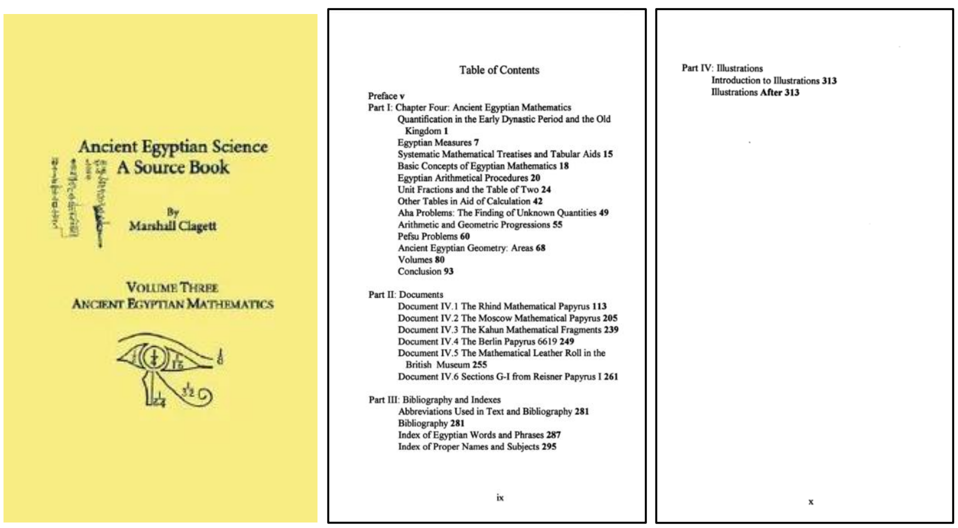


Table of Contents

ix

x

Este documento aborda el estudio de la naturaleza y procedimientos de las matemáticas del Antiguo Egipto. En la Parte I trata varios asuntos sobre las matemáticas propiamente dichas (por ejemplo, las medidas egipcias, los procedimientos de la aritmética egipcia y problemas *pefsu*[1]). En la Parte II ubica el estudio sobre distintos documentos

[1] El termino *pefsu* es, según Clagett, "el término convencional para el pan o la cerveza de fuerza hecha a partir de un *heqat* de grano." (1989, p. 60). Entonces, los problemas *pefsu* son problemas de proporcionalidades aplicada a la repartición. El termino *heqat* era una medida para el volumen utilizada principalmente en la medición de granos y productos agrícolas, actualmente es aproximadamente 4.8 litros.

matemáticos que son originarios de esta cultura (por ejemplo, los Papiros de Rhind, Kahun, Berlín y Moscú). En la parte III el autor presenta la bibliografía del documento junto con un índice de palabras y frases egipcias utilizadas en el documento. En la última parte (IV) el autor expone algunas reconstrucciones de papiros y representaciones geométricas.

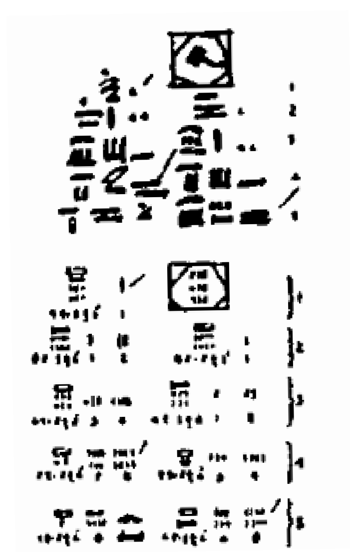
En este documento ubicamos problemas los cuales abordan otro tipo de repartición. Particularmente, en los papiros de Rhind y Moscú se identifican veinte problemas *Pefsu*. Este tipo de problemas nos permite reconocer elementos de la proporcionalidad. Además, se ha identificado la solución a problemas de búsqueda de cantidades, es decir, solución a ecuaciones. Lo antes mencionado constituye unos primeros elementos en relación con la variación, en cuanto, son elementos necesarios para para su abordaje.

Los problemas *Aha* son problemas algebraicos en los que se emplea el método de resolución mediante *regula falsi.* El método de la regla falsa está ejemplificado en cuatro problemas del papiro de Rhind, estos son los identificados con los números 24, 25, 26 y 27. Un ejemplo de este tipo de problemas es "*A quantity with 1/7 of it added to it becomes 19*" (Clagett, 1989, p. 140). Como se observa, estos problemas no implican variación, pero, los elementos usados en la resolución de ecuaciones de este tipo sí son necesarios para la posterior comprensión del objeto matemático. Algo similar ocurre con los problemas *Pefsu,* los cuales no necesariamente abordan el concepto de variación y covariación. Sin embargo, la forma en que se abordan los diversos problemas siguen un camino hacia la generalización, como menciona Clagett al hablar del "concepto de modelar problemas y generalizar problemas que buscan una cantidad desconocida como pasos insipientes hacia la generalidad matemática" (1989, p. 19). Estos conceptos previos, pese a parecer independientes, se usan en la matemática; dentro de estos podemos ubicar la idea de variación. Así, podemos afirmar que algunos elementos necesarios para entender la variación y covariación se trabajaron desde este momento histórico.

En términos de representaciones gráficas, en este documento es posible identificar las siguientes:

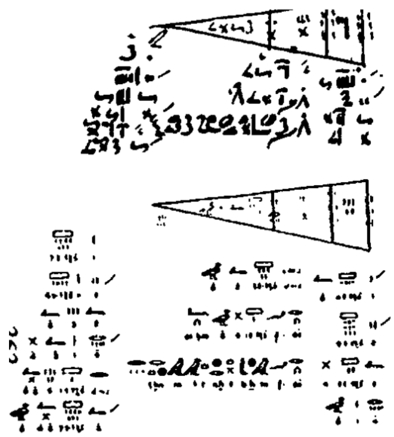
1. Circunferencia inscrita en un cuadrado. En el problema 48 del papiro de Rhind se desea ubicar el área de la circunferencia inscrita en un cuadrilátero.

Figura 3: Facsímil del problema 48 del papiro de Rhind tomado de (Clagett, 1989, p. 360).



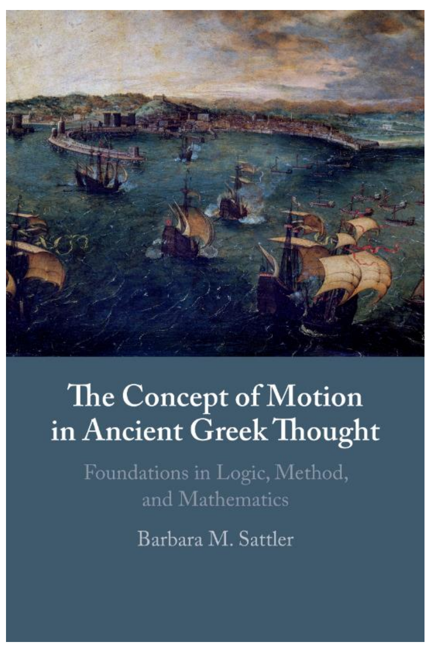
2. Caso particular de semejanza de triángulos que aluden a la proporcionalidad. Esta representación se ajusta a la proporcionalidad usada por otros autores posteriormente; no obstante, en este documento no es posible identificar más que esta representación, pero ninguna recreación o abordaje de esta.

Figura 4: Facsímil ubicado entre el problema 49 al 55 del papiro de Rhind tomado de Clagett (1989, p. 162)



El segundo documento consultado se titula *The Concept of Motion in Ancient Greek Thought: Foundations in Logic, Method, and Mathematics*.

Figura 5: Portada del libro The Concept of Motion in Ancient Greek Thought



Este documento estudia "cómo se desarrolló la comprensión del movimiento físico en el pensamiento griego antiguo antes y hasta Aristóteles." (Sattler, 2020, p. 1). El documento centra el estudio de la idea del movimiento durante los siglos IV y V a.C. especialmente en cómo lo comprendían "Parménides de Elea y su compañero eleático Zenón, seguidos por los atomistas Leucipo y Demócrito, y finalmente Platón y Aristóteles" (Sattler, 2020, p. 2).

Este libro tiene nueve capítulos. El primero ofrece, según la autora, "una breve descripción de los problemas que plantea el concepto de movimiento en el período investigado (…) lo que se entenderá por 'filosofía natural'." (Sattler, 2020, p. 11). El segundo tiene como fin presentar al lector la descripción que hace Parménides del objeto de estudio en el ámbito de la investigación racional. El tercero aborda cómo Zenón retoma el trabajo de Parménides y avanza sobre sus criterios filosóficos; "por ejemplo, Zenón adopta el principio de no contradicción (…) lo utiliza como base para desarrollar sus paradojas de pluralidad, lugar y movimiento" (Sattler, 2020, p. 12). El cuarto aborda el caso de Leucipo y Demócrito, quienes son considerados como un ejemplo de la reacción de los filósofos naturales (Físicos) posteriores a las teorías de Parménides y Zenón. El quinto y sexto capítulo, titulado "Platón", trabaja el primer "clímax" en el proceso histórico sobre el estudio del movimiento; según Sattler este capítulo aborda *"*el avance de los conceptos lógicos en el Sofista de Platón y la integración de los conceptos matemáticos en el marco lógico en el Timeo de Platón*"* (2020, p. 14). Los últimos tres capítulos tratan sobre cómo entendía el concepto de "física" Aristóteles; el séptimo especialmente sobre la noción de lo continuo en su física, el octavo sobre la influencia de dicha noción en Aristóteles y cómo abordó el problema central de la paradoja de Zenón, y, en el último, el autor defiende su posición frente a la idea de cómo algunas condiciones metafísicas no permitieron que Aristóteles consolidara una explicación formal sobre el movimiento.

En relación con el trabajo de grado, en general el libro es útil para identificar la idea de movimiento previo a la Edad Media. La idea de movimiento en relación con la variación es muy importante dado que: primero se identifica el movimiento y se caracteriza, luego, se caracterizan otros elementos que varían dado un movimiento, este proceso funciona como una semilla que germina en el estudio de la variación. Por tanto, este documento es de interés para ubicar esos antecedentes a la idea de movimiento durante la Edad Media. Finalmente, en este documento no se encuentran representaciones gráficas, pero sí se identifican los hitos históricos antes mencionados.

El documento *A construção da representação gráfica e o seu papel no ensino de funções: uma visão histórica* (Bonetto, 1999) trabaja sobre la historia de la representación entorno a la función; además, aborda la importancia de las representaciones gráficas y de la historia de las matemáticas.

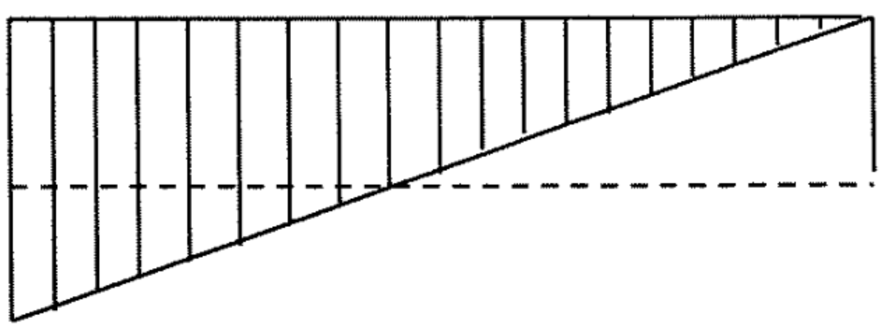
El primer capítulo se dedica a realizar una justificación sobre la importancia de las representaciones gráficas y la historia de las matemáticas en el aula. En el segundo capítulo el autor presenta un panorama sobre la geometría analítica y la representación gráfica de las funciones antes del siglo XIX. En el tercer capítulo aborda la historia y uso de las representaciones gráficas en la educación brasileña. Para ello trabaja sobre documentos escolares matemáticos. Se ubican algunas representaciones geométricas y gráficas de funciones en dichos documentos. Finalmente, el cuarto capítulo, aborda las representaciones gráficas de las funciones desde 1960 hasta 1990, trabajadas por algunos autores. Cabe resaltar que este documento no solo está ubicado en este grupo, dado que, aborda historia del cálculo y en el tercer capítulo se trabaja sobre la enseñanza de las representaciones en la educación brasileña.

En relación con mi trabajo, este documento es una base sólida para la historia sobre las representaciones gráficas de la función; por tanto, contribuye en la variación y covariación. De igual manera, se ubican algunos hitos históricos descritos en este documento, especialmente en el segundo capítulo.

Finalmente, presentaré las distintas representaciones ubicadas en el documento; estas son:

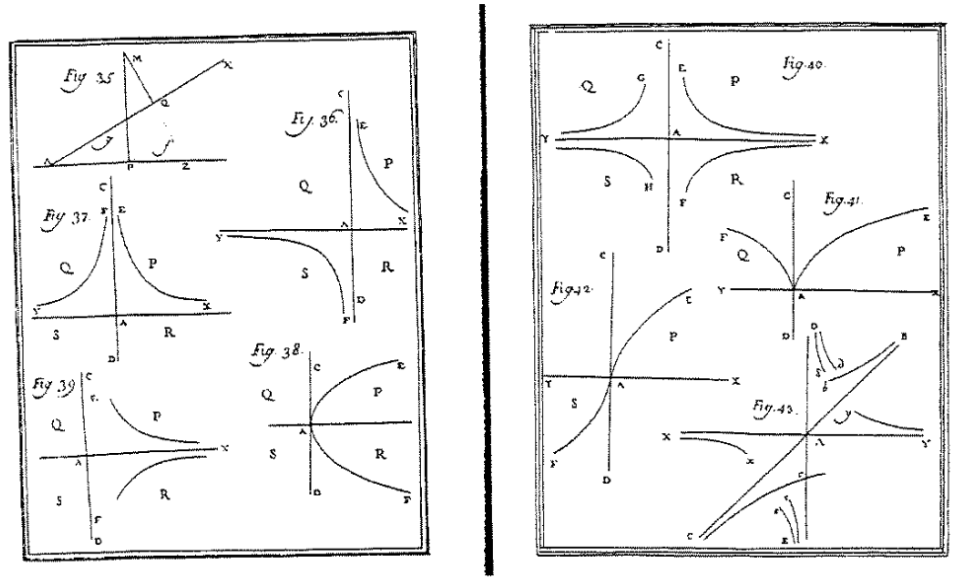
1. Una representación usada por Oresme para la caracterización del movimiento.

Figura 6: Ilustración realizada por Oresme. Tomada de Bonetto (1999, p. 47)



2. Tabla de representaciones presentadas por Euler, encontradas en el libro de Bonetto (1999)

Figura 7: Representaciones gráficas usadas por Euler. Tomado de Bonetto (1999, p. 72)



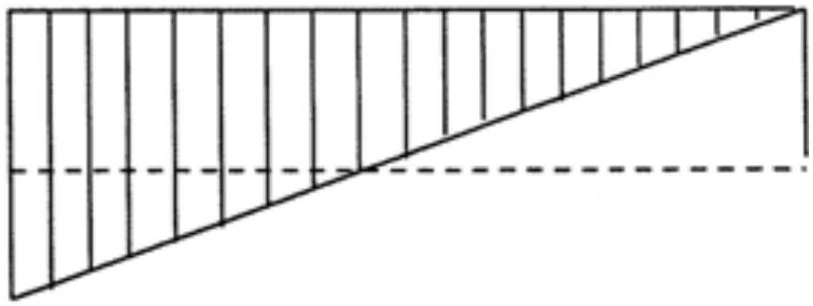
El anterior documento fue un hallazgo ubicado en el artículo titulado *De Oresme a Dirichlet: um breve histótico do desenvolvimento das funções* (Oliveira et al., 2014). Este enmarca la definición de Dirichlet sobre la función, partiendo de las representaciones propuestas por Oresme y las tablas Babilónicas. Por tanto, los autores abordan en su desarrollo representaciones retóricas, sincopadas y simbólicas a lo largo de la historia. Luego nos presenta las representaciones gráficas realizadas por Oresme, para finalmente presentarnos el concepto de función trabajado por Dirichlet.

Es importante, dado que, de manera similar al anterior, otorga unas pautas e hitos históricos sobre la representación de las funciones, aunque de manera particular aborda las representaciones de Oresme en la Edad Media. También, ubica lo importante que fue el desarrollo del lenguaje algebraico como un potenciador de las representaciones gráficas. Además, realiza breves biografías de Oresme y Dirichlet.

Las representaciones encontradas en este documento fueron las siguientes:

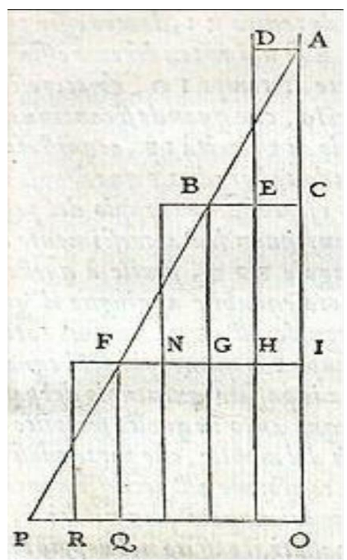
1. Esta primera representación ya se mencionó, por tanto, se presenta sola.

Figura 8: Ilustración realizada por Oresme. Tomado de Oliveira (2014, p. 54)



2. La segunda representación es la usada por Galileo Galilei.

Figura 9: Representación usada por Galileo Galilei presentada en (Oliveira et al., 2014, p. 55)



El siguiente documento es el titulado *Oresme on motion* (Caroti, 1993). En este artículo podemos encontrar una discusión sobre el movimiento mediante las primeras siete preguntas de la obra "Cuestiones sobre física (Libro III)" de Oresme. Las preguntas propuestas por Oresme en relación con el movimiento son las siguientes:

#	Preguntas	Traducción
1	*Utrum motus sit aliquid*	¿El movimiento es algo?
2	*Utrum motus sit res mota vel ipsum*	¿El movimiento es la cosa movida o lo que se mueve en sí mismo?

3	*Utrum motus sit res acquisita mobili dum movetur*	¿El movimiento es una cosa adquirida por lo que se mueve mientras se mueve?
4	*Utrum motus localis sit illud quod acquiritur mobili tali motu, scilicet locus in quo et circa quod mobile movetur*	¿El movimiento local adquiere por tal movimiento, el lugar en el que y alrededor del cual se mueve el móvil?
5	*Utrum motus sit res successiva sive fluxus distinctus a rebus permanentibus cuiusmodi sunt mobile et res acquisita ad quam est motus*	¿Es el movimiento algo diferente de los objetos físicos en sí mismos, o es simplemente una característica o estado de esos objetos?
6	*Utrum moveri sit aliter se habere continue quam prius*	¿Si moverse es ser continuamente diferente de lo que era antes?
7	*Utrum motus bene diffiniatur quando dicitur quod est actus entis in potentia secundum quod in potential*	¿Se define correctamente el movimiento cuando se dice que es el acto del ser en potencia en cuanto que está en potencia?

Tabla 3: Las siete preguntas de Oresme sobre el movimiento, en el documento "Oresme on Motion" y una posible traducción

De igual manera, Oresme intentó dar respuesta a dichas preguntas con algunas opiniones sobre el movimiento. Dichas opiniones son tratadas por el autor del texto para el desarrollo y son las siguientes:

#	**Opiniones texto original**	**Una posible traducción**
11	*motus est nihil*	El movimiento es nada.
22	*motus est aliqua, scil. Mobile et illa ad que se habet aliter quam prius*	Hay algún movimiento, a saber, un movimiento móvil y ese movimiento es de manera diferente a como estaba antes.
33	*Motus est mobile 28e ures mota*	El movimiento es algo que se mueve o algo que ha sido movido.
44	*es acquisita mobili dum movetur*	El movimiento es adquirido por el objeto móvil mientras se mueve.
55	*Motus est res successiva distincta simpliciter a permanentibus*	El movimiento es la sucesión de cosas distintas simplemente por parte de las cosas permanentes.

Tabla 4: Opiniones de Oresme sobre el movimiento y una posible traducción

Este artículo de revista es importante para el desarrollo del trabajo de grado dado que nos presenta un recuento histórico sobre el movimiento, además, que nos proporciona algunas opiniones de Oresme frente a la noción de movimiento. También, acuña algunas palabras del latín, en relación con el desarrollo y estudio del movimiento, empleadas por

Oresme (por ejemplo, *Fluxus*: flujo). No obstante, el documento no cuenta con representaciones gráficas.

El artículo *Nicole Oresme and His De Proportionibus Proportionum* (Grant, 1960) es otro de los documentos. En este podemos ubicar la historia relacionada al problema del movimiento desde la perspectiva de Oresme. Además, en el documento es posible identificar el uso de proporciones como una herramienta que permite medir y caracterizar los movimientos. También fue la forma en que Oresme trabajó el problema del movimiento.

En relación con el anterior artículo pudimos ubicar el libro titulado *Nicole Oresme, De Proportionibus Proportionum and Ad Pauca Respicientes* (Grant, 1966). El documento escrito por Grant aborda la traducción sobre las ideas de Oresme en relación con la velocidad, teniendo en cuenta la proporcionalidad.

Figura 10: Portada del libro De Proportionibus Proportionum and Ad Pauca Respicientes

Este se encuentra dividido en tres partes, la primera (I) trata sobre la biografía de Nicolás Oresme, la segunda (II) es una traducción del documento *de proportionibus* *proportionum* y la tercera (III) parte sobre la traducción del documento *Ad pauca respicientes.* Las dos últimas partes son traducciones realizadas por Grant; además, en los pies de página nos presenta algunas interpretaciones y ejemplificaciones del documento traducido.

No obstante, este documento carece de representaciones estrictamente gráficas, pero nos permite identificar la matemática utilizada por Oresme en su trabajo. Esta es el uso de proporciones y geometría para caracterizar y justificar sus producciones. Por tales motivos el documento presentado nos interesa en cuanto aborda la proporcionalidad como una introducción a la noción de movimiento y, también, trata la justificación a las representaciones realizadas por Oresme.

Otro artículo que me parece importante resaltar es *The evolution of 'cartesian connection'* (Anderson, 2008). Es un estudio sobre las representaciones gráficas de las curvas y las funciones partiendo del trabajo realizado por Oresme y su influencia sobre la matemática de René Descartes. El documento es central dado que desarrollar la noción de plano cartesiano desde las producciones de Oresme y busca la relación con el trabajo realizado por Descartes. Además, está en la segunda categoría, ya que hay representaciones gráficas de problemas sobre la variación y covariación.

Las representaciones aquí encontradas fueron las siguientes:

Figura 11: Representaciones realizadas por Oresme tomada de Anderson(2008, p. 108)

Figura 12: Representación usada por Descartes para el desarrollo del problema de Pappus. Tomada de Anderson (2008, p. 109)

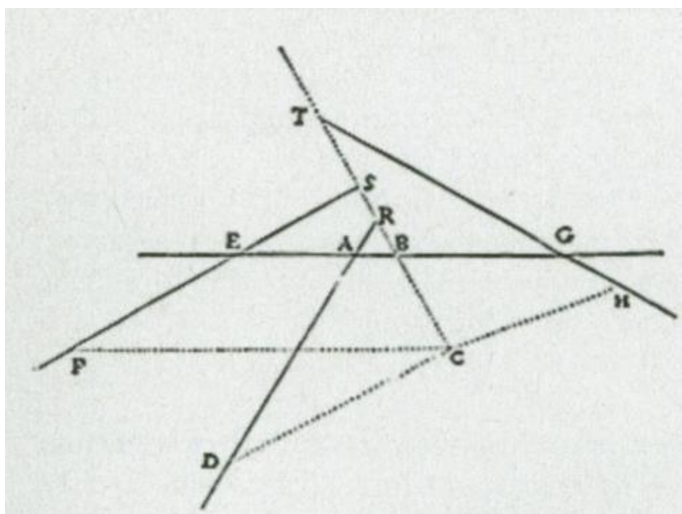
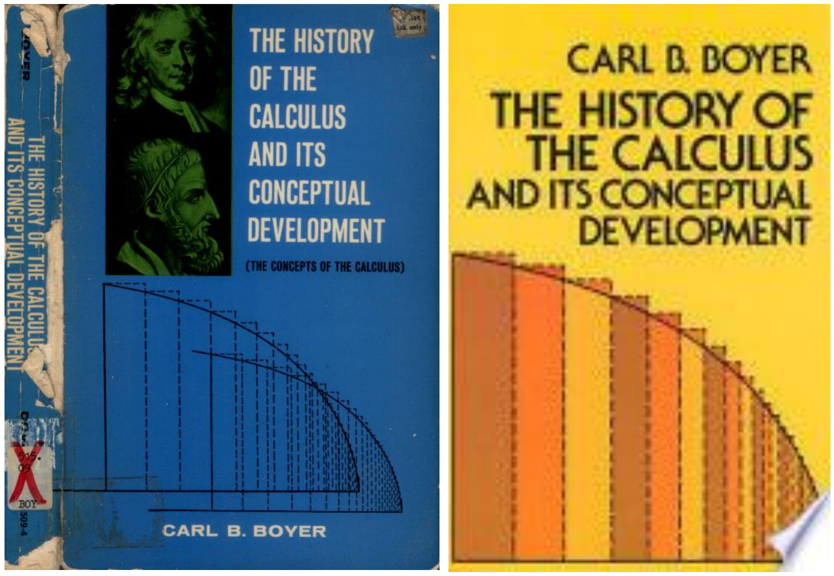
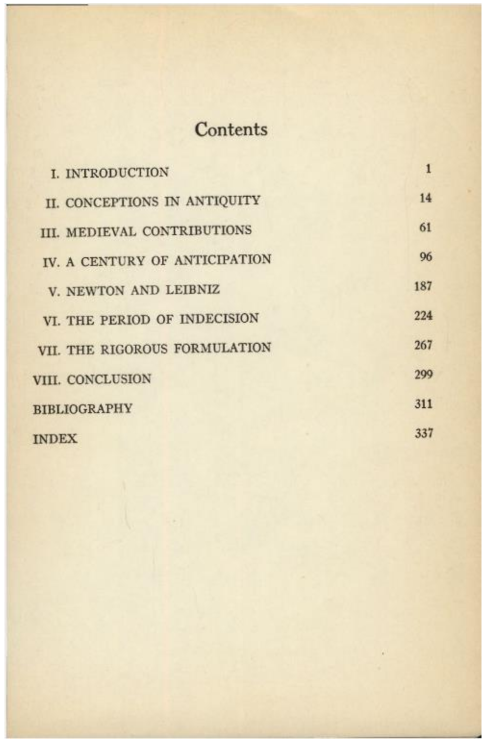


Figura 13 : Portadas del libro The History of the Calculus and its Conceptual Development (versiones antigua y moderna)



Finalmente, el libro *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (Boyer, 1949) es un documento clásico que trata sobre la historia de la matemática y del Cálculo. Boyer parte de una introducción al "por qué" de la historia del Cálculo e intentando responder a la pregunta ¿qué es matemática?; para ello hace un recuento histórico sobre cómo se comprendía esta materia en algunos momentos históricos. El libro consta de diez capítulos, estos se ilustran a continuación:

Figura 14: Facsímil de tabla de contenido



Contents

El primer capítulo (I) nos presenta la importancia de la Matemática y la manera en que se trabajó durante los babilonios, los egipcios, la Antigua Grecia y la Edad Media. También nos presenta el problema de la inconmensurabilidad. El segundo capítulo (II) el autor realiza una breve mención a la idea de Cálculo durante la Edad Antigua realizando menciones a Parménides y Zenón, además, haciendo uso de las proporcionalidades. El tercer capítulo (III) nos presenta un recuento histórico del Cálculo desde la cultura hindú y transitando sobre algunos hitos históricos de la Europa medieval. El cuarto capítulo (IV) nos hace un recuento histórico desde el siglo XVIII hasta la época de Leibniz y Newton; este recuento tiene en cuenta las producciones matemáticas de la época. El capítulo quinto (V) aborda las producciones realizadas por Leibniz y Newton sobre el Cálculo; en este se menciona la influencia de matemáticos como Fermat, Descartes y Barrow. El sexto capítulo (VI) aborda las reglas posteriores del Cálculo teniendo en cuenta las producciones de Fermat, Lagrange, etc. El séptimo capítulo (VII) aborda el siglo XVIII y allí la introducción de las matemáticas junto con la consolidación al trabajo sobre el infinito y la densidad de los números. Finalmente, el capítulo octavo (VIII) el autor nos presenta la conclusión al trabajo sobre la idea de Cálculo durante la historia misma de las matemáticas.

En relación con mi interés particular, considero que tiene cuatro capítulos que son pertinentes para el desarrollo de la noción de movimiento en el periodo de tiempo propuesto, estos son: Concepto en la antigüedad (II), Contribuciones medievales (III) y Un siglo antes (IV).

Estos capítulos son una comprensión histórica del Cálculo que permite identificar algunos hitos que contribuyeron al desarrollo de las representaciones gráficas. También, este documento está en el segundo grupo dado que también es posible ubicar algunas representaciones como construcciones del Cálculo mismo.

Las representaciones gráficas sobre la variación en la historia del Cálculo

En este segundo apartado se ubican los documentos que trabajan sobre las representaciones gráficas del movimiento, variación o funciones en un momento temprano del Cálculo. Entonces, los documentos aquí presentados generalmente hacen referencia a las producciones de Oresme, Galileo y Descartes.

El artículo titulado *Galileo and Oresme: Who Is Modern? Who Is Medieval?* (Nicodemi, 2010) presenta el trabajo de Galileo en cuanto al movimiento libre y se compara con el uniformemente acelerado. En palabras de Nicodemi "En este artículo, comparamos el tratamiento matemático de Galileo de la aceleración uniforme con el de Nicole Oresme"

(2010, p. 24). Además, pudimos ubicar las representaciones realizadas por Galileo que a primera vista resultan familiares con las producidas por Oresme frente al movimiento.

Las representaciones aquí encontradas fueron:

Figura 15: Diagrama usado por Galileo para el estudio de la caída vertical. Tomado de Nicodemi (2010, p. 23)

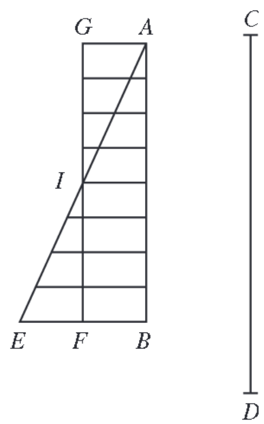


Figura 16: Adaptaciones de las representaciones usadas por Oresme en su trabajo sobre el movimiento. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)

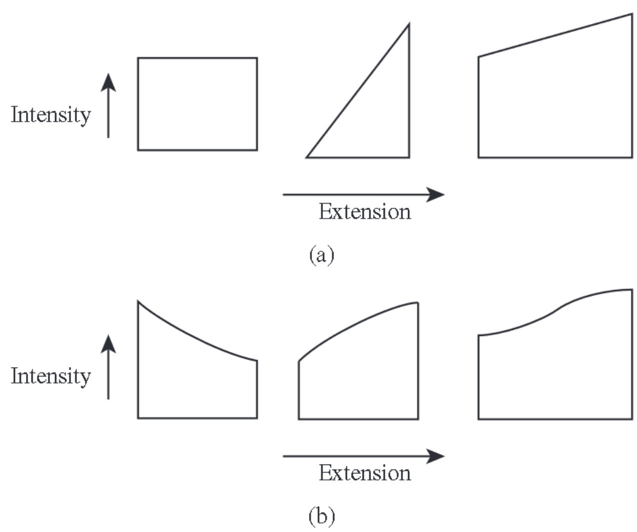
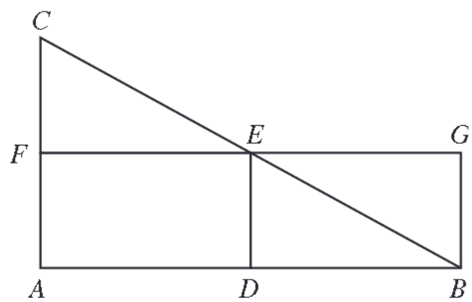


Figura 17: Diagrama usado por Oresme para una ley de velocidad. Tomada de Nicodemi (2010, p. 30)



El documento aquí presentado también hace parte del primer grupo dado que nos permite hacer un recuento histórico sobre cómo comprendía el movimiento cada uno de los matemáticos.

En la revista *Science & Education* ubicamos el documento *Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme* (Babb, 2005). Este realiza un estudio sobre el trabajo de Oresme en el desarrollo del concepto de función gráfica e investigación sobre series infinitas.

Además, según Babb *"*La importancia histórica y el valor pedagógico de su trabajo se considerarán en el contexto de un curso de grado sobre la historia del cálculo.*"* (2005, p. 443). Por tal motivo, este documento pude ubicarse en los tres grupos. Además, este documento es de importancia porque ha sido desde un principio el catalizador hacia los otros, permitiendo ubicar algunas representaciones realizadas por Oresme para explicar el estudio del movimiento. De igual manera, es importante resaltar que este documento nos presenta una prueba de Oresme sobre como un movimiento uniformemente uniforme puede recorrer una distancia igual a un movimiento uniformemente disforme, para ello usa la geometría y las series para justificarla. Además, se desarrollan los conceptos de uniformemente uniforme, uniformemente disforme y disformemente disforme.

Finalmente, las representaciones aquí presentadas son las siguientes:

Figura 18: Formas usadas por Oresme para la clasificación de maneras de movimiento. Tomado de Babb (2005, p. 446)

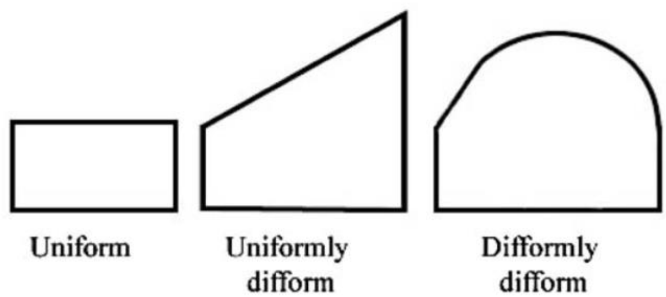


Figura 19: Representación usada para la interpretación. Tomado de Babb (2005, p. 447)

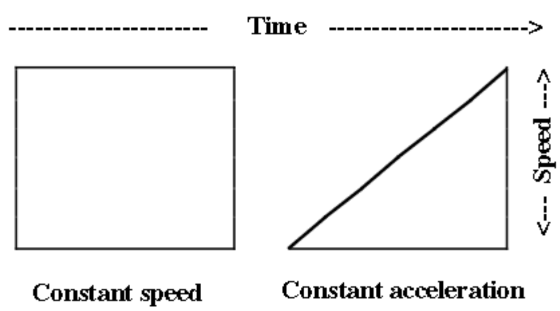
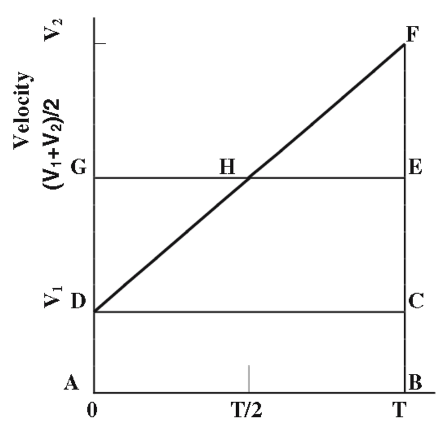


Figura 20: Representación propuesta para interpretación de una demostración usada por Oresme. Tomado de Babb (2005, p. 449)



En la reseña de Grant (1972) sobre el libro de Clagett titulado *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on the uniformity and difformity* *of intensities known as 'tractatus de configurationibus qualitatum et motuum'* nos presenta la clasificación de los movimientos y las representaciones de estos realizada por Oresme. De igual manera, nos expresa la importancia del uso de las representaciones y su justificación e interpretación.

A continuación, se presentan dichas representaciones con alguna interpretación de Grant (1972):

Figura 21: Representación de Oresme interpretada por Grant. Tomado de Grant (1972, p. 172)

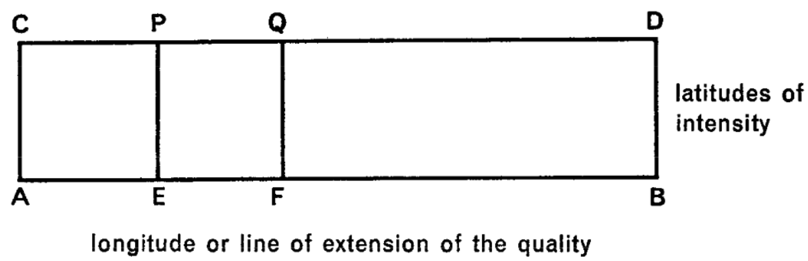
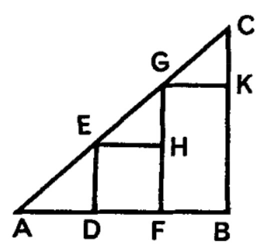


Figura 22: Representación usada e interpretada sobre sobre lo uniformemente disforme usado por Oresme e interpretado por Grant. Tomado de Grant (1972, p. 175)



El artículo titulado *Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme* es interesante dado que menciona "algunas ideas desarrolladas en la Edad Media por Nicolás Oresme (1320-1382) con relación al tratamiento matemático de las cualidades." (Cruz, 2007, p. 23). Este refuerza algunas ideas encontradas sobre las representaciones en anteriores documentos; además, propone una interpretación particular sobre las producciones gráficas de Oresme. Las representaciones aquí presentadas fueron las siguientes:

Figura 23: Representación usada y adaptada para el estudio de representaciones uniformemente disformes. Tomado de Cruz (2007, p. 29)

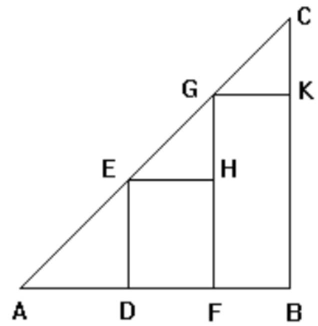
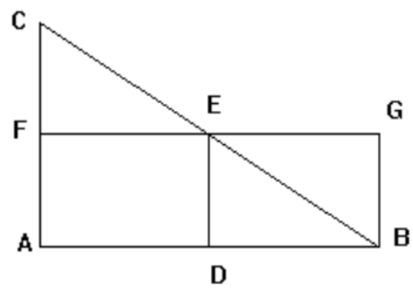


Figura 24:Representación referente a la demostración usada por Oresme. Tomado de Cruz (2007, p. 30)



El próximo documento es un video, perteneciente al Primer encuentro del semillero de Cálculo, titulado *El rol de la música en los experimentos de Galileo* (*The Role of Music in Galileo's Experiments*, 2023). Este video tiene una duración aproximada de una hora con cuarenta y cinco minutos; nos presenta la influencia de la música en los experimentos de Galileo sobre el movimiento, especialmente el uso de los tiempos musicales como una unidad de medida. También, nos expone una página de un documento escrito por Galileo en el que realizó algunas de sus anotaciones, resaltando que se encuentra una representación de la serie propuesta por Arquímedes para los números cuadrados. Es importante destacar los distintos modos en que se presenta los problemas matemáticos y sus respectivos tratamientos. Las representaciones aquí presentadas fueron las mismas presentadas con anterioridad.

Finalmente, un documento de sumo interés titulado "*René Descartes. Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.*" (Quintás, 1996), Este es una traducción de cuatro textos de Descartes escrito por Guillermo Quintás del cual se resalta el último. La geometría, es importante en cuanto presenta una discusión sobre la geometría euclidiana y la construcción de curvas mecánicas, además, la formulación y resolución de problemas. A continuación, se presentará las representaciones usadas en este documento.

Figura 25: Representación usada para hallar la raíz cuadrada de una magnitud dada. Tomado de Quintás (1996, p. 403)

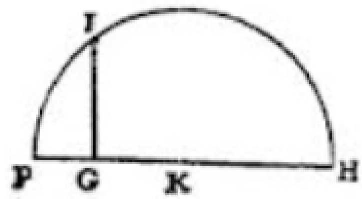


Figura 26:Representación usada por Descartes para la construcción de una hipérbola. Tomado de Quintás (1996, p. 405)

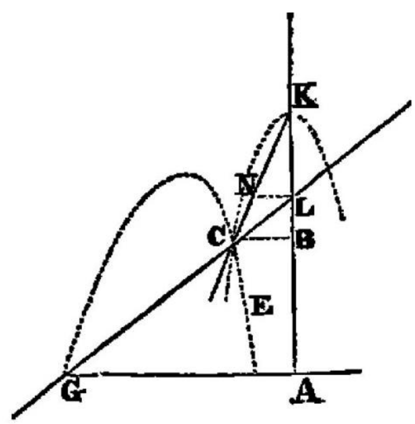
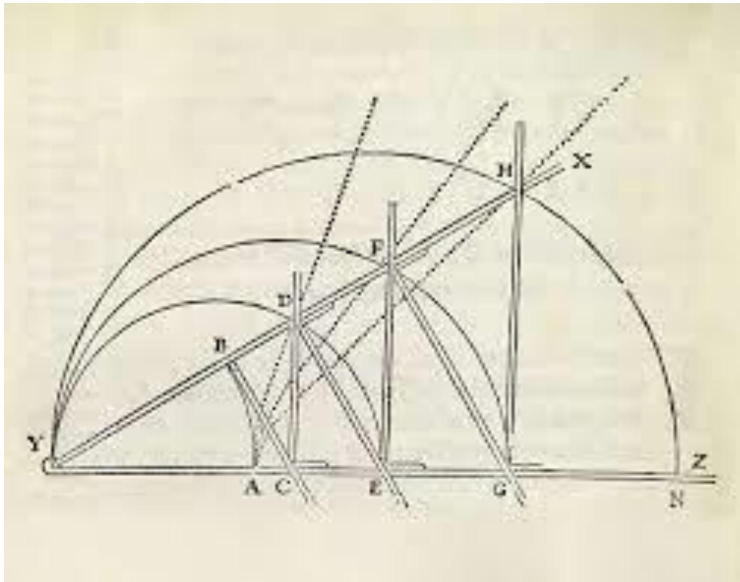


Figura 27:Representación usada por descartes para denotar una construcción de curvas mecánicas. Tomado de Quintás (1996, p. 411)



Cabe resaltar que la representación usada por Descartes para la solución al problema de Pappus ya fue presentada en *The evolution of 'cartesian connection'* (Anderson, 2008), por tanto, no se repetirá, a pesar de presentarse en este documento también.

Sobre la covariación en el aula

El tercer grupo pretende dar a conocer documentos que tratan la covariación en el aula. Además, este tratamiento se enfoca en algunas aplicaciones de ideas y representaciones realizadas en la historia.

El primero es *Catálogo de tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional* (Garavito Clavijo & Gómez Mora, 2017). Como su nombre lo sugiere, se listan tareas cuyo fin es desarrollar el pensamiento variacional. Las tareas se organizan o clasifican en el marco de las siguientes *"seis categorías: presentación, contexto, tipo de* *representación, tratamiento de las magnitudes y niveles de razonamiento"* (Garavito Clavijo & Gómez Mora, 2017, p. 1). En este documento se justifican las representaciones realizadas por los estudiantes y se encuentra un uso pedagógico dentro dichas representaciones. El documento es importante porque permitió identificar algunos referentes y un marco teóricos referente al estudio de las representaciones gráficas.

Otro documento que aborda un estudio del pensamiento variacional y covariacional en el aula se titula "*El uso de la historia de la matemática de la historia en la enseñanza*" (Rodríguez & Vicario, 2015). Dicho documento es una tesis que plantea algunos ejemplos nacidos desde la HM y que aportan en la enseñanza. Además, plantea una importante justificación sobre el uso de la HM en el aula y su influencia sobre la enseñanza y aprendizaje de la variación y covariación. También, hace uso de los niveles de comprensión sobre las representaciones y objetos matemáticos.

Otro documento importante para comprender la importancia de las gráficas en el aula es *El rol de la visualización en la comprensión conceptual de los estudiantes de las relaciones funcionales gráficas* (Rampersad, 2009). Otorga herramientas que ayuda a comprender la importancia de las gráficas, en especial sobre el plano cartesiano, la notación, los símbolos y la terminología para los estudiantes de grado once.

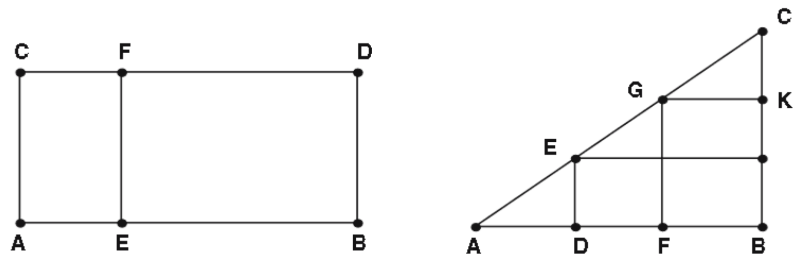
De manera análoga, el documento *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de los eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio.* (Carlson et al., 2003) es de interés en cuanto propone cinco niveles de razonamiento sobre la covariación al igual que cinco acciones mentales. Esto es una herramienta para la justificación sobre mi trabajo de grado porque tiene un apartado llamado *“El razonamiento covariacional en un contexto gráfico.”* (Carlson et al., 2003, p. 131).

Otros documentos importantes en relación con este apartado son *Empleo de “momentos” genéticos en la historia de las matemáticas en actividades de clase.* (Farmaki & Paschos, 2007) y *Nicolás Oresme: perspectivas históricas para su uso en el aula.* (Mendonça & Borges, 2018). Ambos hacen uso de las ideas propuestas por Oresme para plantear la enseñanza de las matemáticas en el aula.

El primero documento hace uso de las ideas de Oresme como base para una introducción al concepto de Cálculo; centrándose en conceptos como: velocidad, tiempo, intensidad y representación gráfica. Se debe aclarar que este documento podría ubicarse en los tres grupos, ya que los autores hacen una introducción histórica sobre la función y las representaciones realizadas por Oresme, influenciado por la representación gráfica de la escuela Merton. Importante resaltar que en este documento se puede ubicar otro hito histórico, la *Merton College*, la cual actualmente pertenece a *Oxford*.

Este documento es relevante para el trabajo de grado debido a que proporciona una introducción histórica a las ideas propuestas por Nicolás Oresme, especialmente en relación con la representación gráfica de la covariación en el contexto del movimiento. Al explorar los "momentos" genéticos propuestos por Oresme, el documento muestra cómo estas ideas pueden ser aplicadas en actividades de clase de matemáticas. Esto es importante para el trabajo de grado, ya que proporciona ejemplos concretos de cómo se pueden utilizar las representaciones gráficas históricas de Oresme para enseñar la covariación en el aula. La representación aquí presentada es la siguiente:

Figura 28: Ejemplos de figuras de variación usando cualidades geometrías presentadas en el documento. Tomado de Farmaki & Paschos (2007, p. 89)



El segundo, *Nicolás Oresme: perspectivas históricas para su uso en el aula.* (Mendonça & Borges, 2018), tiene por objetivo trabajar la obra de Oresme desde su historia y su aplicación en el aula. Además, toma como referente a Edwar Grant, académico que se debe reconocer como un faro en términos del estudio sobre las obras de Oresme.

Los dos documentos reseñados son de mi interés en cuanto, se puede ubicar una o varias aplicaciones de las construcciones y representaciones geométricas propuestas por Oresme para el trabajo en el aula de Matemáticas. Este documento es significativo para el trabajo de grado porque profundiza en la obra de Nicolás Oresme. Además, al referirse a Edward Grant como un destacado estudioso de las obras de Oresme, el documento muestra la importancia de Oresme en el contexto histórico de las matemáticas. Además, se enfoca en las construcciones y representaciones geométricas propuestas por Oresme, lo cual es relevante para el estudio de la covariación y la variación en el trabajo de grado. También, contribuyen al estudio histórico sobre el movimiento y sus representaciones, por tanto, pertenecen a los dos grupos anteriores.

Tras presentar estos documentos importantes para la variación y covariación, y de relevantes en la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos. Se continuará en el siguiente capítulo con un estudio de las teorías de Raymon Duval (1988, 2004) y James Kaput (1987).

Capítulo 3: Representaciones en matemáticas desde las perspectivas de Duval y Kaput

Como se mencionó antes, el trabajo de grado pretende clasificar las representaciones gráficas producidas por matemáticos en un periodo concreto. Para ello, es necesario proponer categorías con las cuales clasificar dichas representaciones gráficas. El objetivo principal de este capítulo es dar a conocer las categorías establecidas por Duval (1988, 2004) y Kaput (1987) para clasificar las representaciones de los documentos mencionados en el capítulo anterior. Así las cosas, el capítulo presentará algunas ideas concretas sobre las representaciones propuestas por estos autores y, luego, las categorías propuestas.

Ideas generales sobre la representación en matemáticas

Para comenzar, lo esencial es proponer una definición de representación. Duval menciona que la representación es "la codificación de la información" (2004, p. 27). La representación es una forma de comunicar, recopilar y reglamentar la información. Para ello es necesario hacerlo mediante signos o símbolos concretos como imágenes, palabras, gestos, sonidos, entre otros. Además, el autor hace uso de la expresión *representación semiótica* que implica una actividad o conducta en la que se involucren signos y en la que se tenga un significado de estos.

Pero en sí misma la palabra "semiótica" es, según la Real Academia Española (RAE), el "estudio de los signos en la vida social". En consecuencia, las representaciones semióticas implican una actividad mental o mecánica sobre los signos y su significado, pero, también el estudio de dichos elementos en las representaciones.

Ambos autores en cuestión resaltan la importancia de las representaciones y la transición entre representaciones. Kaput (1987), en particular, sostiene que "a causa de la construcción del sistema de representación y el diseño del algoritmo (…) el símbolo producido por la manipulación del algoritmo representa la verdad" (Kaput, 1987, p. 2). Acá, la "verdad" es el concepto abstracto de un objeto matemático, al cual se llega mediante el estudio de diferentes presentaciones y la manipulación. De manera análoga, Duval (1988) menciona a Beneviste quien afirma que "la semiosis implica no solo la variedad de sistemas semióticos sino igualmente la posibilidad de ponerlos en correspondencia" (1988, p. 29). Así, se resalta de nuevo la importancia de las diferentes representaciones, pero se agrega la necesidad de realizar transformaciones entre dichos registros.

Kaput (1987) propone su teoría de representación como la relación entre dos mundos fundamentales que permiten las representaciones; estos son el mundo que representa y el mundo a representarse. En concreto estos dos mundos son parte de la representación dado que para cualquier representación se requieren, según este autor, las siguientes cinco entidades:

1. El mundo a representarse
2. El mundo que representa
3. Qué aspectos del mundo a representarse están siendo representados
4. Qué aspectos del mundo que representa están haciendo la acción de representación

5. La correspondencia entre los dos mundos. (Kaput, 1987, p. 4).

En relación con esto Duval menciona que el cambio de representaciones requiere la "discriminación de las unidades significativas propias a cada registro de presentación, así como el examen de las transformaciones implícitas eventuales requeridas para cambiar de registro." (1988, p. 3). Naturalmente, los aspectos que Kaput (1987) reconoce en los dos mundos permiten identificar las unidades significativas que propone Duval (1988,2004). Las unidades significativas son un examen que permite transformaciones entre registros resaltando aspectos implícitos y eventuales en cada representación. Para el caso concreto de las representaciones algebraicas Duval (1988,2004) reconoce las siguientes:

- los signos relacionales. Estos son signos que relacionan elementos en una representación, como el signo igual ($=$), el signo menor que($>$), el signo mayor que($<$), entre otros.
- los símbolos de operación o de signo. Estos signos son el significado positivo o negativo, pero también la suma o resta en una representación. Concretamente son $+$ y $-$
- los símbolos de variable. Estos son aquellas letras las cuales suelen usarce para hablar de un valor que varía. Pero también, puede ser una recta horizontal a la que normalmente llamamos eje *x* o eje de las abscisas junto con una recta

vertical o eje de las coordenadas. En cada caso el símbolo usado se asigna a la variabilidad independiente y dependiente.

- los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante

Finalmente, estas unidades significativas se ven resaltadas mediante números reales. (Duval, 1988, p. 3)

Por ejemplo, cuando se desea aprender sobre un nuevo objeto matemático, como la función racional, se proponen representaciones funcionales, tabulares, gráficas y algebraicas que permiten observar en diferentes mundos de representación (y con signos, símbolos y aspectos distintos) un mismo objeto matemático. En el caso concreto de la función racional observe la siguiente tabla:

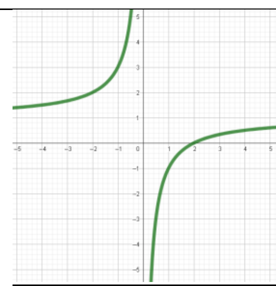
<table>
<tr><th>Representación funcional</th><th>Representación tabular</th><th>Representación gráfica</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>$\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ siendo P y Q polinomios.</td><td><table><tr><th>x</th><th>$F(x)$</th></tr><tr><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr></table></td><td></td><td>$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}$</td></tr>
</table>

Tabla 5: Ejemplos de representación semiótica para una función racional

En el trabajo matemático se suelen realizar cambios entre representaciones tales que de una gráfica se "traduce" a una expresión algebraica o de una representación tabular se "traduce" a una gráfica. En cualquiera de los casos posibles de transformación se debe dar la discriminación de las unidades significativas que nos permitan una traducción. En el caso del ejemplo, al traducir de la representación algebraica a la gráfica debemos discriminar en la representación algebraica la igualdad y las asíntotas (símbolo de relaciones), que es racional positiva en cuanto la expresión carece de un símbolo + (símbolo de signo), la variable dependiente y la independiente (símbolos de variables) y los grados de los polinomios. Luego de ello al realizar el cambio de representación identificamos como algunos aspectos guardan relación y otros simplemente no son importantes para la representación gráfica, como lo son los grados de los polinomios que componen la función.

Sin embargo, en el caso particular de las representaciones semióticas gráficas se deben considerar las variables visuales propuestas y adaptadas por Duval (1988), las cuales son:

- La implantación del objeto (implantación de la tarea).
    - referente al trazo construido a partir de un fondo estático.
- La forma del objeto (forma de la tarea).
    - El trazo delimita o no una zona, es recto o curvo, quizá, es abierto o cerrado.

Duval (1988) reconoce, además, para el caso concreto de las representaciones gráficas de las funciones lineales y afines las siguientes variables visuales:

- El sentido de la inclinación del trazo.
    - el trazo sube de izquierda a derecha.
    - el trazo desciende de izquierda a derecha.

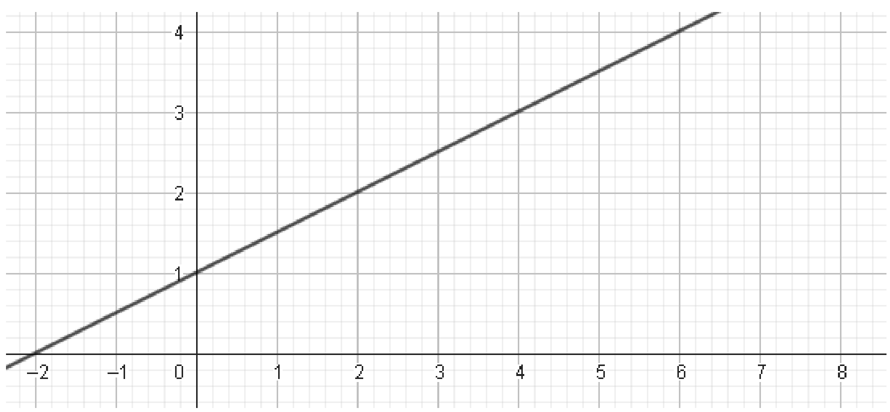
    En cualquiera de los casos la lectura se hace de izquierda a derecha debido a nuestra convención occidental.
- Los ángulos del trazo con los ejes.

- el ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical.
- el ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.

- La posición del trazo respecto al origen del eje vertical.
  - El trazo corta al eje y arriba del origen.
  - El trazo corta al eje y abajo del origen.
  - El trazo corta al eje y en el origen. (Duval, 1988, p. 4).

Para ejemplificar estas variables visuales, podemos trabajar sobre una función afín, para la que se tiene la siguiente representación gráfica:

Figura 29: Función afín para ejemplificar elementos de la representación y los cambios de representación



Podemos realizar un análisis de las variables visuales de la siguiente manera; el sentido del trazo es ascendente, el ángulo formado con el eje *x* es menor que el ángulo formado con el eje *y*, finalmente, el trazo corta por arriba del eje *x*. Con lo anterior si se desea realizar un cambio de representación a una representación algebraica, se deben mencionar elementos concretos como el trazo ascendente el cual nos da el signo de la pendiente o el ángulo formado con los ejes nos permite hablar de la pendiente ($m = \frac{1}{2}$, símbolo de coeficiente). Para terminar, el punto de corte con el eje y, el cual está por encima del eje x ($b = 1$ símbolo de constante). Al realizar el cambio de representación tendríamos la función descrita por la expresión $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, en la cual también se resaltan unidades significativas propias de esta representación. Pero cuando se ha interiorizado la función afín podemos encontrar relaciones directas entre ambas representaciones, como la pendiente siendo un número que al escribirse como fracción afirma la razón de cambio entre las abscisas y las ordenadas. También ese número nos representa la inclinación de la recta en una representación gráfica. Estos elementos serían considerados como la "verdad" usada por Kaput (1987).

En conclusión, el estudio de una representación semiótica gráfica requiere encontrar variables visuales y unidades significativas para facilitar las transformaciones entre representaciones reconociendo el mundo a representarse y el mundo representado y resaltar aspectos de cada mundo. A continuación, presentaré las categorías de representación usadas por Kaput (1987) y luego las usadas por Duval (1988,2004).

Categorías de representaciones según Kaput

El autor propone cuatro maneras de representar las cuales son:

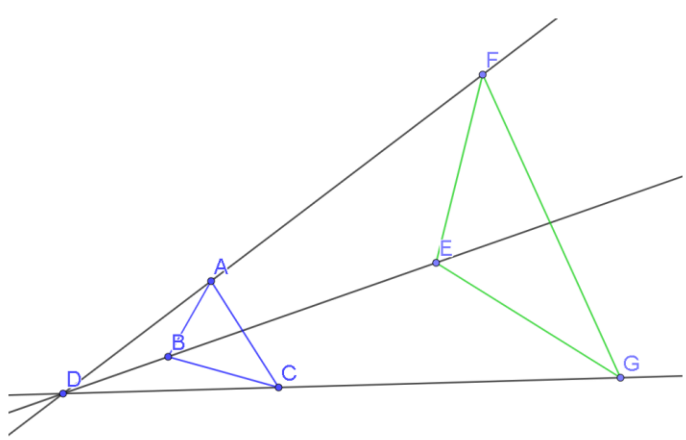
- Cognitiva y perceptual; referente a una construcción mental que atiende principalmente a la interpretación de los estímulos sensoriales y que son susceptibles a cambios por parte del individuo.

- Explicativa que involucra modelos; se entiende como una representación que busca explicar conceptos, ideas o fenómenos desde modelos.
- Dentro de las matemáticas; en este se hace uso de elementos matemáticos que buscan representar objetos matemáticos.
- Simbólica externa; se reconoce el uso de símbolos no formales que pretenden representar un objeto o idea matemática.

Además, el autor menciona siete representaciones usadas en las matemáticas. Estas son:

1. **Morfismos**. Los morfismos son “mapeos que preservan la estructura desde una estructura matemática a otra del mismo tipo general” (Kaput, 1987, p. 5). Ejemplos concretos de estos morfismos son, los homomorfismos o el siguiente caso en particular:

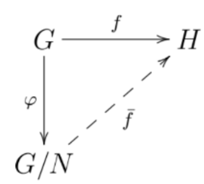
Figura 30: Homotecia como ejemplo de morfismo (Creación propia)



Como se observa en esta homotecia el ΔGEF mantiene elementos concretos y conceptuales del ΔABC. Mantiene la estructura de triángulo escaleno y la medida de los ángulos, además de las razones entre cada par de lados.

2. **Construcciones algebraicas genéricas**. Las construcciones algebraicas genéricas son una "representación simplificada de un objeto abstracto dado, como el cociente de un grupo para un subgrupo, el cual da una versión simplificada del grupo original, con toda la complejidad del subgrupo" (Kaput, 1987, p. 6). Se usa principalmente en el álgebra abstracta, ya que permite obtener ejemplos como el siguiente. En el Teorema fundamental del homomorfismo es posible estudiar las características de un grupo a partir de las evidenciadas en un grupo. Para efectos del ejemplo, cuando vamos a representar el un grupo H podemos hacerlo mediante características simplificadas en el subgrupo G.

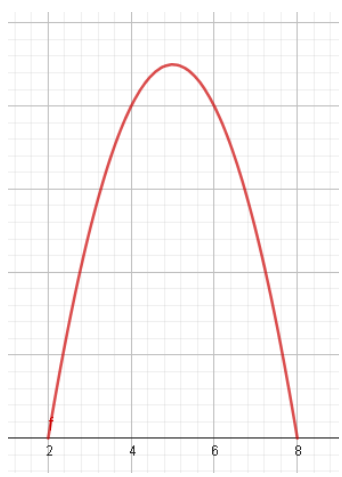
Figura 31: Diagrama del teorema fundamental del homomorfismo tomada de https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_de_homomorfismos



Un homomorfismo para el ejemplo es tomar el conjunto de segmentos con la operación suma; allí, podemos tomar otro grupo como los reales con la suma. Luego, la suma de segmentos sería construir segmentos de mayor longitud uniendo dos segmentos y haciéndolos colineales. Pero el homomorfismo que nos permite hacer otra representación es asignar la función para la cual a cada segmento le asigna un número real que coincide con la longitud del segmento, y en este nuevo grupo. Finalmente, el homomorfismo nos permite trabajar haciendo uso de representaciones numéricas la suma de segmentos, es decir, en esencia es la medida de segmentos y su suma.

3. **Construcción canónica *Building-block*** (externo). La construcción externa de este tipo normalmente se representa mediante un isomorfismo para representar un objeto se hace uso de un objeto construido desde la estructura más simple del mismo tipo. Las características de un isomorfismo garantizan que el mundo que representa guarde la misma estructura del mundo a representarse. Por ejemplo, un problema típico del cálculo para el cual se quiere calcular el volumen de una caja construida a partir de una lámina a la que se le cortan cuadrados congruentes en las esquinas. Podemos hacer uso de una representación cubica, pero está restringida a los valores positivos de la misma debido al contexto en que se construye, el mundo que representa puede ser el siguiente:

Figura 32: Ejemplo representación gráfica de una función cuadrática



Claramente, el mundo a representarse es el volumen de la caja; sin embargo, la correspondencia de aspectos entre ambos mundos está restringida por la forma simplificada en que se construyó la representación gráfica del tramo que modela el problema. El isomorfismo se encuentra entre el volumen de la caja (mundo a representarse) y la función cubica que modela el problema (mundo que representa).

4. **Construcción canónica *Building-block* (interna)**. Cuando la construcción es interna "la representación no está definida por un mapeo que preserva la estructura, sino por una ecuación (…) un objeto dado está representado por objetos simples, más atomizados." (Kaput, 1987, p. 6). Por ejemplo, la representación algebraica de cualquier función discrimina elementos complejos como el conjunto de funciones que hacen parte y nos deja aspectos únicos de una representación pertenecientes a un mismo objeto matemático.

5. **Aproximación**. Es aproximarse a un "objeto dado por otro objeto más simple o primitivo" (Kaput, 1987, p. 6). Por ejemplo, cuando se intenta aproximar a la derivada, suelen ir desde la recta secante y luego se usan los límites para hablar de la recta tangente, llegando a la derivada como función de la pendiente de cualquier recta tangente.

6. **Aislamiento de rasgos de propiedad**. Los aislamientos de rasgo de propiedad se refieren a quitar ambigüedad para dejar explícitos los elementos necesarios en una representación. Un ejemplo claro, sería en las coordenadas polares proponer $r = 1$, que describe una circunferencia de radio 1, pero en otras representaciones no es claro si es simplemente una constante u otro elemento.

7. **Modelos lógicos**. Los modelos lógicos parten de "un sistema de axiomas con una colección de primitivos indefinidos, uno hace una interpretación formal de los

primitivos en algún otro" (Kaput, 1987, p. 6). Un ejemplo concreto de esta actividad es hacer uso del sistema axiomático de la geometría euclidiana considerando el quinto como verdadero para describir los objetos trabajados en esta geometría desde dichos primitivos.

Categorías de representaciones según Duval

Las categorías usadas por Duval para las representaciones semióticas son nombradas *vías*, y son las siguientes:

1. La vía del punteo.
2. Una vía de extensión del trazo efectuado.
3. Una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras.

La vía del punteo es cuando se parte desde una "referencia a ejes graduados, una pareja de números permite identificar un punto" (Duval, 1988, p. 2) y el conjunto de puntos son concretamente parte de una representación gráfica. La vía de extensión del trazo "corresponde a las actividades de interpolación y de extrapolación" (Duval, 1988, p. 2). La actividad de interpolación es la capacidad de observar una gráfica y realizarle cambios dentro de la representación sin perder las propiedades, por ejemplo, cambiar la graduación de los ejes. La extrapolación "permanece puramente mental: no da lugar a trazos complementarios y explicativos" (Duval, 1988, p. 2). Debido a que los trazos físicamente no pueden salir de las hojas infinitamente. Finalmente, la vía de interpolación global es cuando los cambios de representación ocurren entre lo gráfico y otros tipos de representaciones, guardando elementos relacionales entre representaciones, así al modificar elementos propios de la representación gráfica que deben reflejarse en las otras representaciones.

Otro elemento relevante para la clasificación de estas representaciones son las representaciones propias y las representaciones impropias. Las representaciones propias y las impropias son reconocidas por Guacaneme (2013) de la siguiente manera:

> (…) Euclides emplea figuras propias; si allí se refiere a triángulos o paralelogramos, los dibujos contienen efectivamente figuras usuales de tales objetos geométricos. En cambio, (…) si el autor griego alude a magnitudes geométricas en general (*i.e.*, longitudes, superficies, volúmenes, y amplitudes angulares –simultáneamente) el dibujo contiene trazos rectilíneos (que no hay que interpretar como segmentos ni como longitud de segmentos, exclusivamente).” (2013, p. 25).

En concreto las figuras propias, según Gardíes (2006) son aquellas figuras para las cuales “las líneas rectas representan rectas, los círculos, círculos y los triángulos, triángulos” (p. 127) es decir, que los trazos realizados para representar una figura son concretos y son el mismo objeto tratado. Las impropias son, como ya se mencionó, segmentos de recta que representan magnitudes, es decir, que el trazo realizado no es propiamente el objeto matemático, solo es una representación de otro concepto.

En conclusión, las dos teorías de representación aquí presentadas tienen elementos propios como los mundos o las unidades significativas, pero, ambas teorías pueden colaborar en el estudio de las representaciones. De esa manera, se pueden las conexiones entre los mundos de Kaput (1987) mediante las unidades significativas y las variables visuales usadas por Duval (1988,2004). Por tanto, en el siguiente capítulo se abordarán las representaciones teniendo en cuenta la posible unión de estas teorías.

Capítulo 4: Clasificación de representaciones gráficas encontradas en los libros y documentos

En este capítulo se abordará la clasificación de las representaciones del capítulo 2 usando las teorías abordadas en el capítulo 3. En consecuencia, para cada representación gráfica encontrada se tendrá en cuenta que el mundo que representa es uno gráfico (con imágenes y trazos). El mundo que es representado será la variación y covariación. Además, para identificar los aspectos que resaltan de cada mundo se hará uso de las unidades significativas, las variables visuales y las conexiones entre los dos mundos.

Generalidades

Las categorías presentadas previamente requieren un orden y discriminación que permitan identificar la clasificación de representaciones netamente gráficas. Las vías de representación usadas por Duval (1988, 2004) son principalmente para las representaciones semióticas gráficas, por tanto, se usarán todas. Pero en el caso de la teoría de Kaput, se reconocen diversas representaciones, entonces, se harán uso de solo algunas; en concreto, estas son:

- Morfismos.
- Construcción canónica *Building-block* (externo).
- Aproximación.
- Aislamiento de rasgos de propiedad.

A continuación, se presentará una tabla esquemática que facilita el proceso de clasificación; en esta, primero se reconocerán unidades significativas y variables visuales en cada representación para tomar la decisión sobre a cuál categoría pertenece. No obstante, esta no es más que un ejemplo, pues como resalta Duval (1988, 2004) as unidades significativas y las variables visuales deben atender a la representación gráfica en particular.

Representación		
Unidades significativas	Los signos relacionales.	
	Los símbolos de operaciones o de signo.	
	Los símbolos de exponente.	
	Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.	
Variables visuales	El sentido de la inclinación del trazo.	
	Los ángulos de trazo con los ejes.	
	Posición del trazo respecto al origen del eje vertical.	
Categoría Duval		
Categoría Kaput		

Tabla 6: Propuesta de tabla para la clasificación de las representaciones

Cabe aclarar que, a pesar de proponer estas clasificaciones en concreto, también se realizará un estudio sobre cada representación propuesta. Además, es posible que algunas representaciones no sean clasificables, en cuyo caso se mencionarán las razones.

Algunos documentos previos a Nicolás Oresme carecen de representaciones gráficas sobre la variación por el enfoque matemático utilizado; para estos se dará un tratamiento particular en el que se hablará de su influencia a autores posteriores y se mencionará el tipo de representación a la que pertenecen.

Clasificación

Representación de problemas matemáticos en el antiguo Egipto

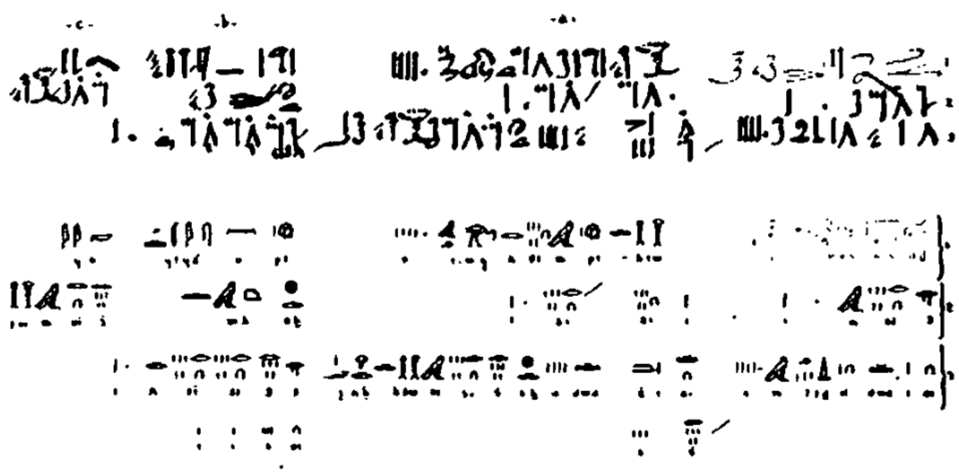
En este primer apartado se presentarán algunas producciones relacionadas con la representación de problemas matemáticos en el antiguo Egipto. Estos problemas son importantes en comprensión matemática previa al estudio de la variación, porque permiten identificar la proporción y un primer trabajo realizado sobre la resolución de problemas.

Los egipcios presentaban sus problemas mediante una representación verbal. Es decir que el mundo que representa es verbal y los elementos propios del problema son enunciados mediante palabras. Por su parte, el mundo que es representado se encuentra en los problemas *pefsu* o *hatsu*, los cuales son problemas que involucran la división, multiplicación y sistemas ecuaciones. También se reconocen algunas representaciones gráficas para apoyar la solución del problema.

La representación usada en los papiros son símbolos, en concreto jeroglíficos, como se ejemplifica en la división presentada en la siguiente figura:

Figura 33: Facsímil del problema 21 propuesto por el papiro de Rhind junto con una posible traducción. Propuesta por (Clagett, 1989, p. 327). Traducción tomada de *https://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm#:~:text=Problema%206.,por%2010%20se%20obtiene%209.*

PROBLEM 21



Problema 21: Averigua la cantidad que falta a 2/3 + 1/15 para obtener la unidad.

Ahmes toma como número rojo el 15 (buscando la simplificación) y aplica:

2/3 de 15 = 10

1/15 de 15 = 1

Entonces ahora tenemos que 2/3 de 15 + 1/15 de 15 es 11. Como 15, el número rojo, supera a 10 en 4 unidades, hemos de calcular el número de partes de 15 que da un total de 4, es decir 4/15.

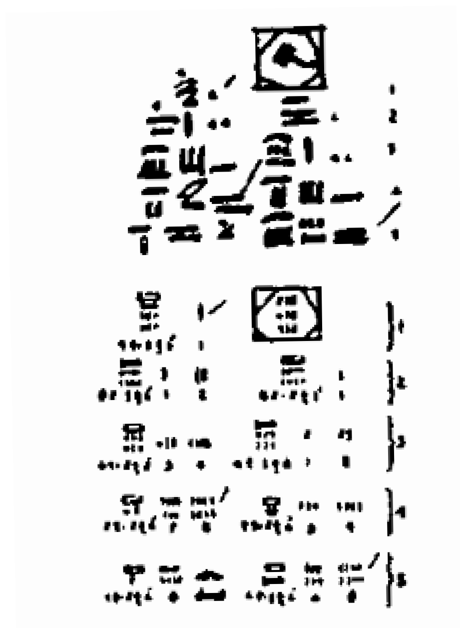
1	15
1/10	1 1/2
1/5	3
1/15	1

como 4 (el dividendo) = 3 + 1 --> 4/15 = **1/5 + 1/15**

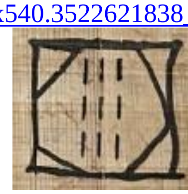
Aquí, podemos observar un sistema de numeración mediante jeroglíficos usados para la solución de este tipo de problemas. Además, podemos notar cómo la representación utilizada es una construcción genérica algebraica, en cuanto las representaciones son ejemplos concretos de una operación. No obstante, los problemas *pefsu y hatsu* se presentaban mediante una representación escrita, resaltando un sistema de representación impropio usado para escribir los números. Este sistema de representación es muy sencillo por el tipo de problemas que se abordaban en esta sección del papiro de Rhind.

Pese a parecer problemas sencillos, formaron conceptos básicos en términos operacionales, pero también sobre la comparación de números, que más tarde contribuirían en el estudio del movimiento y en las representaciones gráficas. Un ejemplo de ello es el problema 48 del papiro de Rhind, porque nos lleva a pensar en los primeros momentos del pensamiento variacional. Este problema dice que "*Compare the area of a circle (or, better, an octagon?) and its circumscribing square.*" (Clagett, 1989, p. 162), el cual se encontraba acompañado de una representación, como se puede ver a continuación:

Figura 34: Facsímil del problema 48 del papiro de rin tomado de (Clagett, 1989, p. 360)



En el problema se pide comparar el área de una circunferencia circunscrita en un cuadrado y se encontraba acompañado de unas representaciones gráficas como las presentadas en la Figura 33 y la Figura 34. Las anteriores representaciones son muy importantes porque nos ilustra el problema tratado. No obstante, la representación se presta para confusiones, dado que como menciona Clagett (1989), puede ser un círculo o un octágono. En cualquier caso, el dibujo tiene bastante influencia sobre la comprensión del problema. La ilustración del problema 48 del papiro de Rhind se puede tratar con el esquema propuesto anteriormente de la siguiente manera:

Representación		Figura 35: Representación problema 48 papiro de Rhind. Tomado de: https://i.etsystatic.com/24417885/r/il/ed5e5e/3522621838/il_680x540.3522621838_6gq7.jpg  Figura 36: Representación problema 48 papiro de Rhind. Tomado de https://i.etsystatic.com/24417885/r/il/ed5e5e/3522621838/il_680x540.3522621838_6gq7.jpg 
Unidades significativas	Jeroglífico interior	El símbolo escrito en el centro es un número nueve (como se verá más adelante). Además, su posición es estratégicamente en el centro de la circunferencia, aludiendo a la medida del diámetro de la circunferencia.
Variables visuales	Implantación del objeto	El trazo se plasma sobre el papiro con alguna especie de tinta y busca formar figuras geométricas, estas son la circunferencia y el cuadrado. No obstante, parece que el autor no presta atención a la curvatura de la circunferencia o a los lados rectos del cuadrado; más bien centrar su atención en mostrar que dicha circunferencia esta circunscrita en el cuadrado, resaltando los puntos de tangencia como posibles segmentos.
	La forma del objeto	Se deben considerar dos objetos usados en esta representación gráfica, la circunferencia y el cuadrado. El trazo realizado para la circunferencia es cerrado, pero no mantiene una curvatura constante. La importancia de esta representación

		es la tangencia con el cuadrado, esto se puede afirmar en cuanto las partes de tangencia son explicitas mediante un segmento, además, ningún de los cuatro lados de tangencia la circunferencia se sale del cuadrado. El trazo usado para el cuadrado tampoco presta atención a formar de manera perfecta el objeto a representarse, más bien guarda la peculiaridad de mantener la circunferencia circunscrita. Nota: Se puede pensar que por estas imprecisiones a la hora de construir los objetos se presenta la confusión y duda que plantea Clagett (1989) sobre la interpretación del problema y las formas utilizadas.
	Posición de ambas figuras	La posición del cuadrado es convencional. Es decir que, no se encuentran inclinados o rotados, aludiendo a la poca importancia de la posición en el problema tratado (Objeto estático).
	Forma	El cuadrado es una representación propia del mismo, mientras que la circunferencia parece ser una representación impropia del objeto. Esto por las razones expresadas en las variables antes mencionadas.
	Tamaño[2]	El tamaño de la circunferencia está estrechamente relacionado al tamaño del cuadrado, se espera que la circunferencia no se salga del cuadrado.
Categoría Duval (Adaptada)		Una vía del punteo: se considera de esta manera dado que la representaciones es un único ejemplo de los problemas que requieren la misma estructura.
Categoría Kaput		Morfismo: se considera en esta categoría porque las dos representaciones de objetos guardan las estructuras a pesar de no tener un objeto perfectamente dibujado. Además, se resalta la importancia del problema al resaltar que el circulo esta circunscrito en el cuadrado.

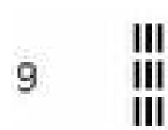
Tabla 7: Clasificación del problema 48 papiro de Rhind

Como se observa, las representaciones son un tanto primitivas. A pesar de ello, se debe prestar especial atención a todos los trazos de la representación, dado que, se puede

2 Estas variables visuales fueron tomadas de un libro digital titulado Sistemas de Información Geográfica, esencialmente del capítulo: Conceptos básicos de visualización y representación, en la siguiente URL https://volaya.github.io/libro-sig/chapters/Conceptos_basicos.html#:~:text=Existen%20seis%20variables%20visuales%3A%20posici%C3%B3n,pr%C3%A1ctica%20en%20el%20%C3%A1mbito%20cartogr%C3%A1fico.

reconocer no solo el problema tratado, sino, además, elementos usados para la solución de esté.

Por un lado, el cuadrado dibujado es la representación propia del objeto y nos permite reconocer el cuadrado con el que se compara el área del círculo. Por otro, tenemos dos posibles representaciones impropias, una es la circunferencia y otra el símbolo dentro de esta. La circunferencia es impropia por la forma que presenta; ello por cuanto el trazo realizado se asemeja a una circunferencia sin llegar a ser un trazo circular, pero representa la circunferencia que está circunscrita en el cuadrado. El símbolo usado en el interior de la circunferencia es especialmente relevante para la solución; como Clagett (1989) menciona "*cir. Of diam. 9*" (Clagett, 1989, p. 162), es decir que el diámetro de ese círculo es de nueve y a partir de allí se planea la solución aproximada. Lo importante del símbolo usado es que, representa un número nueve, como se compara en la siguiente tabla:

Representación	Número nueve en dos sistemas de escritura
 Tomado de: https://i.etsystatic.com/24417885/r/il/ed5e5e/3522621838/il_680x540.3522621838_6gq7.jpg	Figura 37: Número nueve egipcio tomado de: https://museo.inf.upv.es/blog/2021/05/14/el-sistema-egipcio/ 
 Tomado de:	Figura 38: Número nueve egipcio tomado en: https://matematicasparaticharito.wordpress.com/2015/03/20/sistema-de-numeracion-egipcio/ 

https://i.etsystatic.com/24417885/r/il/ed5e5e/3522621838/il_680x540.3522621838_6gq7.jpg	

Tabla 8: Comparación de representaciones de los números

La solución al problema consiste en considerar el diámetro igual a 9 y se calcula el área de ambas figuras, como nos lo presenta Clagett (1989):

Figura 39: Problema 48 y solución presentada por Clagett (1989, p. 162)

[Problem 48; see Fig. IV.2, Pl. 70]

[Compare the area of a circle (or, better, an octagon?[64]) and its circumscribing square.]

[Cir. of diam. 9 (or oct. = to sq. of side 8?)]		**[Sq. of side 9]**	
1	**8 setjat[65]**	**\ 1**	**9 setjat**
2	**16 setjat**	**2**	**18 setjat**
4	**32 setjat**	**4**	**36 setjat**
\ 8	**64 setjat**	**\ 8**	**72 setjat**
		Total:	**81 setjat**

Para el área de la circunferencia se debe tomar el diámetro y restarle $\frac{1}{9}$, es como restar 1, lo que resulta en 8. Este 8 debe multiplicarse por otro 8 (como si se tratara de un cuadrado de lado 8), como se observa en el costado derecho de la imagen, de esta manera se obtiene el área de la circunferencia como 64 *setjat*. Por el lado derecho de la figura se observa cómo se halla el área del cuadrado de lado nueve, que consiste en multiplicar hasta por pares hasta llegar a 72 (8 veces 9) y luego sumarle un nueve más obteniendo 81 *setjat*.

Por lo planteado antes, se observa que la representación allí presentada se aloja en el mundo de las representaciones gráficas mediante una aproximación donde los trazos. Por un lado, nos presentan un dibujo que alude al problema que se deseaba tratar y, por otro, la solución mediante una aproximación desde las multiplicaciones, además de interpretarlo teniendo en cuenta problemas más sencillos como hallar el área de ambas figuras por aparte. Lo que pretenden estos dos tipos de representaciones es buscar presentar la comparación de dos áreas, en las que se reconocen las figuras, una propia y otra, posiblemente, impropia.

Finalmente, podemos notar que el problema, a pesar de ser sencillo, reconoce elementos en su representación que aluden a la solución del problema. La representación tiene elementos como los nueve y las dos figuras geométricas que permiten entender el problema en sí mismo, pero la solución se remite a otra representación, que usa los números para calcular ambas áreas. Cabe resaltar que la manera en que se aborda este problema puede replicarse para problemas en los que el diámetro de la circunferencia sea distinto. Además, el análisis de las representaciones requiere reconocer tanto el mundo representado como todos los símbolos que hacen parte del mundo que representa, de no ser así, no se podría leer más halla de unos simples trazos.

El problema del movimiento en la antigua Grecia

En este apartado se presentará la idea de movimiento descrita en el documento de Sattler (2020) y la presentación de la espiral de Arquímedes como una construcción necesaria para el movimiento.

En el documento escrito por Sattler (2020) no se presentan representaciones gráficas de la época. No obstante, es un documento importante para comprender la historia de la variación, como se mencionó en el Capítulo 2. El problema del movimiento, semilla de la variación, tiene raíces en dos problemas, según Sattler (2020) son:

- *The ontological challenge that kinesis*[3] *requires Being and non-Being to be connected*.
- *The problem that an understanding of locomotion requires time and space to be brought together*[4]. (2020, p. 19).

Estos elementos filosóficos son parte inicial del estudio posterior sobre el movimiento. El primero se traduce como: El desafío ontológico que plantea la "*kinesis*" es que requiere que el Ser y el No-Ser estén conectados. Esto debido a que, desde la filosofía de Parménides el cambio es parte de la ilusión humana, es decir, que el movimiento (cambio) puede ser algo propiamente de la ilusión y para su comprensión requiere de la conexión entre ambos mundos.

El segundo se traduce como: El problema de una comprensión de la locomoción requiere que el tiempo y el espacio se unan. Estos dos conceptos, el tiempo y el espacio, son necesarios para describir un movimiento; además, son tratados por Zenón cuando propone su paradoja:

> (…) la famosa carrera entre Aquiles, el corredor más rápido, y una tortuga, un animal extremadamente lento, Aquiles decide competir contra la tortuga en una carrera, e incluso, fehacientemente convencido de que ganará la carrera, al momento de la salida le da una ventaja inicial. Unos cuantos segundos después de que la tortuga sale, Aquiles corre detrás de ella hacia la meta, entonces se da cuenta de que al llegar al punto en el que el reptil estuvo hace unos instantes, éste ya se ha

---

[3] Según Sattler es movimiento *(motion)*.
[4] Traducción realizada con tecnologías, específicamente Google traslate.

> adelantado hasta otro punto delante del anterior y por lo tanto aventajándolo; Aquiles, avanza hasta el segundo punto en el que estuvo la tortuga y nuevamente se percata de que ésta ya se encuentra en un punto posterior. Si seguimos este razonamiento, Aquiles jamás alcanzará la tortuga puesto que ella siempre estará delante de él. He aquí la cuestión a resolver; lo que nos dice la intuición y la experiencia cotidiana es que Aquiles ganará la carrera, pero al seguir las especulaciones anteriores, parece que ocurre justamente lo contrario. (Rojas, 2014, p. 84)

El estudio de esta paradoja requiere reconocer el tiempo y el espacio previamente tratados por Parménides; además, requiere reconocer el infinito potencial. La distancia recorrida por Aquiles respecto a la recorrida por la tortuga necesita reconocer la dependencia con el tiempo, ya que, sin importar cuánto se acerque, Aquiles nunca conseguirá alcanzar a la tortuga. Debido a que Aquiles recorre la distancia recorrida por la tortuga en un tiempo n cuando esta está recorriendo una nueva distancia en un tiempo $n+1$. Sattler (2020) hace uso de una representación gráfica y de una relación matemática entre ambas variables (tiempo y espacio) para explicar que "lo que está detrás de este cálculo es una forma estándar de cuantificar la relación entre dos magnitudes, en este caso, el tiempo y el espacio." (2020, p. 126). El cálculo realizado par Sattler (2020) es proponer una representación cartesiana de la situación y relacionar las variables mediante una función afín; donde el eje x representa el tiempo transcurrido y el eje y representa la distancia recorrida, allí obtiene que en esta paradoja se reconocen elementos propios del estudio de la variación, pues se relacionan dos variables.

Así, la relación entre variables en la paradoja de Zenón se desprende el infinito potencial, ya que Aquiles puede acercarse infinitamente a la tortuga, pero siempre le restará recorrer la distancia a la que está la tortuga. En el caso de considerarse el infinito actual, pude darse el caso que la tortuga sea alcanzada cuando no exista distancia significativa entre ambos corredores.

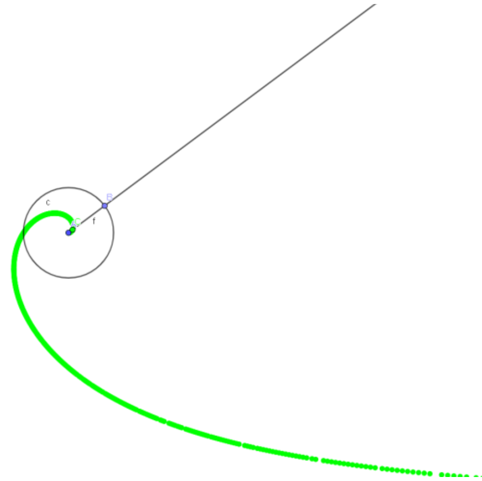
Otro concepto importante de estudiar en la comprensión de movimiento durante la antigua Grecia es la espiral de Arquímedes. Esta curva o lugar geométrico se define mediante los siguientes movimientos simultáneos:

> Si una línea recta trazada en un plano gira un número cualquiera de veces con movimiento **uniforme**, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y vuelve a la posición inicial, mientras que, sobre la línea en rotación, un punto se mueve uniformemente como ella, a partir del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano. (Gonzalez U (1992) citado por Camargo Uribe & Guzman Castro, 2005, p. 30).

De nuevo la representación se ubica en un mundo verbal en que se describen los dos movimientos necesarios para la construcción de la espiral arquimediana. Además de este mundo de representación verbal es posible una construcción geométrica que, a pesar de no ser reconocida en la escuela euclídea, puede ser construida en una representación gráfica[5] como la siguiente:

[5] También puede ser construida de forma dinámica en un software como GeoGebra.

Figura 40: Espiral de Arquímedes construida a partir de la indicación propuesta. Creación propia



Como ya se mencionó, esta construcción parte de elementos geométricos básicos como circunferencia, puntos y rayo y no fue reconocida en la geometría euclídea. No obstante, el estudio propio de estas curvas en la geometría arquimediana permite identificar el movimiento como parte de la geometría. Dado que, se identifica la variación simultánea en los movimientos del giro del rayo y como el punto que pertenece a dicho rayo se aleja, pues ambos se mueven a una misma razón generando que; el punto que se desplaza sobre el rayo gire con la misma razón constante con la que se aleja del centro de la circunferencia.

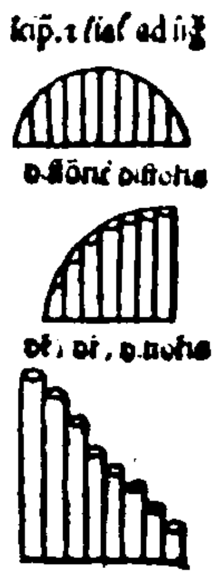
En términos de representación se identifica un mundo verbal y uno geométrico; ambos representan un mundo geométrico en el que se consideran dos movimientos simultáneos y proporcionales. El mundo a representare, además de lo ya mencionado, es una curva mecánica. También, la relación entre estos dos mundos es necesariamente la proporcionalidad que caracteriza el movimiento y los objetos usados para su construcción.

Representaciones usadas por Nicolás Oresme y Galileo Galilei

En este apartado del texto, primero se presentarán los términos o expresiones utilizados por Nicolás Oresme para clasificar el movimiento y luego se presentarán las representaciones usadas por Oresme, sus clasificaciones y finalmente las producciones de Galileo.

Las representaciones usadas por Oresme son frecuentemente relacionadas con el estudio del movimiento. El estudio de Oresme partió, de manera análoga, con las preguntas filosóficas sobre el movimiento; él construyó las siguientes representaciones:

Figura 41: Representaciones de Oresme sobre el movimiento, tomadas de The Evolution of the "Cartesian Connection" pag. 108



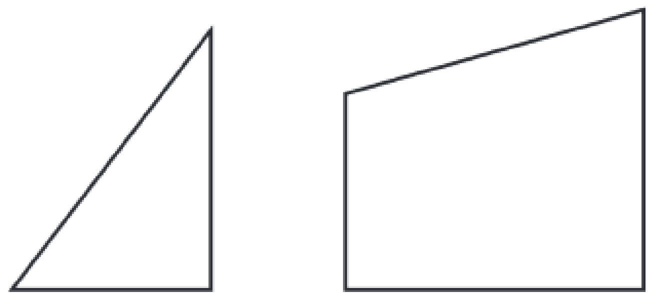
Estas representaciones fueron nombradas por Oresme como uniformemente uniforme, uniformemente disforme y disformemente disforme. El término "uniforme" es aplicado a una cualidad; según Cruz (2007) "una cualidad es uniforme si es de igual intensidad en todas sus partes" (2007, p. 28). De manera contraria, una cualidad es disforme cuando la intensidad varía o presenta cambios en diferentes puntos de su extensión. Además, se reconoce la covariación, uniformemente disforme porque se menciona una cualidad que varía su intensidad de manera constante sin cambios en la variación, podría decirse que ocurre análogo a una función lineal, porque la pendiente es uniforme pero el cambio de la función es disforme.

Un movimiento uniformemente uniforme ocurre cuando en su extensión la intensidad no varía, es decir, que el movimiento en el tiempo que se realiza no presenta variación. La representación utilizada por Oresme fue la siguiente:

Figura 42: Representación para el movimiento uniformemente uniforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)

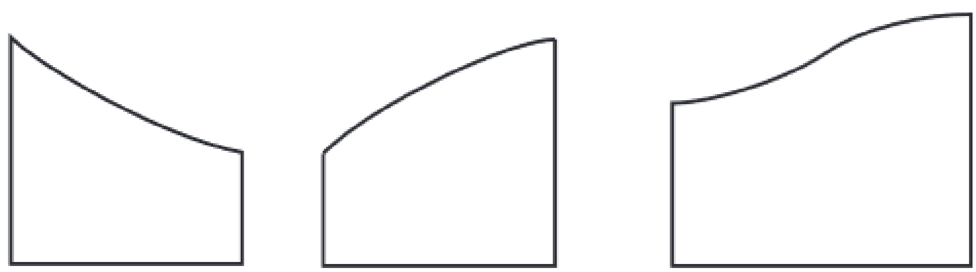
Un movimiento uniformemente disforme, ocurre cuando a lo largo de la extensión la variación que presenta la intensidad es de manera uniforme; como se dijo anteriormente es análogo a la función lineal o afín. La representación utilizada por Oresme fue la siguiente:

Figura 43: Representación para el movimiento uniformemente disforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)



Finalmente, el movimiento disformemente disforme, ocurre cuando a lo largo de la extensión presenta una variación de manera disforme, es decir que el cambio que presenta no es constante. La representación utilizada por Oresme fue la siguiente:

Figura 44: Representación para el movimiento disformemente disforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)

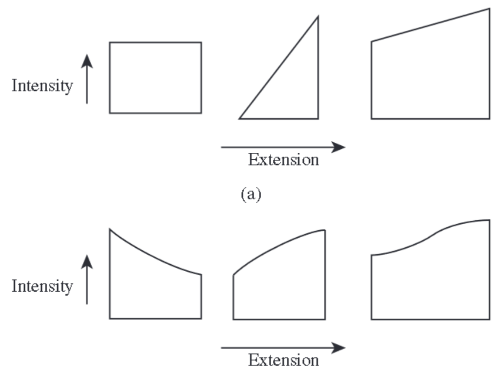


En estas primeras representaciones producidas por Oresme capturan el movimiento y su continuidad mediante la línea curva presente en la parte superior de la figura, también por la continuidad que presenta el área encerrada dentro de la figura.

Estas representaciones usadas por Oresme, según Bonetto (1999), reconocen el uso de coordenadas dado que la longitud (extensión) representa el tiempo correspondiente a la abscisa, y la latitud (intensidad) representa la velocidad, que es correspondiente a la ordenada. De esta manera, las representaciones usadas por Oresme reconocen el uso de variables y la conexión entre estas.

En las primeras representaciones presentadas (Figura 41) no se presenta la idea de continuidad; no obstante, en las posteriores representaciones se presenta la idea debido a que los trazos que constituyen las figuras, como se puede observar en las siguientes representaciones:

Figura 45: Facsímiles propuestas por Nicomedi sobre las producciones de Oresme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)



Estas producciones reconocen la continuidad, aunque no es un concepto trabajado por Oresme. Para la comprensión de estas es necesario hacer uso de la extensión como el tiempo en que se realiza el movimiento y la intensidad como la velocidad con la que se realiza el movimiento.

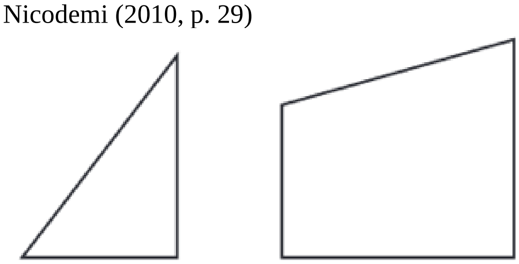
Antes de clasificar los tres tipos de representaciones gráficas relevantes propuestos por Oresme, se debe mencionar que, se tomará la esquina inferior izquierda de cada figura como el punto análogo a la coordenada (0,0), el segmento horizontal que contine este punto como el eje abscisas y el segmento vertical que contiene este punto como el eje ordenadas. De esta manera se pueden clasificar los tres tipos de representaciones relevantes de la siguiente forma:

Primer tipo		
Representación		Figura 46: Representación de Oresme del movimiento uniformente uniforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29) 
Unidades significativas	Segmento horizontal inferior (extensión)	El autor reconoce como extensión a la magnitud del segmento ubicado en la base de las representaciones.
	Segmentos verticales del objeto (La intensidad)	Se reconoce como intensidad del movimiento a la magnitud del segmento perpendicular en cada uno de los puntos del segmento extensión. El autor se queda con el extremo superior de dicho segmento resultando en otro segmento paralelo en la parte superior de la figura. Es paralelo porque la intensidad (magnitud del segmento) no cambia a lo largo de la extensión.
	El área	Como es una figura cerrada se puede ubicar el área de esta, que para el caso particular de estas representaciones se relaciona con la distancia recorrida
	Los símbolos de operaciones o de signo.	El área tiene un símbolo positivo, a pesar de no ser explicito.
Variables visuales	La implantación del objeto	Su implantación se da sobre un papel blanco buscando representar el movimiento uniformemente uniforme. Se nota buen detalle sobre las formas del objeto
	La forma del objeto	Particularmente, la implantación del objeto se realiza como un único rectángulo, no obstante, su formación requiere interpretar el segmento horizontal superior como el extremo de los segmentos que se encuentran sobre la extensión. Además, este segmento representa la intensidad del movimiento
	Los ángulos de trazo con los ejes.	La inclinación es de 0° con el “eje *x*”.
	Posición del trazo respecto al origen del eje vertical.	Por encima del “punto (0,0)”.
Categoría Duval		Una vía de extensión del trazo efectuado. Las representaciones de Oresme toman los puntos extremos de cada segmento de la intensidad y los extrapola a un segmento generando una extensión del trazo que representa el comportamiento de la intensidad en el movimiento.
Categoría Kaput		Construcción canónica *Building-block* (externo). Se encuentra en esta categoría dado que la construcción mantiene rasgos de propiedades del

	mundo que representa en una construcción concreta. Aislamiento de rasgos de propiedad. También se considera en esta categoría dado que permite enfocar la representación del movimiento a lo largo de la extensión aislando la relación entre las dos variables presentes (extensión e intensidad)

Tabla 9: Caracterización de la representación del movimiento uniformemente uniforme

Esta primera representación gráfica es referente a los movimientos uniformemente uniformes. Podemos observar que la intensidad no varía a lo largo de la extensión. Es decir que, en esta representación se reconoce un movimiento en el que no se presenta ninguna aceleración o, en términos matemáticos, la variable dependiente no presenta variación respecto a la variable dependiente.

Segundo tipo		
Representación		Figura 47 Representaciones de Oresme del movimiento uniformemente disforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29) 
Unidades significativas	Segmento horizontal inferior (extensión)	Como ya se mencionó este segmento representa la extensión del trazo, es decir cuánto tiempo tarda el movimiento en efectuarse.
	Segmentos verticales (intensidad)	Como ya se mencionó los diferentes segmentos verticales solo se representan con su extremo superior generando una recta (para este caso) que cambia respecto al cambio de la extensión.
Variables visuales	Implantación del objeto.	Se busca representar un movimiento uniformemente disforme haciendo que los trazos no presenten especial formas curvas.
	La forma del objeto.	Se construye un triángulo o un cuadrilátero que mantiene una forma cerrada y el segmento conformado por los extremos de la intensidad presenta una inclinación constante permitiendo

		afirmar que la intensidad varia de forma constante a lo largo de la extensión. mantiene un segmento
	El sentido de la inclinación del trazo superior.	Inclinación positiva, aunque podría también ser negativa. Esto depende de si se le da una interpretación de aceleración o desaceleración al comportamiento del trazo.
	Los ángulos del trazo superior con el trazo horizontal. .	El ángulo es de aproximadamente 45° con el "eje *x*" para la primera representación. La de la segunda es aproximadamente 20°.
	Posición del trazo inclinado respecto al vértice del primer segmento vertical.	La primera, corta por el "punto (0,0)". La segunda corta por encima del "punto (0,0)"
Categoría Duval		Una vía de extensión del trazo efectuado. Las representaciones de Oresme toman los puntos extremos de cada segmento de la intensidad y los extrapola a un segmento generando una extensión del trazo que representa el comportamiento de la intensidad en el movimiento.
Categoría Kaput		Construcción canónica *Building-block* (externo). Se encuentra en esta categoría dado que la construcción mantiene rasgos de propiedades del mundo que representa en una construcción concreta. Aislamiento de rasgos de propiedad. También se considera en esta categoría dado que permite enfocar la representación del movimiento a lo largo de la extensión aislando la relación entre las dos variables presentes (extensión e intensidad).

Tabla 10: Caracterización de la representación del movimiento uniformemente disforme

El segundo tipo de representación gráfica es referente a los movimientos uniformemente disformes. Aquí, la intensidad se ve afectada por el transcurso de la extensión. Como podemos observar, la intensidad aumenta (o disminuye) manteniendo una inclinación constante a lo largo del recorrido, describiendo de esta manera cómo un objeto puede mantener una aceleración constante, esto sin necesariamente hacer alusión a este concepto.

Tercer tipo	
Representación	Figura 48: Representaciones de Oresme del movimiento disformemente disforme. Tomado de Nicodemi (2010, p. 29)

		
Unidades significativas	Segmento horizontal inferior (extensión).	Este segmento representa la extensión del trazo, en otras palabras, cuánto tiempo tarda el movimiento en efectuarse.
	Segmentos verticales (intensidad)	Los extremos de todos los segmentos verticales forman generan una curva (para este caso) que cambia respecto a la extensión.
Variables visuales	Implantación del objeto	Se busca representar un movimiento disformemente disforme haciendo que el trazo superior sea curvo.
	La forma del objeto	Los cuadriláteros formados son cerrados y presentan un lado curvo que representa la variación de la intensidad en cada uno de los puntos de la extensión.
	El sentido de la inclinación del trazo superior.	Inclinación variable a lo largo de la extensión.
	Los ángulos de trazo con el segmento horizontal inferior .	El ángulo en la primera representación es de aproximadamente 30°. El ángulo en la segunda representación es de aproximadamente 45°. El ángulo en la tercera representación es de aproximadamente 15° (Se debe mencionar que los ángulos considerados son los formados con una recta paralela a la base que pasa por el "vértice" superior izquierdo de la representación)
	Posición del trazo respecto al origen del eje vertical.	Los puntos de corte son por encima del "eje *x*"
Categoría Duval		Una vía de extensión del trazo efectuado. Se encuentra en esta categoría dado que la construcción mantiene rasgos de propiedades del mundo que representa en una construcción concreta.
Categoría Kaput		Construcción canónica *Building-block* (externo). Se encuentra en esta categoría dado que la construcción mantiene rasgos de propiedades del mundo que representa en una construcción concreta. Aislamiento de rasgos de propiedad. También se considera en esta categoría dado que permite enfocar la representación del movimiento a lo largo de la extensión aislando la relación entre las dos variables presentes (extensión e intensidad).

Tabla 11: Clasificación de representaciones de Oresme para los movimientos deformemente disformes

Finalmente, en el tercer tipo de representaciones el autor reconoce los movimientos disformemente disformes. Este tipo de movimientos son aquellos para los cuales el objeto tiene una aceleración no constante o, en términos matemáticos, Oresme reconoce el cambio variable de la intensidad respecto a la extensión.

En general, las representaciones producidas por Oresme fueron fundamentales en el desarrollo del estudio sobre la variación y la covariación. En todas las representaciones, se relacionan a primera vista dos variables, a saber: la extensión y la intensidad. Además, estas representaciones reconocen el área[6] de la figura como una variable más, la cual es la distancia recorrida, en cuanto el área de cada figura varia respecto a cómo se comportan las otras dos.

En relación con las categorías propuestas, primero se debe presentar la categoría de Duval (1988,2004) donde se propuso que la representación es mediante la vía de extensión del trazo efectuado. Se considera que es de esta manera, debido a que el autor reconoce la continuidad del trazo a lo largo del movimiento, esto en cuanto la curva superior de cada figura no presenta cortes o discontinuidad.

Además, la categoría de Kaput (1987) fue Construcción canónica *Building-block* (externo) o Aislamiento de rasgos de propiedad. Se considera la primera en cuanto las representaciones de Oresme permiten una construcción del concepto de curva desde la interpretación de un tramo de esta sin llegar a ser de esta manera. El aislamiento de rasgos

[6] Es curioso cómo el área de la figura empleada por Oresme para representar la variación entre el tiempo y la intensidad de la velocidad puede ofrecer una interpretación análoga a la integral de la velocidad respecto al tiempo.

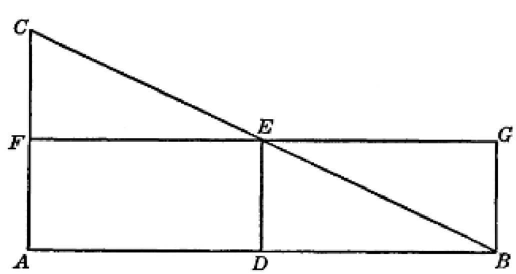
de propiedad se puede reconocer en cuanto el estudio propio del fenómeno solo reconoce aquellas partes donde se efectúa, dejando de lado el estudio a la que pertenece.

Otro elemento trabajado en estas representaciones es la proporcionalidad. Esta, a pesar de no ser explicita, se puede evidenciar en la manera en que se relaciona la de la figura con, su altura y su área. Si se mide la altura o el área en dos puntos distintos de la figura tendremos dos figuras con alturas y áreas distintas pero que mantendrán una relación proporcional.

Caben algunas claridades respecto a estas producciones. La primera, toda representación se realizaba teniendo en cuenta la proporcionalidad. La proporcionalidad permitía reconocer cuánto variaba la extensión respecto a la intensidad. La segunda, estas representaciones presentan la continuidad sin hacer referencia al infinito actual y sin reconocer el infinito potencial más allá de los valores tomados.

Es importante mencionar que estas representaciones fueron usadas por Oresme para afirmar y demostrar que la distancia recorrida en un movimiento uniformemente disforme puede ser igual a la distancia recorrida en un movimiento uniformemente uniforme, esto mediante la siguiente representación:

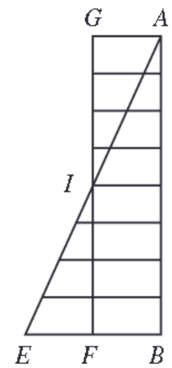
Figura 49: Representación usada para la demostración. Tomada de Nicodemi (2010, p. 30)



Lo que Oresme consideró para la demostración fue, de manera muy general, tomar una representación de un movimiento uniformemente disforme y sobreponer una representación de un movimiento uniformemente uniforme, como se observa en la Figura 21. Posteriormente, haciendo uso de la geometría euclidiana demostró que $\Delta CFE \cong \Delta BGE$, por tanto, se concluye que en ambos movimientos se recorre una misma distancia a pesar de moverse de distinta manera. Como se puede observar, esta demostración resalta una variable más en las representaciones, esta es el área de la figura, Oresme reconoce, además de la extensión y la intensidad, el área de la figura como una variable más dentro de la representación considerando esta variable como la distancia recorrida.

Algunos siglos más tarde, Galileo realizó otra representación gráfica basada en las propuestas por Oresme. No obstante, según Nicomedi "*he set the stage for the physics of 'ideal' situations*." (2010, p. 32), en consecuencia, sus producciones atendían especialmente al movimiento de una manera ideal. Su estudio físico se preocupó por medir los cambios percibidos en la cada libre de un objeto (ideal en cuanto no tenía en cuenta las fricciones). Para realizar la medición recurrió a los tiempos musicales dado que, según Martínez y Villamizar (2023), el padre de Galileo fue músico y de la música tomó la idea de usar los tiempos musicales para poder realizar mediciones precisas sobre el movimiento de caída libre en sus experimentos. En análisis de la representación gráfica utilizada por Galileo para explicar la caída de un objeto está esquematizado en la siguiente tabla:

Representación	Figura 50: Representación usada por Galileo. En la cual la altura de la figura ($\overline{BA}$) es el tiempo que tarda el objeto en caer y los segmentos horizontales (los paralelos a $\overline{GA}$) representan la velocidad en cada punto. Tomado de Nicodemi (2010, p. 23)

		
Unidades significativas	Los signos relacionales.	El área del rectángulo está relacionada con la distancia recorrida. La longitud del segmento vertical es el tiempo recorrido. La longitud de los segmentos horizontales son las velocidades medida en cada uno de los tiempos.
	Segmentos horizontales.	Se consideran a aquellos segmentos horizontales paralelos a EB. Estos segmentos cambian de magnitud dado como percepción formar parte de un triángulo rectángulo y su magnitud es la medición de la intensidad del movimiento en cada uno de los tiempos musicales.
	Segmento vertical (AB).	Este segmento se comporta similar al propuesto por Oresme llamado extensión, es decir, este segmento es la duración del movimiento, permitiendo dividirlo en segmentos iguales es decir en mediciones iguales posiblemente relacionadas a mediciones en tiempos musicales.
Variables visuales	Implantación del objeto.	La forma de presentar este objeto hace uso de Geometría euclidiana y resalta los puntos y segmentos usados en la representación. Esto garantiza una interpretación de la medición de la intensidad del movimiento en momentos iguales.
	La forma del objeto	Consta de dos objetos, un rectángulo (AGFB) y un triángulo (AEB). Ambos están sobre puestos Se puede observar que, a diferencia de las representaciones de Oresme, Galileo resalta la importancia de las distintas mediciones realizadas.
	El sentido de la inclinación del trazo del segmento AE.	El segmento AE tiene una inclinación referente a los movimientos uniformemente disformes usados por Galileo.
	Los ángulos de trazo con los ejes.	El ángulo con el “eje *y*, segmento AB” es negativo en cuanto se abre hacia el cuarto cuadrante.
	Posición del trazo respecto al origen del eje vertical.	El trazo corta por el punto (0,0)
Categoría Duval		Una vía de extensión del trazo efectuado. Se encuentra en esta categoría dado que la

	construcción mantiene rasgos de propiedades del mundo que representa en una construcción concreta.
Categoría Kaput	Aislamiento de rasgos de propiedad. Se considera en esta categoría dado que permite enfocar la representación del movimiento a lo largo de la extensión aislando la relación entre las dos variables presentes (extensión e intensidad).

Tabla 12: Clasificación de la representación usada por Galileo para la caída libre de un objeto

Esta representación es muy parecida a las propuestas por Oresme, pero en el caso particular de Galileo se evidencian las mediciones realizadas con los tiempos musicales. El segmento vertical se divide en partes iguales, y los horizontales medirán la velocidad en los tiempos resaltados. Esta noción es la principal diferencia con las de Oresme.

En relación con la clasificación se consideró que se enmarca en la vía del punteo porque el autor medio en cada uno de los puntos, no obstante, si se considera las rectas presentes esta representación también se encuentra en la vía de extensión del trazo efectuado. Además, se considera que esta representación también se encuentra en la categoría de aislamiento de rasgos de propiedad porque, al igual que Oresme, el trazo efectuado solo se centra en el estudio de una parte del movimiento dejando de lado aquellos elementos que constituyen la curva.

La geometría analítica y sus representaciones

En este apartado se abordarán las representaciones de René Descartes y, posteriormente, en el último apartado las de Leonard Euler, partiendo desde algunas ideas de propuestas por Boyer (1949).

Las representaciones usadas por Nicolás Oresme, según Boyer (1996, citado por Bonetto, 1999), hacían "uso de índices de potencias fraccionarias y métodos de coordenadas en geometría" (1999, p. 47) que a pesar de ser un buen faro para el estudio de la variación desde las representaciones "solo tuvieron una influencia muy indirecta, si tuvo alguna, en el proceso de los matemáticos franceses."(1999, p. 54). Es decir, que a pesar de que las representaciones usadas por Oresme reconocían variables, dependencia entre estas, relación entre la representación gráfica con las demás y otros elementos, no parecen ser un punto de partida para el desarrollo de la geometría analítica estudiada por matemáticos como René Descartes.

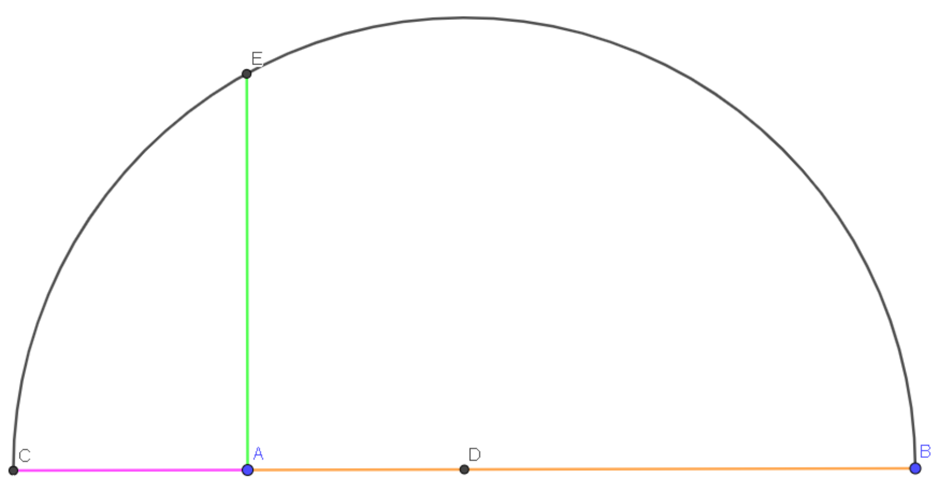
A pesar de lo anteriormente mencionado, el desarrollo de la geometría analítica influyó sobre el desarrollo de las representaciones gráficas usadas en la actualidad. Descartes, en particular, fue capaz de relacionar el álgebra con la geometría, dado que "proporcionó representaciones geométricas de las operaciones algebraicas" (Bonetto, 1999, p. 58) pero también "estudió problemas geométricos con ayuda del álgebra" (Bonetto, 1999, p. 58). En términos de representaciones, permitió hacer uso de dos mundos de representaciones para un mismo problema y encontrar las relaciones entre ambos mundos, estos son el geométrico y el algebraico. No obstante, los mundos de las representaciones dependen del tipo de problema que se trate.

Descartes propone, en el libro 1 de *La Geometría,* la existencia de problemas planos, que son cuando "el problema puede ser solucionado mediante la geometría ordinaria" (Quintás, 1996, p. 349). En otras palabras, cuando el problema puede solucionarse realizando construcciones geométricas a partir de rectas y circunferencias. En este tipo de problemas las representaciones gráficas son esencialmente producciones construidas con geometría euclidiana. Un ejemplo es encontrar la raíz de un segmento AB para el cual Descartes propone la siguiente construcción:

> Se agrega AC que es la unidad y dividiendo BC en dos partes iguales, resulta el punto D, tomando como centro D se traza la circunferencia de radio DC. Seguido se traza sobre A la perpendicular AE y esta será la raíz cuadrada de AB[7]. (Tomado y adaptado de Quintás, 1996, p. 390).

La representación que acompaña está producción es la siguiente:

Figura 51: Construcción de la raíz cuadrada de AB, propuesta en La geometría de Descartes. Tomado y adaptado de Quintás (1996, p. 403)



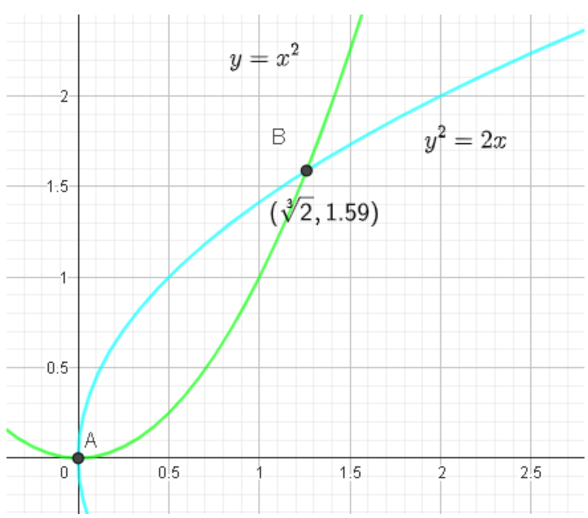
Esta representación es en sí misma la solución, dado que la construcción necesaria para encontrar la longitud del segmento no hace uso de otras herramientas ajenas a las circunferencias y rectas. En este tipo de problemas las representaciones gráficas, o

[7] Según Quintás (1996) resulta que $\Delta AEC \approx \Delta ABE$, de donde se afirma la siguiente proporción $\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AB}$ y teniendo en consideración que AC es la unidad, luego de despejar obtenemos $AB = AE^2$, de allí que, el segmento AE sea la raíz cuadrada de AB.

geométricas, el autor propone dimensionar el segmento fuera de la geometría y asignarle magnitudes, es decir que para Descartes el segmento no es exactamente un segmento sino más bien la representación de una magnitud. De allí que la geometría y el álgebra se relacionen entre sí para dar solución a los problemas, como mencionaba Bonetto (1999). Además, tratar los segmentos como longitudes no es más que tratar los segmentos como representaciones impropias de una longitud.

Sin embargo, Descartes reconoce otros dos tipos de problemas en el segundo libro de *La geometría*. Hay problemas sólidos, que son los que se solucionan usando otras secciones cónicas (además de la circunferencia), o sea, que la solución requiere construir parábolas, elipses o hipérbolas. Ejemplo de este tipo de problemas es duplicar el volumen de un cubo, el cual consiste en realizar la construcción de la parábola $y = x^2$ y la función radical $y^2 = 2$x. Al hallar la intersección de estas dos determina la abscisa $\sqrt[3]{2}$. Finalmente, para duplicar cualquier lado de un cubo solo bastará con multiplicar $\sqrt[3]{2}$ por el valor de la abscisa. A continuación, se presenta una representación de lo que sucede aquí:

Figura 52: Construcción realizada para duplicar el volumen de un cubo. Creación propia



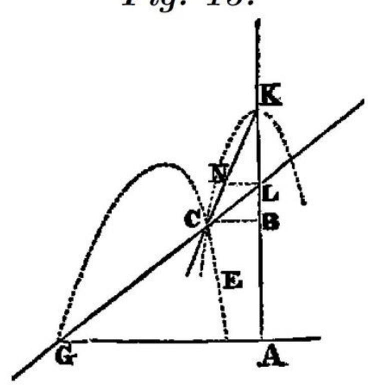
Descarte no presenta esta construcción, pero acá se hace para ilustrar el tipo de problemas que se refiere el autor.

Finalmente, Descartes reconoce los problemas lineales que "requieren de líneas complejas (…) las cuales requieren de algún instrumento para trazarlas" (Quintás, 1996, pp. 409-410). Es decir que en este último tipo de problemas requiere analizar las curvas mecánicas y a partir de estas realizar construcciones auxiliares que permitan dar solución a los problemas lineales.

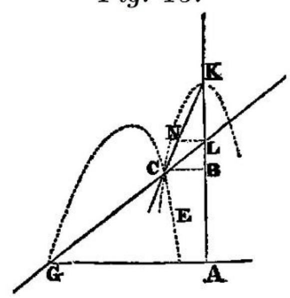
En el libro dos de *La geometría*, Descartes desea identificar una curva, la cual se muestra a continuación:

Figura 53: Curva analizada por Descartes. Imagen tomada de Dibujando a Descartes en: [Dibujando a Descartes (proyectodescartes.org)]

Fig. 13.



Aquí "Descartes quiere demostrar que podemos construir una curva de cualquiera de los géneros definidos mediante su segundo compás" (Roses, 2020, p. 49). Esta construcción resulta ser una hipérbola, pero en relación con las representaciones es bastante importante reconocer cómo se construyó. Descartes hace uso de dos rectas perpendiculares estas son $\overline{AG}\ y\ \overline{AK}$; además las variables son las distancias KL, AL y KC que describen el tipo de hipérbola. Resulta que la curva está "descrita por la intersección de la recta GL y el plano rectilíneo CNKL” (Quintás, 1996, p. 414), Con lo anterior, la representación puede analizarse de la siguiente manera.

<table>
<tr><td colspan="2">Representación</td><td>Figura 54: Curva analizada por Descartes, imagen tomada de Dibujando a Descartes en: Dibujando a Descartes (proyectodescartes.org)
Fig. 13.

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidades significativas</td><td>Letras usadas.</td><td>Las letras usadas por Descartes son símbolos usados para ubicar los puntos y rectas usados en la construcción de esta curva. Además, permite relacionar la magnitud de los segmentos como constantes.</td></tr>
<tr><td>Segmentos de referencia.</td><td>El autor usa la recta AG como eje de referencia análogo al eje x. De igual manera, la recta AK se comporta similar a el eje y. Se considera así porque el autor realiza la construcción de la hipérbola estas como referencia.</td></tr>
<tr><td>Los símbolos de constante.</td><td>La magnitud de los segmentos KL, AL, AG, AB y KC, se toman como constantes para describir la hipérbola.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Variables visuales</td><td>Ubicación del trazo respecto a las rectas AG y AK</td><td>El trazo siempre es positivo, esto debido a que en la representación solo se toma la parte de la hipérbola que se encuentra por encima de la recta GA.</td></tr>
<tr><td>Implantación del objeto.</td><td>El objeto implantado es la hipérbola, teniendo esto en cuenta se considera que la implantación de ésta se da sobre los segmentos KL, AL, AG, AB y KC. Además, se reconoce que esta implantación ocurre cuando se da el movimiento del punto G sobre la recta GA, permitiendo delimitar el objeto como la intersección de la recta AG y el plano CNKL.</td></tr>
<tr><td>La forma del objeto.</td><td>El objeto es un trazo que mantiene una curva suave y lo delimita la recta AG, ya que únicamente se toma la parte ubicada por encima de esta recta.
La hipérbola no se forma por una recta, es posible observar que el autor toma varios puntos</td></tr>
</table>

		pertenecientes al objeto que se encuentran cercanos entre sí.
Categoría Duval		Una vía de extensión del trazo efectuado. Aunque la construcción forma un conjunto de puntos, se nota que realmente se considera es a todos aquellos puntos que hacen parte de la hipérbola. Cuando la hipérbola se acerca a su máximo los puntos parecen estar aún más pegados, tanto que es posible hablar de un no se pueden notar los puntos sino una curva.
Categoría Kaput		Construcción canónica *Building-block* (externo). Se considera en esta categoría debido qué a pesar de considerar algunos puntos, estos mantienen la estructura de la hipérbola en cuanto mantienen una relación variacional entre las medidas de los segmentos.

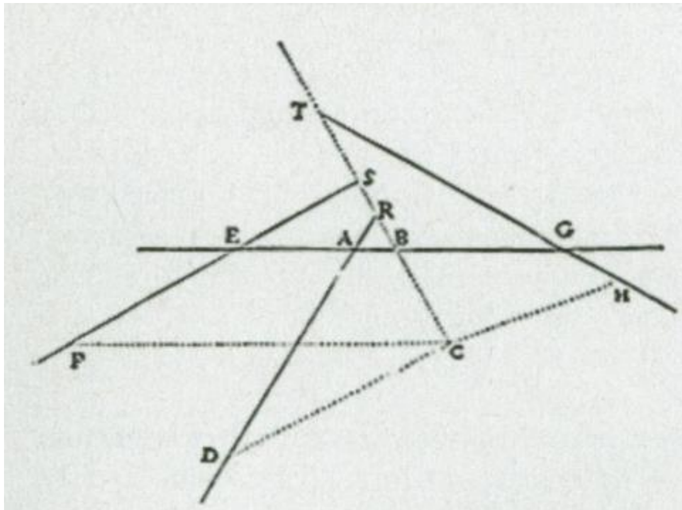
Tabla 13: Clasificación de una curva analizada por Descartes

Se considera que la clasificación es una; vía de extensión del trazo efectuado, en cuanto se presenta la continuidad del trazo además, sin embargo, no se considera en el siguiente nivel dado que el trazo no es interpretado en las abscisas negativas; también en la construcción canónica *Building-block (externa),* esto debido a que se evidencia las características de una función en el intervalo propuesto pero no se reconoce todo el trazo del mismo ni existe una referencia a su existencia.

A continuación, se presentarán dos menciones importantes a producciones de Descartes que por sus características no se considerarán como clasificables, además, se presentará un paso a las producciones de Euler.

Una representación importante, no realizada por Descartes, es aquella que pretende dar solución al problema de Pappus, es la siguiente:

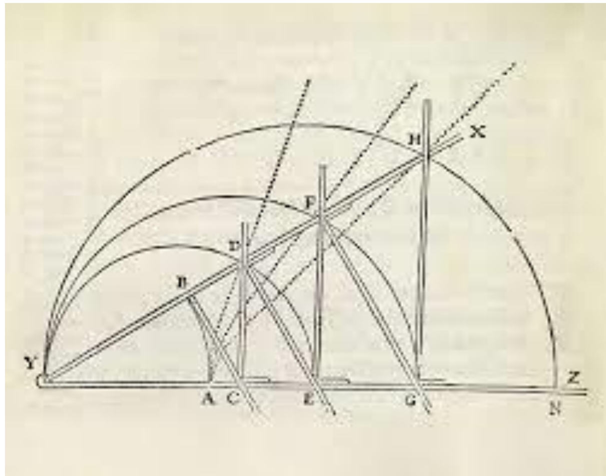
Figura 55: Representación del problema de Pappus abordado por René Descartes. Tomada de Anderson (2008, p. 109)



Esta representación no es propia de Descartes; realmente ya se conocía con anterioridad. Sin embargo, se debe otorgar especial importancia a Descartes por el uso de representaciones impropias como las letras x y y , las cuales buscan identificar las distancias AB y BC . Luego de identificadas estas dos distancias el autor hace uso de geometría euclidiana y álgebra para determinar las demás distancias.

Descartes, en el segundo libro de *La geometría*, presenta un estudio y clasificación de las curvas lo que resulta en la pregunta "¿Por qué solo aquellas producciones euclídeas son consideradas geometría?". El autor argumenta que las curvas construidas mediante secciones cónicas o movimientos también se consideran geometría. A partir de esta discusión presenta la construcción de una curva mediante la siguiente imagen:

Figura 56:Representación usada por Descartes. Tomado de Quintás (1996, p. 411)



Es importante resaltar esta construcción debido a que en la representación no solo se muestran las curvas y rectas necesarias para la construcción; además, se ilustra la herramienta para la construcción. El problema consiste en “hallar dos medidas proporcionales entre YA y YE” (Quintás, 1996, p. 413). Para ello se construye una circunferencia de radio AC, luego se ubica la intersección de la curva con el segmento en el punto resultando el segmento como la medida proporcional buscada. En términos de representación; primero, se reconoce la herramienta usada como otro elemento que juega un papel importante en el desarrollo, si se observan estos trazos “gruesos” o dobles generan una representación propia del compás utilizado; segundo, los segmentos referidos por el autor funcionan como una representación impropia de medidas, esto es recurrente en las representaciones usadas por Descartes.

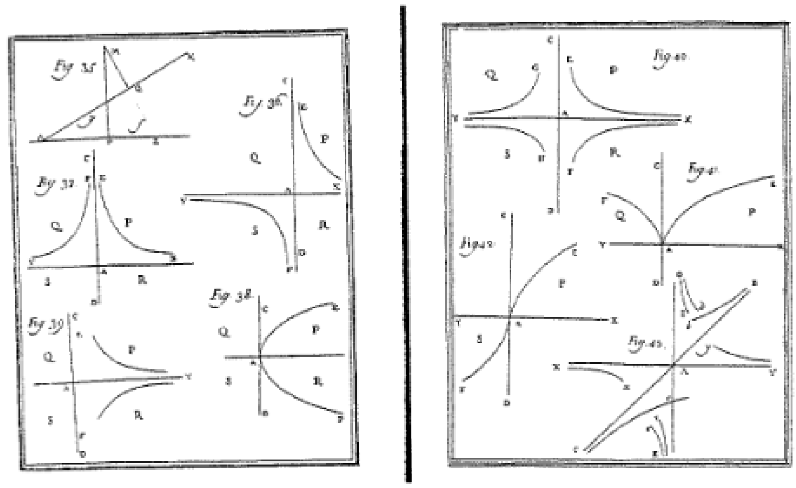
De René Descartes a Leonard Euler

Históricamente se le atribuye a Descartes el uso de un sistema coordenado parecido al usado en la actualidad. Sin embargo, dicho sistema no reconocía las abscisas negativas, como lo señala Boyer (citado en Bonetto, 1999, p. 57). Por esto las representaciones realizadas por Descartes se consideran como un avance importante, pero no son aún las representaciones gráficas que usamos en la actualidad. Mas bien se le debe reconocer como el hito histórico que promovió una conexión de la geometría y el álgebra, permitiendo un avance importante en el estudio matemático.

A raíz del trabajo de Descartes, los matemáticos posteriores realizaron representaciones gráficas que en su construcción parecen ser más simples, pero en términos de conceptos matemáticos son más complejas. Las representaciones usadas por Oresme representaban tres variables y la relación entre estas, también, consideraban la continuidad del movimiento durante el momento en que se ejecutaba. No obstante, las representaciones de este autor son una manera de explicar el movimiento observado, no buscan dar una interpretación a toda la curva que modela el movimiento. Posteriormente, las producciones sobre las curvas pretendían no solo estudiar un tramo de la función, más bien, estudiar todo el modelo y representarlo (no solo gráficamente) de manera general. En ambos casos de representación, los de Oresme y los de las curvas, se es necesario reconocer los distintos elementos

Estas nuevas producciones son aún cercanas a las producciones actuales. Un ejemplo de esto es el trabajo realizado por Euler, como el que se observa en la siguiente figura:

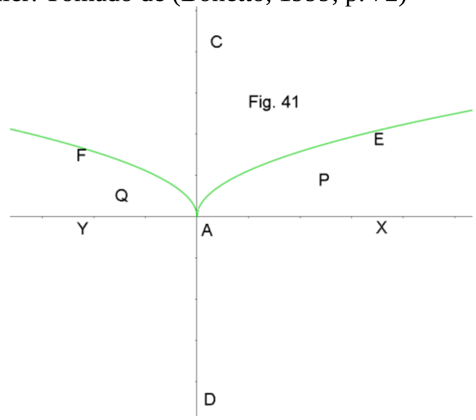
Figura 57: Representaciones gráficas usadas por Euler. Tomado de (Bonetto, 1999, p. 72)



Estas gráficas son parte de un libro titulado *Introductio in analysis infinitoru* escrito por Euler.

Las representaciones aquí presentadas reconocen; por un lado, que el mundo que representa está ligado al sistema coordenado actual; por otro, el mundo representado son funciones, se consideran funciones debido a que “la idea de función estaba relacionada con el estudio analítico de las curvas” (Boyer (1999) citado por Bonetto, 1999, p. 72) que fueron insumo del estudio de Euler.

En particular, podemos tomar una de estas representaciones y realizarle el respectivo análisis de sus propiedades de la siguiente manera:

Representación		Figura 58: Ilustración elaborada a partir de la Figura 57: Representaciones gráficas usadas por Euler. Tomado de (Bonetto, 1999, p. 72) 
Unidades significativas	Letra A.	Esta letra representa el punto de intercepción entre los dos ejes de referencia (Rectas $\overline{XY}$ y $\overline{CD}$).
	Rectas $\overline{XY}$ y $\overline{CD}$.	Estas dos rectas son los ejes de referencia. Parecen ser perpendiculares entre sí.
	Puntos F y E.	Estas dos rectas se encuentran cerca a las curvas, es de esta manera porque busca nombrar las dos partes de las curvas.
	Letras D y P.	Estas dos letras pueden interpretarse como el nombre de los dos cuadrantes, también pueden ser interpretado como el área bajo la curva, no es fácilmente interpretado.
Variables visuales	Implantación del objeto.	La implantación del objeto ocurre sobre un par de rectas perpendiculares entre sí, podría decirse que la curva implantada esta sobre un eje referencial.
	La forma del objeto.	El trazo realizado reconoce la continuidad en cuanto la curva es un único trazo. El trazo no se limita únicamente su implantación, es posible afirmar que se reconoce toda la curva dado que el trazo del objeto se ve cortado únicamente hasta el final del trazo de la recta $\overline{XY}$. Además, a diferencia de las producciones de Descartes es posible identificar que los trazos de los objetos no se limitan únicamente a valores positivos (por encima de la recta $\overline{XY}$).
	El sentido de la inclinación del trazo.	Ascendente desde el punto A hacia el lado derecho y descendente desde el lado izquierdo hasta el punto A.
	Los ángulos de trazo con los ejes.	Los ángulos con el eje *x* ($\overline{XY}$) son positivos y mayores que el ángulo formado con el eje *y* ($\overline{CD}$).
	Posición del trazo respecto al origen del eje vertical.	El trazo corta con el eje horizontal ($\overline{XY}$) junto en el corte de los dos ejes.
Categoría Duval		Una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras. Se considera en esta categoría porque el trazo busca representar el

	objeto, sin embargo, se busca dar una interpretación más allá de las rectas usadas como referencia.
Categoría Kaput	Construcción canónica *Building-block* (interno). Se considera en esta categoría debido qué a pesar de representar únicamente una parte del objeto, también permite identificar que la curva puede interpretarse hacia el infinito debido a que el trazo solo se detiene hasta cuando lo hace la recta XY.

Tabla 14: Clasificación de una de las representaciones usadas por Euler

En esta representación Euler reconoce las variables mediante los ejes coordenados, además, el trazo permite hablar de la relación que existe entre los trazos. Se considera una vía de interpretación global y construcción canónica, porque el trazo no se interpreta únicamente en su dominio y codominio, sino se interpreta más allá de los trazos, es decir hacia el infinito y hacia el menos infinito. De manera análoga, es posible presentar las demás producciones de Euler, para las cuales se evidencia el cambio en los dominios, codominios, trazos, entre otros, no obstante, siguen siendo construcciones *Building-block* por sus consideraciones.

En relación con las categorías propuestas se reconoce como representaciones en una vía de interpolación global de las propiedades de las figuras, esto es debido a que Euler reconoce el trazo más allá de un tramo de la curva, es decir sobre toda la curva y considerando las abscisas negativas. Además, se considera un infinito potencial en cuanto el autor no corta el trazo antes de terminar el trazo de las abscisas o coordenadas.

También se considera que esta es una construcción canónica *Building-block* (interno); porque reconoce que la representación propuesta no es un mapeo de una sección en concreto, sino que se construye la curva resaltando las características como: el corte, la simetría, la suavidad de la curva y la extensión del trazo fuera de los ejes coordenados. Por tanto, se evidencia que el autor pretende mostrar más allá de una sección en concreto y que guarda aquellas características que distinguen a la curva.

Capítulo 5: Resultados y reflexión guiada

En este último capítulo se abordarán algunos resultados importantes y una reflexión guiada por unas orientaciones basadas en un resultado de una tesis doctoral (Guacaneme, 2016). Los resultados aluden a los trabajos propios de los matemáticos considerados hitos históricos, una mención al trabajo de Duval (1988, 2004) y al de Kaput (1987), documentos relevantes en el estudio y el cumplimiento de los objetivos. La reflexión se inició desde la pregunta ¿Cómo me aportó el trabajo realizado, desde la HM, en mi formación como profesor de matemáticas? Para responderla se dieron siguientes momentos: un desarrollo intuitivo, con el fin de tener una aproximación desde la memoria, luego algunas ideas recolectadas de manera sistemática que reconocen algunas aproximaciones ya presentadas, pero, agregan otros aspectos. Estas dos formas de abordar la pregunta pretendieron, primero, hacer un ejercicio de memoria con influencia en los sentires sobre el trabajo y, segundo, sistematizar y recolectar aspectos reconocidos en el primer momento y consolidarlos en el segundo.

Resultados

Trabajo de los matemáticos

El estudio de las representaciones gráficas es un campo amplio. Este estudio puede enfocarse en las representaciones gráficas en el aula de matemáticas o representaciones gráficas usadas en las matemáticas. Sin embargo, este trabajo tomó el segundo camino, esencialmente abordando representaciones propuestas en el papiro de Rhind y las matemáticas egipcias hasta las representaciones propuestas por Euler frente a las curvas y funciones.

Las producciones del papiro Rhind, fueron ejemplificaciones y sus representaciones suelen ser geométricas con un carácter impropio. En estas se resaltan la ejemplificación del problema junto con algunos elementos propios de la solución. A pesar de parecer representaciones sencillas, reconocen elementos importantes para la ejemplificación, como el caso del “nueve” inscrito en la gráfica del problema 48 del papiro de Rhind.

Luego, el trabajo de los griegos en relación con el movimiento resalta la importancia filosófica de algunos hitos históricos. En el documento de Sattler (2020), es posible resaltar como hito histórico a: primero, la paradoja de Zenón, la cual se presenta mediante una representación verbal ajena a lo gráfico, pero que es posible analizar teniendo en cuenta las teorías de Duval (1988,2004) y Kaput (1987); segundo, la filosofía de Parménides, en cuanto, tiene influencia directa sobre el trabajo de Zenón. En estos hitos se identificaron elementos importantes como el concepto del infinito potencial, la continuidad, el espacio y el tiempo.

Además, el documento escrito por Sattler (2020) puede analizarse de manera más profunda, esto porque requiere tratarse desde una perspectiva filosófica que permita identificar otros elementos y las razones de dichos aspectos.

Las producciones más relevantes, desde la perspectiva del autor, fueron las representaciones propuestas por Nicolás Oresme. Son interesantes para clasificar los tipos de movimiento mediante figuras geométricas simples, como rectángulos, triángulos y polígonos con un lado curvo. Además de representar el movimiento, describe elementos importantes sobre el mismo, permitiendo identificar: primero, más de dos variables y su relación; segundo, la distancia recorrida como el área de las figuras; y, tercero, el uso de la geometría euclidiana, en combinación con su interpretación, para demostrar cómo un movimiento uniformemente uniforme puede ser puede recorrer la misma distancia que uno uniformemente disforme.

Otro elemento muy importante de reconocer es que Descartes no hace uso de un sistema coordenado como el actual. Como se vio, este autor hace uso de rectas con las que genera un seudo sistema coordenado como el que menciona Boyer (1949), para el cual solo se hace uso de las abscisas positivas. Por esto, las producciones de Descartes sobre la geometría analítica se convierten en un hito histórico desde el cual autores como Euler realizan representaciones aparentemente más sencillas, pero con mayor complejidad conceptual.

Mención a las teorías de la representación

Las teorías sobre la representación son necesarias para este estudio, pero también son importantes para el trabajo diario de un profesor de matemáticas. Esto porque estas teorías son la herramienta con la que se ha trabajado y comunicado las producciones matemáticas, son un apoyo fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, son una guía para la investigación matemática en y fuera del aula y, finalmente, promueven el desarrollo conceptual en cualquier nivel de matemáticas.

En relación con las teorías de Duval (1988, 2004) y Kaput (1987) es importante reconocer que estas no son ajenas. Ambas reconocen la importancia de las representaciones, el cambio entre representaciones, categorías que permiten hablar y caracterizar las representaciones y, en general, el estudio de estas. Naturalmente, son dos teorías distintas, pero cuanto más se abordan, más es posible encontrar similitudes que permiten entrelazarlas.

También, se debe reconocer que el estudio de las representaciones gráficas requiere especial atención en cada trazo que se observa. Esto debido a que normalmente las representaciones gráficas no explicitan cada una de las propiedades; por ejemplo, la presentación del problema 48 del papiro de *Rhind.* O cuando se pide a un estudiante trazar una función lineal, normalmente los estudiantes trazan simplemente una recta, dejando de lado propiedades no explícitas como la pendiente, el corte en cero, la graduación de los ejes, etc. Otro ejemplo, ocurre cuando se pide a un estudiante construir una tangente a una función, siempre ocurre que la representación parece una recta secante. Así, no importa el nivel de detalle, siempre será necesario hacer explícitas estas características propias de cada representación.

Documentos relevantes

Se han trabajado con bastantes documentos referentes a las matemáticas y su historia. No obstante, se deben resaltar algunos documentos que especialmente fueron influencia en el desarrollo. Estos son:

1. *Ancient Egyptian Mathematics* (Clagett, 1989).
2. *The Concept of Motion in Ancient Greek Thought: Foundations in Logic, Method, and Mathematics* (Sattler, 2020).

3. *A construção da representação grafica e o seu papel no ensino de funções: Uma visão historica* (Bonetto, 1999).
4. *Oresme on Motion* (Caroti, 1993).
5. *The Evolution of the "Cartesian Connection"* (Anderson, 2008).
6. *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros* (Duval, 1988, 2004).
7. *Sistemas de Representación y Matemáticas* (Kaput, 1987).

Estos documentos son de los más relevantes, por distintas razones. Algunos trabajan profundamente sobre la historia propia de las matemáticas, utilizando algunas representaciones gráficas. Otros, reconocen la importancia de los conceptos previos, como los matemáticos (del álgebra, geometría, aritmética, medición, etc.) y trabajos sobre el movimiento. Pero, los últimos dos presentan las teorías sobre las representaciones usadas por Duval (1988, 2004) y Kaput (1987), que son necesarios para la clasificación, además, contribuyen en la formación del autor como profesor de matemática.

¿Se cumplieron los objetivos?

El objetivo general, identificar y caracterizar la representación gráfica de la covariación en algunos momentos históricos, se ha cumplido parcialmente. En el cuarto capítulo se identificaron representaciones de Nicolás Oresme, Galileo Galilei y Leonard Euler. No obstante, no se trabajaron producciones posteriores a Euler, esto puede resultar en la no completitud de este objetivo.

De los tres objetivos específicos siguientes:

1. Reconocer los tipos de representación gráfica que se realizaron para la covariación en la Historia de las Matemáticas e identificar hitos históricos de dichas representaciones.
2. Caracterizar, teóricamente, los tipos de representación gráfica de la covariación de magnitudes.
3. Establecer el impacto que tiene para el conocimiento del autor del estudio, el trabajo con la HM.

En relación con el primero, se han identificado algunas representaciones historias importantes e hitos históricos del estudio de la variación y covariación, pero, como ya se mencionó en el objetivo específico, algunos hitos históricos posteriores a Euler no se abordaron e identificaron. El segundo objetivo se cumplió, porque las caracterizaciones propuestas para cada representación encontrada se fundamentaron principalmente en Duval (1988, 2004) y Kaput (1987). Finalmente, en relación con el tercero se puede señalar que el impacto que generó este estudio sobre el desarrollo del autor como futuro profesor fue positivo. Por un lado, permitió identificar matemáticamente producciones muy interesantes sobre las representaciones y cómo algunos trazos suelen hablar sobre las características de una representación, por otro, el trabajo de grado permitió resaltar la importancia de la HM para comprender el desarrollo de algunas producciones y justificación propuestas de estas mismas. Esto último será desarrollado más ampliamente en la siguiente sección.

Por lo anterior, concluimos que los objetivos se cumplieron parcialmente, pero pueden abordarse las representaciones posteriores a Euler, representaciones a otros problemas ajenos al movimiento y las no gráficas. No obstante, esto último puede ser objeto de estudio para otro trabajo.

Reflexión guiada

La reflexión se llevó a cabo mediante la pregunta ¿Cómo me aportó el trabajo realizado, desde la HM, en mi formación como profesor de matemáticas?, esta reflexión constó de dos momentos: aproximación de forma intuitiva y aproximación de forma sistemática.

Intuitivamente

El trabajo sobre las representaciones es enriquecedor puesto que, para caracterizar, categorizar e identificar las representaciones es necesario trabajar sobre teorías como las propuestas por Duval (1988,2004) y Kaput (1987). Por tanto, este trabajo no solo permitió reconocer aspectos propios de las representaciones gráficas, sino también teorías aplicables a la enseñanza y aprendizaje de la variación y covariación. Esto es evidenciado en el tercer capítulo, en el que se estudiaron las dos teorías y en el cuarto capítulo, donde se usaron para clasificar las representaciones propuestas.

También, se reconoció que la creación de representaciones no son instantáneas. La construcción de toda representación o sistema de representación necesita de tiempo, ya que, si se tiene un sistema nuevo, este necesitará ser modificado y mejorado para abordar las ideas representadas de mejor manera. Esta idea surge de la evidencia histórica en las distintas maneras de representar (no solo gráficamente). La consideración de la necesidad de tiempo en la construcción de representaciones es también aplicable al aula de matemáticas, simplemente si como humanidad nos tomó bastante tiempo construir el sistema coordenado actual no debemos pretender que los estudiantes construyan esta noción en una o dos semanas.

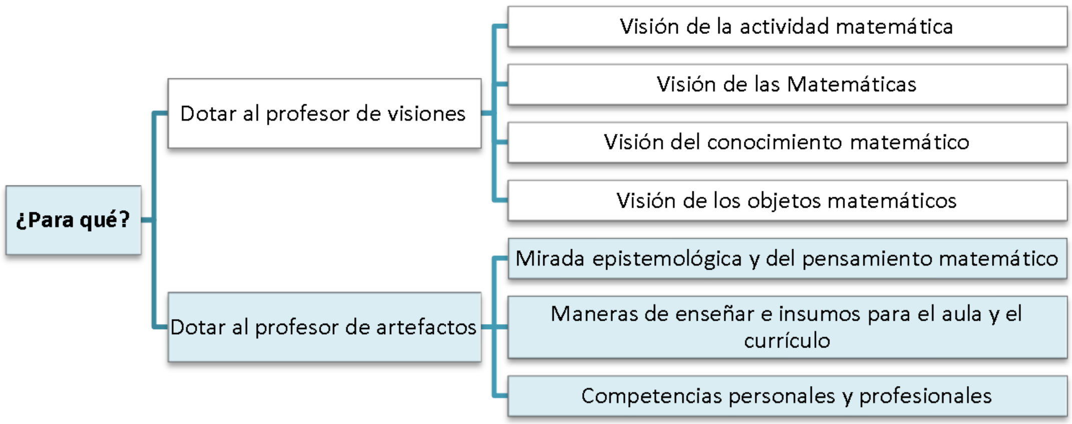
Finalmente, considero que ubicar y estudiar los hitos históricos relevantes en el estudio de la variación y covariación permitió reconocer la creatividad necesaria para conectar la geometría euclidiana con las ideas del movimiento en matemáticas. Esencialmente esta idea surge de las producciones de Nicolás Oresme y René Descartes, quienes con elementos de la geometría euclidiana (y su conexión con otros conocimientos matemáticos) desarrollaron un avance importante en las matemáticas. Oresme mediante la conexión de movimiento con polígonos regulares y su uso en una posible demostración y Descares en su conexión entre la geometría y el álgebra, proporcionando herramientas usadas en la actualidad para la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta estos planteamientos, considero que el trabajo de grado permite fomentar, principalmente, el discurso histórico en mi actividad docente, reconocer la importancia de la HM en el currículo de matemáticas y resaltar los hitos históricos como puntos de inflexión en el desarrollo del conocimiento sobre las matemáticas.

Sistemáticamente

El documento tratado por el profesor Guacaneme (2016) aborda, en uno de sus apartados, la pregunta "¿Para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores (en formación o ejercicio)?" (Guacaneme, 2016, p. 224). La respuesta propuesta se resume en la siguiente imagen:

Figura 59: Respuesta a la pregunta propuesta por Guacaneme (2016, p. 224)



Se distinguen dos formas en que la HM afecta en el conocimiento de un profesor de matemáticas; la primera para dotar el profesor de una visión sobre: la actividad matemática, las matemáticas, el conocimiento matemático y los objetos matemáticos. La segunda para dotar al profesor de artefactos en: la mirada epistemológica y del pensamiento matemático, las maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo y, para terminar, las competencias personales y profesionales.

En mi caso particular he identificado los siguientes elementos como aquellos importantes para responder a la pregunta siguiendo la mirada de Guacaneme (2016). Para ello primero se abordó la influencia del trabajo en la visión y, luego, los artefactos, es decir, que se seguirá el orden de las respuestas por Guacaneme (2016).

El impacto que tuvo sobre mi este trabajo en relación con mi visión sobre la actividad matemática se encuentra relacionados a las siguientes ideas:

1. Visión sobre la actividad matemáticas y sus facetas
    a. La actividad matemática, como lo demuestra la HM, no siempre pretende atender a problemáticas reales; en algunos casos, se aprende

matemáticas por gusto e interés propio hacia las matemáticas. Este punto de vista surgió desde la forma en que René Descartes desarrolló su documento sobre la geometría, porque en su discurso tiene la intención de criticar constructivamente la geometría euclidiana.

b. La actividad matemática se ve permeada por la interpretación otorgada en cada momento histórico y el contexto desarrollado. De esta manera, si se preguntará en la antigua Grecia sobre algunas curvas producidas por dos movimientos (curvas mecánicas), seguramente las representaciones presentadas, posiblemente también ideas, sean manera de verbal relacionando la covariación al movimiento de los objetos necesarios para la interpretación. Si se pregunta en otro momento histórico se tendrán repuestas relacionadas con el álgebra y la interpretación de dichas curvas. Esto se evidencia en cada una de las representaciones propuestas. Un ejemplo concreto es la diferencia entre las representaciones de las Nicolas Oresme y las de Leonard Euler; las primeras interpretan el movimiento desde la relación de tres variables y las segundas son curvas que tratan funciones (concepto no tratado por Oresme). Actualmente, como futuro profesor de matemáticas, permite comprender las formas de desarrollar actividades matemáticas en el aula y las representaciones producidas por los estudiantes.

2. Visión que permite valorar al creador y advierta del papel de la intuición y la demostración.

a. El trabajo me permitió identificar y valorar las creaciones de aquellos hitos históricos encontrados y estudiados. En las producciones puedo identificar la creatividad con que se utilizaban conceptos geométricos y algebraicos para interpretar problemas. El segundo capítulo, se dio una aproximación mostrando las representaciones mientras que en cuarto capítulo se presentó el estudio de las representaciones es posible observar los elementos que constituyeron cada forma de comunicar un conocimiento.

b. La intuición permite producir representaciones usando conceptos matemáticos previos, mientras que la demostración y su rigurosidad siempre están relacionadas con la matemática del momento. Así, las demostraciones de Oresme son rigurosa usando la geometría euclidiana. Esencialmente esta idea surge de las representaciones de Nicolas Oresme, pues la creatividad con que se usaron las formas geométricas permite identificar la intuición necesaria para comunicar su estudio sobre el movimiento, pero, en sus demostraciones hace uso de la geometría euclidiana porque es la matemática más relevante en su contexto.

3. Me permitió apreciar los aspectos estéticos ligados a la creación de las matemáticas.

a. La simpleza visual de las representaciones de Oresme es estéticamente hermosa en cuanto permite una complejidad conceptual no vista de manera sencilla. Esto es evidenciado en el apartado sobre las representaciones de este autor. Allí es posible identificar, además de lo visible a primera vista, cómo la representación reconoce no dos variables sino tres y la compleja relación entre estas. En relación con esto último es importante reconocer que el área de las figuras puede ser relacionada a la interpretación de la integral, concepto trabajado con posterioridad por matemáticos como Bernhard Riemann (1826 - 1866).

b. Las producciones de Descartes son hermosas porque permitieron relacionar dos ramas de las matemáticas. Son hermosas en cuanto reconocen la complejidad de relacionar más de una variable y expresarlo en destinos registros. Igualmente, esta idea surge desde el apartado sobre las producciones del autor.

4. Me ha sensibilizado para llevar las matemáticas al aula de matemáticas.

    a. El desarrollo e interpretación de las matemáticas en la variación y covariación nos llevó, como humanidad, bastante tiempo. Partimos desde la interpretación filosófica del movimiento para luego crear las caracterizaciones de cada movimiento y culminando con la relación del movimiento y las funciones; este proceso duró siglos y no es coherente pensar que los jóvenes pueden desarrollar el concepto en pocos días. Esta idea se evidencia en el capítulo cuatro, porque nos permite evidenciar los hitos históricos y las distintas maneras en que se desarrollaron.

El impacto sobre mi visión de las matemáticas contempla las siguientes ideas:

1. Me permitió comprender la matemática como una ciencia en desarrollo que, a pesar de su formalismo, necesita de la exploración como una actividad recurrente con errores, construcciones mejorables e intuitivas.
2. Este trabajo me permitió reconocer la importancia de las matemáticas en la historia humana; esto porque desde la invención de la escritura se han evidenciado distintas maneras de hacer matemáticas. Las matemáticas siempre han sido consideradas como una herramienta, no obstante, como se evidenció en algunos documentos (Quintas (1996), Grant (1960), Sattler (2020) y Boyer (1949)) que las matemáticas en ocasiones se estudiaron por gusto.

El impacto sobre mi visión del conocimiento matemático:

1. Mi conocimiento matemático previo a este trabajo de grado me llevaba a pensar en Descartes como el único pensador que desarrolló el sistema coordenado actual; no obstante, el trabajo me permitió identificar las distintas maneras de representación relacionados a la covariación y su importancia. Esta idea se fomentó esencialmente en el cuarto capítulo, en el apartado de titulado "La geometría analítica y sus representaciones".

El impacto sobre mi visión de los objetos matemáticos:

1. Me permitió, en el capítulo cuatro, identificar la evolución en el concepto de la variación y covariación. Esta evolución en el concepto empezó sin conocer el término o tan siquiera nombrarlo, para más tarde hacer uso de todos los

conceptos matemáticos desarrollados y necesarios para la concepción de la variación y covariación.

2. Las curvas mecánicas no fueron consideradas como geometría en la antigua Grecia, lo que fue criticado y nuevamente formulado por René Descartes promoviendo una nueva visión de la geometría.
3. El sentido de variación y covariación se enmarca en el contexto en que se encuentre estudiando. De esta manera, si se estudia desde la perspectiva del movimiento seguramente se tendrán que abordar las clasificaciones propuestas por Nicolás Oresme, pero, si se estudia desde las curvas mecánicas se tendrá en cuenta una actividad geométrica ligada al álgebra.

La HM me ha dotado de artefactos en: la mirada epistemológica y del pensamiento matemático, las maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo y, para terminar, las competencias personales y profesionales.

En mi mirada epistemológica sobre la variación y covariación, el movimiento y las representaciones he identificado los siguientes elementos:

1. La variación y covariación mantuvo un desarrollo impulsado por el estudio de la física. A pesar de ello, luego de Oresme, algunos matemáticos se dedicaron al estudio de variación haciendo uso de las relaciones y la interpretación de curvas geométricas. Por tanto, el estudio de la variación y covariación necesariamente requiere de un contexto con el cual impulsar y motivar su estudio de parte de los estudiantes.

2. El estudio sobre el movimiento partió en la filosofía, como la variación y covariación, pero desde las propuestas de Nicolás Oresme se ha mantenido como un estudio de la física que hace uso de las matemáticas.
3. Finalmente, las representaciones se han visto permeadas en cada momento histórico por la rigurosidad manejada en ese momento. Por ejemplo, el sistema coordenado actual reconoce abscisas negativas mientras que el utilizado por René Descartes no reconoce estas abscisas. La representación sobre la variación y covariación evolucionaron, primero, usando elementos geométricos euclidianos, después, considerando polígonos regulares e irregulares (algunos con curvas), y finalmente, usando curvas como las presentadas por Leonard Euler.

En relación con los insumos matemáticos que la HM me ofrece para el aula, debo clasificarlo en dos, estrictamente para el aula y aplicables al currículo.

1. Considero que el estudio de la variación en el aula de matemáticas requiere de una rigurosa interpretación en las representaciones y los problemas que contextualicen. La interpretación en las representaciones la menciono como importante dado que, como se pudo evidenciar, todos los trazos de una representación son parte de un lenguaje con el que el estudiante y el profesor se comunican. Para el aula de matemáticas los problemas, deben contextualizarse, como el estudio del movimiento, permitiendo que los estudiantes puedan explorar sobre la variación y covariación.

2. Considero que este trabajo me permitió identificar un posible orden con el cual abordar la variación en el aula. Dicho orden debe considerar como elementos previos las representaciones semióticas y el trabajo en la solución de problemas; estos dos elementos facilitarán, como lo hicieron para los matemáticos, el estudio de la variación y covariación.
3. Otro elemento importante en el currículo es el estudio de las curvas mecánicas, que, a pesar de requerir aún más formalismo matemático, es un estudio que requiere la variación y covariación. Debo aclarar que; los problemas y situaciones presentadas en el marco de las curvas mecánicas deberán ser adaptadas al nivel educativo.

En conclusión, todo el trabajo ha contribuido en mi formación profesional y personal. La HM me ha aportado en mi formación en cuanto me permitió evidenciar todas aquellas ideas aquí presentadas. Además, la visión que la HM fomenta sobre la matemática es indispensable en términos personales y profesionales, dado que; me ha permitido identificar a la HM como un elemento propio de la matemática y que fomenta la formación de estudiantes y profesores. También, me ha otorgado artefactos matemáticos que son susceptibles de usarse en el aula como: la implementación de las representaciones en el aula de matemáticas, el estudio de la variación desde las curvas y fenómenos físicos y artefactos históricos sobre la dificultad de entender la variación y covariación sin un contexto para el cual sea evidente.

Lista de referencias

Anderson, G. M. (2008). The Evolution of the «Cartesian Connection». *Mathematics Teacher*, *102*(2), 107-111.

Babb, J. (2005). Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme. *Science & Education*, *14*(3), 443-456.

Bonetto, G. A. (1999). *A construção da representação grafica e o seu papel no ensino de funções: Uma visão historica*. [s.n.]. https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/175422

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. http://archive.org/details/the-history-of-the-calculus-carl-b.-boyer

Camargo Uribe, L., & Guzman Castro, A. A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Carlson, M., Jacobs, S., & Coe, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de los eventos dinamicos: Un marco conceptual y un estudio. 8*.

Caroti, S. (1993). Oresme on Motion. *Vivarium, 31*(1), 8-36. https://doi.org/10.1163/156853493x00088

Clagett, M. (1989). *Ancient Egyptian Science: A Source Book* (Vol. 3). American Philosophical Society.

Cruz, J. A. R. (2007). Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme. *Asclepio*, *59*(1), Article 1. https://doi.org/10.3989/asclepio.2007.v59.i1.216

Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos reguistros. En B. Parra (Trad.), *Annales de Didactique et de Sciences Cognilives* (Vol. 1, pp. 235-253).

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega Restrepo, Trad.; 2a ed). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic «moments» in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 83-106. Scopus. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9056-y

Garavito Clavijo, J. A., & Gómez Mora, W. F. (2017). *Catálogo de tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional* [Universidad Pedagógica Nacional]. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/10038/TE-21650.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Grant, E. (1960). Nicole Oresme and His De Proportionibus Proportionum. *Isis*, *51*(3), 293-314.

Grant, E. (1966). *Nicole Oresme, De Proportionibus Proportionum and Ad Pauca Respicientes*.

Grant, E. (1972). Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on the uniformity and difformity of intensities known as 'tractatus de configurationibus qualitatum et motuum'. *Studies in History and Philosophy of Science*, *3*(2), 167-182. Scopus. https://doi.org/10.1016/0039-3681(72)90022-2

Guacaneme, E. (2013). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos. *Universidad Pedagogica Nacional*, 23-34.

Guacaneme, E. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporcion en la constitucion del conocimiento del profesor de Matematicas* [Universidad del Valle]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/10093/9405-0525550.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Kaput, J. (1987). Sistemas de Representación y Matemáticas. En E. Guacaneme (Trad.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics.*

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (M. Schmidt Q. & Kolumbien, Eds.; 1. ed). Ministerio de educación.

Mendonça, A., & Borges, H. (2018). *Nicolas Oresme: Historical perspectives for use in classroom.* 48-62. https://doi.org/10.30938/bocehm.v3i9.53

NGCmatem (Director). (2011, agosto 17). *¿Qué hace hoy un matemático? Parte 1*. https://www.youtube.com/watch?v=ux0XBD2tmFY

Nicodemi, O. (2010). Galileo and Oresme: Who Is Modern? Who Is Medieval? *Mathematics Magazine*, *83*(1), 24-32.

Oliveira, D. P. A., Rosa, M., & Viana, M. da C. V. (2014). De Oresme a Dirichlet: um breve histórico do desenvolvimento das funções. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *14*(28), Article 28. https://doi.org/10.47976/RBHM2014v14n2847-61

Quintás, G. (1996). *René Descartes, Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. Biblioteca Universal.

Rampersad, R. (2009). The role of visualisation in learners' conceptual understanding of graphical functional relationships. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *14*, 14. https://doi.org/10.1080/10288457.2010.10740671

Rodríguez, F. M., & Vicario, M. (2015). *El uso de la historia de la matemática de la historia en la enseñanza.* Universidad Autónoma de Guerrero. http://funes.uniandes.edu.co/cgi/search/simple?q=EL+USO+DE+LA+HISTORIA+DE+LA+MATEM%C3%81TICA+EN+LA+ENSE%C3%91ANZA&_action_search=Buscar&_order=bytitle&basic_srchtype=ALL&_satisfyall=ALL

Rojas, M. (2014). *Las paradojas de Zenón, Parménides Reichenbach, Borges, Russell y los conjuntos infinitos—Revista Ciencias*. *113-114*, 83-91.

Roses, P. (2020). *Dibujando a Descartes*. Pascual Bravo. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Dibujando_a_Descartes-JS/index.html?page=49

Sattler, B. M. (2020). *The Concept of Motion in Ancient Greek Thought: Foundations in Logic, Method, and Mathematics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108775199

The Role of Music in Galileo's Experiments. (2023, mayo 10). https://www.facebook.com/watch/live/?ref=watch_permalink&v=1236981850329491