

**UNA PERSPECTIVA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, SUS DERIVADAS  
E INTEGRALES EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA.**

YENIFER PAOLA CEPEDA CARVAJAL

SINDY NATALIA ARÉVALO ROJAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D.C.

2019

**UNA PERSPECTIVA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, SUS DERIVADAS  
E INTEGRALES EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA.**

YENIFER PAOLA CEPEDA CARVAJAL

CC: 1010228409

Código: 2015140016

SINDY NATALIA ARÉVALO ROJAS

CC: 1077149786

Código: 2015140003

Trabajo de grado para optar el título de Licenciadas en Matemáticas

Director:

ORLANDO AYA C.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D.C.

2019

## **DEDICATORIA**

En primer lugar, quiero dedicar el presente trabajo a Dios, por ser guía en mi camino, por llenarme de sabiduría a lo largo de mis estudios y por cuidarme en cada paso que doy. A mis padres Armando y Aracelly y hermanos Diego y Katerine por su apoyo incondicional durante toda mi vida, por la confianza depositada en mí y por sus palabras de cariño y afecto que son un impulso para seguir adelante en el día a día.

Natalia Arévalo Rojas

A Dios por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón, iluminar mi mente y por su compañía durante todas mis etapas, a mis padres Fabio y Luz Marina y hermanos Jasson y Faiver por su amor y confianza incondicional, quienes, con su cariño, apoyo y paciencia sin importar nuestras diferencias, estuvieron en cada momento de mi vida haciéndola significativa, permitiéndome formar como ser humano y profesional.

Yenifer Paola Cepeda Carvajal

## **AGRADECIMIENTOS**


A Dios y a nuestras familias por brindarnos todo su apoyo y comprensión.

A nuestro director de tesis el profesor Orlando Aya, por compartir sus conocimientos y experiencias, por atender a nuestras dudas e inquietudes a lo largo del desarrollo del trabajo.

Al profesor Alberto Donado, por permitirnos implementar las actividades propuestas en su curso de Geometría analítica y a sus estudiantes por su disposición en la solución del mismo. A cada profesor que hizo que esto fuera posible.

A todas nuestras amigas, por su apoyo y momentos especiales a lo largo de la carrera.

Y finalmente la Universidad por habernos brindado tantas oportunidades.

|   |   |  |
|---|---|--|
| <br>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL<br><small>Escuela de Pedagogía</small> | <b>FORMATO</b>                              |  |
|   | <b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b> |  |
| Código: FOR020GIB   | Versión: 01                                 |  |
| Fecha de Aprobación: 10-10-2012   | Página 5 de 103                             |  |

| <b>1. Información General</b> |   |
|-------------------------------|---|
| <b>Tipo de documento</b>      | Trabajo de Grado  |
| <b>Acceso al documento</b>    | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central   |
| <b>Título del documento</b>   | Una perspectiva de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista.   |
| <b>Autor(es)</b>              | Cepeda Carvajal, Yenifer Paola; Arévalo Rojas, Sindy Natalia  |
| <b>Director</b>               | Aya Corredor, Orlando   |
| <b>Publicación</b>            | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 99p.   |
| <b>Unidad Patrocinante</b>    | Universidad Pedagógica Nacional.  |
| <b>Palabras Claves</b>        | MÉTRICA DEL TAXISTA; MÉTRICA EUCLIDIANA; CIRCUNFERENCIA UNITARIO; IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS; FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS; DERIVADA; INTEGRAL; RADIAN; GEOMETRÍA DINÁMICA. |

| <b>2. Descripción</b>  |
|--|
| <p>El presente trabajo de grado surge desde el interés de las autoras y dentro del proceso de formación profesional, con el fin de construir un sistema teórico sólido de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista y de este modo proveer a los estudiantes una serie de actividades, las cuales les permitan fortalecer procesos de visualización, exploración y conceptualización, teniendo en cuenta que generalmente los trabajos realizados en trigonometría se realizan con la métrica usual, lo que restringe el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Además, se diseñó un trabajo en el entorno GeoGebra® para facilitar y apoyar los procesos mencionados anteriormente.</p> |

| <b>3. Fuentes</b>  |
|--|
| <p>Para la elaboración del trabajo de grado se consultaron diversas fuentes, trabajos de grado, libros de texto, documentos de divulgación y proyectos de investigación, en los cuales sobresalen los trabajos de Thompson, K. y Dray. De otra parte, las fuentes existentes en métrica del taxista y, en particular, de las funciones trigonométricas resultaron muy limitadas. A continuación, se reporta la bibliografía en extenso:</p> <p>Alemán, J (2009). La Geometría con Cabri: Una Visualización a las Propiedades de los Triángulos (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Francisco Morazán, Tegucigalpa.</p> <p>Alfaro, N., Campos, S., Ilabaca, F., Ulloa, N. y Moncada, J. (2014). TIC en Enseñanza de la Estadística Descriptiva y el Aprendizaje Autónomo. Universidad Católica de Temuco, Chile.</p> <p>Ángel, M y Mayor, I. (2012). Un Estudio Descriptivo sobre las Estrategias de Solución que emplean</p> |

Algunos Estudiantes de Grado Décimo, Usando GeoGebra: Caso Área Bajo la Curva (Tesis de Especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Bahamon, L. y Bonelo, Y. (2015). Los Procesos de Construcción, Visualización y Razonamiento en el Desarrollo del Pensamiento Geométrico: un Experimento de Enseñanza (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Barboza, J (2013). Explorar y Descubrir para Conceptualizar en Geometría. Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia.

Bonilla, D., Parraguez, M., y Solanilla, L. (2014). Al fin de cuentas, ¿Qué es una recta en la Geometría del Taxista? Revista Tumbaga, V. 2, N. 10, pp. 53-68. ISSN 1909-4841

.Cárdenas, R y Parra, W. (2013). Estudio de la Métrica de Manhattan. Segmentos, Rectas, Rayos, Circunferencias y Algunos Lugares Geométricos en la Geometría del Taxista (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cendales, F. y Hernández, A. (2016). Definición y Descripción de una Función Asociada a la Métrica del Taxista (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Espinoza, H. (2016). Una Secuencia Didáctica sobre Conceptos de Topología Métrica para la Formación de Docentes de Matemáticas en la UNE "Enrique Guzmán y Valle" (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima.

García, G. y Rojas, A. (2012). Relación entre la Solución de Problemas de Optimización y la Variación en la Pendiente de la Recta Tangente a una Función a partir de la Visualización en Geometría Dinámica (Tesis de Especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Gómez, I. (2014). Visualización y Razonamiento. Creando Imágenes para Comprender las Matemáticas. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España.

González, J y Maestre, W. (2012). ¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la Conceptualización (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Marmolejo, G y Vega, M. (2012). La Visualización en las Figuras Geométricas: Importancia y Complejidad de su Aprendizaje. Educación matemática. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S166558262012000300002&lng=es&lng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166558262012000300002&lng=es&lng=es)

Mejía, C. (2014). Procesos de Conjeturación en una Clase de Geometría: El Papel del Profesor que usa GeoGebra a la Lu de la Teoría de la Mediación Semiótica (trabajo de grado de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Mendible, A; Ortiz, J. (2010). Conceptualización de Ideas Matemáticas en Ingeniería. Capítulo 2. Propuesta para la Enseñanza de las Matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23.

Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui. (2012). Los Registros Semióticos de Representación en Matemática. Revista Aula Universitaria. Recuperado de [file:///C:/Users/CFP-4726/Desktop/4112-10405-1PB%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/CFP-4726/Desktop/4112-10405-1PB%20(1).pdf)

Ruiz, N. (2013). Influencia del Software de Geometría Dinámica GeoGebra en la Formación Inicial del Profesorado de Primaria. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

Saidon, L. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado de

<https://app.geogebra.org/help/docues.pdf>

Stewart, J. (2008). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México. Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Quinta edición. México. Cengage Learning.

Tejero, J. (2015). Exploración del Calculo Integral desde el Contexto de la Geometría Dinámica (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Thompson, K. y Dray, T. (2012). Taxicab angles and trigonometry. El diario Pi Mu Epsilon.

Trejo, E. y Camarena, P. (2011). Análisis Cognitivo de Situaciones Problema con Sistemas de Ecuaciones Algebraicas en el Contexto del Balance de Materia. Educación Matemática. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v23n2/v23n2a4.pdf>

Valero, P. y Skovsmose, O. (2012). Educación Matemática Crítica. Una Visión Sociopolítica del Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Alrø, H. y Skovsmose, O. Aprendizaje Dialógico en la Investigación Colaborativa (Pág. 149-170) Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación; Ediciones UniAndes.

#### 4. Contenidos

El presente documento se estructura bajo seis apartados; en el primero de ellos se describen los documentos consultados previamente al establecimiento de los objetivos a desarrollar en el mismo tanto desde el contexto matemático, tecnológico como didáctico. En el segundo apartado se abordan algunos aspectos generales de la métrica del taxista como definición, propiedades e historia, entre otros; también se incluyen las construcciones de funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista con sus respectivas representaciones gráficas. En el tercero se presentan algunas características del recurso tecnológico a usar en el desarrollo del trabajo y una descripción de los procesos de visualización, exploración y conceptualización que se buscan fortalecer con el trabajo orientado en un entorno mediado por dicho recurso; en el cuarto apartado se consolida la propuesta didáctica para la implementación de las actividades, y en con ello se construye y analiza cada uno de los ítems a proponer en las mismas; en el quinto, se presentan los resultados obtenidos luego de la implementación de las actividades en relación con lo propuesto en el apartado anterior. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del documento en cuanto al marco matemático, uso del recurso tecnológico, propuesta didáctica y la implementación de las actividades.

#### 5. Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo, lo primero que se realizó fue una búsqueda bibliográfica en cuanto a estudios realizados de la métrica del taxista, con base en esto, se construyeron las definiciones de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales con el apoyo de las representaciones graficas generadas por el recurso tecnológico implementado (GeoGebra®). En seguida se diseñaron las actividades que se implementaron en el curso de la línea de Geometría del programa de formación inicial de profesores denominado Geometría Analítica del proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Finalmente se analizaron los resultados obtenidos de dicha implementación.

En este sentido la metodología puede ser caracterizado en una metodología del diseño interacción – acción.

## 6. Conclusiones

A continuación, se presentan las principales conclusiones generadas luego del desarrollo del presente trabajo, las mismas fueron estructuradas en relación con los tres marcos de acción propuestos desde el diseño del trabajo, es decir desde los marcos matemático, tecnológico y didáctico. Igualmente se presentan algunas conclusiones tanto desde la implementación de la propuesta de actividades como desde lo que el trabajo aportó a la formación profesional de las autoras.

En el marco matemático se caracterizan las construcciones de las funciones trigonométricas, sin cambiar las definiciones conocidas, pero sí la métrica, donde se observó un cambio drástico en las representaciones gráficas, en tanto los objetos que se conceptualizan tienen representaciones restringidas en la mayoría de casos.

En las construcciones de las funciones derivada e integral de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista, se identificó que la representación gráfica y las ecuaciones de estas funciones cambian aunque se trabajó con los conceptos y las definiciones sin alterarlos, y en este cambio se destaca que las funciones obtenidas no se relacionan con la métrica euclidiana.

El software GeoGebra® jugó un papel muy importante en el desarrollo del trabajo pues permitió comprobar los procesos que se estaban llevando a cabo por medio de las representaciones gráficas, las cuales servían como medio para verificar si los procesos realizados eran coherentes con lo que se estaba construyendo.

En cuanto al diseño e implementación de archivos en el software GeoGebra®, para la conceptualización de las funciones trigonométricas sus derivadas e integrales, fue posible evidenciar que estos resultaron ser, en su diseño, una herramienta bastante provechosa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas, puesto que efectivamente contribuyeron al desarrollo de los procesos propuestos en el marco tecnológico.

Con respecto al marco didáctico, establecido para el desarrollo de las actividades es posible considerar que resultó ser una buena alternativa para potenciar en los estudiantes procesos de conceptualización, ya que a partir de la visualización y exploración se logró que algunos estudiantes identificarán elementos y características tanto de las representaciones algebraicas como gráficas de los archivos de GeoGebra®, lo cual no solo mejora los procesos de razonamiento en los estudiantes sino que también favorece habilidades para la construcción y el descubrimiento de definiciones y relaciones entre los objetos matemáticos. Sin embargo aunque dicha metodología sea relativamente innovadora y se haga uso de herramientas no usadas comúnmente en la clase; no es posible alcanzar por completo lo esperado en cuanto al proceso de conceptualizar autónomamente, puesto que los estudiantes presentan cierto apego a los conocimientos ya establecidos con anterioridad y les cuesta bastante trabajo desaprender estos y trabajar en la construcción de nuevos conocimientos y a esto se suma que las prácticas educativas hacen que ellos estén más habituados a que se les indique “que tienen que hacer” que a un proceso donde deban dar cuenta de lo que hacen o de por qué aparecen ciertos resultados.

El desarrollo de las actividades favoreció el trabajo con diversos sistemas de representación y permitió que varios estudiantes rompieran con paradigmas establecidos con anterioridad, en cuanto a las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales; por medio de la construcción secuencial de los mismos.

|                       |  |
|-----------------------|--|
| <b>Elaborado por:</b> | Cepeda Carvajal, Yenifer Paola; Arévalo Rojas, Sindy Natalia |
| <b>Revisado por:</b>  | Aya Corredor, Orlando  |

|  |    |    |      |
|--|----|----|------|
| <b>Fecha de elaboración del Resumen:</b> | 14 | 02 | 2019 |
|--|----|----|------|

# ÍNDICE GENERAL

|  |           |
|--|-----------|
| INTRODUCCIÓN .....   | 1         |
| Justificación.....   | 3         |
| Objetivos .....  | 5         |
| <b>1. Marco de Antecedentes.....</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2. Marco Matemático.....</b>  | <b>10</b> |
| <b>2.1 Generalidades de la métrica del taxista .....</b>                                 | <b>10</b> |
| 2.1.1 <i>Historia de la métrica del taxista.....</i>                                     | 10        |
| 2.1.2 <i>Definición de distancia entre dos puntos en la métrica del taxista.....</i>     | 11        |
| 2.1.3 <i>Propiedades de la distancia entre dos puntos en la métrica del taxista.....</i> | 11        |
| 2.1.4 <i>Definición de circunferencia en la métrica del taxista.....</i>                 | 11        |
| 2.1.5 <i>Perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.....</i>      | 12        |
| <b>2.2 Definición de unidad de medida de ángulo.....</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>2.3 Definición de las razones trigonométricas en la métrica del taxista.....</b>      | <b>13</b> |
| 2.3.1 <i>Seno en la métrica del taxista.....</i>   | 13        |
| 2.3.2 <i>Gráfica de la función Seno<sub>T</sub>.....</i>                                 | 15        |
| 2.3.3 <i>Coseno en la métrica del taxista.....</i>                                       | 15        |
| 2.3.4 <i>Gráfica de la función Coseno<sub>T</sub>.....</i>                               | 16        |
| 2.3.5 <i>Tangente en la métrica del taxista.....</i>                                     | 17        |
| 2.3.6 <i>Gráfica de la función Tangente<sub>T</sub>.....</i>                             | 18        |
| 2.3.7 <i>Cotangente en la métrica del taxista.....</i>                                   | 19        |
| 2.3.8 <i>Gráfica de la función Cotangente<sub>T</sub>.....</i>                           | 20        |
| 2.3.9 <i>Secante en la métrica del taxista.....</i>                                      | 21        |
| 2.3.10 <i>Gráfica de la función Secante<sub>T</sub>.....</i>                             | 22        |
| 2.3.11 <i>Cosecante en la métrica del taxista.....</i>                                   | 23        |
| 2.3.12 <i>Gráfica de la función Cosecante<sub>T</sub>.....</i>                           | 24        |
| <b>2.4 Derivada desde la definición .....</b>  | <b>25</b> |
| <b>2.5 Construcción de las derivadas de las funciones trigonométricas.....</b>           | <b>25</b> |
| 2.5.1 <i>Derivada de la función Seno<sub>T</sub>.....</i>                                | 25        |
| 2.5.2 <i>Derivada de la función Coseno<sub>T</sub>.....</i>                              | 27        |
| 2.5.3 <i>Derivada de la función Tangente<sub>T</sub>.....</i>                            | 28        |
| 2.5.4 <i>Derivada de la función Cotangente<sub>T</sub>.....</i>                          | 31        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| 2.5.5      | <i>Derivada de la función Secante<sub>T</sub></i> .....                      | 32        |
| 2.5.6      | <i>Derivada de la función Cosecante<sub>T</sub></i> .....                    | 33        |
| <b>2.6</b> | <b>Integral desde la definición</b> .....                                    | <b>34</b> |
| <b>2.7</b> | <b>Construcción de las integrales de las funciones trigonométricas</b> ..... | <b>35</b> |
| 2.7.1      | <i>Integral de la función Seno<sub>T</sub></i> .....                         | 35        |
| 2.7.2      | <i>Integral de la función Coseno<sub>T</sub></i> .....                       | 36        |
| 2.7.3      | <i>Integral de la función Tangente<sub>T</sub></i> .....                     | 38        |
| 2.7.4      | <i>Integral de la función Secante<sub>T</sub></i> .....                      | 40        |
| <b>3.</b>  | <b>Marco Tecnológico</b> .....   | <b>42</b> |
| 3.1        | <b>Software de Geometría dinámica: GeoGebra®</b> .....                       | <b>42</b> |
| 3.2        | <b>Ventajas y desventajas de GeoGebra®</b> .....                             | <b>42</b> |
| 3.3        | <b>Visualización, exploración y conceptualización en Geogebra®</b> .....     | <b>43</b> |
| 3.3.1      | <i>Visualización</i> .....   | 43        |
| 3.3.2      | <i>Exploración</i> .....   | 44        |
| 3.3.3      | <i>Conceptualizar</i> .....  | 45        |
| <b>4.</b>  | <b>Marco Didáctico</b> .....   | <b>47</b> |
| 4.1        | <b>Propuesta didáctica</b> .....   | <b>47</b> |
| 4.1.1      | <i>Actividad 1 (Ver Anexo 1)</i> .....                                       | 47        |
| 4.1.2      | <i>Actividad 2 (Ver Anexo 2)</i> .....                                       | 48        |
| 4.1.3      | <i>Actividad 3 (Ver Anexo 3)</i> .....                                       | 49        |
| 4.1.4      | <i>Actividad 4 (Ver Anexo 4)</i> .....                                       | 50        |
| <b>5.</b>  | <b>Análisis de las actividades implementadas</b> .....                       | <b>52</b> |
| 5.1        | <b>Actividad 1</b> .....   | <b>52</b> |
| 5.2        | <b>Actividad 2</b> .....   | <b>55</b> |
| 5.3        | <b>Actividad 3</b> .....   | <b>58</b> |
| 5.4        | <b>Actividad 4</b> .....   | <b>60</b> |
| <b>6.</b>  | <b>Conclusiones</b> .....  | <b>63</b> |
| 6.1        | <b>Desde el marco matemático</b> .....                                       | <b>63</b> |
| 6.2        | <b>Desde el marco tecnológico</b> .....                                      | <b>63</b> |
| 6.3        | <b>Desde el marco didáctico</b> .....  | <b>64</b> |
| 6.4        | <b>Desde la Implementación de las actividades</b> .....                      | <b>64</b> |
| <b>7.</b>  | <b>Referencias</b> .....   | <b>66</b> |
| <b>8.</b>  | <b>Anexos</b> .....  | <b>69</b> |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>8.1</b> | <b>Anexo 1 (Actividad 1 “Introducción a la métrica del taxista”)</b> .....                                | <b>69</b> |
| <b>8.2</b> | <b>Anexo 2 (Actividad 2 “Funciones trigonométricas en la métrica del taxista”)</b> .....                  | <b>73</b> |
| <b>8.3</b> | <b>Anexo 3 (Actividad 3 “Derivadas de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista”)</b> ..... | <b>78</b> |
| <b>8.4</b> | <b>Anexo 4 (Actividad 4 “Integrales de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista”</b> ..... | <b>82</b> |
| <b>8.5</b> | <b>Anexo 5 (Actividad implementada)</b> .....   | <b>87</b> |

## INTRODUCCIÓN

El presente documento tiene como fin describir el análisis realizado a lo largo del desarrollo del trabajo de grado con respecto a las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista, que surgió como un interés de las autoras a lo largo de los diferentes seminarios de su proceso de formación como licenciadas en matemáticas, ya que encontraron en esta temática un eje articulador de diferentes campos de las matemáticas y una oportunidad para proponer una serie de actividades que permitieran conceptualizar, generalizar y visualizar algunos objetos matemáticos en relación con funciones trigonométricas construidas en la métrica del taxista.

Si bien se han realizado a nivel mundial varios estudios sobre la métrica del taxista desde la década de los 70's del siglo pasado, muy pocos se han llevado a cabo en relación con objetos propios del análisis matemático como las derivadas y las integrales de funciones y particularmente de las funciones trigonométricas.

De otra parte, y como ya se indicó, en el presente trabajo se pretende no sólo hacer un análisis de los objetos particulares de la matemática sino a la vez hacer una propuesta para la enseñanza de los mismos, dentro de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, que les permita dar un sentido más amplio a los objetos matemáticos que circulan en el aula, algunos de manera explícita como son las funciones, las derivadas y las integrales y algunos de manera implícita como la métrica y la distancia.

En este sentido, el documento presentará al lector tres marcos; en el primero se encontrarán algunas generalidades de la métrica del taxista junto algunas nociones importantes y las construcciones de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista, con base en un análisis de las representaciones de dichas funciones en esta métrica y las características de las funciones en la métrica usual (métrica euclidiana). En el segundo se encontrará la descripción de un recurso tecnológico y los procesos de visualización, exploración y conceptualización, que se pretende fortalecer con el uso del mismo; luego en el tercer marco, se construirá y realizará el análisis de unas actividades a implementar en relación con el tema a trabajar, con las cuales se pretende promover los procesos antes mencionados en la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista.

Por último, se presentan las conclusiones que se lograron deducir del desarrollo del presente documento y de la implementación de la actividad propuesta.

## Justificación

La conceptualización de los objetos está vinculada a sus diferentes representaciones y también a la forma en cómo están definidos (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012), sin embargo, estos dos aspectos esenciales en ocasiones quedan ocultos en los procesos de enseñanza y aprendizaje tanto en la educación básica y media como en la superior. Particularmente en la trigonometría, la mayor parte de los trabajos se realizan con la métrica usual, donde los objetos que se conceptualizan tienen representaciones restringidas, lo que limita el alcance que se pueda tener sobre los conceptos en sí. Algunos intentos por superar estas restricciones se han realizado en cursos específicos de programas profesionales, como en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en los espacios académicos de Geometría Analítica y Geometrías no Euclidianas.

Una de las actividades que permite ver la diferencia entre la definición y la representación es precisamente el cambio de métrica, una alternativa que se puede dar de manera explícita y sin demasiados requerimientos de tiempo y de formalización es el cambio de la métrica usual por la “métrica del taxista” o “métrica Manhattan”. Sin embargo, y paradójicamente, una de las dificultades es que existen pocas referencias bibliográficas frente a cómo llevar el trabajo con esta métrica a las aulas.

De este modo surge desde el interés profesional de las autoras y dentro del proceso de formación como licenciadas en matemáticas, realizar una ampliación y recopilación sobre la conceptualización de algunos objetos en esta métrica, en especial de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales y proporcionar una serie de actividades que permitan al estudiante obtener una perspectiva diferente de los objetos ya mencionados.

Es precisamente en el contexto de las representaciones y de la construcción de objetos geométricos dónde el uso de las tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) puede apoyar procesos que fortalecen la conceptualización de los objetos: como los procesos de visualización, conjeturación, generalización y la propia conceptualización de los objetos. Por lo tanto, se diseñará un contexto de enseñanza y aprendizaje en GeoGebra® que facilite y apoye los procesos antes mencionados en el entorno de geometría dinámica, favoreciendo así de manera específica el proceso de aprendizaje. (Alfaro, Campos, Ilabaca, Ulloa y Moncada, 2014).

Así se espera que el presente documento aporte un campo de trabajo de interés para los profesionales de la educación matemática y sirva de insumo para nuevos trabajos que inviten a repensar las formas en que los objetos y procesos matemáticos son abordados en las aulas.

## Objetivos

En relación a la temática a tratar en el trabajo de grado, como **objetivo general** se plantea:

- Estudiar las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista, por medio de la transformación y simulación de estas, usando las definiciones usuales.

De acuerdo a lo anterior, se presentan los siguientes **objetivos específicos**:

- Explorar, visualizar y conceptualizar los comportamientos de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista apoyadas en un entorno de geometría dinámica.
- Conocer y analizar los comportamientos de las derivadas e integrales de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista a través de las definiciones.
- Diseñar actividades en un entorno de geometría dinámica que involucre los temas a tratar, para estudiantes de geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con el fin de ampliar sus conocimientos sobre esta métrica en particular con los estudios de las funciones trigonométricas.

## 1. Marco de Antecedentes

En pro de enriquecer la presente propuesta, se realizó una indagación teórica en diferentes marcos que aporten al mismo. En éste sentido se proponen tres marcos básicos, uno matemático, otro tecnológico y finalmente uno didáctico.

Para el desarrollo del marco matemático se encontraron algunos documentos en relación al trabajo a realizar, uno de estos fue “Definición y descripción de una función asociada a la métrica del taxista” elaborado por Cendales y Hernández (2016), quienes trabajaron con una función llamada *lejanía* la cual está determinada por distancias definidas en la métrica del taxista. En este documento por medio de un análisis de las propiedades de la función y la métrica ya nombradas, se quería saber si esta función cumple con las características de un espacio métrico. Dentro de las conclusiones de este trabajo se logró establecer que la función *lejanía* no cumple con la desigualdad triangular en algunos puntos del plano. Paralelo a esto, se hace algunas generalidades respecto a esta desigualdad por tramos, aunque la función *lejanía* no se define como una métrica, si se analiza las nociones topológicas de esta función. De este trabajo se destaca las propiedades de la métrica del taxista y la forma de abordarlas como lo es la desigualdad triangular y las formas de caracterizar una función.

Otra fuente de investigación fue el documento “Estudio de la métrica de Manhattan. Segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista.” elaborado por Cárdenas y Parra (2013), que buscaba representar algunos objetos geométricos (ángulo, segmento, circunferencia, punto medio, colinealidad, rayos, entre otros) en la métrica de taxista con base en las definiciones que se dan de estos objetos en los cursos de la línea de Geometría del programa de formación inicial de profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Las representaciones de los objetos desde su definición se realizó en un entorno de Geometría Dinámica, particularmente en Cabri Geometry II® ya que resultaba importante, dada a la animación y manipulación de objetos, como medio de validación de algunos teoremas (distancia entre dos puntos, existencia del punto medio, localización de puntos), postulados ( recta, medida de ángulo, puntos en el plano, adicción de medida de segmento...) y nociones en relación a los objetos geométricos mencionados (colinealidad entre puntos, paralelismo y perpendicularidad, entre otros). También se realizó la

demostración de la métrica del taxista como espacio métrico, donde se caracterizan sus propiedades, para analizar algunos objetos geométricos como lo es segmentos a partir de la definición de “interestancia entre puntos para la métrica del taxista<sup>1</sup>”, y las diferentes representaciones que surgen del objeto desde dicha definición.

De este documento se destaca que a partir de la interestancia entre puntos y su relación con la definición de distancia, los objetos que pertenecen a una recta como son los segmentos, rayos y los relacionados con estos, cambian de representación o tienen varias representaciones que dependen de su ubicación en el plano. Dado lo anterior, se hace un análisis de los teoremas y postulados de tal forma que, partiendo de un antecedente y dado un análisis desde sus definiciones, contrastan sus consecuentes. De este trabajo se concluyen algunos aspectos relevantes al presente trabajo de grado, en particular es la no existencia de los ángulos y la imposibilidad de estudiar alguna relación entre la noción de este y de triángulos, dado que ninguno de ellos existe en esta geometría si se toman como base las definiciones<sup>2</sup> y construcciones realizadas.

Un último documento que se quiere destacar para el marco matemático, dado que presenta un contraste con el presente trabajo y la posibilidad de trabajar con medida de ángulos y algunas nociones importantes, es “Taxicab angles and trigonometry” elaborado por Thompson y Dray (2012), el cual caracteriza la noción de medida de ángulo en la métrica del taxista y presenta algunos conceptos y definiciones de las funciones trigonométricas en esta métrica, junto con algunas representaciones y propiedades de las mismas. En el marco matemático se harán explícitos los elementos y objetos que se retoman en la construcción de la propuesta desarrollada en este trabajo.

Con respecto al marco tecnológico, se hallaron diversas fuentes con información valiosa. Una de ellas es la de González y Maestre (2012), titulada “¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la conceptualización”, donde proponen una secuencia de cuatro actividades con el fin de construir y formalizar el concepto de semejanza, a partir de procesos de visualización, conceptualización e instrumentalización haciendo uso de software Cabri Geometry II® y del pantógrafo. La

---

<sup>1</sup> Definición de interestancia entre puntos para la métrica del taxista: el punto  $B$  está entre  $A$  y  $C$  si se cumple la siguiente condición:  $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ . (Cárdenas y Parra, 2013)

<sup>2</sup> Definición de ángulo: Es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y tiene el mismo origen. (Cárdenas y Parra, 2013)

Definición de triángulo: Dados tres puntos no colineales, es la unión de los tres segmentos que conectan los puntos. (Cárdenas y Parra, 2013)

implementación de las mismas permitió a las autoras reconocer la pertinencia del uso de estas herramientas para la construcción del concepto matemático antes mencionado, ya que de una u otra manera estos aportan a la construcción de los mismos. Este trabajo reforzó el supuesto de las autoras para desarrollar una secuencia de actividades en un entorno de geometría dinámica que sea medio para que, a partir de procesos de visualización y exploración, se logren conceptualizar los objetos matemáticos.

Por su parte García y Rojas (2012), en su trabajo denominado “Relación entre la solución de problemas de optimización y la variación en la pendiente de la recta tangente a una función a partir de la visualización en geometría dinámica”, centran su atención en el proceso específico de visualización por medio del uso de software, para esto proponen dos problemas, los cuales se modelan en el software GeoGebra®. Estas modelaciones contienen información sobre el problema y los elementos que se desea que los estudiantes observen para que, a partir de la percepción de su variación, los estudiantes lleguen a visualizar las relaciones existentes con el fin de generalizar comportamientos y situaciones. De manera simultánea con el diseño de actividades en GeoGebra® se generen aplicativos en Google Docs (uno por cada actividad) con el fin de guiar a los estudiantes en el entorno de GeoGebra® y cuestionarlos acerca de los objetos observados y la situación problema. Dada la implementación de la actividad les fue posible reconocer la pertinencia del proceso para afianzar la visualización que a su vez permitiera establecer relaciones entre los diferentes elementos de un determinado problema o situación. Dentro de las conclusiones, las autoras mencionan que es necesario el acompañamiento permanente del docente para apoyar el proceso de visualización, ya que lo relevante no es la solución del problema en sí, sino que más bien el proceso en la solución es el pretexto para se logren establecer una serie de estrategias generales (heurísticas) y que se fortalezcan sus habilidades para los procesos de generalización. De acuerdo con esto se consideró la importancia del proceso de visualización para el desarrollo de las actividades que se propondrán en el presente trabajo.

Otro referente relevante en el desarrollo del presente trabajo fue “Un Estudio Descriptivo sobre las Estrategias de Solución que emplean Algunos Estudiantes de Grado Décimo, Usando GeoGebra: Caso Área Bajo la Curva.” de Ángel y Mayor (2012), quienes propusieron una serie de problemas en los cuales intervenía el concepto de área bajo la curva, para la solución de estos

se hacía uso del software de GeoGebra®. Luego de la implementación de las de actividades propuestas, se obtuvieron lo que los autores denominan “buenos resultados”, ya que se logró que los estudiantes tuvieran una mayor comprensión del concepto en mención, haciendo uso del software con el fin de no sólo encontrar solución a los problemas propuestos, sino para conjeturar, verificar y aproximar el proceso de resolución. Los autores resaltan que en el entorno de Geometría Dinámica se desarrolla el interés y la creatividad del estudiante. Con base en esto se vio a la necesidad de hacer uso de un software como GeoGebra®, a la hora de proponer las distintas actividades que se planeaban realizar como propuesta del presente trabajo.

En cuando al marco didáctico se emplea como documento orientador: “Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza” de Bahamon y Bonelo (2015). En su trabajo los autores, buscan caracterizar las actividades que promueven en los estudiantes procesos de conceptualización, visualización y razonamiento, para lo cual, propusieron una serie de actividades las cuales tenían como fin promover los procesos mencionados anteriormente. La implementación de las actividades propuestas no solo les permitió a los autores corroborar la pertinencia de las mismas para fortalecer los procesos de conceptualización, ya que estas requerían de algunas formas de razonamiento que aportan resultados significativos en el proceso de aprendizaje; si no que también les permitió reconocer la importancia del uso del lenguaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que el hecho de preguntar con algún tipo de intención exige que los estudiante puedan expresar lo ven por medio de enunciados, ejemplos o situaciones. Sin embargo, esto resulta ser una dificultad para los estudiantes, ya que les cuesta trabajo expresar todo lo que visualizan en un lenguaje adecuado y con algún grado de rigor matemático que esté más allá de la informalidad o del lenguaje corriente.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, luego de la implementación de las actividades, y para superar la dificultad mencionada en el párrafo anterior, se propuso desarrollar una serie de actividades que fortalecieran los procesos de conceptualización, visualización y razonamiento, los cuales estaban enmarcados por el enfoque de Duval (citado en Marmolejo y Vega, 2012) en su obra “Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”, que se convirtió en la base necesaria para el proceso de enseñanza de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista.

## 2. Marco Matemático

En este apartado se hace una breve presentación de las generalidades de la métrica del taxista, la definición de distancia y las propiedades de ésta. Se describirá la definición de circunferencia unitaria y su perímetro para luego definir medida de ángulo.

Una vez definida la medida de un ángulo en esta métrica, se abordarán las funciones trigonométricas para cualquier ángulo a través de la circunferencia unitaria, para posteriormente analizar las representaciones gráficas y algebraicas de las mismas. Finalmente, haciendo uso de las definiciones básicas de derivada e integral y las construcciones realizadas de las funciones trigonométricas, se planteará de forma algebraica y gráfica las derivadas e integrales de las funciones trigonométricas en esta métrica.

### 2.1 Generalidades de la métrica del taxista

A continuación, se hablará de algunos aspectos generales en relación con la métrica del taxista, también conocida como métrica de Manhattan, se presentará una breve referencia histórica de esta métrica, junto con algunas definiciones y propiedades necesarias para el desarrollo del presente documento.

#### 2.1.1 *Historia de la métrica del taxista.*

La geometría del taxista, fue considerada por primera vez por Hermann Minkowski en el siglo XIX, al cambiar la distancia euclidiana entre dos puntos en el plano por la distancia en una nueva métrica que posteriormente recibiría el nombre de la métrica del taxista o métrica Manhattan (también denominada en la literatura como “Taxicab Metric”). Fue precisamente en 1952 cuando Menger, propuso el nombre de “métrica del taxista”, en alusión a la manera como un automóvil recorre las calles y avenidas de una ciudad, considerada esta como distribuida perfectamente en calles y carreras, como ocurría en ciertos sectores de la ciudad de Manhattan.

A finales de la década de los 70's y comienzos de los 80's, se retomaron las investigaciones de esta métrica, particularmente en el libro de Krause de 1975 y en algunos artículos de “*The Pi Mu Epsilon*” *Journal*. Así, la métrica del taxista se volvió un tema de estudio recurrente en los programas de matemáticas e incluso de formación de profesores de matemáticas. Sin embargo, el verdadero desarrollo de la Geometría del Taxista en los contextos de la educación matemática y la importancia que tenía el estudio para la comprensión conceptual de la métrica se dio en el año 1997, gracias a los trabajos Rüstem Kaya en Turquía, lo cuales obtuvieron divulgación desde

dicho año y hasta 2010, y por lo que es considerado, hoy día, el autor más prolífico en este campo (Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014).

### 2.1.2 Definición de distancia entre dos puntos en la métrica del taxista.

Se define la distancia entre los puntos  $A = (x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  como  $d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  (Cárdenas y Parra, 2013).

A partir de ahora, cuando se hable de distancia entre dos puntos en la métrica del taxista la denotaremos  $d_T(A, B)$  donde  $A, B$  son puntos que pertenecen a  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.1.3 Propiedades de la distancia entre dos puntos en la métrica del taxista.

En esta métrica se satisfacen las propiedades de la definición de espacio métrico, a saber:

- $d_T(A, A) = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^2$
- $d_T(A, B) > 0$  Si  $A \neq B$
- $d_T(A, B) = d_T(B, A)$
- $d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$

Estas propiedades serán utilizadas de forma directa e indirecta en el desarrollo de las ideas presentadas en el presente documento.

### 2.1.4 Definición de circunferencia en la métrica del taxista.

Tomando la definición general de circunferencia como el conjunto de puntos de un plano que se encuentra a la misma distancia de un punto fijo llamado centro, la cual es independiente de la métrica, se puede realizar la representación gráfica del objeto caracterizado en la definición, en la *Figura 1* se puede observar la representación gráfica, en un plano en la métrica del taxista, de la circunferencia con radio 1, con centro en el origen, o también llamada circunferencia unitaria.

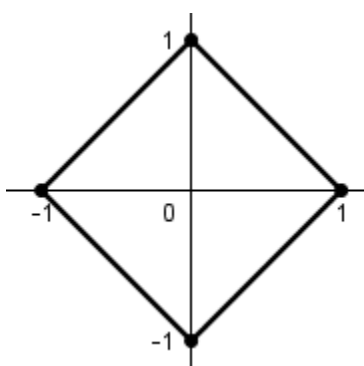


Figura 1. Circunferencia unitaria. Elaboración propia.

### 2.1.5 Perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.

El perímetro de la circunferencia unitaria en esta métrica es 8, ya que se considera el perímetro de una figura como la suma de la medida de los lados. De acuerdo con esto se hallará la medida de uno de los lados de la circunferencia unitaria.

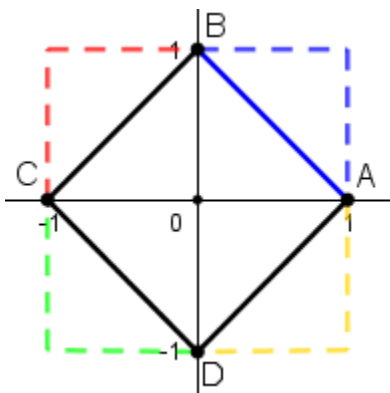


Figura 2. Representación del perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.  
Elaboración propia usando software Geogebra®.

Para hallar dicha medida, se hará uso de la definición de distancia en la métrica del taxista. En primer lugar se toma un par de coordenadas (las de los puntos  $A$  y  $B$ ), para este caso se trabaja con las coordenadas del lado señalado (lado de color azul) de la Figura 2, en tanto se tiene como coordenadas  $A(1,0)$  y  $B(0,1)$ , aplicando la definición.

$$d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d_T(A, B) = |1 - 0| + |0 - 1|$$

$$d_T(A, B) = |1| + |-1|$$

$$d_T(A, B) = 2$$

Y como los lados son congruentes se tiene,

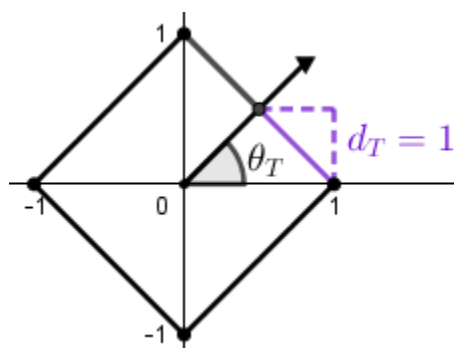
$$P_T = 4(2)$$

$$P_T = 8$$

Así la representación de  $\pi$  en esta métrica,  $\pi_T$  será 4 ya que para la circunferencia debería cumplirse que  $P_T = 2\pi_T r$  y al ser la circunferencia unitaria se tendría que  $8 = 2\pi_T$  de donde se tiene que  $\pi_T = 4$ .

## 2.2 Definición de unidad de medida de ángulo

Dado que la definición de ángulo usual<sup>3</sup>, en esta métrica no está definida de acuerdo a lo mencionado en Cárdenas y Parra (2013); pero se considerará la definición de medida de ángulo, la cual tiene como unidad de medida  $t$ -radian de Thompson y Dray (2012) que afirman: “Un  $t$ -radian es un ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia unitaria e intercepta un arco de unidad de longitud 1”, estos definidos en la métrica del taxista. Con el fin para hacerla análoga a la definición del radian en la métrica usual, esto es un ángulo que subtiende un arco de la misma medida que el radio. Por lo tanto, se puede afirmar que un  $t$ -radianes es la longitud del arco de circunferencia subtendida por el ángulo cuando el arco de circunferencia es igual a uno, como muestra en la *Figura 3*:



*Figura 3.* Circunferencia unitaria donde se ilustra un  $rad_T$ . Elaboración propia usando software Geogebra®

Se toma la definición de Thompson y Dray (2012) de  $t$ -radian, pero se realiza una adaptación sobre la notación por cuestiones de claridad, así se toma la definición y se denotará como  $rad_T$ . De este modo una circunferencia en la métrica del taxista subtiende  $8 rad_T$ <sup>4</sup>.

## 2.3 Definición de las razones trigonométricas en la métrica del taxista

Siguiendo el documento de Thompson y Dray (2012) y Stewart, Redlin y Watson (2007), se deducen las siguientes razones trigonométricas en la métrica del taxista.

### 2.3.1 Seno en la métrica del taxista.

El seno es el valor que cae sobre la recta real del eje de las ordenadas al determinar el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el ángulo, como se observa en la *Figura 4*, para evitar confusiones se llamará  $SenO_T$  y se denotará por  $Sen_T\theta_T$ .

<sup>3</sup> Definición de ángulo: Es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y tiene el mismo origen. (Cárdenas y Parra, 2013)

<sup>4</sup> Se realiza el cambio de notación para evitar que se lea a  $t$  como una variable o un parámetro.

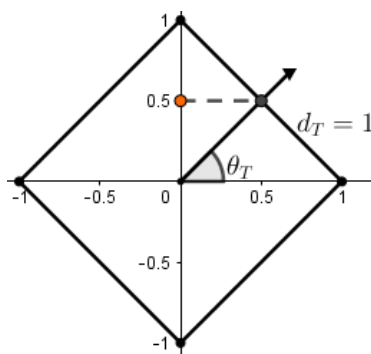


Figura 4. Circunferencia unitaria donde se ilustra el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el ángulo y valor que cae de esta intersección en el eje de las ordenadas. Elaboración propia usando software Geogebra®.

Para determinar  $\text{Sen}_T \theta_T$  se trabajará por los cuadrantes que determina el plano cartesiano. Como se vio en el apartado donde se definió medida ángulo:

- En el cuadrante I, el ángulo  $\theta_T$  varía de 0 a  $2 \text{ rad}_T$ .

Para este primer cuadrante se escogen dos puntos que determinan a  $\text{Sen}_T \theta_T$ , si  $(\theta_T, \text{Sen}_T \theta_T)$ , entonces se tiene a  $(0,0)$  y  $(2,1)$ , acorde a lo ya trabajado, se puede decir que  $m = \frac{1}{2}$  y  $b = 0$ , por tanto  $\text{Sen}_T \theta_T = \frac{1}{2} \theta_T$  en el intervalo  $0 \leq \theta_T \leq 2$ .

- En el cuadrante II, el ángulo  $\theta_T$  varía de 2 a  $4 \text{ rad}_T$ .

En el segundo cuadrante se escogen los puntos  $(2,1)$  y  $(4,0)$ , se sigue que  $(\theta_T, \text{Sen}_T \theta_T)$ , por tanto  $m = -\frac{1}{2}$  y  $b = 2$ , así se determina  $\text{Sen}_T \theta_T = 2 - \frac{1}{2} \theta_T$  en el intervalo  $2 \leq \theta_T \leq 4$ .

- En el cuadrante III, el ángulo  $\theta_T$  varía de 4 a  $6 \text{ rad}_T$ .

Para este cuadrante se escogen dos puntos acordes a  $(\theta_T, \text{Sen}_T \theta_T)$  según lo trabajado, por tanto se toman los puntos  $(4,0)$  y  $(6,-1)$ , de donde se obtiene que  $m = -\frac{1}{2}$  y  $b = 2$ , por tanto  $\text{Sen}_T \theta_T = 2 - \frac{1}{2} \theta_T$  en el intervalo  $4 \leq \theta_T \leq 6$ .

- En el cuadrante VI, el ángulo  $\theta_T$  varía de 6 a  $8 \text{ rad}_T$ .

En el cuarto cuadrante se escogen dos puntos  $(6,-1)$  y  $(8,0)$ , donde se obtiene que  $m = \frac{1}{2}$  y  $b = -4$ , por tanto  $\text{Sen}_T \theta_T = \frac{1}{2} \theta_T - 4$  en el intervalo  $6 \leq \theta_T \leq 8$ .

Así, se puede definir  $\text{Sen}_T \theta_T$  de la siguiente manera:

$$\text{Sen}_T \theta_T = \begin{cases} \frac{1}{2} \theta_T & 0 \leq \theta_T < 2 \\ 2 - \frac{1}{2} \theta_T & 2 \leq \theta_T < 6 \\ -4 + \frac{1}{2} \theta_T & 6 \leq \theta_T < 8 \end{cases}$$

Para los extremos de cada intervalo se colocará a conveniencia ya que no se altera los resultados, siempre y cuando se garantice la continuidad de la misma en el intervalo  $0 \leq \theta_T \leq 8$ .

### 2.3.2 Gráfica de la función $\text{Sen}_T$ .

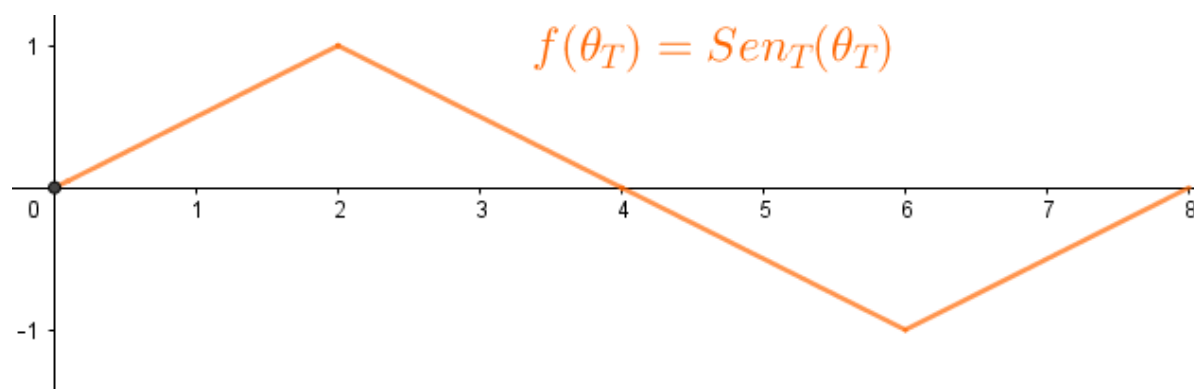


Figura 5. Gráfica en el plano cartesiano de la función  $\text{Sen}_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®

De la *Figura 5*, se infiere las siguientes características respecto a la función  $\text{Sen}_T$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Rango:  $[-1,1] \in \mathbb{R}$ .
- Periodo:  $8 \text{ rad}_T$ .
- Interseca con el eje  $x$  en  $x = 4n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y al eje  $y$  en 0.
- Creciente:  $(-2 + 8n, 2 + 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Decrece:  $(2 + 8n, 6 + 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Puntos máximos:  $((8n + 2), 1)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Puntos mínimos:  $((8n - 10), -1)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Es una función impar.

### 2.3.3 Coseno en la métrica del taxista.

El coseno es el valor que cae en el eje de las abscisas al determinar el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el ángulo, como se observa en la *Figura 6*.

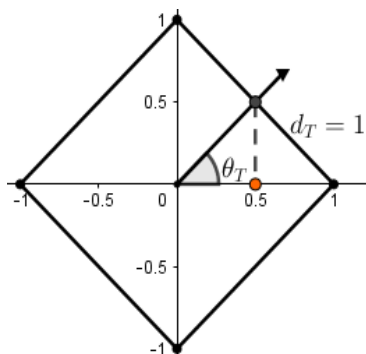


Figura 6. Circunferencia unitaria donde se ilustra el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el ángulo, y el valor de dicha intersección que cae en el eje de las abscisas. Elaboración propia usando software Geogebra®.

Por medio de esta se analizará el comportamiento en la métrica del taxista, para no confundirla con el *Coseno* usual, en esta métrica se llamará  $Coseno_T$ , y se simbolizará  $Cos_T$  más específicamente  $Cos_T\theta_T$ .

Haciendo la relación para los correspondientes cuadrantes y análogo a  $Seno_T$ , se define como  $Cos_T\theta_T$  de la siguiente manera:

$$Cos_T\theta_T = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\theta_T & 0 \leq \theta_T < 4 \\ -3 + \frac{1}{2}\theta_T & 4 \leq \theta_T < 8 \end{cases}$$

Para los extremos de cada intervalo se colocará a conveniencia ya que no se altera los resultados con las mismas consideraciones mencionadas para la función  $Sen_T\theta_T$  y que de aquí en adelante no se mencionará más.

#### 2.3.4 Gráfica de la función $Coseno_T$ .

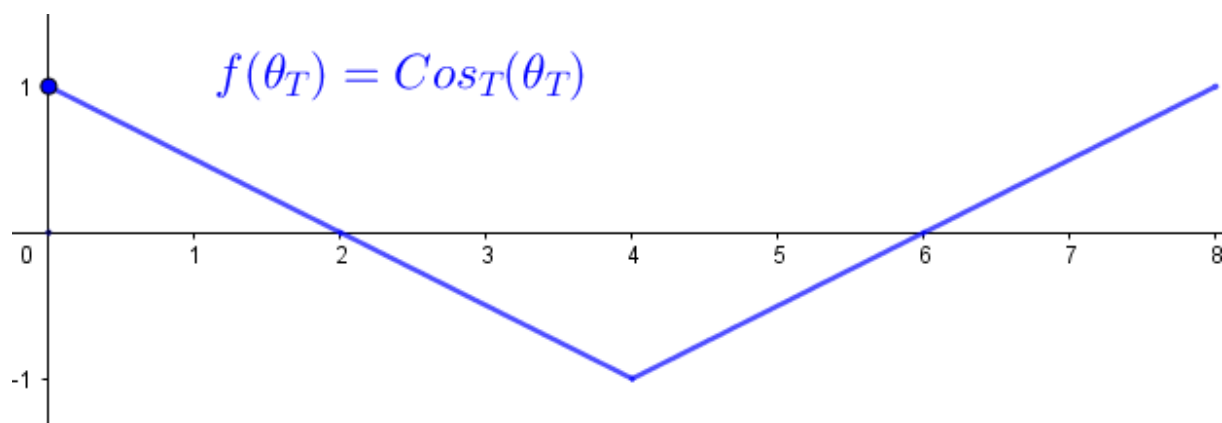


Figura 7. Gráfica en el plano cartesiano de la función  $Coseno_T$ . Elaboración propia usando software Geogebra®.

De la *Figura 7*, se pueden deducir las siguientes características en cuanto a la función  $Coseno_T$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Rango:  $[-1,1] \in \mathbb{R}$ .
- Periodo:  $8 \text{ rad}_T$ .
- Interseca con el eje  $x$  en  $x = 2(2n - 1)$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y al eje  $y$  en 1.
- Creciente:  $(-4 + 8n, 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Decrece:  $(8n, 4 + 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Puntos máximos:  $(8n, 1)$  con  $n \in \mathbb{Z}$
- Puntos mínimos:  $((8n - 4), -1)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Es una función par.

### 2.3.5 *Tangente en la métrica del taxista.*

La tangente se define en la métrica usual como  $Tan\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$ , siendo así, se considerará la definición análoga y se notará como  $Tan_T\theta_T = \frac{Sen_T\theta_T}{Cos_T\theta_T}$ , para trabajar en la métrica del taxista.

Para determinar los valores de  $Tangente_T$  se analiza por intervalos para los diferentes cuadrantes.

i) Si  $0 \leq \theta_T < 2$ , el valor de  $Tan_T\theta_T$ :

$$Tan_T\theta_T = \frac{\frac{1}{2}\theta_T}{1 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{que equivale a} \quad Tan_T\theta_T = \frac{\theta_T}{2 - \theta_T}$$

ii) En el intervalo  $2 < \theta_T < 4$

$$Tan_T\theta_T = \frac{2 - \frac{1}{2}\theta_T}{1 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{Simplificable a} \quad Tan_T\theta_T = \frac{4 - \theta_T}{2 - \theta_T}$$

iii) Cuando  $4 \leq \theta_T < 6$

$$Tan_T\theta_T = \frac{2 - \frac{1}{2}\theta_T}{-3 + \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{reducible a} \quad Tan_T\theta_T = \frac{4 - \theta_T}{-6 + \theta_T}$$

iv) Si  $6 < \theta_T < 8$ ,

$$Tan_T\theta_T = \frac{-4 + \frac{1}{2}\theta_T}{-3 + \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{equivalente a} \quad Tan_T\theta_T = \frac{-8 + \theta_T}{-6 + \theta_T}$$

Por tanto, se define  $Tangente_T$  como:

$$Tan_T \theta_T = \begin{cases} \frac{\theta_T}{2 - \theta_T} & 0 \leq \theta_T < 2 \\ \frac{4 - \theta_T}{2 - \theta_T} & 2 < \theta_T < 4 \\ \frac{4 - \theta_T}{-6 + \theta_T} & 4 \leq \theta_T < 6 \\ \frac{-8 + \theta_T}{-6 + \theta_T} & 6 < \theta_T \leq 8 \end{cases}$$

La determinación final de los intervalos, en relación con el comportamiento en los extremos de los mismos se hace dependiendo de si la función queda o no definida en dicho valor extremo.

### 2.3.6 Gráfica de la función $Tangente_T$ .

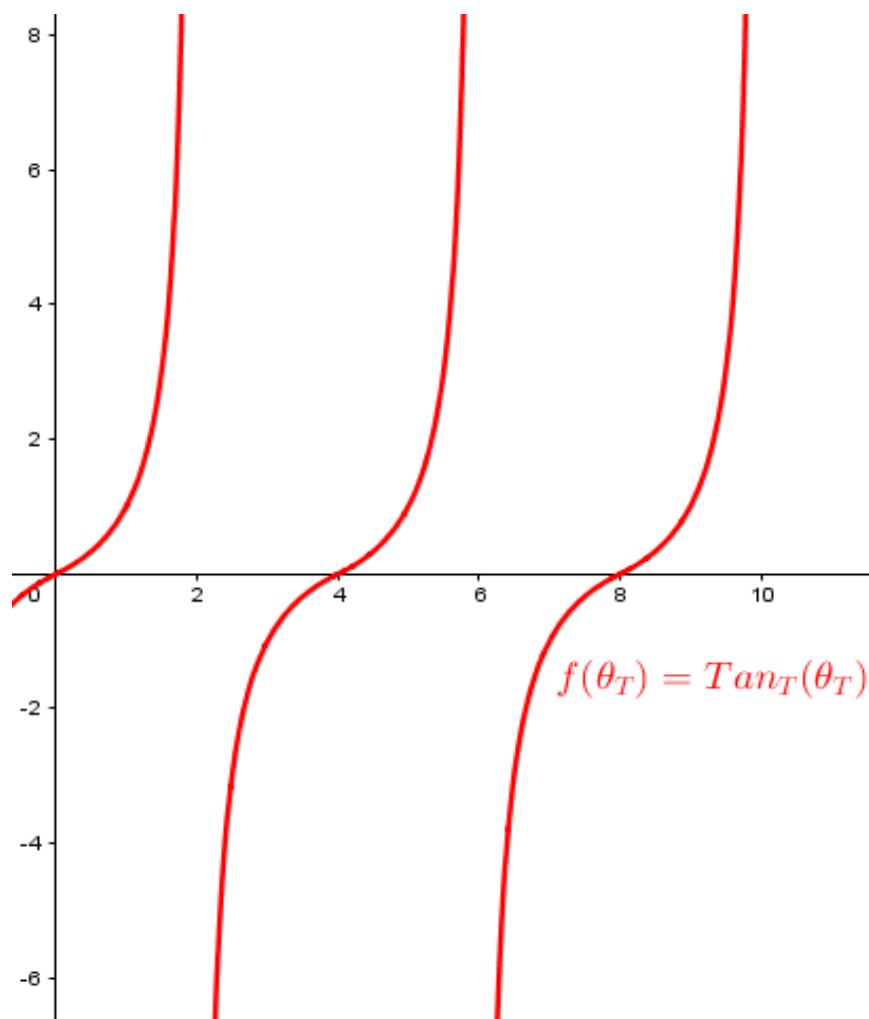


Figura 8. Gráfica en el plano cartesiano de la función  $Tangente_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

De la *Figura 8*, se pueden inferir las siguientes características con respecto a la función *Tangente<sub>T</sub>*:

- Dominio:  $\mathbb{R}$  excepto  $\{4n - 2\}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Rango:  $\mathbb{R}$
- Periodo:  $4 \text{ rad}_T$ .
- Interseca con el eje  $x$  en  $x = 4n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y al eje  $y$  en el origen.
- Es creciente.
- Es una función impar.

### 2.3.7 Cotangente en la métrica del taxista.

La cotangente se define en la métrica usual como  $Ctg\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$ , en la métrica del taxista se considerará dicha definición de forma análoga, es decir  $Ctg_T\theta_T = \frac{\text{Cos}_T\theta_T}{\text{Sen}_T\theta_T}$

Para determinar los valores de *Cotangente<sub>T</sub>* se analiza por intervalos para los diferentes cuadrantes.

i) Si  $0 \leq \theta_T < 2$ , el valor de  $Ctg_T\theta_T$ :

$$Ctg_T\theta_T = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta_T}{\frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{que equivale a} \quad Ctg_T\theta_T = \frac{2 - \theta_T}{\theta_T}$$

ii) En el intervalo  $2 < \theta_T < 4$

$$Ctg_T\theta_T = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta_T}{2 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{Simplificable a} \quad Ctg_T\theta_T = \frac{2 - \theta_T}{4 - \theta_T}$$

iii) Cuando  $4 \leq \theta_T < 6$

$$Ctg_T\theta_T = \frac{-3 + \frac{1}{2}\theta_T}{2 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{reducible a} \quad Ctg_T\theta_T = \frac{-6 + \theta_T}{4 - \theta_T}$$

iv) Si  $6 < \theta_T < 8$ ,

$$Ctg_T\theta_T = \frac{-3 + \frac{1}{2}\theta_T}{-4 + \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{equivalente a} \quad Ctg_T\theta_T = \frac{-6 + \theta_T}{-8 + \theta_T}$$

Por tanto, se define *Cotangente<sub>T</sub>* como:

$$Ctg_T \theta_T = \begin{cases} \frac{2 - \theta_T}{\theta_T} & 0 < \theta_T \leq 2 \\ \frac{2 - \theta_T}{4 - \theta_T} & 2 \leq \theta_T < 4 \\ \frac{-6 + \theta_T}{4 - \theta_T} & 4 < \theta_T \leq 6 \\ \frac{-6 + \theta_T}{-8 + \theta_T} & 6 \leq \theta_T < 8 \end{cases}$$

La determinación final de los intervalos, en relación con el comportamiento en los extremos de los mismos se hace dependiendo de si la función queda o no definida en dicho valor extremo.

### 2.3.8 Gráfica de la función *Cotangente<sub>T</sub>*.

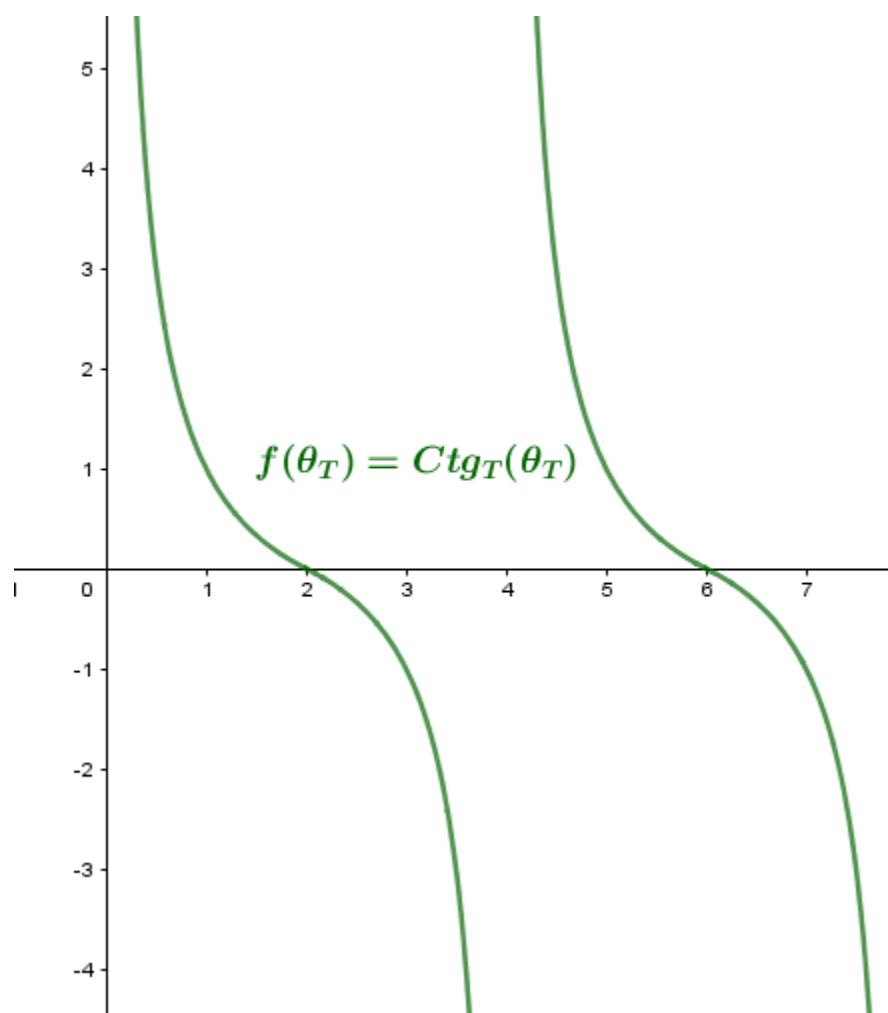


Figura 9. Gráfica en el plano cartesiano de la función *Cotangente<sub>T</sub>*.Elaboración propia usando software Geogebra®.

De la *Figura 9*, se pueden deducir las siguientes características con respecto a la función *Cotangente<sub>T</sub>*:

- Dominio:  $\mathbb{R}$  excepto  $\{4n\}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Rango:  $\mathbb{R}$
- Periodo:  $4 \text{ rad}_T$
- Interseca con el eje  $x$  en  $x = 2 + 4n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y no interseca al eje  $y$ .
- Es decreciente.
- Es una función impar.

### 2.3.9 *Secante en la métrica del taxista.*

La secante se define en la métrica usual como  $\text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta}$ ; en la métrica del taxista se considerará la definición de manera análoga, es decir  $\text{Sec}_T\theta_T = \frac{1}{\text{Cos}_T\theta_T}$ .

Para determinar los valores de *Secante<sub>T</sub>* se analiza por intervalos para los diferentes cuadrantes.

i) Si  $0 \leq \theta_T < 4$ , el valor de  $\text{Sec}_T\theta_T$ :

$$\text{Sec}_T\theta_T = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{que equivale a} \quad \text{Sec}_T\theta_T = \frac{2}{2 - \theta_T}$$

ii) Cuando  $4 \leq \theta_T < 8$

$$\text{Sec}_T\theta_T = \frac{1}{-3 + \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{reducible a} \quad \text{Sec}_T\theta_T = \frac{2}{-6 + \theta_T}$$

Por tanto, se define *Secante<sub>T</sub>* como:

$$\text{Sec}_T\theta_T = \begin{cases} \frac{2}{2 - \theta_T} & 0 \leq \theta_T < 4 \vee \theta_T \neq 2 \\ \frac{2}{-6 + \theta_T} & 4 \leq \theta_T < 8 \vee \theta_T \neq 6 \end{cases}$$

La determinación final de los intervalos, en relación con el comportamiento en los extremos de los mismos se hace dependiendo de si la función queda o no definida en dicho valor extremo.

### 2.3.10 Gráfica de la función Secante<sub>T</sub>.

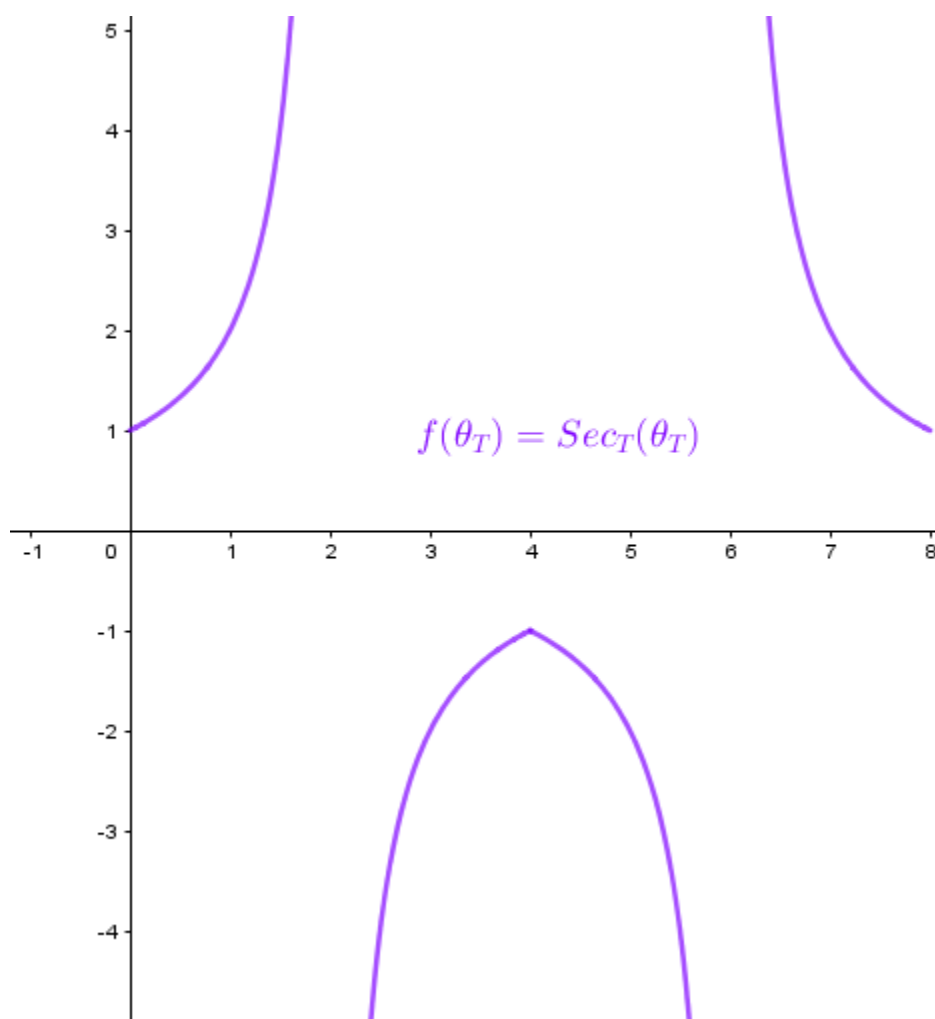


Figura 10. Gráfica en el plano cartesiano de la función  $\text{secante}_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

De la *Figura 10*, se pueden deducir las siguientes características en cuanto a la función  $\text{Secante}_T$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$  excepto  $\{2 + 4n\}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Rango:  $\mathbb{R}$ .
- Periodo:  $8 \text{ rad}_T$ .
- No interseca al eje  $x$  y al eje  $y$  lo interseca en 1.
- Creciente:  $(8n, 8n + 4)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Decrece:  $(8n + 4, 8 + 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Es una función par.

### 2.3.11 Cosecante en la métrica del taxista.

La cosecante se define en la métrica usual como  $Csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$ ; en la métrica del taxista, se considerará definición de forma análoga, es decir  $Csc_T\theta_T = \frac{1}{\text{sen}_T\theta_T}$ .

Para determinar los valores de  $Cosecante_T$  se analiza por intervalos para los diferentes cuadrantes.

i) Si  $0 < \theta_T < 2$ , el valor de  $Csc_T\theta_T$ :

$$Csc_T\theta_T = \frac{1}{\frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{equivale a} \quad Csc_T\theta_T = \frac{2}{\theta_T}$$

ii) En el intervalo  $2 < \theta_T < 6$

$$Csc_T\theta_T = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{Simplificable a} \quad Csc_T\theta_T = \frac{2}{4 - \theta_T} \quad \theta_T \neq 4$$

iv) Si  $6 < \theta_T < 8$ ,

$$Csc_T\theta_T = \frac{1}{-4 + \frac{1}{2}\theta_T} \quad \text{equivalente a} \quad Csc_T\theta_T = \frac{2}{-8 + \theta_T}$$

Por tanto, se define  $Cosecante_T$  como:

$$Csc_T\theta_T = \begin{cases} \frac{2}{\theta_T} & 0 < \theta_T < 2 \\ \frac{2}{4 - \theta_T} & 2 < \theta_T \leq 6 \vee \theta_T \neq 4 \\ \frac{2}{-8 + \theta_T} & 6 < \theta_T < 8 \end{cases}$$

La determinación final de los intervalos, en relación con el comportamiento en los extremos de los mismos se hace dependiendo de si la función queda o no definida en dicho valor extremo.

### 2.3.12 Gráfica de la función Cosecante $_T$ .

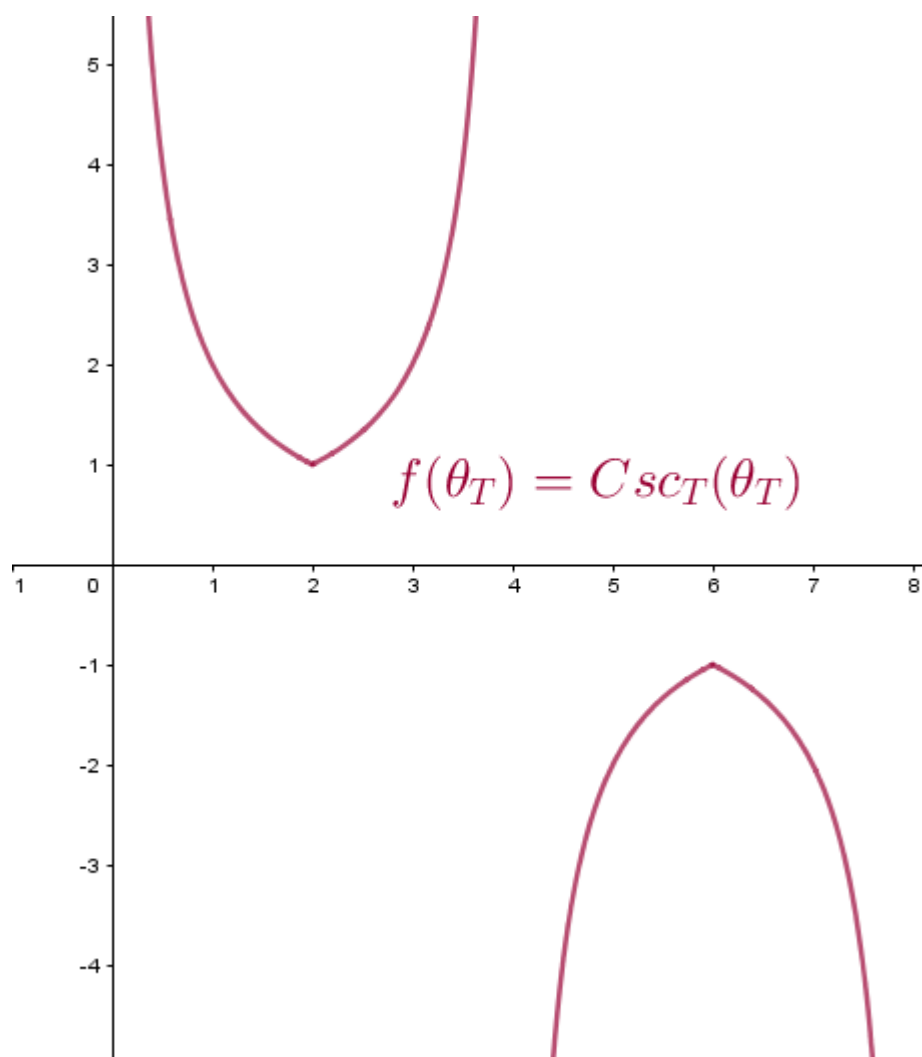


Figura 11. Gráfica en el plano cartesiano de la función Cosecante $_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

De la *Figura 11*, se pueden inferir las siguientes características con respecto a la función Cosecante $_T$ :

- Dominio:  $\mathbb{R}$  excepto  $\{4n\}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Rango:  $\mathbb{R}$  el intervalo abierto  $(-1,1)$ .
- Periodo:  $8rad_T$ .
- No interseca al eje  $x$  ni al eje  $y$ .
- Creciente:  $(8n + 2, 8n + 6)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Decrece:  $(8n - 2, 2 + 8n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Es una función impar.

El anterior análisis, permite deducir algunas relaciones básicas como:

$$\text{Sen}_T(-\theta_T) = -\text{Sen}_T(\theta_T)$$

$$\text{Cos}_T(-\theta_T) = \text{Cos}_T(\theta_T)$$

$$\text{Sen}_T(\theta_T - 4) = -\text{Sen}_T(\theta_T)$$

$$\text{Cos}_T(\theta_T - 4) = -\text{Cos}_T(\theta_T)$$

$$\text{Sen}_T(\theta_T + 8k) = \text{Sen}_T(\theta_T), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cos}_T(\theta_T + 8k) = \text{Cos}_T(\theta_T), k \in \mathbb{Z}$$

## 2.4 Derivada desde la definición

La derivada de una función  $f$  en cualquier número  $x$ , se indica mediante  $f'(x)$ ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{lh}$$

Si el límite existe (Stewart, 2008).

Por otro lado, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Una función  $f$  es derivable en  $x = a$  si  $f'(a)$  existe. Es derivable sobre un intervalo abierto  $(a, b)$  [o  $(a, \infty)$  o  $(-\infty, a)$  o  $(-\infty, \infty)$ ] si es derivable en todo número del intervalo (Stewart, 2008).

## 2.5 Construcción de las derivadas de las funciones trigonométricas

A partir de la definición de derivada mencionada anteriormente, se construirán las derivadas de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista.

### 2.5.1 Derivada de la función $\text{Sen}_T$ .

Para construir la derivada de la función  $\text{Sen}_T$ , se trabajará por intervalos, así:

Si  $0 < \theta_T < 2$ , entonces  $\text{Sen}_T \theta_T = \frac{1}{2}\theta_T$ , se elige un  $h$ , lo suficientemente pequeño de modo que

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\theta_T + h) - g(\theta_T)}{h}$$

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\theta_T + h) - \left(\frac{1}{2}\theta_T\right)}{h}$$

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente  $g(\theta_T)$  es derivable en cualquier punto del intervalo  $0 < \theta_T < 2$

Análogamente, para  $2 < \theta_T < 6$  se tiene que  $Sen_T \theta_T = 2 - \frac{1}{2}\theta_T$ , por tanto, se elige un  $h$  lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{2}(\theta_T + h) - \left(2 - \frac{1}{2}\theta_T\right)}{h}$$

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto,  $g(\theta_T)$  es derivable en cualquier punto del intervalo  $2 < \theta_T < 6$ . Y finalmente con  $6 < \theta_T < 8$  se tiene que  $Sen_T \theta_T = -4 + \frac{1}{2}\theta_T$ , por tanto, se elige un  $h$  lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + \frac{1}{2}(\theta_T + h) - \left(-4 + \frac{1}{2}\theta_T\right)}{h}$$

$$g'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,  $g(\theta_T)$  es derivable en cualquier punto del intervalo  $6 < \theta_T < 8$ .

Para  $\theta_T = 2$  y  $\theta_T = 6$ , para esto se calculará los límites por derecha e izquierda:

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(2+h) - \left(2 * \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 - \frac{1}{2}(2+h) - \left(2 - 2 * \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$g'(6) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - \frac{1}{2}(6+h) - \left(2 - 6 * \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$g'(6) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-4 + \frac{1}{2}(6+h) - \left(-4 + \frac{1}{2} * 6\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Puesto que los límites por derecha y por izquierda son diferentes,  $g'(2)$  y  $g'(6)$  no existe. Por tanto,  $g$  es derivable en todo  $0 < \theta_T < 8$  excepto en  $\theta_T = 2$  y  $\theta_T = 6$ .

Por tanto  $g'(\theta_T)$  está dado por

$$g'(\theta_T) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < \theta_T < 2 \vee 6 < \theta_T < 8 \\ -\frac{1}{2} & 2 < \theta_T < 6 \end{cases}$$

A continuación, se presentara la gráfica de la derivada de  $Seno_T$ .

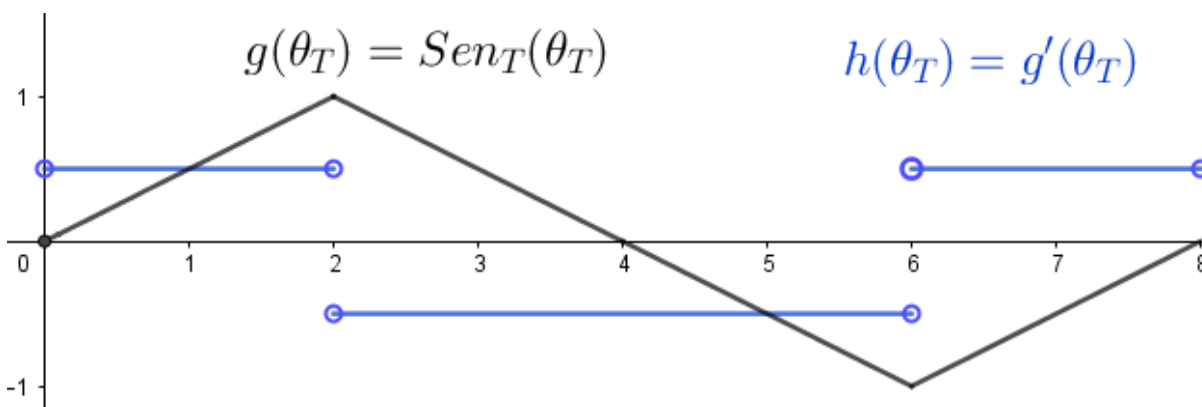


Figura 12. Gráfica de la función derivada de  $Seno_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 12*, se muestra la gráfica de la función  $g(\theta_T) = Sen_T(\theta_T)$  y su correspondiente la función derivada  $g'(\theta_T)$ .

De esta figura (*Figura 12*) se deduce que  $g'(\theta_T)$  es una función a trozos y discontinua.

### 2.5.2 Derivada de la función $Coseno_T$ .

Análogamente se construirá la derivada de la función  $Coseno_T$ .

Si  $0 < \theta_T < 4$ , entonces  $Cos_T \theta_T = 1 - \frac{1}{2}\theta_T$ . Se elige  $h$  lo suficientemente pequeño de modo que

$$\begin{aligned} f'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\theta_T + h) - f(\theta_T)}{h} \\ f'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}(\theta_T + h) - (1 - \frac{1}{2}\theta_T)}{h} \\ f'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por consiguiente  $f$  es derivable en cualquier punto del intervalo  $0 \leq \theta_T < 4$

Análogamente, para  $4 < \theta_T < 8$  se tiene que  $Cos_T \theta_T = -3 + \frac{1}{2}\theta_T$ . Se elige un  $h$ , lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$f'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 + \frac{1}{2}(\theta_T + h) - \left(-3 + \frac{1}{2}\theta_T\right)}{h}$$

$$f'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,  $f$  es derivable en cualquier punto del intervalo  $4 < \theta_T < 8$

Para  $\theta_T = 4$ , se calculan los límites por derecha e izquierda:

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{1}{2}(4 + h) - \left(1 - 4 * \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-3 + \frac{1}{2}(4 + h) - \left(-3 + 4 * \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Puesto que los límites son diferentes,  $f'(4)$  no existe. Por tanto  $f$  es derivable en todo  $0 < \theta_T < 8$  excepto en  $\theta_T = 4$ .

Por tanto  $f'(\theta_T)$  está dado por

$$f'(\theta_T) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & 0 < \theta_T < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 < \theta_T < 8 \end{cases}$$

Se presenta a continuación la gráfica de la derivada de la función  $\text{Coseno}_T$ .

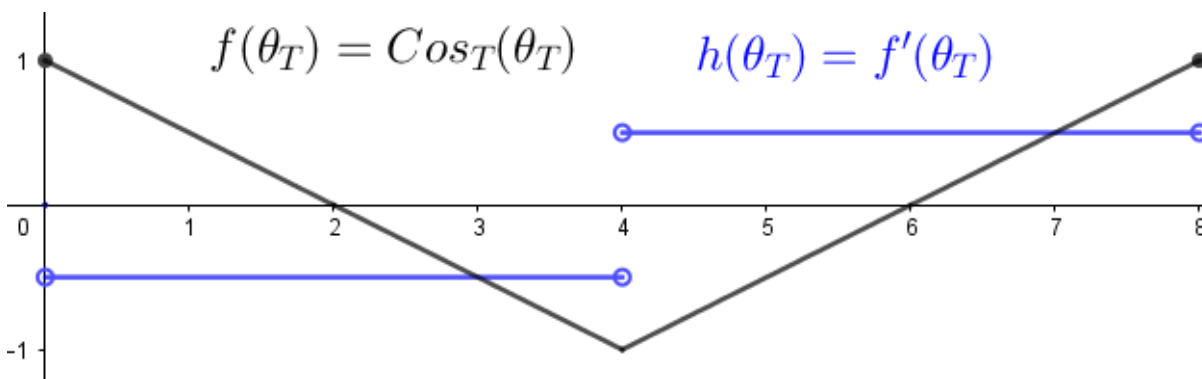


Figura 13. Gráfica de la función derivada de  $\text{Coseno}_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 13*, se muestra la gráfica de la función  $f(\theta_T) = \text{Cos}_T(\theta_T)$  y su correspondiente función derivada  $f'(\theta_T)$ , cuya función es a trozos.

### 2.5.3 Derivada de la función $\text{Tangente}_T$ .

Es este apartado se trabajará en la construcción de la derivada de la función  $\text{Tangente}_T$ , que se denotará  $y(\theta_T) = \text{Tan}_T \theta_T$

Si  $0 < \theta_T < 2$ , entonces  $Tan_T \theta_T = \frac{\theta_T}{2-\theta_T}$ . Se elige un  $h$ , lo suficientemente pequeño de modo

que

$$\begin{aligned}
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(\theta_T + h) - y(\theta_T)}{h} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\theta_T + h}{2 - \theta_T - h}\right) - \left(\frac{\theta_T}{2 - \theta_T}\right)}{h} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{(\theta_T + h)(2 - \theta_T) - (2 - \theta_T - h)\theta_T}{(2 - \theta_T - h)(2 - \theta_T)}\right)}{h} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(2 - \theta_T - h)(2 - \theta_T)} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(2 - \theta_T - h)(2 - \theta_T)} \\
 y'(\theta_T) &= \frac{2}{(2 - \theta_T)^2}
 \end{aligned}$$

Si  $2 < \theta_T < 4$ , entonces  $Tan_T \theta_T = \frac{4-\theta_T}{2-\theta_T}$ . Se toma un  $h$ , lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$\begin{aligned}
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4 - \theta_T - h}{2 - \theta_T - h}\right) - \left(\frac{4 - \theta_T}{2 - \theta_T}\right)}{h} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(2 - \theta_T)(2 - \theta_T - h)} \\
 y'(\theta_T) &= \frac{2}{(2 - \theta_T)(2 - \theta_T - 0)} \\
 y'(\theta_T) &= \frac{2}{(2 - \theta_T)^2}
 \end{aligned}$$

Si  $4 < \theta_T < 6$ , entonces  $Tan_T \theta_T = \frac{4-\theta_T}{-6+\theta_T}$ . Se toma un  $h$ , lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$\begin{aligned}
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4 - \theta_T - h}{-6 + \theta_T + h}\right) - \left(\frac{4 - \theta_T}{-6 + \theta_T}\right)}{h} \\
 y'(\theta_T) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(-6 + \theta_T)(-6 + \theta_T + h)}
 \end{aligned}$$

$$y'(\theta_T) = \frac{2}{(-6 + \theta_T)(-6 + \theta_T + 0)}$$

$$y'(\theta_T) = \frac{2}{(-6 + \theta_T)^2}$$

Si  $6 < \theta_T < 8$ , entonces  $Tan_T \theta_T = \frac{-8 + \theta_T}{-6 + \theta_T}$ . Se elige un  $h$ , lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$y'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-8 + \theta_T + h}{-6 + \theta_T + h}\right) - \left(\frac{-8 + \theta_T}{-6 + \theta_T}\right)}{h}$$

$$y'(\theta_T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(-6 + \theta_T)(-6 + \theta_T + h)}$$

$$y'(\theta_T) = \frac{2}{(-6 + \theta_T)(-6 + \theta_T + 0)}$$

$$y'(\theta_T) = \frac{2}{(-6 + \theta_T)^2}$$

Para  $\theta_T = 2$ , se calculan los límites por derecha e izquierda:

$$y'(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{2 + h}{2 - 2 - h}\right) - \left(\frac{2}{2 - 2}\right)}{h} = \textit{indefinido}$$

Para  $\theta_T = 4$ , se calculan los límites por derecha e izquierda:

$$y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{4 - 4 - h}{2 - 4 - h}\right) - \left(\frac{4 - 4}{2 - 4}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{-h}{-2 - h}\right)}{h} = \frac{1}{2}$$

$$y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{4 - 4 - h}{-6 + 4 + h}\right) - \left(\frac{4 - 4}{-6 + 4}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{-h}{-2 + h}\right)}{h} = \frac{1}{2}$$

Para  $\theta_T = 6$ , se calculan los límites por derecha e izquierda:

$$y'(6) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{4 - 6 - h}{-6 + 6 + h}\right) - \left(\frac{4 - 6}{-6 + 6}\right)}{h} = \textit{indefinida}$$

Puesto que los límites de  $y'(4)$  son iguales entonces  $y(4)$  es derivable. Luego  $y'(2)$  y  $y'(6)$  son indefinidos por tanto  $y$  es derivable en todo  $0 < \theta_T < 8$  excepto en  $\theta_T = 2$  y  $\theta_T = 6$ .

Por tanto, la función derivada de  $Tan_T$  es:

$$y'(\theta_T) = \begin{cases} \frac{2}{(2 - \theta_T)^2} & 0 < \theta_T < 4 \vee \theta_T \neq 2 \\ \frac{2}{(-6 + \theta_T)^2} & 4 \leq \theta_T < 8 \vee \theta_T \neq 6 \end{cases}$$

A continuación se presentara la correspondiente gráfica.

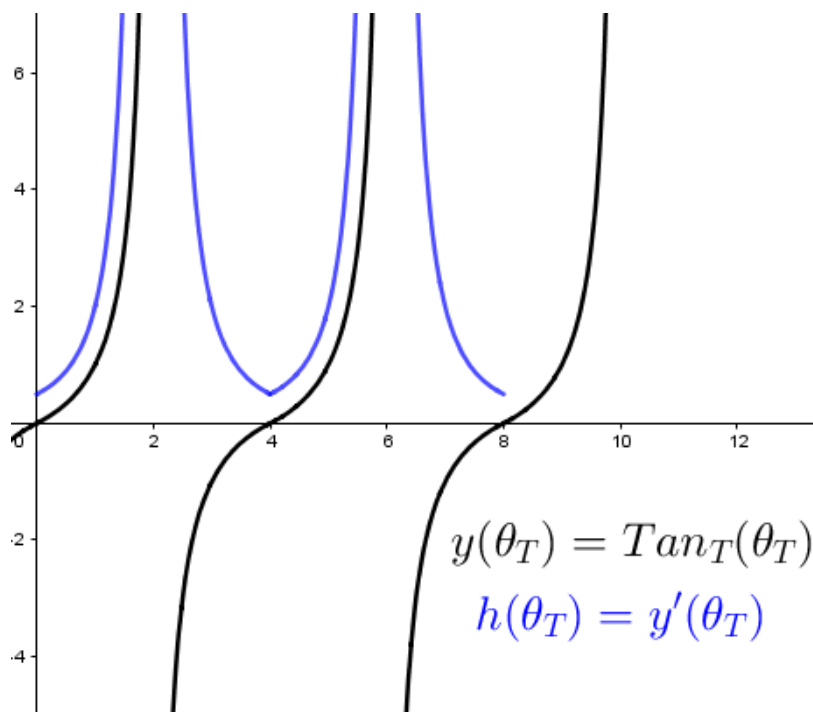


Figura 14. Gráfica de la función derivada de  $Tangente_T$ . Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 14*, se muestra la gráfica de la función  $y(\theta_T) = Tan_T(\theta_T)$  y su correspondiente función derivada  $y'(\theta_T)$ .

#### 2.5.4 Derivada de la función $Cotangente_T$ .

La construcción de la derivada de la función  $Cotangente_T$  es análoga a la construcción de la función derivada de  $Tan_T$ , en este caso se denotará  $w(\theta_T) = Ctg_T \theta_T$ .

Por tanto, la función derivada de  $Ctg_T$  es:

$$w'(\theta_T) = \begin{cases} \frac{-2}{(\theta_T)^2} & 0 < \theta_T \leq 2 \\ \frac{-2}{(4 - \theta_T)^2} & 2 < \theta_T < 6 \vee \theta_T \neq 4 \\ \frac{-2}{(-8 + \theta_T)^2} & 6 \leq \theta_T < 8 \end{cases}$$

A continuación, se presenta la función derivada de la función *Cotangente<sub>T</sub>*

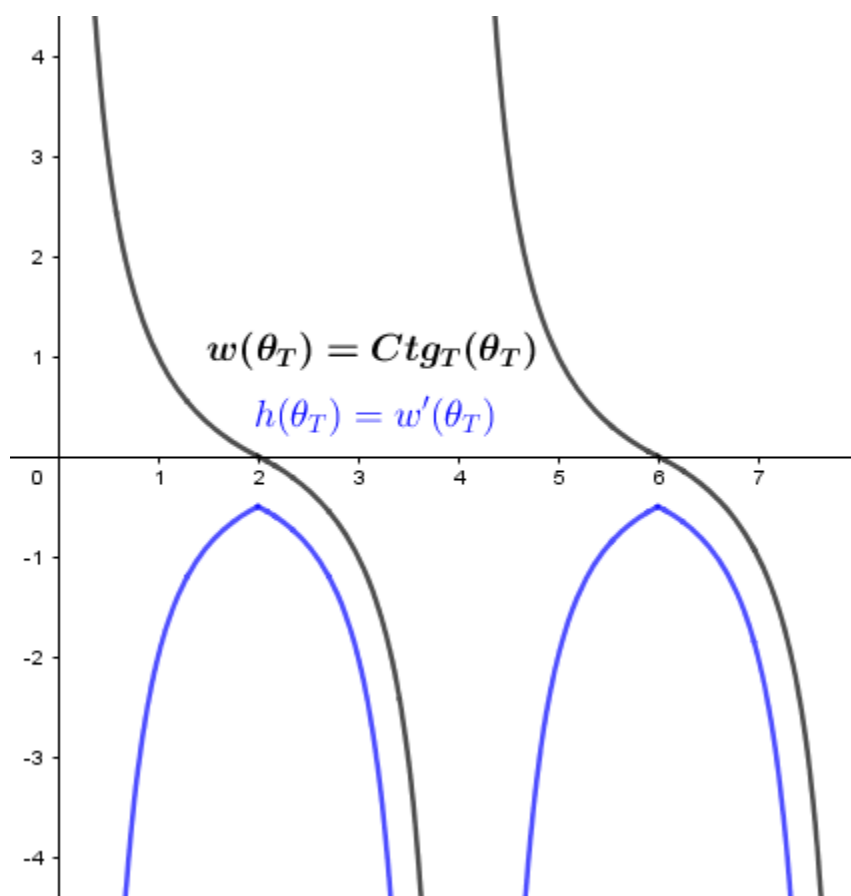


Figura 15. Gráfica de la función derivada de *Cotangente<sub>T</sub>*.Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 15*, se muestra la gráfica de la función  $w(\theta_T) = \text{Ctg}_T(\theta_T)$  y su correspondiente a la función derivada  $w'(\theta_T)$ .

### 2.5.5 Derivada de la función *Secante<sub>T</sub>*.

Análogamente a las dos últimas construcciones, se determinará la derivada de la función *Secante<sub>T</sub>*, donde  $v(\theta_T) = \text{Sec}_T(\theta_T)$ .

Por tanto  $v'(\theta_T)$  esta dado por

$$v'(\theta_T) = \begin{cases} \frac{2}{(2 - \theta_T)^2} & 0 < \theta_T < 4 \\ -2 & 4 < \theta_T < 8 \\ \frac{-2}{(-6 + \theta_T)^2} & 4 < \theta_T < 8 \end{cases}$$

A continuación, se presentara la gráfica correspondiente:

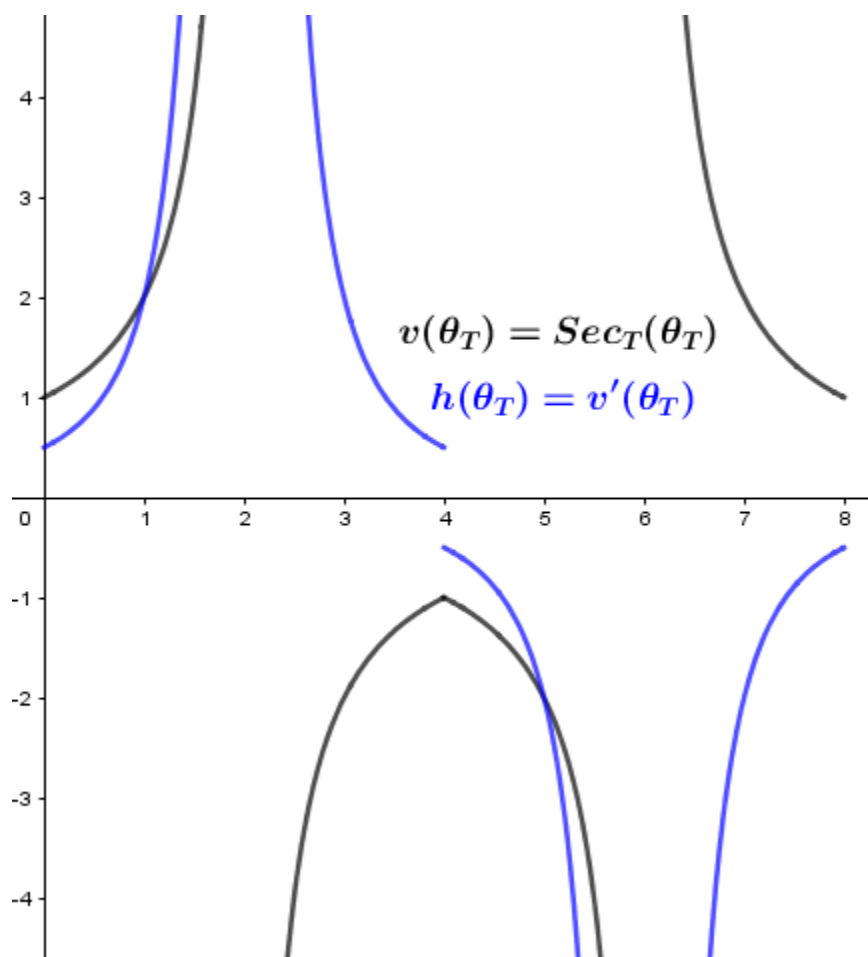


Figura 16. Gráfica de la función derivada de  $\text{Secante}_T$ . Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 16*, se muestra la gráfica de la función  $v(\theta_T) = \text{Sec}_T(\theta_T)$  y su correspondiente función derivada  $v'(\theta_T)$ .

### 2.5.6 Derivada de la función $\text{Cosecante}_T$ .

Se abordará la construcción de la derivada de la función  $\text{Cosecante}_T$ , análoga a la construcción de la función derivada de  $\text{Tan}_T$ , donde  $s j(\theta_T) = \text{Csc}_T$ , por ende  $j'(\theta_T)$  esta dado por:

$$j'(\theta_T) = \begin{cases} \frac{-2}{\theta_T^2} & 0 < \theta_T < 2 \\ \frac{2}{(4 - \theta_T)^2} & 2 < \theta_T < 6 \vee \theta_T \neq 4 \\ \frac{-2}{(-8 + \theta_T)^2} & 6 < \theta_T < 8 \end{cases}$$

A continuación, se presentara la gráfica de la función derivada de  $Cosecante_T$

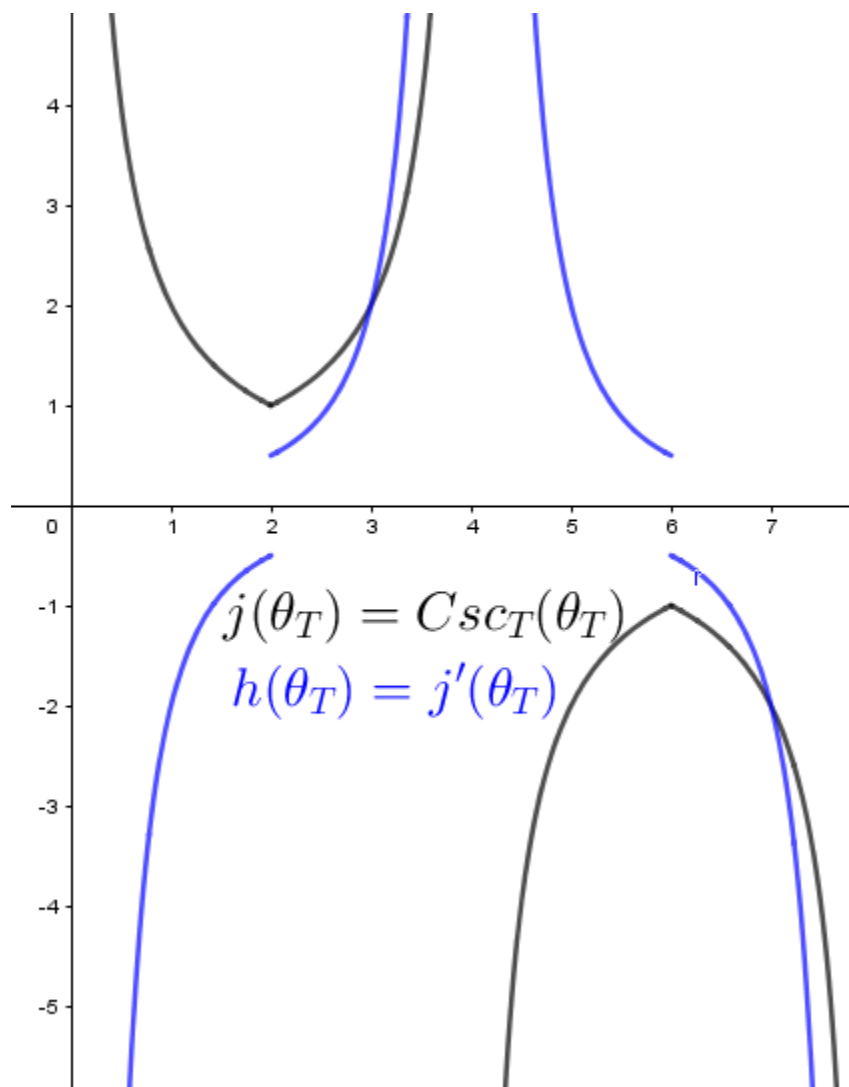


Figura 17. Gráfica de la función derivada de  $Cosecante_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

En la *Figura 17*, se muestra la gráfica de la función  $j(\theta_T) = Csc_T(\theta_T)$  y su correspondiente derivada  $j'(\theta_T)$ .

## 2.6 Integral desde la definición

Para establecer la definición de integral, lo haremos por medio del teorema fundamental del cálculo (Parte I); el cual plantea,

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces la función  $g$ , definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , y  $g'(x) = f(x)$  (Stewart, 2008) se denomina la integral de  $f$ .

## 2.7 Construcción de las integrales de las funciones trigonométricas

A partir de las definiciones presentadas anteriormente, se construirán las integrales de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista.

### 2.7.1 Integral de la función $\text{Seno}_T$ .

A continuación, se trabaja en la construcción de la integral de la función  $\text{Seno}_T$ , de acuerdo a lo mencionado anteriormente.

Se empezará con el primer intervalo  $0 \leq \theta_T \leq 2$  para el cual está definida la función  $\text{Seno}_T$ , entonces se tiene que

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \theta_T d\theta_T$$

Donde  $0 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{2} \theta_T d\theta_T &= \frac{1}{4} \theta_T^2 \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{4} (x)^2 - \frac{1}{4} (0)^2 \\ &= \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

Enseguida se trabaja para el intervalo de  $2 \leq \theta_T \leq 6$

$$G(x) = \int_2^x 2 - \frac{1}{2} \theta_T d\theta_T$$

Donde,  $2 \leq x \leq 6$

$$\begin{aligned} \int_2^x 2 - \frac{1}{2} \theta_T d\theta_T &= 2\theta_T - \frac{1}{4} \theta_T^2 \Big|_2^x \\ &= \left( 2(x) - \frac{1}{4} (x)^2 \right) - \left( 2(2) - \frac{1}{4} (2)^2 \right) \\ &= \left( 2x - \frac{1}{4} x^2 \right) - (4 - 1) \\ &= 2x - \frac{1}{4} x^2 - 3 \end{aligned}$$

Finalmente se evalúa la integral para el intervalo de  $6 \leq \theta_T \leq 8$ .

$$G(x) = \int_6^x -4 + \frac{1}{2}\theta_T d\theta_T$$

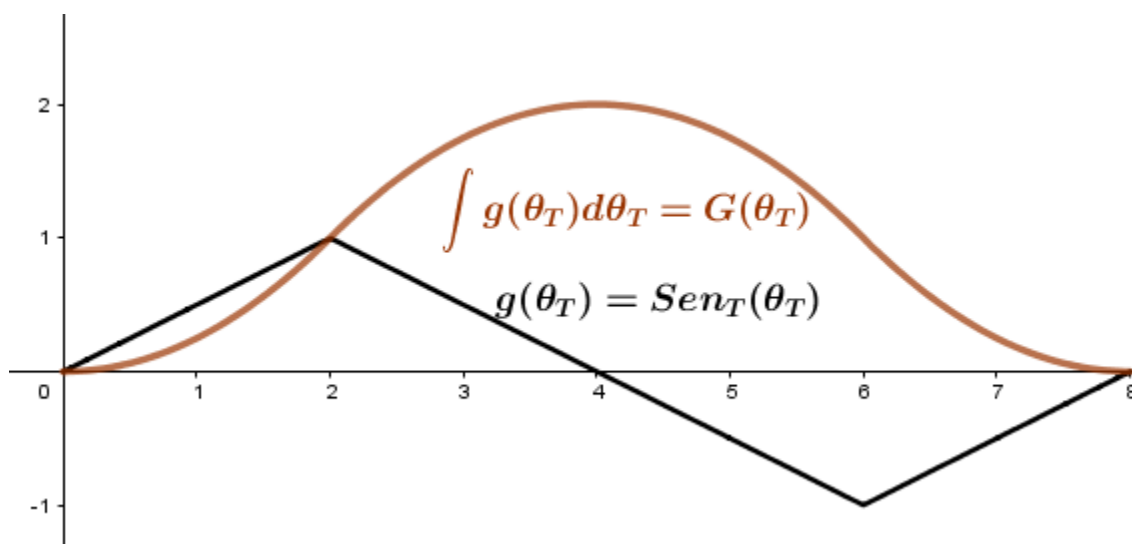
Donde  $6 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} \int_6^x -4 + \frac{1}{2}\theta_T d\theta_T &= -4\theta_T + \frac{1}{4}\theta_T^2 \Big|_6^x \\ &= \left(-4(x) + \frac{1}{4}(x)^2\right) - \left(-4(6) + \frac{1}{4}(6)^2\right) \\ &= \left(-4x - \frac{1}{4}x^2\right) - (-24 + 9) \\ &= -4x - \frac{1}{4}x^2 + 15 \end{aligned}$$

Se sustituye  $x$  por  $\theta_T$  ya que cumplen las mismas condiciones, en tanto, la función integral de la función  $\text{Seno}_T$  es:

$$G(\theta_T) = \begin{cases} \frac{1}{4}\theta_T^2 & 0 \leq \theta_T \leq 2 \\ 2\theta_T - \frac{1}{4}\theta_T^2 - 3 & 2 \leq \theta_T \leq 6 \\ -4\theta_T - \frac{1}{4}\theta_T^2 + 15 & 6 \leq \theta_T \leq 8 \end{cases}$$

En la *Figura 18*, se representa la integral de la función en el intervalo  $[0,8] \text{ rad}_T$ .



*Figura 18.* Gráfica de la función integral de  $\text{Seno}_T$ .Elaboración propia usando software Geogebra®.

### 2.7.2 Integral de la función $\text{Coseno}_T$ .

Enseguida se presentará la construcción de la integral de la función  $\text{Coseno}_T$  en los intervalos establecidos anteriormente.

Entonces para hallar la integral de la función  $\text{Cos}_T$  en el intervalo  $0 \leq \theta_T \leq 4$ , se hace uso del teorema fundamental del cálculo (Parte I).

$$F(x) = \int_0^x 1 - \frac{1}{2}\theta_T d\theta_T$$

Donde  $0 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned} \int_0^x 1 - \frac{1}{2}\theta_T d\theta_T &= \theta_T - \frac{\theta_T^2}{4} \Big|_0^x \\ &= \left( (x) - \frac{(x)^2}{4} \right) - \left( (0) - \frac{(0)^2}{4} \right) \\ &= \left( x - \frac{x^2}{4} \right) - \left( 0 - \frac{0^2}{4} \right) \\ &= x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Análogamente se procede a realizar la integral en el intervalo de  $4 \leq \theta_T \leq 8$ ;

$$F(x) = \int_4^x -3 + \frac{1}{2}\theta_T d\theta_T$$

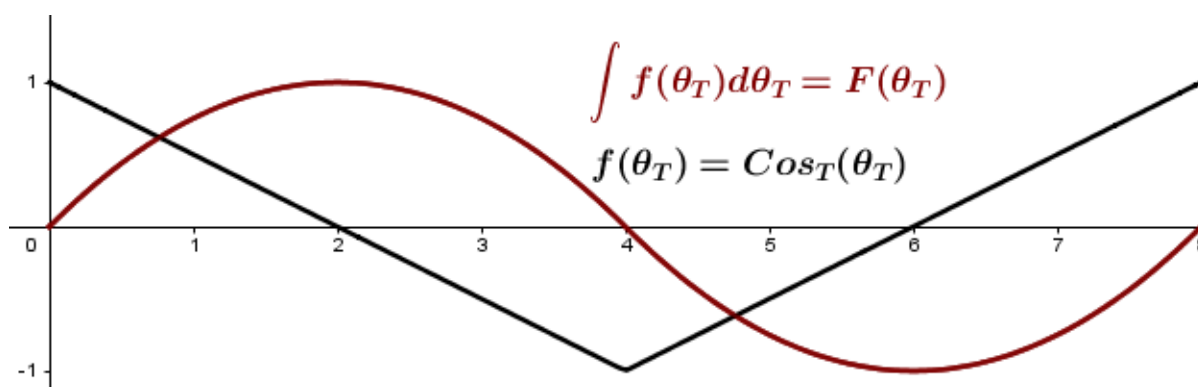
Donde  $4 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} \int_4^x -3 + \frac{1}{2}\theta d\theta_T &= -3\theta_T + \frac{\theta_T^2}{4} \Big|_4^x \\ &= \left( -3(x) + \frac{(x)^2}{4} \right) - \left( 3(4) + \frac{(4)^2}{4} \right) \\ &= \left( -3x + \frac{x^2}{4} \right) - (-12 + 4) \\ &= -3x + \frac{x^2}{4} + 8 \end{aligned}$$

Se sustituye  $x$  por  $\theta_T$  ya que cumplen las mismas condiciones, en tanto, la función integral de  $\text{Coseno}_T$  es:

$$F(\theta_T) = \begin{cases} \theta_T - \frac{\theta_T^2}{4} & 0 \leq \theta_T \leq 4 \\ -3\theta_T + \frac{\theta_T^2}{4} + 8 & 4 \leq \theta_T \leq 8 \end{cases}$$

Al realizar la representación gráfica se tiene la *Figura 19*,



*Figura 19.* Gráfica de la función integral de *Coseno<sub>T</sub>*.Elaboración propia usando software Geogebra®.

### 2.7.3 Integral de la función *Tangente<sub>T</sub>*.

Para construir la integral *Tangente<sub>T</sub>* para el intervalo  $0 \leq \theta_T < 2$ , consideraremos la función determinada para este intervalo, pero como queremos hallar la función integral de *Tangente<sub>T</sub>* se supondrá que la integral es indefinida y gracias a las nociones de integral como área bajo la curva, se halla la constante de integración.;

$$Y(\theta_T) = \int \frac{\theta_T}{2 - \theta_T} d\theta_T$$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{2 - u}{u} (-du)$$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{-2 + u}{u} du$$

$$Y(\theta_T) = \int -\frac{2}{u} + 1 du$$

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|2 - \theta_T| - \theta_T + c$$

Se sabe que  $Y(0) = 0$ , esto se usará para determinar  $c$

$$0 = -2 \ln|2 - 0| + c$$

$$c = \ln|4|$$

Por tanto, la función integral en el intervalo  $0 \leq \theta_T < 2$  es

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|2 - \theta_T| - \theta_T + \ln|4|$$

Ahora construiremos la integral para el intervalo  $2 < \theta_T \leq 4$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{4 - \theta_T}{2 - \theta_T} d\theta_T$$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{4 - (2 - u)}{u} (-du)$$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{4 + u}{u} (-du)$$

$$Y(\theta_T) = \int \frac{-2 - u}{u} du$$

$$Y(\theta_T) = \int -\frac{2}{u} - 1 du$$

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|2 - \theta_T| + \theta_T + c$$

Se sabe que  $Y(4) = 0$ , esto se usará para determinar  $c$

$$0 = -2 \ln|2 - 4| + 4 + c$$

$$c = 2 \ln|-2| - 4$$

Por tanto, la función integral en el intervalo  $2 < \theta_T \leq 4$  es

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|2 - \theta_T| + \theta_T + 2 \ln|-2| - 4$$

Análogamente se tiene que la función integral para el intervalo  $4 \leq \theta_T < 6$  se

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|-6 + \theta_T| - \theta_T + 2 \ln|-2| + 4$$

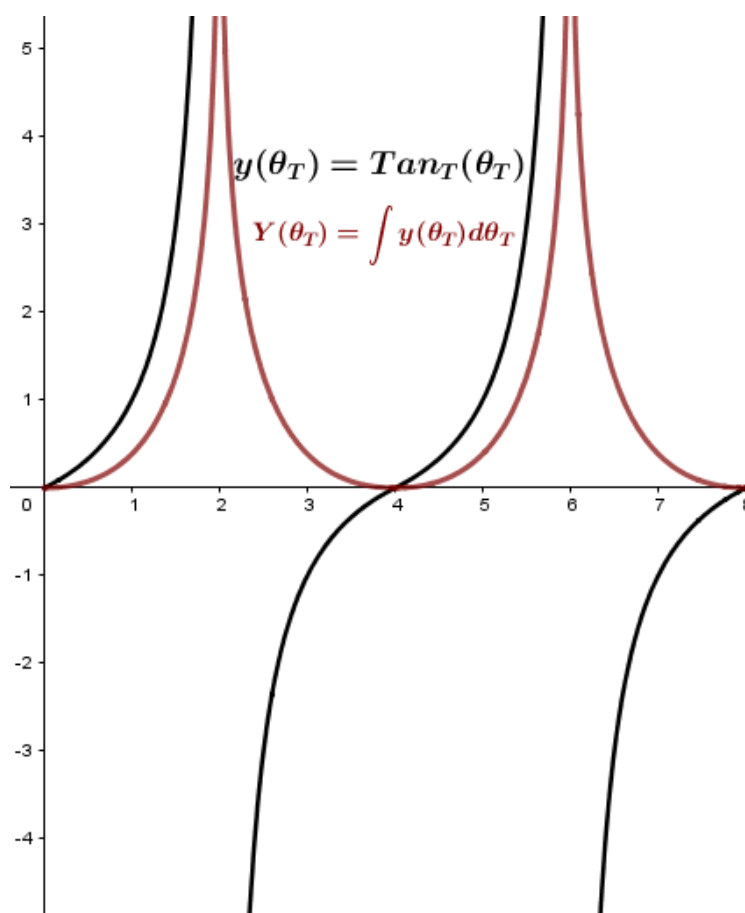
Y para el intervalo  $6 < \theta_T \leq 8$ , se obtiene que

$$Y(\theta_T) = -2 \ln|-6 + \theta_T| + \theta_T + \ln|4| - 8$$

Luego se tiene que

$$Y(\theta_T) = \begin{cases} -2 \ln|2 - \theta_T| - \theta_T + \ln|4| & 0 \leq \theta_T < 2 \\ -2 \ln|2 - \theta_T| + \theta_T + 2 \ln|-2| - 4 & 2 < \theta_T \leq 4 \\ -2 \ln|-6 + \theta_T| - \theta_T + 2 \ln|-2| + 4 & 4 \leq \theta_T < 6 \\ -2 \ln|-6 + \theta_T| + \theta_T + \ln|4| - 8 & 6 < \theta_T \leq 8 \end{cases}$$

En la *Figura 20* se presenta la gráfica de la función integral de la función *Tangente<sub>T</sub>*.



*Figura 20.* Gráfica de la función integral de *Tangente<sub>T</sub>*.Elaboración propia usando software Geogebra®.

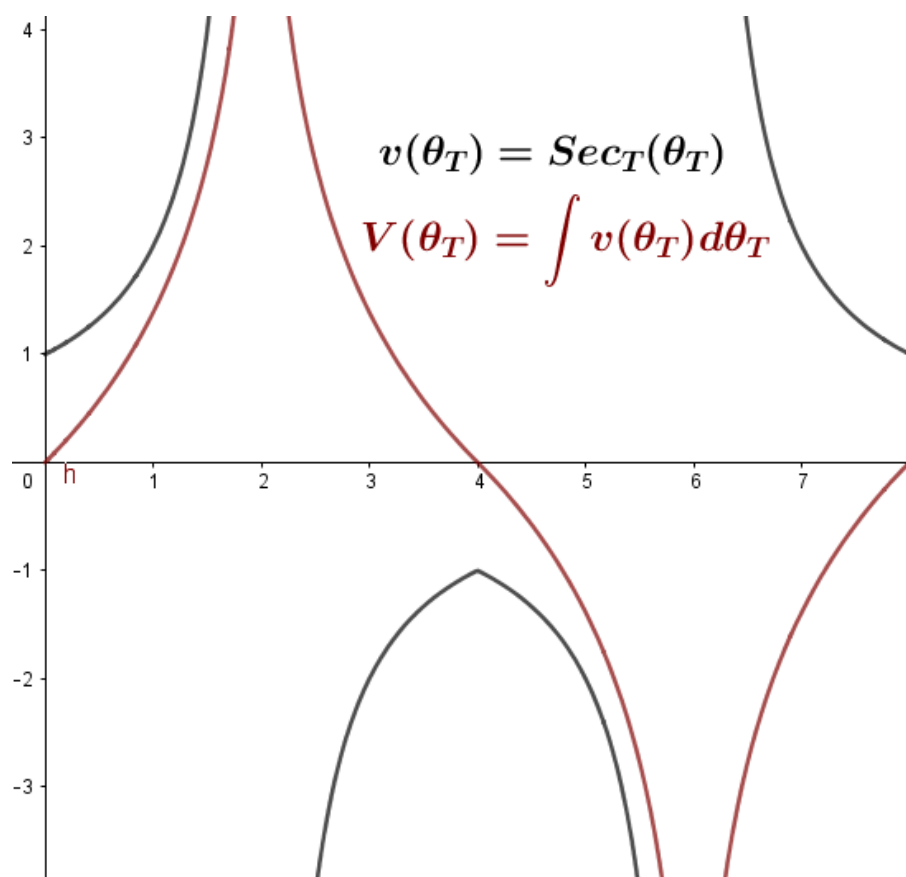
#### 2.7.4 Integral de la función *Secante<sub>T</sub>*.

De manera análoga, se determinará la función integral de la función *Secante<sub>T</sub>*, donde  $v(\theta_T) = \text{Sec}_T(\theta_T)$  y  $V(\theta_T) = \int v(\theta_T) d\theta_T$

Por tanto,  $V(\theta_T)$  esta dado por

$$V(\theta_T) = \begin{cases} \ln \left| \frac{4}{(2 - \theta_T)^2} \right| & 0 \leq \theta_T \leq 4 \vee \theta_T \neq 2 \\ \ln \left| \frac{(\theta_T - 6)^2}{4} \right| & 4 < \theta_T \leq 8 \end{cases}$$

En la *Figura 21*, se presenta la gráfica de la función integral de la función *Secante<sub>T</sub>*



*Figura 21.* Gráfica de la función integral de *Secante<sub>T</sub>*.Elaboración propia usando software Geogebra®.

Las integrales de las funciones *Cotagente<sub>T</sub>* y *Cosecante<sub>T</sub>* se dejan para estudios posteriores.

Se trabajó con un marco matemático desde una serie de definiciones y con el uso de la representación de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista, fue posible establecer las representaciones algebraicas y gráficas de los objetos derivada e integral de las mismas.

Para finalizar este apartado se quieren destacar las construcciones de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales, junto con sus representaciones gráficas y características en la métrica del taxista, obtenidas sin modificar las definiciones conocidas ni las estructuras generales. Y la definición de medida de ángulo que hizo que esto fuera posible.

### 3. Marco Tecnológico

A continuación, se presentarán algunas características del recurso a usar en este caso GeoGebra®.

#### 3.1 Software de Geometría dinámica: GeoGebra®

GeoGebra fue diseñado para fines educativos, ya que este entorno brinda herramientas que permiten a los estudiantes experimentar con figuras permitiendo comprobar relaciones y propiedades por medio del movimiento y /o arrastre, y mediante ésta acción realizar exploraciones y generalidades permitiendo aproximarse a la conceptualización de un objeto que haya sido representado o sobre los elementos que la constituyen. Saidon (2009) afirma: “GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Lo ha elaborado Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores, para la enseñanza de matemática escolar” (p. 13). GeoGebra® también brinda un entorno que permiten la visualización y se constituye en una herramienta muy útil para el desarrollo de competencias argumentativas y de conceptualización (Ruiz, 2013).

#### 3.2 Ventajas y desventajas de GeoGebra®

A continuación, se presentarán algunas ventajas y desventajas de GeoGebra® a nivel tanto educativo como analítico.

Algunas de las ventajas de este software son:

- ✓ Combina elementos de Geometría, Álgebra, Análisis y Estadística.
- ✓ Es libre, gratuito y funciona en varios sistemas operativos (Windows, MacOS X, Linux o Solaris).
- ✓ Contiene una serie de herramientas colaborativas, como espacios de ayuda, recursos, foros y wikis que usuarios de todo el mundo renuevan y evalúan frecuentemente.
- ✓ El interfaz de este software es bastante sencillo, lo cual facilita su uso y permite obtener tres perspectivas de cada objeto matemático (vista gráfica, vista algebraica y vista de hoja cálculo).
- ✓ Es una herramienta de gran utilidad tanto para docentes como estudiantes, puesto que para los primeros posibilita construir materiales didácticos tanto estáticos como dinámicos; a los estudiantes les permite visualizar conceptos matemáticos y relaciones entre ellos, realizar construcciones libres o dirigidas con el fin de resolver problemas, explorar, elaborar conjeturas, investigar hipótesis o construir nuevos conocimientos;

además de esto permite desarrollar en los estudiantes procesos de generalización, a partir de la exploración de representaciones particulares.

- ✓ Permite realizar construcciones geométricas dinámicas, en las que se puede experimentar con las figuras y se pueden comprobar las relaciones y propiedades que permanecen invariantes cuando se someten a movimientos. La herramienta de “*arrastre*” de los objetos permite realizar generalizaciones y conjeturas que pueden comprobarse más fácilmente que con otros métodos tradicionales.
- ✓ Está disponible para ser descargado o manejado en línea en diferentes dispositivos como computadores, tablets y celulares.

Sin embargo, el software GeoGebra® presenta algunas desventajas como:

- ✓ Los estudiantes asumen únicamente como base procesos de representaciones y no de conceptualización.
- ✓ Los estudiantes validan resultados de actividades matemáticas solamente por lo que presenta el software.
- ✓ Dependiendo de los conocimientos previos de estudiantes con respecto al uso del software puede tornarse algo tedioso y de esta manera limitar su uso a las funciones básicas que ofrece GeoGebra®.

### **3.3 Visualización, exploración y conceptualización en Geogebra®**

A continuación, se profundizará con base en algunos referentes teóricos, respecto a los procesos de visualización, exploración y conceptualización; involucrados en el desarrollo de este trabajo.

#### **3.3.1 Visualización.**

Duval (citado por Gómez, 2014), expresa que la visualización es la capacidad de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto dándole sentido.

La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figura, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión. (Arcavi citado en Gómez, 2014, p. 4).

Por otro lado, para Presmeg (citado en Gómez, 2014) la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como los conocimientos establecidos con anterioridad.

De éste modo se evidencia la importancia del proceso de visualización en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, puesto que varios autores coinciden en que la visualización no es meramente una capacidad fisiológica, sino que más bien es un proceso cognoscitivo, que vincula una serie de aspectos propios del ser humano, que mejoran la comprensión de conceptos matemáticos o geométricos que estén siendo estudiados; puesto que a partir de la capacidad imaginativa y representativa, utilizando regla y compás para hacer construcciones geométricas, es posible descubrir propiedades y conceptos, o en el mejor de los casos, haciendo uso de un software, facilitar dichos procesos, puesto que como lo menciona Gómez (citado en Alemán, 2009), “el uso de la computadora ha abierto posibilidades de obtener conclusiones en los estudios matemáticos, al permitir visualizar entes abstractos que antes solo el ‘superespecialistas’ podía imaginar”(p. 13). Es por esta razón que el uso de GeoGebra® resulta ser una herramienta bastante pertinente para alcanzar los objetivos previstos con respecto a la visualización de los objetos tratados en el presente trabajo.

### ***3.3.2 Exploración.***

El proceso de exploración pretende buscar propiedades o relaciones de objetos matemáticos. Esto puede hacerse desde una exploración empírica, teórica o dinámica de acuerdo a lo que proponen Perry, Samper, Camargo y Molina (citados en Mejía, 2014); donde la exploración empírica, se realiza mediante construcciones, no necesariamente con geometría dinámica, ensayo y error y uso de herramientas de medición.

Con respecto a la exploración teórica, es aquella que se desarrolla con base en los conocimientos personales, su propósito fundamental es identificar enunciados que puedan justificar una afirmación, u orientar los procesos de exploración. La exploración dinámica, resulta del uso de la geometría dinámica, la cual juega un papel muy importante, de acuerdo a lo que proponen Healy y Hoyles (citado en Tejero, 2015, p. 8), ya que “la exploración en software de geometría dinámica podría incentivar a los estudiantes a expresar sus conclusiones utilizando la prueba formal, pero además, puede que al usar el software se identifiquen propiedades y dependencias entre los objetos para luego trabajar en las pruebas formales una vez se ha abandonado la construcción”, es decir, la exploración dinámica no solo permite manipular

objetos matemáticos, sino que fomenta procesos argumentativos a partir de procesos de exploración.

Siendo así, resulta evidente la importancia de la exploración dentro de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, puesto que de esta manera es posible proporcionar a los estudiantes una serie de experiencias, que les permitirán abstraer propiedades y relaciones de los objetos matemáticos. Por otro lado se percibe la importancia de la tecnología en la adquisición de conocimientos, ya que, como lo menciona Gómez (citado en Alemán, 2009), “la tecnología abre espacios para que el simplemente de esto, sino más bien, a partir de procesos de exploración, lograr una conceptualización de dichos objetos, para tratar luego de definir los conceptos o relaciones, lo cual está en concordancia con lo que proponen Martínez, Verdu y Gil (citados en Mendible y Ortiz, 2010), para quienes “los conceptos y sus relaciones deben ser tratados con técnicas que permitan a los alumnos construir significativamente otros conceptos asociados con los elementos que se desean tratar didácticamente”, puesto que de lo contrario, como lo menciona Vygotsky (citado en Barboza, 2013), el proceso estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración” (p. 27).

### ***3.3.3 Conceptualizar.***

El proceso de conceptualizar en muchas ocasiones se ha limitado a establecer relaciones entre las definiciones formales o nombres de un objeto con su representación visual (Barboza, 2013); sin embargo no se trata de enseñanza directa de conceptos es imposible y estéril.

Por otro lado, cabe mencionar que el proceso de conceptualizar no solo aporta al establecimiento de relaciones entre conceptos; sino que favorece el desarrollo de razonamiento por medio de las interacciones de los estudiantes, la apropiación de lenguaje especializado, la ampliación de la imagen conceptual del objeto matemático a estudiar y de otros que el estudiante ya conoce. Teniendo en cuenta que la adquisición de un concepto se realiza gracias a las representaciones semióticas con las que cuenta el estudiante, las cuales se van enriqueciendo gracias a las experiencias de enseñanza que se ofrezcan en clase (Barboza, 2013).

Además, Barboza (2013), propone que la actividad de conceptualizar debe tener en cuenta el concepto, objeto o relación matemática, determinado por una definición formal; con la imagen conceptual o representación del concepto, que está formada por imágenes visuales y propiedades

conocidas; siendo así, se hace evidente la relación entre visualización, exploración y conceptualización.

## 4. Marco Didáctico

En este apartado se presentará el modelo propuesto por Duval (como se citó en Marmolejo y Vega, 2012), puesto que se pretende hacer uso del mismo para abordar las temáticas mencionadas anteriormente.

### 4.1 Propuesta didáctica

Considerando lo propuesto por Duval (como se citó en Marmolejo y Vega, 2012), la particularidad de los objetos matemáticos requiere para su aprendizaje que actividades cognitivas como la representación, el razonamiento, la visualización, la comprensión de textos y la resolución de problemas, se usen simultánea y articuladamente varios sistemas de representación semiótica. Así se propondrán una serie de actividades, en las cuales jueguen un papel importante las representaciones de tipo gráfico y analítico.

Más específicamente Duval (como se citó en Marmolejo y Vega, 2012) establece que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, involucra tres aspectos cognitivos: la visualización, que se refiere a la representación visual de características geométricas; la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediante el uso de herramientas geométricas y computacionales y el razonamiento, cuyo objetivo recae en la extensión del conocimiento y la explicación de la prueba, las cuales deben estar relacionadas y su sinergia cognitiva es necesaria para el dominio de la geometría. Es por esto que, con el diseño de las actividades mencionadas anteriormente, se busca que a partir de la visualización de los objetos matemáticos presentados en el software de GeoGebra®, se logre construir definiciones y relaciones de objetos en función, y del mismo modo se amplíe el conocimiento de los estudiantes.

Así en la presente propuesta se diseñaron cuatro actividades, con las cuales se pretende favorecer los procesos visualización, exploración, conceptualización y razonamiento. A continuación, se realiza una descripción de cada una ellas y los procesos que se favorecerían con las mismas.

#### 4.1.1 Actividad 1 (Ver Anexo 1).

El propósito de esta actividad es que los estudiantes reconozcan la definición gráfica y algebraica de la distancia en la métrica del taxista e identifiquen la unidad de medida de ángulo en esta métrica.

Esta actividad está compuesta por 11 ítems, los cuales tienen como fin:

- ✓ En el ítem 1 se espera que el estudiante, luego de realizar una visualización de la figura presentada, logre establecer la definición algebraica de la distancia en la métrica del taxista; como lo propone Duval (citado en Gómez, 2014) para quien la visualización es la capacidad de relacionar diversas representaciones de un mismo objeto dándole sentido.
- ✓ Del ítem 2 al 5, se busca que el estudiante aplique la definición propuesta en el ítem anterior para establecer la distancia de dos puntos específicos, verifique su resultado por medio de la representación gráfica y determine la unicidad de la medida, es decir dicha medida no varía si se toman otros caminos, salvo que no se cumplan las condiciones dadas en la definición tanto que no se puede ir en dirección contraria al punto que se quiere llegar y la simetría de dicha métrica, esto con el fin de realizar una extensión del conocimiento y de este modo favorecer procesos de razonamiento de acuerdo a lo propuesto por Duval (citado en Marmolejo y Vega, 2012).
- ✓ En el ítem 6, se pretende que el estudiante considere la representación de la circunferencia unitaria en esta métrica, teniendo en cuenta que como lo menciona Presmeg (citado en Gómez, 2014), el proceso de visualización requiere transformar tanto el imaginario visual mental como los conocimientos establecidos con anterioridad.
- ✓ Del ítem 7 al 9, se espera que el estudiante realice una comparación del perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica usual con respecto a la métrica del taxista, en el cual está inmerso los procesos de visualización y razonamiento.
- ✓ En el ítem 10 y 11, se pretende que el estudiante comprenda la unidad de medida de ángulo en esta métrica y establezca una relación entre dicha unidad con los radianes usados comúnmente y así conceptualizar dicho concepto y poder identificarlo en cualquier métrica especialmente en las dos usadas (euclidiana y taxista).

#### **4.1.2 Actividad 2 (Ver Anexo 2).**

Como propósito de la actividad 2 se plantea que los estudiantes tengan un acercamiento a las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente en la métrica del taxista, a partir de la exploración de los archivos de GeoGebra® en el cual encontrarán un simulador y con esto logren definir las.

Esta actividad está compuesta por 7 ítems por cada una de las funciones ( $Seno_T$  y  $Coseno_T$ ) en los cuales se propone:

- ✓ En el ítem 1, se pretende que a partir de un proceso de exploración los estudiantes evalúen la función para algunos valores.
- ✓ Del ítem 2 al 6, se espera que los estudiantes establezcan relaciones entre los diferentes elementos de los archivos que se están explorando, puesto que como lo menciona Healy y Hoyles (citados en Tejero, 2015), el proceso de exploración permite identificar propiedades y dependencias entre los objetos.
- ✓ En el ítem 7, se pretende que los estudiantes a partir de lo realizado en los ítems anteriores y la exploración de los archivos logren definir las funciones trigonométricas  $Seno_T$  y  $Coseno_T$  para ángulos entre 0 y  $8 rad_T$ , puesto que como lo menciona Martínez, Verdu y Gil (citados en Mendible y Ortiz, 2010), los conceptos y sus relaciones deben ser trabajados de forma tal que permitan a los estudiantes construir significativamente otros conceptos asociados con los elementos que se desean tratar.

Para la función  $Tan_T$  se proponen 3 ítems, en los cuales,

- ✓ En el ítem 1 y 2, al igual que para las funciones  $Seno_T$  y  $Coseno_T$ , se espera que los estudiantes evalúen la funciones para algunos valores por medio de un proceso de exploración o la representación gráfica e identifiquen características de la función; puesto que como lo menciona Healy y Hoyles (citados en Tejero, 2015), con el proceso de exploración es posible identificar propiedades y dependencias entre los objetos.
- ✓ En el ítem 3, se pretende que los estudiantes establezcan la definición de  $Tan_T$ , a partir del proceso de exploración realizado, lo hallado en los ítems anteriores o a partir de lo realizado con las funciones  $Seno_T$  y  $Coseno_T$ , con el fin construir dicha definición de acuerdo a lo que propone Martínez, Verdu y Gil (citados en Mendible y Ortiz, 2010).

### **4.1.3 Actividad 3 (Ver Anexo 3)**

El propósito de esta actividad es que los estudiantes describan características de las gráficas de las derivadas de las funciones trigonométricas  $Seno_T$ ,  $Coseno_T$  y  $Tangente_T$  en la métrica del taxista.

En esta actividad se proponen 3 ítems para las funciones  $Seno_T$  y  $Coseno_T$ , en los cuales se busca que los estudiantes describan lo observado en la figura presentada de la función trigonométrica con su derivada, establezcan características y determinen los intervalos de continuidad de la función derivada. Teniendo en cuenta que el proceso de visualización permite

interpretar y reflexionar sobre una figura con el fin comunicar, desarrollar ideas y ampliar procesos de comprensión Arcavi (citado en Gómez, 2014).

Para la función  $Tangente_T$  se proponen 9 ítems en los cuales,

- ✓ Del ítem 1 al 7, se espera que los estudiantes describan lo observado en la figura presentada de la función trigonométrica con su derivada y determinen algunas características de esta, como si es creciente o decreciente, si es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y el valor de los puntos máximos y mínimos de esta, con el fin de que, como lo menciona Arcavi (citado en Gómez, 2014), por medio del proceso de visualización se logren interpretar, usar y reflexionar sobre la figura, para desarrollar ideas y mejorar la comprensión de nuevos objetos.
- ✓ En el ítem 8, se pretende que los estudiantes establezcan una relación entre la representación de la función derivada de la función tangente en la métrica usual con respecto a la métrica del taxista, puesto que como lo menciona Presmeg (como se citó en Gómez, 2014), el proceso de visualización requiere de una transformación de los conocimientos establecido con anterioridad.
- ✓ En el ítem 9, se pretende que los estudiantes logren establecer una definición para la función derivada de la función  $Tan_T$ , puesto que como lo menciona Barboza (2013), el proceso de conceptualizar favorece una gran diversidad de procesos como el razonamiento, comunicación, ampliación de las representaciones y el establecimiento de relaciones.

#### **4.1.4 Actividad 4 (Ver Anexo 4)**

Con esta actividad se pretende que los estudiantes definan la función integral de las funciones trigonométricas, a partir de un proceso de exploración y del uso del teorema fundamental del cálculo.

Esta actividad está compuesta por 8 ítems para cada una de las funciones  $Seno_T$  y  $Coseno_T$ , de manera que:

- ✓ En el ítem 1, se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del software, describan lo observado, teniendo en cuenta que, como lo menciona Gómez (citado en Alemán, 2009), el uso de software proporciona al estudiante una serie que experiencias, las cuales permiten establecer propiedades y relaciones de los objetos.

- ✓ En el ítem 2, se espera que los estudiantes definan la función integral de la función trigonométrica haciendo uso del teorema fundamental del cálculo (parte I) y del proceso de exploración realizado anteriormente; como se ha mencionado el uso de software genera una gran diversidad de experiencias a los estudiantes, las cuales favorecen un tratamiento distinto de los conceptos y relaciones matemáticas aportando a la construcción significativa de los mismos de acuerdo a lo propuesto por Martínez, Verdu y Gil (como se citó en Mendible y Ortiz, 2010).
- ✓ Del ítem 3 al 8, se espera que los estudiantes determinen algunas características de la función integral de la función trigonométrica en cuanto a si crece o decrece, es cóncava hacia arriba o hacia abajo, puntos máximos y mínimos de esta; puesto que como sea mencionado anteriormente el proceso de visualización permite establecer e identificar propiedades y relaciones de conceptos u objetos matemáticos, más aun cuando se hace uso de un software, ya que como lo menciona Gómez (citado en Alemán, 2009), estos amplían las posibilidades de obtener conclusiones en los estudios matemáticos, al facilitar la visualización de entes abstractos que resultan complejos de identificar sin el uso de medios tecnológicos.

Para la integral de la función  $Tan_T$  se proponen 3 ítems

- ✓ En el ítem 1, se espera que los estudiantes describan lo observado con respecto a la gráfica de la función integral de la función  $Tan_T$ , ya que como lo menciona Arcavi (citado por Gómez, 2014) la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figura, imágenes, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información.
- ✓ En el ítem 2, se pretende que los estudiantes definan la integral, haciendo uso de los conocimientos previos de cálculo integral (integrales indefinidas y definición de integral como área bajo la curva), teniendo en cuenta las contribuciones que trae consigo el proceso de conceptualizar en la enseñanza y aprendizaje de un concepto u objeto matemático, de acuerdo a lo propuesto por Barboza (2003).
- ✓ Por último, en el ítem 4 se propone a los estudiantes hacer una comparación de las integrales de las funciones estudiadas en la métrica del taxista con respecto a las de la métrica usual; teniendo en cuenta el papel que juega la transformación tanto del imaginario visual mental como los conocimientos establecidos con anterioridad en el

proceso de visualización de acuerdo a lo propuesto por Presmeg (citado en Gómez, 2014).

## 5. Análisis de las actividades implementadas

A continuación se presentará el análisis de las actividades implementadas en el curso de la línea de Geometría del proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional denominado “Geometría Analítica” que fue llevada a cabo durante el segundo semestre de 2018, el cual contaba con 12 estudiantes, proporcionando así 6 grupos de parejas de trabajo. Se contó con poco tiempo para la implementación debido a que la problemática de financiamiento que afecta a la educación superior en Colombia estaba a punto de decretar el inicio la movilización estudiantil en defensa de la educación pública superior. Así se decidió implementar las 4 actividades pero solo en relación a la función  $\text{Sen}_T$  (Ver anexo 5), para poder tener un referente de pilotaje de la estructura general de la propuesta.

### 5.1 Actividad 1

La actividad 1 (Anexo 5) se propuso la identificación de unidad de medida de ángulos en la métrica del taxista y se dejó de lado la definición de distancia ya que en el curso en el que se hizo el pilotaje, lo habían trabajado como parte de representar objetos de manera no convencional. Así las autoras optaron por escoger algunos ítems de la actividad original y particularmente para tener un muestreo de la misma, se pilotearon los ítems 8, 10 y 11 del *Anexo 1*.

Algunos de los hallazgos más relevantes fueron los siguientes:

- ✓ En el ítem 8, los estudiantes relacionaron la definición de perímetro con la definición de distancia en la métrica del taxista, para esto los estudiantes tomaron la distancia por intervalo es decir que denominaron a cada intercepción de la circunferencia con el plano cartesiano y ubicaron sus coordenadas como se muestra en la *figura 22*.

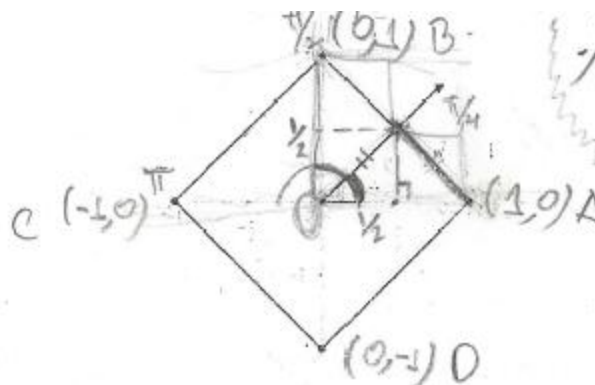


Figura 22. Ubicación de coordenadas en la circunferencia unitaria. Trabajo realizado por el grupo 3.

Luego hallaron el perímetro de la circunferencia unitaria en esta métrica sumando cada intervalo subtendido en la circunferencia. Todos los estudiantes lograron establecer el perímetro de la circunferencia unitaria en métrica del taxista (figura 23 y 24).

### MEDIDA DE ÁNGULOS EN MÉTRICA DEL TAXISTA

- ✓ Escriba el perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.

|  |   |
|--|---|
| $d(A,B) =  x_1 - x_2  +  y_1 - y_2 $<br>$d(A,B) =  1 - 0  +  0 - 1 $<br>$d(A,B) = 2$<br>$d(B,C) = 2$<br>$d(C,D) = 2$<br>$d(A,D) = 2$ | $Perimetro = 2 + 2 + 2 + 2$<br>$Perimetro = 8 \text{ unidades}$ |
|--|---|

Figura 23. Resultado y procedimiento del perímetro de una circunferencia unitaria en la métrica del taxista. Trabajo realizado por el grupo 3.

- ✓ Escriba el perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.

|   |
|---|
| $P_C = d_{AB} + d_{BC} + d_{CD} + d_{DA} = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$<br>$\text{Sean } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \Rightarrow d_{P_1, P_2} =  x_1 - x_2  +  x_2 - y_2 $ |
|---|

Figura 24. Resultado y procedimiento del perímetro de una circunferencia unitaria en la métrica del taxista. Trabajo realizado por el grupo 1

- ✓ Del ítem 10, se encontró que los estudiantes consideraron importante la representación de la circunferencia unitaria en esta métrica para dar respuesta (Figura 25), relacionándolo con lo obtenido en el ítem anterior, teniendo en cuando que como lo menciona Presmeg (citado en Gómez, 2014), en el proceso de visualización requiere transformarse y relacionarse.

Resulta también interesante, una evidencia donde se traza una semicircunferencia en métrica usual sobre una circunferencia en métrica del taxista para relacionar conceptos o relaciones ya conocidas con concepto o relaciones nuevas.

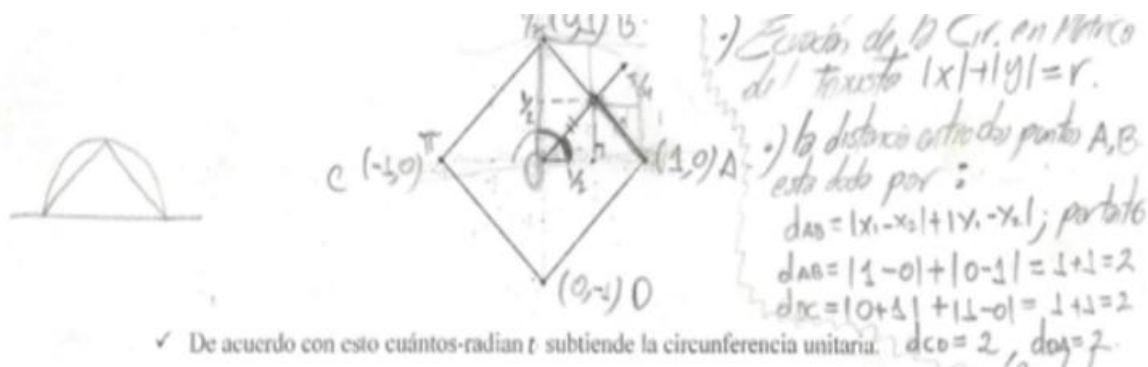


Figura 25. Ubicación de coordenadas en la circunferencia unitaria y perímetro de la misma. Trabajo realizado por el grupo 5.

Como  $d_{AB} = d_{BC} = d_{CO} = d_{OA} = 2$  y un radian  $t$  es el radio subtaxista en la circunferencia, en este caso  $r=1$ , entonces se tiene 8  $t$ -radios en la circunferencia unitaria.

Figura 26. Relación establecida entre los lados y el perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista. Trabajo realizado por el grupo 5.

$\checkmark$  De acuerdo con esto cuántos radian  $t$  subtiende la circunferencia unitaria.

Con 8 radian  $t$

Figura 27. Respuesta del grupo 6.

Así y luego de darse dicha relación los grupos llegaron a que una circunferencia unitaria en la métrica del taxista subtiende 8  $rad_t$  como se muestra en la figura 26 y 27.

- $\checkmark$  En el ítem 11, dada la exploración y los resultados anteriores, los estudiantes establecieron la relación de la unidad de medida de ángulo en la métrica del taxista y la unidad de medida que se usa comúnmente en la métrica euclidiana como se muestra en la figura 28. Cabe destacar que los estudiantes que relacionaron las representaciones usuales y las de la nueva métrica, lograron establecer más rápidamente la relación.

Complete la siguiente tabla

| radian- $t$ | 1          | 2          | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           |
|-------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| → Radianes  | $\pi/4$    | $\pi/2$    | $3\pi/4$    | $\pi$       | $5\pi/4$    | $3\pi/2$    | $7\pi/4$    | $2\pi$      |
| → Grados    | $45^\circ$ | $90^\circ$ | $135^\circ$ | $180^\circ$ | $225^\circ$ | $270^\circ$ | $315^\circ$ | $360^\circ$ |

Figura 28. Respuesta obtenida por el grupo 3.

## 5.2 Actividad 2

A continuación, se presentará un análisis de los resultados obtenidos al aplicar la actividad 2 (Anexo 5).

- ✓ El apartado 1 de esta actividad se logró desarrollar sin dificultad alguna, puesto que los estudiantes a partir de la visualización de la gráfica lograron evaluar la función para los valores dados como se muestra en la *figura 29*.

¿Qué valores toma la función trigonométrica a medida que varía el ángulo?

| $\theta_j$ (radian- $t$ ) | $\text{Seno}_T(\theta_j)$ |
|---------------------------|---------------------------|
| 0                         | 0                         |
| 1                         | $\frac{1}{2}$             |
| 2                         | 1                         |
| 3                         | $\frac{1}{2}$             |
| 4                         | 0                         |
| 5                         | $-\frac{1}{2}$            |
| 6                         | -1                        |
| 7                         | $-\frac{1}{2}$            |
| 8                         | 0                         |

Figura 29. Solución propuesta para el ítem 1 de la actividad 2. Trabajo realizado por el grupo 3.

- ✓ En el apartado 2, gracias al proceso de visualización, exploración y conocimientos previos de la definición de la función *Seno* usual, los estudiantes como lo menciona Healy y Hoyles (como se citó en Tejero, 2015), lograron identificar relaciones entre los objetos estudiados (*figura 30*)

✓ ¿Qué relación tienen los segmentos construidos de color naranja?

Son paralelos y Congruente. y además el segmento naranja es equivalente al Sen de  $t$  radianes

Figura 30. Solución propuesta para el ítem 2 de la actividad 2. Trabajo realizado por el grupo 6.

✓ En el apartado 3, la mayoría de estudiantes lograron establecer de manera acertada la relación propuesta para este ítem; sin embargo un grupo de estudiantes no logro identificar ningún tipo de relación, puesto que para ellos, dichas distancias eran diferentes, ya que en el primer cuadrante el arco de circunferencia es  $\sqrt{2}$  y el segmento tiene como longitud 2, lo cual nos permitió evidenciar el apego por dichos estudiantes con respecto a la métrica usual, puesto que consideran la medida del arco de circunferencia haciendo uso de la definición de medida usual, olvidando que se está trabajando con la definición de la métrica del taxista y que en la primera actividad para hallar el perímetro de circunferencia se había hallado dicha distancia, evidenciándose así que como lo menciona Espinosa(2016), los estudiantes presentan dificultades al trabajar con otras métricas.(figura 31)

✓ ¿Qué relación existe entre el arco de circunferencia y el segmento del eje x, construidos del mismo color (azules)?

No tienen ninguna relación; pues en  $2t$  radianes se tiene que la longitud del arco de circunferencia es  $\sqrt{2}$ ; que no es lo mismo que 2, que se representa en el eje x.

Figura 31. Solución propuesta para el ítem 3 de la actividad 2. Respuesta del grupo 1.

✓ En el ítem 4 y 5, se lograron determinar las relaciones, entre los objetos dados, de manera adecuada, por medio de los procesos de visualización y exploración desarrollados por los estudiantes, evidenciándose así que como lo menciona Healy y Hoyles (como se citó en Tejero, 2015), el proceso de exploración permite identificar propiedades y dependencias entre los objetos, como se muestra en la figura 32

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el arco de circunferencia

Si el ángulo es  $x$  radianes el arco mide  $x$ .

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el segmento azul subtendido en el eje  $x$

Si el ángulo mide  $x$  radianes el segmento mide  $x$ .

Figura 32. Solución propuesta para el ítem 4 y 5 de la actividad. Resultado del grupo 5.

- ✓ En el apartado 6, los estudiantes logran establecer argumentos del comportamiento de la función  $\text{Seno}_T$ , sin embargo un grupo de estudiantes tuvo dificultades al momento de justificar porque en algunos intervalos la función  $\text{Seno}_T$  se encuentra por encima del eje  $x$  y en otros por debajo del eje  $x$  (figura 33), lo cual puede ser consecuencia de algún patrón de comunicación impartido por una la clase tradicional, donde las respuestas de los estudiantes son mínimas sin riqueza en el lenguaje tanto natural como matemático, responden con una pregunta, realizan conjeturas arbitrarias, hacen eco a la respuesta de otro estudiante o guardan silencio, según lo manifiestan Alrø y Skovsmose (como se citaron en Valero y Ole Skovsmose, 2012).

- ✓ ¿Por qué cree que en algunos intervalos la función  $\text{Seno}_T$  está por encima del eje  $x$  (función positiva) y en otros por debajo del eje  $x$  (función negativa)?

porque el seno en el cuadrante 3 y 4 es negativa.

Figura 33. Solución propuesta para el ítem 6 de la actividad 2. Respuesta del grupo 1.

- ✓ El apartado 7, fue el ítem que generó mayor dificultad a los estudiantes; ya que no se consideraba que la función  $\text{Seno}_T$  estuviera definida por partes, en tanto no se lograba identificar una alternativa para definir dicha función de manera general para el intervalo de  $[0,8]$ , luego de un tiempo un grupo de estudiantes haciendo uso del apartado 1 se dio cuenta que podría usar la ecuación pendiente punto; pero no tenían claro si esta se podría usar normalmente, ya que se estaba trabajando con la métrica del taxista (figura 34). Por otro lado

uno de los grupos se limitó simplemente a asociarlo con los conocimientos previos que se tienen sobre la definición de la función *Seno* (figura 35), evidenciándose así que, como lo menciona Barboza (2013), en muchas ocasiones el proceso de conceptualizar se limita simplemente a establecer una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del concepto o relación.

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $Sen_T(\theta_T)$  de cualquier ángulo teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

$$Sen_t(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta & ; 0 \leq \theta \leq 2 \\ -\frac{1}{2}\theta + 2 & ; 2 \leq \theta \leq 6 \\ \frac{1}{2}\theta - 4 & ; 6 \leq \theta \leq 8 \end{cases}$$

Figura 34. Propuesta 1 de solución al ítem 7 de la actividad 2. Grupo 5.

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $Sen_T(\theta_T)$  de cualquier ángulo teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

$$Sen_T(\theta_T) \begin{cases} \theta > 4 & -\frac{CO}{h} \\ \theta < 4 & \frac{CO}{h} \end{cases}$$

Figura 35. Propuesta 2 de solución al ítem 7 de la actividad 2. Grupo 3.

### 5.3 Actividad 3

Con la actividad 3 (Anexo 3) se buscaba que los estudiantes describieran las características de las gráficas de la función trigonométrica  $Seno_T$  y su derivada.

En esta actividad se propone 3 ítems (ver Anexo 5) de los cuales se relacionan con la gráfica de la función derivada de la función  $Seno_T$ , donde el estudiante describe lo observado de la imagen (gráfica) en la actividad y establece algunas características de esta, donde se tiene en cuenta el proceso de visualización ya que este permite interpretar y reflexionar sobre una figura y

que por lo tanto posibilita que el estudiante comunique sus ideas y amplíe su proceso de comprensión como lo menciona Arcavi (citado en Gómez, 2014).

✓ ¿Qué se puede observar de la *Figura 1*?

Qué en los puntos  $\theta = 0, 2, 6, 8$ . no es continua, y tiene saltos.

*Figura 36. Resultado de la observación del grupo 5.*

✓ ¿Qué característica tiene la función  $h(\theta_T)$ ?

Es una función a trozos, tiene saltos y no es continua.

*Figura 37. Resultado de la observación del grupo 5.*

✓ ¿Qué característica tiene la función  $h(\theta_T)$ ?

$h(\theta_T)$  es la derivada de la función  $\text{Sen}(\theta)$ .  
No corta al eje  $x$ , no es continua, es una función a trozos, conformada por segmentos horizontales.

*Figura 38. Resultado del grupo 6.*

✓ ¿La función  $h(\theta_T)$  es continua?, sino ¿En cuáles intervalos es continua?

No es Continua  
 Es Continua en  $\begin{cases} 0 < \theta < 2 \\ 2 < \theta < 6 \\ 6 < \theta < 8 \end{cases}$

Figura 39. Resultado del grupo5.

Algo característico de la *figura 36* y la *figura 39* es que no se conserva la notación empleada en las actividades anteriores junto con otros ítems que se observó este mismo fenómeno, sin embargo, hacen una correcta relación y caracterización de las gráficas correspondientes, es posible que se deba considerar que en todo proceso de introducción de nuevas notaciones o simbologías se debe dar un proceso de familiarización con la mismas.

#### 5.4 Actividad 4

A continuación, se presentará el análisis de la actividad 4 anexo 5.

✓ Con respecto al apartado 1, la mayoría de estudiantes identificó que la representación que se formaba correspondía a la integral de la función  $\text{Seno}_T$ , lo cual permite percibir que como lo menciona Gómez (como se citó en Alemán, 2009) el uso de software proporciona al estudiante una serie de experiencias, las cuales permiten establecer propiedades y relaciones de los objetos, además de esto algunos estudiantes ya han cursado el espacio de la Línea de Análisis del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional denominado Cálculo Integral donde se han familiarizado con la integral de una función y su representación. Sin embargo, en una de las evidencias fue posible observar como un grupo de estudiantes asocia la representación generada por el software a una campana. (*figura 40*) y se quedan en la representación de la forma y no logran establecer la relación entre la curva y el objeto que se va construyendo con el arrastre, y lo plantean como una conjetura sin llegar a tratar de validar su afirmación.

✓ ¿Qué se puede observar?

Se dibujó una campana que parece ser la que representa el área acumulada.

Figura 40. Solución propuesta para el ítem 1 de la actividad 4. Resultados del grupo 5.

✓ En cuanto al apartado 2, se logró evidenciar la dificultad de los estudiantes al establecer la integral desde el teorema fundamental del cálculo, pues algunos grupos simplemente definieron dicha integral para el intervalo  $[0,8]$ , sin considerar la definición establecida para la función  $Seno_T$  realizada en la actividad 2, ni el teorema fundamental del cálculo dado anteriormente (figura 41). Este hallazgo está en concordancia con lo menciona Barboza (2013) al referir que en muchas ocasiones el proceso de conceptualizar se limita simplemente a establecer una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del concepto o relación y se da como suficiente evidencia lo que obtienen con el software GeoGebra®. Cabe mencionar que algunos de los grupos si lograron establecer la integral para la función  $Seno_T$  (figura 42).

✓ Encuentre una expresión en términos de integral para la función determinada por el rastro del punto A

$$g(x) = \int_0^8 Seno_T(\theta_T) d\theta_T$$

La integral está definida según el archivo de geogebra.

Figura 41. Propuesta 1 de solución al ítem 2 de la actividad 4. Resultado del grupo 4.

✓ Encuentre una expresión en términos de integral para la función determinada por el rastro del punto A

$$\begin{array}{l}
 [0, 2] \quad g(\theta_T) = \int_0^t \frac{1}{2} \theta_T d\theta_T \quad 0 \leq t < 2 \\
 [2, 6] \quad g(\theta_T) = \int_2^t \frac{1}{2} \theta_T - 2 d\theta_T \quad 2 \leq t < 6 \\
 [6, 8] \quad g(\theta_T) = \int_6^t \frac{1}{2} \theta_T - 4 d\theta_T \quad 6 \leq t < 8
 \end{array}$$

Figura 42. Propuesta 2 de solución al ítem 2 de la actividad 4. Grupo 5.

- ✓ Del apartado 3 al 8, los estudiantes identificaron de manera acertada las propiedades y relaciones de los objetos dados evidenciándose, así que como lo menciona Gómez (como se citó en Alemán, 2009), el uso de software amplía las posibilidades de obtener conclusiones sobre los objetos matemáticos y sus relaciones al facilitar la visualización de entes abstractos que resultan complejos de identificar sin el uso de medios tecnológicos (*figura 43*).

✓ ¿En qué intervalos es creciente la función  $g(\theta_T)$ ?

Es creciente en  $[0,4]$

✓ ¿En qué intervalos es decreciente la función  $g(\theta_T)$ ?

Es decreciente  $[4,8]$

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función  $g(\theta_T)$ ?

Es cóncava hacia arriba en  $[0,2]$  y  $[6,8]$

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo la función  $g(\theta_T)$ ?

Es cóncava hacia abajo en  $[2,6]$ .

✓ ¿Dónde tiene un valor máximo la función  $g(\theta_T)$ ?

El valor máximo es en  $\theta = 4$ .

✓ ¿Dónde tiene un valor mínimo la función  $g(\theta_T)$ ?

El valor mínimo está en  $\theta = 0$  y  $\theta = 8$

*Figura 43.* Solución propuesta para los ítems del 3 al 8 de la actividad 4. Respuesta del grupo 5.

## 6. Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones generadas luego del desarrollo del presente trabajo, en cuanto la construcción de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales, el uso de la herramienta tecnológica, la pertinencia del modelo de enseñanza propuesto y los resultados de la implementación de la actividad, es decir se presentaran las conclusiones en relación con los marcos propuestos para el desarrollo del trabajo.

### 6.1 Desde el marco matemático

En el marco matemático se caracterizan las construcciones de las funciones trigonométricas, sin cambiar las definiciones conocidas pero si la métrica, donde se observó un cambio drástico en las representaciones gráficas dado que estas están ligadas a la definición pero en sí, no son la definición del objeto y mucho menos el objeto. Paradójicamente los objetos se conceptualizan desde sus representaciones restringidas en tanto el concepto pierde su propio sentido y puede llegar a quedar oculto entre las representaciones, lo que limita el alcance que se pueda tener sobre los conceptos en sí.

En las construcciones de las funciones derivada e integral de las funciones trigonométrías en la métrica del taxista, se identificó que la representación gráfica y las ecuaciones de estas funciones cambian, aunque se trabajó con los conceptos y las definiciones sin alterarlos, y en este cambio se destaca que las funciones obtenidas no se relacionan con las funciones consecuentes con la métrica euclidiana.

En la implementación se observó que el cambio de representación gráfica de los objetos matemáticos resulta complejo para los estudiantes dada la cotidianidad de uso del mismo, pero que, una vez implementada la actividad que apoyaba la exploración y la conceptualización se llegó a que estaban trabajando con el mismo objeto ya que no se cambiaron las definiciones, por tanto el cambio de métrica proporcionó la conceptualización y el reforzamiento de las propiedades del objeto en sí, en nuestro caso de las funciones trigonométricas.

### 6.2 Desde el marco tecnológico

El software GeoGebra® jugó un papel muy importante en el desarrollo del trabajo pues permitió comprobar los procesos que se estaban llevando acabo por medio de las

representaciones gráficas, las cuales servían como medio para verificar si los procesos realizados eran coherentes con lo que se estaba construyendo.

En cuanto al diseño e implementación de archivos en el software GeoGebra®, para la conceptualización de las funciones trigonométricas sus derivadas e integrales, fue posible evidenciar que estos resultaron ser, en su diseño, una herramienta bastante provechosa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas, puesto que efectivamente contribuyeron al desarrollo de los procesos propuestos en el marco tecnológico. Luego de un proceso de visualización y exploración, algunos estudiantes lograron establecer características y elementos de cada representación y a partir de esto conceptualizar tanto la función como la integral; teniendo en cuenta que el software GeoGebra® permite manipular los objetos, lo cual posibilita que el estudiante descubra nuevas relaciones, compruebe resultados, verifique propiedades y establezca dependencias entre los objetos matemáticos que están en juego.

### **6.3 Desde el marco didáctico**

Con respecto al marco didáctico, establecido para el desarrollo de las actividades es posible considerar que resultó ser una buena alternativa para potenciar en los estudiantes procesos de conceptualización, ya que a partir de la visualización y exploración se logró que algunos estudiantes identificarán elementos y características tanto de las representaciones algebraica como gráfica de los archivos de GeoGebra®, lo cual no solo mejora los procesos de razonamiento en los estudiantes sino que también favorece habilidades para la construcción y el descubrimiento de definiciones y relaciones entre los objetos matemáticos. Sin embargo aunque dicha metodología sea relativamente innovadora y se haga uso de herramientas no usadas comúnmente en la clase; no es posible alcanzar por completo lo esperado en cuanto al proceso de conceptualizar autónomamente, puesto que los estudiantes presentan cierto apego a los conocimientos ya establecidos con anterioridad y les cuesta bastante trabajo desaprenderse de estos y trabajar en la construcción de nuevos conocimientos y a esto se suma que las prácticas educativas hacen que ellos estén más habituados a que se les indique “*qué tienen que hacer*” que a un proceso donde deban dar cuenta de lo que hacen o de porqué aparecen ciertos resultados.

### **6.4 Desde la Implementación de las actividades**

La evidencia escrita recolectada en cuanto a la implementación de las actividades, permitió además de realizar un análisis de los resultados obtenidos, identificar ciertas falencias y

potencialidades tanto de los estudiantes como de la implementación de las actividades propuestas.

Uno de los aspectos que no se consideró de manera precisa para la implementación fue el factor tiempo; puesto que el periodo que se había presupuestado para desarrollar las cuatro actividades, solo alcanzó para trabajar en dos de ellas, en tanto las otras dos se tuvieron que dejar como actividad extraclase. No obstante, las dinámicas que se vivían de manera coyuntural en la universidad tampoco permitían realizar la actividad de una manera que se adecuara más a los requerimientos de tiempo.

El desarrollo de las actividades favoreció el trabajo con diversos sistemas de representación, puesto que los estudiantes luego de manipular los archivos de GeoGebra® (representación gráfica), describían lo observado (representación proposicional), tabularon algunos datos (representaciones analógicas o tabulares) y finalmente conceptualizaron los objetos matemáticos en términos de expresiones algebraicas (representaciones simbólicas). Además de esto, las actividades permitieron que varios estudiantes rompieran con paradigmas establecidos con anterioridad, en cuanto a las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales; por medio de la construcción secuencial de los mismos en la métrica del taxista.

Dentro del proceso de conceptualización en principio se evidenciaron dificultades en la mayoría de estudiantes, pues no lograban establecer algún tipo de estrategia para determinar de forma general la expresión simbólica tanto para la función como para la integral en el intervalo dado, que modelara las representaciones de los archivos suministrados en el software de GeoGebra®.

Por otro lado fue posible percibir dificultades en algunos estudiantes de tipo comunicativas, tanto de forma oral como escrita, a la hora describir las relaciones encontradas en los procesos de exploración y visualización; así mismo, algunos estudiantes omitieron la información dada en el enunciado para dar solución a las preguntas, por ejemplo para definir la integral de la función  $\text{Sen}_T$ , se les presentó a los estudiantes el Teorema Fundamental de Cálculo, a fin de que haciendo uso de él determinaran la integral de la misma; sin embargo varios estudiantes no la consideraron.

## 7. Referencias

- Alemán, J (2009). La Geometría con Cabri: Una Visualización a las Propiedades de los Triángulos (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Francisco Morazán, Tegucigalpa.
- Alfaro, N., Campos, S., Ilabaca, F., Ulloa, N. y Moncada, J. (2014). TIC en Enseñanza de la Estadística Descriptiva y el Aprendizaje Autónomo. Universidad Católica de Temuco, Chile.
- Ángel, M y Mayor, I. (2012). Un Estudio Descriptivo sobre las Estrategias de Solución que emplean Algunos Estudiantes de Grado Décimo, Usando GeoGebra: Caso Área Bajo la Curva (Tesis de Especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
- Bahamon, L. y Bonelo, Y. (2015). Los Procesos de Construcción, Visualización y Razonamiento en el Desarrollo del Pensamiento Geométrico: un Experimento de Enseñanza (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Barboza, J (2013). Explorar y Descubrir para Conceptualizar en Geometría. Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia.
- Bonilla, D., Parraguez, M., y Solanilla, L. (2014). Al fin de cuentas, ¿Qué es una recta en la Geometría del Taxista? Revista Tumbaga, V. 2, N. 10, pp. 53-68. ISSN 1909-4841.
- Cárdenas, R y Parra, W. (2013). Estudio de la Métrica de Manhattan. Segmentos, Rectas, Rayos, Circunferencias y Algunos Lugares Geométricos en la Geometría del Taxista (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Cendales, F. y Hernández, A. (2016). Definición y Descripción de una Función Asociada a la Métrica del Taxista (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Espinoza, H. (2016). Una Secuencia Didáctica sobre Conceptos de Topología Métrica para la Formación de Docentes de Matemáticas en la UNE “Enrique Guzmán y Valle” (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima.
- García, G. y Rojas, A. (2012). Relación entre la Solución de Problemas de Optimización y la Variación en la Pendiente de la Recta Tangente a una Función a partir de la Visualización en Geometría Dinámica (Tesis de Especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

- Gómez, I. (2014). Visualización y Razonamiento. Creando Imágenes para Comprender las Matemáticas. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España.
- González, J y Maestre, W. (2012). ¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la Conceptualización (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Marmolejo, G y Vega, M. (2012). La Visualización en las Figuras Geométricas: Importancia y Complejidad de su Aprendizaje. Educación matemática. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S166558262012000300002&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166558262012000300002&lng=es&tlng=es)
- Mejía, C. (2014). Procesos de Conjeturación en una Clase de Geometría: El Papel del Profesor que usa GeoGebra a la Luz de la Teoría de la Mediación Semiótica (trabajo de grado de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Mendible, A; Ortiz, J. (2010). Conceptualización de Ideas Matemáticas en Ingeniería. Capítulo 2. Propuesta para la Enseñanza de las Matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23.
- Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui. (2012). Los Registros Semióticos de Representación en Matemática. Revista Aula Universitaria. Recuperado de [file:///C:/Users/CFP-4726/Desktop/4112-10405-1PB%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/CFP-4726/Desktop/4112-10405-1PB%20(1).pdf)
- Ruiz, N. (2013). Influencia del Software de Geometría Dinámica GeoGebra en la Formación Inicial del Profesorado de Primaria. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.
- Saidon, L. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado de <https://app.geogebra.org/help/docues.pdf>
- Stewart, J. (2008). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México. Cengage Learning.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Quinta edición. México. Cengage Learning.
- Tejero, J. (2015). Exploración del Calculo Integral desde el Contexto de la Geometría Dinámica (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Thompson, K. y Dray, T. (2012). Taxicab angles and trigonometry. El diario Pi Mu Epsilon.

- Trejo, E. y Camarena, P. (2011). Análisis Cognitivo de Situaciones Problema con Sistemas de Ecuaciones Algebraicas en el Contexto del Balance de Materia. Educación Matemática. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v23n2/v23n2a4.pdf>
- Valero, P. y Skovsmose, O. (2012). Educación Matemática Crítica. Una Visión Sociopolítica del Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Alrø, H. y Skovsmose, O. Aprendizaje Dialógico en la Investigación Colaborativa (Pág. 149-170) Bogotá: Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación; Ediciones Uniandes.

## 8. Anexos

### 8.1 Anexo 1 (Actividad 1 “Introducción a la métrica del taxista”)

#### INTRODUCCIÓN A LA MÉTRICA DEL TAXISTA

Cuando hablemos de distancia entre dos puntos en la métrica del taxista la denotaremos  $d_T(A, B)$  donde  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$  son puntos que pertenecen  $\mathbb{R}^2$ .

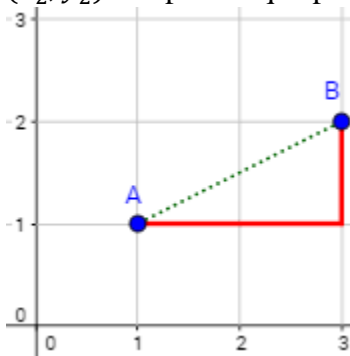


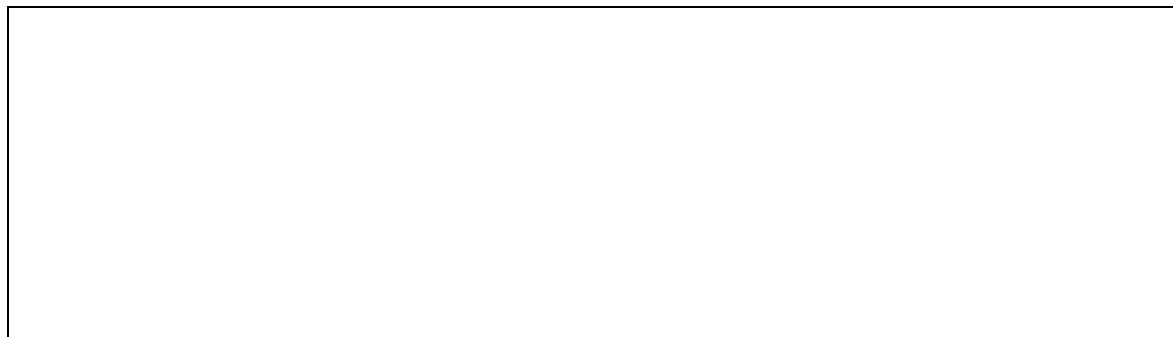
Figura 1. Distancia entre dos puntos. Elaborado en GeoGebra

En la *figura 1*, se muestra de forma gráfica la distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$  en la métrica del taxista (segmentos de color rojo) y métrica usual (segmento punteado de color verde).

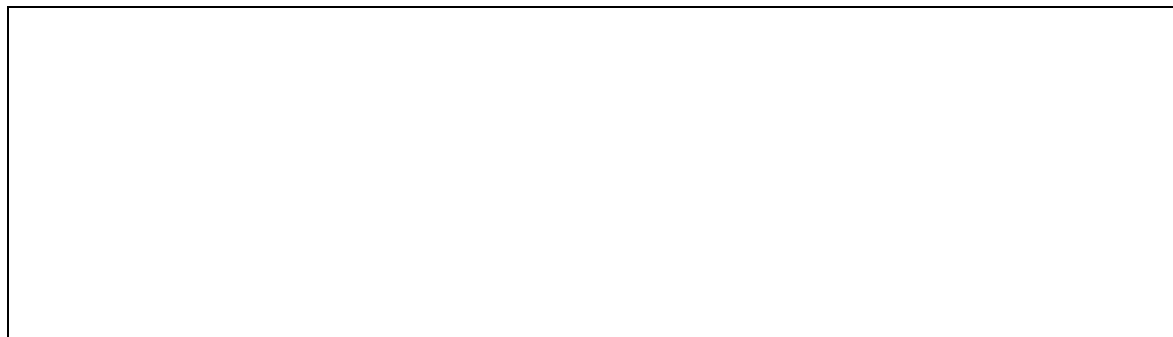
- ✓ De acuerdo a la *figura 1*, ¿de qué forma podemos definir la distancia entre el punto
- ✓  $A = (x_1, y_1)$ , y el punto  $B = (x_2, y_2)$  en la métrica del taxista?

- ✓ De acuerdo con lo anterior, si tengo dos puntos  $A = (1, 4)$  y  $B = (-1, -1)$ , ¿cuál es la distancia entre estos puntos ( $d_T(A, B)$ )?

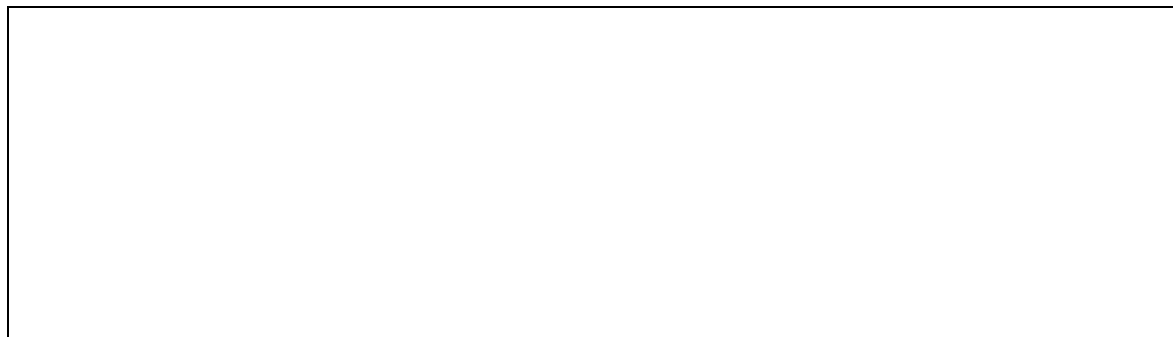
- ✓ ¿Cómo representaría  $d_T(A, B)$  en el plano cartesiano? Teniendo en cuenta que  $A = (1, 4)$  y  $B = (-1, -1)$ .



- ✓ ¿De cuántas maneras puedo representar  $d_T(A, B)$  en el plano cartesiano para los puntos  $A$  y  $B$ ? del ítem anterior. Recuerde que al hablar de distancia se está determinando la mínima separación entre los puntos dados con la métrica dada.



- ✓ ¿Es  $d_T(A, B) = d_T(B, A)$ ? Justifique.



Recuerde la definición de circunferencia (la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.)

- ✓ ¿Cree que la representación de la circunferencia en la métrica del taxista cambia?, Si la respuesta es sí represéntela y si es no, justifique.

- ✓ Escriba a continuación el perímetro para una circunferencia usual unitaria.

- ✓ Escriba perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.

- ✓ ¿El perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica usual cambia con respecto a la métrica del taxista? Justifique.



## 8.2 Anexo 2 (Actividad 2 “Funciones trigonométricas en la métrica del taxista”)

### FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

#### *Seno<sub>T</sub>*

Abra el archivo de GeoGebra “Función *Seno<sub>T</sub>*”, mueva el punto que pertenece a la circunferencia unitaria y observe como varían sus coordenadas, el valor del ángulo y la longitud de los segmentos de las abscisas y las ordenas.

- ✓ ¿Qué valores toma la función trigonométrica a medida que varía el ángulo?

| $\theta_T(\text{radian}_T)$ | $\text{Seno}_T(\theta_T)$ |
|-----------------------------|---------------------------|
| 0                           |                           |
| 1                           | $\frac{1}{2}$             |
| 2                           |                           |
| 3                           |                           |
| 4                           |                           |
| 5                           |                           |
| 6                           |                           |
| 7                           |                           |
| 8                           |                           |

- ✓ ¿Qué relación tienen los segmentos construidos de color naranja?

- ✓ ¿Qué relación existe entre el arco de circunferencia y el segmento del eje  $x$ , contruidos del mismo color (azules)?

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el arco de circunferencia.

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el segmento azul subtendido en el eje  $x$ .

- ✓ ¿Por qué cree que en algunos intervalos la función  $\text{Sen}_T$  está por encima del eje  $x$  (función positiva) y en otros por debajo del eje  $x$  (función negativa)?

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $\text{Sen}_T(\theta_T)$  de cualquier ángulo, teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

**Coseno<sub>T</sub>**

Abra el archivo de GeoGebra “Función Coseno\_T”, mueva el punto que pertenece a la circunferencia unitaria y observe como varían sus coordenadas, el valor del ángulo y la longitud de los segmentos de las abscisas y las ordenas.

- ✓ ¿Qué valores toma la función trigonométrica a medida que varía el ángulo?

| $\theta_T(\text{radian}_T)$ | $\text{Coseno}_T(\theta_T)$ |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 0                           | 1                           |
| 1                           |                             |
| 2                           |                             |
| 3                           |                             |
| 4                           |                             |
| 5                           | $-\frac{1}{2}$              |
| 6                           |                             |
| 7                           |                             |
| 8                           |                             |

- ✓ ¿Qué relación tienen los segmentos construidos de color naranja?

- ✓ ¿Qué relación existe entre el arco de circunferencia y el segmento del eje  $x$ , construidos del mismo color (azules)?

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el arco de circunferencia.

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el segmento azul subtendido en el eje  $x$ .

- ✓ ¿Por qué cree que en algunos intervalos la función  $\text{Coseno}_T$  está por encima del eje  $x$  (función positiva) y en otros por debajo del eje  $x$  (función negativa)?

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $\text{Cos}_T(\theta_T)$  de cualquier ángulo, teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

### ***Tangente<sub>T</sub>***

Abra el archivo de GeoGebra “Función Tangente\_T”, mueva el punto que pertenece a la circunferencia unitaria y observe como varían sus coordenadas, el valor del ángulo y la longitud de los segmentos de las abscisas y las ordenas.

- ✓ ¿Qué valores toma la función trigonométrica  $Tan_T$  a medida que varía el ángulo?

| $\theta_T(\text{radian}_T)$ | $Tangente_T(\theta_T)$ |
|-----------------------------|------------------------|
| 0                           |                        |
| 1                           |                        |
| 2                           |                        |
| 3                           |                        |
| 4                           |                        |
| 5                           |                        |
| 6                           |                        |
| 7                           |                        |
| 8                           |                        |

- ✓ Mencione algunas características de la función  $Tangente_T$  en esta métrica.

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $Tan_T \theta_T$  de cualquier ángulo teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

### 8.3 Anexo 3 (Actividad 3 “Derivadas de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista”)

#### DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

##### $Seno_T$

A continuación, se muestra la representación gráfica (*figura 1*) de la función  $Sen_T(\theta_T)$  y su derivada.

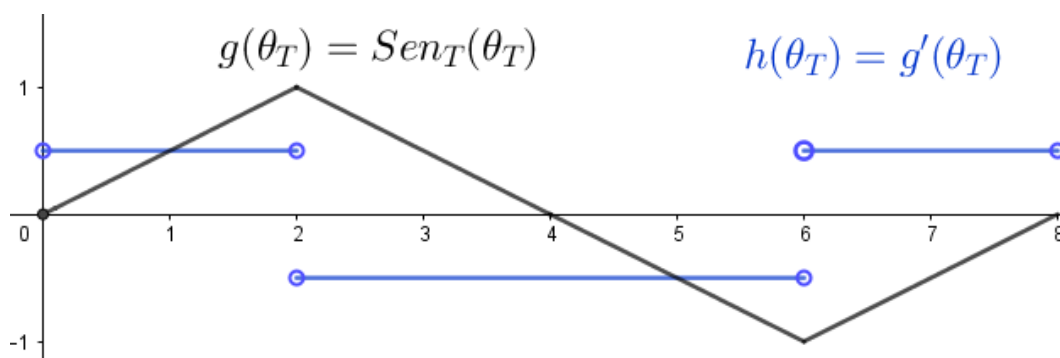


Figura 1. Gráfica de la función derivada de la función  $Seno_T$ .

✓ ¿Qué se puede observar de la *Figura 1*?

✓ ¿Qué característica tiene la función  $h(x)$ ?

✓ ¿La función  $h(x)$  es continua?, sino ¿en cuáles intervalos es continua?

### Coseno<sub>T</sub>

A continuación, se muestra la representación gráfica (figura 2) de la función  $\text{Cos}_T(\theta_T)$  y su derivada.

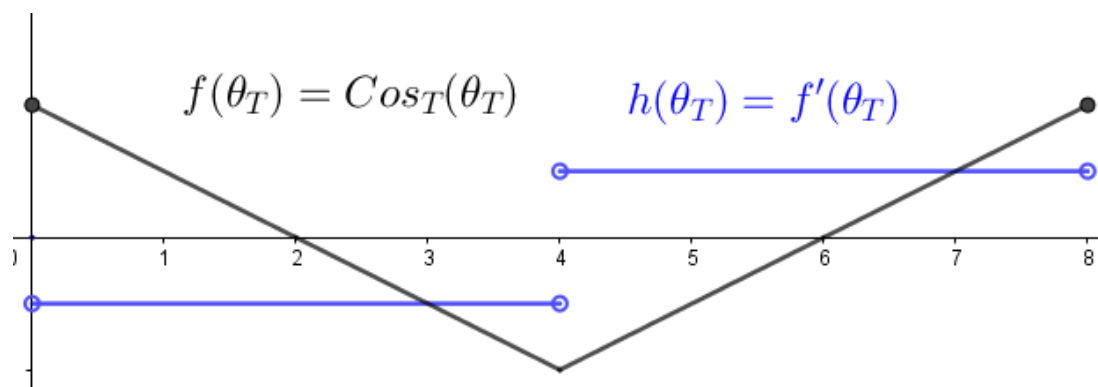


Figura 2. Gráfica de la función derivada de la función Coseno<sub>T</sub>.

✓ ¿Qué se puede observar de la Figura 2?

✓ ¿Qué característica tiene la función  $h(x)$ ?

✓ ¿La función  $h(x)$  es continua?, sino ¿en cuáles intervalos es continua?

### Tangente<sub>T</sub>

Enseguida, se muestra la representación gráfica (figura 3) de la función  $Tan_T(\theta_T)$  y su derivada.

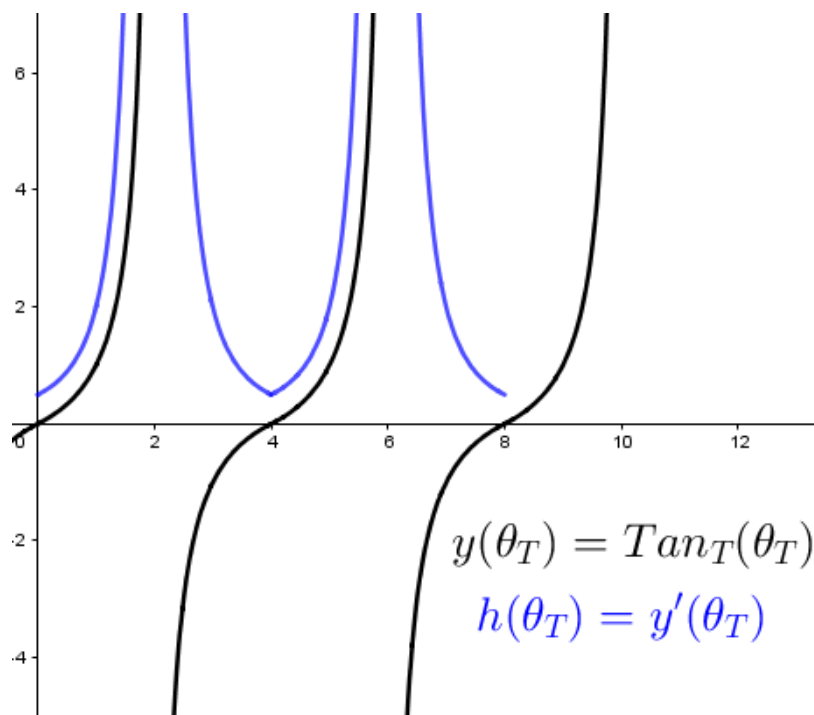


Figura 3. Gráfica de la función derivada de la función  $Tangente_T$ .

✓ ¿Qué se puede observar de la *Figura 3*?

✓ ¿En qué intervalos es creciente la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es decreciente la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo la función  $g(x)$ ?

✓ ¿Dónde tiene un valor máximo la función  $g(x)$ ?

✓ ¿Dónde tiene un valor mínimo la función  $g(x)$ ?

✓ ¿La función  $g(x)$ , tiene alguna característica similar a la derivada de la tangente en la métrica usual?

✓ ¿Cómo se define la función  $g(x)$ ?

#### 8.4 Anexo 4 (Actividad 4 “Integrales de las funciones trigonométricas en la métrica del taxista”

### INTEGRALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

Abra el archivo de GeoGebra “Integral Seno\_T”, mueva el deslizador y observe detalladamente lo que sucede. Luego responda las siguientes preguntas.

***Seno<sub>T</sub>***

- ✓ ¿Qué se puede observar?

Observe que la función que esta determina por el rastro del punto *A*, esta dada por la integral de la función ***Seno<sub>T</sub>*** . Haciendo uso de la primera parte del teorema fundamental del cálculo, responda las siguientes preguntas.

#### Teorema Fundamental del cálculo (Parte I)

Si *f* es continua en  $[a, b]$ , entonces la función *g* definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , y  $g'(x) = f(x)$  (Stewart, 2003)

- ✓ Encuentre una expresión en términos de integral para la función determina por el rastro del puntos A (integral de la función *Seno<sub>T</sub>*) y resuélvala.

- ✓ ¿En qué intervalos es creciente la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es decreciente la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función  $g(x)$ ?

✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo la función  $g(x)$ ?

✓ ¿Dónde tiene un valor máximo la función  $g(x)$ ?

✓ ¿Dónde tiene un valor mínimo la función  $g(x)$ ?

### ***Coseno<sub>T</sub>***

Abra el archivo de GeoGebra “Integral Coseno\_T”, mueva el deslizador y observe detalladamente lo que sucede. Luego responda las siguientes preguntas.

✓ ¿Qué se puede observar?

Observe que la función que esta determina por el rastro del punto  $A$ , esta dada por la integral de la función ***Coseno<sub>T</sub>***. Haciendo uso de la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

- ✓ Encuentre una expresión en términos de integral para la función determina por el rastro de los puntos  $A$  (integral de la función  $\text{Coseno}_T$ ) y resuélvala.

- ✓ ¿En qué intervalos es creciente la función  $g(x)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es decreciente la función  $g(x)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función  $g(x)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo la función  $g(x)$ ?

- ✓ ¿Dónde tiene un valor máximo la función  $g(x)$ ?

- ✓ ¿Dónde tiene un valor mínimo la función  $g(x)$ ?

### ***Tangente<sub>T</sub>***

A continuación, se muestra representación gráfica de la función integral de la función *Tangente<sub>T</sub>*.

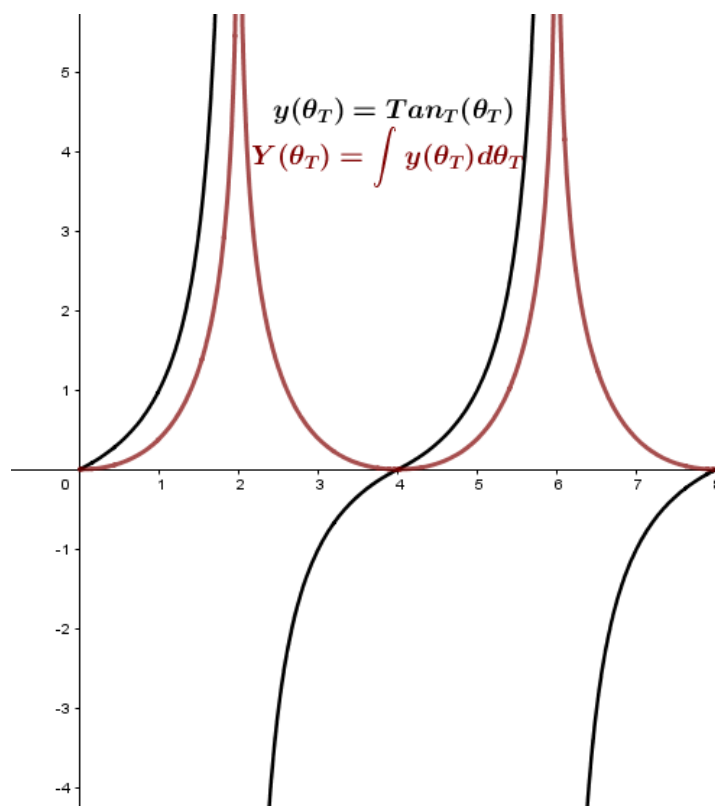


Figura 1. Gráfica de la función integral de la función *Tangente<sub>T</sub>*.

- ✓ ¿Qué característica puede observar la integral de la función *Tangente<sub>T</sub>* ?

- ✓ Defina la integral de la función *Tangente<sub>T</sub>* (Tenga en cuenta, conceptos de integral como área bajo la curva e integrales indefinidas).

- ✓ Coinciden los valores de las integrales de la métrica del taxista, con los de las integrales de la métrica usual. Justifica tu respuesta.

| $Sen_T \theta_T$ | $Cos_T \theta_T$ | $Tan_T \theta_T$ |
|------------------|------------------|------------------|
|                  |                  |                  |

### 8.5 Anexo 5 (Actividad implementada)

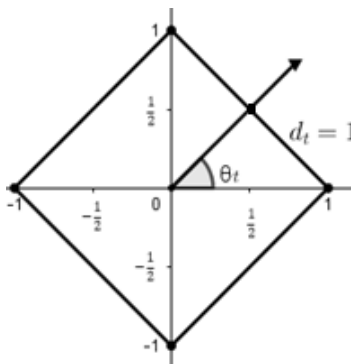
NOMBRE: \_\_\_\_\_

MATERIA: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

#### MEDIDA DE ÁNGULOS EN MÉTRICA DEL TAXISTA

- ✓ Escriba perímetro de la circunferencia unitaria en la métrica del taxista.

En la métrica del taxista, se considerara como unidad de medida de ángulo,  $radian_T$ , donde un  $radian_T$ , es la medida de un ángulo, cuyo vértice es el centro de una circunferencia unitaria e intercepta un arco circunferencia unitaria como se ilustra en la imagen, en tanto  $t$ -radianes es la longitud del arco de circunferencia subtendida por el ángulo.



- ✓ De acuerdo con esto cuántos  $radian_T$  subtende la circunferencia unitaria.

Complete la siguiente tabla

|            |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Radian_T$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Radianes   |   |   |   |   |   |   |   |   |

NOMBRE: \_\_\_\_\_

MATERIA: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

### FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

#### $Seno_T$

Abra el archivo de GeoGebra “Función  $senot$ ”, mueva el punto que pertenece a la circunferencia unitaria y observe como varían sus coordenadas, el valor del ángulo y la longitud de los segmentos de las abscisas y las ordenas.

✓ ¿Qué valores toma la función trigonométrica a medida que varía el ángulo?

| $\theta (Radian_T)$ | $Seno_T(\theta)$ |
|---------------------|------------------|
| 0                   |                  |
| 1                   | $\frac{1}{2}$    |
| 2                   |                  |
| 3                   |                  |
| 4                   |                  |
| 5                   |                  |
| 6                   |                  |
| 7                   |                  |
| 8                   |                  |

✓ ¿Qué relación tienen los segmentos construidos de color naranja?

- ✓ ¿Qué relación existe entre el arco de circunferencia y el segmento del eje  $x$ , contruidos del mismo color (azules)?

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el arco de circunferencia

- ✓ Hay alguna relación entre el ángulo y el segmento azul subtendido en el eje  $x$

- ✓ ¿Por qué cree que en algunos intervalos la función  $\text{Sen}_T$  está por encima del eje  $x$  (función positiva) y en otros por debajo del eje  $x$  (función negativa)?

- ✓ Podría deducir una fórmula para calcular el valor del  $\text{Sen}_T(\theta_T)$  de cualquier ángulo teniendo en cuenta lo observado en el archivo de GeoGebra

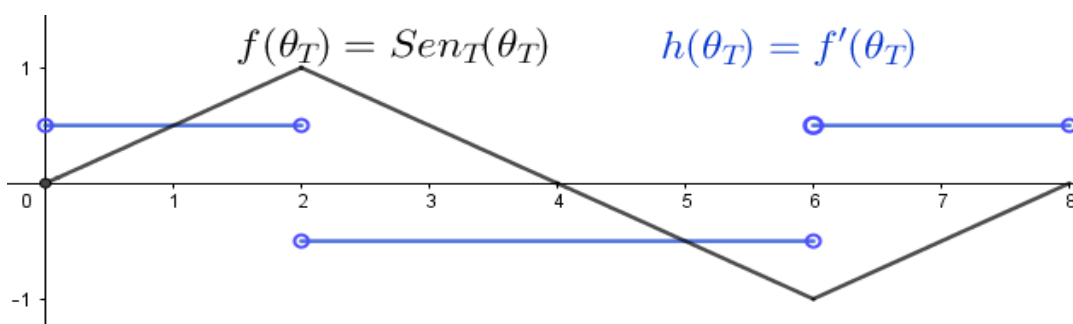
NOMBRE: \_\_\_\_\_

MATERIA: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

### DERIVADA DE LAS FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

***Sen<sub>T</sub>***

A continuación en la *figura 1*, se muestra la gráfica de la función  $Sen_T(\theta_T)$  y la gráfica de su derivada.



*Figura 1.* Gráfica de la función derivada de la función  $Sen_T(\theta_T)$

✓ ¿Qué se puede observar de la *Figura 1*?

✓ ¿Qué característica tiene la función  $h(\theta_T)$ ?

✓ ¿La función  $h(\theta_T)$ ? es continua?, sino ¿En cuáles intervalos es continua?

### INTEGRAL DE LAS FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO EN LA MÉTRICA DEL TAXISTA

Abra el archivo de GeoGebra “Integral Seno\_T”, mueva el deslizador y observe detalladamente lo que sucede. Luego responda las siguientes preguntas.

***Seno<sub>T</sub>***

✓ ¿Qué se puede observar?

Observe que la función que esta determina por el rastro del punto  $A$ , esta dada por la integral de la función ***Seno<sub>T</sub>*** . Haciendo uso de la primera parte del teorema fundamental del cálculo, responda las siguientes preguntas.

#### Teorema Fundamental del cálculo (Parte I)

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces la función  $g$  definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , y  $g'(x) = f(x)$  (Stewart, 2003)

- ✓ Encuentre una expresión en términos de integral para la función determinada por el rastro del punto A (integral de la función  $\text{Seno}_T$ ) y resuélvala.

- ✓ ¿En qué intervalos es creciente la función  $g(\theta_T)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es decreciente la función  $g(\theta_T)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función  $g(\theta_T)$ ?

- ✓ ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo la función  $g(\theta_T)$ ?

- ✓ ¿Dónde tiene un valor máximo la función  $g(\theta_T)$ ?

- ✓ ¿Dónde tiene un valor mínimo la función  $g(\theta_T)$ ?