

**Geometría al Tacto: Diseñando material didáctico para enseñar geometría a estudiantes  
con discapacidad visual**

Laura Camila Gutiérrez González

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Licenciatura en Matemáticas**

Profesora Tania Julieth Plazas Merchán

Directora

**Geometría al Tacto: Diseñando material didáctico para enseñar geometría a estudiantes  
con discapacidad visual.**

Laura Camila Gutiérrez González

1.000.007.963

2019140035

Trabajo de Grado

Para optar por el título de Licenciada en Matemáticas

Trabajo de grado asociado a interés de los estudiantes

Directora: Tania Julieth Plazas Merchán

Magister en Docencia de las Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia

2025

## TABLA DE CONTENIDO

<b>Introducción .....</b>	<b>11</b>
<b>Justificación .....</b>	<b>13</b>
<b>Objetivos .....</b>	<b>16</b>
General .....	16
Específicos.....	16
<b>Marco de Referencia.....</b>	<b>17</b>
Necesidades Educativas Especiales .....	17
Discapacidad Sensorial.....	18
Discapacidad Visual .....	18
Tipos de Discapacidad Visual .....	19
Ceguera Total .....	19
Baja Visión.....	20
Braille .....	21
Diseño Universal de Aprendizaje .....	23
Principios del DUA .....	24
Material didáctico .....	25
Ejemplos de materiales hápticos utilizados en la enseñanza de la geometría: .....	26

	4
Marco Matemático.....	32
Conjeturación .....	38
<b>Metodología .....</b>	<b>41</b>
Descripción General .....	41
Población .....	44
<b>Material Congru Kit.....</b>	<b>46</b>
¿Qué es Congru Kit?.....	46
Historia del Material.....	46
Composición <i>Congru Kit</i> .....	48
Tareas .....	56
Tarea 1: Identificando triángulos congruentes.....	56
Posibles dificultades.....	57
Tarea 2: Construye su gemelo .....	58
Posibles dificultades.....	59
Posibles criterios por realizar.....	60
<b>Análisis .....</b>	<b>62</b>
Intervención con el estudiante 1 .....	62
Intervención con la estudiante 2.....	69
Análisis de la implementación de la prueba piloto .....	74

**Conclusiones ..... 79**

**Referencias..... 82**

**Anexos ..... 87**

**TABLA DE TABLAS**

<b>Tabla 1</b> Descripción T1, T2, T3, T4, T5.....	49
<b>Tabla 2</b> Descripción de los segmentos.....	52
<b>Tabla 3</b> Descripción de los ángulos.....	53
<b>Tabla 4</b> Resultados de medición de lados .....	63
<b>Tabla 5</b> Resultados de medición de ángulos .....	64
<b>Tabla 6</b> Resultados de medición T5 .....	65
<b>Tabla 7</b> Resultados de medición a T1, T2, T3.....	71
<b>Tabla 8</b> Resultados medición T4 .....	72

## TABLA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> <i>Abecedario en Braille</i> .....	22
<b>Figura 2</b> <i>Números en Braille</i> .....	22
<b>Figura 3</b> <i>Notación de ángulos y triángulos en Braille</i> .....	23
<b>Figura 4</b> <i>Kit de geometría para ciegos</i> .....	26
<b>Figura 5</b> <i>Geoplano adaptado para estudiantes con discapacidad visual</i> .....	27
<b>Figura 6</b> <i>Segmentos y ángulos SAGOOS</i> .....	28
<b>Figura 7</b> <i>Kit Triralta suples</i> .....	29
<b>Figura 8</b> <i>Tabloide y regleta de medición CriJa</i> .....	29
<b>Figura 9</b> <i>Material didáctico TRALC</i> .....	30
<b>Figura 10</b> <i>Plantillas y regletas táctiles utilizadas en la enseñanza de la geometría</i> .....	31
<b>Figura 11</b> <i>Modelos tridimensionales de figuras geométricas impresas en 3D para estudiantes con discapacidad visual</i> .....	31
<b>Figura 12</b> <i>Triángulo</i> .....	32
<b>Figura 13</b> <i>Segmentos congruentes</i> .....	33
<b>Figura 14</b> <i>Ángulos congruentes</i> .....	33
<b>Figura 15</b> <i>Triángulo equilátero</i> .....	34
<b>Figura 16</b> <i>Triángulo rectángulo</i> .....	34
<b>Figura 17</b> <i>Triángulos congruentes</i> .....	35
<b>Figura 18</b> <i>Criterio de congruencia lado-lado-lado</i> .....	35
<b>Figura 19</b> <i>Criterio lado-ángulo-lado</i> .....	36
<b>Figura 20</b> <i>Criterio ángulo-lado-ángulo</i> .....	36
<b>Figura 21</b> <i>Criterio equilátero - lado</i> .....	37

<b>Figura 22</b> <i>Criterio Hipotenusa-cateto</i> .....	37
<b>Figura 23</b> <i>Primer prototipo</i> .....	47
<b>Figura 24</b> <i>Segundo prototipo</i> .....	47
<b>Figura 25</b> <i>Congru kit</i> .....	¡Error! Marcador no definido.
<b>Figura 26</b> <i>Base de lámina galvanizada</i> .....	55
<b>Figura 27</b> <i>Modo de uso de segmentos complementarios</i> .....	55
<b>Figura 28</b> <i>Criterio lado-lado-lado</i> .....	60
<b>Figura 29</b> <i>Criterio ángulo-lado-ángulo</i> .....	60
<b>Figura 30</b> <i>Criterio lado-ángulo-lado</i> .....	60
<b>Figura 31</b> <i>Criterio lado-lado-ángulo</i> .....	61
<b>Figura 32</b> <i>Midiendo con la regla</i> .....	63
<b>Figura 33</b> <i>Midiendo con el transportador</i> .....	64
<b>Figura 34</b> <i>Midiendo los lados de T5</i> .....	65
<b>Figura 35</b> <i>Construcción del criterio ángulo-ángulo-ángulo</i> .....	66
<b>Figura 36</b> <i>Construcción del criterio lado-lado-lado</i> .....	67
<b>Figura 37</b> <i>Construcción del criterio lado-ángulo-lado</i> .....	68
<b>Figura 38</b> <i>Construcción del criterio lado-lado-ángulo</i> .....	68
<b>Figura 39</b> <i>Lectura de la cartilla en Braille</i> .....	69
<b>Figura 40</b> <i>Exploración de los triángulos T1, T2, T3</i> .....	70
<b>Figura 41</b> <i>Midiendo con la regla</i> .....	70
<b>Figura 42</b> <i>Resultados en Braille</i> .....	71
<b>Figura 43</b> <i>Construcción del criterio ángulo-lado-ángulo y lado-lado-lado</i> .....	73
<b>Figura 44</b> <i>Construcción ángulo-ángulo-ángulo</i> .....	74



**TABLA DE ANEXOS**

Anexo 1. Cartilla docente .....	87
Anexo 2. Cartilla del estudiante.....	112
Anexo 3. Cartilla del estudiante en Braille .....	131
Anexo 4. Consentimientos .....	137

## Introducción

Este trabajo de grado se presenta como requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se adscribe en la modalidad *monografía asociada al estudio de un asunto de interés propio del estudiante*.

En este documento se encuentra el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de tareas y el material didáctico adaptado *Congru kit* que permite a estudiantes con discapacidad visual conjeturar los criterios de congruencia de triángulos.

Este documento se estructura en seis capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se expone la justificación del trabajo, abordando la importancia de promover ambientes de aprendizaje inclusivos para estudiantes con discapacidad visual y la necesidad de contar con materiales didácticos accesibles para la enseñanza de la geometría. Asimismo, se presentan el objetivo general y los objetivos específicos que orientan el desarrollo del proyecto.

En el segundo capítulo se encuentra el marco de referencia. En este se definen conceptos centrales como Necesidades Educativas Especiales (NEE), discapacidad sensorial y discapacidad visual, incluyendo sus tipos y características. También se describen el sistema de lectoescritura Braille, los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y la noción de material háptico, acompañada de ejemplos para la educación matemática. Finalmente, se desarrolla el marco matemático, en el que se presenta la definición de triángulos, los criterios de congruencia y el proceso cognitivo de conjeturar, elementos esenciales para la construcción de las tareas.

En el tercer capítulo se describe la metodología del estudio, la cual se fundamenta en las cuatro fases del análisis didáctico propuesto por Gómez (2002): análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En este apartado también se presenta la población participante en la prueba piloto y las características de la institución educativa donde se realizó la implementación.

El cuarto capítulo presenta el material didáctico *Congru Kit*, explicando su propósito, su historia de diseño, los prototipos desarrollados durante el proceso, la versión final del material y los elementos que lo componen. También se describen las tareas diseñadas para ser utilizadas con el material y los propósitos didácticos asociados a cada una.

En el quinto capítulo se expone la implementación y el análisis de la prueba piloto. Este capítulo recoge la descripción detallada de las intervenciones realizadas con los estudiantes con discapacidad visual, así como el análisis de sus desempeños, estrategias, dificultades y logros durante el desarrollo de las tareas con *Congru Kit*.

Finalmente, el sexto capítulo presenta las conclusiones del trabajo, destacando los avances logrados, las oportunidades de mejora del material y las tareas, y las reflexiones derivadas de la experiencia en torno a la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad visual. El documento cierra con la bibliografía consultada y los anexos correspondientes.

## Justificación

El concepto de inclusión educativa ha sido ampliamente abordado y promovido en las políticas internacionales y nacionales. La educación inclusiva, según Valdés et al. (2010, citado por el Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2017b), es un atributo esencial del sistema educativo, pues fomenta la presencia, participación y aprendizaje de todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades o discapacidades. En este sentido, la Organización de las Naciones Unidas (ONU) y la Declaración Universal de los Derechos Humanos establecen que la educación es un derecho fundamental que debe garantizar la igualdad de oportunidades para todas las personas (ONU, 1948, artículos 2 y 26).

En Colombia, la Constitución Política de 1991, en sus artículos 67 y 68, insta que la educación es un derecho de la persona y que el Estado tiene la obligación de garantizar un entorno educativo adecuado para todos los estudiantes, incluyendo a aquellos con necesidades educativas especiales. La Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, establece la obligación de integrar a las personas con diferentes limitaciones al sistema educativo regular. Asimismo, el MEN, a través del Decreto 1421 de 2017, refuerza la necesidad de que las instituciones educativas desarrollen entornos y estrategias pedagógicas inclusivas que permitan la participación efectiva de estudiantes con discapacidad.

No obstante, a pesar de estos avances normativos, Según un estudio de la UNESCO escrito por Sandoval Mena (2023) muchos profesores de matemáticas carecen de las herramientas necesarias para atender de manera efectiva a estudiantes con discapacidad visual, lo que limita su participación y aprendizaje. En mi experiencia personal, durante las prácticas educativas, en las cuales desarrollé clases con estudiantes con NEE (algunos con discapacidad cognitiva y otros con discapacidad visual), encontré que no contaba con los recursos ni el

conocimiento necesario para atender sus necesidades de manera inclusiva. Esta vivencia no solo despertó en mí un interés por la educación inclusiva, sino también por diseñar materiales que respondan a las características de los estudiantes, permitiéndoles participar como cualquier otro estudiante en el aula.

El paradigma de la educación inclusiva busca eliminar las barreras al aprendizaje y fomenta la participación de todos los estudiantes, promoviendo una enseñanza centrada en el estudiante y respetando sus diferencias individuales. Esto requiere no solo de ajustes en el aula, sino también de un cambio en las actitudes de los docentes y la comunidad escolar. Como señala Fernández del Campo (1996), la inclusión no es simplemente un enfoque técnico, sino un compromiso ético con la equidad y la justicia social.

Desde esta perspectiva, la selección de los objetos matemáticos que se abordan en el aula adquiere especial relevancia, en tanto estos deben posibilitar la participación de todos los estudiantes y permitir múltiples formas de acceso al conocimiento. En el campo de la geometría, los criterios de congruencia de triángulos representan un objeto de estudio particularmente pertinente, ya que pueden explorarse a través de la manipulación, la comparación y la construcción de figuras, sin depender exclusivamente de la información visual.

En coherencia con lo anterior, en relación con los criterios de congruencia el MEN (2017a) en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) establece que los estudiantes deben “identificar relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto” (p. 62). Por su parte, en los Estándares Básicos de Competencias (EBC) señalan que los estudiantes deben “identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras” y, además, “aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas” (MEN, 2006, p. 82 y 86). La enseñanza

de las propiedades de los triángulos a estudiantes con discapacidad visual requiere un enfoque inclusivo que incorpore materiales adaptados, como recursos hápticos, que faciliten el aprendizaje a través de la percepción táctil.

El diseño de tareas y materiales específicos permite que estos estudiantes participen en el aprendizaje matemático, promoviendo un ambiente inclusivo y equitativo. En este contexto, el material didáctico, como sugieren Manrique y Gallego (2013), potencia el aprendizaje al ofrecer a los estudiantes la posibilidad de manipular recursos de forma individual, lo cual fortalece la concentración y facilita una construcción más profunda del conocimiento. Para los estudiantes con discapacidad visual, el material didáctico adquiere una relevancia especial, ya que les permite acceder a conceptos abstractos mediante la exploración y la manipulación, estimulando su sentido del tacto y promoviendo un desarrollo integral.

En conclusión, este trabajo de grado tiene como propósito diseñar, implementar y evaluar un material didáctico y una secuencia de tareas que contribuya a un entorno de aprendizaje inclusivo, donde los estudiantes con discapacidad visual puedan explorar y descubrir los criterios de congruencia de los triángulos.

## Objetivos

### General

Diseñar y validar material didáctico adaptado, junto con una secuencia de tareas, que permita a estudiantes con discapacidad visual, definir la congruencia de triángulos y establecer los criterios de congruencia de triángulos.

### Específicos

- Revisar bibliografía acerca de la discapacidad visual y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a personas con discapacidad visual, con el fin de reconocer sus características generales.
- Diseñar un material didáctico para estudiantes con discapacidad visual que facilite la identificación, manipulación y experimentación de los triángulos y establecer los criterios de congruencia a través del sentido del tacto.
- Diseñar una secuencia de tareas que fomente la conjeturación de los criterios de congruencia, usando el material didáctico diseñado.
- Implementar una prueba piloto de la secuencia de tareas, utilizando el material háptico con la participación de estudiantes con discapacidad visual.
- Analizar los resultados obtenidos durante la implementación de la prueba piloto, identificando aciertos y áreas de mejora para optimizar el diseño del material y la secuencia de tareas.

## Marco de Referencia

### Necesidades Educativas Especiales

Las necesidades educativas especiales (NEE) se refieren a los requerimientos particulares que presentan ciertos estudiantes debido a condiciones físicas, sensoriales, cognitivas, emocionales o sociales que afectan su proceso de aprendizaje. Estas necesidades demandan adaptaciones en los métodos de enseñanza, los materiales educativos y el entorno escolar para garantizar una educación equitativa<sup>1</sup> y de calidad (INCI, 2006).

Según Fernández del Campo (1996), las NEE no deben percibirse como un déficit o carencia, sino como una oportunidad para diversificar las estrategias pedagógicas y enriquecer la experiencia educativa tanto para el estudiante con necesidades específicas como para sus compañeros.

Marchesi y Martín (2003) destacan que las NEE son un concepto dinámico que debe entenderse dentro del contexto social y cultural del estudiante. Las barreras que enfrentan los estudiantes con NEE no solo están relacionadas con sus características personales, sino también con las limitaciones estructurales y actitudinales del entorno educativo.

Las NEE pueden clasificarse en cuatro categorías: (a) Dificultades de aprendizaje que incluyen dislexia, discalculia y trastornos de atención. (b) Discapacidades sensoriales tales como la discapacidad visual y auditiva, que requieren herramientas específicas como el sistema Braille o intérpretes de lengua de señas. (c) Discapacidades físicas, las cuales exigen ajustes en la infraestructura y dispositivos de apoyo para la movilidad. (d) Dificultades emocionales y de

---

<sup>1</sup> La equidad educativa se refiere al principio de justicia en la educación, garantizando que todos los estudiantes reciban el apoyo, los recursos y las oportunidades que necesitan para tener éxito, teniendo en cuenta las circunstancias, necesidades y barreras individuales. (UNESCO, 2017)

comportamiento que implican la necesidad de programas psicosociales y estrategias de manejo del aula (INCI, 2006).

El presente trabajo de grado se enmarca en la categoría de discapacidades sensoriales, específicamente en la discapacidad visual, dado que se orienta al diseño e implementación de un material didáctico háptico y una secuencia de tareas dirigidas a estudiantes con esta condición. En concordancia con lo planteado por el INCI (2006), este tipo de discapacidad requiere el uso de herramientas y recursos específicos que favorezcan el acceso al conocimiento, como el sistema Braille y los materiales adaptados al sentido del tacto, con el propósito de promover la participación de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

### **Discapacidad Sensorial**

La discapacidad sensorial se refiere a la limitación o pérdida de una o más capacidades sensoriales, afectando principalmente la vista y el oído. Esta condición puede dificultar la percepción y comunicación con el entorno, influyendo en la interacción social y el acceso a la información. La Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad de las Naciones Unidas define a las personas con discapacidad como aquellas que tienen deficiencias físicas, mentales, intelectuales o sensoriales a largo plazo que, al interactuar con diversas barreras, pueden ver impedida su participación plena y efectiva en la sociedad en igualdad de condiciones con los demás (ONU, 2006). Por lo tanto, es esencial implementar estrategias inclusivas y proporcionar apoyos adecuados para garantizar la plena participación de las personas con discapacidad sensorial en todos los ámbitos de la vida.

### **Discapacidad Visual**

La discapacidad visual se refiere a una condición que afecta la capacidad de una persona para ver, ya sea de manera total o parcial, dificultando la realización de tareas que requieren

visión normal. Según el MEN (2017c), una persona con discapacidad es aquella que, al interactuar con diversas barreras, puede verse impedido su aprendizaje y participación plena y efectiva en la sociedad. Esta definición resalta que la discapacidad no solo se origina por una deficiencia física, sino también por las barreras actitudinales y ambientales que limitan la inclusión. La Organización Mundial de la Salud (OMS) (2021) señala que la discapacidad visual ocurre cuando una afección ocular afecta al sistema visual y sus funciones relacionadas con la visión, y dichas limitaciones persisten incluso con el uso de ayuda óptica o tratamientos disponibles. También, es fundamental que las instituciones educativas implementen estrategias inclusivas que eliminen estas barreras, garantizando el acceso equitativo al aprendizaje para todos los estudiantes.

## **Tipos de Discapacidad Visual**

### ***Ceguera Total***

La ceguera, definida como una pérdida total o severa de la visión, puede clasificarse en congénita y adquirida. Las personas con ceguera congénita suelen desarrollar habilidades compensatorias desde una edad temprana, mientras que quienes adquieren la ceguera enfrentan retos adicionales relacionados con la adaptación a su nueva condición (INCI, 2006).

Fuentes (2007a) resalta que las imágenes táctiles y los materiales didácticos específicos desempeñan un papel crucial en el aprendizaje de los estudiantes con ceguera, facilitando su interacción con conceptos abstractos y su integración social.

Por último, el INCI (2006) enfatiza que la ceguera no debe ser percibida como una barrera insalvable, sino como una oportunidad para explorar formas alternativas de aprendizaje y desarrollo, promoviendo una educación inclusiva y equitativa.

## ***Baja Visión***

La baja visión es una condición visual que implica una disminución importante de la capacidad para percibir detalles, aun utilizando lentes, ayudas ópticas o tratamiento. A diferencia de la ceguera, la persona conserva cierto grado de visión funcional, aunque insuficiente para realizar actividades cotidianas como leer, escribir, reconocer rostros o desplazarse con autonomía.

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2019), una persona presenta baja visión cuando su agudeza o campo visual se encuentran por debajo de los rangos considerados típicos<sup>2</sup>, pero no alcanzan los criterios establecidos para clasificarla como ciega. Esta condición puede manifestarse de diversas maneras, como visión borrosa, dificultad para percibir contrastes, pérdida del campo visual o sensibilidad a la luz.

La baja visión no solo afecta la percepción visual, sino también la independencia y calidad de vida de las personas, requiriendo adaptaciones tecnológicas y educativas para garantizar su inclusión. En el ámbito educativo, el MEN (2017c) señala que los estudiantes con baja visión requieren ajustes en los materiales didácticos, como el uso de macrotipos<sup>3</sup>, contrastes adecuados y dispositivos de apoyo, para facilitar su acceso a la información y al aprendizaje.

Por lo tanto, es fundamental que la baja visión sea abordada desde una perspectiva integral, promoviendo la accesibilidad en entornos educativos y sociales, y proporcionando herramientas adecuadas que permitan la autonomía de las personas con esta condición

---

<sup>2</sup> Agudeza o campo visual típico: se considera normal una agudeza visual de 6/6 (equivalente a 20/20 en otras escalas), que indica que la persona puede ver a 6 metros lo que debería verse a esa distancia. La baja visión se define cuando la agudeza está por debajo de 6/18 y por encima de 3/60 en el mejor ojo con la mejor corrección posible. (OMS, 2019)

<sup>3</sup> Es un tipo de libro o texto con letra de tamaño considerablemente mayor al normal (entre 16 y 20 puntos, aproximadamente) y, en ocasiones, con ilustraciones más grandes, diseñado para facilitar la lectura a personas con baja visión. (ONCE, 2012).

## **Braille**

El sistema Braille es un método de lectura y escritura táctil diseñado específicamente para personas con discapacidad visual. Desarrollado por Louis Braille en 1824, este sistema se basa en una matriz de celdas con seis puntos en relieve que, mediante distintas combinaciones, representan letras, números, signos de puntuación y otros símbolos necesarios para la comunicación escrita (Fernández del Campo, 1996).




























Este sistema es necesario para la alfabetización y el acceso al conocimiento de las personas con discapacidad visual, ya que les permite participar de manera autónoma en contextos educativos, culturales y profesionales. Según Fuentes (2007a), el Braille fomenta la independencia, ya que les da la posibilidad de leer y escribir, facilitando su integración social y educativa. Por su parte, el INCI (2006) subraya que el Braille es más que un sistema de escritura; es una herramienta de empoderamiento que permite a las personas ciegas acceder a la información en igualdad de condiciones, rompiendo barreras y potenciando su participación en la sociedad.

A continuación, se presenta el abecedario en Braille, números y algunas notaciones geométricas:

## Figura 1

### Abecedario en Braille

#### Alfabeto braille

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
									
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
									
u	v	x	y	z	ñ	w			
									

Nota. Tomado de Fundación Caser (2024). (<https://www.fundacioncaser.org/actualidad/te-acompanamos/sistema-braille>)











## Figura 2

### Números en Braille

#### Formación de los números

##### Signo de número



1	2	3	4	5
				
6	7	8	9	0
				

*Nota.* Tomado de Fundación Caser (2024). (<https://www.fundacioncaser.org/actualidad/te-companamos/sistema-braille>)

### Figura 3

#### *Notación de ángulos y triángulos en Braille*

Tinta		$\hat{\alpha}$	$\widehat{BAC}$	$\hat{A}$
Braille	Notación			
	Códigos	45,25,..	45,25,26,..,35	45,25,46,1

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Ángulo recto			456,36
Ángulo orientado positivamente			46,156
Ángulo orientado negativamente			46,345

Figura o concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Triángulo general	$\triangle ABC$		6,23456,..
Triángulo rectángulo	$\triangle EFG$		456,236,..

*Nota.* Adaptado de Braille y matemática (p. 112), por J. Fernández del Campo, 2004, ONCE.

### Diseño Universal de Aprendizaje

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) es un enfoque educativo que parte de la idea de que la diversidad en el aula es algo normal, no una excepción. Su principal objetivo es derribar las barreras en la enseñanza y asegurar que todos los estudiantes, sin importar sus capacidades, estilos de aprendizaje o necesidades específicas, tengan un acceso equitativo al aprendizaje (CAST, 2018). Este enfoque se basa en los avances de la neurociencia y en la comprensión de que el aprendizaje es un proceso muy variable, lo que significa que necesitamos estrategias flexibles que permitan a cada estudiante desarrollar sus habilidades de la mejor manera posible (Meyer et al., 2014). El DUA nace como respuesta a los retos que enfrentan los

sistemas educativos para garantizar la equidad y la accesibilidad en el aprendizaje. No solo se enfoca en estudiantes con discapacidades, sino que también beneficia a aquellos con altas capacidades, dificultades de aprendizaje o que presentan diferencias culturales y lingüísticas. Así, el DUA se convierte en una herramienta esencial para avanzar hacia una educación inclusiva y justa (Alba et al., s.f.).

### ***Principios del DUA***

El DUA se basa en tres principios fundamentales, diseñados para atender la diversidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje:

- **Múltiples formas de representación:** La información debe presentarse de distintas maneras para garantizar que todos los estudiantes puedan acceder al conocimiento. Esto implica el uso de diversos formatos como textos, imágenes, videos, gráficos, diagramas y recursos auditivos, permitiendo atender distintos estilos de aprendizaje y necesidades cognitivas (Meyer et al., 2014). Además, el uso de herramientas tecnológicas juega un papel clave en la accesibilidad, ya que facilita la personalización de los contenidos educativos (Almenara y Pérez, 2016).
- **Múltiples formas de acción y expresión:** Los estudiantes tienen diferentes formas de interactuar con el contenido y demostrar lo que han aprendido. Por ello, es importante proporcionar diversas opciones de expresión, como presentaciones orales, escritas, digitales o a través de la manipulación de objetos. De esta manera, cada estudiante puede elegir la estrategia que mejor se adapte a sus fortalezas y preferencias, promoviendo así la autonomía y el aprendizaje activo (CAST, 2018).
- **Múltiples formas de implicación:** Este principio se enfoca en la motivación y el compromiso de los estudiantes. Se busca generar interés a través de distintas metodologías como

el aprendizaje basado en proyectos, la resolución de problemas y la gamificación, así como mediante la personalización de los contenidos según los intereses y necesidades individuales de los estudiantes (Castellary, 2019). La inclusión digital también es clave en este aspecto, ya que permite un acceso equitativo a la información y fomenta la participación en el aprendizaje (Almenara y Pérez, 2016).

En conclusión, el DUA es un enfoque educativo que no solo responde a la diversidad en las aulas, sino que también transforma la enseñanza en un proceso más dinámico, flexible y accesible para todos los estudiantes. Su aplicación no solo favorece la equidad en la educación, sino que también mejora la calidad del aprendizaje, promoviendo que cada estudiante tenga la oportunidad de desarrollar su máximo potencial.

### **Material didáctico**

El uso de materiales didácticos accesibles es esencial para garantizar un aprendizaje equitativo en entornos inclusivos. En particular, el material háptico desempeña un papel clave en la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad visual, ya que les permite explorar y construir representaciones espaciales a través del tacto. De acuerdo con Moreno-Armella y Elizondo (2017), la interacción con materiales táctiles facilita la formación de imágenes mentales y la interpretación del espacio, promoviendo el aprendizaje. Además, la manipulación de estos recursos favorece el desarrollo del pensamiento lógico y la comprensión de conceptos geométricos abstractos (Martínez y Soto, 2019).

En el contexto educativo colombiano, el uso de materiales y tecnología adaptada está respaldado por el MEN a través del Decreto 2082 de 1996, el cual establece la obligación de proporcionar recursos accesibles para estudiantes con discapacidad, incluyendo formatos en Braille y herramientas tecnológicas de apoyo. El INCI ha desarrollado múltiples estrategias para

garantizar el acceso a materiales educativos adecuados, enfatizando la importancia de la tecnología en la enseñanza inclusiva (Fuentes, 2007b). Investigaciones recientes destacan el impacto positivo de dispositivos como los modelos en relieve, los softwares de geometría dinámica adaptados y las impresiones 3D táctiles, los cuales potencian la comprensión de estructuras espaciales y la resolución de problemas geométricos (López y Gómez, 2021).

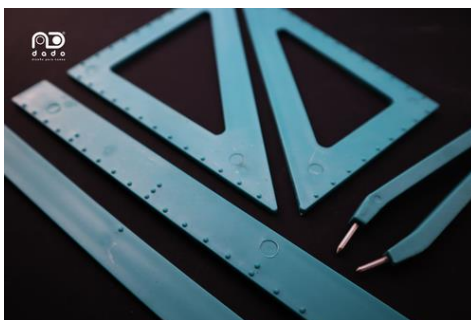
Así, la combinación de materiales hápticos y tecnología especializada no solo fortalece el aprendizaje de la geometría, sino que también fomenta un ambiente inclusivo en el aula. Es fundamental que los docentes adopten estrategias didácticas que integren estos recursos, promoviendo una enseñanza accesible y enriquecedora para todos los estudiantes.

#### ***Ejemplos de materiales hápticos utilizados en la enseñanza de la geometría:***

***Kit Geometría Braille:*** contiene instrumentos como regla, compás, transportador escuadra con marcas en relieve y en sistema Braille, además de figuras geométricas táctiles. Este recurso permite construir y explorar figuras, identificar lados, ángulos y vértices mediante el tacto, favoreciendo el aprendizaje autónomo de conceptos geométricos como congruencia, simetría y área.

#### **Figura 4**

*Kit de geometría para ciegos*

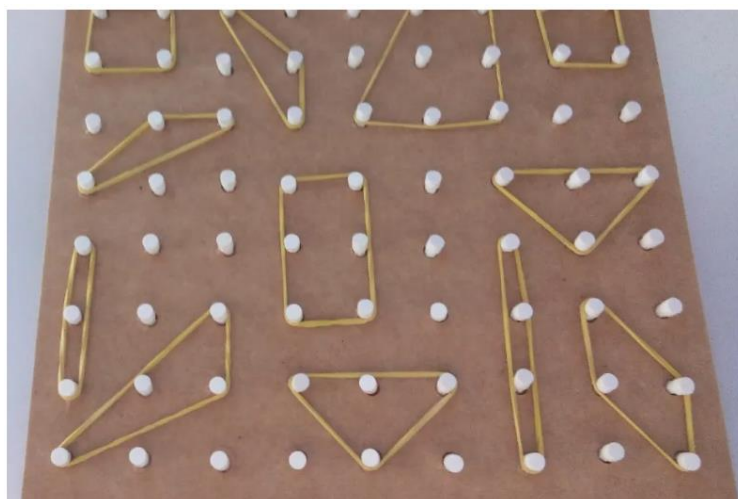


*Nota.* Tomado de dado.com.co. (s.f.).

**Geoplano adaptado:** el geoplano es una herramienta que permite a los estudiantes, construir y explorar figuras geométricas mediante el uso de bandas elásticas sobre una superficie con puntillas. Para estudiantes con discapacidad visual, se han desarrollado geoplanos adaptados con características táctiles que facilitan la percepción de las formas y relaciones espaciales. Estos geoplanos incluyen superficies en relieve y puntillas más prominentes para una mejor manipulación. Según el Instituto Nacional para Ciegos (INCI, 2006), el geoplano adaptado es una herramienta eficaz para la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad visual.

### Figura 5

*Geoplano adaptado para estudiantes con discapacidad visual*



*Nota.* Tomado de Hit Discapacidad (2022).

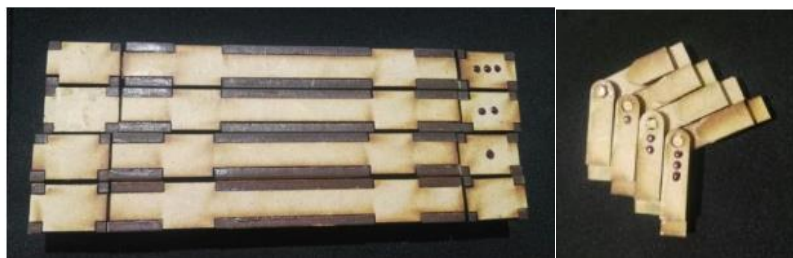
**Modelos Tridimensionales en Relieve:** los modelos tridimensionales en relieve son herramientas fundamentales para que los estudiantes con discapacidad visual puedan explorar y comprender figuras geométricas a través del tacto. Estos modelos, elaborados con materiales resistentes y texturas diferenciadas, representan cuerpos como pirámides, prismas y otros poliedros, facilitando la identificación de sus propiedades y relaciones espaciales. Algunos de

estos modelos han sido diseñados y construidos por estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, como es el caso de **SAGOOS**, **Kit Triralta Supples**, **CriJa** y **TRALC**.

- **SAGOOS**: es un conjunto de estructuras modulares acompañadas de instrumentos básicos, creado para ser utilizado por personas con discapacidad visual. Cada estuche incluye cuatro segmentos, cuatro ángulos, cuatro trabas, una regla y un transportador. Estos elementos permiten construir figuras y explorar conceptos geométricos fundamentales. (González y Canchón, 2018, p. 50)

### Figura 6

*Segmentos y ángulos SAGOOS*



*Nota.* Tomado de Geometría fuera de vista. (2018).

- **Kit Triralta Supples**: está elaborado en madera de calibre medio y compuesto por seis piezas: tres triángulos con distintas texturas (triángulo equilátero, isósceles y escaleno), una pieza denominada *Triralta*, que permite modificar la longitud de sus lados para construir diferentes tipos de triángulos, una regla y un transportador. Este kit facilita la exploración activa de las características de los triángulos y sus posibles clasificaciones (Aldana et al., 2024).

## Figura 7

*Kit Triralta supplies*

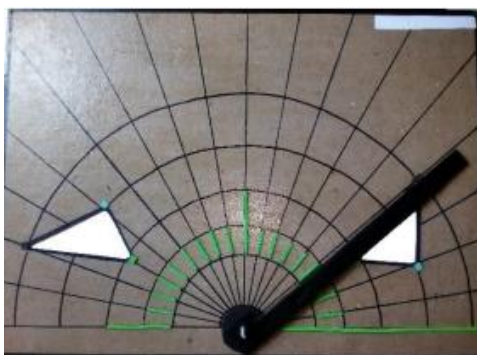


*Nota.* Adaptado de El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría (p. 107), por S. Aldana et al., 2024, en P. Perry (ed.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 26.

- **CriJa:** es un material diseñado para el estudio de transformaciones geométricas, especialmente la rotación. Está conformado por tres tabloides (Tabloide 1, 2 y 3), dos regletas triangulares, dos regletas de medición (Regla CriJa y Plantilla) y una regleta de verificación. Este conjunto permite a los estudiantes identificar y comprender las características esenciales del movimiento rotacional de figuras planas. (Ávila y Varela, 2019, p. 43).

## Figura 8

*Tabloide y regleta de medición CriJa*



*Nota.* Tomado de Moviéndonos en el plano a ciegas (2019), por XXX

- **TRALC (Transportador, Regla, Ángulos, Lados y Congruencia):** es un material diseñado para favorecer la exploración háptica de los criterios de congruencia de cuadriláteros, mediante la medición y construcción de ángulos y segmentos. Está compuesto por un transportador semicircular de  $180^\circ$  con marcas en alto relieve, una regla de 30 cm adaptada al tacto, un conjunto de ángulos con indicaciones en Braille, segmentos extensibles que permiten realizar construcciones variadas y un grupo de cuadriláteros con texturas diferenciadas. Este material integra recursos accesibles que facilitan la manipulación y el estudio de propiedades geométricas por parte de estudiantes con discapacidad visual. (Pineda y Romero, 2021, p. 50).

### Figura 9

*Material didáctico TRALC*



*Nota.* Tomado de una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve (2021).

- **Plantillas y Regletas táctiles:** las plantillas y regletas táctiles constituyen un recurso fundamental para el aprendizaje de la geometría en estudiantes con discapacidad visual. Estas herramientas permiten trazar, medir y explorar líneas, ángulos y figuras geométricas de manera autónoma y precisa. Están diseñadas con marcas en relieve y en sistema Braille, lo que facilita la identificación de medidas y la orientación espacial mediante el tacto. Su uso promueve

el desarrollo de habilidades geométricas, favoreciendo procesos de razonamiento, análisis y construcción de conceptos a partir de la manipulación directa del material.

### Figura 10

*Plantillas y regletas táctiles utilizadas en la enseñanza de la geometría.*

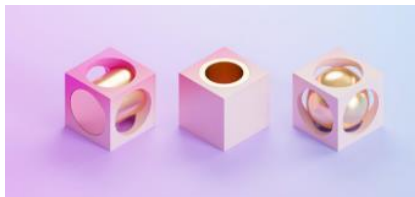


*Nota.* Plantillas y regletas táctiles utilizadas en la enseñanza de la geometría. Tomado de Fundación ONCE (s.f.).

- ***Impresiones 3D de Figuras Geométricas:*** La tecnología de impresión 3D ha facilitado la creación de modelos geométricos personalizados y accesibles. Estas impresiones permiten a los estudiantes con discapacidad visual explorar conceptos geométricos de manera tangible, mejorando su comprensión y retención. Investigaciones recientes destacan el impacto positivo de estos dispositivos en la educación inclusiva (López y Gómez, 2021).

### Figura 11

*Modelos tridimensionales de figuras geométricas impresas en 3D para estudiantes con discapacidad visual*



*Nota.* Tomado de Impresión i3D (s.f.)

## Marco Matemático

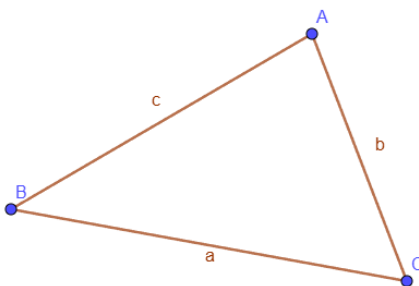
El presente marco matemático expone las definiciones relacionadas con el objeto de estudio de este trabajo de grado. En él se presentan las definiciones de triángulo, congruencia de segmentos, congruencia de ángulos y congruencia de triángulos, así como los criterios de congruencia establecidos por Moise y Downs (1986), con sus debidas representaciones simbólicas y gráficas.

## Definiciones

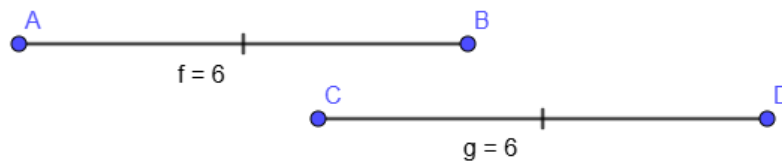
**Triángulo:** dados tres puntos no colineales, la unión de los tres segmentos cuyos extremos son los puntos es un triángulo. Los puntos son llamados vértices del triángulo y los segmentos, lados del triángulo.

## Figura 12

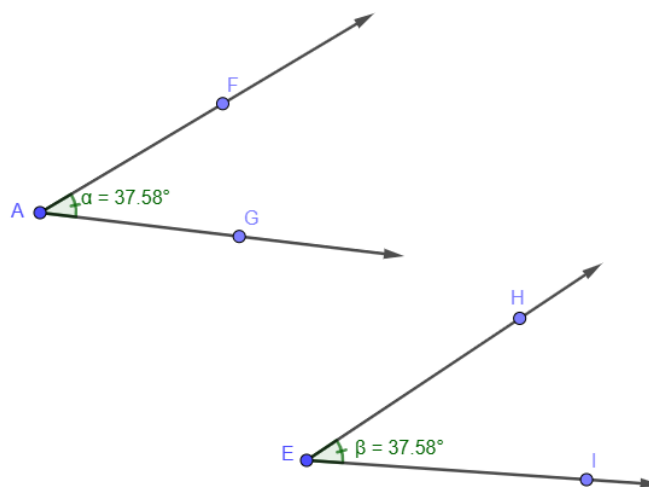
*Triángulo*



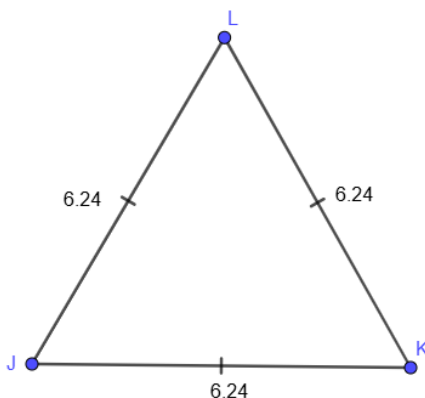
**Congruencia de segmentos:** dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.

**Figura 13***Segmentos congruentes*

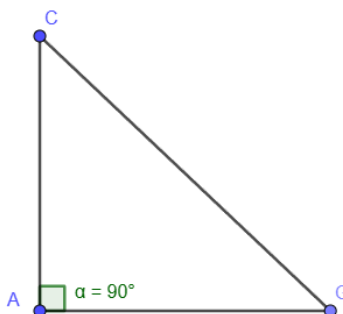
**Congruencia de ángulos:** dos ángulos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.

**Figura 14***Ángulos congruentes*

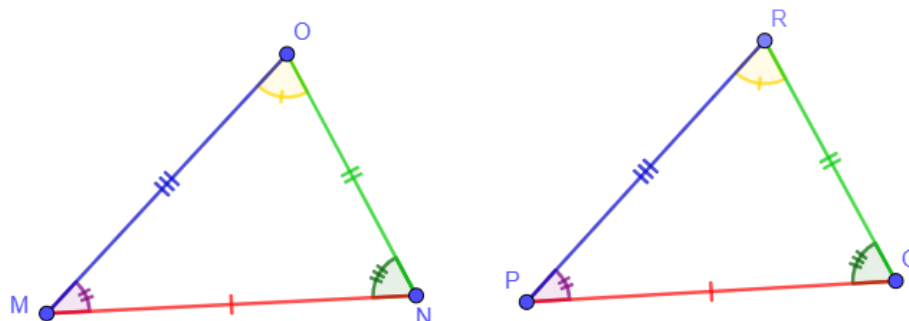
**Triángulo equilátero:** un triángulo es equilátero si y solo si todos sus lados son congruentes.

**Figura 15***Triángulo equilátero*

**Triángulo rectángulo (cateto e hipotenusa):** Dado  $\triangle CAG$  con  $\angle CAG$  recto, el  $\overline{CG}$  quien es opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los  $\overline{CA}$  y  $\overline{AG}$  son catetos.

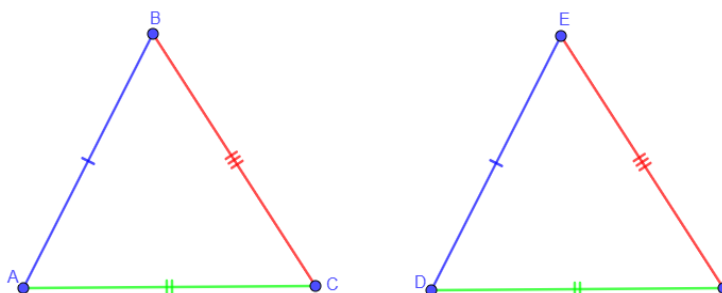
**Figura 16***Triángulo rectángulo*

**Congruencia de triángulos:** dos triángulos se consideran congruentes si todos sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

**Figura 17***Triángulos congruentes*

**Criterios de congruencia de los triángulos:** según Moise y Downs (1986), los principales criterios de congruencia son los siguientes:

- **Criterio Lado-Lado-Lado (LLL):** si en dos triángulos todos sus lados correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son congruentes. De otra forma, dados los  $\Delta ABC$  y  $\Delta DEF$ . Si  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  y  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  y  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  entonces  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

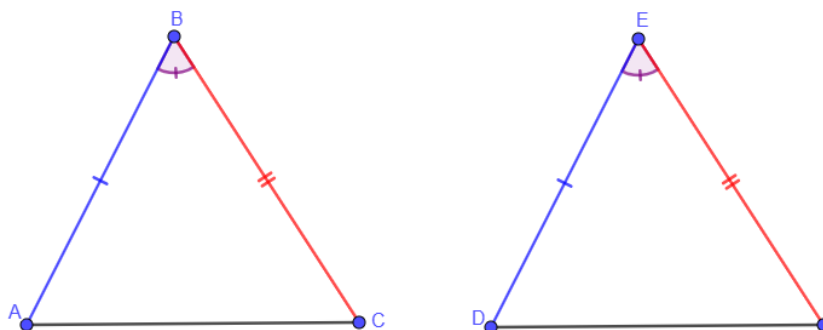
**Figura 18***Criterio de congruencia lado-lado-lado*

- **Criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL):** si en dos triángulos un lado, el ángulo comprendido y el lado adyacente correspondiente son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

De otra forma, dados los  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . Si  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  y  $\angle ABC \cong \angle DEF$  y  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  entonces  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

**Figura 19**

*Criterio lado-ángulo-lado*

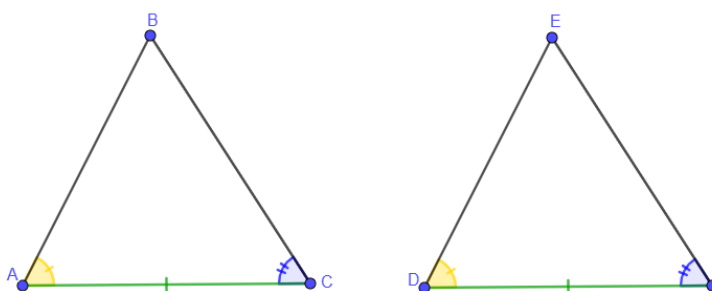


- **Criterio Ángulo-Lado-Ángulo (ALA):** si en dos triángulos dos ángulos y el lado comprendido correspondiente son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

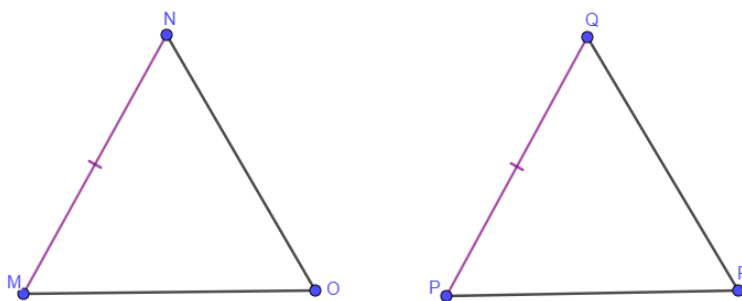
De otra forma, dados los  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ . Si  $\angle BAC \cong \angle EDF$  y  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  y  $\angle ACB \cong \angle DFE$  entonces  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

**Figura 20**

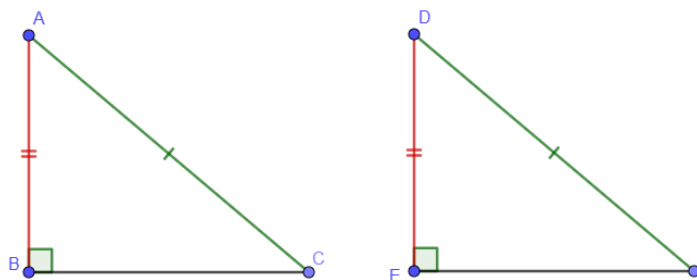
*Criterio ángulo-lado-ángulo*



- **Criterios Equilátero lado:** si dos triángulos equiláteros tienen un par de lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes. De otra forma, dados los  $\Delta MNO$  y  $\Delta PQR$  equiláteros. Si  $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$  entonces  $\Delta MNO \cong \Delta PQR$ .

**Figura 21***Criterio equilátero - lado*

- **Criterio Hipotenusa - cateto:** si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de los catetos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes. De otra forma, dados  $\Delta ABC$  y  $\Delta DEF$  rectángulos y  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  y  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  entonces  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

**Figura 22***Criterio Hipotenusa-cateto*

## Conjeturación

La conjeturación es el proceso de formular proposiciones o afirmaciones basadas en el establecimiento de patrones y relaciones en casos específicos, sin disponer de una prueba formal en ese momento. Este proceso permite a los estudiantes plantear posibles verdades dentro de un sistema teórico, sentando las bases para el desarrollo del pensamiento deductivo y la posterior validación o demostración de sus ideas. Según Samper y Molina (2013), conjeturar fomenta el reconocimiento de propiedades invariables en diferentes figuras y situaciones geométricas, fortaleciendo la comprensión de las relaciones entre elementos geométricos.

En la enseñanza de la geometría, la conjeturación impulsa el pensamiento y la argumentación matemática, invitando a los estudiantes a explorar y formular hipótesis, promoviendo así un aprendizaje activo y reflexivo. Plazas y Samper (2013) destacan que este proceso no solo facilita la construcción de significado en torno a conceptos geométricos, sino que también desarrolla habilidades críticas para el razonamiento lógico y la justificación matemática.

El proceso de conjeturar constituye una actividad central en el razonamiento matemático, especialmente dentro de la resolución de problemas geométricos. Según Plazas y Samper (2013), la conjeturación emerge cuando el estudiante, a partir de la interacción con una situación problemática, identifica regularidades, formula hipótesis y busca argumentos que respalden o refuten sus ideas. Este proceso involucra diversas acciones intelectuales que permiten avanzar de la experiencia concreta hacia la formulación de enunciados generales de carácter geométrico. Estas acciones son:

La exploración, esta consiste en la construcción e interpretación de representaciones gráficas, materiales o teóricas con el fin de reconocer patrones o relaciones entre los objetos

matemáticos involucrados. Para Samper y Molina (2013), la exploración puede realizarse en dos planos: (a) en el mundo de los fenómenos, donde el estudiante manipula objetos o representaciones empíricas para identificar propiedades observables, y (b) en el mundo de la teoría, en el que se analizan enunciados o definiciones para establecer vínculos conceptuales que orienten su búsqueda de regularidades.

La visualización, por su parte, consiste en percibir e interpretar las propiedades geométricas presentes en una representación. Esto implica reconocer elementos esenciales de las figuras, establecer relaciones entre ellos y vincular lo observado con imágenes conceptuales previamente construidas. De acuerdo con Samper y Molina (2013), la visualización no solo hace posible identificar propiedades como paralelismo, congruencia o perpendicularidad, sino que también permite anticipar configuraciones o comportamientos geométricos que no son evidentes a simple vista.

La generalización corresponde al paso en el cual el estudiante identifica propiedades invariantes que se mantienen más allá del caso particular analizado durante la exploración o la visualización. Estas invariantes se expresan mediante enunciados de naturaleza geométrica que capturan la regularidad descubierta y permiten avanzar hacia formas más abstractas de razonamiento matemático (Plazas y Samper, 2013).

Finalmente, la verificación consiste en justificar las conjeturas formuladas. Este proceso implica examinar las condiciones que sustentan el enunciado propuesto y valorar su validez, con el propósito de convencerse y convencer a otros. Como señalan Samper y Molina (2013), esta acción constituye un acercamiento a la demostración, en tanto involucra argumentación lógica y uso de propiedades geométricas que apoyan o debilitan la conjetura.

Desde este marco teórico, la conjeturación es entendida como un proceso dinámico que articula exploración, visualización, generalización y verificación, permitiendo a los estudiantes construir significado alrededor de las relaciones geométricas y desarrollar formas superiores de razonamiento matemático.

## Metodología

### Descripción General

Este trabajo de grado se enmarca en el enfoque de análisis didáctico propuesto por Gómez (2002), entendido como la actividad que realiza el profesor o investigador para diseñar, poner en práctica y evaluar unidades o secuencias de enseñanza. Este enfoque propone una estructura compuesta por cuatro análisis interrelacionados: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, que permiten abordar de manera integral el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático.

El *análisis de contenido* consiste en identificar y organizar los conceptos, propiedades y relaciones que conforman el objeto matemático que se pretende enseñar, así como su representación gráfica y simbólica. En el marco de este trabajo, dicho análisis correspondió al Marco Matemático, en el cual se determinó el objeto de estudio: los triángulos y la congruencia. Para ello, se revisaron definiciones y criterios de congruencia (LLL, LAL y ALA), con sus respectivas representaciones gráficas y simbólicas, a partir de los conocimientos previos de la autora y los planteamientos de la Geometría Moderna de Moise (1964). Este análisis permitió establecer los contenidos matemáticos que serían puestos en juego en las tareas.

El *análisis cognitivo* se enfoca en identificar los procesos matemáticos que se busca promover en los estudiantes. A partir de ello, se formulan los objetivos de aprendizaje y se analizan las posibles dificultades y errores que podrían surgir durante la implementación. En este trabajo, este análisis se concretó en el diseño de las tareas “Identificando triángulos congruentes” y “Construye su gemelo”. Estas se elaboraron atendiendo a las posibles dificultades de los

estudiantes con discapacidad visual, y previendo las acciones y razonamientos esperados durante el desarrollo de la clase.

El ***análisis cognitivo*** se orienta a identificar los procesos matemáticos que se busca promover en los estudiantes, así como a formular los objetivos de aprendizaje y anticipar posibles dificultades y errores que se pueden presentar al usar el material y desarrollar las tareas propuestas. En este trabajo, se priorizan procesos como la exploración, la comparación y la conjeturación, los cuales resultan fundamentales para la construcción del concepto de congruencia de triángulos.

A partir de la identificación de dichos procesos, se diseñaron las tareas *Identificando triángulos congruentes* y *Construye su gemelo*, las cuales buscan favorecer la construcción progresiva de la noción de congruencia y el establecimiento de sus criterios, por medio de la exploración y comparación usando el material, previendo las acciones y dificultades que podrían emerger durante el desarrollo de la clase.

El ***análisis de instrucción*** se centra en el diseño, organización y secuenciación de las actividades que conforman la unidad didáctica, considerando los recursos, las estrategias y las interacciones que posibilitan el aprendizaje. En este trabajo, se concretó en la secuencia de tareas, diseño y construcción del material didáctico *Congru Kit*, conformado por triángulos, segmentos y ángulos imantados, una base imantada y segmentos graduables. El material se diseñó bajo principios de atención háptica y accesibilidad, garantizando que los estudiantes con discapacidad visual pudieran explorar y manipular de manera autónoma cada componente.

Además, se elaboraron las cartillas del docente y del estudiante, en las que se definieron los propósitos, preguntas guía, posibles dificultades y orientaciones pedagógicas para el desarrollo de las tareas.

Finalmente, el *análisis de actuación* corresponde a la fase de implementación y reflexión sobre el desarrollo de las tareas y la interacción de los estudiantes con el material. En esta etapa se realizó la prueba piloto de *Congru Kit* con dos estudiantes con discapacidad visual, observando sus estrategias de exploración, los errores cometidos y los logros alcanzados. Posteriormente, se efectuó un análisis reflexivo sobre la pertinencia del material, la claridad de las instrucciones, la validez de las tareas y las posibles mejoras.

## **Población**

La prueba piloto se desarrolló en el *Colegio Gran Yomasa*, una institución de educación básica y media, pública, ubicada en el barrio Gran Yomasa, en la localidad quinta de Usme, al sur de Bogotá. Su dirección es Calle 81C Sur No. 2 Bis – 00 Este, y atiende población escolar proveniente de diferentes sectores de la localidad, incluyendo estudiantes con discapacidad visual.

El colegio cuenta con un Proyecto Educativo Institucional (PEI) que promueve la inclusión y la equidad educativa, garantizando la participación de todos los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La implementación del material se realizó con dos estudiantes, de la jornada de la tarde. Cabe aclarar que la participación de los estudiantes en esta prueba piloto se llevó a cabo con los permisos y consentimientos correspondientes (Anexo 4), otorgados tanto por la institución educativa como por las familias, garantizando el cumplimiento de consideraciones éticas relacionadas con la investigación educativa:

- **Estudiante 1**, estudiante de grado séptimo, de 17 años. Nació con ceguera total y ha estudiado desde los primeros años en el Colegio Gran Yomasa. Vive también en la zona de influencia de la institución. Aunque las matemáticas no son su asignatura favorita, demuestra interés y habilidades para resolver problemas cuando puede apoyarse en materiales manipulativos y concretos.
- **Estudiante 2**, estudiante de grado quinto, de 13 años. Nació con ceguera total y ha cursado toda su formación en esta institución. Vive en la zona de influencia del colegio. Es una estudiante participativa, con buena disposición y una actitud positiva frente al

aprendizaje, especialmente cuando las actividades involucran la exploración táctil y la experimentación.

Ambos estudiantes forman parte del grupo de inclusión del colegio y participaron voluntariamente en la prueba piloto del material, contando con el acompañamiento de la profesora de apoyo en educación especial.

## Material Congru Kit

### ¿Qué es Congru Kit?

*Congru Kit*, la cartilla para el docente ([Anexo 1](#)), y la cartilla del estudiante ([Anexo 2](#)) surge como respuesta a la necesidad de contar con un recurso accesible para estudiantes con discapacidad visual. A través de este, los estudiantes pueden explorar, medir, comparar y construir triángulos, favoreciendo así reconocer la definición de congruencia de triángulos y algunos de los criterios de congruencia de triángulos.

El diseño de *Congru Kit* se fundamenta en la atención háptica, para que con esta interacción los estudiantes con discapacidad visual puedan explorar, comparar y construir triángulos congruentes.

*Congru Kit* no solo busca atender a la población con discapacidad visual, sino que también promueve dinámicas de aula donde todos los estudiantes, con y sin discapacidad, pueden interactuar con los mismos objetos, construir y validar algunos criterios de congruencia.

### Historia del Material

La construcción de *Congru Kit* pasó por diferentes fases de diseño y experimentación hasta llegar al prototipo final:

**Primer prototipo:** contaba con dos fichas, cada una formada de dos segmentos que estaban unidos por un tornillo, que funcionaba como articulación. Aunque permitía cierto grado de manipulación, la movilidad de las piezas provocaba que se desajustaran los ángulos que se formaban entre ellos, lo que dificultaba la construcción precisa de triángulos.

**Figura 23***Primer prototipo*

*Nota.* Diseño propio realizado por la autora del trabajo de grado.

***Segundo prototipo:*** a partir de las dificultades del primero, se elaboró un nuevo diseño en cartón piedra. Este incluía tres triángulos completos, seis segmentos y seis ángulos en cartón piedra reforzados con una lámina imantada, además de una base imantada delgada. Con este prototipo se lograba el objetivo de construir triángulos por medio de piezas y de esta manera identificar las condiciones mínimas necesarias para construir un triángulo congruente a uno dado. Aunque aún presentaba limitaciones en precisión, resistencia y durabilidad.

**Figura 24***Segundo prototipo*

*Nota.* Diseño propio realizado por la autora del trabajo de grado.

**Prototipo final:** Tras los aprendizajes obtenidos en las fases anteriores, se elaboró el material didáctico *Congru Kit* en acrílico, un material más resistente y preciso que está compuesto por distintos elementos que permiten la exploración y verificación de propiedades de los triángulos y construcción de triángulos congruentes. Cada elemento cumple un papel específico en el desarrollo de las tareas.

### **Composición *Congru Kit***

El material *Congru Kit* está compuesto por distintos elementos que permiten la exploración y verificación de los criterios de congruencia de triángulos. Cada uno de ellos cumple un papel específico en el desarrollo de las tareas propuestas.

### **Figura 25**

*Congru Kit*



### **Figuras T1, T2, T3, T4, T5**

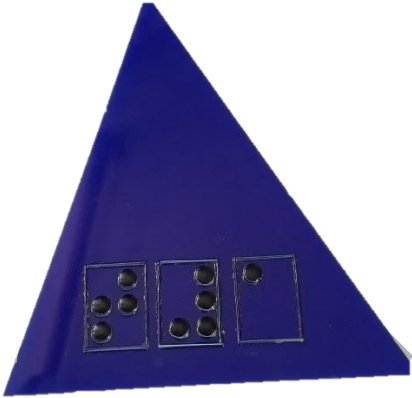
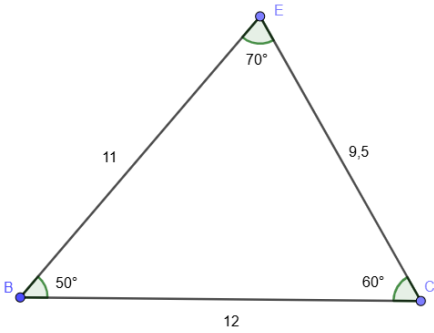
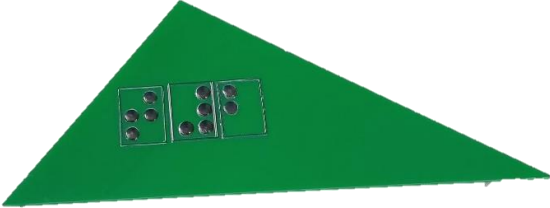
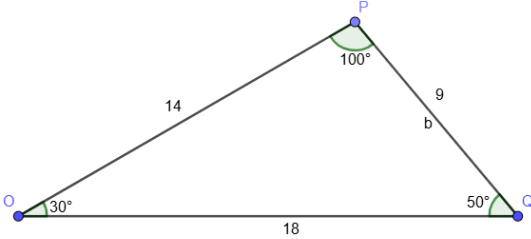
Estas figuras representan diferentes tipos de triángulos. Están hechos de acrílico, de 3 mm de grosor. Cada uno de ellos tiene unas medidas específicas y está elaborado en diferentes colores, pensando no solo en la población con discapacidad visual. Cada triángulo, en sus dos caras tiene escrito en Braille su nombre.

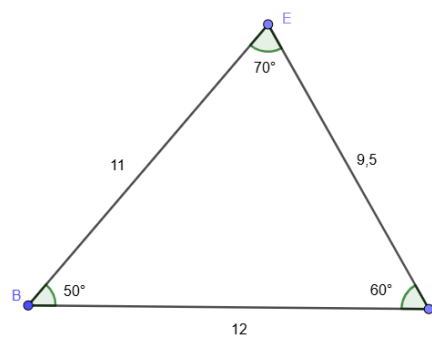
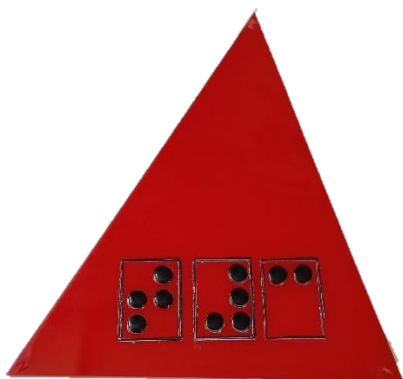
Estas figuras permiten la exploración de lados y ángulos, y sirven como modelos para comparar y verificar congruencias.

**T1, T2, T3**, se utilizan en la Tarea 1 (comparación y medición). **T4, T5**, se utilizan en la Tarea 2 (construcción del gemelo).

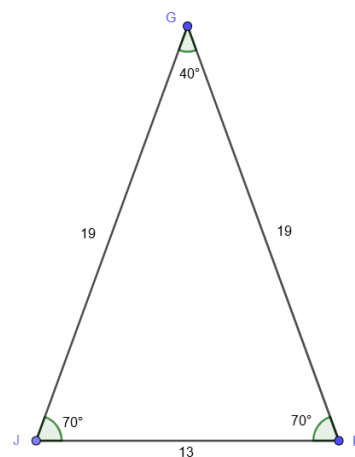
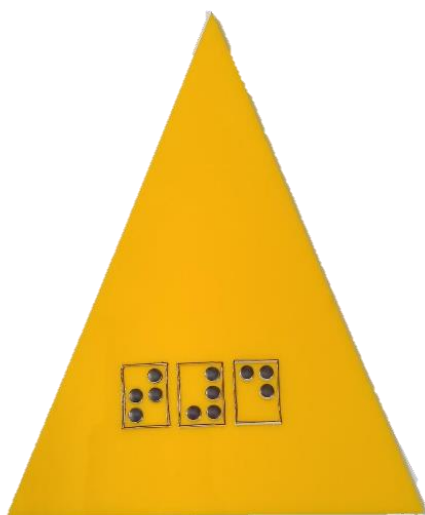
### Tabla 1

*Descripción T1, T2, T3, T4, T5*

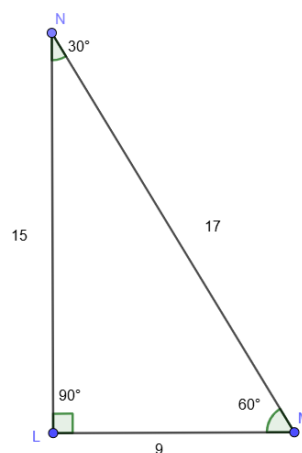
Ficha	Descripción
	 <p>En Braille tiene su nombre: T1 Triángulo cuyas medidas son: Lados: 9.5cm, 11cm y 12 cm Ángulos: 50°, 60° y 70°</p>
	 <p>En Braille tiene su nombre: T2 Triángulo cuyas medidas son: Lados: 9cm, 14cm y 18 cm Ángulos: 30°, 50° y 100°</p>



En Braille tiene su nombre: T3  
Triángulo cuyas medidas son:  
Lados: 9.5cm, 11cm y 12 cm  
Ángulos: 50°, 60° y 70°



En Braille tiene su nombre: T4  
Triángulo cuyas medidas son:  
Lados: 13cm, 19cm y 19 cm  
Ángulos: 40°, 70° y 70°



En Braille tiene su nombre: T5

Triángulo cuyas medidas son:

Lados: 9cm, 15cm y 17 cm

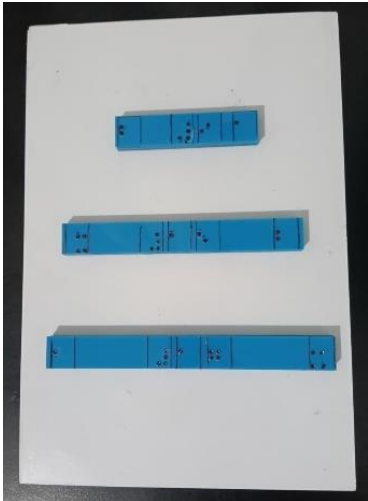

Ángulos: 30°, 60° y 90°

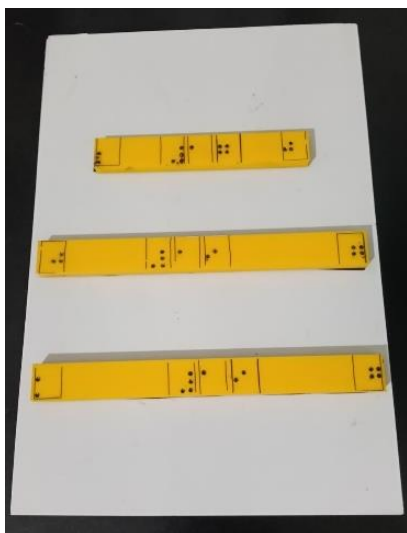
---

### *Segmentos imantados*

Son barras rectas de diferentes longitudes que representan los lados de los triángulos T2, T4 y T5, cada una nombrada con una letra, la cual está marcada en Braille junto con su medida en centímetros. Estas representan los lados de los triángulos al momento de construir figuras nuevas. Cada segmento tiene un ancho de 2 cm y una altura de 9 mm.

**Tabla 2***Descripción de los segmentos*

Ficha	Descripción
	<p>Sus longitudes son:</p> <p>9cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice A y en la esquina izquierda dice B</p> <p>15cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice B y en la esquina izquierda dice X.</p> <p>17cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice A y en la esquina izquierda dice X.</p>
	<p>Sus longitudes son:</p> <p>9cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice P y en la esquina izquierda dice R</p> <p>14cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice P y en la esquina izquierda dice Q.</p> <p>18cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice Q y en la esquina izquierda dice R.</p>



Sus longitudes son:

13cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice K y en la esquina izquierda dice J

19cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice G y en la esquina izquierda dice J.

19cm, en la mitad está en Braille escrita la medida. En la esquina derecha dice K y en la esquina izquierda dice G.

### *Ángulos imantados*

Es una pieza, con forma de punta que termina en un arco, por el lado en punta, se representa la medida de un ángulo en grados. Cada una nombrada con una letra la cual está marcada en Braille junto con su medida. Permite graficar un ángulo con la medida dada. Cada ángulo tiene una altura de 6mm.

### **Tabla 3**

#### *Descripción de los ángulos*

Ficha	Descripción
Three blue magnetic angle pieces are shown. The top one is a 30-degree angle, the middle one is a 60-degree angle, and the bottom one is a 90-degree angle. Each piece has Braille markings and a letter (X, A, B respectively) next to the degree symbol.	<p>Sus amplitudes son:</p> <p>30°, que están escritos en Braille junto con la letra X.</p> <p>60°, que están escritos en Braille junto con la letra A.</p> <p>90°, que están escritos en Braille junto con la letra B.</p>

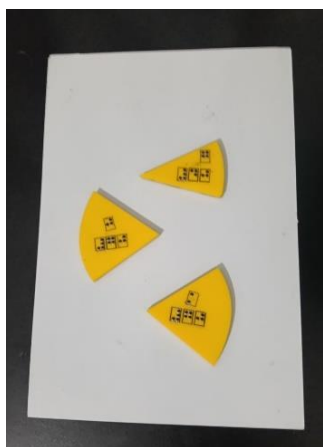


Sus amplitudes son:

30°, que están escritos en Braille junto con la letra Q.

50°, que están escritos en Braille junto con la letra R.

100°, que están escritos en Braille junto con la letra P.



Sus amplitudes son:

40°, que están escritos en Braille junto con la letra K.

70°, que están escritos en Braille junto con la letra J.

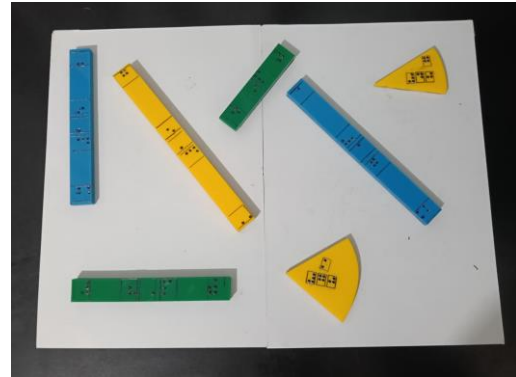
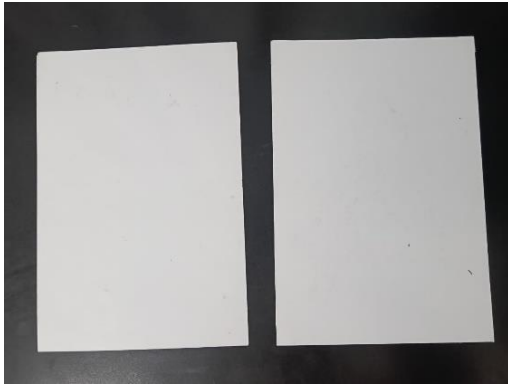
70°, que están escritos en Braille junto con la letra G.

### ***Base imantada***

Es una superficie magnética sobre la cual se fijan los segmentos y ángulos imantados, que permite armar triángulos con las piezas y mantenerlos en su lugar mientras se verifican las medidas de otro lados o ángulos, o se compara con un triángulo de acrílico por medio de la superposición.

**Figura 26**

*Base de lámina galvanizada*

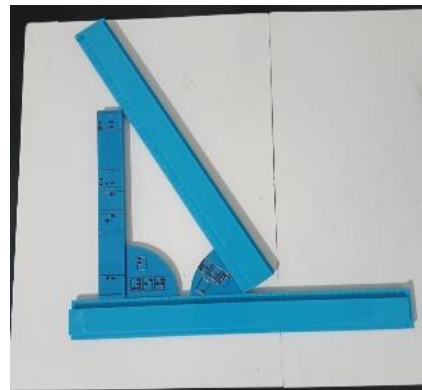


*Segmentos complementarios (3 unidades)*

Son piezas que tienen 20 cm de longitud y sirven para conseguir segmentos que se ajusten a las construcciones realizadas.

**Figura 27**

*Modo de uso de segmentos complementarios*



## Tareas

### Tarea 1: Identificando triángulos congruentes

**Propósito:** reconocer los triángulos que son congruentes y las características necesarias para que esto ocurra.

#### *Preguntas guía sugeridas / Instrucciones*

1. Entregar a los estudiantes los triángulos T1, T2, T3, con el fin de tener una primera aproximación al material y establecer alguna relación entre los triángulos.

2. Cuestionar si existe alguna relación entre los triángulos dados. Se espera que los estudiantes identifiquen que las figuras son triángulos y que hay dos que son congruentes.

- ¿Qué similitudes y diferencias encuentras?

3. Solicitar medir los lados y ángulos, se sugiere que, dependiendo de la habilidad de escritura del estudiante, se ayude a registrar datos o lo realicen ellos. En la cartilla del docente (Anexo 1) /Pag 7 se encuentra el instructivo para el uso de la regla y transportador.

4. Comparar los resultados obtenidos. Se sugiere cuestionar lo siguiente:

¿Qué descubres al comparar sus longitudes?

¿Qué hallazgos obtienes al comparar las amplitudes de los ángulos?

¿Qué sucede con T1 y T3? ¿Qué pasa con T2?

5. Guiar al estudiante hacia la construcción de la noción de congruencia como igualdad de lados y ángulos.

¿Qué características deben tener dos triángulos para que sean congruentes?

### ***Posibles dificultades***

A continuación, se presentan algunas dificultades y errores previstos para el desarrollo de la tarea 1, se fundamentan en la literatura en educación matemática y en experiencias de aula, las cuales reportan problemas frecuentes en el uso de instrumentos de medición y en la comprensión de la congruencia de triángulos, así como su confusión con la semejanza Duval (1998).

### ***Asociadas al uso de la regla***

- a) No identificar el cero de la regla como punto de inicio de la medición.
- b) Medir mal por no alinear correctamente el lado del triángulo con la regla.
- c) Contar mal las líneas en relieve.

### ***Asociadas al uso del transportador***

- a) Colocar el vértice del ángulo en una posición incorrecta del transportador.
- b) No alinear uno de los lados del ángulo con la base recta, lo que da una medida errónea.
- c) Dificultad para ubicar los valores intermedios entre las marcas principales (30°, 60°, 90°)

### ***Errores en la interpretación de resultados***

- a) Concluir que no son congruentes por variaciones mínimas generadas por errores de medición.
- b) Considerar que basta con comparar solo los lados o solo los ángulos y no ambos.
- c) Confundir la noción de semejanza con la de congruencia.

## **Tarea 2: Construye su gemelo**

**Propósito:** identificar las condiciones mínimas necesarias para construir un triángulo congruente a uno dado.

### ***Preguntas guía sugeridas / Instrucciones***

1. Entregar el triángulo T4 a los estudiantes para que lo exploren y lo utilicen como modelo en la construcción del gemelo.

2. Solicitar medir los lados y ángulos de T4, entregar el anexo 1. Se sugiere que, dependiendo de la habilidad de escritura del estudiante, se ayude a registrar datos o lo realicen ellos. En la cartilla del docente se encuentra el instructivo para el uso de la regla y transportador.

3. Pedir que los estudiantes elijan tres piezas del material (segmentos o ángulos imantados de T4) con las cuales intentarán construir un triángulo congruente.

- ¿Qué piezas decides usar y por qué?

4. Solicitar que armen el triángulo en la base imantada utilizando las piezas seleccionadas.

5. Completar el triángulo de ser necesario con los segmentos graduables.

6. Verificar la construcción superponiendo el triángulo dado (T4) sobre el armado en la base.

- ¿Encajan perfectamente? ¿Por qué sí o por qué no?

7. Guiar en la identificación de las condiciones que permiten asegurar la congruencia.

- ¿Qué aprendiste sobre las combinaciones que determinan un triángulo congruente?

8. Repetir este mismo proceso con los triángulos T2 y T5 para validar las conclusiones en otros casos.

### ***Posibles dificultades***

A continuación, se presentan algunas dificultades y errores previstos en la tarea 2, se fundamentan en la literatura en educación matemática y en experiencias de aula, las cuales reportan problemas frecuentes en el uso de instrumentos de medición, en la manipulación de material didáctico y en la construcción de triángulos congruentes Duval (1998).

### ***Asociadas al uso del material***

- a) No fijar bien las piezas en la base, ocasionando que el triángulo quede inestable.
- b) Dificultades para encajar los segmentos y ángulos debido a la falta de coordinación motriz fina.
- c) No cerrar correctamente el triángulo con los segmentos graduables.

### ***Errores en la construcción del triángulo congruente***

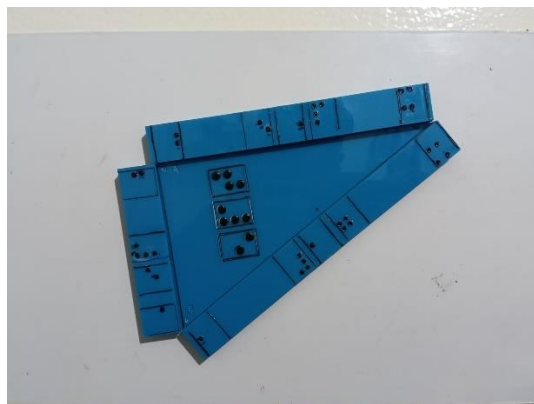
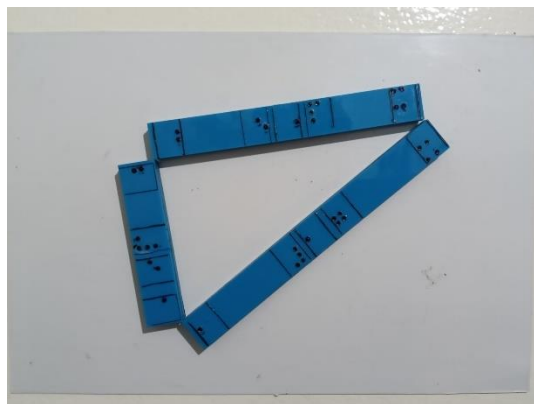
- a) Selección ineficiente de piezas: Elegir combinaciones que no determinan un único triángulo. (ejemplo: AAA)
- b) Usar piezas en el orden incorrecto: No respetar la secuencia lado-ángulo-lado o lado-lado-ángulo. Es importante que el docente guíe este proceso.

Al igual que en la tarea 1 se pueden presentar las dificultades asociadas al uso de la regla y transportador.

## Posibles criterios por realizar

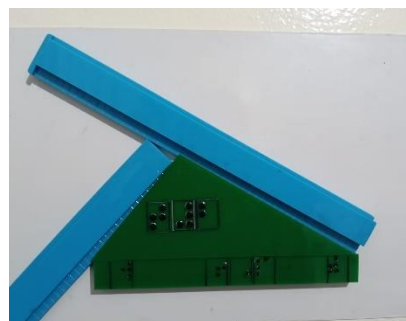
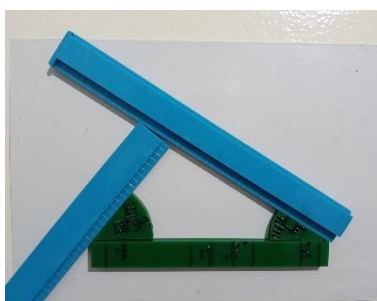
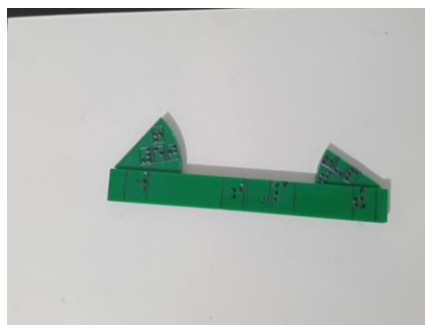
**Figura 28**

*Criterio lado-lado-lado*



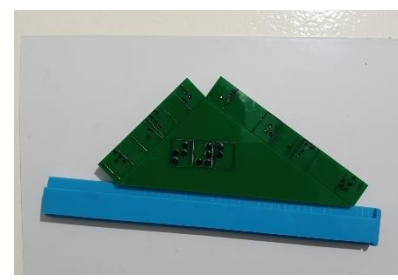
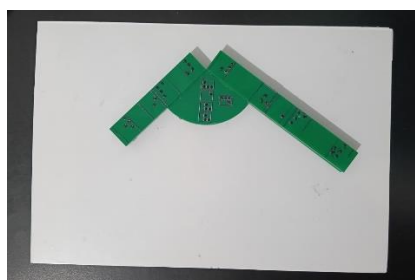
**Figura 29**

*Criterio ángulo-lado-ángulo*



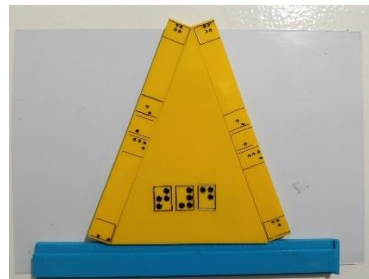
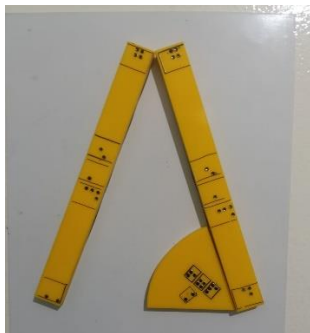
**Figura 30**

*Criterio lado-ángulo-lado*



**Figura 31**

*Criterio lado-lado-ángulo*



## Análisis

En este capítulo se presenta la descripción de la implementación de las tareas “Identificando triángulos congruentes y construye su gemelo” utilizando el material *Congru Kit*, aplicado el día 28 de octubre de 2025 en el aula de educación especial del Colegio Gran Yomasa; acompañados por Camila Gutiérrez autora de este trabajo de grado, presenta primero la descripción de la sesión con el estudiante 1 y luego la sesión con la estudiante 2, para luego presentar el análisis.

### Descripción de las intervenciones

#### *Intervención con el estudiante 1*

La primera intervención se realizó con el estudiante 1, la sesión inició con la presentación de la profesora Camila Gutiérrez, seguida de la entrega de la cartilla en Braille. El estudiante manifestó no tener un buen desempeño en la lectura y escritura en Braille, por lo que la docente decidió leer en voz alta la introducción de la cartilla.

Posteriormente, se presentaron los elementos de *Congru Kit*, y se introdujo la Tarea 1.

#### *Fragmento 1*

**Profesora:** Explora este triángulo. ¿Qué encuentras?

**Estudiante 1:** En el primero... siento que todos los lados son diferentes.

**Profesora:** Ahora explora este segundo.

**Estudiante 1:** Este... es más grande que el primero.

**Profesora:** Y este último, ¿qué notas?

**Estudiante 1:** Todos tienen el mismo grosor.

**Profesora:** Te daré dos triángulos a la vez. Compáralos. ¿Cuál es más grande?

**Estudiante 1:** El triángulo 3 es el más grande.

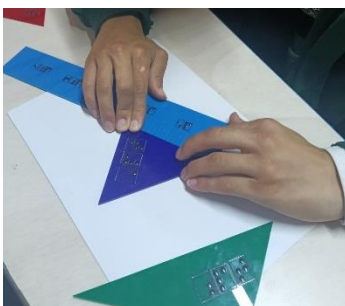
**Profesora:** ¿Y entre T1 y T3 qué encuentras?

**Estudiante 1:** Se parecen... Pero no diría que son iguales.

Luego de esta primera exploración, la profesora le explicó cómo utilizar la regla adaptada y lo guio en el proceso de medición de los lados de los triángulos.

### Figura 32

*Midiendo con la regla*



Dado que el estudiante no escribía los resultados, la profesora tomó nota de las medidas obtenidas

### Tabla 4

*Resultados de medición de lados*

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
T1	9.5	11	12
T2	18	9	14
T3	9.5	11	12

Posteriormente, la maestra le da las instrucciones al estudiante de cómo medir los ángulos de cada triángulo con el transportador en relieve.

**Figura 33***Midiendo con el transportador*

Obteniendo los siguientes resultados:

**Tabla 5***Resultados de medición de ángulos*

Triángulo	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3
T1	60°	70°	50°
T2	30°	50°	100°
T3	60°	70°	50°

***Fragmento 2***

**Profesora:** (La profesora realiza la lectura de los resultados) ¿Qué puedes decir al comparar los resultados?

**Estudiante 1:** Los lados de T1 y T3 miden igual.

**Profesora:** Interesante, ¿qué podría significar eso?

**Estudiante 1:** Que son... idénticos.

**Profesora:** ¿Qué más podríamos decir sobre las medidas tomadas?

**Estudiante 1:** ... los ángulos de T1 y T3 tienen las mismas medidas

**Profesora:** ¿Notas entonces alguna relación entre T1 y T3?

**Estudiante 1:** Los triángulos son iguales.

**Profesora:** ¿Qué significa eso para ti?

**Estudiante 1:** Que ambos... son congruentes.

**Profesora:** ¿Cómo escribirías esa conclusión?

**Estudiante 1:** Dos triángulos son congruentes cuando sus lados y sus ángulos miden igual.

Ante la pregunta de la docente sobre las características que deben tener dos triángulos congruentes, la respuesta del estudiante permite evidenciar que se llegó a lo esperado con esta tarea (fragmento 2).

En la Tarea 2, la docente le presentó el triángulo T5 y le pidió medir sus lados y ángulos.

### Figura 34

*Midiendo los lados de T5*



### Tabla 6

*Resultados de medición T5*

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
T5	16	18	9
	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3
	90°	60°	30°

Luego, se pusieron sobre la mesa los tres segmentos y tres ángulos imantados correspondientes a T5. El estudiante debía escoger tres de estas piezas para construir un triángulo congruente al dado. En el primer intento eligió tres ángulos, por lo que usó los segmentos complementarios, primero puso un segmento complementario en la base y sobre acomodó dos de los ángulos escogidos, luego con ayuda de otro segmento complementario cerró un lado del triángulo y acomodó el ángulo faltante; por último, finalizó la construcción con ayuda del tercer segmento complementario (Figura 28, parte a). El triángulo construido fue más grande que T5 por lo que al verificar la construcción y sobreponer el triángulo no encajó. (Figura 28, parte b)

### Figura 35

*Construcción del criterio ángulo-ángulo-ángulo*



a



b

En un segundo intento seleccionó los tres lados, unió dos de ellos en un extremo, tomó el tercer lado e intentó cerrar la construcción fue necesario que la docente ayudara a coincidir exactamente las esquinas de los segmentos. Finalmente comparó la construcción y el T5 y los triángulos coincidieron perfectamente.

**Figura 36**

*Construcción del criterio lado-lado-lado*



Posteriormente, probó diferentes combinaciones como lado-ángulo-lado, en esta construcción el estudiante decidió unir los dos segmentos primero y luego acomodar el ángulo entre los segmentos, cerró su construcción con uno de los segmentos complementarios (Figura 30, parte a), comparó la construcción y el T5 y verificó que coincidían al sobreponerlo (Figura 30, parte b). Con la combinación lado-lado-ángulo, decidió acomodar primero el segmento AX y el ángulo B luego tomó el segmento BX y lo unió al segmento AX (Figura 31, parte a), obteniendo así un triángulo rectángulo más pequeño que T5 por lo que al realizar la verificación el triángulo no encajó. (Figura 31, parte b).

**Figura 37**

*Construcción del criterio lado-ángulo-lado*



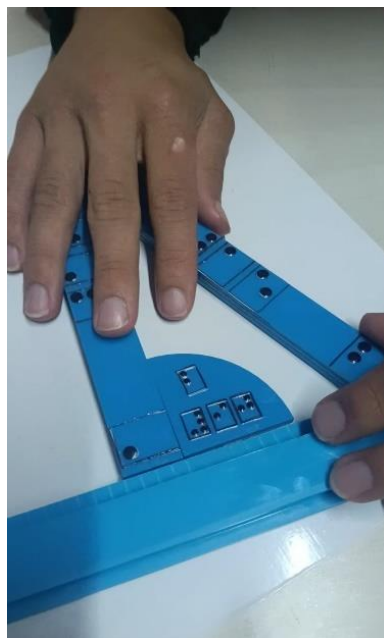
a



b

**Figura 38**

*Construcción del criterio lado-lado-ángulo*



a



b

### Fragmento 3

**Profesora:** Según lo que hiciste, ¿qué combinaciones determinan un triángulo congruente?

**Estudiante 1:** Lado–lado–lado. Lado–ángulo–lado.

**Profesora:** ¿Y cuáles no?

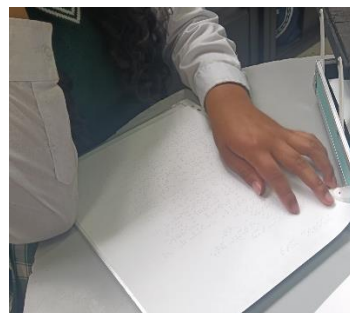
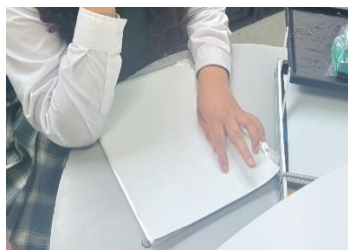
**Estudiante 1:** Ángulo–ángulo–ángulo... esa no sirve.

### *Intervención con la estudiante 2*

La segunda intervención se realizó con la estudiante 2, ella tiene un buen desarrollo en lectura y escritura en Braille, por lo que inició la sesión leyendo la cartilla en Braille.

### Figura 39

#### *Lectura de la cartilla en Braille*



La profesora explicó los elementos del material y el propósito de la Tarea 1.

### Fragmento 4

**Profesora:** Explora los triángulos y cuéntame qué notas.

**Estudiante 2:** Cada uno tiene un nombre distinto... y todos son de tamaños diferentes.

**Profesora:** Muy bien. Ahora mediremos los lados.

**Estudiante 2:** Perfecto.

**Figura 40**

*Exploración de los triángulos T1, T2, T3*



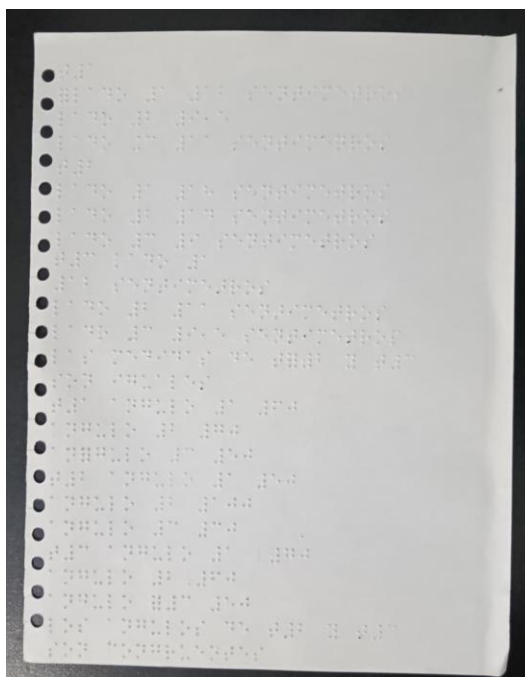
Tras la explicación del uso de la regla, midió los lados y los ángulos de cada triángulo

**Figura 41**

*Midiendo con la regla*



La estudiante registró los resultados en la cartilla, en Braille.

**Figura 42***Resultados en Braille***Tabla 7***Resultados de medición a T1, T2, T3*

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
T1	9.5	11	12
T2	18	9	14
T3	9.5	11	12
Triángulo	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3
T1	60°	70°	50°
T2	30°	50°	100°
T3	60°	70°	50°

***Fragmento 5*****Profesora:** ¿Qué observas al comparar los resultados?

**Estudiante 2:** ... T1 y T3 tienen los mismos lados y ángulos.

**Profesora:** ¿qué crees podría significar eso?

**Estudiante 2:** (Toma los triángulos nuevamente y los sobrepone) ...que estos triángulos son congruentes.

**Profesora:** ¡Perfecto! Entonces ¿Cómo escribirías esta conclusión en tu hoja de respuesta?

**Estudiante 2:** ... Que T1 y T3 son congruentes porque sus lados y sus ángulos son congruentes.

**Profesora:** ¡Excelente!

En la Tarea 2, la estudiante trabajó con el triángulo T4. Tras medirlo, obtuvo los siguientes resultados:

**Tabla 8**

*Resultados medición T4*

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
	19	19	13
T4	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3
	70°	70°	40°

Luego, la profesora le dio la instrucción de seleccionar tres piezas del material (segmentos o ángulos imantados) para construir un triángulo congruente a T4. En su primera construcción escogió ángulo J, segmento JK y ángulo K, y al verificar, el triángulo encajó perfectamente (Figura 35, parte a).

Posteriormente, repitió el proceso con diferentes combinaciones como lado-lado-lado, la estudiante unió primero dos segmentos y luego unió el tercero cuidadosamente comparó su construcción y verificó que el T4 encajaba perfectamente (Figura 35, parte b), luego intentó con la combinación ángulo-ángulo-ángulo, siguiendo la sugerencia de la profesora la estudiante tomó

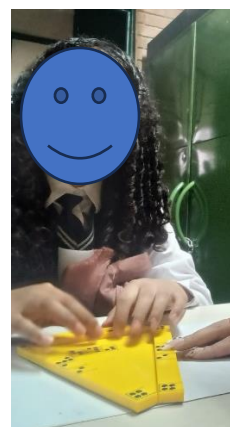
un segmento complementario y en el acomodó dos de los ángulos escogidos, luego tomó otro segmento complementario para cerrar la construcción y acomodar el ángulo faltante, al intentar cerrar la construcción con el segmento complementario este era muy grande lo que no permitía una verificación correcta de la construcción por lo que la docente toma otro segmento de uno de los triángulos que no estaban en uso para que la estudiante lograra completar la construcción (Figura 36, parte a) y de esta manera comprobara que el triángulo construido era un poco más grande y no encajaba con el modelo (Figura 36, parte b). Finalmente intentó con la combinación lado-ángulo-ángulo, la estudiante inició su construcción uniendo uno de los segmentos con el ángulo luego unió el segmento faltante en el otro extremo del ángulo, cerró su construcción con el segmento complementario, y verifico que el T4 encajaba en su construcción.

### Figura 43

*Construcción del criterio ángulo-lado-ángulo y lado-lado-lado*



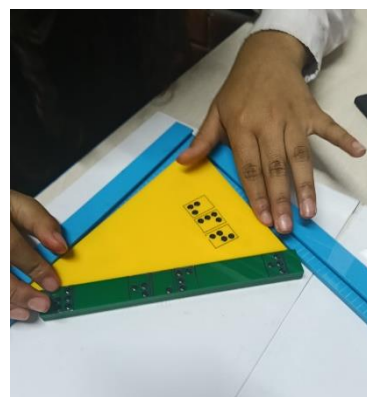
a



b

**Figura 44***Construcción ángulo-ángulo-ángulo*

a



b

Finalmente, la estudiante concluyó:

***Fragmento 6***

**Profesora:** Según tu trabajo, ¿qué combinaciones permiten construir un triángulo congruente?

**Estudiante 2:** Las combinaciones que permiten construir un triángulo congruente son lado-lado-lado y ángulo-lado-ángulo.

**Profesora:** ¿Y cuáles no sirven?

**Estudiante 2:** Las combinaciones como ángulo-ángulo-ángulo o lado-ángulo-ángulo no funcionan porque el triángulo no encaja.

**Análisis de la implementación de la prueba piloto**

A continuación, se presenta el análisis de la implementación del material didáctico *Congru Kit*, cuyo propósito fue favorecer el aprendizaje de los criterios de congruencia de triángulos en dos estudiantes con discapacidad visual. Este análisis busca revisar cómo los estudiantes recibieron el material, cómo se desarrollaron las tareas diseñadas y qué resultados de aprendizaje se

evidenciaron durante la aplicación. Además, se reflexiona sobre los logros alcanzados, las dificultades encontradas y los aspectos que pueden mejorarse para el uso de *Congru Kit*.

La implementación de las tareas con el material *Congru Kit* permitió identificar diversos aspectos que respaldan su pertinencia como recurso didáctico inclusivo. Pues, ambos estudiantes, mostraron un alto nivel de motivación y disposición hacia las actividades propuestas. La posibilidad de manipular directamente los segmentos, ángulos y triángulos imantados generó un ambiente de exploración activa, un beneficio que se buscaba lograr teniendo en cuenta las características que debe tener un material didáctico según Moreno-Armella y Elizondo (2017). Esto favoreció un ambiente de confianza y participación esencial en la enseñanza de las matemáticas.

Desde la perspectiva del DUA, se ofreció una representación alternativa para los estudiantes con discapacidad visual, que también puede ser utilizado para estudiantes sin esta discapacidad. *Congru Kit*, al integrar elementos táctiles diferenciados, piezas imantadas de fácil manipulación y una superficie estable para organizar las construcciones geométricas, brindó a los estudiantes ciegos un entorno accesible que favoreció la comprensión de relaciones espaciales.

Asimismo, el carácter háptico del material facilitó que los estudiantes identificaran regularidades entre lados y ángulos del triángulo, fortaleciendo su capacidad para establecer correspondencias y para justificar, desde la manipulación, criterios como LLL y LAL. Esto reafirma que el diseño de materiales accesibles no solo posibilita la participación de estudiantes con discapacidad visual, sino que favorece el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico que, de otro modo, podrían verse limitados por la ausencia de apoyos físicos adecuados.

El desarrollo de las tareas 1 y 2 permitió alcanzar los propósitos propuestos. En la primera, los estudiantes lograron identificar cuáles triángulos eran congruentes al comparar y medir sus lados y ángulos. Los dos estudiantes concluyeron que los triángulos T1 y T3 eran congruentes porque sus lados y ángulos tenían igualdad de medidas, proponiendo una definición intuitiva de congruencia. Este logro se relaciona con el proceso de definición, en el que el conocimiento surge a partir del reconocimiento de las propiedades del objeto matemático antes de formalizar una definición teórica.

En la tarea 2, los estudiantes fueron capaces de aplicar lo aprendido al construir nuevos triángulos congruentes con los prototipos presentados. Esta actividad, centrada en la construcción y la verificación, facilitó la transición hacia una conjeturación, en la que los participantes ajustaron y comprobaron combinaciones de lados y ángulos hasta reconocer los criterios de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ángulo-Lado (LAL) y Ángulo-Lado-Ángulo (ALA). Esta etapa demuestra un avance en el proceso de conjeturación ya que, a partir, de la manipulación evidenciaron el criterio de congruencia. Se sabe que un solo caso no es suficiente para hacer una generalización, pero dadas las condiciones de tiempo, se aceptan las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, a partir de un solo caso.

Otro aspecto relevante fue la autonomía progresiva que demostraron los estudiantes en el uso del material. Si bien para medir el primer triángulo necesitaron acompañamiento en el manejo de la regla y el transportador, en los siguientes realizaron las mediciones de manera independiente y con buena precisión.

En cuanto a los propósitos, ambos estudiantes lograron identificar la congruencia de triángulos a partir de la igualdad de lados y ángulos, y reconocer los criterios válidos para construir un triángulo único. Las afirmaciones finales de los participantes, “dos triángulos son congruentes

cuando sus lados y sus ángulos miden igual”, reflejan el planteamiento de una definición intuitiva en la que el estudiante no se limita a seguir instrucciones, sino que interpreta, justifica y comunica lo que responde al objetivo de las tareas.

La implementación también permitió identificar limitaciones y oportunidades de mejora. En primer lugar, debido al tiempo disponible, cada estudiante realizó la Tarea 2 con un solo triángulo. Esto restringió la posibilidad de explorar una mayor diversidad de combinaciones de lados y ángulos y poder verificar que en otros ejemplos se continúa cumpliendo los criterios que descubrieron. En este caso, tener más sesiones podría permitir que los estudiantes construyan y comparen varios triángulos, fortaleciendo su comprensión de los distintos criterios de congruencia.

En segundo lugar, durante la implementación se evidenció que, en algunas construcciones realizadas con los segmentos complementarios, las piezas no permitían un ajuste preciso al momento de encajar los triángulos, lo que generó ligeras discrepancias en la verificación de la congruencia. Esta situación sugiere la necesidad de realizar una modificación en el diseño de dichos segmentos, proponiendo que sean ajustables a diferentes longitudes para permitir construcciones más exactas. De este modo, los estudiantes podrían comprobar con mayor precisión las condiciones de congruencia entre triángulos. Esta mejora, además de optimizar la funcionalidad del material, fortalecería el proceso de exploración y verificación geométrica.

Adicional, se evidenció que la presencia constante de la profesora como guía fue fundamental para el éxito de la implementación. Como señala el DUA (CAST, 2018), el acompañamiento docente es esencial para ofrecer apoyos personalizados, retroalimentación inmediata y andamiajes que garanticen la comprensión. En este contexto, el acompañamiento no solo permitió resolver dudas sobre el uso del material, sino que también permitió ajustar el ritmo de trabajo según las necesidades de cada estudiante, favoreciendo un proceso inclusivo.

En conclusión, la implementación de las tareas con el uso de *Congru Kit* demostró ser exitosa al cumplir los propósitos de las tareas diseñadas. Los dos estudiantes lograron identificar triángulos congruentes, reconocer algunos criterios de congruencia y expresar definiciones en sus propias palabras a partir de la manipulación del material.

## Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones en relación con los objetivos propuestos, el análisis realizado y las dimensiones personal, académica y profesional que emergen de esta experiencia investigativa.

En relación con los objetivos específicos, se logró realizar una revisión bibliográfica que permitió fundamentar teórica y didácticamente el trabajo, reconociendo los aportes de autores que abordan la enseñanza de la geometría desde perspectivas inclusivas y accesibles. El diseño del material didáctico respondió a las necesidades de los estudiantes con discapacidad visual, ofreciendo una herramienta concreta que promueve la exploración y el descubrimiento de las propiedades geométricas mediante el tacto, la comparación y la construcción. Asimismo, la secuencia de tareas fue elaborada con base en el análisis didáctico de Gómez (2002), favoreciendo procesos de exploración y comparación que condujeron a la formulación de conjeturas sobre la congruencia de triángulos.

La realización de la prueba piloto de las tareas con el uso de *Congru Kit* permitió observar la interacción de los estudiantes con este material y comprobar si cumplía los propósitos planteados en su diseño, al mismo tiempo que se identificaron aspectos susceptibles de mejora, como la necesidad de ajustar las medidas de algunos segmentos complementarios para facilitar la verificación de las construcciones.

A partir del análisis de la prueba piloto, se identificaron aspectos clave que fortalecen las conclusiones del trabajo. El uso del material favoreció una comprensión significativa de los conceptos geométricos, pues la manipulación háptica permitió a los estudiantes establecer

relaciones entre medidas, verificar correspondencias y justificar por qué ciertos triángulos eran congruentes. Esta experiencia confirma que el diseño accesible, multisensorial y manipulativo es un camino sólido para promover aprendizajes profundos en contextos inclusivos, coherentes con los principios del DUA y las orientaciones del MEN en materia de atención a la diversidad.

No obstante, el análisis también permitió detectar elementos susceptibles de mejora, en próximos usos del material se sugiere ampliar el número de sesiones, ajustar los segmentos complementarios de tal manera que sean graduables en medidas exactas: 9cm, 11cm, 14cm, 15cm, 17cm, 18cm para obtener construcciones más rigurosas y continuar fortaleciendo el acompañamiento docente para consolidar las definiciones y propiedades, además, de potenciar la autonomía de los estudiantes. Estas observaciones representan oportunidades de optimización tanto del material como de la secuencia de tareas, asegurando su pertinencia y funcionalidad en futuras aplicaciones.

En síntesis, el desarrollo del trabajo permitió cumplir satisfactoriamente con el objetivo general: diseñar un material didáctico adaptado y una secuencia de tareas para su uso, que permita a estudiantes con discapacidad visual definir congruencia de triángulos y conjeturar los criterios de congruencia de triángulos. La implementación mostró que, mediante la exploración táctil y el acompañamiento orientado, los dos estudiantes lograron construir significados geométricos relevantes y reconocer criterios de congruencia desde experiencias concretas.

En términos personales, este trabajo representó una oportunidad para fortalecer el compromiso con una educación matemática inclusiva, sensibilizándome frente a las necesidades de los estudiantes con discapacidad visual y reafirmando mi vocación docente. En el ámbito académico, permitió integrar conocimientos teóricos de la didáctica de la matemática

con la práctica investigativa, consolidando habilidades en el diseño y análisis de materiales y secuencias didácticas.

Finalmente, en el plano profesional y laboral, este proyecto sienta las bases para continuar desarrollando propuestas pedagógicas accesibles, innovadoras y contextualizadas, que promuevan una enseñanza de la matemática equitativa, al alcance de más estudiantes.

## Referencias

- Alba, C., Sánchez, J. M., Ainara Zubillaga, S., y Río, D. (s.f.). *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*. Cloudfront.net. Recuperado el 2 de junio de 2023.
- Aldana, S., Rodríguez, S. y Plazas, T. (2024). El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 107-114. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional
- Almenara, J. C., y Pérez, M. C. (2016). Inclusión educativa: inclusión digital. *Revista de educación inclusiva*, 2(1).
- Ávila, C. D. y Varela, J. A. (2019). *Moviéndonos en el plano a ciegas* [Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/10820>
- CAST. (2018). *Guías de Diseño Universal para el Aprendizaje, versión 2.2*. Centro de Tecnología Especial Aplicada (CAST). <https://udlguidelines.cast.org>
- Castellary, M. (2019). *Diseño Universal para el Aprendizaje: Principios y estrategias en la educación inclusiva*.
- Constitución Política de Colombia (Const). Art. 67, Art 68. 7 de julio de 1991 (Colombia).
- Decreto 1421 de 2017. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. 29 de agosto de 2019. D. O. No. 30033428.
- Decreto 2082 de 1996 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta la atención educativa para personas con necesidades educativas especiales. 18 de noviembre de 1996.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century** (pp. 37–52). Kluwer Academic Publishers.

- Fernández del Campo, J. E. (1996). *La enseñanza de la matemática a los ciegos* (2ª ed.). Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE).
- Fernández del Campo, J. E. (2004). *Braille y matemática*. Universidad de Salamanca.  
Recuperado el 29 de marzo de 2025, de [https://sid-inico.usal.es/idocs/F8/FDO10191/braille\\_y\\_matematica.pdf](https://sid-inico.usal.es/idocs/F8/FDO10191/braille_y_matematica.pdf)
- Fuentes, N. F. M. (2007a). *Diseño de imágenes para ciegos: Material didáctico para niños con discapacidad visual*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Fuentes, M. (2007b). *Estrategias de inclusión educativa para estudiantes con discapacidad visual*. Editorial INCI.
- Fundación Caser. (2024). *Sistema Braille*. Fundación Caser. Recuperado el 29 de marzo de 2025, de <https://www.fundacioncaser.org/actualidad/te-acompanamos/sistema-braille>
- Fundación ONCE. (s.f.). Recursos Educativos. Recuperado el 29 de marzo de 2025, de <https://www.once.es/servicios-sociales/educacion-inclusiva/recursos-educativos>
- González, L. D. y Canchón, L. V. (2018). *Geometría fuera de vista*. [Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/9529>
- Gómez, Pedro (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. Revista EMA, 7(3), pp. 251-292.
- Hit Discapacidad. (2022, 20 de mayo). *El geoplano para alumnos ciegos*. Recuperado el 29 de marzo de 2025, de <https://hitdiscapacidad.com/2022/05/20/el-geoplano-para-alumnos-ciegos/>
- Impresión i3D. (s.f.). *Figuras geométricas 3D*. Recuperado el 29 de marzo de 2025, de <https://impresioni3d.com/figuras-geometricas-3d/>

Instituto Nacional para Ciegos (INCI). (2006). *El maestro y el estudiante con limitación visual*.

Ministerio de Educación Nacional.

Ley 115 de 1994 [Ministerio de Educación Nacional]. Por la cual se expide la Ley General de Educación. 8 de febrero de 1994.

López, R., y Gómez, S. (2021). *Tecnología accesible en la educación matemática: Un enfoque inclusivo*. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 14(2), 45-60.

Manrique Orozco, A. M. y Gallego Henao, A. M. (enero-junio, 2013). *El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos*. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 4(1), 101-108

Marchesi, A., y Martín, E. (2003). *Calidad de la enseñanza en tiempos de cambio*. Alianza Editorial.

Martínez, J., y Soto, P. (2019). *El papel del material manipulativo en la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad visual*. *Educación Matemática*, 31(1), 89-106

Meyer, A., Rose, DH, y Gordon, D. (2014). *Diseño universal para el aprendizaje: Teoría y práctica*. CAST Professional Publishing.

Ministerio de Salud y Protección Social. (2014). *Política Pública de Discapacidad e Inclusión Social (PPDIS) 2013-2022*. Bogotá: Ministerio de Salud y Protección Social.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017a). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (2017b). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva*. Bogotá: Autor.

- Ministerio de Educación Nacional. (2017c). *Guía para la implementación del Decreto 1421 de 2017: Atención educativa a estudiantes con discapacidad*. Recuperado de [https://especiales.colombiaaprende.edu.co/emociones-conexion-vital/pdf/L2\\_R1\\_Mod2\\_Guia\\_apoyo\\_Decreto\\_1421.pdf](https://especiales.colombiaaprende.edu.co/emociones-conexion-vital/pdf/L2_R1_Mod2_Guia_apoyo_Decreto_1421.pdf)
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Addison – Wesley Iberoamericana.
- Moreno-Armella, L., y Elizondo, R. (2017). *La importancia del material háptico en la educación inclusiva*. México: Editorial Educativa.
- Organización de las Naciones Unidas (ONU). (2006). *Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad*. Asamblea General.
- Organización Nacional de Ciegos Españoles. (2012). *Guía de orientación sobre materiales accesibles para personas con discapacidad visual*. ONCE.
- Organización Mundial de la Salud. (2021). *Ceguera y discapacidad visual*. Recuperado de <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/blindness-and-visual-impairment>
- Pineda, K. L. y Romero, V. (2021). *Una aproximación a los criterios de congruencia, viendo más allá de lo que se ve*. [Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/16348>
- Plazas, T. y Samper, C. (2013). Acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado. *Revista Científica, Edición especial*, 479-484.
- Sandoval Mena, M. (2023). *Diagnóstico de necesidades docentes para implementar la educación inclusiva*. Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago). <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386803.locale=es>

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. Universidad Pedagógica Nacional.

UNESCO. (2017). *A guide for ensuring inclusion and equity in education*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000248254>

## Anexos

## Anexo 1. Cartilla docente





# Contenido

1. Justificación
2. Introducción
3. Propósitos
4. Conocimientos previos
5. Elementos de Congru kit
6. Tareas, actividades y consejos

# Justificación



El concepto de inclusión educativa ha sido ampliamente promovido en políticas internacionales y nacionales como un principio fundamental para garantizar el derecho a la educación. La Declaración Universal de los Derechos Humanos (ONU, 1948), la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006; Ley 1346 de 2009 en Colombia), la Constitución Política de 1991, la Ley 115 de 1994 y el Decreto 1421 de 2017 establecen la obligación de ofrecer entornos y estrategias pedagógicas que permitan la participación efectiva de estudiantes con discapacidad visual en el sistema educativo.

En este contexto, la cartilla y el material Congru Kit se proponen como un recurso accesible para estudiantes con discapacidad visual. A través de este, los estudiantes pueden explorar, medir, comparar y construir triángulos, favoreciendo así la comprensión de la congruencia de triángulos.



# Introducción

La presente cartilla acompaña el material denominado Congru Kit, diseñado para que los estudiantes, en especial aquellos con discapacidad visual, tengan la oportunidad de explorar, construir y descubrir propiedades de los triángulos mediante el uso de recursos manipulativos y accesibles, esta cartilla presenta:

Una sección de saberes previos, que busca recordar y reforzar conocimientos básicos necesarios para abordar las actividades, una descripción detallada del material, explicando su función y uso.

La presentación de las tareas, cada una organizada con su propósito, los materiales requeridos y un conjunto de preguntas sugeridas para guiar el trabajo con los estudiantes.

- Tarea 1, Identificando triángulos congruentes: Identificar congruencias de triángulos, a partir de la exploración, medición y comparación de lados y ángulos.
- Tarea 2, Construye su gemelo: Construir un triángulo congruente a partir de uno dado, utilizando los segmentos y ángulos imantados.

Este recurso busca responder a la necesidad de materiales inclusivos en el aula de matemáticas, promoviendo la participación equitativa y el desarrollo del razonamiento geométrico en todos los estudiantes, con y sin discapacidad visual.

# Propósitos



Con el desarrollo de las tareas propuestas en esta cartilla, se espera que los estudiantes:

- Reconozcan la definición de triángulos congruentes, a partir de la medición y comparación de lados y ángulos.
- Construyan, a partir de un triángulo modelo, triángulos congruentes a este, utilizando las partes del triángulo (ángulos y lados).
- Verifiquen la congruencia de triángulos, a través de la superposición y el encaje de figuras.
- Formulen conclusiones sobre posibles combinaciones de partes del triángulo que permiten determinar un triángulo congruente a un dado.

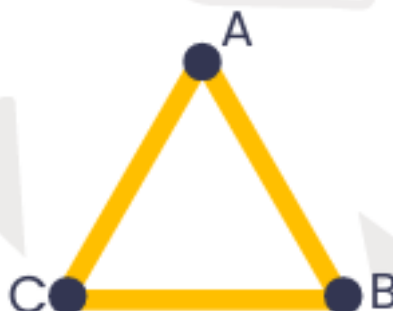


## Conocimientos previos

Para el desarrollo de las tareas se requiere que los estudiantes cuenten con algunos conocimientos previos, que se describen a continuación:

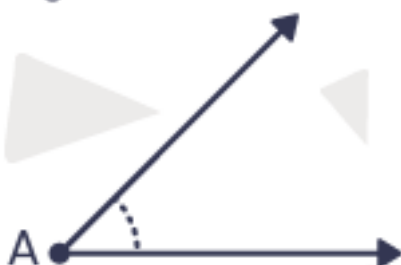
- Triángulo

-Definición: Dados tres puntos no colineales, la unión de los tres segmentos cuyos extremos son los puntos es un triángulo. Los puntos son llamados vértices del triángulo y los segmentos, lados del triángulo.



- Ángulo

-Definición: Unión de dos rayos no colineales con mismo origen. Los dos rayos se llaman lados del ángulo y el origen común de los rayos se llama vértice.



Congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.



·Congruencia de ángulos: Dos ángulos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.



·Triángulo rectángulo (cateto e hipotenusa):  
Dado ABC con ángulo B recto, el lado b quien es opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los lados a y c son catetos.



## Uso de instrumentos de medición



**Regla táctil o en braille:** Herramienta que permite medir la longitud de los lados.

### 1. Exploración inicial de la regla

Recorre con tus dedos toda la regla para familiarizarte con las marcas.

Identifica el extremo inicial: este es el cero (0) de la medición.

### 2. Comprensión de las marcas

Cada línea corta en relieve corresponde a 0.5 unidad (0.5 cm).

Cada línea larga corresponde a 1 unidad (1 cm).

### 3. Colocación del objeto a medir

Sitúa el extremo del lado del triángulo justo en el cero de la regla.

Mantén el lado recto y fijo sobre el borde de la regla para que no se desplace durante la medición.

### 4. Lectura de la medida

Desplaza el dedo índice desde el cero hacia adelante hasta llegar al otro extremo del lado del triángulo.

Cuenta las marcas en relieve: El número total de marcas recorridas indica la medida en centímetros.

**Transportador táctil o en braille:** Herramienta que permite medir la amplitud de los ángulos en grados.

#### 1. Exploración inicial

Identifica que el transportador tiene forma de semicírculo con un centro marcado en la base recta. Localiza el brazo móvil que parte del centro del transportador

#### 2. Comprensión de las marcas

El transportador está dividido en grados.

Cada línea corta en relieve corresponde a 5 grados ( $5^\circ$ ).

Cada línea larga en relieve corresponde a 10 grados ( $10^\circ$ ).

Los grados notables ( $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ) están señalados en relieve.

#### 3. Colocación del ángulo a medir

Sitúa el vértice del ángulo en el centro del transportador.

Alinea un lado del ángulo con la base recta del transportador.

#### 4. Lectura de la medida

Gira el brazo hasta que este alineado con el otro lado del ángulo.

Explora con el dedo la marca del semicírculo donde llega el brazo.

Lee la medida correspondiente en grados.

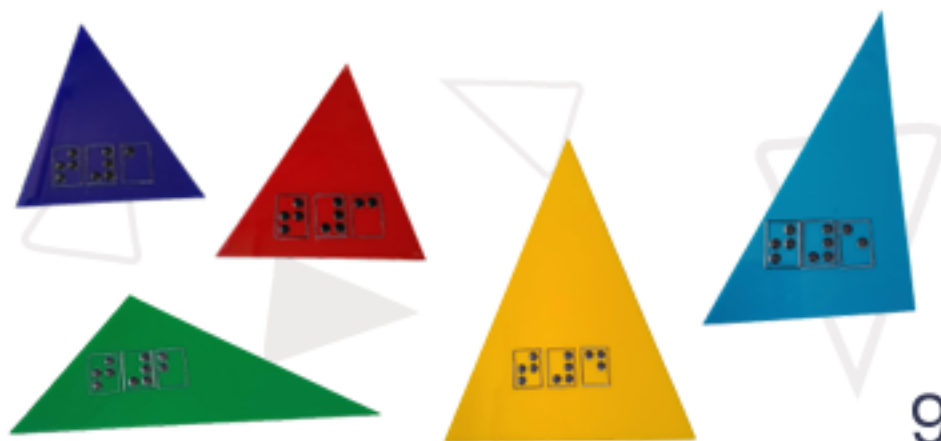


## Elementos de Congru kit

El material Congru - Kit está compuesto por distintos recursos que permiten la exploración, verificación de propiedades de los triángulos y construcción de triángulos congruentes. Cada elemento cumple un papel específico en el desarrollo de las tareas.

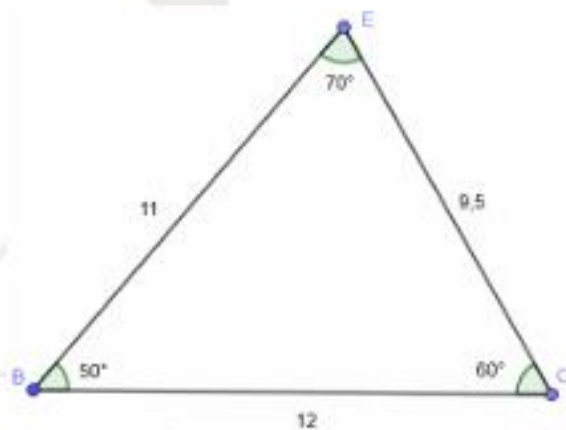
### T1, T2, T3, T4, T5

Son triángulos de acrílico que representan distintos triángulos, los cuales facilitan la exploración de lados y ángulos y sirven como modelos para comparar y verificar congruencia.

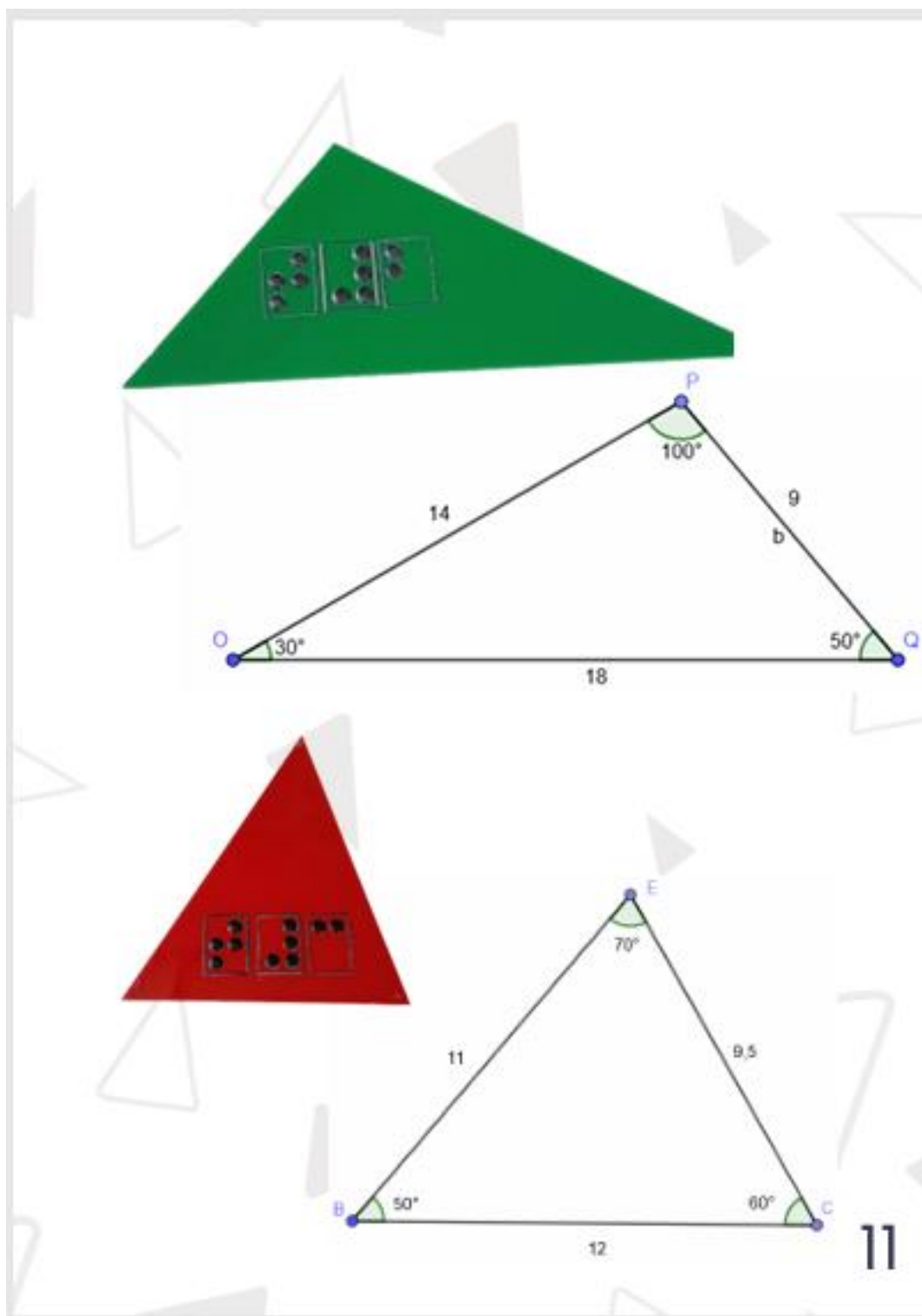


## T1, T2, T3.

Estos se utilizan en la Tarea 1 (comparación y medición)

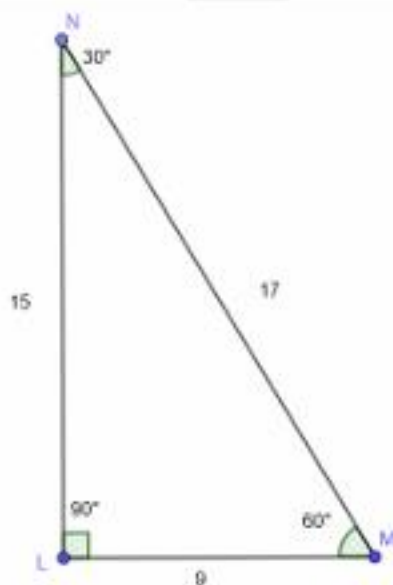
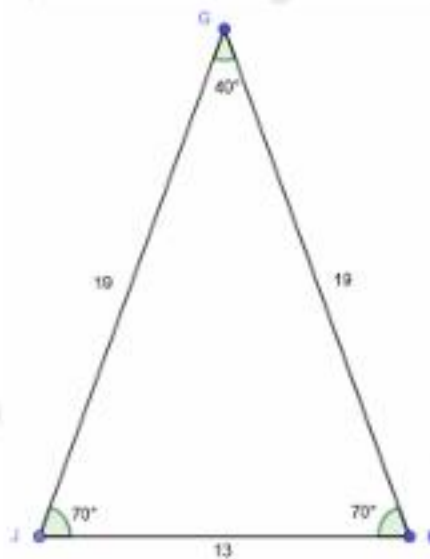
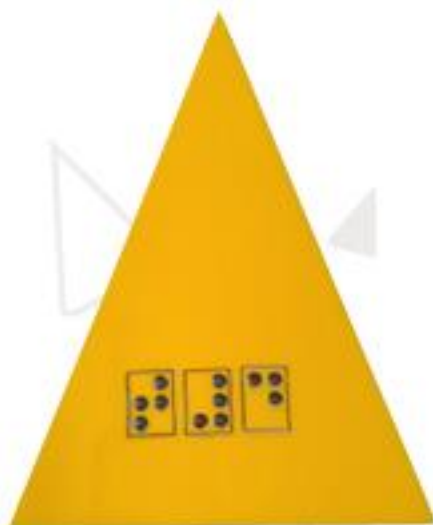


10



# T4, T5.

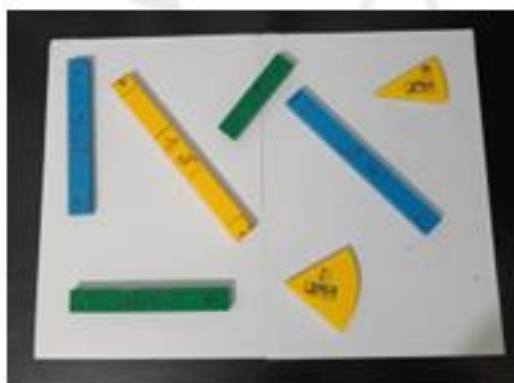
Estos se utilizan en la Tarea 2 (construcción del gemelo).



12

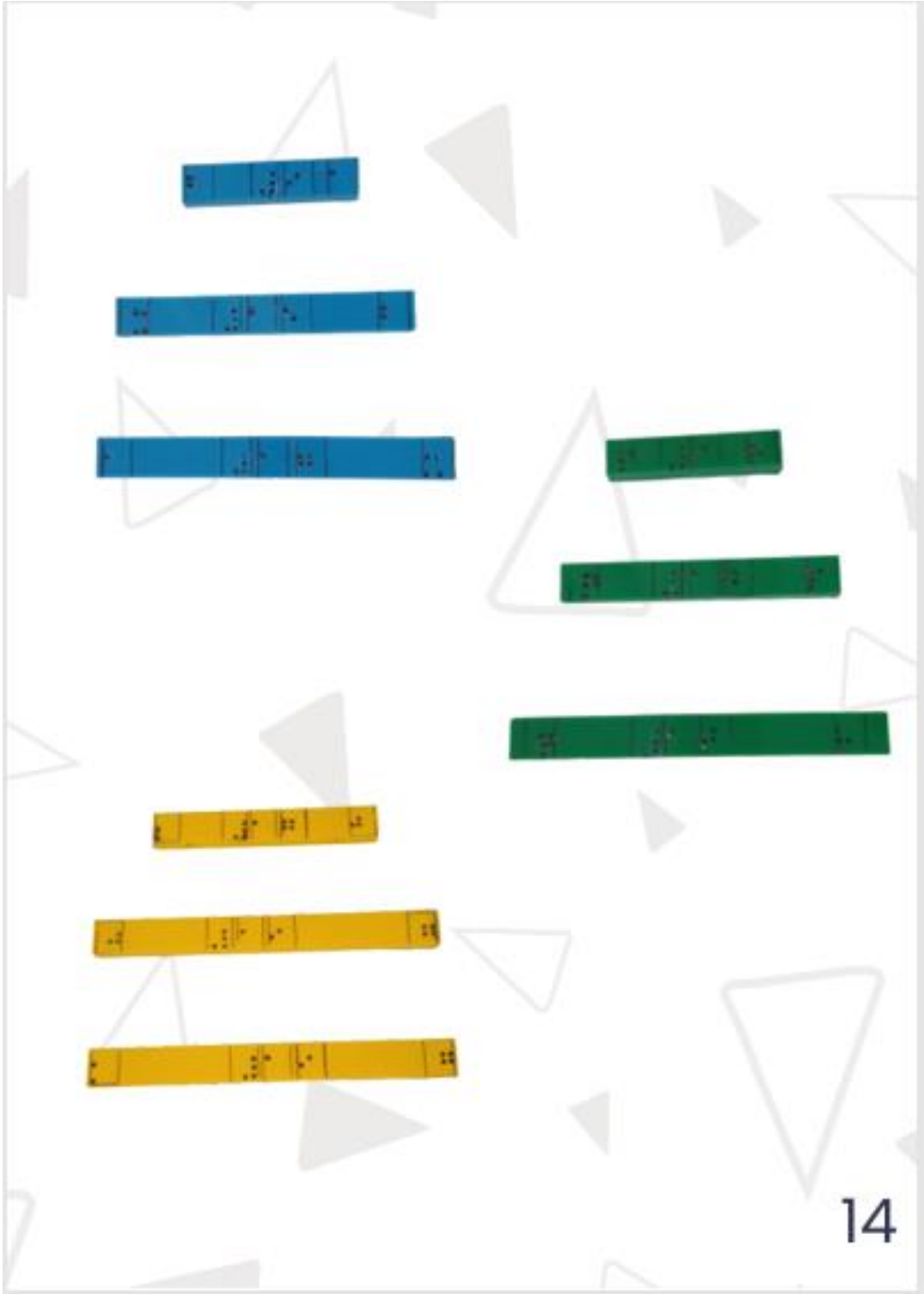
## Base imantada

Es una superficie magnética sobre la cual se fijan los segmentos y ángulos imantados, que permite armar triángulos con las piezas y mantenerlos en su lugar mientras se verifican las medidas de otro lados o ángulos o se compara con un triángulo de acrílico, a partir de superponerlos.



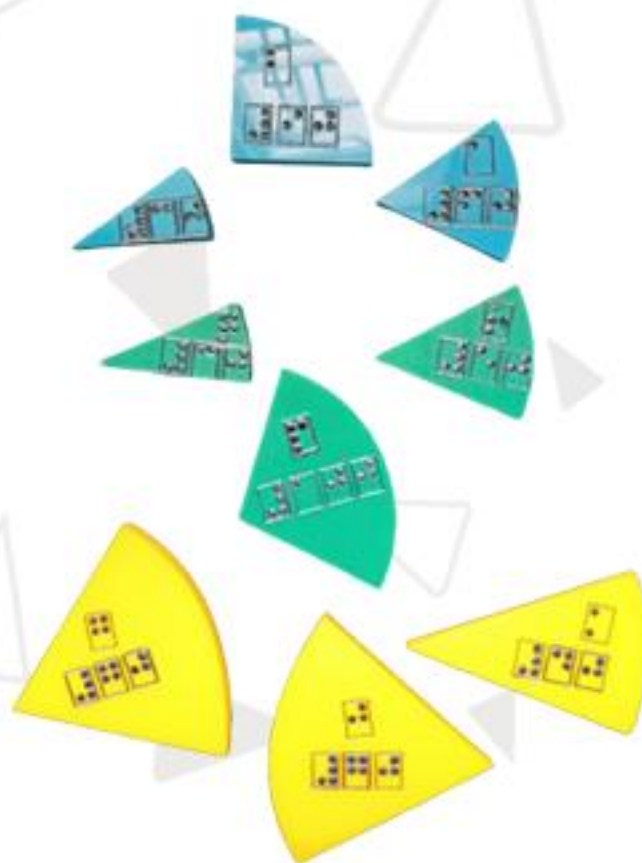
## Segmentos imantados

Son barras rectas de diferentes longitudes que representan los lados de los triángulos T2, T4 y T5, cada una nombrada con una letra, la cual está marcada en braille junto con su medida en centímetros. Estas representan los lados de los triángulos al momento de construir figuras nuevas.



## Ángulos imantados

Es una pieza, con forma de punta que termina en un arco, por el lado en punta, se representa la medida de un ángulo en grados. Cada una nombrada con una letra la cual está marcada en braille junto con su medida. Permite graficar un ángulo con la medida dada.



## Segmentos y ángulos imantados T2



Criterio L-L-L: Segmento PQ, segmento QO, segmento OP

Criterio L-A-L: Segmento OP, ángulo P, Segmento PQ  
 Segmento PQ, ángulo Q, segmento QO  
 Segmento QO, ángulo O, segmento OP

Criterio A-L-A: Ángulo P, segmento PQ, ángulo Q.  
 Ángulo Q, segmento QO, ángulo O  
 Ángulo O, segmento OP, ángulo P

## Segmentos y ángulos imantados T4



Criterio L-L-L : Segmento GK, segmento KJ, segmento JG

Criterio L-A-L: Segmento GK, ángulo K, Segmento KJ

Segmento KJ, ángulo J, segmento JG

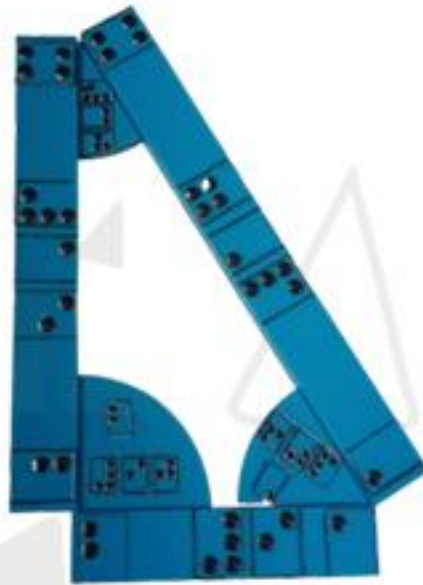
Segmento JG, ángulo G, segmento GK

Criterio A-L-A: Ángulo G, segmento GK, ángulo K.

Ángulo K, segmento KJ, ángulo J

Ángulo J, segmento JG, ángulo G

## Segmentos y ángulos imantados T5



Criterio L-L-L : Segmento AB , segmento BX, segmento XA

Criterio L-A-L: Segmento BA, ángulo A, Segmento AX

Segmento AX, ángulo X, segmento XB

Segmento XB, ángulo B, segmento BA

Criterio A-L-A: Ángulo B, segmento BA, ángulo A.

Ángulo A, segmento AX, ángulo X

Ángulo X, segmento XB, ángulo B

Criterio Hipotenusa - cateto\*: Segmento AX, segmento

XB

Segmento AX, segmento AB

\*Debido a que conocemos que tiene un ángulo recto

## Segmentos complementarios(3 unidades)

Son piezas que tiene 20cm de longitud y sirven para conseguir segmentos que se ajusten a las construcciones realizadas.



# TAREAS

## TAREA 1: Identificando triángulos congruentes



**Propósito:** Reconocer los triángulos que son congruentes y las características necesarias para que esto ocurra.

### Preguntas guía sugeridas / Instrucciones

1. Entregar a los estudiantes los triángulos T1, T2, T3, con el fin de tener una primera aproximación al material y establecer alguna relación entre los triángulos.
2. Cuestionar si existe alguna relación entre los triángulos dados. Se espera que los estudiantes identifiquen que las figuras son triángulos y que hay dos que son iguales.
  - ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras?
3. Solicitar medir los lados y ángulos. Se sugiere que, dependiendo de la habilidad de escritura del estudiante, se ayude a registrar datos o lo realicen ellos. En la pág. 7-8 se encuentra el instructivo para el uso de la regla y transportador.
4. Pida comparar los resultados obtenidos. Se sugiere cuestionar lo siguiente:
  - ¿Qué descubres al comparar sus longitudes?
  - ¿Qué hallazgos obtienes al comparar las amplitudes de los ángulos?
  - ¿Qué sucede con T1 y T3? ¿Qué pasa con T2?
5. Guiar al estudiante hacia la construcción de la noción de congruencia como igualdad de lados y ángulos.
  - ¿Qué características deben tener dos triángulos sean congruentes?



## Posibles dificultades

### Asociadas al uso de la regla

- a) No identificar el cero de la regla como punto de inicio de la medición.
- b) Medir mal por no alinear correctamente el lado del triángulo con la regla.
- c) Contar mal las líneas en relieve.

### Asociadas al uso del transportador

- a) Colocar el vértice del ángulo en una posición incorrecta del transportador.
- b) No alinear uno de los lados del ángulo con la base recta, lo que da una medida errónea.
- c) Dificultad para ubicar los valores intermedios entre las marcas principales ( $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ )

### Errores en la interpretación de los resultados

- a) Concluir que no son congruentes por variaciones mínimas generadas por errores de medición.
- b) Considerar que basta con comparar solo los lados o solo los ángulos y no ambos.
- c) Confundir la noción de semejanza con la de congruencia.

## TAREA 2: Construye su gemelo



**Propósito:** Identificar las condiciones mínimas necesarias para construir un triángulo congruente a uno dado.

### Preguntas guía sugeridas / Instrucciones

1. Entregar el triángulo T4 a los estudiantes para que lo exploren y lo utilicen como modelo en la construcción del gemelo.
2. Solicitar medir los lados y ángulos de T4. Se sugiere que, dependiendo de la habilidad de escritura del estudiante, se ayude a registrar datos o lo realicen ellos. En la pág. 7-8 se encuentra el instructivo para el uso de la regla y transportador.
3. Pedir que los estudiantes elijan tres piezas del material (segmentos o ángulos imantados de T4) con las cuales intentarán construir un triángulo congruente.
  - ¿Qué piezas decides usar y por qué?
4. Solicitar que armen el triángulo en la base imantada utilizando las piezas seleccionadas.
5. Completar el triángulo de ser necesario con los segmentos graduables.
6. Verificar la construcción superponiendo el triángulo dado (T4) sobre el armado en la base.
  - ¿Encajan perfectamente? ¿Por qué sí o por qué no?
7. Guiar en la identificación de las condiciones que permiten asegurar la congruencia.
  - ¿Qué aprendiste sobre las combinaciones que determinan un triángulo congruente?
8. Repetir este mismo proceso con los triángulos T2 y T5 para validar las conclusiones en otros casos.



## Posibles dificultades

Al igual que la Tarea 1 se pueden presentar dificultades asociadas al uso de la regla y transportador.

### Asociadas al uso del material

- a) No fijar bien las piezas en la base, ocasionando que el triángulo quede inestable.
- b) Dificultades para encajar los segmentos y ángulos debido a la falta de coordinación motriz fina.
- c) No cerrar correctamente el triángulo con los segmentos graduables.

### Errores en la construcción del triángulo congruente

- a) Selección ineficiente de piezas: Elegir combinaciones que no determinan un único triángulo. (ejemplo: AAA)
- b) Armar con piezas en orden incorrecto: No respetar la secuencia lado-ángulo-lado o lado-lado-ángulo. Es importante que el docente guíe este proceso.



La  
geometría  
se  
descubre  
con las  
manos, se  
comprende  
con la  
mente y se  
vive con el  
corazón.

## Anexo 2. Cartilla del estudiante



# INTRODUCCIÓN

Estimado estudiante bienvenido a esta experiencia:

Esta cartilla acompaña el uso del material Congru Kit. Con Congru Kit tendrás la oportunidad de explorar y descubrir propiedades de los triángulos de una manera diferente.

A lo largo de esta cartilla realizarás dos tareas que tiene como propósitos:

- Tarea 1, Identificando triángulos congruentes: Identificar congruencias de triángulos, a partir de la exploración, medición y comparación de lados y ángulos.
- Tarea 2, Construye su gemelo: Construir un triángulo congruente a partir de uno dado, utilizando los segmentos y ángulos imantados.

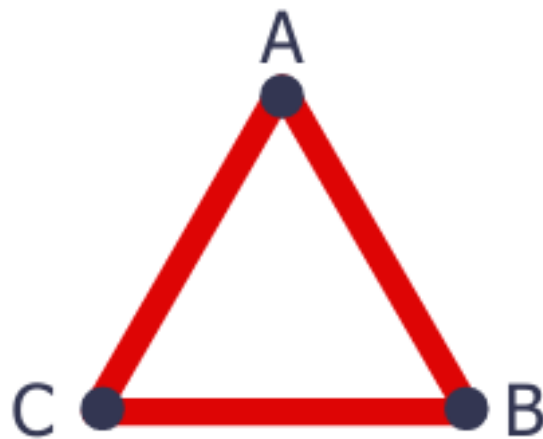
Aquí podrás medir, registrar, analizar y, sobre todo, aprender sobre triángulos congruentes.

# CONOCIMIENTOS PREVIOS

A continuación, te contamos cómo está conformado Congru Kit

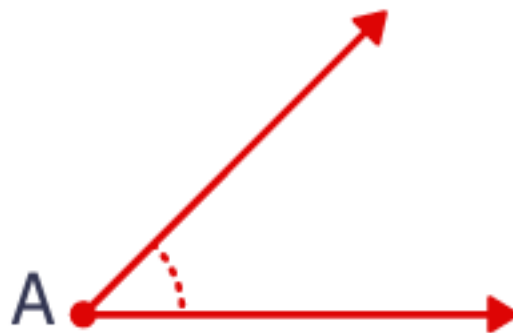
## Triángulo

Definición: Dados tres puntos no colineales, la unión de los tres segmentos cuyos extremos son los puntos es un triángulo. Los puntos son llamados vértices del triángulo y los segmentos, lados del triángulo.



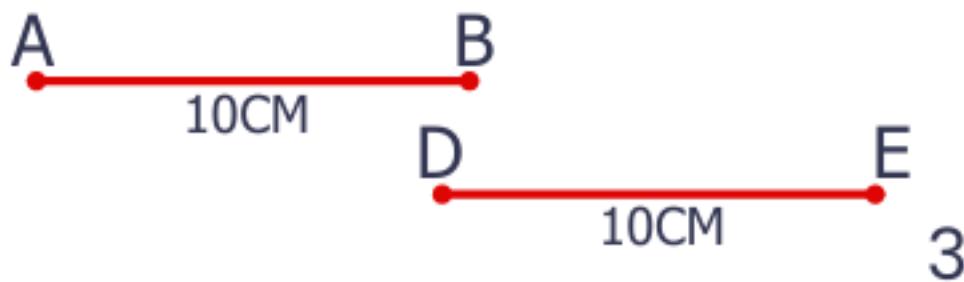
# Ángulo

Definición: Unión de dos rayos no colineales con mismo origen. Los dos rayos se llaman lados del ángulo y el origen común de los rayos se llama vértice.



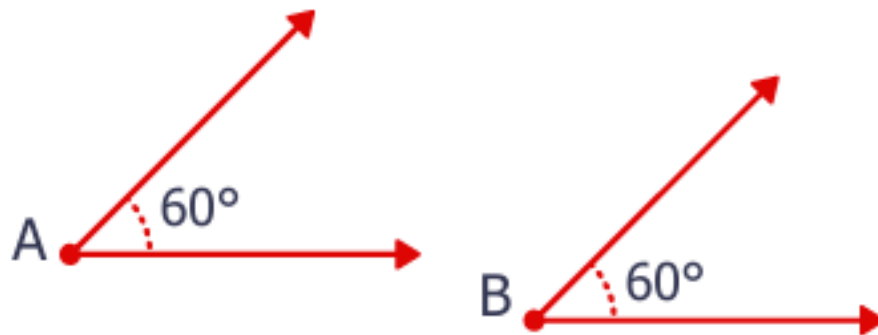
## Congruencia de segmentos:

Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida



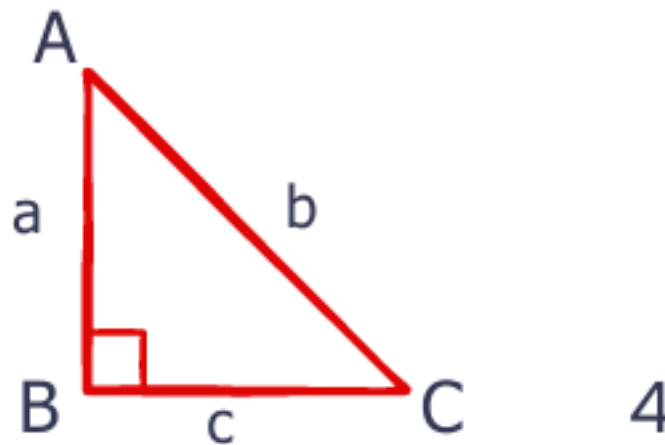
## Congruencia de ángulos

Dos ángulos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.



Triángulo rectángulo (Cateto e hipotenusa)

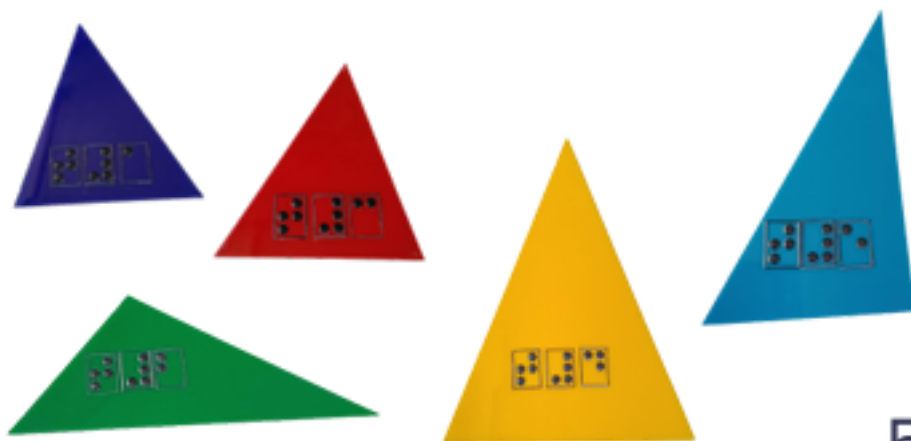
Dado ABC con ángulo B recto, el lado b que es opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los lados a y c son catetos.



# ELEMENTOS DE CONGRU-KIT

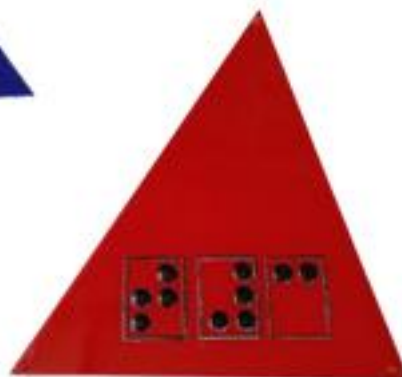
## T1, T2, T3, T4, T5

Son triángulos de acrílico que representan distintos triángulos, los cuales facilitan la exploración de lados y ángulos y sirven como modelos para comparar y verificar congruencia.



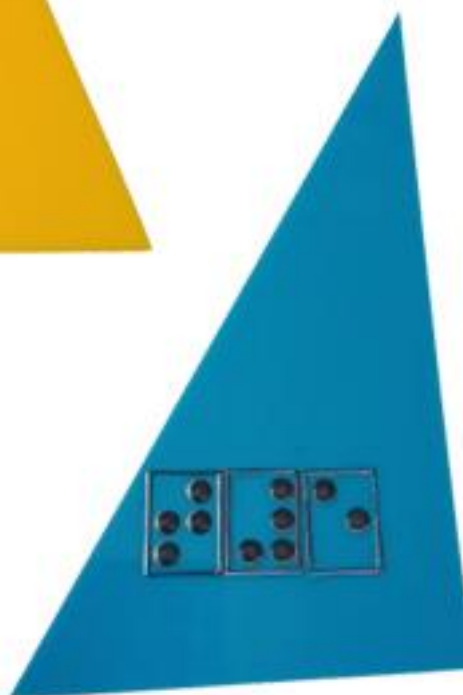
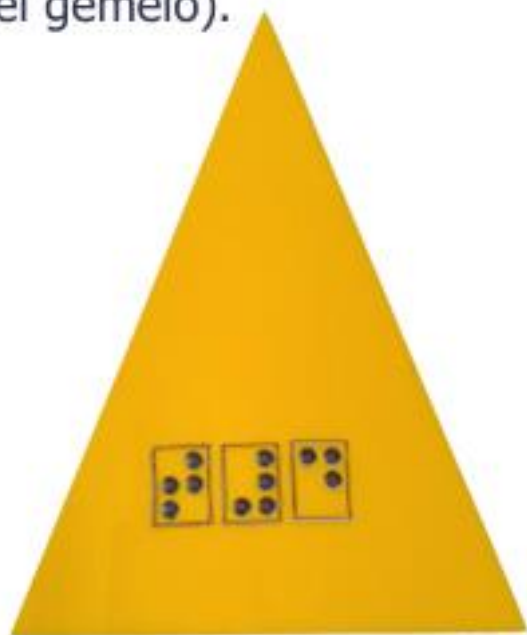
# T1, T2, T3.

Estos se utilizan en la Tarea 1 (comparación y medición)



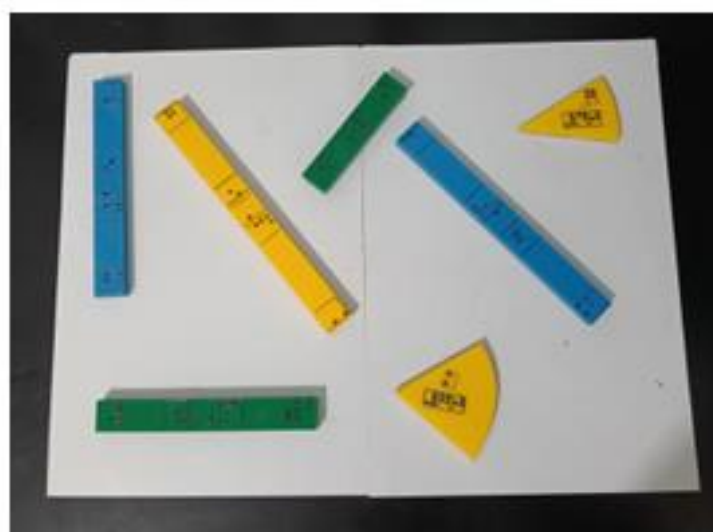
# T4, T5.

Estos se utilizan en la Tarea 2 (construcción del gemelo).



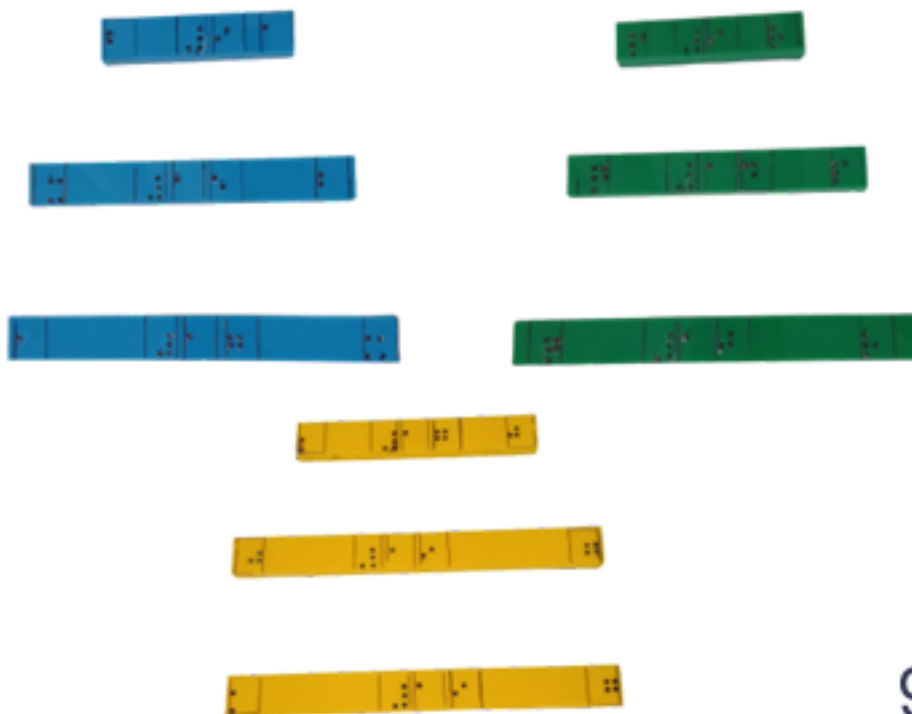
## Base imantada

Es una superficie magnética sobre la cual se fijan los segmentos y ángulos imantados, que permite armar triángulos con las piezas y mantenerlos en su lugar mientras se verifican las medidas de otro lados o ángulos o se compara con un triángulo de acrílico, a partir de superponerlos.



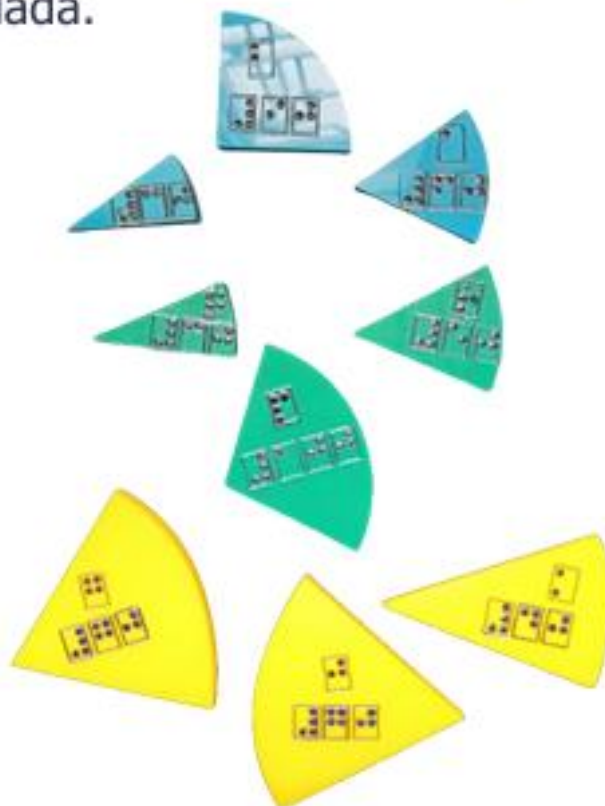
## Segmentos imantados

Son barras rectas de diferentes longitudes que representan los lados de los triángulos T2, T4 y T5, cada una nombrada con una letra, la cual está marcada en braille junto con su medida en centímetros. Estas representan los lados de los triángulos al momento de construir figuras nuevas.



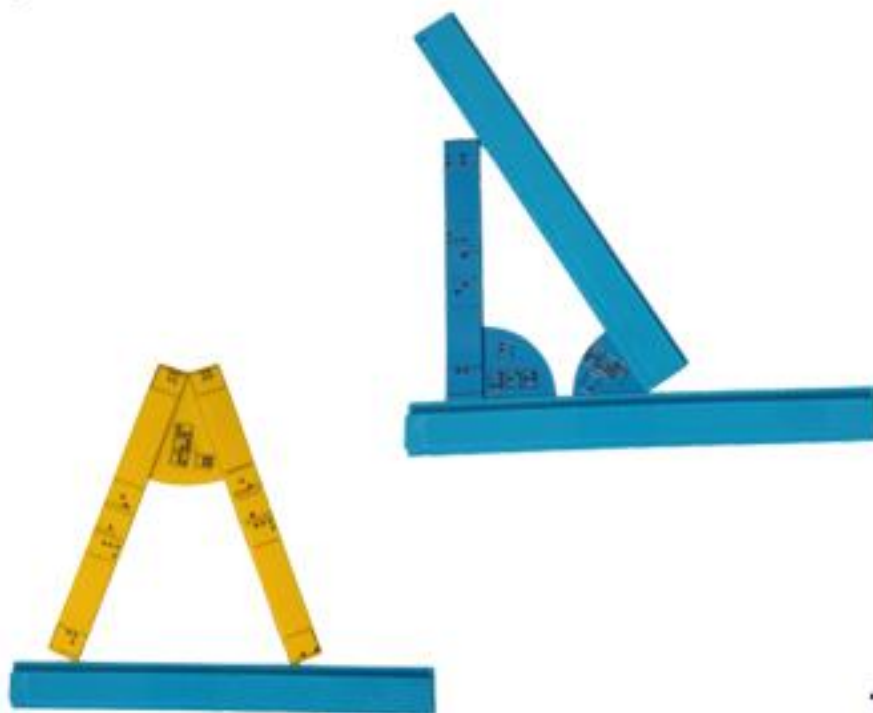
## Ángulos imantados

Es una pieza, con forma de punta que termina en un arco, por el lado en punta, se representa la medida de un ángulo en grados. Cada una nombrada con una letra la cual está marcada en braille junto con su medida. Permite graficar un ángulo con la medida dada.



# Segmentos complementarios (3 unidades)

Son piezas que tiene 20cm de longitud y sirven para conseguir segmentos que se ajusten a las construcciones realizadas.



# TAREAS

**TAREA 1:** Identificando triángulos congruentes

**Propósito:** Reconocer los triángulos que son congruentes y las y las características necesarias para que esto ocurra.

## Instrucciones

1. Explora los triángulos T1, T2 y T3.

¿Qué semejanzas y diferencias encuentras?

2. Usando la regla, mide los lados de cada triángulo.

Escribe o dicta las medidas en la siguiente tabla:

12

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
T1			
T2			
T3			

3. Usando el transportador, mide los ángulos de cada triángulo con el transportador.

Escribe o dicta las medidas en la siguiente tabla:

Triángulo	ángulo 1	ángulo 2	ángulo 3
T1			
T2			
T3			

4. Compara los resultados obtenidos.

¿Qué descubres al comparar las longitudes de los lados?

¿Qué hallazgos obtienes al comparar las amplitudes de los ángulos?

¿Qué sucede con T1 y T3? ¿Qué pasa con T2?

5. Reflexiona y responde:

¿Qué características deben tener dos triángulos para que sean congruentes?

## TAREA 2: Construye su gemelo

**Propósito:** Identificar las condiciones mínimas necesarias para construir un triángulo congruente a uno dado.

### Instrucciones

1. Explora el triángulo que te entregue el docente (T4).
2. Mide los lados del triángulo (T4) con la regla.

Escribe o dicta las medidas en la siguiente tabla:

Triángulo	Lado 1	Lado 2	Lado 3
T4			
T5			
T2			

3. Mide los ángulos del triángulo (T4) con el transportador.

Escribe o dicta las medidas en la siguiente tabla:

Triángulo	ángulo 1	ángulo 2	ángulo 3
T4			
T5			
T2			

4. Teniendo en cuenta las indicaciones del docente, elige tres piezas del material (segmentos o ángulos imantados) para construir un triángulo igual al T4.

¿Qué piezas decides usar y por qué?

5. Arma el triángulo en la base imantada con las piezas seleccionadas.

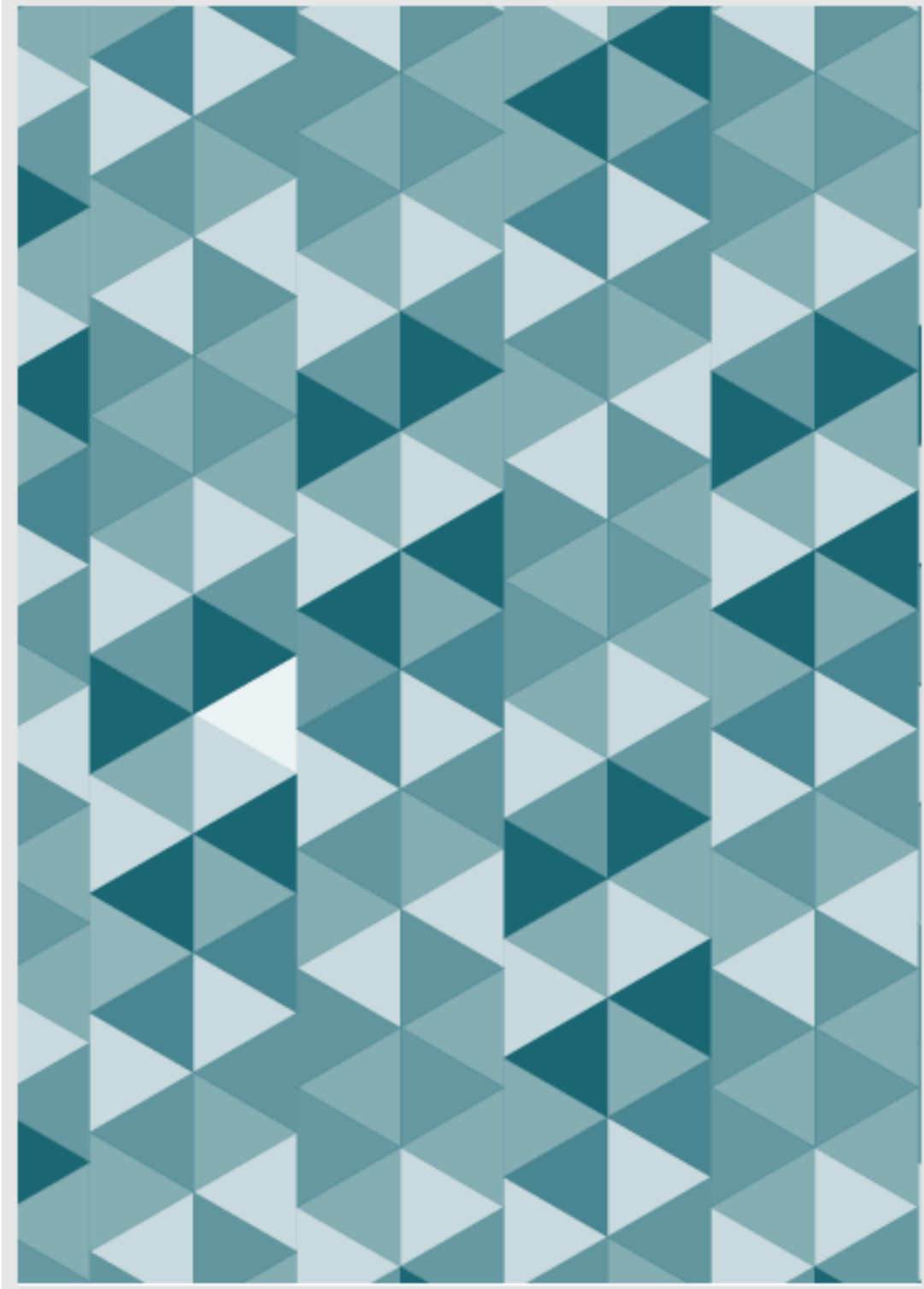
6. Verifica tu construcción superponiendo el triángulo dado (T4) sobre el que armaste.

¿Encajan perfectamente?

¿Por qué sí o por qué no?

7. Reflexiona sobre tu construcción y responde:

¿Qué aprendiste sobre las combinaciones de lados y ángulos que determinan un triángulo congruente?



**Anexo 3. Cartilla del estudiante en Braille**

