

# Aspectos individuales, sociales, culturales y políticos de la Educación Matemática

Grupo de investigación:  
Didáctica de la Matemática

Balance de la trayectoria de los  
grupos de investigación de la  
Universidad Pedagógica Nacional



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



41 años



Aspectos individuales,  
sociales, culturales y políticos  
de la Educación Matemática





# Aspectos individuales, sociales, culturales y políticos de la Educación Matemática

**Grupo de investigación**  
**Didáctica de la Matemática**

**Colección CIUP 41 años**  
Balance de la trayectoria de los  
grupos de investigación de la  
Universidad Pedagógica Nacional



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*



Aspectos individuales, sociales culturales y políticos de la educación matemática / Leonor Camargo [et. al]. – 1ª. ed. – Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional, CIUP, 2018.

70 páginas. – (Colección Ciup 41 años. Balance de la trayectoria de los grupos de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional)

Incluye: Referencias bibliográficas.

ISBN impreso: 978-958-5416-85-7

ISBN digital: 978-958-5503-01-4

I. Matemáticas – Aprendizaje - Enseñanza. 2. Estadística - Metodología 3. Capacitación de Docente en Matemáticas. 4. Geometría - Enseñanza 5. Matemáticas – Planificación Curricular. 6. Matemáticas - Innovación Tecnológica. 7. Matemáticas - Innovaciones Educativas. 8. Pedagogía 9. Formación Profesional de Maestros – Matemáticas. I. Fernández, Felipe. II. García, Gloria. III. Samper, Carmen. IV. Andrade, Luisa.

372.7 cd. 21 ed.

Aspectos individuales, sociales,  
culturales y políticos de la  
Educación Matemática

© Universidad Pedagógica Nacional  
© Leonor Camargo,  
Felipe Fernández,  
Gloria García, Carmen Samper,  
Luisa Andrade

**Colección CIUP 41 años:**  
Balance de la trayectoria de los  
grupos de investigación de la  
Universidad Pedagógica Nacional

ISBN impreso: 978-958-5416-85-7  
ISBN digital: 978-958-5503-01-4

ISBN colección impresa:  
978-958-5416-80-2  
ISBN colección digital:  
978-958-5416-96-3

Primera edición, 2018

Fecha de evaluación:  
3 de noviembre de 2017  
Fecha de aprobación:  
23 de mayo de 2018

Hecho el depósito legal que ordena  
la Ley 44 de 1993 y el decreto  
reglamentario 460 de 1995

Prohibida la reproducción total  
o parcial de este material, sin la  
autorización por escrito de la  
Universidad Pedagógica Nacional

**Adolfo León  
Atehortúa Cruz**  
RECTOR

**Sandra Patricia  
Rodríguez Ávila**  
VICERRECTORA DE GESTIÓN  
UNIVERSITARIA

**Mauricio Bautista Ballén**  
VICERECTOR ACADÉMICO

**Fernando Méndez Díaz**  
VICERECTOR ADMINISTRATIVO  
Y FINANCIERO

**Helberth Augusto  
Choachí González**  
SECRETARIO GENERAL

**Nydia Constanza  
Mendoza Romero**  
SUBDIRECTORA DE GESTIÓN  
DE PROYECTOS CIUP

**PREPARACIÓN EDITORIAL**  
Grupo Interno  
de Trabajo Editorial  
Universidad Pedagógica  
Nacional

**Alba Lucía  
Bernal Cerquera**  
COORDINADORA

**Miguel Ángel Pineda Cupa**  
EDICIÓN

**César Mackenzie Trujillo**  
CORRECTOR DE ESTILO

**Mauricio Salamanca**  
DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN

**Mauricio Esteban Suárez**  
DISEÑO DE CUBIERTAS

**Juan Camilo Sierra Zapata**  
ILUSTRACIONES

**Johny Adrián Díaz Espitia**  
FINALIZACIÓN DE ARTES

**Xpress Estudio Gráfico  
y Digital S.A.**  
Impreso y hecho en  
Bogotá, Colombia



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*



# Contenido

Introducción.....	12
Sección 1: Equipo “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” ( $\mathcal{A} \cdot G$ ).....	13
Sección 2: Equipo “Educación estadística” .....	36
Sección 3: Equipo “Diversidad, educación matemática y subjetividades” .....	49
Balance general .....	58
Referencias .....	61

cier

\*

cogn

π

raz

ncia

nitivo

ón

# Autores:

Leonor Camargo, Felipe Fernández,  
Gloria García, Carmen Samper y  
Luisa Andrade

## Líneas de investigación:

1. Aprendizaje y enseñanza de la geometría
2. Educación estadística
3. Educación matemática y diversidad

## Grupo de investigación:

Didáctica de la Matemática

**Año creación: 1995**

## \* Integrantes del grupo:

Camilo Sua,  
Carmen Samper,  
Claudia Salazar,  
Claudia Vargas,  
Felipe Fernández,  
Francisco Camelo,  
Gabriel Mancera,  
Gloria García,  
Ingrith Álvarez,  
Julio Romero,  
Leonor Camargo,  
Luisa Andrade,  
Maritza Méndez,  
Óscar Molina,  
Patricia Perry,  
Tania Plazas





## Acerca del grupo

El grupo Didáctica de la Matemática investiga diversos fenómenos que afectan la educación en matemáticas de escolares colombianos y de profesores de matemáticas en formación y en ejercicio. Se hace particular énfasis en la educación en geometría (con apoyo de programas de geometría dinámica), en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y en asuntos relacionados con la configuración de prácticas educativas incluyentes y respetuosas de las subjetividades juveniles. Por la complejidad y diversidad de los fenómenos que atiende, los miembros del grupo recurren a diversas perspectivas teóricas, individuales, sociales, culturales y críticas, para fundamentar los análisis de los problemas desde diferentes enfoques. Un balance de la producción del grupo permite reconocer el aporte de este a la dinámica investigativa del campo de la Educación Matemática desde distintos frentes, a la construcción de políticas públicas en educación matemática y a la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas. Las tres líneas activas guardan una identidad común al reconocer el papel central de los programas de licenciatura y los de formación avanzada de profesores de matemáticas a partir de la preparación de maestros dispuestos a atender los retos que demanda la sociedad actual, y así constituirse en líderes de las transformaciones que requiere la educación matemática básica y media colombiana.

## Introducción

Este texto presenta un balance analítico de los aportes del grupo Didáctica de la Matemática a la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la educación básica y media. Los equipos Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ( $\mathcal{A} \cdot G$ ) y Educación Estadística (EdEst) han hecho esfuerzos por analizar y atender diversos asuntos problemáticos que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y la estadística a nivel escolar, y por diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas que en su mayoría explotan el potencial semiótico de la tecnología computacional en el desarrollo del pensamiento matemático. Dada la complejidad y diversidad de los fenómenos abordados, la fundamentación teórica ha recurrido, en diferentes proyectos, a perspectivas cognitivas, socioculturales y críticas que contribuyen a analizar los problemas desde diferentes enfoques. Adicionalmente, el equipo Educación Matemática, Diversidad y Subjetividades (Edumadys) se ha centrado en desarrollar una perspectiva sociopolítica con la cual proponer escenarios de aprendizaje de las matemáticas escolares cuyos componentes tengan impacto en la configuración de prácticas educativas incluyentes y respetuosas de las subjetividades juveniles. El balance permite reconocer la diversificación de los intereses del grupo, lo que ha conducido a asumir variadas perspectivas y acercamientos investigativos, así como a aportar a la dinámica investigativa desde distintas miradas, a la construcción de políticas públicas en educación matemática y a la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas desde distintos frentes. Los tres equipos que conforman el grupo guardan una identidad común al reconocer el papel central de los programas de licenciatura en la formación de profesores de matemáticas preparados para atender los retos que demanda la sociedad actual.

El balance analítico que presentamos en este libro informa sobre el desarrollo investigativo logrado por el grupo Didáctica de

la Matemática<sup>1</sup> durante un tiempo aproximado de quince años. Es fruto del trabajo constante de tres equipos de investigación que se fueron conformando a partir de unos intereses iniciales comunes, a medida que fuimos fortaleciendo nuestra capacidad investigativa: “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” ( $\mathcal{A} \bullet G$ ), “Educación estadística” (EdEst), y “Educación matemática, diversidad y subjetividades” (Edumadys).

Hemos optado por organizar el texto en tres secciones. En cada una presentamos, además del balance analítico, los aportes conceptuales y la proyección investigativa de cada equipo. Al final, presentamos un balance general y la perspectiva del ejercicio investigativo del grupo.

## Sección 1: Equipo “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” ( $\mathcal{A} \bullet G$ )

### Balance analítico

El equipo de investigación “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” ( $\mathcal{A} \bullet G$ )<sup>2</sup> forma parte del grupo Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) desde hace quince años. Como colectivo, aportamos a la búsqueda de opciones diversas y complementarias para atender problemáticas de la educación matemática escolar básica y media, interés central del grupo, orientando el ejercicio académico hacia el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Asumimos diferentes perspectivas cognitivas o socioculturales,<sup>3</sup> en

---

1 Grupo interinstitucional integrado por profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

2 En 2018, el equipo está conformado por los profesores Carmen Samper, Leonor Camargo, Patricia Perry, Óscar Molina, Tania Plazas, Camilo Sua, Armando Echeverry y Claudia Vargas.

3 Acogemos una perspectiva sociocultural, según la aproximación defendida por seguidores de Vygotsky, con la cual el aprendizaje de las matemáticas se concibe como

consonancia con los fenómenos abordados en los distintos proyectos investigativos y según las herramientas analíticas necesarias para atender los diseños metodológicos.

El interés por el aprendizaje y la enseñanza de la geometría se debe a nuestra convicción acerca de la relevancia de la geometría en la formación de competencias relacionadas con el sentido espacial, la argumentación y el razonamiento científico, cuyas bases deberían desarrollar todos los niños y jóvenes colombianos para poder participar en el desarrollo social, cultural, tecnológico y científico del país. A través de la ejecución de proyectos de investigación y de la dirección de tesis de maestría realizadas por profesores de matemáticas en ejercicio, hemos analizado y atendido diversos asuntos problemáticos que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Con especial énfasis nos hemos interesado en la argumentación y la justificación desde el punto de vista cognitivo y social, bases del razonamiento científico, y en el diseño curricular para la educación geométrica en primaria y secundaria.

En nuestro ejercicio investigativo partimos de la hipótesis de que el sentido espacial y el desarrollo del razonamiento científico dependen estrechamente del desarrollo de la visualización y de competencias argumentativas y comunicativas de las personas. Sostenemos que una vía fructífera para su desarrollo consiste en posibilitar la entrada temprana de todos los estudiantes (independientemente de sus condiciones de clase social, género, etnia o raza) a la perspectiva teórica de las matemáticas, con el apoyo de tecnología computacional. Precisamente, un dominio especial donde es factible este avance es la geometría, gracias a la representación visual con la que es posible analizar situaciones relativas al espacio y la forma para descubrir propiedades generales, expresar lo descubierto como conjetura, sentir la necesidad de justificarlo y aportar a la construcción colectiva de

---

un asunto de participación en prácticas sociales discursivas reconocidas culturalmente como prácticas matemáticas.

conocimiento. Así, la pregunta que ha movilizado gran parte de nuestro ejercicio investigativo es la siguiente: ¿Cuáles son las características de ambientes de aprendizaje para la geometría escolar, mediados por instrumentos, que propician el acercamiento, cognitivo y social, de niños y jóvenes a la visualización matemática y la argumentación y, por ende, al sentido espacial y al razonamiento científico?

Intentar responder esta pregunta es un asunto complejo que implica una interacción académica fluida entre profesores de matemáticas de la educación básica primaria y secundaria y los investigadores del equipo. En conjunto, hemos realizado actividades de revisión de marcos de referencia, diseño de ambientes de aprendizaje (enriquecidos con programas informáticos de geometría dinámica), experimentación de propuestas para el aula escolar de matemáticas y análisis de las respectivas implementaciones. En el ejercicio compartimos experiencias y resultados, enriqueciendo nuestras miradas desde diferentes perspectivas y ópticas, nuestra propia práctica y los cursos de formación de profesores que realizamos en la UPN. A continuación, presentamos un balance analítico de los desarrollos logrados hasta el momento. Para ello optamos por organizar la exposición cronológicamente, siguiendo el curso de nuestro ejercicio investigativo.

Entre los años 2000 y 2002 realizamos el proyecto de investigación *Desarrollo del razonamiento a través de la geometría euclidiana (DMA 043-99)*.<sup>4</sup> Nuestro objetivo era explorar en el ambiente natural de un aula de geometría, de grado noveno de educación básica secundaria, qué procesos de razonamiento se veían favorecidos en dicha clase, identificar tipos de tareas que los propiciaban y formular alternativas didácticas para su enseñanza.

Una primera acción investigativa consistió en establecer qué entendíamos por *razonar* en el contexto de nuestra investigación. El horizonte inicial, en el que supusimos que el razonamiento estaba

---

4 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

asociado únicamente a la deducción, se amplió para considerar otros procesos relacionados con la indagación y la argumentación en el aula de geometría. Esto, en razón a que la revisión de la literatura nos mostró un panorama investigativo tendiente a establecer vínculos entre la formación geométrica y el desarrollo de competencias de indagación, argumentación y comunicación. A partir de esta idea caracterizamos los procesos de razonamiento geométrico enmarcados en una perspectiva sociocultural sobre el aprendizaje. Vimos la necesidad de privilegiar ambientes de aprendizaje en donde se fomentara la visualización, combinando habilidades perceptuales y discursivas en la construcción de conceptos, se favoreciera el carácter conjetural de la indagación (individual y colectiva) de propiedades geométricas, y se reconociera una perspectiva amplia de demostración, ligada a la necesidad intrínseca de explicar y validar hechos geométricos para sí mismo y a los demás; lo anterior a partir de desplegar formas argumentativas propias del nivel de desarrollo de los estudiantes, sus experiencias, conocimiento y lenguaje. Concluimos que por esta vía los estudiantes pueden apreciar el potencial de las matemáticas como herramienta social, cultural y científica y el razonamiento se convierte en un vehículo para la comprensión, la explicación, la convicción, la persuasión, la aceptación de la diferencia, la cooperación y el establecimiento de consensos (Samper, Camargo, Leguizamón, 2003).

Al ampliar el panorama del razonamiento hacia la indagación y la argumentación nos vimos en la necesidad de buscar opciones para generar ambientes de aprendizaje que permitieran una rica exploración de objetos geométricos. Esta circunstancia nos llevó a considerar el uso de programas de geometría dinámica que hace quince años ya eran usados en otros países pero que en Colombia eran poco conocidos. Dos proyectos de investigación se enfocaron en explorar el uso de tales recursos.

El primer proyecto que exploró la mediación de los programas de geometría dinámica se denominó *Geometría dinámica en la*

*formación del profesor de matemáticas (DMA 016- 03)*<sup>5</sup> y fue desarrollado entre 2003 y 2004. Tuvo como escenario experimental un curso de geometría plana del programa Licenciatura en Matemáticas de la UPN, con la proyección de obtener resultados que pudieran impactar la educación geométrica escolar. Esto porque reconocimos, gracias a resultados del proyecto anterior, que los cambios en los ambientes escolares que habíamos identificado como necesarios requieren del profesor una formación diferente a la que se estaba dando. El objetivo del proyecto era identificar el papel de los programas de geometría dinámica como mediadores en la conceptualización, la indagación individual y la demostración. El diseño investigativo, enmarcado en una perspectiva cognitiva, fue caracterizado como un experimento de enseñanza; nos permitió recoger evidencias del papel jugado por la geometría dinámica para apoyar los procesos mencionados. Es ampliamente reconocido que, junto con tareas que incentivan la resolución de problemas abiertos de conjeturación, los programas de geometría dinámica brindan herramientas a los estudiantes, como el arrastre de los objetos presentes en una construcción, para que ellos determinen condiciones suficientes y establezcan dependencias entre propiedades. En los registros empíricos del trabajo de los estudiantes fueron notorias la autonomía, la riqueza de exploraciones y la seguridad en las conjeturas formuladas. Un producto relevante de esta investigación fue nuestra primera conceptualización de actividad demostrativa en la que se intenta articular los procesos de conjeturación y de justificación bajo el telón de fondo de la argumentación (Camargo, Perry, Samper, 2005; Camargo, Samper, Perry, 2006; Perry, Camargo, Samper, Rojas, 2006).

El segundo proyecto encaminado a explorar el rol de los programas de geometría dinámica, denominado *Papel de la tecnología en la generación de conocimiento didáctico por parte del profesor de*

---

5 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

*matemáticas* (1108-11-14055),<sup>6</sup> fue desarrollado entre 2004 y 2005. Tuvo como escenario una institución educativa distrital de la ciudad de Bogotá en la cual, en colaboración con los profesores del área de matemáticas, preparamos y experimentamos unidades de enseñanza de la geometría para los grados 6° a 9°. Una de las acciones llevadas a cabo fue la formación de los profesores en el uso del programa de geometría dinámica, con fines didácticos, instalado en calculadoras que se compraron para uso de los estudiantes de la institución. La interacción con los profesores fue muy fructífera en dos sentidos. Para ellos fue una oportunidad de ampliar y actualizar sus conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; para nosotros fue una ocasión de revisar la conceptualización de actividad demostrativa y considerar dos elementos centrales en el favorecimiento de los procesos de visualizar, conceptualizar, conjeturar y justificar: las tareas y la gestión docente. Ello nos ubicó, para este proyecto, en una perspectiva sociocultural. Aunque los programas de geometría dinámica se constituyen en poderosas herramientas de reorganización cognitiva, su provecho se incrementa si su uso se acompaña de tareas apropiadas y de la generación de un entorno de interacción social que impulse la comunicación de exploraciones, descubrimientos y justificaciones (Samper, Perry, Camargo, Ruiz, 2006). Este reconocimiento nos llevó a enfocar nuestra atención en la búsqueda de ambientes de aprendizaje favorables a la actividad demostrativa y, en general, al aprendizaje de la geometría, desde el punto de vista social.

En el año 2005, desarrollamos el proyecto *Geometría plana, un espacio de aprendizaje* (DMA-005/6-05).<sup>7</sup> Nuevamente un curso de geometría plana de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN fue el escenario investigativo. En él nos propusimos construir y describir

---

6 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP), el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el Instituto de Educación y Pedagogía (IDEP) y Colciencias.

7 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

una ruta de transformación de un curso tradicional de geometría en una comunidad de práctica de indagación matemática. Ese proceso nos permitió derivar implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar. Planeamos, implementamos y evaluamos una secuencia de enseñanza en la que los estudiantes tenían que comprometerse a sacar adelante la empresa de conformar, conjuntamente, un sistema teórico local para la geometría euclidiana, involucrándose de manera genuina (es decir, con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa), autónoma (es decir, con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independientemente de los otros como autoridad), y relevante (es decir, con aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos) en la actividad demostrativa. Pusimos en juego, como hipótesis, que la conformación de una comunidad de práctica de indagación se logra paulatinamente, a medida que se usan estrategias que movilizan el conocimiento de los estudiantes, los impulsan a responsabilizarse de la verdad de las afirmaciones que formulan y se promueve la creación de mecanismos para validarlas socialmente, en consonancia con los mecanismos institucionales de validación matemática.

El experimento nos permitió caracterizar acciones del profesor para impulsar la conformación de la comunidad de indagación, y acciones de los estudiantes para constituirse en partícipes legítimos de ella. Junto con el establecimiento de un conjunto de normas socio-matemáticas, muchas acciones importantes se volvieron una práctica común. Específicamente, podemos afirmar que se dieron las siguientes características que muestran el inicio de una comunidad de práctica:

- La mayoría de los estudiantes se comprometió auténticamente con la tarea del curso: conformar un sistema teórico local bajo las normas que la comunidad matemática estableció para ello.
- Se establecieron relaciones comunicativas, unas conflictivas y otras armoniosas, que permitieron desarrollar la negociación

de significados y la conformación de un sistema teórico local cercano al pretendido.

- Se establecieron roles específicos para los miembros de la comunidad, que no obedecían a relaciones de autoridad jerárquica, permitiendo así que todos aportaran en la empresa común y mediaran en la negociación de significados.
- Se constituyó una identidad de grupo, con formas específicas de comunicación, lenguajes propios, discursos compartidos, estilo de trabajo e incluso historias compartidas, bromas internas y sonrisas de complicidad.
- El papel protagónico de la profesora se transformó, convirtiéndose ella en un miembro más de la comunidad. Se redujo notablemente el dominio que ejercía sobre los acontecimientos del aula, sin dejar de ser organizadora y coordinadora de las ideas que se discutían, aportadas por los estudiantes como resultado de su indagación de situaciones geométricas que diseñamos. En ellas, a través de la exploración con geometría dinámica, descubrían hechos geométricos o se daban cuenta de la necesidad de incluir elementos teóricos (postulados, definiciones o teoremas) en el sistema teórico local para poder resolver el problema.

Reconocemos que el proceso de conformación de una comunidad de práctica debería consolidarse a lo largo del programa de formación (Perry, Samper, Camargo, 2006). Sin embargo, creemos que la experiencia vivida por los alumnos en este curso les permitió concebir que hacer matemáticas no es una tarea para los “genios” matemáticos aislados en sus escritorios, sino una actividad que se puede realizar colectivamente. El proyecto de investigación fue exitoso en función de lograr la identificación de una estrategia metodológica para incentivar el aprendizaje en la clase de geometría, que podría ser implementada en otros cursos del programa de formación y en la educación básica secundaria (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2008).

Adicionalmente, logramos construir una vía productiva para gestionar, en la evolución de la cultura de la clase, las tensiones que varios investigadores señalan como existentes entre la argumentación propia de las actividades de carácter empírico y la argumentación propia de la justificación y entre conocimiento geométrico empírico y conocimiento geométrico teórico (Mariotti, 2001). No obstante, apreciamos aún ciertas dificultades de los estudiantes, relacionadas con el uso de la implicación y de expresiones condicionales, que ameritaban un cuidadoso análisis desde una perspectiva cognitiva.

Entre 2006 y 2007 desarrollamos el proyecto *Aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana con el apoyo de un programa de geometría dinámica* (DMA-06-12)<sup>8</sup> con la intención de dar continuidad a los proyectos previamente descritos. Pretendimos abordar dos asuntos: 1) Caracterizar la comprensión y uso de la condicional en la actividad demostrativa y determinar el papel que puede tener el uso de la geometría dinámica como herramienta de mediación para favorecer tal comprensión. El foco analítico de este asunto es cognitivo; 2) Determinar cómo lograr que una propuesta curricular mantenga su esencia cuando es implementada por un profesor que no ha participado en el diseño. El foco analítico de este asunto es sociocultural. Dado que queríamos promover nuestros hallazgos investigativos en otros cursos universitarios y en la educación básica secundaria, nos interesamos por identificar qué condiciones favorecen la implementación de una propuesta curricular cuando la gestionan profesores ajenos al proceso de diseño y experimentación.

Como se trataba de temáticas diferentes, que requerían procesos de investigación disyuntos y con perspectivas diferentes, optamos por considerar el proyecto DMA-06-12 como conformado por dos subproyectos. En el primero planteamos como hipótesis que para lograr un razonamiento deductivo exitoso es necesario reconocer la

---

8 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

estructura de una proposición condicional, y que es posible apoyar paulatinamente a estudiantes de secundaria y profesores en formación a través de estrategias didácticas que permitan desarrollar significado de la condicional a largo plazo. En el segundo propusimos como hipótesis que es posible mantener las características que definen una propuesta curricular si el profesor es acompañado continuamente durante la implementación por un profesor experto en ella a la hora de gestionar el contenido, reflexionar sobre el rol que debe asumir como dinamizador de las interacciones entre los estudiantes, estudiar su papel como gestor de normas sociomatemáticas en el aula de clase, que asignen a los estudiantes una responsabilidad protagónica frente a la validación de enunciados, y estudiar el uso del programa de geometría dinámica para favorecer el desarrollo de acciones tales como la visualización, exploración y producción de conjeturas y para orientar a sus estudiantes en dichas normas.

Los dos subproyectos tuvieron como escenario cursos simultáneos de geometría plana del programa de Licenciatura en Matemáticas. Como se puede evidenciar, este curso ha sido nuestro principal laboratorio experimental. En esta oportunidad, un profesor novel asumió uno de los cursos y el profesor experto el otro curso. Un producto de investigación del primer subproyecto lo constituye la caracterización de un conjunto de asuntos problemáticos relativos a la implicación, junto con las estrategias diseñadas con el fin de que los estudiantes puedan superarlas (Echeverry, Molina, Samper, Perry, Camargo, 2012). Como producto del segundo subproyecto disponemos de una caracterización de acciones de apoyo del profesor experto al profesor novel. Creemos que estas pueden convertirse en elementos para tener en cuenta a la hora de establecer condiciones que propendan por un trabajo colaborativo de profesores, en el marco del desarrollo profesional, tendiente a acciones de diseño curricular.

Entre los años 2008 y 2009 desarrollamos el proyecto *Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica* (COL-UPN-301-08), en el cual articulamos los avances investigativos

relacionados con la aproximación metodológica sociocultural para favorecer el aprendizaje de la geometría, y la comprensión alcanzada sobre la actividad demostrativa y los retos cognitivos que esta impone. Por ello nos propusimos encontrar evidencias de las conexiones que los estudiantes pueden establecer entre la actividad experimental que llevan a cabo con el apoyo de un programa de geometría dinámica y el reconocimiento que pueden alcanzar sobre el hecho de que algunas propiedades de objetos geométricos son consecuencia lógica del sistema teórico en el que son conceptualizados. Así, formulamos como hipótesis que durante la actividad demostrativa los estudiantes despliegan una actividad argumentativa que es útil en la exploración de vías de justificación de las conjeturas que resultan de la exploración de construcciones geométricas. Nuevamente en el escenario de un curso de geometría plana del programa de licenciatura llevamos a cabo una investigación de diseño que nos permitió avanzar en diferentes vías:

- Establecimos el uso potencial de la geometría dinámica para comprender el valor epistémico de “necesidad lógica” de las proposiciones geométricas y la importancia de este reconocimiento en relación con el valor lógico de “verdad”. Esto permite entender la estructura operatoria de una demostración y el papel de las demostraciones en la construcción de conocimiento geométrico.
- Caracterizamos el papel de la geometría dinámica en el reconocimiento de la condicionalidad lógica para producir demostraciones en el marco de un sistema teórico, identificando aspectos que influyen en la formulación de condicionales por parte de los estudiantes (Samper, Perry, Camargo, Molina, 2012).
- Revisamos la conceptualización de actividad demostrativa, formulada en un proyecto previo, principalmente para aclarar el papel de la exploración en el proceso de justificación.

Los resultados investigativos del equipo  $\mathcal{A}E \bullet G$  empezaron a tener un impacto importante en la educación básica secundaria a partir de la dirección de tesis de maestría realizadas por profesores en ejercicio. En particular, el constructo “actividad demostrativa”, así como la aproximación metodológica, fueron referentes de diversos experimentos de enseñanza puestos en funcionamiento entre 2008 y 2014. Una caracterización de las tesis, a partir de las palabras claves, que se formularon en ellos, permite reconocer temas recurrentes como los siguientes:

- *Actividad demostrativa*: concepciones de actividad demostrativa; papel de la geometría dinámica en la actividad demostrativa; alcances de la actividad demostrativa en secundaria; comportamiento racional y actividad demostrativa.
- *Argumentación*: relación de la argumentación con la actividad demostrativa; alcances de la argumentación en secundaria; tipos de argumentos; relación de la argumentación y la producción y uso de definiciones; argumentación e interacción en la clase de geometría; argumentación y resolución de problemas.
- *Conceptualización*: de objetos de la geometría plana; relaciones entre conceptualización y visualización; criterio compartido sobre lo que es una figura geométrica.
- *Geometría dinámica*: mediación instrumental y actividad demostrativa; esquemas de uso del artefacto en la resolución de problemas de conjeturar y justificar; comparación de la geometría dinámica con el papel de otros artefactos en la actividad demostrativa.
- *Gestión docente*: mediación del profesor en la actividad demostrativa; acciones del profesor que favorecen la actividad demostrativa; gestión de la participación en la clase de geometría.

- *Razonamiento*: relaciones del razonamiento con la visualización; tipos de razonamiento; concepciones sobre el razonamiento.

Después de nueve años de centrar la atención en el proceso de justificación de la actividad demostrativa, consideramos que era tiempo de ocuparnos a fondo del proceso de conjeturación. Este proceso ha cobrado importancia en el ámbito de la educación matemática en el currículo escolar, a raíz del cambio de foco de los contenidos hacia la actividad matemática. Hace casi veinte años se invitó a los docentes a hacer de las clases ámbitos de descubrimiento y justificación. Infortunadamente, las propuestas curriculares en Colombia no se acompañan de procesos masivos de formación de los docentes y de trabajo investigativo suficientemente consolidado para que su puesta en práctica tenga los efectos deseados.

Entre los años 2010 y 2014 desarrollamos el proyecto investigativo *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase* (DMA-202-10). En la primera fase (2010-2012),<sup>9</sup> documentamos el proceso mediante el cual las conjeturas que producen los estudiantes, cuando resuelven problemas geométricos que se les proponen en clase, son un organizador curricular de la construcción de conocimiento en el aula. En la segunda fase (2012-2014),<sup>10</sup> aportamos información relevante acerca de la actividad semiótica, para profundizar en la influencia de las decisiones del profesor y la interacción de los miembros de la clase en la organización y desarrollo del contenido geométrico.

En la primera fase analizamos el tipo de signos que producen los estudiantes y los esquemas de utilización que ponen en juego cuando

---

9 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

10 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP), el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y Colciencias.

usan la geometría dinámica para resolver una tarea y formular una conjetura. Los principales resultados de esta fase son los siguientes:

- Identificamos tipos de signos que producen los estudiantes y propusimos una caracterización de mediación semiótica (Molina, Perry, Camargo, Samper, 2015). Esta es distinta a la propuesta por Mariotti (2009), pues esta autora se basa solo en las acciones realizadas con el artefacto y no en la actividad matemática específica.
- Propusimos una caracterización de los esquemas de utilización relacionados con el artefacto Cabri (programa de geometría dinámica), que ponen en juego los estudiantes según el tipo de problema, y determinamos el potencial semiótico del artefacto, vía dichos esquemas.
- Identificamos, tipificamos y contabilizamos las acciones de mediación semiótica del profesor tendientes a que los estudiantes produzcan los signos matemáticos pretendidos.

En la segunda fase nos adentramos de manera detallada en la actividad semiótica como motor de la construcción de significado por parte de los estudiantes y en el papel de la mediación semiótica del profesor en la enseñanza de la geometría. Para ello, vimos la conveniencia de concentrarnos en un tema específico, enseñado y aprendido en una versión del curso de geometría plana de nivel universitario, escenario usual de nuestras investigaciones. Un miembro del equipo, profesor titular del curso, gestionó el trabajo en clase a partir de las conjeturas que los estudiantes formularon, fruto de la resolución de un problema de construcción. Esta fase de la investigación la caracterizamos como un estudio de caso prototípico de lo que sucede en la clase de geometría, cuando se introduce un hecho geométrico al sistema teórico en calidad de teorema y el profesor guía la construcción de significado en torno a tal hecho. A continuación, presentamos brevemente las conclusiones más relevantes:

- Tomando como referente conceptual la propuesta que realizan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), caracterizamos en profundidad los actos de *intra-inter* interpretación que tuvieron lugar en las interacciones entre los miembros de la clase y su papel en la construcción inicial y evolución de los significados matemáticos asociados a un contenido geométrico. Concluimos que una interacción semióticamente rica es determinante para organizar y desarrollar el contenido geométrico del curso, a partir de la participación legítima de los estudiantes en la formulación y validación de conjeturas.
- Ejemplificamos la diferenciación que Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) hacen sobre los objetos que circulan en la interacción comunicativa en el aula. Nuestra investigación aporta una ilustración del empleo de la perspectiva semiótica peirceana. En particular, el análisis nos permitió precisar la diferencia entre el objeto real matemático y el objeto real matemático del profesor, con miras a no perder de vista la dimensión didáctica propia del proceso de enseñanza-aprendizaje (Camargo, Perry, Samper, Molina, Sáenz-Ludlow, 2015).
- Con relación a la mediación semiótica, señalamos que en la medida en que el profesor abra un espacio para que los estudiantes comuniquen sus interpretaciones, él puede promover acciones pertinentes para que los estudiantes logren la evolución de significado de los objetos matemáticos en juego. Es en la gestión de actos de *intra-inter* interpretación que puede conducir la evolución en la dirección de las interpretaciones que sobre ellos tiene la comunidad de discurso matemático de referencia. Nuestro análisis nos permitió ver la pertinencia de conceptualizar lo que denominamos el *objeto dinámico didáctico* del profesor, para poder dar cuenta y razón de las decisiones didácticas del profesor encaminadas a mediar la

construcción de significado sobre aspectos específicos propios del objeto real matemático.

Al analizar en profundidad la actividad semiótica colectiva en el aula, identificamos algunos elementos que deberían considerarse para apoyar el aprendizaje. Entre ellos están:

- La importancia de dedicar tiempo de la clase a analizar las interpretaciones que hacen los estudiantes acerca de los objetos y relaciones matemáticas en juego, aún en detrimento del número de temas que se aborden en el curso.
- El papel que juega el conocimiento del lenguaje castellano, de los giros lingüísticos que permite, y del lenguaje geométrico, con el que se acompañan afirmaciones, como un aspecto central de la construcción de significado.
- El tratamiento cuidadoso que debe hacerse para favorecer la construcción de significado de las justificaciones de teoremas que aluden a la existencia de los objetos geométricos, para evitar que se produzcan errores como el RCFP reportado en una de nuestras publicaciones (Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina, 2016).

Adicionalmente, la investigación puso de presente un aporte que el grupo de investigación ha venido consolidando desde hace más de una década, en busca de alternativas para cerrar la brecha entre el mundo empírico y el mundo teórico de la geometría. Así, se prefigura una instancia intermedia entre ambos mundos, en la cual los procedimientos empíricos que reportan los estudiantes, ya sea para representar la situación geométrica presentada en un problema de conjeturación o para explorar dicha situación, se justifican teóricamente. Esto parece constituir un puente entre los dos mundos, que favorece la construcción de significados. Esta es una hipótesis de trabajo que hemos puesto en juego en la dirección de tesis de maestría con profesores de matemáticas en ejercicio, de educación básica primaria y secundaria, para impulsar el acercamiento temprano al

mundo teórico de la geometría en tareas cuidadosamente diseñadas y con una gestión del profesor encaminada a una actividad semiótica rica en la que se promueve el aprendizaje significativo. Algunos temas recurrentes en las tesis de maestría dirigidas por profesores del equipo entre 2015 y 2017 son:

- Ambiente para indagar en educación básica: uso de geometría dinámica para explorar, conjeturar y justificar.
- Participación de estudiantes de educación básica en la construcción de teoremas.
- De la argumentación sustancial a la argumentación analítica en educación básica.
- Tareas de geometría que promueven el uso experto de hechos geométricos en la clase de geometría de educación básica secundaria.
- Significados de objetos matemáticos desarrollados por estudiantes de educación básica primaria.

Con la realización del proyecto *Geometría: vía al razonamiento científico* (DMA-399-2015),<sup>11</sup> entre 2015 y 2016, tuvimos la oportunidad de realizar una interacción académica entre profesores de las siguientes instituciones: Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Colombia), Universidad Pedagógica Nacional (México), Instituto Pedagógico Nacional (IPN, Bogotá), Institución Educativa Departamental Capellanía (Cajicá, Cundinamarca) y Escuela Primaria Alfredo V. Bonfil (Taplan, México D.F.). Aunamos esfuerzos de diseño, apoyo e implementación para promover el acercamiento de niños y jóvenes al razonamiento científico. El objetivo era promover experiencias académicas y sociales de indagación propias de las ciencias, pero no exclusivas de ellas, pues pueden estar presentes, por ejemplo, en

---

11 El proyecto fue financiado por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP), el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y la Secretaría de Educación Pública de México.

situaciones de la vida cotidiana y profesional. En Colombia y México los estudiantes que llegan a la educación media o a la universidad han vivido pocas experiencias académicas en la formulación de conjeturas, la argumentación y la producción de justificaciones matemáticas. Aunque en los lineamientos curriculares para la educación matemática de ambos países se da un lugar prominente a la argumentación y la justificación matemática, no siempre es una realidad y se percibe que hay pocos esfuerzos colectivos para lograr que los estudiantes avancen en el desarrollo del razonamiento científico. Intervenciones individuales, sin el apoyo de los equipos de docentes de matemáticas de cada institución, no contribuyen significativamente a resolver la problemática. Hace falta una intervención conjunta en la que se comprometan colectivos de las áreas de matemáticas.

El recorrido por nuestro ejercicio investigativo permite apreciar la productiva utilidad de las perspectivas cognitivas y socioculturales para impulsar el aprendizaje de la geometría en sus diversas aristas. Además, para permitir a los niños y jóvenes vivir experiencias de actividad matemática útil, en las que puedan experimentar personalmente el ejercicio de suponer una vía para resolver un problema, experimentarla, verificar propiedades y construir justificaciones para asegurar que su propuesta es válida (Camargo, Sandoval, 2017). Transformar las aulas de geometría y, en general, de matemáticas, en busca de favorecer el acceso a prácticas matemáticas poderosas, permitirá el desarrollo del sentido espacial y competencias matemáticas para enfrentar los retos que la sociedad impone a las nuevas generaciones.

## Aportes conceptuales

A continuación, sintetizamos los principales aportes conceptuales del equipo “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” ( $\mathcal{A} \cdot G$ ) del grupo Didáctica de la Matemática, esbozando una descripción de tres constructos que hemos desarrollado y puesto al servicio de la comunidad de investigadores y docentes:

## Actividad demostrativa

La *actividad demostrativa* (Perry, Samper, Camargo, Molina, 2013) involucra los procesos de conjeturación y justificación, relacionados entre sí por el hecho de que se justifica lo que se conjetura. El proceso de *conjeturación* tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto. Sin embargo, tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual las conjeturas son candidatas para la realización de un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado. Son acciones propias de este proceso detectar un invariante y verificarlo siempre que surjan elementos de incertidumbre, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general, un hecho matemático que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles. El proceso de *justificación* tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, que la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento (creencias, representaciones gráficas, sistema teórico). En este proceso es posible reconocer tres acciones: seleccionar entre elementos identificados, teóricos o empíricos, aquellos que podrían sustentar la afirmación; organizar esos elementos de manera deductiva, y formular la justificación.

Entre las acciones —de índole heurística— que apoyan los dos procesos están la visualización y la exploración. Mediante la *visualización* se consigue información geométrica de una figura, ya sea identificando los elementos que la componen y algunas configuraciones que se pueden formar (de dimensión igual o menor que la de la figura inicial), o interpretando símbolos que representan propiedades

geométricas (por ejemplo, de congruencia “ $\cong$ ”, perpendicularidad “ $\perp$ ”, paralelismo “ $\parallel$ ”) con el ánimo de encontrar relaciones geométricas subyacentes. Además, requiere establecer nexos entre la figura y el saber previo para identificar, aislar y enfocar elementos de interés por medio de la vista, detectar o descubrir propiedades que inicialmente pasan inadvertidas, o evocar propiedades geométricas. Mediante la *exploración*, realizada en el mundo de los fenómenos y/o en el mundo de la teoría, se buscan regularidades (propiedades o relaciones geométricas).

En el mundo de los fenómenos, la exploración recae sobre representaciones (gráficas y materiales) de figuras geométricas y tiene un carácter empírico. Puede llevarse a cabo tomando medidas, calculando o haciendo construcciones (auxiliares, para enriquecer la figura; de referencia, para comparar; de casos, para llegar a un resultado por ensayo y error). Nos referimos entonces a una *exploración empírica*. Cuando esta se lleva a cabo en un entorno dinámico, es decir, uno en el que las representaciones son susceptibles de movimiento, la denominamos *exploración dinámica* y su objetivo es detectar invariantes. Los entornos de geometría dinámica ofrecen una herramienta particular de exploración: la opción de arrastre de los objetos. Con esta opción una imagen en la pantalla se puede transformar en un sinnúmero de imágenes (una sucesión casi continua de representaciones), todas asociadas a la misma figura geométrica inicial. Esto permite estudiar qué propiedades permanecen invariantes y cuáles se modifican. En el mundo de la teoría, la exploración recae sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. La designamos *exploración teórica* y se lleva a cabo con el propósito de reconocer o encontrar enunciados que permitan justificar una afirmación o tomar decisiones sobre hacia dónde dirigir la exploración empírica.

Naturalmente, no puede haber actividad demostrativa sin razonamiento que movilice las ideas y acciones y sin la argumentación asociada. Incluso, la *actividad demostrativa* forma un entramado con el razonamiento y con la argumentación.

## Objeto dinámico didáctico

Los *objetos dinámicos didácticos* (ODD) del profesor son representaciones suyas respecto a aspectos específicos del objeto matemático real que se está estudiando en una clase; son objetos que él usa como referencia para guiar la construcción de significado a través de la actividad semiótica en el aula. Integran elementos relevantes del objeto matemático acerca de lo que el profesor cree que interpretan los estudiantes, en un momento dado de la construcción de significado, con aspectos del objeto que tienen que ver con decisiones didácticas, no siempre conscientes, que el profesor considera necesarias para promover la evolución. En ese sentido, los ODD centran la atención en dos perspectivas a las que tiene que atender el profesor cuando intenta gestionar la clase, en torno a la construcción de significado: una, la matemática misma (entendiendo que el objeto matemático del profesor está cerca del objeto que acepta la comunidad del discurso y por ello la representa); y otra, la del objeto en construcción, en la que el foco de mayor interés es la enseñanza y el aprendizaje (perspectiva didáctica del objeto matemático en construcción). Naturalmente, todas estas acciones están influidas por las creencias, conocimientos y experiencias previas del profesor.

## Aproximación temprana al mundo teórico de la geometría

Con una introducción temprana al razonamiento geométrico (Camargo y Samper, 2014) nos referimos a propiciar en la educación básica primaria y secundaria la elaboración, por parte de los estudiantes, de justificaciones, en particular con argumentos deductivos, pues consideramos que son la esencia de las matemáticas y una manera matemática de trabajar en geometría. La aproximación busca impulsar el desarrollo de procesos de justificación de propiedades geométricas que han sido obtenidas a partir de procesos de conjeturación.

Desde el punto de vista del equipo  $\mathcal{A} \bullet G$ , la aproximación temprana al razonamiento geométrico se ve favorecida si se combinan los siguientes elementos:

- Una propuesta de secuencia de problemas de construcción geométrica relacionados entre sí, de tal forma que algunos de ellos permiten el descubrimiento empírico de hechos geométricos que se asumen como ciertos (a manera de postulados de un sistema teórico), y otros que dan lugar a conjeturas que pueden ser validadas con argumentos deductivos, mediante los hechos geométricos aceptados previamente (a manera de teoremas). Por esta vía, los estudiantes pueden ver que las propiedades de las figuras geométricas constituyen un entramado que da forma al conocimiento geométrico y experimentan la potencia de la demostración matemática. La propuesta busca que los estudiantes dejen de ver las propiedades geométricas únicamente como atributos descriptivos de las figuras, identifiquen relaciones de dependencia entre ellas y construyan, en algunos casos, argumentos deductivos para justificarlas.
- El uso para la resolución de los problemas de un programa de geometría dinámica que hace que la construcción y la exploración sean una actividad matemática apoyada en las propiedades geométricas y no en la percepción visual. Específicamente, el reconocimiento de las propiedades construidas, directamente o con el arrastre, y el estudio del comportamiento de las figuras geométricas cuando algunos elementos de la configuración son arrastrados, proveen a los estudiantes un mecanismo para identificar invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades geométricas que es central para formular conjeturas y disponer de elementos para justificarlas. En ese sentido, se aprovecha el potencial de los programas de geometría dinámica, no solo como recurso para tener disponibles rápidamente una gran cantidad de ejemplos de una figura geométrica dada, favoreciendo la inducción empírica, sino como recurso para

detectar invariantes y establecer relaciones de dependencia que favorecen la construcción de enunciados condicionales, gracias principalmente a la actividad experimental que se logra con el arrastre. En particular, los procedimientos de construcción de figuras elementales, como un paralelogramo y el arrastre hasta que las diagonales sean congruentes, obliga a tener conciencia de las propiedades que definen la figura y a aquellas que se imponen con el arrastre, las cuales se constituyen en los antecedentes de proposiciones condicionales. Asimismo, descubrir propiedades que se mantienen o suceden simultáneamente al imponer una, se constituyen en los consecuentes, dando lugar a conjeturas iniciales y posiblemente a ideas para que los estudiantes las justifiquen de manera deductiva.

- La mediación semiótica del profesor que guía las actividades impulsando a los estudiantes a interpretar signos del profesor o de otros alumnos y a producir signos. A través de ellos los estudiantes manifiestan significados personales acerca de las figuras y las relaciones representadas en la pantalla, como forma de construir conocimiento personal significativo cuya referencia es un conocimiento cultural aceptado por la comunidad matemática de referencia, de acuerdo con las metas instruccionales. En tal sentido, además de diseñar las secuencias de problemas que posibiliten la emergencia de enunciados en torno a un concepto o relación geométrica, el profesor es el encargado de generar una interacción discursiva para que a partir de esos enunciados surjan otros que les den soporte y para que tales enunciados evolucionen hacia los significados matemáticos del contenido.

## Proyección

El equipo  $\mathcal{A} \bullet G$  tiene la pretensión de atender con especial énfasis dos problemáticas de la educación básica primaria y secundaria, detectadas en nuestro ejercicio investigativo. Por una parte, las ideas de los estudiantes generalmente no se usan como impulsoras de

la construcción de conocimiento, hecho que deriva en la mínima atención que les prestan los profesores, el poco interés de promover la interacción académica entre estudiantes y la persistencia del conocido patrón de interacción pregunta-respuesta-evaluación. Por otra parte, usualmente no se promueve la producción de discursos coherentes en la clase para explicar, argumentar y justificar las propuestas de solución de los estudiantes. En diversas aulas escolares y universitarias, en donde hemos realizado estudios empíricos, vemos que los esfuerzos por diseñar tareas para el aula que propicien la argumentación y la justificación, a partir de la interacción entre el profesor y los estudiantes, se ven empañados por la poca experticia que los profesores tienen para gestionar un ambiente de diálogo y participación genuina en el que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar discursos claros y completos, disentir, objetar y ser escuchados por sus compañeros. Generalmente, presentan ideas sueltas, muchas veces escuchadas e interpretadas solo por el profesor, quien parafrasea y acomoda lo dicho según sus intereses. Así las cosas, es muy poco probable que se produzca la construcción colectiva de significados y se desarrollen prácticas argumentativas socialmente constituidas. Esperamos impulsar esfuerzos investigativos que llamen la atención frente a este hecho, que ahonden en esta problemática y que propongan alternativas para modificar el estado de cosas. De esta forma, la educación matemática contribuirá con la formación de nuevas generaciones que aprendan a escuchar, a negociar sus ideas y a valorar la argumentación razonada.

## Sección 2: Equipo “Educación estadística”

### Balance analítico

Desde el año 2012 el grupo de investigación en Educación Estadística (EdEst)<sup>12</sup> se incorporó al grupo de Didáctica de la Matemática del

---

12 En 2018 el equipo está conformado por Felipe Fernández, Luisa Andrade, Ingrith Álvarez y Maritza Méndez.

Departamento de Matemáticas (DMA) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Sin embargo, su recorrido en relación con acciones de indagación sistemática se inicia en 2006, tanto con el apoyo del CIUP, como por la asesoría a trabajos de grado elaborados por estudiantes de los programas curriculares que desarrolla el DMA.

La postura conceptual y los intereses de investigación respecto a la educación estadística del equipo EdEst han evolucionado a lo largo de este tiempo. Inicialmente, debemos señalar que los intereses de investigación asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística no han sido exclusivos de la comunidad de educadores matemáticos. La preocupación por cuestiones didácticas y de formación de profesionales y usuarios de la estadística ha merecido la atención de los mismos estadísticos y de psicólogos interesados en investigaciones sobre el razonamiento estocástico<sup>13</sup> (Batanero y Godino, 2005). Así, las primeras influencias conceptuales que fundamentaron el trabajo de nuestro equipo provienen de enfoques de investigación de corte psicológico sobre el razonamiento en contextos de decisión ante la incertidumbre, así como de literatura sobre investigación educativa, como la recogida en los ICOTS.<sup>14</sup> Sin embargo, la obvia necesidad de la educación estadística dentro de nuestra comunidad de educadores matemáticos también ha contribuido e influenciado los intereses de investigación del equipo EdEst.

En los primeros trabajos de investigación, y desde una perspectiva principalmente cognitiva, prestamos atención al estudio del contexto social y cultural, del conocimiento y de las actitudes hacia la educación estadística, de profesores en ejercicio y en formación y de estudiantes de secundaria (Fernández, Sarmiento y Soler, 2008a). En estas investigaciones los instrumentos de indagación se basaron principalmente en la construcción de pruebas de conocimientos y de

---

13 El término *estocástico* hace referencia tanto a lo estadístico como a lo probabilístico.

14 El International Conference on Teaching Statistical (ICOTS) es el principal evento de investigación sobre la educación estadística, que se realiza cada cuatro años y es patrocinado por la International Association of Statistical Education (IASE).

actitudes, aplicadas a los sujetos de la muestra, las cuales se eligieron mediante métodos de muestreo probabilístico. Por otra parte, para la formulación de preguntas en las pruebas adoptamos elementos de trabajos como los recogidos en Kahneman, Slovic y Tversky (1982), que abordan asuntos como el razonamiento correlacional, inferencial y la probabilidad condicional, entre otros. Al respecto, en el proyecto titulado *Conocimiento estadístico y probabilístico de profesores de educación básica y media* (DMA-014-06),<sup>15</sup> que desarrollamos en 2006 y 2007 (Fernández, Sarmiento y Soler, 2008b), los ítems de las encuestas aluden a las llamadas *heurísticas* de razonamiento estocástico, es decir, a estrategias inconscientes que reducen la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información, y que frecuentemente ayudan a obtener una solución aproximada, pero que también producen, en muchos casos, sesgos en las conclusiones obtenidas, que tienen implicaciones en las decisiones tomadas. Así, en esta primera etapa de trabajo reconocimos la importancia de los estudios de corte psicológico, que cambiaban el modelo de razonamiento y actuación del ser humano acorde a la lógica formal por el de concebirlo como un decisor que actúa de acuerdo con un sistema de razonamiento. No sobra señalar que los resultados de esta investigación tuvieron incidencia en los trabajos de grado de Zambrano y Palacios (2009), Aldana y Vargas (2008), Camacho y Landázuri (2009) y Amaya y Espitia (2007).

En la comunidad internacional la mayor presencia de la estadística en las escuelas, la discusión sobre los contenidos curriculares para esta disciplina, la necesidad de conceptualizar la idea de razonamiento estocástico y de darle sentido al significado y comprensión de los objetos de la estadística y la probabilidad, así como los problemas relativos a las metodologías de enseñanza y la formación y motivación de los profesores, han transformado paulatinamente los enfoques teóricos

---

15 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

para investigar, los cuales se movilizan desde una perspectiva acentuada en lo cognitivo hacia enfoques donde también se tienen en cuenta lo sociocultural y crítico.

Así, en una siguiente etapa de trabajo de nuestro equipo hay un acercamiento a la metodología basada en la investigación de diseño, que llevó además a tomar consciencia de cambios emergentes en cuanto a la relación entre la teoría y la práctica. En las aproximaciones tradicionales, como la epistemología positivista, la práctica está subordinada a la teoría, que se considera superior, y los profesores son consumidores de los resultados de investigaciones realizadas fuera de sus clases. En contraste, surge una visión que enfatiza la relación reflexiva entre las dos, según la cual se postula que la teoría emerge de la práctica y la realimenta para guiarla (Cobb, 2000). Esta idea tiene dos implicaciones en nuestra mirada sobre la investigación educativa: la primera, advertir la brecha que existe entre la práctica de la investigación y la práctica de la enseñanza bajo el paradigma positivista, en el que cabe el primer proyecto de investigación del equipo EdEst; y la segunda, reconocer la necesidad de movernos a la nueva visión.

Pasamos así de enfocar la atención en estudios sobre la descripción del razonamiento estocástico de profesores y estudiantes, a realizar intervenciones en el aula basados en la metodología “Investigación de diseño”, concretada en experimentos de enseñanza. Empezamos en la escuela, con estudiantes de sexto a décimo grado, con el proyecto de investigación titulado *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria* (DMA-081-08)<sup>16</sup> realizado en 2008 y 2009 (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010). En este proyecto acogimos la propuesta de Canada (2004) de considerar tres escenarios de la estocástica para aproximarse al estudio de la variación: situaciones de conjuntos de datos, situaciones de

---

16 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

muestreo y situaciones de probabilidad, para los que se elaboraron secuencias de instrucción que fueron trabajadas con los estudiantes.

Después, en la misma tónica de trabajar con base en experimentos de enseñanza, realizamos otros tres proyectos de investigación. El primero de ellos, desarrollado en 2010 y 2011, fue titulado *Variación y diseño de experimentos de enseñanza para la educación estadística (DMA-203-10)*<sup>17</sup> (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2012). El trabajo se centró en el ámbito universitario, en el marco de los cursos de probabilidad y estadística que se imparten como parte del plan curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN. A pesar de que los escenarios relativos a situaciones de conjuntos de datos, muestreo y probabilidad fueron definidos también como centro de labor para este proyecto, la debilidad de los resultados previos en el escenario de situaciones de probabilidad motivó considerar como prioritario el trabajo en probabilidad. De hecho, en los cursos de probabilidad por lo general los estudiantes revelan dificultades con varios de los temas que se estudian, entre los que resalta la variable aleatoria, no solo por el poco sentido que tiene para los estudiantes, sino también por la ausencia de significación que los docentes muestran al respecto. El balance de las consultas de literatura, realizadas para profundizar sobre la didáctica en cuestión, reveló que de manera generalizada la enseñanza enfocada de la variable aleatoria se reduce a su presentación a través de una definición funcional y al uso instrumental de la distribución de probabilidades asociada a la variable aleatoria, sin que la definición en cuestión se profundice ni se ponga en práctica. En consecuencia, al conjeturar en nuestro equipo que esta comprensión limitada de la variable aleatoria constituye uno de los obstáculos en el desarrollo de razonamiento y pensamiento estadístico, se precisó la variable aleatoria como concepto a abordar en el proyecto, sin dejar de lado la variación que subyace en el trabajo en educación estadística.

---

17 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

La investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad continuó con el proyecto titulado *Experimentos de enseñanza y razonamiento estadístico en situaciones de probabilidad e inferencia estadística* (DMA-328-12),<sup>18</sup> realizado en 2012 (Fernández, Andrade y Álvarez, 2013). El trabajo consolidado hasta el momento con la variación, la variable aleatoria y la probabilidad (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010, 2012 y 2013) puso de manifiesto la necesidad de continuar explorando las conexiones entre la probabilidad y la estadística en la enseñanza. Los vínculos que se pudieron establecer entre estas dos áreas en torno a la variable aleatoria nos llevaron a considerar los intervalos de confianza como otro concepto de la inferencia relacionado también con la probabilidad y de alguna manera con asuntos primordiales de la estadística descriptiva. Desarrollamos entonces una intensa y profunda relación al respecto que enriqueció la propuesta de la secuencia de instrucción, y determinamos que la noción de nivel de confianza asociada al intervalo de confianza era particularmente problemática. Elaboramos así una primera versión de tal secuencia, pero por razones de tiempo no fue posible implementarla. Empero, llevamos a cabo un trabajo de campo con una prueba piloto de esta versión, con estudiantes de un curso de estadística de la Licenciatura en Matemáticas, cuyos resultados permiten afinar las tareas planteadas en la secuencia de instrucción.

La investigación que dio continuidad al proyecto anterior, denominada *Noción de intervalo de confianza con estudiantes universitarios* (DMA-354-13)<sup>19</sup> (Fernández, Andrade y Álvarez, 2014), comenzó con la identificación de las concepciones de los estudiantes frente a la noción de nivel de confianza, para estar en capacidad de describir cómo dichas concepciones evolucionarían a través del desarrollo de

---

18 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

19 Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

la secuencia de instrucción. Se incorporó el uso de tecnología en la secuencia de instrucción, que fue definitivo para aportar a la comprensión de los estudiantes. Con la idea de contar con información sobre el trabajo de cada estudiante, y su posible evolución, se optó por trabajar con la metodología de estudios de caso combinada con la metodología de experimentos de enseñanza que había sido constante en proyectos previos del equipo de investigación, y hacer así un seguimiento cuidadoso solo de pocos estudiantes.

Un balance de la planeación y desarrollo de las secuencias de instrucción elaboradas de 2008 a 2013 confirma que dichas secuencias acogen pautas para la enseñanza en concordancia con las establecidas por el NCTM (2000) y que algunas secuencias, además, tienen componentes de la teoría denominada *cambio conceptual*, descrita por Vosniadou (2002). También corrobora que la distinción entre los constructos alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, que se elabora a través de precisar indicadores de aprendizaje relativos a los conceptos estadísticos para cada uno de tales constructos, emerge como marco interpretativo que no solo permite el análisis e interpretación del aprendizaje ocurrido en clase, sino que aporta a la formulación de las secuencias de instrucción. De alguna manera estos marcos corresponden a la recomendación de autores como Cobb (2000), de construir un marco interpretativo para el experimento de enseñanza. Finalmente, el balance despliega el trabajo simultáneo de elaboración de indicadores de niveles de competencia estadística consonantes con el desarrollo de taxonomías, en especial con la taxonomía Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO), para caracterizar el pensamiento de los estudiantes reflejado en respuestas a las tareas propuestas.

Luego de desarrollar cinco proyectos de investigación y de asesorar más de una treintena de trabajos de grado sobre diversas temáticas de estadística y probabilidad, durante nueve años, el equipo de investigación EdEst decidió hacer un alto para revisar los resultados y alcances logrados. Concluimos que los resultados de investigación

obtenidos habían sido difundidos y reconocidos pero que quizás no habían tenido la trascendencia deseada en los estudiantes. Por ello, planteamos la necesidad de establecer nuevos derroteros que orientaran el trabajo del equipo y su agenda de investigación.

En esta nueva etapa de trabajo se configuran los proyectos de investigación titulados *Panorama de la investigación en educación estadística* (DMA-014-06) y *La investigación en educación estadística en el DMA-UPN: una mirada para transformar* (DMA-428-16)<sup>20</sup> (Fernández, Andrade y Álvarez, 2016 y 2017). En el primero de estos proyectos elaboramos un panorama acerca de la investigación en educación estadística a partir de la revisión de una muestra representativa de disertaciones de nivel doctoral, con la idea de ampliar el horizonte con base en las tendencias actuales de investigación, de manera que incidiera en la reformulación del trabajo investigativo del equipo. El desarrollo de la investigación se fundamenta en la definición de una estructura de categorías para el examen, análisis, caracterización y clasificación de las disertaciones. Estas categorías se refieren a los enfoques teóricos que orientan y guían la labor investigativa en los trabajos doctorales; a los temas objeto de atención en la acción educativa y por tanto que son centro de la pesquisa investigativa; a los sujetos o focos de interés en donde recae la investigación; a principios de los marcos metodológicos que respaldan el trabajo de indagación subyacente a las disertaciones, y a ideas de la didáctica y de la pedagogía que emergen de las investigaciones y que pueden aportar a la enseñanza y al aprendizaje de la estadística y de la probabilidad. La metodología de investigación adoptada para el proyecto mezcló métodos cualitativos y cuantitativos que fueron provechosos en al menos dos sentidos: por un lado, el paradigma cualitativo hermenéutico posibilitó la acción interpretativa de los trabajos doctorales, que complementó la generación de las categorías de análisis. Por otro lado, el manejo y la

---

20 Ambos proyectos fueron realizados con apoyo financiero del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

utilización de métodos cuantitativos basados en recuentos estadísticos de frecuencias facilitaron la descripción de diferentes tendencias respecto a los asuntos investigativos en esta área y el afinamiento y la selección de una pequeña muestra de juicios de disertaciones que se constituyeron en insumos de estudio.

También con el ánimo de definir caminos hacia el futuro con base en una mirada reflexiva al trabajo realizado hasta el momento contrastado con las tendencias internacionales, el segundo proyecto de esta etapa siguió lineamientos similares a los realizados en el proyecto anterior. Abordamos también una revisión documental pero esta vez de la producción documental del equipo EdEst desde 2006, en torno a los proyectos de investigación apoyados por el CIUP y a los trabajos de grado sobre Educación Estadística realizados por estudiantes de los tres programas del Departamento de Matemáticas: licenciatura, especialización y maestría, bajo la dirección del equipo EdEst.

## Aportes conceptuales

Los principales aportes conceptuales del equipo EdEst que surgen en el ejercicio de indagación, tanto en varios proyectos de investigación apoyados por el CIUP, como en los trabajos de grado dirigidos, se bosquejan a continuación.

### Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico

Con el ánimo de definir los tres constructos que conforman el nombre del enfoque “Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico”, algunos autores han precisado acciones propias de cada uno, pero su conceptualización continúa en expansión y debate. Esta perspectiva pretende distinguir entre los procesos, habilidades y competencias involucrados en cada uno de estos constructos para así promover su desarrollo en los estudiantes. En la investigación doctoral a nivel internacional el enfoque teórico “Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico”, que subyace el trabajo

respecto a la enseñanza-aprendizaje de la estocástica, es uno de los más empleados (Andrade, Fernández y Álvarez, 2017). De manera similar, en la mayoría de los proyectos de investigación desarrollados por el grupo EdEst y en buena parte de los trabajos de grado dirigidos, es el enfoque que más atención ha recibido.

El trabajo del grupo EdEst concerniente a este enfoque de la “Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico” ha enfrentado la necesidad de concretar la caracterización y la de establecer relaciones entre estos tres constructos. Optamos entonces por seguir la propuesta de delMas (2002), quien especifica verbos particulares para orientar lo que se requiere que el estudiante comprenda o demuestre en el desarrollo de cada constructo, generando posibles distinciones entre las acciones que los identifican. Así, la labor del equipo se encamina a la definición de indicadores particulares diferenciados para cada uno de los tres constructos y dirigidos a la comprensión de cada idea de la estocástica abordada en los proyectos. Dichos indicadores han estado dirigidos tanto a la constatación del aprendizaje como a apoyar el diseño y afinación de las secuencias de instrucción, en un proceso dinámico que a su vez contribuye a perfeccionar los mismos indicadores. Estos indicadores emergen de ahondar en la conceptualización de las nociones estadísticas (Fernández y Andrade, 2010) y trascienden propuestas más usuales como las de los estándares de competencias básicos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Se cuenta, por consiguiente, con conjuntos de indicadores que caracterizan los constructos en cuestión, relativos a diferentes ideas de la estadística y la probabilidad, los cuales no necesariamente implican el desarrollo de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico en los estudiantes, pero sí permiten determinar y cualificar los avances de manera conectada. Así, es posible identificar, en la resolución de una misma tarea, indicadores asociados a diferentes constructos; es decir, una misma evidencia podría servir para argumentar el desarrollo de alfabetización o razonamiento. Cabe anotar

que la asignación de verbos produjo, casi siempre, caracterizaciones muy sintéticas del pensamiento estadístico.

### Investigación de diseño y experimentos de enseñanza

En varios de los proyectos realizados por el equipo EdEst, con la metodología de investigación llamada “Investigación de diseño” y en particular con los experimentos de enseñanza,<sup>21</sup> la elaboración de secuencias de instrucción que abordan conceptos de la estocástica ha estado fundamentada, en primer lugar, por la exploración obligada de los contenidos estocásticos que se tratan, la cual ha ampliado su comprensión y sus relaciones con otras nociones, clarificando su estructura conceptual, En segundo lugar, por la didáctica relativa a los contenidos tratados, lo cual ha posibilitado considerar concepciones erradas y obstáculos de aprendizaje como punto de partida, delinear trayectorias hipotéticas de aprendizaje, involucrar ideas para que los estudiantes aprendan a su propio ritmo, incluir la teoría de cambio conceptual, para que los estudiantes cuestionen su conocimiento y sean conscientes de sus concepciones parciales o erradas para reconceptualizarlas. En tercer lugar, por la interacción cercana y permanente alcanzada entre los profesores de las clases y el equipo de investigación, durante los experimentos de enseñanza, dirigida a analizar cómo se materializan o transforman las hipótesis de aprendizaje sugeridas, cómo planear la actuación del profesor en la clase, cómo modificar y continuar la enseñanza con base en los aciertos y que dificultades se presentan.

Las secuencias de instrucción construidas se pueden implementar en espacios académicos de diversos niveles de escolaridad y contribuyen a la reflexión conceptual en diferentes frentes de la educación

---

21 Los experimentos de enseñanza caben dentro del paradigma de la “Investigación de diseño” y por lo tanto se presentan como una metodología cuyo principal propósito no es evaluar la efectividad del diseño de instrucción que se formuló con anterioridad, sino probar y modificar conjeturas hechas sobre el aprendizaje de los estudiantes en clase. Este proceso mejora, a su vez, el diseño de instrucción (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

estadística. Además, la evolución del equipo de investigación alcanza reconocimientos importantes con respecto a principios teóricos que caracterizan la investigación de diseño y el enfoque teórico de la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, trabajados en conjunto por el equipo EdEst.

De una parte, el objetivo de la metodología de investigación de diseño está claramente centrado en el desarrollo de teorías acerca del aprendizaje, a partir de probar hipótesis o conjeturas hechas sobre el aprendizaje de los estudiantes en clase. Por su parte, el enfoque de “Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico” se dirige más a propiciar el desarrollo de estos constructos en los estudiantes, en lugar de fomentar una comprensión procedimental. Por consiguiente, se centra en llevar a cabo acciones específicas que los promuevan. Así, aunque en la literatura no se encuentran recomendaciones explícitas sobre no trabajar de manera conjunta ese enfoque con esa metodología de investigación, no sorprende que, por sus propósitos distintos, en el ambiente internacional haya una desvinculación entre ellos. En efecto, en disertaciones doctorales de varios países, que fueron revisadas, la utilización de ese enfoque no está ligada a investigaciones enmarcadas bajo la metodología de investigación de diseño.

### La inferencia estadística y la probabilidad

Con respecto a la variable aleatoria, los estudios de índole epistemológica reportados en Ruiz (2006) destacan dos paradigmas: una perspectiva de *magnitudes aleatorias* que restringe y concibe la variable aleatoria como un fenómeno aleatorio de resultados numéricos, y una aproximación de *variables aleatorias* de la que emerge el carácter funcional de la variable aleatoria. La comprensión conceptual ganada por el equipo EdEst acerca de la variable aleatoria confirma la vigencia de estas dos concepciones de la variable aleatoria en la educación. Es claro que la concepción de la variable aleatoria como magnitud, con nombre propio como la binomial o la hipergeométrica, no impide que se tenga éxito en la solución de los problemas típicos de probabilidad presentados

en libros de texto. Sin embargo, no considerar el carácter funcional de la variable aleatoria sí genera dificultades en los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que son tan comunes a los textos escolares, como las que surgen en contextos de muestreo estadístico.

Además, la significativa relación de la variable aleatoria con los conceptos de espacio muestral y experimento aleatorio que se ha podido determinar, muestra que en el aprendizaje los estudiantes, aún después de puntualizar los posibles resultados del experimento aleatorio, no reconocen el espacio muestral como el conjunto conformado por ellos (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013), quizás porque a pesar de conocer la definición de espacio muestral es usual que en muchas situaciones de enseñanza se señale el conjunto de valores de la variable aleatoria como el espacio muestral. Se advierte entonces que abordar el cálculo de probabilidades a partir del espacio muestral constituido por los puntos muestrales, para las situaciones donde el número de posibles resultados es finito y moderado, no solo facilita la asignación de probabilidades sino que contribuye a la comprensión de los estudiantes relativa a dichas probabilidades, pues pueden notar el papel del espacio muestral en dicho cálculo, por ser equiprobable y porque es posible comprobar que esos son los números que intervienen en el cálculo y si la probabilidad calculada es correcta.

## Proyección

La preeminencia encontrada a nivel investigativo internacional del enfoque teórico de la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, la necesidad manifiesta de la educación de persistir en el desarrollo de razonamiento estadístico y la convergencia de tal enfoque con ideas de la educación matemática crítica, llevan a nuestro equipo a reconsiderar el empleo del enfoque “Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico”, esta vez en conjunto con la perspectiva crítica, como camino plausible para la investigación educativa en estadística. Proyectamos, entonces, dar un giro a los planteamientos

teóricos que sustentan tanto la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística como las propuestas de clase que surgen del proceso de indagación, con la incorporación paulatina de elementos de la educación matemática crítica.

La complejidad de los principios de la educación matemática crítica y el difundido reclamo acerca de la necesidad de consistencia con los métodos de investigación ponen sobre la mesa repensar esos métodos y profundizar en el estudio de dichos principios, los cuales solo se irán aclarando a medida que se vaya desarrollando investigación al respecto.

Esperamos, además, que este trabajo contribuya a la construcción de la disciplina emergente de la educación estadística crítica, en la que autores como Campos (2016) y Oliveira (2010), entre otros, han ya abonando terreno.

## Sección 3: Equipo “Diversidad, educación matemática y subjetividades”

### Balance analítico

El equipo “Diversidad, educación matemática y subjetividades” (Edumadys)<sup>22</sup> se constituyó hace unos doce años por integrantes del grupo Didáctica de la Matemática. Dichos integrantes tenían un interés inicial en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo y poco a poco fueron virando su ejercicio investigativo hacia una visión crítica y política de la educación matemática. La perspectiva actual está centrada en cuestionar la narrativa de la (in)clusión y la promesa de un mejor futuro, con la que se ha configurado el poder de la educación matemática en la formación de la ciudadanía moderna. Asumimos que la educación

---

22 En el año 2018, el equipo Edumadys está conformado por los profesores Gloria García, Claudia Salazar, Gabriel Mancera, Francisco Camelo y Julio Romero.

matemática y el aprendizaje de las matemáticas son prácticas sociales complejas constituidas en una multiplicidad de contextos, los cuales tienen resonancia en las formas como la enseñanza y el aprendizaje se realizan en las aulas. Así, resignificamos la noción de *escenarios de aprendizaje* (Alrø, Skovsmosey, Valero, 2005) como noción que hace posible identificar dimensiones interdependientes y relevantes necesarias para una mejor comprensión acerca de cómo la inclusión en el aprendizaje de las matemáticas está implicada en la inclusión cultural y social. Con especial énfasis hemos realizado estudios empíricos para montar escenarios de aprendizaje inclusivos (García, 2015) en clases de matemáticas donde la participación es evidente y está relacionada con las posibilidades de inclusión social. Nuestros intereses por estudiar y comprender los procesos de (in)exclusión en la escolarización de las matemáticas comprenden estudios sobre el funcionamiento del currículo de matemáticas como una tecnología de gobierno y sobre las prácticas de evaluación de las matemáticas, reinstalando el carácter histórico y culturalmente determinado que supone la escolarización obligatoria de las matemáticas.

En los doce años de trabajo en este enfoque hemos desarrollado tres proyectos de investigación colaborativamente con profesores y estudiantes en formación inicial y continuada de profesores de matemáticas. Nuestras experiencias investigativas se han situado en el contexto de prácticas educativas con las matemáticas en instituciones de educación básica y media ubicadas, casi todas, en zonas llamadas de riesgo social. Cada experiencia investigativa y pedagógica ha sido completamente distinta pues cada contexto ha implicado comprender las características propias de la comunidad institucional, sus prácticas y sus problemáticas en relación con la organización curricular de la institución educativa. Esto nos ha permitido identificar situaciones sociales y culturales que permean las intenciones de estudiantes y profesores (Mancera, Camelo, Salazar, Valero, 2012). En lo que sigue, exponemos un balance analítico sobre las investigaciones y direcciones de tesis asociadas.

Entre el 2003 y 2006 iniciamos la reflexión sobre las prácticas de evaluación de las matemáticas<sup>23</sup> y su comprensión como uno de los dominios implicados en estrategias de gobierno, en la medida en que el nexo entre el conocimiento matemático y las capacidades del individuo se constituyen en tecnologías para responder por la producción de una objetivación cognitiva individual acorde con la formación del recurso humano que demanda el proyecto educativo moderno. La adopción del discurso psicológico en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha permitido construir una visión del estudiante como sujeto cognitivo universal cuya “actividad cognitiva”, localizada en su interior, es central en la adquisición de estructuras conceptuales y relaciones matemáticas. Este discurso es compaginado con la premisa del desarrollo lineal en el proceso de aprendizaje. Con estos referentes, las prácticas de evaluación parecen producir solamente sujetos cognitivos objetivados al mismo tiempo que establecen las normas sobre el estudiante exitoso y sobre quien no lo es (García y Montejo, 2012). Mientras las normas cognitivas provienen de regulaciones institucionales y nacionales (en la mayoría de los casos públicos), las valoraciones sobre las actuaciones matemáticas que se consideran validas en la clase son implícitas. Estas valoraciones establecen un orden social en las relaciones entre profesor y estudiantes y entre estudiantes y entretejen relaciones de poder en el aula. Es en este sentido que el discurso de la evaluación autoriza o desautoriza, legitima o deslegitima, incluye o excluye. En consecuencia, lo que se aprende de matemáticas en el aula no solo tiene que ver con la comprensión o la competencia matemática, pues también se aprenden actitudes, disposiciones y sensibilidades hacia las matemáticas. Este enfoque del estudio del poder y sus efectos en las prácticas de evaluación en el aula nos permitió comprender las formas y los diversos usos como

---

23 Entre el 2003 y 2005 desarrollamos el proyecto *Modelos y prácticas de evaluación en la educación básica. El caso del campo multiplicativo* con el apoyo de Colciencias y la Universidad Pedagógica Nacional, proyecto en el cual participaron tres estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional.

profesores y estudiantes construyen y definen sus propios ámbitos y categorías de bueno o malo para el aprendizaje de las matemáticas.

Al integrarnos al estudio que realizaban redes de maestros de matemáticas (del sector rural y ubicadas en zonas de riesgo social) sobre la indiferencia, rechazo y ciertas modalidades de resistencia de un considerable número de estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas (incluyendo el ausentismo), problematizamos el desinterés por el aprendizaje a partir de las intenciones de los estudiantes (Camelo, Peñaloza, 2009). En los contextos rurales, las intenciones y las perspectivas de futuro expresadas por los estudiantes (ser alguien en la vida, tener trabajo y conseguir algo) ponen de presente referentes complejos de orden social y cultural. Mientras para algunos profesores el desinterés de los estudiantes narra las condiciones de vida cultural y social de los jóvenes, para la mayoría de los estudiantes el aprendizaje de las matemáticas es fuente de exclusión social.

Entre los años 2007 y 2009 integramos un equipo con profesores de un colegio público urbano para reinventar el currículo de matemáticas, colaborativamente, con una posición política que apostaba por el cambio y la inclusión en la escuela al posibilitar la construcción de subjetividades sociales.<sup>24</sup> Con la noción *escenario de aprendizaje* como herramienta teórica y metodológica para la investigación acerca del aprendizaje en contextos complejos de in(exclusión) articulamos las siguientes dimensiones: intencionalidades y disposiciones de los estudiantes; políticas del conocimiento matemático; contenido matemático del aprendizaje; interacciones entre profesor y estudiantes y entre estudiantes, y materialidad del aprendizaje. Movilizamos posibilidades de relacionar la dimensión epistemológica del eje del conocimiento matemático y el eje de constitución de nuevas subjetividades con temas

---

24 Entre el 2007 y 2009 desarrollamos la investigación *Reinventando el currículo y los escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática crítica* con la colaboración del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico de Bogotá (IDEP), Colciencias, la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad de Aalborg (Dinamarca).

educativos referentes a situaciones sociales reales cercanas a la vida social y económica. Intentamos, de un lado, articular y legitimar prácticas sociales en las que los estudiantes participan con las matemáticas, y de otro lado, permitir que los estudiantes encuentren motivos para participar en las diferentes actividades desde diferentes saberes. De este modo, los estudiantes pueden participar desde diferentes niveles y con diferentes roles en las actividades, aun si sus habilidades matemáticas son bastante diferentes. Las matemáticas *se esconden* tras estructuras y situaciones, el conocimiento matemático se centra en el uso y su importancia radica en las consecuencias éticas y sociales. El escenario es organizado en diferentes escenas. Cada escena es compuesta por diferentes estrategias pedagógicas para ofrecer flexibilidad en los procesos de participación en las actividades matemáticas y está soportada por un conjunto de recursos educativos que incluyen recursos tecnológicos y materiales didácticos. Los escenarios de aprendizaje incluyen la apertura a las formas de organización de los tiempos y de los espacios escolares definidos para el aprendizaje.

En el montaje del escenario “Espacialidad” nos basamos en resultados de estudios empíricos centrados en dos dimensiones: disposiciones e intenciones de los estudiantes y prácticas espaciales con las matemáticas en el contexto social y cultural de los estudiantes. Los análisis de las entrevistas y las observaciones nos permitieron establecer, como referente del escenario, los saberes espaciales en las vivencias de los estudiantes en relación con los conocimientos espaciales que transitan en el currículo (geográfico, ambiental y euclidiano). En el estudio de los saberes espaciales se incorporaron estrategias como narraciones y mapas representativos de los espacios sociales (familiares y escolares). Los estudiantes se vincularon colectivamente a las actividades propuestas exhibiendo diversas habilidades. Lo anterior ayudó a cambiar las propias visiones de los estudiantes sobre sus posiciones como estudiantes en la clase de matemáticas (Valero, García, Camelo, Mancera y Romero, 2012).

Es importante destacar que los estudiantes organizaron sus vivencias espaciales en una red de relaciones, eligiendo referentes relevantes, y construyeron saberes como el sociogeográfico y cultural del barrio donde habitan y donde se localiza la escuela. La aproximación realista condujo a que los cálculos que debían realizarse adquirieran significado en relación con la solución de cada situación y a preguntarse si los resultados eran pertinentes o no según el contexto.

Con base en los adelantos alcanzados en el montaje de los escenarios en la investigación desarrollada entre 2011 y 2014 buscamos responder la siguiente pregunta:<sup>25</sup> ¿Cómo se puede utilizar la noción de subjetivación para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos donde la exclusión (e inclusión) de los estudiantes de la participación en la clase de matemáticas es muy evidente y está relacionada con la exclusión (posibilidades de inclusión) social?

El propósito de la pregunta es reflexionar sobre la posibilidad de integración curricular como política de conocimiento, expresada en una transversalidad de temas o problemas fuera del universo educativo, pero cercanos a los intereses o preocupaciones de los alumnos como centro de organización. Lo anterior incluye saberes matemáticos vinculados a la vida social, política y económica de los estudiantes.

Los escenarios explorados por estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática,<sup>26</sup> interesados en el enfoque sociopolítico, se desarrollaron en condiciones naturales de las instituciones y clases de matemáticas. Fueron escenarios con referencias reales, cercanos a los intereses o preocupaciones de los estudiantes (“Viajar”, “Residuos sólidos”, “No le des la espalda a tu espalda”, “Matemáticas y loncheras

---

25 *Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases.* Colciencias, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad de Aalborg (Dinamarca) y Universidad Distrital Francisco José de Caldas. En este proyecto participaron cinco estudiantes de Maestría en Docencia de la Matemática, en la Universidad Pedagógica Nacional.

26 Martínez (2011), Parra y Rojas (2011), Navarrete (2013), Martínez y Páez (2015), Samboni y Chávez (2015), Gómez (2017).

saludables”). Las situaciones pusieron de presente una serie de habilidades y competencias culturales de los estudiantes y favorecieron su interacción permanente, aunque generaron dificultades con el desarrollo de las organizaciones curriculares institucionales, usualmente conformadas por piezas de contenidos matemáticos identificados lógicamente tanto en el tiempo como en los espacios de aprendizaje (Salazar, Mancera y Camelo, 2012).

Algunos de los estudiantes posicionados por su valoración como “perdedores” participaron con estrategias matemáticas no sistematizadas por la matemática escolar. Se organizaron por equipos para “indagar” sobre datos del mundo real (precios, calorías, diversas medidas), mientras otros se dedicaron a hacer cálculos. Las actividades iniciales buscaban el reconocimiento de lo que significa cada situación como problema complejo, la identificación de condiciones y la comprensión de principios básicos, incluidos algunos aspectos éticos relacionados con cada situación social. Por ejemplo, en el caso del escenario “No le des la espalda a tu espalda”, se analizaron las consecuencias para la salud que tenía el peso de las maletas escolares en la espalda. Las actividades incluían situaciones para usar y desarrollar habilidades matemáticas en acciones como: recolectar información, ilustrar relaciones o correlaciones, identificar dependencias, contar, medir, elaborar modelos matemáticos, construir y analizar gráficas, entre otros.

Un aspecto importante fue el uso de transiciones lingüísticas del lenguaje natural a uno matemático. La semántica del lenguaje natural permitió a los estudiantes hacer interpretaciones y discutir asuntos normativos. Por ejemplo, en el escenario “Viajar” ellos no consideraron el supuesto estándar de velocidad constante, pues los tiempos reales de parada del autobús fueron considerados dentro del tiempo real del viaje. Esto dio lugar a una gráfica discontinua de la velocidad. Los estudiantes utilizaron las matemáticas para describir las situaciones sociales y, en casi todos los escenarios, los argumentos que utilizaron estaban validados por la experiencia (comprar celular,

cargar la maleta, consumir comida chatarra, consumir agua, etc.). En general, los estudiantes comprendieron las conexiones entre las relaciones de las magnitudes involucradas en cada situación social con modelos simples como la función lineal.

## Aportes conceptuales

Al asumir la educación matemática y el aprendizaje de las matemáticas como prácticas sociales complejas constituidas en una multiplicidad de contextos en acción hemos mostrado la importancia de incluir, en el análisis de los procesos de exclusión, las relaciones entre diversas dimensiones interrelacionadas de las prácticas de educación matemática que tienen un impacto en aula. Específicamente, mostramos la importancia de generar ambientes de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en torno a la noción de *escenarios de aprendizaje* como una posibilidad de generar procesos de identificación y subjetivación entre diferentes estudiantes a quienes la organización tradicional de la clase de matemáticas posiciona como excluidos.

Al asumir que los estudiantes son sujetos constituidos por intenciones y disposiciones, su participación en el aprendizaje debe ser entendida como un acto deliberado, consciente e intencionado en donde ellos identifican las razones para aprender. Como avances conceptuales señalamos: el debilitamiento de los ambientes de aprendizaje ordenados y clasificados por las habilidades matemáticas de los estudiantes, la integración de las subjetividades a las intenciones curriculares y la exploración de los procesos de modelación matemática en la educación matemática básica.

Con el montaje de los escenarios y de los ambientes de aprendizaje hemos movilizad la relación entre la dimensión epistemológica del conocimiento matemático y el eje de constitución de las nuevas subjetividades sociales, específicamente en el nivel secundario de la educación colombiana. Consideramos que sin un análisis y cuestionamiento al *qué* de la inclusión estos procesos pueden seguir siendo

reducidos al ideal del logro de un todo unificado y objetivado en el que los estudiantes siguen siendo diferenciados a partir de nociones tácitas de normalidad. O la inclusión puede ser reducida a estrategias metodológicas para “integrar” o adaptar aquellos estudiantes reconocidos como “diferentes”. Compartimos que los procesos de exclusión de la clase de matemáticas son procesos políticos puesto que en la mayoría de los casos los desempeños de los estudiantes se privatizan y personalizan *a priori*, en vez de ser considerados como las oportunidades de aprendizaje que la estructura escolar, el contexto sociopolítico y los ambientes de aprendizaje abren para que los estudiantes perciban oportunidades de aprendizaje (Valero y García, 2012).

Destacamos el trabajo colaborativo entre investigadores, profesores y estudiantes como un espacio para generar un proceso de innovación y desarrollo del currículo escolar en matemáticas y también de aprendizaje y de desarrollo profesional de profesores de matemáticas, especialmente en cuanto a la (re)significación de saberes docentes, a partir del estudio sobre las prácticas escolares con las matemáticas. Es decir, propendemos por generar espacios donde los colectivos de trabajo entre los profesores del colegio y los profesores de las universidades puedan encontrarse con la intención de diseñar, reflexionar y constituir una propuesta para entender la investigación, la práctica de la enseñanza, el currículo, la institución educativa, la innovación ligada a la reflexión colectiva sobre la práctica y al desarrollo centrado en la misma escuela (Camelo y Peñaloza, 2009).

## Proyección

Nuestra línea de investigación nos impone el reto de participar en estructuras organizativas para consolidar redes académicas de investigación en temas como educación matemática, equidad y diversidad, y crear nuevas formas de relación, como las redes temáticas, para abordar cuestiones relacionadas con equidad y diversidad en educación.

A nivel conceptual, nos proponemos profundizar en las nociones de *escenarios de aprendizaje y ambientes de aprendizaje*, como herramientas teóricas y analíticas para acercarnos a las relaciones dialécticas entre diversas dimensiones de la práctica de la educación matemática y aportar así a las teorizaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas en contextos de exclusión. Esperamos profundizar también en el papel de la modelación, centrándonos en enfoques temáticos basados en una epistemología de uso de las matemáticas escolares. Pondremos de relieve el papel de la modelización en la comprensión del papel de las matemáticas en situaciones sociales relacionadas con el ambiente, la economía y el consumo.

En nuestros proyectos buscaremos profundizar en el rescate de la subjetividad en la educación matemática secundaria, configurada sobre posibilidades epistemológicas y políticas que puedan transformar los currículos y las didácticas de las matemáticas escolares. Un aspecto importante y necesario será trabajar con profesores en formación inicial y continuada para desestructurar las barreras institucionales, epistemológicas, psicosociológicas y culturales sobre el desconocimiento de proyectos interdisciplinarios que vinculen a las matemáticas.

## Balance general

El recorrido descrito por cada uno de los equipos que conforman el grupo Didáctica de la Matemática permite identificar como núcleo común, que ha mantenido unido a sus integrantes, una visión del aprendizaje de las matemáticas como un asunto complejo que tiene diversas aristas que atender. En los diferentes proyectos de investigación adelantados por los tres equipos procuramos interrogar el aprendizaje de las matemáticas bajo diversas perspectivas que han ido marcando la pauta de la investigación en educación matemática a nivel internacional y que permean la investigación hecha en Colombia.

En el proceso de convertirnos en investigadores, a partir de un propósito investigativo inicial común, los integrantes del grupo fuimos diversificando y especializando intereses, así como agrupándonos en equipos según las dinámicas profesionales de cada uno, con el objetivo de profundizar en dominios matemáticos y fenómenos involucrados en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, hemos procurado una sana interacción como grupo, lo cual que nos ha permitido apoyarnos y fortalecernos mutuamente, respetando la diversidad de enfoques.

Los aportes del ejercicio investigativo a la comunidad y su impacto en el país se resumen en:

- La participación en el desarrollo de políticas públicas, incluido el aporte a la formulación de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998); la participación en la construcción de los estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006); comentarios críticos a dos versiones de Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015), y cuestionamientos a las políticas educativas de inclusión para las matemáticas escolares.
- La formación de profesores de matemáticas inicial y continuada, con la formulación de espacios académicos para los programas de pregrado y postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional; la asesoría a otras universidades para la apertura de programas de postgrado (Universidad de la Amazonía, Universidad del Chocó, Universidad del Magdalena, Universidad de los Llanos); la dirección de trabajos de grado y tesis; la vinculación de estudiantes y profesores en proyectos de investigación; la participación con cursos cortos y conferencias en diferentes universidades del país, y la producción de textos escolares.
- La participación de los integrantes del grupo en diferentes eventos que convocan a la comunidad de educación

matemática (Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Encuentro Colombiano de Educación Estadística, Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, encuentros regionales de educación matemática, etc.).

- La publicación de resultados de investigación en libros (Grupo Interno de Trabajo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional, Fondo Editorial de la Universidad Distrital, Editorial Grao) y revistas científicas tales como *Educational Studies in Mathematics*, *Boletim de Educação Matemática (Bolema)*, *Enseñanza de las Ciencias*, *Educación Matemática*, *ReLime*, *Epsilon*, *Voces y Silencios*, *Lecturas Matemáticas*, *Tecné*, *Episteme & Didaxis (TED)*, *Revista Colombiana de Educación*, etc.

En la producción investigativa de los tres equipos se evidencian diferencias tanto conceptuales como de frecuencia y cuantía, que son cabal y permanentemente reconocidas por los equipos mismos. Varios factores son determinantes de tales diferencias. Uno de ellos es el área específica que abordan y los enfoques teóricos que sustentan los procesos investigativos, los cuales tienen desarrollos desiguales a nivel internacional. Otro factor determinante es el número de integrantes de cada equipo y las alianzas que han podido establecer con otros grupos o investigadores. En particular, el equipo EdEst, que tiene la menor producción, cuenta en este momento con solo dos integrantes e infortunadamente no ha podido establecer cooperaciones con grupos externos. El ejercicio de hacer un balance como el presentado e identificar nuestras fortalezas nos hace ver en perspectiva la posibilidad de un enriquecimiento académico, convirtiéndonos en tres grupos diferentes pero dispuestos a trabajar en red. Esto nos permitirá avanzar en la consolidación de las líneas de investigación y dar apertura al surgimiento de nuevos derroteros.

## Referencias

- Aldana, Y. y Vargas, H. (2008). *Aplicación del análisis de factores en un estudio sobre actitudes de profesores de secundaria hacia la estadística*. Tesis de pregrado, Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Alrø, H., Skovsmose, O., y Valero, P. (2005). Culture, diversity and conflict in landscapes of mathematics learning. In M. Bosch (ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1141-1152). Barcelona: ERME, Universitat Ramon Llull. Recuperado de <http://ermeweb.free.fr/CERME4/>
- Amaya, J. y Espitia, S. (2007). *Conocimiento respecto a la resolución de problemas combinatorios en estudiantes de profundización de la Licenciatura en Matemáticas*. Tesis de pregrado, Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Andrade, L., Fernández, F. y Álvarez, I. (2017). Panorama de la investigación en Educación Estadística desde tesis doctorales 2000-2014. *Tecné, Episteme & Didaxis (TED)*, 41, 87-107.
- Batanero, C y Godino, J. (2005). *Perspectivas de la educación estadística como área de investigación*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/articulos/perspectivas.pdf>.
- Camacho, L. y Landázuri, M. (2009). *Concepciones de desviación estándar en estudiantes de educación media*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Camargo, L. y Samper, C. (2014). Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica. En G. Arenas y S. Roa (eds.),

- Memoria VIII Simposio Nororiental de Matemáticas* (pp. 249-268). Bucaramanga: Publicaciones Universidad Industrial de Santander.
- Camargo, L. y Sandoval, I. T. (2017). Acceso equitativo al razonamiento científico mediante la tecnología. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 179-211.
- Camargo, L., Perry, P., Samper, S., Molina, Ó., y Saénz-Ludlow, A. (2015). Mediación Semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 99-116.
- Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Revista Educación Matemática*, 17(3), 53-76.
- \_\_\_\_\_. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (volumen especial), 371-383.
- Camelo, F. y Peñaloza, G. (2009). El trabajo colaborativo como una estrategia para la formación continuada de profesores. En G. García, P. Valero, F. Camelo, G. Mancera, J. Romero, G. Peñaloza y S. Samacá, *Escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática crítica* (pp. 9-22). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Canada, D. (2004). *Elementary preservice teachers' conceptions of variation*. Tesis doctoral. Portland State University, Portland, Oregon.
- Campos, C. (2016). *Towards Critical Statistics Education. Theory and practice*. Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design*

*in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13.

delMas, R. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning: A commentary. *Journal of Statistics Education*, 10(3), doi: 10.1080/10691898.2002.11910679.

Echeverry, A., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 73-88.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2012). *Variación y diseño de experimentos de enseñanza para la educación estadística*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

\_\_\_\_\_. (2013). La búsqueda del espacio muestral “original”. Una necesidad para la enseñanza. En A. Salcedo (ed.), *Educación estadística en América Latina: tendencias y perspectivas* (pp. 81-98). Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N. (2008a). *Estadística y probabilidad en la escuela secundaria. Un estudio acerca del contexto, actitudes y conocimiento estocástico del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

\_\_\_\_\_. (2008b). *Conocimiento estadístico y probabilístico de profesores de educación básica y media*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F. y Andrade, L. (2010). An experience in curriculum design for high school statistics education. Ponencia presentada en ICOTS8.

Recuperado de [http://iase-web.org/documents/papers/icots8/icots8\\_C260\\_FERNANDEZ.pdf](http://iase-web.org/documents/papers/icots8/icots8_C260_FERNANDEZ.pdf).

Fernández, F., Andrade, L. y Álvarez, I. (2013). *Experimentos de enseñanza y razonamiento estadístico en situaciones de probabilidad e inferencia estadística*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

\_\_\_\_\_. (2014). *Noción de intervalo de confianza con estudiantes universitarios*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

\_\_\_\_\_. (2016). *Panorama de la investigación en Educación Estadística*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

\_\_\_\_\_. (2017). *La investigación en Educación Estadística en el DMA-UPN: una mirada para transformar*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2010). *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria*. Reporte de investigación. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

García, G. (2015). Aproximación a los procesos de (in)exclusión en el aula de matemáticas. En N. Planas (ed.), *Avances y realidades de la Educación Matemática. Crítica y fundamental* (55-71). Barcelona: Editorial GRAO.

García, G. y Montejo, J. (2012). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de Matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. *Voces y Silencio. Revista Latinoamericana de Educación*, 2(2), 128-138.

Gómez, E. A. (2017). *Prácticas de medición y espacios de reforestación*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mancera, G., Camelo, F. J., Salazar, C., y Valero, P. (2012). Disposiciones, intenciones y acciones una vía para negociar y construir campos semánticos para las clases de matemáticas. *III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y Formación Docente*. Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad del Valle.
- Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM*, 41(4), 427-440.
- \_\_\_\_\_. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.
- Martínez, D. y Páez, O. P. (2015). *Un ambiente de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
- Martínez, E. (2011). *Estudio del aprendizaje de las matemáticas basado en proyectos. Tensiones educativas en su implementación en una escuela de estudiantes en posición de frontera*. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Educación Matemática. Universidad de Valle.
- Ministerio de Educación Nacional, Colombia (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: MEN.
- \_\_\_\_\_. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas, lenguaje, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- \_\_\_\_\_. (2015). *Derechos básicos del aprendizaje*. Bogotá: MEN.
- Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema de Localización de Puntos. *Educación Matemática*, 27(2), 37-66.

- Navarrete, E. (2013). *Procesos de coflexión y deliberación en ambientes de aprendizaje. ¿Cuánta agua gastamos?* Tesis de Maestría, Maestría en Docencia en la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Vol. 1. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Oliveira, L. (2010). *Educação Estatística Crítica: uma possibilidade?* Tesis de Maestría, Maestría en Educación Matemática. Universidad Estadual Paulista, Instituto de Geociencias e Ciencias Exatas, Campus de Rio Claro-Sao Paulo, Brasil.
- Parra, D. y Rojas, J. (2011). *Matemáticas y loncheras saludables*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia en la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Perry, P., Samper, C. y Camargo, L. (2006). Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri, IberoCabri 2006*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/929/>.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, O. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En A. Cano, F. Contreras y E. Olvera (eds.), *Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de Enseñanza Matemática*. Recuperado

de [http://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11652/1/ruiz\\_2006.pdf](http://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11652/1/ruiz_2006.pdf).

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. México: Instituto Politécnico Nacional.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Recuperado de [http://www.icme12.org/data/ICME12\\_Pre-proceedings.zip](http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip).

Salazar, C., Mancera, G. y Camelo, F. J. (2012). Ambientes de aprendizaje e intersubjetividad. En G. García y P. Valero (eds.), *Procesos de Inclusión/Exclusión. Subjetividades en educación matemática* (pp. 77-114). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samboni, T. y Chávez, A. (2015). *No les des la espalda a tu espalda*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Samper, C., Camargo, L. y Leguizamón, C. (2003). *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina. (2012). Un ejemplo de articulación de la lógica y la geometría dinámica en un curso de geometría plana. *Tecné, Episteme y Didaxis (TED)*, 32, 125-139.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Ruiz, M. (2006). ¿Apoya Cabri la práctica de justificación? *Epsilon*, 66, 395-410.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, O. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 35-50.

- Valero, P. y García, G. (2012). El currículo de las matemáticas escolares y el gobierno del sujeto moderno. *Revista Bolema* 28(49), 491-515.
- Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G. y Romero, J. R. (2012). Mathematics education and the dignity of being. *Phytagoras* 33(2), artículo n.º 171.
- Vosniadou, S. (2002). On the nature of naive physics. En M. Limon y L. Mason (eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 61-76). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. En I. Gal y J. Garfield (eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press and International Statistical Institute.
- Zambrano, J. y Palacios, R. (2009). *Razonamiento estadístico de estudiantes de secundaria al comparar conjuntos de datos representados mediante gráficos de caja*. Tesis de Maestría, Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Este libro fue editado por el Grupo Interno de Trabajo Editorial  
y la Subdirección de Gestión de Proyectos-CIUP de la  
Universidad Pedagógica Nacional, se compuso en caracteres  
Minion Pro y fue impreso por Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.,  
Bogotá D. C., Colombia.

Más de cuarenta años de investigación educativa del país se expresan hoy en los aportes que la Universidad Pedagógica Nacional ha hecho a través del CIUP. En este proceso, la trayectoria de los grupos de investigación, algunos de los cuales registran su existencia desde 1978, ha evidenciado la amplia y prolífica producción académica de los profesores, la cual ha sido difundida a través de diferentes medios (digitales e impresos) y variados escenarios de discusión.

Con el propósito de hacer un balance de esta producción intelectual y de visibilizar la trayectoria investigativa de los grupos de la Universidad, el Centro de Investigaciones-CIUP, el Grupo Interno de Trabajo Editorial y el Comité de Publicaciones invitaron a los grupos de investigación a formar parte de la Colección CIUP 41 años y finalmente quince grupos de la Universidad atendieron esta iniciativa, que responde a los propósitos establecidos en el *Plan de Desarrollo Institucional 2014-2019: Una universidad comprometida con la formación de maestros para una Colombia en paz.*



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



ISBN: 978-958-5416-85-7



9 789585 416857