

**La medición de una variable de estado desde el contexto clásico y desde el
contexto cuántico**

Trabajo de Grado para optar por el título de

Licenciado en Física

Departamento de Física

Universidad Pedagógica Nacional

Julián Andrés Malaver Montoya

Asesor: Mauricio Rozo Clavijo

Febrero de 2016

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La medición de una variable de estado desde el contexto clásico y desde el contexto cuántico.
Autor(es)	Malaver Montoya, Julián Andrés
Director	Rozo Clavijo Mauricio
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 87 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	MECÁNICA, SISTEMA, ESTADO, MEDIDA, SUPERPOSICIÓN, AMPLITUD DE PROBABILIDAD, VARIABLE DINÁMICA, OPERADOR, VECTOR DE ESTADO.

2. Descripción
<p>Trabajo de grado que se propone una comparación de los conceptos básicos de la mecánica clásica y la mecánica cuántica, permitiendo hablar sobre las mediciones cuánticas y sobre cómo se constituye la medición en el eje fundamental de esta teoría.</p> <p>La comparación se inicia describiendo los sistemas que se estudian en cada teoría y su caracterización en cada uno de los contextos. La forma de describir a los sistemas o de dar toda la información posible es a través del estado de cada sistema, en donde el estado clásico puede ser determinado con total precisión y el estado cuántico está destinado a determinarse como una amplitud de probabilidad cuando se efectúe una acción a través de la observación.</p> <p>Posteriormente el trabajo se enfoca en los aspectos generales de la medición y de cómo observar o medir le asigna el carácter probabilístico a la física cuántica, pues es a través de la acción que se ejerce sobre el sistema desde donde se configura el principio de superposición, el principio de incertidumbre y demás aspectos que configuran la mecánica cuántica.</p>

3. Fuentes
<ul style="list-style-type: none"> • A.C. Baird.(1991). Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experiencias. México: Prentice Hall Hispanoamericana. • Albert, David Z. (1994, Mayo). Bohm's Alternative to Quantum Mechanics. Scientific American 270: pp. 58–67. • Ayala, M. & Barragán J. (2012). Representación Geométrica de las Coordenadas

Generalizadas en la Mecánica Hamiltoniana, Presentación Covariante, Grupo Física y Cultura, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 1-10.

- Berkely. (1986). Física Estadística. Universidad de California. Pg. 92-96.
- Cormick, M. Cecilia (2009). Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia. Tesis Doctoral en el área de ciencias físicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- De la Torre, Alberto Clemente. (2000). Física cuántica para filo-sofos. México: La ciencia para todos.
- Dirac, P. (1958). Principios de mecánica cuántica. Bristol, Reino unido Vol I. Pg. 2-15.
- Feynman, R. (1946) *Apuntes de Física*. California, E.E.U.U. Vol. I y Vol. III.
- Greca, Ileana M. y Herscovitz, Victoria E. (2002). Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. Brasil: Campus do Vale.
- Mengual C. (2005). La imagen compleja: La fenomenología de las imágenes en la era de la cultura visual. España: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Sommerfeld, A. (1952). Mechanics, Lectures and theoretical physics, Vol I. University of Munich. New York. N.Y. Academic Press Inc, Publishers 1952.

4. Contenidos

El trabajo de grado surge bajo la crítica que se hace a la carencia de elementos en la enseñanza de la mecánica cuántica, que permiten el aprendizaje del significado de la medición de una variable dinámica. Por una parte, se dejan de lado las diferencias o posibles relaciones que se pueden obtener con la medición de las variables desde el contexto clásico, y por otra parte, existen analogías, ejemplos y representaciones que obstaculizan el paso de interpretación del observador clásico al observador cuántico. En este orden de ideas, los maestros y los estudiantes necesitan elementos conceptuales que respondan a una interpretación y comprensión de la noción de medida.

Por lo cual se propuso hacer un análisis alrededor de la medida en mecánica cuántica que permitiera encontrar dichos elementos. Para conseguir este objetivo, en primera medida se consultó tesis donde se habían identificado dificultades que tienen los estudiantes en torno a la comprensión de la mecánica cuántica. Posteriormente se hizo una consulta en textos originales de autores que construyeron la mecánica cuántica como Feynman, R., y Dirac, P., con el fin de rescatar aspectos conceptuales que se pierden en los textos actuales. Finalmente se mantuvo una comparación de las características en mecánica clásica y mecánica cuántica durante la elaboración del escrito.

En la búsqueda de un texto de tipo comparativo se construyó cuatro capítulos de los cuales el primero es una aclaración del objeto de estudio de la mecánica clásica, en él se presenta una definición de sistemas, algunos ejemplos de sistemas clásicos, el estado desde la mecánica Hamiltoniana y el diagrama de fases. El segundo capítulo es una contextualización sobre la medición clásica de variables, las incertidumbres y el tipo de acción que se ejerce sobre un sistema clásico cuando se observa. A los siguientes dos capítulos les atañe la mecánica cuántica, donde se abordan homológamente los mismos asuntos que en cada uno de los

primeros capítulos, con las características naturales del escenario cuántico.

En los dos últimos capítulos es donde se hace efectiva la comparación de los aspectos sobre los contextos clásico y cuántico, además es donde se permite definir lo pequeño y lo grande y encontrar extrapolaciones clásicas que son perjudiciales en el aprendizaje del concepto de medida en mecánica cuántica.

Por último se concluye que hacer análisis de conceptos desde la comparación, ayuda a contrastar ideas y sugerir otras más, enriqueciendo el proceso de análisis

5. Metodología

La metodología usada es una metodología cualitativa, en donde se buscó comprender aspectos generales de la teoría cuántica, más que establecer relaciones de causa-efecto o relaciones en una población.

Por otra parte se consultó textos originales, que sirvieron para hacer los análisis y las comparaciones en los ámbitos clásico y cuántico.

6. Conclusiones

- El estado mecánico clásico se determina conociendo las variables de posición y momento.
- El estado cuántico no es posible describirlo a partir de las variables de posición y momento, incluso no se pueden obtener precisamente ambos valores simultáneamente.
- En la mecánica clásica la acción que se le hace al sistema es despreciable y la incertidumbre asociada a la medición de una magnitud puede ser excluida.
- En mecánica cuántica la acción que se hace sobre el sistema no puede ser excluida, debido a la perturbación que se hace sobre este.
- Lo grande y lo pequeño se debe definir de manera absoluta. El tamaño se define a partir de las acciones que se efectúan sobre el sistema cuando se observa.
- El estado clásico y el estado cuántico se pueden escribir como una superposición de estados, la diferencia se establece cuando se observa el sistema. Por el lado clásico el sistema sigue en el mismo estado sin afectarse de manera significativa, mientras que el sistema cuántico se ve afectado cuando se observa y queda en uno de los estados propios del observable que se mide.
- Es posible determinar en mecánica cuántica, la posición y el momento de un sistema simultáneamente, pero no es posible hacerlo con toda la precisión.
- Se reconoce que existen dificultades sobre el concepto de medida. Estas dificultades están relacionadas con el uso de explicaciones clásicas para abordar el concepto de medida en mecánica cuántica.
- La medida en mecánica cuántica constituye el eje fundamental para su enseñanza, ya que comprender el proceso de medición a nivel atómico permite construir un modelo

conceptual.

- Mostrar las maneras de abordar el concepto de medida en mecánica clásica y en mecánica cuántica, proporciona elementos para un mejor aprendizaje.

Elaborado por:	Julián Andrés Malaver Montoya
Revisado por:	Mauricio Rozo Clavijo

Fecha de elaboración del Resumen:	19	02	2016
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDOS

Introducción.....	3
Capítulo I. Objeto de estudio de la mecánica clásica.....	6
· Sistema clásico.....	6
· Estados del sistema desde la mecánica Hamiltoniana.....	7
Capítulo II. Sobre la medición clásica.....	14
· Exactitud y precisión.....	14
· Errores en la medición.....	16
Capítulo III Objeto de estudio de la mecánica Cuántica.....	18
· Sistema Cuántico.....	18
· Estados del sistema.....	20
· Amplitudes de probabilidad.....	25
Capitulo IV. Sobre la medición cuántica.....	28
· Principio de incertidumbre.....	29
· Operadores.....	29
· Ecuación de valores propios.....	31
Conclusiones.....	37
Referencias.....	38
Apéndices.....	40
· Apéndice I.....	40
· Apéndice II.....	65
· Apéndice III.....	69
· Apéndice IV.....	75
· Apéndice V.....	77

INTRODUCCIÓN

Existen diferencias en el significado de la medición de una variable dinámica desde el contexto clásico y desde el contexto cuántico. La ausencia de analogías entre las medidas realizadas desde los dos contextos y los fenómenos contraintuitivos que son para el observador clásico, como la multiplicidad de posiciones en un mismo tiempo de un electrón, un átomo o un fotón y la imposibilidad de tener certeza previa a la medición del lugar o la forma en que se encuentran estas partículas, configuran inconvenientes en la comprensión del proceso de medición en mecánica cuántica para los estudiantes en general.

Greca (2002) citando a (Johnston et al., 1998), sustenta “Las investigaciones relativas a las ideas de estudiantes universitarios sobre conceptos cuánticos, aunque desarrolladas desde marcos teóricos distintos, parecen coincidir en mostrar que el conocimiento adquirido en las disciplinas que introducen esos temas es en general superficial, a menudo no son más que una colección de hechos aislados útiles para la aprobación de dichas disciplinas”.

En la enseñanza de la mecánica cuántica se proporcionan pocos elementos para el aprendizaje del significado que tiene la medición de una variable dinámica. Por una parte, se dejan de lado las diferencias o posibles relaciones que se pueden obtener con la medición de las variables desde el contexto clásico, y por otra parte, existen analogías, ejemplos y representaciones que obstaculizan el paso de interpretación del observador clásico al observador cuántico. “Los libros de texto, con raras excepciones dejan de lado los aspectos conceptuales que hacen importante la interpretación de la mecánica cuántica” (de la Torre, 2000). En este orden de ideas, los maestros y los estudiantes necesitan elementos conceptuales que respondan a una interpretación y comprensión de la mecánica cuántica y en particular de la noción de medida.

Por lo anterior, este trabajo es el producto de una investigación cualitativa que pretendió cumplir con el objetivo principal de hacer un análisis sobre la medición de una variable de estado desde la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Para cumplir tal propósito se propuso recolectar las dificultades que identifican otros autores en la comprensión de la medida en mecánica cuántica (en la tabla I), para posteriormente rebatirlas mediante una consulta bibliográfica en textos originales, de escritores como Richard Feynman o Paul Dirac, en los que aún se conservan o se pueden atrapar aspectos cualitativos que promueven el entendimiento de la mecánica cuántica.

DIFICULTADES
La notación en mecánica cuántica se convierte en un fuerte inconveniente al momento de asignarle sentido sintáctico a la teoría. La ignorancia de la notación acarrea problemas semánticos y con ello obstáculos en el proceso de comprensión. Cormick, M. (2009)
Combinar la noción de los conceptos en mecánica clásica con los de mecánica cuántica, impide que algunos fenómenos tengan significación o permite tergiversar las posibles explicaciones a dichos fenómenos. Rojas, D. (2012)
Es imprescindible abordar en la dimensión de la medida conceptos o procesos como: los resultados de la interacción entre el sistema observado, el aparato de medición y el observador. Pero en realidad no es claro quién es el observador o el aparato de medida y tampoco la manera en que interactúan. Cormick, M. (2009)
Se desconoce en la enseñanza de la teoría cuántica, las maneras en que se miden experimentalmente las variables dinámicas. Se usa algebra lineal para medir indirectamente estados de un sistema que no se conoce, mediante un aparato que no se conoce y con procedimientos relegados a un grado de importancia diminuto. Mora, Isabel. (2004)
No se presenta de forma clara la distinción entre observar, medir y experimentar, sus significados y papeles se pierden ilusoriamente cuando se habla de medición. Rojas, D. (2012)
La presencia de diagramas y representaciones en mecánica cuántica no colabora con permitir al lector concebir las formas reales de obtención de datos y en ocasiones son insuficientes cuando es pertinente una simbolización de los procesos de medición. Mora, Isabel. (2004)
La existencia de varias interpretaciones, impide entender los fenómenos de una forma neutral y oscurece el sentido, adquiriendo contradicciones entre las interpretaciones que se suman a las que existen entre la teoría y la experiencia macroscópica. Cormick, M. (2009)

Tabla I. Dificultades que se presentan en la enseñanza y/o comprensión de la mecánica cuántica, reconocidas por distintos autores

En la búsqueda de un texto de tipo comparativo se construyó 4 capítulos de los cuales el primero es una aclaración del objeto de estudio de la mecánica clásica, en él se especifica el sistema y estado en el contexto clásico. El segundo capítulo es una contextualización sobre la medición clásica de variables. A los siguientes dos capítulos les atañe la mecánica cuántica, donde se abordan homológamente los mismos asuntos que en cada uno de los primeros capítulos, con las características naturales del escenario cuántico.

El trabajo busca atacar en gran medida, el problema relacionado al uso de explicaciones clásicas en ámbitos cuánticos, mediante la comparación de ambos contextos y de las características de cada teoría. A lo largo del trabajo, se tratan algunas de las dificultades de la tabla I, se establecen definiciones concretas sobre el sistema y estado, ubicando el objeto de estudio de la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Se logra proponer una forma de introducir la notación de kets a partir del experimento de polarizadores, aunque otros autores han usado este experimento, se consiguió diagramar los experimentos de una forma sencilla para que se facilite la comprensión de un vector de estado. A su vez, se permite discutir sobre la similitud entre lo que significa experimentar, medir y observar. Al final de esto se dan explicaciones que están en procura de solucionar preguntas que surgen al momento de abordar la mecánica cuántica.

La incapacidad de predicción exacta de la mecánica cuántica ha dado lugar a preguntas filosóficas sobre el libre albedrío del mundo o que el mundo es incierto o un sistema caótico. Cuando las ideas filosóficas asociadas con la ciencia se trasladan a otros campos, generalmente se las distorsiona completamente. En lo posible, se debe limitar los comentarios a la física misma y es por ello que la interpretación más adecuada, es la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, llamada interpretación de Copenhague o interpretación estadística.

CAPITULO I

OBJETO DE ESTUDIO DE LA MECÁNICA CLÁSICA

EL SISTEMA CLÁSICO

Un sistema es cualquier entidad definida o aislada que funciona de una manera específica y puede estar o no compuesta por algunas partes o subsistemas. Los sistemas clásicos son característicos porque el movimiento en el que se ven involucrados, es a bajas velocidades en relación a la velocidad de la luz. Otra manera de definir un sistema clásico, es a partir de la interacción con un observador, puesto que los sistemas clásicos siguen actuando de la misma manera cuando se les observa.

El objeto de estudio de la mecánica clásica son los sistemas mecánicos, los sistemas en los que se contemplan únicamente las propiedades relacionadas al movimiento, pese a que en el fenómeno físico participen interacciones electromagnéticas.

Un péndulo simple en La Tierra es un sistema mecánico que está compuesto por un soporte, un hilo y una masa. Es posible hacer oscilar el péndulo cuantas veces se quiera y para variar el experimento, se puede modificar la longitud del hilo y las condiciones iniciales según las cuales comienza el movimiento. Las variables que se logran manipular son pocas, incluyen sólo la frecuencia de oscilación y la amplitud de oscilación. La conexión entre los parámetros de entrada y las variables manipuladas es relativamente directa, de tal manera que es sencillo controlar la frecuencia de oscilación si se varía la longitud del hilo.

Así como poner a oscilar un péndulo es un experimento reproducible varias veces, de una manera similar se puede experimentar con cualquier sistema clásico. Poder reproducir el experimento y controlar el comportamiento del sistema, es una característica particular de los sistemas clásicos. Esto es debido a que los sistemas clásicos se pueden percibir y también interactuar tangiblemente con ellos, o en el peor de los casos se pueden observar periódicamente como algunos sistemas planetarios.

En la tabla 1.1 se muestran algunos ejemplos de sistemas en la mecánica clásica que es válido tener en cuenta para ubicar su objeto de estudio. Debido a que es en La Tierra donde ocurren o

desde donde observamos los fenómenos que estudiamos, generalmente se obvia la acción gravitacional, no obstante, los sistemas están incompletos sino se incluye y solo en casos particulares es conveniente despreciarla para excluir el rozamiento.

EJEMPLOS DE SISTEMAS MECÁNICO – CLÁSICOS
Un objeto en caída libre o movimiento parabólico, en un campo gravitacional.
Uno o varios objetos sujetos a una soga en un campo gravitacional: polipasto; péndulo simple, doble, triple, etc.
Objetos que se mueven libremente o ligados, sobre un plano inclinado o sobre una superficie horizontal, en un campo gravitacional.
Objetos que se atraen con una fuerza proporcional a la inversa de la distancia que las separa: atracción gravitacional; problema de 2, ..., n cuerpos.
Objetos que se atraen con una fuerza proporcional a la distancia que las separa: objetos sujetos a un medio elástico: atracción elástica.
Un objeto en movimiento circular uniforme o en rotación sobre un eje, en un campo gravitacional.

Tabla 1.1. Ejemplos de sistemas mecánicos en forma general.

Pese a que son distintos los sistemas de la tabla 1.1, son todos ellos mecánicos, porque de su comportamiento lo que se ha decidido estudiar es el movimiento, así que debe existir una forma de caracterizar a los sistemas mecánicos, a partir de la manera en que se encuentran o en relación con el movimiento en algún tiempo determinado.

ESTADOS DEL SISTEMA DESDE LA MECÁNICA HAMILTONIANA

A la forma de estar el sistema con relación a una cualidad de movimiento, se le llama estado mecánico. El sistema puede estar de distintas formas a propósito de sus cualidades mecánicas en distintos instantes de tiempo. Es posible rastrear cualquier sistema a partir del cambio de su posición y su momento.

De la mecánica clásica existen varias formulaciones, la más común es la Newtoniana. En la solución de una ecuación diferencial, generalmente de segundo orden, se es capaz de decir cómo se halla el sistema en cada instante de tiempo, es decir, se describe el estado del sistema. La

ecuación de movimiento de un péndulo simple sería $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ y el estado queda caracterizado por sus soluciones de velocidad angular y posición angular, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t$ y $\theta = \theta_0 \sin(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$. Estas soluciones son la forma Newtoniana de conocer cómo evoluciona temporalmente el sistema.

La mecánica Hamiltoniana es una formulación de la mecánica clásica, es la forma más general de abordar un sistema mecánico y todas las posibles formas de interacción del sistema. En este contexto, la representación de fuerzas pierde relevancia y la obtiene la de trayectorias e interacciones constantes. Aunque al principio dicha formulación sea más difícil de comprender, debido a la poca información que relaciona, tienen la ventaja que permite introducir el espacio de fase, que es una manera cómoda y global de hablar del estado mecánico.

A partir de consideraciones físicas, como que el sistema está aislado y que las fuerzas que actúan son conservativas, se puede afirmar que el Hamiltoniano es la energía mecánica del sistema. ($H = T + U$). En mecánica Hamiltoniana el estado de configuración y el estado de movimiento caracterizan al estado mecánico del sistema. El estado de configuración es una cualidad que se refiere a la forma de estar el sistema en lo que respecta a su posición, y el estado de movimiento es una cualidad relacionada a los momentos del sistema.

Estado de Configuración

A continuación se considera un ejemplo en el que se construyó el Hamiltoniano (Apéndice I) y se esquematiza el espacio de fase. Es el caso en que dos masas se atraen con una fuerza proporcional a la distancia que las separa.

El estado de configuración está estructurado por las variables que describen la trayectoria de un sistema, un objeto que se mueve en 3 dimensiones, necesitaría 3 variables para describir completamente su posición o el estado de configuración. No obstante, las interacciones del sistema crean algunas restricciones o ligaduras, que permiten descubrir movimientos independientes y a cada uno de ellos asignarles una variable independiente. De este modo el movimiento en tres dimensiones que poseen las dos masas, pueden ser interpretados como dos movimientos independientes sobre un plano.

La primera variable R , es la distancia que separa las dos masas y relaciona el movimiento de atracción. Esta variable toma los valores de $0 < R < \infty$.

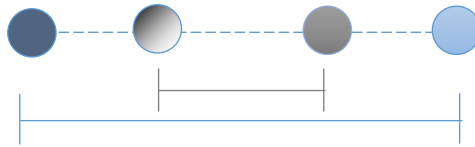


Fig. 1.1. Coordenada generalizada R , la distancia que separa las masas.

El segundo movimiento es de rotación, queda caracterizado por la variable θ que toma los valores de $0 \leq \theta < 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \mid n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

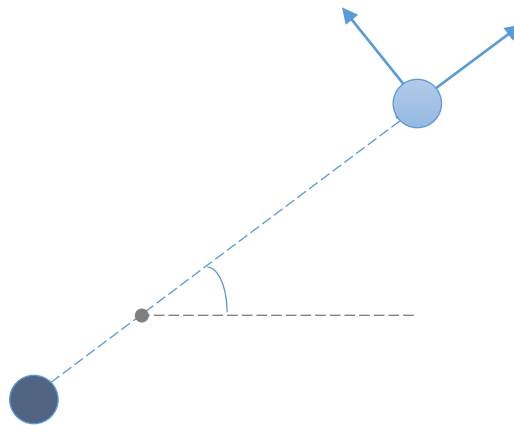


Fig. 1.2. Coordenada generalizada θ : ángulo que barre el sistema desde algún lugar de referencia.

Los vectores unitarios correspondientes a cada una de las dos variables en la figura 1.2, son vectores orto normales y son la base del plano en el cual se mueve el sistema.

Estado de Movimiento

Los cambios netos sobre el sistema son cero, de tal manera que los cambios de configuración son contrarrestados por los cambios de movimiento y se mantiene el Hamiltoniano constante ($\Delta H = \Delta T + \Delta U = 0$).

El estado de movimiento, se precisa por los momentos conjugados. Los momentos generalizados están escritos en términos de las coordenadas generalizadas y presentan una relación con el estado de configuración; debido a eso es llamada variable conjugada, que debe ser pensada como una cualidad independiente y susceptible de ser medida.

El Hamiltoniano

Para entender la dinámica del sistema se debe entender la manera en que se encuentran articulados los cambios de tales cualidades, teniendo en cuenta que el cambio de cada cualidad esta dado en términos de sus respectivas variables, surge la necesidad de hablar de una medida común, una que exprese en los mismos términos todos los cambios del sistema. La energía cinética precisa los cambios de movimiento, que completa junto con los cambios de configuración los cambios totales del sistema. Como se reconoció que los cambios totales de energía en el sistema son cero, ya que el sistema es conservativo y no se pierde ni se gana energía al encontrarse aislado.

Después de hacer la formalización y construir las energías cinética y potencial (apéndice I), el Hamiltoniano $H = T + U$ queda escrito como:

$$H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu R^2} + \frac{kR^2}{2} \quad (1.1)$$

Los dos primeros términos corresponden a la energía cinética del sistema y el tercero a la energía potencial. La energía potencial obtenida es similar a la que se consigue por las ecuaciones de Newton, para el caso de dos masas sujetas a un resorte. P_R es el momento en la dirección de R , P_θ es el momento angular, R es la distancia que separa las dos masas, k es una constante debida al medio de interacción y μ es la masa reducida del sistema $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1}$.

Espacio de Fase

Al espacio definido por las variables de configuración R y θ , y las variables de movimiento P_R y P_θ o de manera general $(q_j's)$ y $(P_j's)$ se le denomina espacio de fase del sistema. Cada punto de este espacio $2f$ dimensional, donde f el número de grados de libertad del sistema, determina una de muchas formas de estar el sistema. El dominio de los valores que pueden tomar estas variables define la región del espacio donde es posible encontrar todos los estados que el sistema puede adoptar en cualquier momento y bajo las condiciones iniciales que se establezcan. La evolución del sistema, por su parte, está representada por una curva del espacio de fase y el conjunto de curvas de evolución representa el diagrama de fase del sistema.

La variación en el tiempo de cada estado se define como la variación del Hamiltoniano respecto a las coordenadas y momentos generalizados, obteniendo así 4 ecuaciones diferenciales temporales para el ejemplo:

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial P_R} = \frac{P_R}{\mu}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{\mu R^2}$$

$$\dot{P}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{P_\theta^2}{\mu R^3} - kR$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

El espacio de fase de éste sistema tiene 4 dimensiones, correspondientes a los dos grados de libertad cumpliendo con $2f = 2 \cdot 2 = 4$. Sin embargo el Hamiltoniano no es función de θ , sino que lo es de los momentos generalizados y la coordenada generalizada R , $H(R, P_R, P_\theta)$ con $P_\theta = \text{constante}$. La superficie tetra dimensional del espacio de fase, puede ser representada en su totalidad por la superficie tridimensional formada por una función de (R, P_R, P_θ) o por una bidimensional sabiendo que P_θ no varía.

Las curvas de fase son llamadas trayectorias de fase y tienen una dirección, es la dirección en que evoluciona el sistema. Para este sistema las curvas se forman a dextrógiro. Como las ecuaciones de Hamilton no tienen solución analítica, se recurre a recursos computacionales y métodos numéricos (Apéndice II) para la construcción del diagrama de fase.

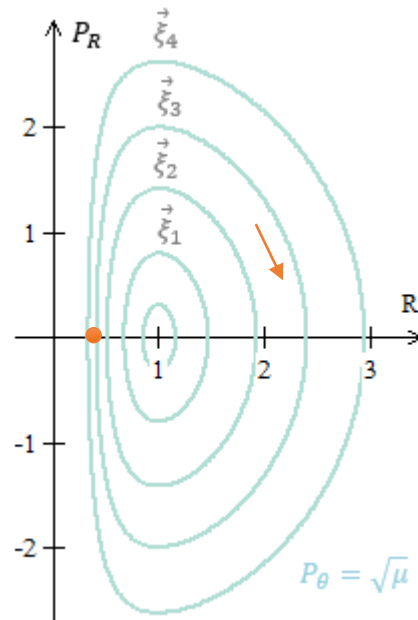


Fig. 1.3. Líneas integrales de fase. Cada una representa un único valor de energía mecánica o Hamiltoniano. Es un corte del diagrama de fase P_R vs R para $P_\theta = \bar{\mu}$.

Para comprender el gráfico, se tiene en cuenta el Hamiltoniano en la ecuación 1.1, para verificar que siempre se mantiene constante a lo largo de una línea integral. El espacio de fase permite hablar sobre cualquier detalle del movimiento o del estado mecánico del sistema. En el punto naranja, en la menor separación para $P_R = 0$ de la línea ξ_2 . El sistema gira más rápido, esto no quiere decir que el momento angular no se mantenga constante, pues la energía cinética rotacional $\frac{P_\theta^2}{2\mu R^2}$ es más grande, debido a la proporcionalidad inversa con la separación de las masas R . Continuando por la línea ξ_2 , mientras las masas se separan la energía rotacional decrece y la energía y/o momento lineal aumenta, al igual que la energía potencial, hasta cierto punto, en donde a partir de allí, el sistema gira muy lentamente y se sigue separando cada vez con menor intensidad; volviendo su energía potencial máxima. De una manera análoga se puede describir el comportamiento del sistema, siguiendo la línea, esta vez por debajo del eje horizontal.

Cada línea integral en el diagrama representa un estado mecánico, es decir, un estado de energía, que puede tener diferentes valores de cualidades de configuración y de movimiento, pero donde sus cambios se compensan entre sí. Todas las formas en que puede evolucionar el sistema se pueden deducir del Hamiltoniano y de la solución de las ecuaciones diferenciales. Otra forma de decir esto es que toda la información posible sobre el sistema la aportan estas dos variables.

Un estado posterior puede ser encontrado conociendo un estado previo y de esta manera la mecánica clásica, se convierte en un predictor del futuro, si se tiene la manera en que cambian las variables dinámicas de posición y momento y las condiciones iniciales.

Causalidad y Determinismo

Laplace afirmó que si se conoce el estado actual del mundo con mucha precisión, se puede predecir cualquier evento en el futuro. En toda la física clásica el principio de causalidad postula que todo efecto debe tener siempre una causa y bajo esa hipótesis se ha estudiado todos los sistemas clásicos. Si una causa tiene siempre un mismo efecto en idénticas circunstancias, se dice que existe el principio de uniformidad, una característica netamente clásica.

Un efecto en mecánica, es el estado posterior a un estado inicial y éste último, la causa de dicho efecto. Clásicamente, a cualquier sistema se le puede ser rastreado un estado anterior y también uno posterior, sabiendo las ecuaciones de movimiento y las condiciones iniciales de posición y momento. Se puede predecir el futuro del sistema mecánico y también encontrar el pasado, tal como se ilustró en el ejemplo de las dos masas, esto es llamado determinismo físico.

Bajo esta perspectiva se podría saber cuántas gotas salpican fuera de alguna cascada, aun cuando las gotas parecieran que salpican al azar, la mecánica clásica puede decir dónde estarán todas las gotas de agua, si se conoce la ondulación exacta del agua, las irregularidades de la vertiente y las condiciones del aire. Sin embargo es tan complicado saber todas estas condiciones que la 'cascada salpica al azar'. En un sentido únicamente práctico o experimental es imposible saber con total exactitud la posición y el momento de cada partícula simultáneamente.

La mecánica clásica es determinista en su naturaleza y supone que se pueda encontrar con total exactitud la posición y el momento para dar cuenta del estado clásico, pese a esto, en la práctica real, siempre existe una incertidumbre y es necesario tener un tratamiento estadístico que permita acercarnos a la exactitud que conjetura la teoría.

CAPITULO II

SOBRE LA MEDIDA CLASICA

La medición clásica es una operación bien definida en donde no existe una diferencia entre la representación matemática y el valor de la medición, a saber, la información está en el instrumento, incluso antes de efectuar una medida. Con el aparato de medición adecuado, se compara alguna cualidad de un sistema y se sustrae información que guardaba el instrumento, dando como resultado un valor en las unidades propias del aparato.

Cuando se intenta medir una distancia, no se puede decir con exactitud un valor concreto, ya que no se posee un instrumento de medición que esté excepto de error o que sea tan preciso para decir exactamente el valor de la medida. Por ejemplo, si se desea medir una distancia con una regla, no se podría decir que la distancia exacta es de 10,0 cm, el observador se puede preguntar si es 10,2 cm, o 10,1 cm, si la distancia es menor, entonces se puede preguntar si es 9,8 cm o 9,9 cm, si la distancia tampoco mide esto, seguramente el valor de la medición está entre 9,9 cm y 10,1 cm. Es posible que el valor de la medición esté más cerca de 10,0 cm que de alguno de estos extremos, así que el intervalo de medición puede ser de 9,95 cm a 10,05 cm. Ese intervalo de duda se puede escribir como $\pm 0,05 \text{ cm}$ y se denomina incertidumbre.

Usualmente en las prácticas de laboratorio, la incertidumbre se escoge como la mitad de la menor escala que puede medir un instrumento, es decir, su resolución. Sin embargo, dependiendo de la práctica que se desarrolle, las habilidades del experimentador y la rigurosidad que se necesite en la práctica, se escoge un valor de incertidumbre adecuado. En general la única consecuencia del proceso de medición es que no se puede esperar resultados exactos y el experimentador tendrá que conformarse con medidas que toman la forma de intervalos.

EXACTITUD Y PRECISIÓN

Es conveniente distinguir la diferencia entre precisión y exactitud. La exactitud en las medidas, hace referencia a su cercanía sobre el valor que se pretende medir. En tanto que la precisión está asociada al ancho de incertidumbre, donde se ubican las medidas hechas a un mismo sistema.

En la figura 2.1, se muestra el grado de exactitud y de precisión haciendo uso de cuatro cruces en forma de dianas en los cuales se han hecho disparos. Las cuatro dianas están sobre el cuadrante de un plano, en donde la diana superior derecha representa precisión y exactitud, mientras que en la inferior izquierda no hay ni precisión ni exactitud.

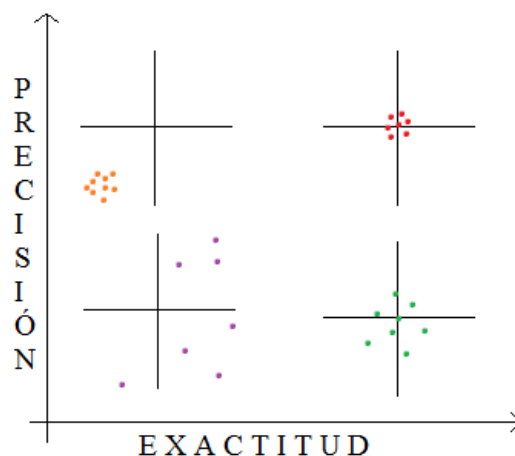


Fig. 2.1. Diagrama de Precisión vs Exactitud. La exactitud aumenta hacia la diana de la derecha y la precisión hacia la diana superior.

La exactitud y precisión que se exija respecto a una medición dependen de los objetivos que se propongan para el desarrollo de la práctica de laboratorio. La práctica, en términos de la medición, tiene como objetivo fundamental, encontrar un resultado estadístico, que es el producto obtenido después de tomar y procesar varias mediciones de la propiedad de algún sistema. La precisión de un resultado estadístico debe estar de acuerdo con la precisión de los datos originales y con las exigencias propias del experimento.

En la figura 2.2 se muestra una distribución de datos cualquiera, que es equiparable con el gráfico 2.1, donde se relaciona la precisión y exactitud. La densidad de probabilidad es una función que toma la forma de una campana gaussiana y muestra la probabilidad relativa de que las mediciones estén distribuidas en una región de valores. Si el centro de la distribución está más cerca al valor de referencia se dice que las mediciones son estadísticamente más exactas, mientras que si la forma de distribución de los datos genera una campana más angosta, se dirá que las mediciones son estadísticamente más precisas.

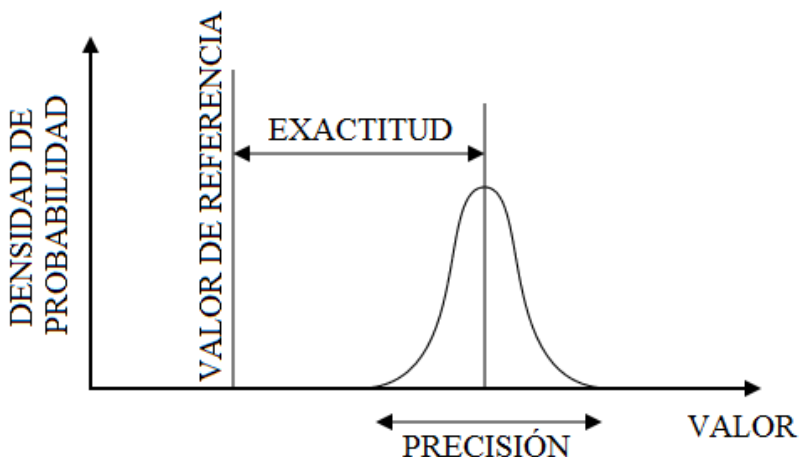


Fig. 2.2. Relación de precisión y exactitud, referida a la densidad de probabilidad. Cuando los valores están más cerca al valor de referencia, la medida es más exacta. Si se tiene un dominio de valores convergente a un valor, la medida es más precisa; haciendo más probable medir el valor promedio entregado por la precisión.

La densidad de probabilidad en mecánica clásica, tiene un uso exclusivo para analizar la precisión y exactitud de los datos. Cuando no se tiene precisión o exactitud adecuada, se concluye que hay errores que se están cometiendo al momento de medir, o que los instrumentos no son los más apropiados.

ERRORES EN LA MEDICIÓN

Las posibilidades de no determinar experimentalmente alguna cualidad (medida) de cierto sistema clásico con exactitud, es determinado por diferentes factores como: errores en la medición y la resolución de los instrumentos y son solucionados mediante tratamientos estadísticos (Apéndice III). El observador puede obtener los datos por dos caminos; por medición directa de la magnitud cuyo valor se desea conocer, o por medición indirecta, por medio de los valores de otras magnitudes ligadas con la variable problema, mediante alguna ecuación.

Cuando el observador mide directamente puede incurrir en dos grupos de errores: errores sistemáticos y errores accidentales. Los errores sistemáticos son aquellos que son constantes a lo largo de todo el proceso de medición, por tanto, afecta a todas las medidas de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Las causas probables de estos errores pueden ser:

- Errores instrumentales; por ejemplo, el error de calibrado de los instrumentos.
- Error personal; este es, en general, difícil de determinar ya que es debido a la persona que realiza la práctica experimental.

- Errores de método de medida, los cuales corresponden a una elección inadecuada del método de medida.

Los errores accidentales son aquellos que se deben a las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por el mismo observador y bajo las mismas condiciones. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y se supone que sus valores están sometidos al azar y que sus causas son completamente incontrolables para un observador. Estos errores poseen, en su mayoría, un valor absoluto muy pequeño.

Las alteraciones que logra hacer el aparato al sistema medido, son incautas e imperceptibles. El aparato de medición no es otra cosa que una extensión del observador y por tanto las alteraciones que éste causa al sistema observado son de las mismas características. El observador influye en las mediciones de una manera trivial y la incertidumbre asociada al proceso de medición no es debida a la naturaleza de los sistemas que mide, sino a la incapacidad de tener aparatos de medición completamente precisos.

Los errores que en las mediciones clásicas aparecen, pueden ser sustraídos cuando no es necesaria una rigurosidad inusitada, por lo que el tratamiento estadístico no tiene una relevancia considerable en el valor de los datos medidos. Cuando las incertidumbres se puedan obviar, se dice que se están midiendo sistemas macroscópicos.

CAPÍTULO III

OBJETO DE ESTUDIO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

SISTEMAS CUÁNTICOS

El objeto de estudio de la mecánica cuántica son los sistemas cuánticos. La mecánica cuántica no relativista, estudia los sistemas cuánticos a niveles bajos de energía, donde se permiten hacer descripciones en el dominio de las reacciones químicas, de los electrones dentro de un átomo o de los átomos dentro de una molécula.

Un sistema cuántico puede ser cualquiera de las partículas elementales. En la teoría estándar de partículas se inscriben muchas, la mayoría de ellas inestables y de vida media muy inferior a un segundo. Ninguna de estas partículas se ha logrado observar, incluso la mecánica cuántica rechaza esa idea. No obstante las espectroscopias atómica, nuclear y sub nuclear, han logrado detectarlas en forma de radiación en los aceleradores de partículas. Además de estas partículas, también se consideran sistemas cuánticos los átomos y las moléculas.

En la figura 3.1, los bosones identificados con el color ocre, son partículas carentes de masa inercial y son los encargados de interacciones nucleares como la fuerza nuclear fuerte y débil y la electromagnética. Los fermiones¹ están dotados de masa y pueden ser Leptones o Hadrones, estos últimos compuestos por distintas configuraciones de Quarks.

¹ Las generaciones se aplican a los fermiones y están categorizadas en 3, en la figura 3.1 cada generación tienen un tono de azul distinto. Los fermiones en azul más claro son los de menor masa y los representados con el azul más oscuro los de mayor masa. El electrón, el Muón y el Tauón, poseen los mismos números cuánticos pero se diferencian en la masa, de igual manera se clasifican los tipos de quark. Esta categoría de masas (generación), ofrece una explicación a la mayor abundancia de fermiones como el electrón y los quarks arriba y abajo; pues las demás partículas se desintegran a fin de caer en el estado más bajo de energía.

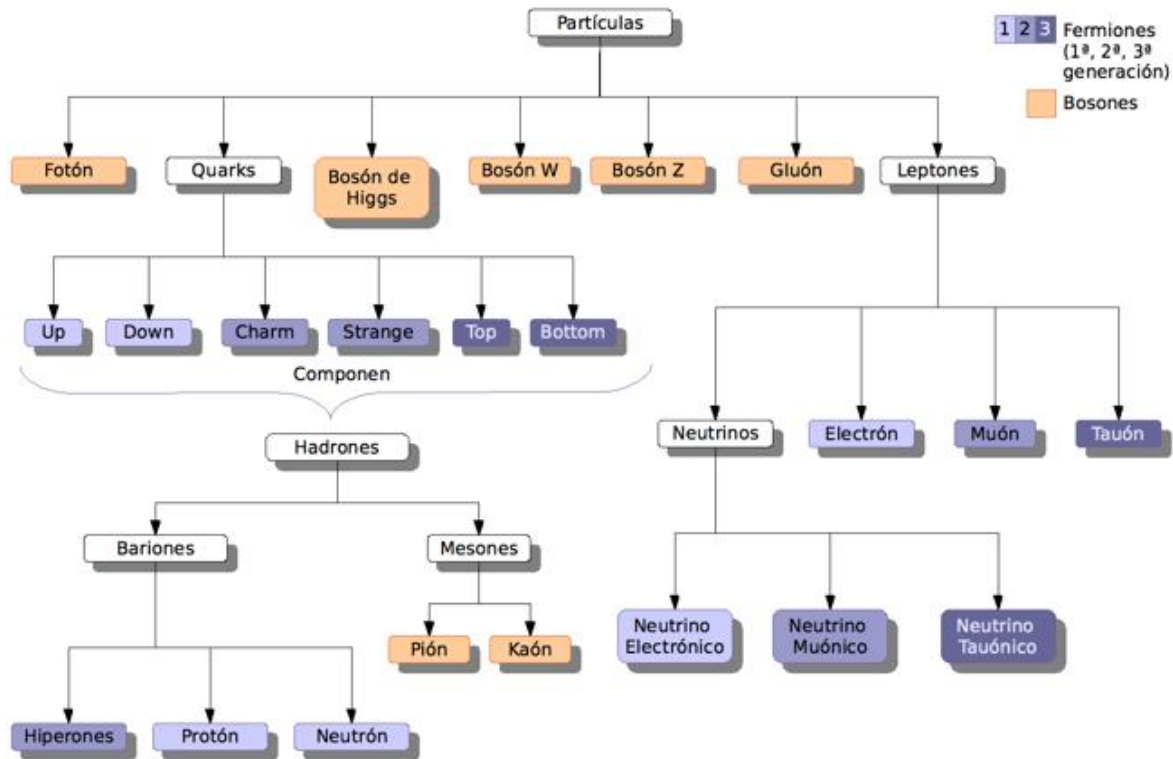


Fig. 3.1. Algunos sistemas cuánticos organizados según la teoría estándar de partículas. Entre los bosones más representativos se destaca el fotón que es el encargado de la interacción electromagnética o un cuanto de luz y el bosón de Higgs, que de acuerdo a su teoría, es la partícula encargada de proveer la masa a las demás partículas fundamentales.

Cada una de estas partículas por sí solas constituye un sistema cuántico. Estas partículas no suelen encontrarse solas o libres, sino que se estudian en interacciones en el átomo y dentro de potenciales eléctricos.

Los sistemas clásicos pueden ser observados únicamente si interactúan con un agente externo como la luz. Esta interacción altera siempre el sistema observado. Cuando se intenta observar un sistema cuántico la luz que es otro sistema cuántico perturba el sistema y este deja de ser el que era, antes de ser observado. Se puede decir que un objeto es grande o macroscópico, si la alteración puede despreciarse y que es pequeño o microscópico, sino es posible eliminar dicha modificación.

Lo grande y lo pequeño puede ser un asunto relativo, si se toma como ejemplo la distancia a la que es observado un objeto macroscópico, cerca es grande y lejos es pequeño, pese a que el objeto no deje de medir lo mismo. Lo grande y lo pequeño también puede percibirse mediante la

comparación de tamaños, por ejemplo el de una uva y el de un planeta. Sin embargo, grande y pequeño es una forma absoluta de hablar sobre los sistemas, bajo el único criterio que es la perturbación que se hace a los sistemas cuando se observan.

Para terminar de ubicar la idea de lo grande y lo pequeño, hay que señalar que los infinitésimos usados en la física clásica son infinitésimos macroscópicos. Una pequeña fracción de carga dQ ha de ser más grande que la carga fundamental e , aunque dQ se considera muy pequeña respecto a Q . Esta clasificación es posible si no se yuxtapone la imagen clásica, sobre el contexto cuántico. Si lo pequeño es perturbado cuando se mide o se observa, entonces se puede decir que la mecánica cuántica se ocupa del estudio de lo pequeño.

El hecho de que al medir se altere el sistema de manera incontrolable para el observador, conlleva a decir que la relación existente entre la causa y un efecto o un estado anterior y uno posterior se pierde completamente, así que también debe cambiar la manera en que se caracterizan las formas de estar el sistema, esto es, que el estado cuántico no es de ninguna forma el estado clásico.

SOBRE EL ESTADO CUÁNTICO

El estado cuántico de un sistema se puede definir como, cada uno de los sucesivos modos de estar el sistema con relación a una cualidad específica. El estado de un sistema cuántico no puede estar caracterizado por los observables de posición y momento, por lo cual, la definición es totalmente diferente a la del estado en mecánica newtoniana.

Estados de Polarización

La polarización de ondas monocromáticas de luz permite hacer una introducción a los estados cuánticos. Esta inserción es preeminente debido a que el experimento se puede llevar a cabo en las aulas y permite hacer analogías con los experimentos de Stern - Gerlach.

Por definición, una onda electromagnética está polarizada linealmente en una cierta dirección, normal a la dirección de propagación, cuando su vector campo eléctrico oscila a lo largo de dicha dirección a medida que la onda se propaga, de manera que el estado de polarización de la onda se puede caracterizar mediante un vector unitario en la dirección de oscilación del campo.

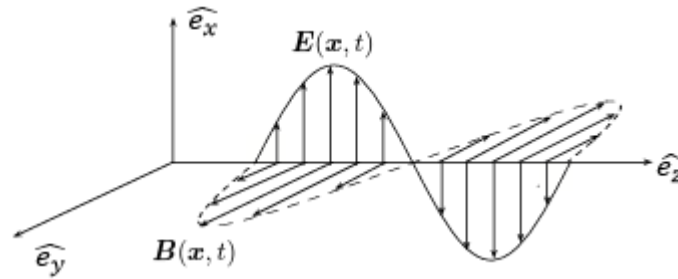


Fig. 3.2. Onda típica electromagnética polarizada en la dirección del eje x .

El vector de campo eléctrico E oscila a lo largo de una dirección bien definida, para el caso de la figura 3.2 es el eje x . Se dice que ésta onda está polarizada linealmente en dirección e_x . El plano formado por la dirección de propagación e_z y el vector E se denomina plano de polarización.

Como la polarización de una onda de luz monocromática está caracterizada por la dirección en que oscila el campo eléctrico, se considera solamente las expresiones para las ondas que describen el campo eléctrico y para cualquier onda plana, puede expresarse así:

$$E(z, t) = E_1$$

$$E_1 = E_{01} \cos(kz - \omega t) e_x$$

En mecánica cuántica la luz no es sopesada como una onda electromagnética, se consideran fotones, corpúsculos carentes de masa, pero que guardan la propiedad de ser polarizados. En vez de declarar que la onda está polarizada, es conveniente decir que el fotón tiene un estado de polarización. Cualquier estado de polarización del fotón puede escribirse como la superposición de dos estados de polarización:

$$e_x' = \cos \theta e_x \quad (3.1)$$

El estado cuántico queda caracterizado por un vector normalizado en el espacio vectorial. Sin embargo, en la notación de Dirac los kets \cdot representan estados cuánticos y el espacio de kets debe ser diferente al espacio euclidiano empleado para describir los estados clásicos.

Las imágenes de los siguientes experimentos son representaciones ilustrativas que guardan relación con el fenómeno, pero no son imágenes que expliciten la realidad. En los experimentos, un fotón sale de la fuente en un estado desconocido (no polarizado). En su trayectoria encuentra dos polarizadores lineales, que pueden dejar al fotón polarizado horizontalmente (e_x); o verticalmente (e_y). El analizador es el polarizador 2 y este permite saber el estado de

polarización horizontal o vertical, que viene del polarizador 1. En la pantalla se ve reflejado el tipo de fotón que se obtuvo finalmente.

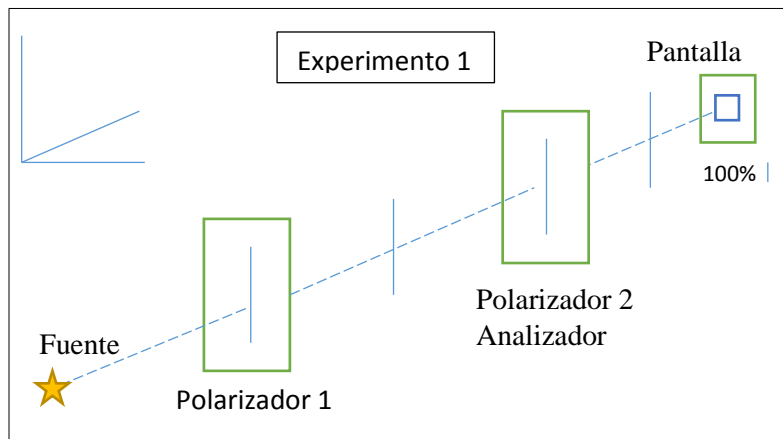


Fig. 3.3. Experimento 1. Polarizadores verticales.

En el experimento de la figura 3.3, el fotón atraviesa dos polarizadores verticales, después de cruzar el primer polarizador vertical, el fotón llega al segundo en el estado vertical, el cual no afecta su estado y así se refleja en la pantalla.

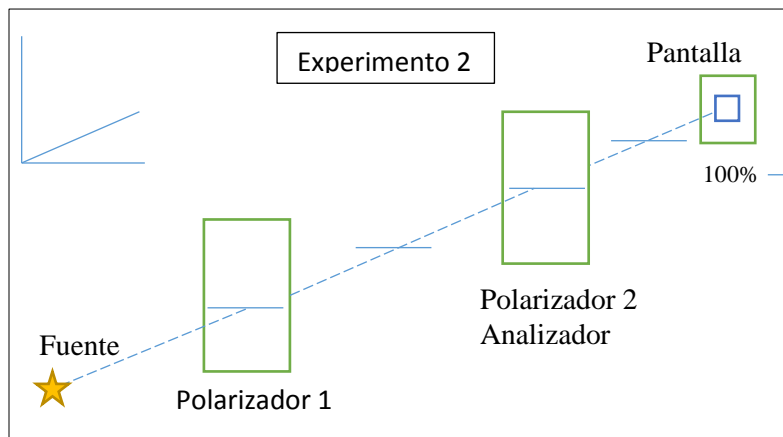


Fig. 3.4. Experimento 2. Polarizadores horizontales.

En el experimento de la figura 3.4, el fotón atraviesa dos polarizadores horizontales, el fotón llega al segundo polarizador en el estado horizontal, el cual no afecta su estado y se refleja en la pantalla.

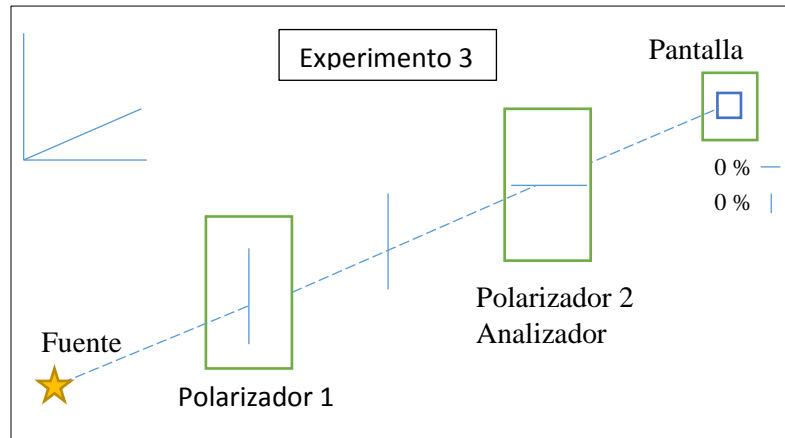


Fig. 3.5. Experimento 3. Un polarizador vertical y otro horizontal

En el tercer experimento, en la figura 3.6, el fotón atraviesa el primer polarizador y queda en el estado vertical. A la salida del segundo polarizador, la pantalla no detecta ningún tipo de fotón.

Estados bien Definidos

A partir de las situaciones planteadas anteriormente, se puede describir el comportamiento de los fotones y en general de un sistema cuántico. En un bra ket se escribe al lado derecho el estado inicial y al izquierdo un estado posterior.

Estado final Estado inicial

De acuerdo con esto se puede interpretar lo que ocurre en cada experimento. En el primer experimento se encuentra que un fotón en estado de polarización vertical e_y llegue a estar en un estado de polarización vertical e_y , este valor es 1 o el 100% y de esta manera se pueden describir el segundo y tercer experimento:

$$\text{Experimento 1:} \quad e_y e_y = 1$$

$$\text{Experimento 2:} \quad e_x e_x = 1$$

$$\text{Experimento 3:} \quad e_x e_y = 0$$

$$\text{Experimento 3:} \quad e_y e_x = 0$$

$$e_x e_y = \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_x = e_y \\ 0 & \text{si } e_x \neq e_y \end{cases}$$

De los primeros tres experimentos se encuentra que los estados e_x y e_y son ortogonales o estados bien definidos y forman una base. Experimentalmente significa que si se mide un estado, la probabilidad de medir este mismo estado tiempo después es del 100% y 0% de que esté en otro estado. Estos vectores de estado dan la forma del espacio de kets, de tal manera que cualquier estado de polarización se puede escribir como una superposición de estos dos estados.

Como los estados bien definidos son vectores y además forman una base, es posible escribirlos en forma matricial, tal que $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_x \cdot e_x = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$ y $e_y \cdot e_y = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$. Las amplitudes de probabilidad en forma matricial son:

$$e_y \cdot e_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$e_x \cdot e_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$e_x \cdot e_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$e_y \cdot e_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Principio de Superposición

En el cuarto experimento el fotón atraviesa el primer polarizador y queda en el estado vertical, luego se encuentra con un polarizador vertical rotado cierto ángulo α y el analizador detecta que el fotón no está polarizado y tiene 50% de ambas componentes.

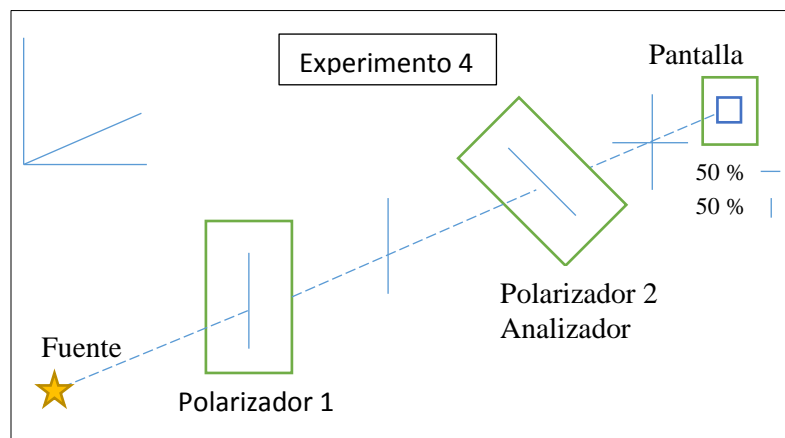


Fig. 3.6. Experimento 4. Un polarizador vertical y un polarizador vertical rotado.

Teniendo en cuenta los primeros tres experimentos, se podría esperar que el estado de polarización vertical se perdiera al atravesar el segundo polarizador. Lo que se obtiene en el analizador es que el polarizador 2 deja al sistema en un estado combinado, donde parte de la polarización es vertical y otra es horizontal. La forma de escribir esto es a partir de la superposición de estados:

$$e_x' = C_1 e_x + C_2 e_y \quad (3.2)$$

El estado del sistema al final del segundo polarizador es un estado combinado y no un estado mezcla, en el sentido que se puede distinguir los términos que componen la superposición. La forma correcta de hablar del estado, no es exponiendo que está polarizado en una forma o en otra, sino que está polarizado verticalmente y al mismo tiempo horizontalmente.

AMPLITUDES DE PROBABILIDAD

Lo que nos preguntamos en cada experimento es que el fotón estando en un estado de polarización, atraviese otro polarizador y quede en otro estado de polarización. El primer principio general de la mecánica cuántica que se encuentra aquí, es que la probabilidad de que el fotón o una partícula cambie de estado, puede ser representado cuantitativamente por el cuadrado de un número complejo llamado amplitud de probabilidad. En este caso la amplitud de probabilidad de que el fotón estando en un estado e_i , llegue a uno e_j .

Las amplitudes de probabilidad son en general números complejos. La amplitud de que el estado e_x' sea alguno de los estados base e_x o e_y , donde C_1 y C_2 representan dichas amplitudes:

$$e_x e_x' = C_1 e_x e_x + C_2 e_x e_y = C_1$$

$$e_y e_x' = C_1 e_y e_x + C_2 e_y e_y = C_2$$

Las amplitudes de probabilidad son los factores que acompañan a los kets base en la expresión 3.4. Esta ecuación se puede leer como “el estado de polarización e_x' es: C_1 del estado e_x y C_2 del estado e_y ”, o como “El fotón está polarizado en la dirección e_x y polarizado en la dirección e_y ”

Además de esto, es posible escribir el estado de superposición del experimento 4 como:

$$e_x' = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{x'} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Si para este ejemplo en particular $C_1 = C_2 = 1$, entonces $e_{x'}$ normalizado es:

$$e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como el vector $e_{x'}$ está debidamente normalizado, es posible hallar las amplitudes de probabilidad de que dicho estado caiga en uno base:

$$e_x \cdot e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_y \cdot e_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y por tanto las probabilidades como lo muestra el analizador del experimento 4 son:

$$P_1 = |e_x \cdot e_{x'}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = |e_y \cdot e_{x'}|^2 = \frac{1}{2}$$

Las amplitudes de probabilidad tienen la forma algebraica de un producto escalar o producto interno y de hecho matemáticamente tienen todas las propiedades de dicho producto, no obstante físicamente el producto interno es la amplitud de probabilidad de que un sistema cuántico en un estado cualquiera, pase a otro.

Aunque un bra \cdot o un ket \cdot representen estados, estos ofrecen toda la información posible sobre el estado. Una forma completa de escribirlos es en conjunto, formando un bra-ket $\cdot \cdot$. La información ofrecida por el bra-ket es un número complejo, que no es otra cosa que la amplitud de probabilidad de la que se ha venido hablando. Mientras que el estado clásico se determina por los valores que adoptan las variables dinámicas de posición y momento, el estado cuántico es un vector y lo que más se puede hacer, es calcular la probabilidad de que el sistema estando en un estado quede en otro y por ello se habla que la mecánica cuántica es una teoría probabilística.

Es posible preguntarse si existen estados base que puedan dar toda la información del sistema, como lo proporciona el estado de configuración y el estado de movimiento, en el estado mecánico-clásico. El estado cuántico no puede ser caracterizado por la posición y el momento en cualquier instante de tiempo y de hecho no se pueden encontrar simultáneamente con una precisión adecuada, estos dos observables en un sistema cuántico. Medir observables en mecánica cuántica resulta un proceso distinto a la de obtener un dato concreto por cada medición realizada.

CAPITULO IV

SOBRE LA MEDIDA CUÁNTICA

Cuando se reconoce que las observaciones a los sistemas cuánticos, afectan drásticamente su comportamiento, también se está reconociendo que las medición cuántica afecta de manera incontrolable. A nivel microscópico como se mostró anteriormente, el sistema siempre acabará perturbado por el propio sistema de medición. Al ser el aparato una extensión del observador, este modifica al sistema de una manera incontrolable para él, introduciendo un error que es imposible reducir a cero, por muy precisos que sean los instrumentos usados. En ese sentido, el ambiente juega el papel de observador o instrumento de medición, además porque es inevitable que distintos sistemas cuánticos se vean en interacción constantemente.

La forma de representar el mundo desde la mecánica cuántica, es asignar una amplitud de probabilidad de donde y como se encontrará algún sistema en diferentes instantes. La probabilidad de encontrar una partícula es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la amplitud. La amplitud de encontrar a una partícula en diferentes lugares y distintos instantes, varía con la posición y el tiempo.

En un caso especial la amplitud puede variar sinusoidalmente en el espacio y en el tiempo como $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$. Donde r es el vector de posición respecto a cierto origen. Esta amplitud varía con una frecuencia ω definida y un número de onda k definido, esto es, cuando una partícula tiene energía $E = \hbar\omega$ conocida y el momento $p = \hbar k$. En este sentido la idea de partícula se ve limitada, pues si la amplitud de encontrar la partícula en algún lugar de una región es $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$, la probabilidad que es su magnitud al cuadrado es constante, lo que indica la probabilidad de encontrar la partícula en cualquier lugar o en otras palabras, no se sabe en donde se encuentra la partícula.

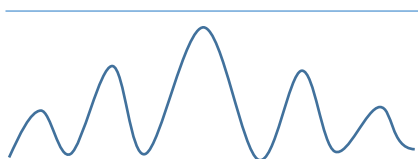


Fig. 4.1. Tren de ondas de longitud Δx

En otro caso, si se sabe con una buena precisión la posición de una partícula, se puede dar una probabilidad de encontrarla en diferentes lugares, en un espacio confinado que se puede nombrar como Δx . No obstante, cuando se logra dar una buena aproximación del lugar en donde se encuentra el sistema, se pierde la información que se tenía sobre el momento.

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

El principio de incertidumbre invalida el sentido determinista de la mecánica cuántica (Apéndice IV) y las partículas no siguen trayectorias definidas. No es posible conocer exactamente el valor de todas las magnitudes físicas que describen el estado de movimiento del sistema en ningún momento, sino sólo una distribución estadística. El principio de incertidumbre conlleva a un desvío completo de las concepciones clásicas, haciendo que la noción clásica de trayectoria deba ser desechada: preguntar cuáles son simultáneamente los valores de $x(t)$ y $p_x(t)$ es absurdo en el sentido que no es posible determinar estas variables como se hace en mecánica clásica. Aunque debido a la pequeñez de la constante de Planck, en el mundo macroscópico la indeterminación cuántica es despreciable.

El principio de incertidumbre, afirma que existe un límite fundamental a la precisión de la medida. La mencionada afirmación puede entenderse como que, si un sistema físico real se describe en términos de la mecánica clásica, entonces se está haciendo una aproximación, y la relación de incertidumbre indica la calidad de esa aproximación.

En cuántica, es posible introducir una serie de entidades matemáticas X y P que se correspondan en muchos aspectos con la posición y el momento clásico. El principio de incertidumbre indica que si se interpretan esas entidades como posición y momento, entonces existe un límite fundamental en la precisión con que dichas variables pueden ser conocidas; esto es, si se intenta introducir variables clásicas e interpretar el movimiento de forma clásica, la precisión con que

estas variables pueden ser especificadas está limitada. Sin embargo X y P son operadores, entidades puramente matemáticas y sus valores propios son los valores de los observables.

OPERADORES

Los observables son todas las cualidades que se pueden obtener al observar o medir un sistema. La mayoría de observables en clásica tiene su homólogo en cuántica, a excepción de la fuerza. Las variables dinámicas de posición x_i , momento lineal P_i , momento angular L_i , Hamiltoniano H ; tienen un observable homólogo en la mecánica cuántica x, P, L, H que son operadores y no funciones definidas.

No todos los operadores se pueden medir simultáneamente en el laboratorio con suficiente precisión, es el caso de los operadores de posición y la componente de momento en dicha dirección. Mediante el conmutador de operadores se puede determinar dicha propiedad, por ejemplo $X_i, X_j = P_i, P_j = 0$, mientras que el conmutador $X_i, P_j = i\hbar\delta_{ij}$.

Si χ y ϕ son dos estados, la amplitud de partir en ϕ y terminar en χ se puede escribir como suma, sobre un conjunto completo de estados base, de la amplitud de ir de ϕ a uno de los estados base y luego salir de ese estado base y llegar a χ :

$$\chi \phi = \sum_{\text{todo } i} \chi_i \langle i | \phi \rangle \quad (4.1)$$

Si se quiere saber únicamente el vector de estado ϕ que no corresponde a un número como si lo hace la amplitud $\chi \phi$. Se puede eliminar el bra χ , además porque la ecuación es válida para cualquier χ :

$$\phi = \sum_i |i\rangle \langle i | \phi \rangle \quad (4.2)$$

Así como se elimina el bra χ , es posible eliminar el ket ϕ de tal manera que:

$$| = \sum_i |i\rangle \langle i| \quad (4.3)$$

La ecuación 4.3 es la definición del operador lineal en la notación de Dirac, que se comporta como un uno en el álgebra, es explícitamente esencial en la construcción del espacio vectorial. Mientras los vectores del espacio en tres dimensiones están descritos en términos de tres vectores

orto normales, los vectores de la base i de los estados cuánticos deben recorrer el conjunto completo aplicable al problema que se trate. Puede que estén implicados dos o tres o cinco o un número infinito de estados de base.

Si se comienza con un sistema en cierto estado ϕ , luego se hace pasar a través de un aparato de medición como por ejemplo un polarizador del capítulo 3 y después se hace una medida para verificar si se encuentran en el estado χ , el resultado está descrito por la amplitud

$$\chi A \phi \quad (4.4)$$

Como es posible incluir el operador unidad en medio de cada lado del operador A , entonces la ecuación 4.4 se puede escribir como:

$$\chi A \phi = \sum_{ij} \chi_i \langle i | A | j \rangle \phi_j$$

Si $\psi = \sum_{ij} \langle j | A | \phi \rangle \phi_j$, entonces la ecuación 4.6 también se puede escribir de otra forma contemplando el operador A en el estado ψ , de tal manera:

$$\chi \psi = \chi A \phi \quad (4.5)$$

Dicho símbolo A representa un observable netamente cuántico, es un operador que trabaja sobre un estado para producir otro. A diferencia de los observables de la mecánica clásica que son funciones o variables dinámicas, los observables cuánticos no hablan sobre la propiedad de los sistemas en un sentido real de medición, sino que es un artefacto matemático mediante el cual se puede obtener toda la información de la evolución temporal del sistema.

Otra forma de escribir la ecuación 4.5 es eliminando el ket de llegada χ , de modo que $\psi = A \phi$ y expone que un operador actúa sobre un estado para producir otro estado.

ECUACIÓN DE VALORES PROPIOS

El físico teórico se encarga de construir esta matriz para cada experimento que realiza. Si el experimentador tiene un par de protones, uno que está quieto y otro que se aproxima desde el infinito atómico, cuando colisionan, pueden salir dos Kaones, seis Piones y dos neutrones en distintas direcciones con diferentes momentos. El operador es dicha matriz construida según el aparato de medición. El estado de los dos protones lo determina ψ y los estados de las partículas por el estado ϕ .

Los vectores de estado n describen la configuración de los estados de energía definida, pero tiene fuera los factores de dependencia temporal. Por ello, son vectores constantes y estados bien definidos, que se pueden emplear como un conjunto de base que son invariantes ante cualquier transformación. Cada uno de los estados n tiene la propiedad de que cuando se le aplica un operador hamiltoniano H (Apéndice V), se obtiene exactamente E_n por el mismo estado:

$$H n = E_n n \quad (4.6)$$

La energía E_n son los valores esperados, los que el observador predice que va a obtener cuando mida. E_n Es un número que es una característica del operador hamiltoniano o un autovalor de dicho operador y el estado n serán los vectores de estado propios, asociados a cada autovalor.

Para ilustrar se plantea un electrón al cual se le ha medido una energía $E_1 = 0$. Estando en ese nivel de energía el electrón está en alguna región, entonces es posible encontrar la probabilidad de que al hacer una nueva medición se obtenga una posición que es un estado propio de X . Para este caso el operador hamiltoniano y el operador posición están descritos por las siguientes matrices:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar los posibles valores que se obtendrían al medir X , se hallan sus valores propios hallando $\det X_{ij} - \delta_{ij}\lambda = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & i \\ 0 & -i & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Cuando se hallan las raíces del polinomio de grado 3 generado por el determinante de la matriz $X_{ij} - \delta_{ij}\lambda$, se obtienen los valores de $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. La ecuación 4.6 de valores propios permite encontrar los estados propios m , mediante $X_{ij} - \delta_{ij}\lambda m = 0$, para cada valor propio se consigue un estado propio, obteniendo respectivamente para λ_1 , λ_2 , y λ_3 los estados propios normalizados:

$$m_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

También se puede obtener el estado propio correspondiente a $E_1 = 0$ y se obtiene $n_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta que $m_i = m_i^*$, las amplitudes de que el electrón partiendo del estado de energía E_1 , se encuentre en alguno de los estados base de X son:

$$m_1 n_1 = \frac{1}{2}; \quad m_2 n_1 = \frac{-1}{2}; \quad m_3 n_1 = \frac{i}{2}$$

Las probabilidades que son el cuadrado del valor absoluto de las amplitudes, corresponden al 25% de obtener el valor 0 de posición, 50% de obtener 1 y 25% de obtener el valor de 2 para la posición.

La propiedad del hamiltoniano $H_{ij} = H_{ji}^*$, escrito en otros términos, que el operador sea $H = H^+$ se llama auto adjunto y siempre tendrá esta característica. Una de las consecuencias de poseer esta propiedad es que todos los valores propios que se encuentren son números reales, que es lo que se obtiene cuando se realiza una medición.

ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER: DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE ESTADOS

El vector de estado x representa un estado en el que una partícula está ubicada precisamente en la coordenada x . Para cada valor de x a lo largo de la línea, por ejemplo, 1,71 ó 5,89 ó 13,00, hay un estado correspondiente y cada uno de estos son estados base. Si se tienen todos los puntos sobre la línea, se tendrá un conjunto completo para el movimiento de un sistema cuántico en una dirección. Si se tiene un estado diferente ψ , en el que la partícula está distribuida de cierta manera a lo largo de la línea. Una manera de describir este estado es dando todas las amplitudes de que el electrón se encuentre también en cada uno de los estados de base x . Estas amplitudes son $x \psi$, como hay un valor de amplitud para cada x , entonces dichas amplitudes son una función de x , que se puede nombrar como $\psi(x) = x \psi$.

La ecuación de Schrödinger² es la forma en que varía en el tiempo la amplitud de probabilidad de encontrar el sistema en algún lugar. Esta es la forma en que está la partícula sobre una línea, si

² La deducción de la ecuación de Schrödinger, se puede hacer cuando se encuentra la amplitud de que un electrón salte por cada uno de los átomos de una red lineal. Lo que se encuentra es que la amplitud de probabilidad de

se aumenta los grados de libertad de movimiento a tres dimensiones, de tal manera que $\psi(x, y, z)$ y $V(x, y, z)$, entonces se tiene:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \quad (4.7)$$

La ecuación de Schrödinger se puede interpretar como una ecuación determinista en el sentido de que, dada una función de onda a un tiempo inicial dado, la ecuación suministra una predicción concreta de qué función se tendrá en cualquier tiempo posterior. Durante una medida, el estado propio al cual colapsa la función es probabilista y en este aspecto es no determinista. Así que la naturaleza probabilista de la mecánica cuántica nace del acto de la medida.

Muchos sistemas que eran tratados dinámicamente en mecánica clásica son descritos mediante tales funciones de onda estáticas. Por ejemplo, un electrón en un átomo sin excitar se dibuja clásicamente como una partícula que rodea el núcleo, mientras que en mecánica cuántica es descrito por una nube de probabilidad estática que rodea al núcleo.

El resultado de una medida sobre dos sistemas cuánticos que tienen el mismo estado no precipita necesariamente los mismos resultados. La mecánica cuántica es una teoría que explica cómo varía la distribución de probabilidad de las posibles medidas de un sistema, entre dos mediciones consecutivas, ya que en el instante de la medida se produce un colapso de la función de onda de manera aleatoria.

Una de las relaciones entre el espacio de fase y la función de onda es que el cuadrado del módulo de la función de onda está relacionado con una distribución de probabilidad definida sobre el espacio de fase. Para construir el conjunto de estados cuánticos o espacio de kets, puede considerarse inicialmente el espacio de fase que se usa en la descripción clásica y considerar el conjunto de funciones de cuadrado integrable sobre el espacio de fase. Cada observable cuántico corresponde a una única distribución sobre el espacio de fases.

Finalmente, se muestra un cuadro comparativo entre las miradas clásica y cuántica respecto a las diferentes concepciones que utilizan éstas.

encontrar el electrón está distribuida a lo largo de la red en forma de onda viajera. Grupos de estas ondas con energías parecidas, forman un paquete de ondas que se comportan como una partícula con masa efectiva m_{ef} . Esto inevitablemente, lleva a describir más características apasionantes de la teoría cuántica, así que para este trabajo será suficiente entender en cierto grado de que se trata la función de onda.

ASPECTOS	MECÁNICA CLÁSICA	MECÁNICA CUÁNTICA
Sistema	Aquel objeto o conjunto de objetos macroscópicos que no afectamos cuando medimos, como una pelota, un péndulo o una masa sujeta a un resorte dentro de un campo gravitacional.	El sistema cuántico es el objeto o conjunto de objetos microscópicos, que afectan su estado cuando se intenta “observar” o medir.
Estado	El estado queda determinado por las variables de posición y momento. Ellas proporcionan la máxima información sobre la evolución temporal del sistema.	El estado de los sistemas cuánticos no es posible determinarlo por la posición y momento. Quien ofrece la máxima información posible sobre la evolución temporal del sistema, es la ecuación de Schrödinger.
Determinismo	La mecánica clásica es determinista y pretende predecir el futuro, tanto así como el pasado, de acuerdo a las razones de causalidad.	No se concibe el determinismo, pues el sistema cuando es perturbado deja de ser como venía siendo y se pierde cualquier relación determinista, cuando el sistema cambia de estado.
Observables	Los observables son variables, las cuales toman un solo valor en cada instante de tiempo. Ejemplos son la posición y la cantidad de movimiento.	Los observables son operadores provistos de valores propios y estos últimos corresponden a los posibles valores que se obtendrían al medir.
Observador	El observador afecta de manera insignificante al sistema que se está observando. Juega un papel	El observador afecta de manera incontrolable el sistema, haciéndolo caer a un estado base.

	limitado a la obtención de datos.	
Ambiente	El ambiente o el entorno son casi siempre ignorados. Los sistemas se consideran principalmente aislados o cerrados y aun cuando se tengan en cuenta, juega un rol desdeñable en la alteración del estado del sistema.	El entorno hace las veces de observador y es capaz de afectar de forma incontrolable la evolución del sistema. Es una de las razones que hacen inobservable un sistema cuántico.
Aparato de Medición	El aparato de medida es una extensión del observador y por ende no afecta significativamente al sistema.	El aparato de medida también es una extensión del observador, así mismo afecta considerablemente el objeto observado. Estos aparatos están provistos de luz, de un campo magnético etc., convirtiéndose en otro sistema cuántico.

Tabla 4.1 Cuadro comparativo sobre las concepciones clásicas y cuánticas.

CONCLUSIONES

1. El estado mecánico clásico se determina conociendo las variables de posición y momento.
2. El estado cuántico no es posible describirlo a partir de las variables de posición y momento, incluso no se pueden obtener precisamente ambos valores simultáneamente
3. En la mecánica clásica la acción que se le hace al sistema es despreciable y la incertidumbre asociada a la medición de una magnitud puede ser excluida.
4. En mecánica cuántica la acción que se hace sobre el sistema no puede ser excluida, debido a la perturbación que se hace sobre este.
5. Lo grande y lo pequeño se debe definir de manera absoluta. El tamaño se define a partir de las acciones que se efectúan sobre el sistema cuando se observa.
6. El estado clásico y el estado cuántico se pueden escribir como una superposición de estados, la diferencia se establece cuando se observa el sistema. Por el lado clásico el sistema sigue en el mismo estado sin afectarse de manera significativa, mientras que el sistema cuántico se ve afectado cuando se observa y queda en uno de los estados propios del observable que se mide.
7. Es posible determinar en mecánica cuántica, la posición y el momento de un sistema simultáneamente, pero no es posible hacerlo con toda la precisión.
8. Se reconoce que existen dificultades sobre el concepto de medida. Estas dificultades están relacionadas con el uso de explicaciones clásicas para abordar el concepto de medida en mecánica cuántica.
9. La medida en mecánica cuántica constituye el eje fundamental para su enseñanza, ya que comprender el proceso de medición a nivel atómico permite construir un modelo conceptual.
10. Mostrar las maneras de abordar el concepto de medida en mecánica clásica y en mecánica cuántica, proporciona elementos para un mejor aprendizaje.

REFERENCIAS

1. A.C. Baird.(1991). Experimentación, una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experiencias. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
2. Albert, David Z. (1994, Mayo). Bohm's Alternative to Quantum Mechanics. Scientific American 270: pp. 58–67.
3. Almera, J. (2007). Teledetección aplicada al estudio y control medioambiental y agrícola. Esas maravillosas partículas - el pión [Dibujo]. Recuperado de: <http://www.solesugranyes.es/Cursos/propiedades.htm>
4. Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. Latin American Journal of Physics Education. Vol 4, No. 1.
5. Ayala, M. & Barragán J. (2013). El Hamiltoniano Del Sistema y Las Ecuaciones De Hamilton. *Mecánica Hamiltoniana, Mecánica cuántica y Caos*, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 1-12.
6. Ayala, M. & Barragán J. (2012). Representación Geométrica de las Coordenadas Generalizadas en la Mecánica Hamiltoniana, Presentación Covariante, Grupo Física y Cultura, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 1-10.
7. Berkely. (1986). *Física Estadística*. Universidad de California. Pg. 92-96.
8. Cardona, M. (2008). Max Planck, a Conservative Revolutionary. *Nuovo Saggiatore*, pp 44–49.
9. Cormick, M. Cecilia (2009). Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia. Tesis Doctoral en el área de ciencias físicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
10. De la Torre, Alberto Clemente. (2000). Física cuántica para filo-sofos. México: La ciencia para todos.
11. De Regules, Sergio. (2011). Cuentos Cuánticos. [en línea]. España: ADN Editores. Disponible en: <http://cuentos-cuanticos.com/los-cuentos-en-pdf>.
12. Dirac, P. (1958). *Principios de mecánica cuántica*. Bristol, Reino unido Vol I. Pg. 2-15.
13. Feynman, R. (1946) *Apuntes de Física*. California, E.E.U.U. Vol. I y Vol. III.
14. García, Luis Pedro (2011). Una interpretación de la mecánica cuántica basada en considerar un tiempo físico. Tesis de maestría en Física, Universidad de la República, Montevideo.
15. Gómez, P. (2007). Esas maravillosas partículas - el pión [Diagrama]. Recuperado de: <http://eltamiz.com/2007/08/02/esas-maravillosas-particulas-el-pion/>
16. Greca, Ileana M. y Herscovitz, Victoria E. (2002). Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. Brasil: Campus do Vale.
17. Landau, L. & Lifshitz, (1994). Mecánica, Curso de Física Teórica, Vol I. Academia de Ciencias U.R.S.S.
18. Martínez T., Armando. (2009, Agosto).La mecánica cuántica – El acto de medición. Blog [en línea], No 12. Disponible en: <http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com/2009/08/el-acto-de-medicion.html>.

19. Mengual C. (2005). La imagen compleja: La fenomenología de las imágenes en la era de la cultura visual. España: Universidad Autónoma de Barcelona.
20. Mora V., Ana Isabel. (2004, Septiembre). Guía para elaborar una propuesta de investigación. Revista Educación, [en línea]. No 29. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44029206>.
21. Rojas Gamboa, Diego Ferney. (2012). La medición en mecánica cuántica y la determinación de dificultades asociadas a su enseñanza-aprendizaje. Monografía de Licenciatura en Física, Universidad pedagógica Nacional, Bogotá.
22. Soldovieri, T. (2010). Introducción a la mecánica la Lagrange y Hamilton, I, pp. 42-74. Universidad del Zulia. Preprint.
23. Solé Bellet, Albert. (2010). Realismo e interpretación en mecánica Bohmiana. Tesis Doctoral de lógica y filosofía de la ciencia, Universidad Complutense, Madrid.
24. Sommerfeld, A. (1952). Mechanics, Lectures and theoretical physics, Vol I. University of Munich. New York. N.Y. Academic Press Inc, Publishers 1952.

APENDICE I

CONSTRUCCIÓN DEL HAMILTONIANO PARA EL CASO EN QUE DOS MASAS SE ATRAEN CON UNA FUERZA PROPORCIONAL A LA DISTANCIA QUE LAS SEPARA

En mecánica Hamiltoniana el sistema queda caracterizado con el estado de configuración y el estado de movimiento del conjunto denominado sistema. El estado de configuración es una cualidad que se refiere a la forma de estar el sistema con relación a su posición y a los momentos del sistema.

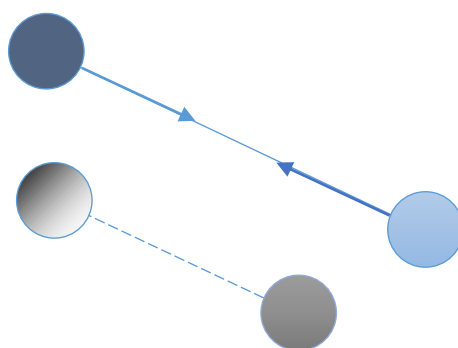


Fig. I.1. Representación del caso, en que se atraen dos masas.

Para hacer el tratamiento de este caso no se tiene en cuenta un valor de masas en particular, las masas no varían en el tiempo, sin embargo se soluciona para el caso general, cuando las masas no son iguales.

Hay que hacer explícito de antemano que las dos partículas que hacen parte del sistema son masas puntuales es decir, que no se les considera con un volumen y por tanto no tendrán rotación sobre su propio eje.

Las partes móviles del sistema son las dos partículas de masas m_1 y m_2 . Nada en el exterior interactúa con el sistema, es decir se encuentra aislado en todo momento.

Se considera el centro de masa (CM) como parte del sistema, debido a que se escoge el CM como el origen del sistema de referencia.



Fig. I.2. Centro de masa del sistema formado por las dos masas.

Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema, no actúan fuerzas sobre las partes que lo conforman, es decir, que si no se ejercen fuerzas sobre el CM, se puede considerar como un marco de referencia inercial y es válido definir el origen en ese lugar.

LIGADURAS Y RESTRICCIONES

Las partículas en principio son libres de moverse en el espacio, pero existe una fuerza de tipo elástico que condiciona la dinámica del sistema. Esta fuerza representa una restricción en los posibles movimientos de las partículas, ya que la atracción es concéntrica y limita su distanciamiento. El movimiento arbitrario que pudiera darse en el espacio, no se da de cualquier forma, sino sobre una línea recta imaginaria que las une.

La fuerza entre las partículas es de atracción, pero ésta afirmación no significa necesariamente que las partículas solo se pueden acercar, pudiera existir una condición inicial, que hiciera que las partículas se fueran alejando, claro está, cada vez con menor velocidad.

El sistema puede girar en torno a su CM pero de una forma inercial, debido a que previamente se negó la existencia de fuerzas externas que generen torque. La única fuerza que actúa es la interna, donde ésta es proporcional a la separación entre las masas y está dirigida en la dirección de la línea que une las partículas.

$$\tau = r \times F = rF \sin \theta$$

Como la dirección de los dos vectores es la misma, $\theta = 0$ y por tanto $\tau = 0$ también.

La segunda restricción para ambas partículas está determinada por la imposibilidad de salir del plano. Si en algún momento se inició la rotación del sistema, se describirá un plano cualquiera y el sistema no se saldrá de él por encontrarse aislado.

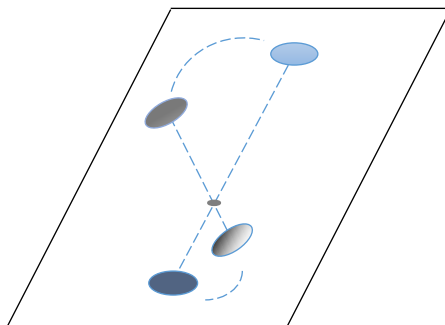


Fig. I.3. Sistema sobre un plano cualquiera.

Por último, como no es necesario ubicar el centro de masa porque se puede asumir como origen del sistema de referencia, y basta ubicar una partícula para saber dónde está la otra, el sistema está restringido a moverse en un plano con la condición sobre el centro de masa de dos ligaduras $x_{cm} = y_{cm} = 0$.

El sistema es considerado esclerónomo y holónomo debido a que estas ligaduras son esclerónomas y holónomas, es decir, independientes del tiempo y dependientes de la posición, pero no de las velocidades. En general existen bastantes clasificaciones para las ligaduras, se dirá simplemente, que las ligaduras para este sistema son lisas, o sin rozamiento.

GRADOS DE LIBERTAD Y VARIABLES ASIGNADAS

Se han reconocido dos movimientos independientes, uno de cambio de distancia entre las partículas en la dirección de la línea que las une y otro de rotación alrededor del CM. El sistema puede girar independientemente del movimiento de atracción y las masas pueden atraerse independientemente de que el sistema rote. Algún movimiento distinto, puede ser escrito como una superposición de los dos.

Como el número de grados de libertad está asociado a la cantidad de movimientos independientes, entonces este sistema tiene 2 grados de libertad correspondientes a los 2 movimientos independientes y a cada uno se le asigna una variable que dé cuenta de los cambios de configuración del sistema.

La variable R será la distancia recta que separa las dos masas y relaciona el movimiento de atracción. Esta variable toma los valores de $0 \leq R < \infty$.

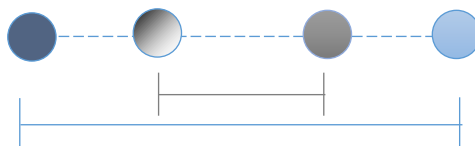


Fig. I.4. Coordenada generalizada R , la distancia que separa las masas.

El movimiento de rotación queda caracterizado por la variable θ que toma los valores de $0 \leq \theta < 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \mid n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

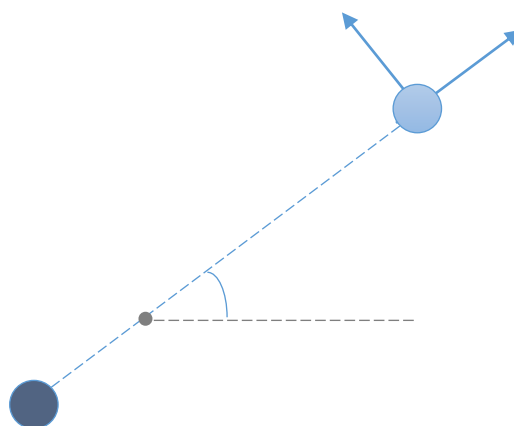


Fig. I.5. Coordenada generalizada θ : ángulo que barre el sistema desde algún lugar de referencia.

Los vectores unitarios correspondientes a cada una de las dos variables en la figura 5, son vectores orto normales y son la base del plano en el cual se mueve el sistema.

El número de grados de libertad f responde a la ecuación $f = 3n - r$ donde n es el número de partículas y r el número de restricciones.

$$f = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

Dos restricciones responden a la ligadura con el plano de cada partícula y otras dos a las ligaduras con el CM de las dos coordenadas sobre el plano.

Desde esta perspectiva se dan las coordenadas generalizadas $(q_{j's})$ a través de la asignación de una variable a cada grado de libertad del sistema. Además se plantea la caracterización del movimiento a través de los momentos generalizados $p_{j's} = p_{j's}(q_{j's}, q_{j's})$. En algunos sistemas las partes móviles, se encuentran acopladas y no resulta fácil la designación de variables. Por lo tanto, es posible determinar las variables de dos maneras distintas. La primera, a través de la inversión de una matriz de transformación y la segunda, la transformada de Legendre.

La idea de las transformadas de Legendre es hacer que una variable dependiente se convierta en independiente, haciendo uso de la diferencia entre la función original y su producto. Por ejemplo se usan para realizar transformaciones entre los potenciales termodinámicos. Sea U la energía interna, una función de estado, de las variables entropía, volumen y composición química $U = U(S, V, N_I)$, la entalpía es otra función de estado que puede construirse como la transformada de Legendre de la energía interna U con respecto a $-PV$, tal que $H = U + PV = H(S, P, N_I)$. Mediante la transformada del Lagrangiano $L = L(q_j, \dot{q}_j)$, se puede obtener el Hamiltoniano $H = H(q_j, p_j)$.

Para tranquilidad del lector, la mayoría de sistemas que se trabajan en cursos de mecánica, como el péndulo simple y doble, movimiento de proyectiles, atracción gravitacional entre planetas, armónicos etc., pueden ser tratados de ésta manera.

ESTADO DE CONFIGURACIÓN

El estado de configuración está determinado por todas las posibles posiciones o valores que puedan tomar las variables asignadas, en cualquier instante de tiempo. Estas son las coordenadas generalizadas del sistema y con ellas, se puede hallar los desplazamientos para los dos movimientos independientes.

Los vectores r_1 y r_2 dan cuenta de las posiciones de las partículas en cualquier movimiento, respecto al CM, de tal manera que cumplen: $R = r_1 + r_2$



Fig. I.6. Vectores r_1 y r_2 , vectores de posición desde el CM.

R_{CM} es cero por haber definido el origen en éste lugar, despejando r_1 :

$$R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

$$r_1 = -\frac{m_2}{m_1}r_2$$

La definición de los vectores r_1 y r_2 :

$$r_1 = -r_1 r$$

$$r_2 = r_2 r$$

La magnitud de r_1 en términos de la magnitud de r_2 es:

$$-r_1 r = -\frac{m_2}{m_1}r_2 r$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1}r_2$$

Como se definió $R = r_1 + r_2$, entonces r_1 y r_2 en términos de la variable R son:

$$R = r_1 + r_2 = \frac{m_2}{m_1}r_2 + r_2 = r_2 \frac{m_2 + m_1}{m_1}$$

$$r_2 = \frac{R}{\frac{m_2 + m_1}{m_1}}$$

$$r_2 = \frac{m_1 R}{m_2 + m_1} r$$

$$r_1 = R - \frac{m_1 R}{m_2 + m_1} = R \left(1 - \frac{m_1}{m_2 + m_1} \right) = \frac{m_2 R}{m_2 + m_1}$$

$$r_1 = \frac{-m_2 R}{m_2 + m_1} r$$

Para facilitar los cálculos, se introduce la definición de masa reducida, cuya finalidad es tratar el movimiento de las dos partículas alrededor del CM, como si fuera un solo cuerpo de masa inercial: $m_{red} \equiv \mu = \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1}$

Escribiendo los vectores r_1 y r_2 en términos de la masa reducida μ :

$$r_1 = -\frac{\mu}{m_1} R r \quad 1 \quad r_2 = \frac{\mu}{m_2} R r \quad (2)$$

Para encontrar las velocidades se halla la variación de los desplazamientos, representados por r_1 y r_2 , analizando cada movimiento independientemente. Se Deja una variable constante y se determina los cambios en la otra, presentando así las variaciones en dos casos.

Caso I

Cuando la distancia R que separa las masas varía y no se presenta rotación o cambios en la variable θ .

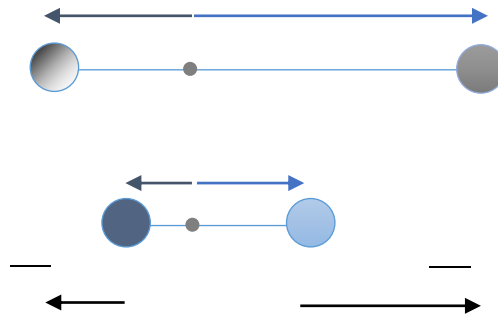


Fig. I.7. Variaciones de r_1 y r_2 , con respecto a R .

En la figura I.7 las partículas azules representan un estado inicial del sistema, cuando la distancia que separa las masas es R . En la parte superior, en grises, se encuentra un estado posterior, cuando las masas se han separado un poco más ($R + dR$).

$$\frac{\partial r_1}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{\mu}{m_1} R r \right) = -\frac{\mu}{m_1} r$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial R} = -\frac{\mu}{m_1} r \quad (3)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\mu}{m_2} R r \right) = \frac{\mu}{m_2} r$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial R} = \frac{\mu}{m_2} r \quad (4)$$

Caso II

Cuando la distancia R que separa las masas se mantiene constante y se presenta rotación o cambios en la variable θ .

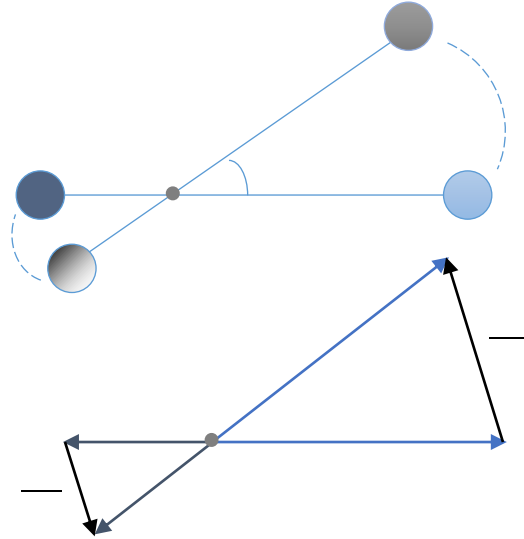


Fig. I.8. Variaciones de r_1 y r_2 , con respecto a θ . Las variaciones se registran a través del arco que forma la trayectoria que sigue el sistema desde un estado a otro posterior.

Las variaciones en la posición cuando el sistema rota, están descritas por el arco que forma la trayectoria desde θ hasta una posición $\theta + d\theta$.

Las variaciones de los vectores r_1 y r_2 escritos en términos de la variación del ángulo θ son:

$$dr_1 = r_1 d\theta \quad dr_2 = r_2 d\theta$$

Ambos son positivos debido a que las variaciones en la rotación se dan en un solo sentido, a diferencia del caso anterior, donde las variaciones de cada vector son en dirección opuesta.

Las magnitudes de los vectores r_1 y r_2 son: $\frac{\mu}{m_1}R$ y $\frac{\mu}{m_2}R$ respectivamente, que se extraen de las ecuaciones (1) y (2). Reescribiendo los vectores y las variaciones se obtienen:

$$dr_1 = \frac{\mu}{m_1} R d\theta \quad dr_2 = \frac{\mu}{m_2} R d\theta$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mu}{m_1} R \theta = \frac{\mu}{m_1} R$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \frac{\mu}{m_1} R \theta \quad (5)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mu}{m_2} R \theta \theta = \frac{\mu}{m_2} R \theta$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta} = \frac{\mu}{m_2} R \theta \quad (6)$$

ESTADO DE MOVIMIENTO

Los cambios netos sobre el sistema son cero, de tal manera que los cambios de configuración son contrarrestados por los cambios de movimiento y se mantiene el Hamiltoniano constante.

El estado de movimiento del sistema, es protagonizado por los momentos conjugados. Estos se encontrarán calculando el momento de cada partícula y posteriormente el momento generalizado, es decir, el momento asociado a cada movimiento independiente.

VELOCIDADES DE CADA PARTÍCULA

Es posible describir la variación total de cada vector posición, como la superposición de las dos variaciones independientes:

$$dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial R} dR + \frac{\partial r_1}{\partial \theta} d\theta$$

$$dr_2 = \frac{\partial r_2}{\partial R} dR + \frac{\partial r_2}{\partial \theta} d\theta$$

De tal manera que las variaciones con respecto al tiempo $\frac{dr}{dt}$ son:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial r_1}{\partial R} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial r_1}{\partial R} R + \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \theta$$

De manera análoga:

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{\partial r_2}{\partial R} R + \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \theta$$

Reemplazando las ecuaciones (3) y (5), (4) y (6) respectivamente en la velocidad de m_1 y m_2 , se tiene la velocidad de cada partícula, escritas en términos de las coordenadas generalizadas:

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{\mu}{m_1} Rr + \frac{\mu}{m_1} R\theta\theta \quad 7$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{\mu}{m_2} Rr + \frac{\mu}{m_2} R\theta\theta \quad (8)$$

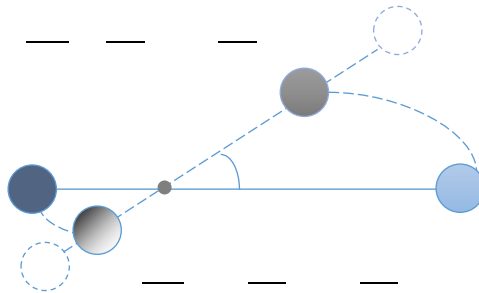


Fig. I.9. Velocidades de las dos masas, con respecto a R y θ .

Los primeros términos en las ecuaciones (7) y (8), representan las variaciones que tiene el sistema en R y los siguientes términos, las variaciones en θ .

MOMENTOS DE CADA PARTÍCULA

El momento de una partícula es el producto de masa y su velocidad, $P = m \frac{dr}{dt}$, tal que:

$$P_i = m_i \frac{dr_i}{dt} = m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial R} R + \frac{\partial r_i}{\partial \theta} \theta \right)$$

Reemplazando las ecuaciones (7) y (8) en P_1 , se obtiene:

$$P_1 = m_1 \left(-\frac{\mu}{m_1} Rr + \frac{\mu}{m_1} R\theta\theta \right)$$

$$P_1 = \mu (-Rr + R\theta\theta) \quad (9)$$

El momento de la partícula 2:

$$P_2 = m_2 \frac{\mu}{m_2} Rr + \frac{\mu}{m_2} R\theta\theta$$

$$P_2 = \mu Rr + R\theta\theta \quad (10)$$

MOMENTOS GENERALIZADOS

El momento generalizado presenta una relación entre los estados de movimiento y de configuración, debido a eso es llamada variable conjugada, que debe ser pensada como una cualidad independiente y susceptible de ser medida, que responde a la siguiente definición, siempre y cuando la energía potencial del sistema no dependa de las velocidades:

$$P_j dq_j = \sum_i^N P_i \cdot dr_i$$

Donde i es el subíndice que indica número de partículas y j el subíndice que sugiere la variable asignada a cada grado de libertad.

$$P_j = \text{Momento Generalizado}$$

$$dq_j = \text{Varia. de la cordenada generalizada}$$

$$P_i = \text{Momento de cada partícula}$$

$$dr_i = \text{Varia. del vector } x \text{ de cada partícula}$$

Caso I

Siguiendo la definición, el momento generalizado en derivadas parciales para el caso I, donde solo varía R , es:

$$P_R = P_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial R} + P_2 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial R}$$

Reemplazando (3), (4), (9) y (10) se tiene:

$$P_R = -\frac{\mu^2}{m_1} -Rrr + R\theta\theta r + \frac{\mu^2}{m_2} Rrr + R\theta\theta r$$

El producto escalar de los vectores unitarios $r \cdot r$ es 1, debido a que son paralelos entre si y el producto escalar $\theta \cdot r$ es 0, debido a que los dos vectores son ortogonales todo el tiempo.

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_R &= \frac{\mu^2}{m_1} R + \frac{\mu^2}{m_2} R \\
 P_R &= R \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{m_1 + m_2^2} \\
 P_R &= R \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \\
 P_R &= \mu R \quad (11)
 \end{aligned}$$

Caso II

De manera análoga, el momento generalizado en derivadas parciales para el caso II, donde R es constante y varía θ , es:

$$P_\theta = P_1 \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + P_2 \frac{\partial r_2}{\partial \theta}$$

Reemplazando (5), (6), (9) y (10):

$$\begin{aligned}
 P_\theta &= \frac{\mu^2}{m_1} -RrR\theta + R\theta\theta R\theta \\
 &\quad + \frac{\mu^2}{m_2} RrR\theta + R\theta\theta R\theta \\
 P_\theta &= \frac{\mu^2}{m_1} R^2\theta + \frac{\mu^2}{m_2} R^2\theta \\
 P_\theta &= R^2\theta \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{m_1 + m_2^2} \\
 P_\theta &= R^2\theta \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \\
 P_\theta &= \mu R^2\theta \quad (12)
 \end{aligned}$$

Se obtienen los momentos generalizados $P_R = \mu R$ y $P_\theta = \mu R^2\theta$, con los cuales se da cuenta del estado de movimiento del sistema.

Analizando Los Momentos Generalizados

En la mecánica Hamiltoniana los momentos conjugados no son vectores, así como tampoco lo son las coordenadas generalizadas, ni las velocidades. Los momentos generalizados dependen de la masa del sistema y de la tasa de cambio en el tiempo, de cada coordenada.

El momento generalizado P_R , es similar al que se obtiene en mecánica newtoniana para un movimiento rectilíneo, la diferencia radica en el carácter escalar de P_R , además que la masa del momento generalizado es la masa del sistema y no la de una partícula.

El momento generalizado P_θ es similar al momento angular newtoniano, ambos son proporcionales a la velocidad angular, sin embargo la velocidad angular del primero es la del sistema y no de cada partícula. De igual manera la medida de R es la separación del sistema y no la posición de cada partícula respecto a un lugar de referencia inercial. Según la ecuación (12), si P_θ puede variar, la relación de proporcionalidad entre el momento angular y la separación entre las masas (R), permite afirmar que el momento angular es más grande cuando las masas están más separadas.

El momento angular para un sistema que rota respecto a un eje, es la resistencia que ofrece dicho sistema a la variación de la velocidad angular. Si P_θ se mantiene constante, se puede asegurar que si las masas están muy separadas, el sistema rota despacio y si están más cerca, giran más rápido alrededor de su CM, sin querer decir que no se conserve la cantidad de movimiento angular, pues las disminuciones de velocidad angular, se hacen a costa del aumento de la separación y viceversa.

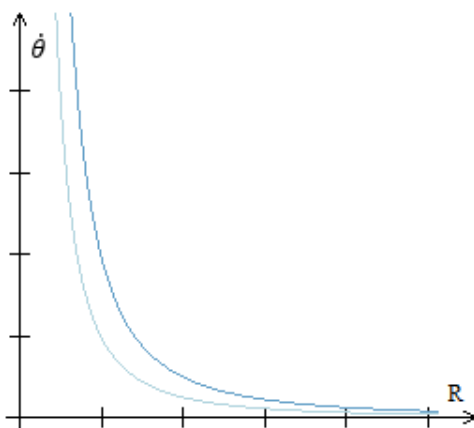


Fig. I.10. La gráfica de $\dot{\theta}$ vs R consta de dos curvas para dos P_θ distintos, 1 y 2. La gráfica se obtiene de la ecuación

$$(12) \text{ del momento generalizado para theta, } P_\theta = \mu R^2 \dot{\theta}.$$

El sistema puede estar en movimiento y R puede ser una constante, de tal manera que $R = 0$, indicando que $P_R = 0$. Lo anterior no significa que las masas no se atraigan, solo que no se están acercando ni alejando. Para que el problema no pierda sentido cuando se presenta esta situación, se debe imaginar que hay una determinada separación, en la cual la fuerza de atracción es anulada con la fuerza centrífuga de la rotación, o que hay un equilibrio centrípeto inercial, debido a la rotación. Si el sistema no rotara la separación de equilibrio sería cero, donde la fuerza proporcional a la separación es cero también.

En el caso en que θ fuera una constante $\dot{\theta} = 0$, es decir, que el sistema estaría sobre un plano, a un ángulo determinado cualquiera y no habría rotación, lo que puede ser posible. En este caso $P_\theta = 0$ y el momento generalizado P_R daría cuenta de todos los cambios de movimiento, en dirección de la línea que une las masas.

EL HAMILTONIANO DEL SISTEMA Y LAS ECUACIONES DE HAMILTON

Para entender la dinámica del sistema se debe entender la manera en que se encuentran articulados los cambios de tales cualidades, teniendo en cuenta que el cambio de cada cualidad esta dado en términos de sus respectivas variables, surge la necesidad de hablar de una medida común, una que exprese en los mismos términos todos los cambios del sistema.

La energía mecánica de un sistema está dada por la suma de los trabajos que realiza el sistema sobre el exterior como función de las coordenadas y momentos generalizados, cuando cambia su estado mecánico, respecto a un estado asumido arbitrariamente como referencia. Encontrar los trabajos realizados, llevará a encontrar esa medida común.

Siguiendo a Ayala (2013), es necesario tener en cuenta que el trabajo que realiza el sistema cuando cambia su configuración es opuesto al trabajo que realiza el sistema cuando cambia su movimiento, de modo que el trabajo neto que realiza el sistema al efectuarse un cambio en su estado mecánico puede anularse y se diría que el cambio de una clase se hace a costa del otro, y que el cambio de la energía mecánica es nula.

Tomando las consideraciones anteriores y el planteamiento que Max Planck elabora en su *Tratado sobre la Termodinámica* en torno al Principio de conservación de la energía, podemos

afirmar que la magnitud que expresa el cambio neto del sistema es la energía del sistema. En su tratado Planck define la energía de la siguiente forma:

La energía de un cuerpo, o sistema de cuerpos, es una magnitud dependiente de la condición momentánea del sistema. Para llegar a una expresión numérica definida de la energía de un sistema en un estado dado, es necesario fijar un cierto estado normal seleccionado arbitrariamente (ej. 0°C, y presión atmosférica). La energía de un sistema en un estado dado, referido al estado normal seleccionado arbitrariamente, es entonces igual a la suma algebraica de los equivalentes mecánicos de todos los efectos producidos fuera del sistema cuando pasa de cualquier manera del estado dado al normal.

ENERGÍA POTENCIAL

La energía potencial es una magnitud que solo puede considerarse en medio de la interacción de 2 o más cuerpos. Considerar la energía potencial como una cualidad de una sola partícula es válido en la cosmovisión de campos.

Ésta es la medida de los cambios de configuración del sistema conservativo en cuestión, que solo se vale de dos configuraciones: final e inicial y no del camino entre estas dos. El cambio de la energía potencial correspondientes al cambio de la configuración se expresa como:

$$\Delta U = - \int_{i=1}^2 F_{neta\ i} \cdot dr_i$$

$$\Delta U = - \int_{i=1}^N F_{neta\ i}^e \cdot dr_i + \int_{i=1}^N \int_{k=1}^N F_{ik} \cdot dr_i$$

$F_{neta\ i}^e$, hace referencia a todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, pero como el sistema se encuentra aislado, entonces solo actúan las fuerzas internas:

$$\Delta U = - \int_{i=1}^N \int_{k=1}^N F_{ik} \cdot dr_i$$

Donde el subíndice i hace referencia al número de partículas o subsistemas en los que se pueda dividir el sistema y k al número de fuerzas actuando sobre el subsistema.

‘La fuerza de atracción entre las masas es proporcional a la distancia que las separa’, se puede interpretar como las fuerzas que hacen una sobre la otra. $F_1 = kRr$, es la fuerza que ejerce la masa 2 sobre la masa 1 y $F_2 = kR(-r)$ la fuerza que ejerce la masa 1 sobre la masa 2. k es la constante del medio que hace equivalente la fuerza y la separación de las masas.

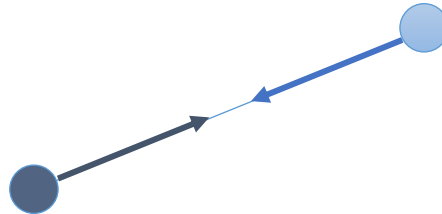


Fig. I.11. Fuerza que hace cada partícula sobre la otra, proporcional a la distancia que las separa.

Los límites de integración indican el máximo y el mínimo de la separación de las masas. La separación de las masas no puede ser 0, porque no pueden ocupar el mismo lugar, pero se toma éste límite de integración ante la imposibilidad de definir exactamente cuál es la separación inicial, además porque no presenta alguna indeterminación matemática. Como tampoco se tiene certeza de la separación máxima se dirá que ésta, es un R máximo.

$$\Delta U = - \int_0^R F_1 \cdot dr_1 - \int_0^R F_2 \cdot dr_2$$

Reemplazando dr_1 y dr_2 obtenidos de las ecuaciones (7) y (8), se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta U &= - \int_0^R kRr \cdot -\frac{\mu}{m_1} dRr + \frac{\mu}{m_1} R d\theta\theta \\ &\quad - \int_0^R kR(-r) \cdot \frac{\mu}{m_2} dRr + \frac{\mu}{m_2} R d\theta\theta \\ \Delta U &= k \frac{\mu}{m_1} \int_0^R R dR + k \frac{\mu}{m_2} \int_0^R R dR \\ U &= \frac{kR^2}{2} \frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m_2} \\ U &= \frac{kR^2}{2} \quad (13) \end{aligned}$$

Lo que se obtiene de la energía potencial, es la expresión típica del caso en que un extremo de un resorte está fijo a alguna superficie y sujeta una masa en el otro. Distinto al caso de atracción gravitacional, la energía potencial no depende de la masa y únicamente depende del tipo de medio por el cual se presenta la atracción.

La energía potencial crece al cuadrado de la separación de las masas y el cambio de esa energía potencial es positivo pues en los límites de la integral se definió el inicio en una separación nula y el final en una separación grande. Es decir, que las masas van de un potencial bajo a un potencial alto y por esto la expresión de la energía se obtuvo positiva.

ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética precisa los cambios de movimiento que completa junto con los cambios de configuración, los cambios totales del sistema. Anteriormente se reconoció que los cambios totales de energía en el sistema son 0, pues el sistema es conservativo y no se pierde ni se gana energía al encontrarse aislado.

Los cambios de la energía cinética son la suma de todos los trabajos que hace el sistema, esta vez en virtud de su movimiento. La expresión para la energía cinética es:

$$\Delta T = - \sum_{i=1}^2 F_{neta\ i} \cdot dr_i$$

$$\Delta T = \sum_{i=1}^2 \frac{d m_i v_i}{dt} \cdot v_i dt$$

$$\Delta T = \sum_{i=1}^2 m_i \frac{d \frac{1}{2} v_i \cdot v_i}{dt} dt$$

$$\Delta T = \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i v_i^2 dt$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Para este sistema se tiene:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2$$

Reemplazando \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de las ecuaciones (7) y (8) se obtiene la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{\mu}{m_1} Rr + \frac{\mu}{m_1} R\theta\theta \right) \cdot \left(-\frac{\mu}{m_1} Rr + \frac{\mu}{m_1} R\theta\theta \right) \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\mu}{m_2} Rr + \frac{\mu}{m_2} R\theta\theta \right) \cdot \left(\frac{\mu}{m_2} Rr + \frac{\mu}{m_2} R\theta\theta \right) \end{aligned}$$

Por las razones de perpendicularidad de los vectores unitarios, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ es 1 y $\theta \cdot \mathbf{r}$ es 0:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \frac{\mu^2}{m_1^2} R^2 + \frac{\mu^2}{m_1^2} R^2 \theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\mu^2}{m_2^2} R^2 + \frac{\mu^2}{m_2^2} R^2 \theta^2 \\ T &= \frac{1}{2} R^2 + R^2 \theta^2 \left(\frac{\mu^2}{m_1} + \frac{\mu^2}{m_2} \right) \\ T &= \frac{\mu}{2} R^2 + R^2 \theta^2 \quad (14) \end{aligned}$$

Como se esperaba la energía cinética depende de las velocidades lineales y angulares del sistema. El primer término es análogo a la energía cinética lineal en la mecánica newtoniana ($\frac{1}{2} m v^2$) y el siguiente a la energía cinética rotacional ($\frac{1}{2} I \omega^2$), con la diferencia que la mecánica Hamiltoniana permite una medida común para el sistema entero, donde no se habla de la energía de cada partícula, sino del sistema.

HAMILTONIANO DEL SISTEMA

El Hamiltoniano da cuenta del estado mecánico del sistema, por las consideraciones físicas descritas anteriormente, el Hamiltoniano es la energía mecánica del sistema ($H = T + U$). Con él y con las ecuaciones de Hamilton, se puede estudiar la dinámica del sistema y posteriormente encontrar las trayectorias y el diagrama de fases.

El Lagrangiano ($L = T - U$) de este sistema, es función de las coordenadas generalizadas y de las velocidades $L(R, \theta, \dot{R}, \dot{\theta})$; el Hamiltoniano es función de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados $H(R, \theta, P_R, P_\theta)$.

La energía potencial del sistema está escrita en términos de las coordenadas generalizadas, pero la energía cinética está en términos de las velocidades y no de los momentos generalizados. Reescribiendo la energía cinética de la ecuación (14), a partir de las ecuaciones (11) y (12) de los momentos generalizados, se tiene:

$$T = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu R^2}$$

De esta manera el Hamiltoniano del sistema toma la siguiente forma:

$$H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu R^2} + \frac{kR^2}{2} \quad (15)$$

A partir de los cambios en el estado mecánico del sistema, expresados como dH , es posible dotar al espacio de fases de una estructura dada por la siguiente relación conocida como las ecuaciones de Hamilton.

$$\begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_f \end{array} = \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q_f} \end{array}$$

Haciendo las respectivas derivadas parciales, las cuatro ecuaciones de Hamilton para el sistema son:

$$\begin{array}{c}
 R \\
 \theta \\
 P_R \\
 P_\theta
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \frac{\partial H}{\partial P_R} \\
 \frac{\partial H}{\partial P_\theta} \\
 -\frac{\partial H}{\partial R} \\
 -\frac{\partial H}{\partial \theta}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \frac{P_R}{\mu} \\
 \frac{P_\theta}{\mu R^2} \\
 \frac{P_\theta^2}{\mu R^3} - kR \\
 0
 \end{array}$$

La cuarta ecuación $P_\theta = 0$, muestra que no hay variaciones de P_θ en el tiempo, por lo que el momento angular P_θ es una constante.

El resultado anterior se describía cuando se encontraron los momentos generalizados, esto es, el sistema está aislado y la rotación se puede dar por una condición inicial; el momento angular se conserva y dado un valor, mientras más grande es la separación de las masas, más pequeña es la velocidad angular y viceversa, de tal manera que P_θ permanece todo el tiempo constante.

Se puede llamar a P_θ como C , debido a que es una constante, sin embargo no se le cambia su etiqueta, pero se tendrá siempre presente que es constante.

POTENCIAL G(R)

En el Hamiltoniano $H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu R^2} + \frac{kR^2}{2}$, se puede identificar que el primer término hace referencia al estado de movimiento del sistema. El último término representa el estado de configuración. El segundo término del Hamiltoniano es parte de la energía cinética, pero al determinar que $P_\theta = C$, entonces el término que también depende de R termina por ser parte del estado de configuración.

Al segundo y tercer término se le llamará potencial o U efectivo, que es una función G que depende de la variable de configuración R ($G R = U_{efec}$), de tal manera que:

$$H = \frac{P_R^2}{2\mu} + G(R)$$

Arbitrariamente y por comodidades al graficar, la constante del medio k tomará el valor de 1, pero puede tomar cualquier valor, con las unidades de fuerza por longitud $\frac{F}{L}$. Para las demás

cantidades que se traten, se obviará las dimensiones y unidades, pues no es valioso en el análisis del sistema, se puede prescindir de ellas, pero verificarlas cuando el lector lo requiera.

Todas las gráficas de G vs R se dan en el primer cuadrante, pues no es posible que $G(R)$ sea negativo, debido a que R toma valores positivos, porque no se considera una separación negativa de las masas.

Grafica I:

En la gráfica de la figura I.12, se muestra $G(R)$ vs R para cuando $P_\theta = 0$, es decir $G(R) = \frac{R^2}{2}$. Las líneas grises representan valores del Hamiltoniano constante.

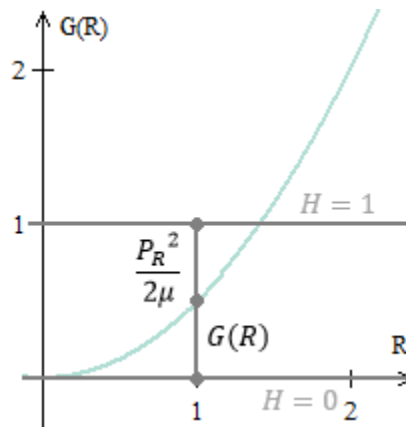


Fig. I.12. $G(R)$ vs R , con $P_\theta = 0$ y dos valores de Hamiltoniano. La parte de la curva entre la recta $H = 1$ y la intersección $G = 1$, representa la energía debida al estado de movimiento. Por debajo de la curva representa la energía debida al estado de configuración, la suma de ambas es el valor del Hamiltoniano.

Este caso está de acuerdo con el análisis previo de los momentos generalizados para cuando θ es una *constante* y muestra que la energía mínima es 0 , cuando $R = 0$ y $P_\theta = 0$.

Si $H = U = \frac{R^2}{2}$, indica que no hay movimiento alguno y por lo tanto $P_R = 0$. La energía mínima depende únicamente de la energía potencial y está determinada por el mínimo valor que puede tomar R , en este caso cero, ratificando que $H = 0$ para $P_\theta = 0$, $P_R = 0$ y $R = 0$

Para el valor de energía $H = 1$, se obtiene distintas posibles configuraciones, con un rango de separación de las masas entre 0 y $\sqrt{2}$. Si $H = 1$ y $R = 1$, entonces tendremos que: $1 = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{1}{2}$

y $\frac{P_R^2}{2\mu} = \frac{1}{2}$. Se muestra que para ese valor del Hamiltoniano, sin rotación y para una separación

de 1 entre las masas, la energía que representa el estado de configuración es igual a la energía que representa el estado de movimiento.

Gráfica II:

En la gráfica de la figura I.13, se muestra $G(R)$ vs R , cuando $P_\theta = \overline{2\mu}$, es decir $G(R) = \frac{1}{R^2} + \frac{R^2}{2}$:

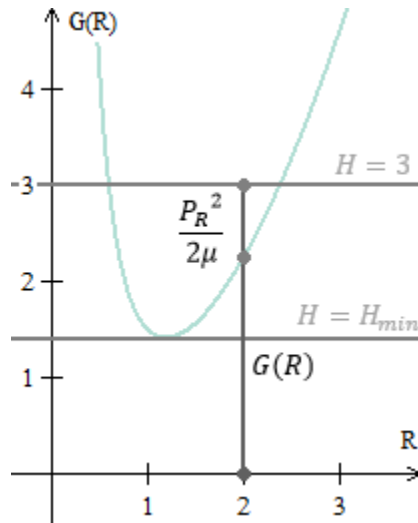


Fig. I.13. Potencial $G(R)$ vs R , con $P_\theta = \overline{2\mu}$ y dos valores de Hamiltoniano, $H = 3$ y un H mínimo.

En este caso el valor mínimo del Hamiltoniano no es 0, porque $P_\theta \neq 0$, pues aunque las masas no se movieran en la dirección de r , es decir $P_R = 0$, el Hamiltoniano tendría cierto valor proporcionado por la energía rotacional y potencial que genera la separación particular, donde la rotación y la atracción disponen al sistema en equilibrio inercial.

Haciendo que la energía de movimiento sea cero, o sea que $P_R = 0$, el valor del Hamiltoniano es el valor del potencial $H = G(R)$. El mínimo de esta función, es el valor mínimo para el Hamiltoniano $H = 1,435$. Este valor es a su vez el mínimo valor que puede tomar el potencial cuando no hay movimiento en la dirección de r . Como se muestra en la gráfica la energía mínima implica que sólo existe una separación de las masas, para este ejemplo $R = 1,189$, donde la fuerza de atracción es anulada con la fuerza centrífuga debida a la rotación, o que existe un equilibrio inercial entre el movimiento de rotación y el de atracción.

Para el valor mínimo de la energía mecánica, el sistema solo permite la configuración, mencionada anteriormente. Para un valor más grande de H , el rango de la separación entre las

masas se amplía, es decir que una mayor energía del sistema permite una gran cantidad de configuraciones

De una manera análoga a la gráfica anterior, con $H = 3$ se tiene un rango de posibles separaciones de las masas entre **0,595** y **2,376**. Si $H = 3$ y $R = 2$ por ejemplo, entonces tendremos que: $3 = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{1}{4} + \frac{4}{2} \frac{P_R^2}{2\mu} = \frac{3}{4}$. Mostrando que para ese valor del Hamiltoniano y para una separación de 2 entre las partículas, la energía que representa el estado de configuración es tres veces la energía que representa el estado de movimiento.

Gráfica III:

En la gráfica de la figura I.14, se muestra $G(R)$ vs R para diferentes valores de P_θ : $\overline{0.5\mu}$, $\overline{2\mu}$, $\overline{4\mu}$, $\overline{6\mu}$... etc. Se obtiene una familia de curvas semejantes con distintos valores de energía mínima.

En general el Hamiltoniano no es 0, aun si no hay rotación, pues como se dijo R no puede ser 0.

Entre más pequeño es P_θ , cuando éste tiende a 0, se observa que la gráfica tiende a parecerse a la primera que se graficó ($\frac{R^2}{2}$).

Si el momento angular es más grande, también es más grande el valor de la energía mínima del sistema. En la figura I.14 se escoge una energía $H = 2$, por debajo de esta línea hay curvas de potencial con momento angular P_θ y energía mínima igual o inferior al representado con la recta de energía mínima 2. Hay momentos angulares P_θ más grandes, para los cuales $H = 2$ no hace parte de las energías posibles del sistema.

Para un valor determinado de Hamiltoniano, cada curva por debajo de otra, adopta un intervalo de R mayor, de tal manera que para momentos angulares más altos la separación entre las masas se restringe a un dominio más angosto.

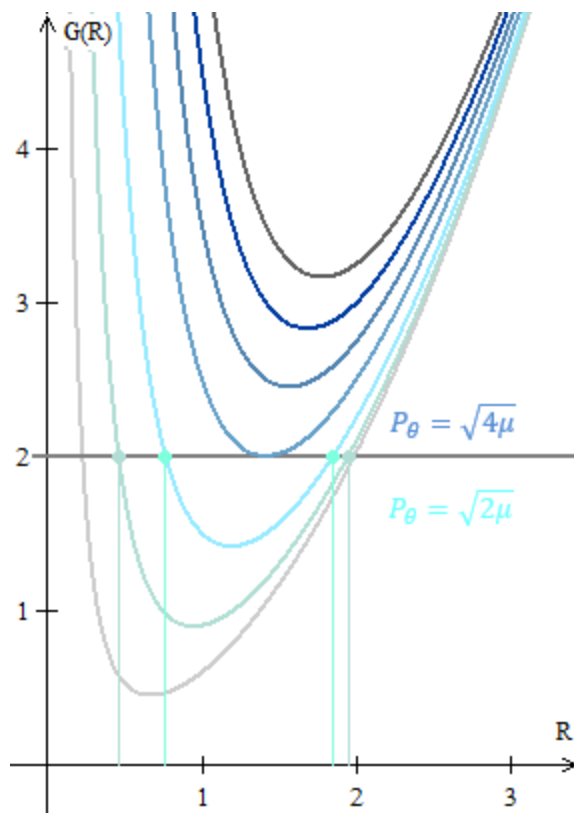


Fig. I.14. Potencial $G(R)$ vs R , para distintos valores de P_θ . La primera curva en gris es con $P_\theta = \sqrt{0,5\mu}$, las siguientes son $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{2\mu}$, $\sqrt{4\mu}$, $\sqrt{6\mu}$, etc.

De lo anterior se concluye que para una energía mecánica cualquiera: entre más grande es el momento angular P_θ , menor es el dominio de las posibles separaciones entre las masas. En otras palabras, R adopta un rango menor de posibilidades de configuración, cuando el sistema gira más rápido. Lo que no implica que las separaciones entre las masas sean necesariamente más pequeñas, sino que el extremo inicial del dominio de las separaciones (R) se aleja del 0 y el extremo final se acerca al inicial, conforme el momento angular crece.

También se evidencia que para diferentes valores del Hamiltoniano o de R , los cambios de configuración se hacen a costa de los cambios de movimiento, satisfaciendo la constancia del Hamiltoniano.

Gráfica IV:

Las siguiente es una superficie del Potencial $G(R)$, donde incluye todos los valores de P_θ .

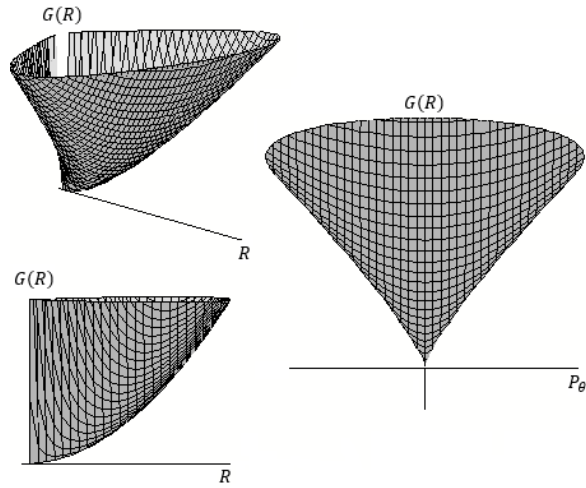


Fig. I.15. Tres cortes de $G(R)$ vs R , para distintos valores de P_θ .

Una mirada tridimensional como el de la figura I.15, del potencial efectivo contra la longitud del sistema, muestra una superficie que barre algunos valores de momento angular y da una imagen más amplia de la figura 14, para los valores de P_θ .

APENDICE 2

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE HAMILTON

Las ecuaciones de Hamilton en general no tienen solución analítica, por lo que se pueden resolver con algún método numérico en un software, aquí se propone el método de Euler en Microsoft Excel, por su fácil manipulación.

$$\xi_{i+1} = \begin{matrix} R \\ \theta \\ P_R \\ P_\theta \end{matrix}_{i+1} = \begin{matrix} R_i + \frac{P_{Ri}}{\mu} \Delta t \\ \theta_i + \frac{P_{\theta i}}{\mu R^2} \Delta t \\ P_{Ri} + \frac{P_{\theta i}^2}{\mu R_i^3} - k R_i \Delta t \\ P_{\theta i} \end{matrix}$$

Conociendo un estado inicial se pueden conocer los anteriores. Se solucionó para los valores en el tiempo de 0 a 3.15s. El paso, Δt es de 0.01s. La masa $\mu = 1$ y con $P_\theta = 1$. Además se dio como condición inicial una distancia mínima $R = 0.10$, $\theta = 0$ y $P_R = 0$.

Se obtienen tablas y gráficas correspondientes a cortes del diagrama de fase y a la evolución temporal. Se presentan cinco gráficas P_R vs R , θ vs R , R vs t , θ vs t y P_R vs t .

N° de datos	Tiempo	R	θ	P_R	P_θ	μ
1	0,00	0,10	0,00	0,00	1	1
2	0,01	0,10	1,00	10,00		
3	0,02	0,20	2,00	10,00		
4	0,03	0,30	2,25	10,00		
5	0,04	0,40	2,36	9,99		
6	0,05	0,50	2,42	9,99		
7	0,06	0,60	2,46	9,98		
8	0,07	0,70	2,49	9,98		
9	0,08	0,80	2,51	9,97		
10	0,09	0,90	2,53	9,96		
11	0,10	1,00	2,54	9,95		
12	0,11	1,10	2,55	9,94		
13	0,12	1,20	2,56	9,93		
14	0,13	1,30	2,57	9,92		
15	0,14	1,40	2,57	9,91		
16	0,15	1,50	2,58	9,89		
17	0,16	1,59	2,58	9,88		
18	0,17	1,69	2,58	9,86		
19	0,18	1,79	2,59	9,85		
20	0,19	1,89	2,59	9,83		
21	0,20	1,99	2,59	9,81		
22	0,21	2,09	2,60	9,79		

Fig. II.1. Tablas en la solución de las ecuaciones de Hamilton por el método de Euler en Excel.

P_R vs R

Esta gráfica refleja una de las líneas de fase semejantes a las dibujadas antes con el espacio vectorial en la figura 1.3, que proporcionan las ecuaciones de Hamilton.



Fig. II.2. Diagrama de fase P_R vs R , desde la solución de las ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

θ vs R

Partiendo desde un ángulo inicial de 0 rad el sistema pasa rápidamente por varios ángulos hasta aproximadamente 2,65 rad. Luego de esto las masas se siguen separando sin variar significativamente el ángulo, es decir con una velocidad angular θ bastante pequeña. Luego que las masas empiezan a acercarse los ángulos varían significativamente, hasta obtener otra vez separaciones pequeñas y cambios bastante rápidos de ángulo. Los cambios siempre se dan en una dirección, es decir que los ángulos que se barren siempre son positivos, describiendo las trayectorias en espiral.

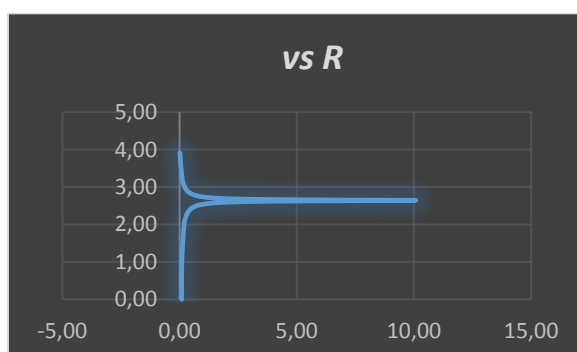


Fig. II.3. Diagrama θ vs R , de la solución de las ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

R vs t

En la figura II.4 justo en la mitad del recorrido las masas alcanzan su mayor elongación y a partir se puede concluir que toma el mismo tiempo en ir desde la separación mínima a la máxima y desde la separación máxima hasta la mínima.

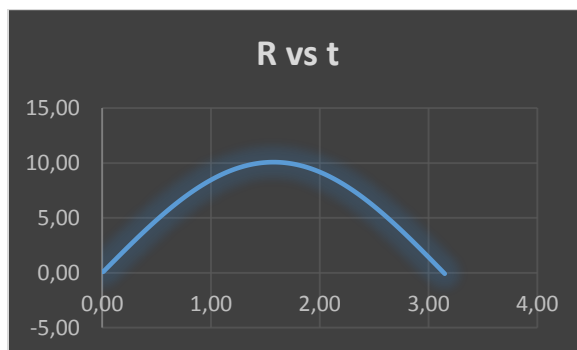


Fig. II.4. Gráfica de R vs t , de la solución de las ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

θ vs t

Este diagrama muestra lo sucedido en el tiempo con las variaciones del ángulo. Como se dedujo en el corte de espacio de fase θ vs R , al principio el ángulo varía bastante rápido, luego sigue creciendo muy lentamente, esto sucede cuando la separación se hace muy grande. Posteriormente cuando R se hace pequeño, el ángulo crece en un intervalo muy pequeño de tiempo.

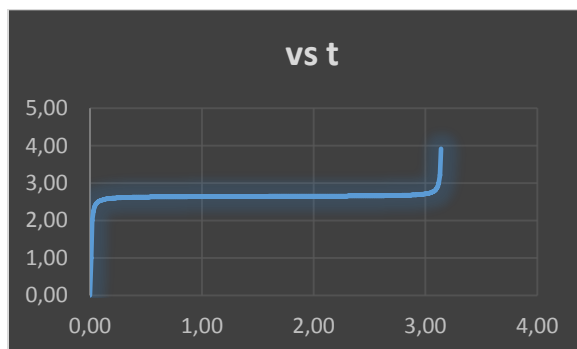


Fig. II.5. Gráfica de θ vs t , de la solución de las ecuaciones diferenciales por métodos numéricos

La curva en la figura II.5 y la trayectoria θ vs R en la figura II.3, dejan ver lo que sucede con el sistema cuando rota rápido, cuando adquiere la menor separación y rota lentamente.

P_R vs t

La gráfica II.6, muestra el sistema en el primer intervalo de tiempo cuando crece la velocidad lineal muy rápido, hasta llegar a su máximo para esos valores de las constantes del Hamiltoniano y de P_θ . Luego de eso la velocidad lineal decrece ligeramente conforme las masas se siguen separando y el tiempo sigue transcurriendo.

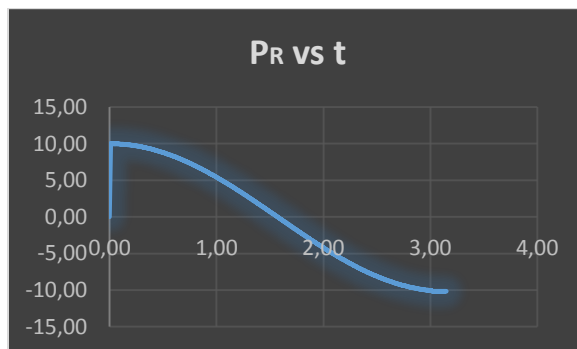


Fig. II.6. Gráfica de P_R vs t , de la solución de las ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

Después que el sistema se separa en su máximo R , donde P_R es cero, empieza de nuevo a aumentar de manera ligera el momento lineal, pero esta vez en dirección hacia el centro y debido a eso es el signo negativo de P_R . Si se extiende esta gráfica, se consigue una curva con periodicidad desde un P_{Rmax} , hasta $P_R = 0$ cada $2s$. Lo que quiere decir que para este caso el sistema tarda $2s$ en ir desde se separación mínima, hasta su separación máxima o viceversa.

APENDICE 3

TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE DATOS

En un tratamiento estadístico es importante mantener el máximo posible de decimales y asegurarse que no se omitan o modifiquen datos. Esto puede ayudar a controlar la aparición y propagación de errores que invalidan los resultados.

Incertidumbre Absoluta

La incertidumbre absoluta difiere del error absoluto, en que las variaciones no son con respecto al promedio o a un valor real porque se desconoce, sino a la misma medida corregida. Para medidas directas la incertidumbre tiene el valor del intervalo de duda escogido. Para medidas indirectas se toma el valor absoluto, de la diferencia entre las medidas, de la magnitud física corregida y sin corregir.

Si f es una función de x , entonces la incertidumbre Δf es $f - f_{\text{Corregido}}$, para medidas indirectas se tiene:

$$\Delta f = f(x) - f(x + \Delta x) \quad (1)$$

Si se desea saber el volumen de una esfera y se mide su diámetro como $(3,04 \pm 0,01) \text{ cm}$, el valor de incertidumbre absoluto del diámetro es $0,01 \text{ cm}$, pero la del volumen no lo es. Si el volumen de la esfera es $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, entonces $V = 14,71 \text{ cm}^3$ y $V_{\text{Corregido}} = 14,85 \text{ cm}^3$, por lo que $\Delta V = 0,14 \text{ cm}^3$.

Incertidumbre Relativa

La incertidumbre relativa, se refiere porque expresa cuán alejada está la medida de un valor verdadero, que se encuentra en el intervalo que se escogió. Esta incertidumbre se suele dar en porcentaje.

Si f es una función de x , entonces $\frac{df}{dx} = f'(x)$.

$$df = f' \cdot x \cdot dx$$

$$\frac{df}{f(x)} = \frac{f' \cdot x}{f(x)} dx$$

Por lo tanto la incertidumbre relativa $\frac{\Delta f}{f(x)}$ es:

$$\frac{\Delta f}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \quad (2)$$

Para el ejemplo anterior, la incertidumbre relativa está determinada por:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V'}{V} \Delta D$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi \cdot 2 D^2}{\pi \cdot 6 D^3} \Delta D \times 100\% \approx 1\%$$

Incertidumbre General para Medidas Indirectas

Cuando se quiere medir una magnitud física, pero esta depende de varias variables y cada una de estas tiene su respectiva incertidumbre, se usa el método general de estimación de la incertidumbre absoluta. Sea la función $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, cuya incertidumbre está dada por:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2} \quad (2)$$

Por ejemplo, cuando se quiere hallar el volumen de un cilindro $V = \frac{\pi}{4} D^2 h$. Si $D = 2,00 \pm 0,01 \text{ cm}$ y $h = 5,00 \pm 0,02 \text{ cm}$, la incertidumbre es:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D} \right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)^2 \Delta h^2} = 0,17 \text{ cm}^3$$

Por lo que el volumen es $V = (15,71 \pm 0,17) \text{ cm}^3$.

El valor de la incertidumbre instrumental (σ_{ins}) como se dijo está determinada por el intervalo de duda, ésta es, la incertidumbre para medidas directas, que se sugirió como la mitad de la resolución del instrumento. En los cálculos de una variable que depende de otras, en las medidas indirectas, la incertidumbre instrumental queda decretada por la ecuación (2).

NUMERO DE MEDICIONES Y REPORTE DE MEDIDAS

Error Promedio e Incertidumbre Asociada al Promedio

El error promedio asociado a cada medición es la desviación poblacional μ , donde x_i representa los datos, x el promedio de dichos datos y N el número total de mediciones hechas

$$\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x)^2}{N - 1} \quad (3)$$

En algunos casos hay medidas que son descartables, que se pudieron obtener por alguno de los errores mencionados. Para ello se debe tener un rango de referencia, donde por fuera de él las medidas pueden ser ignoradas, este intervalo puede ser el más estándar $x - 3\mu$, $x + 3\mu$, u otro, dependiendo de las conveniencias y precisiones requeridas en la medición del sistema. Después de esto, se recalcula x y μ .

Si una muestra importante de medidas está fuera del rango es importante revisar las hipótesis bajo las cuales se hace el experimento e intentar eliminar cualquier error ya sea sistemático o accidental.

La incertidumbre estadística (σ_{est}), es la incertidumbre asociada al promedio:

$$\sigma_{est} = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \quad (4)$$

Numero Óptimo de Mediciones

En el laboratorio siempre existe la duda de cuantos valores es necesario tomar para obtener una buena muestra y con ello un buen análisis del sistema de estudio. Al valor óptimo de medidas se le nota como N_{OP} , cuando la incertidumbre estadística y la incertidumbre instrumental son aproximadamente las mismas se tiene:

$$\sigma_{est} \approx \sigma_{ins} = \frac{\mu}{\sqrt{N_{OP}}}$$

$$N_{OP} = \frac{\mu^2}{\sigma_{ins}^2} \quad (5)$$

Para un objeto que cae, se mide el tiempo que tarda en descender, entre 5 y 10 veces, al calcular la desviación poblacional μ , se puede encontrar el valor óptimo de mediciones de tiempo N_{OP} . Si el número de mediciones es muy grande y no es posible medir esta cantidad de veces, se usa el factor “t” de corrección de Student, que depende de la cantidad de datos y de la confianza de la corrección³. Para hallar la incertidumbre estadística:

$$\Psi = t_{N-1} \frac{\mu}{N} \quad (6)$$

Presentación de la Medida

La incertidumbre total de una medida cuando se toma el número óptimo de mediciones es:

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{ins}^2 + \sigma_{est}^2} \quad (7)$$

Y la incertidumbre cuando se hace la corrección de Student:

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{ins}^2 + \Psi^2} \quad (8)$$

La medida se reporta como el promedio y la incertidumbre asociada con las mismas unidades:

$$x \pm \Delta x$$

Para ejemplificar, un experimentador debe saber exactamente la masa de su sistema, para ello lo mide 5 veces; su sistema es un armario que debe ser trasladado dentro de un edificio, esto es, en el campo gravitacional terrestre. Su pesa tiene una precisión de $\pm 0,5 g$ y los registra en la siguiente tabla:

Medición 1	Medición 2	Medición 3	Medición 4	Medición 5
73 g	72 g	74 g	72 g	73 g

Tabla III.1. Datos de masas medidas

El experimentador halla el promedio de los datos que es 73 g. Aplicando la ecuación (3) se tiene que la desviación poblacional μ es 0,8 g. Luego de la ecuación (5), se sabe que $N_{OP} = 3$, por lo que las mediciones están en el rango del número óptimo. Verificado lo anterior se usa la ecuación (4) para hallar la incertidumbre estadística $\sigma_{est} = 0,4 g$. La ecuación (7) y los errores,

³ Las tablas del factor de Student t_{N-i} para distintos grados de confianza pueden encontrarse en la web o en cualquier libro de estadística para experimentación.

estadístico e instrumental $\sigma_{ins} = 0,5 g$, proporcional el valor de incertidumbre $\Delta x = 0,6 g$. La medida de la masa del armario se presenta como $m = (73,0 \pm 0,6) g$.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Como los cálculos tienen tendencia a producir resultados que consisten en largas filas de números, se debe tener cuidado de citar el resultado final con sensatez. Si se da el valor de un voltaje a través de un resistor, como $15,4 \pm 0,1 V$ y la corriente como $1,7 \pm 0,1 A$, se puede calcular el valor de la resistencia del circuito. La razón $\frac{V}{I}$ que se obtiene es $9,0588235 ohms$. Un breve cálculo demuestra que la incertidumbre absoluta en la resistencia es cercana a $0,59 ohms$. Así que, si las primeras dos cifras decimales del valor calculado son inciertas, es claro que el resto carece de sentido. Una afirmación como la de que $R = 9,0588235 \pm 0,59 ohms$ es absurda. Los resultados se presentan de manera tal que la respuesta y su incertidumbre, sean consistentes $R = (9,1 \pm 0,6) ohms$.

Las cifras significativas son las que tienen significado real, así que no tiene sentido obtener un dato con una cantidad mayor de decimales que las de la incertidumbre y tampoco una incertidumbre con varios decimales. No obstante, para los cálculos se usan todos los decimales, las constantes con número infinito de cifras significativas y los factores de conversión exactos; mientras que para la presentación de los datos se siguen las reglas:

Multiplicación y división: el resultado tiene tantas cifras significativas como el factor que menos tiene:

$$aaa \times bb = rr$$

Suma y resta: el resultado tiene tantas cifras decimales como el que menos tiene:

$$aaa + b,b = rrr$$

Es importante no confundir la cantidad de cifras significativas, con la cantidad de cifras decimales.

Por último, queda por decir, que todas las variables o salidas de los sistema clásicos son medibles y por intereses de comparación con la mecánica cuántica, es importante destacar que en

mecánica clásica, la única probabilidad que existe de no determinar con exactitud las magnitudes físicas, las salidas o variables dinámicas, se remite a los errores en la medición y la resolución del instrumento que por muy preciso que sea, nunca tendrá un error igual a cero, pero si puede ser despreciable en el contexto que lo permita.

APENDICE 4

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

El principio de incertidumbre o el principio de indeterminación, se puede explicar a partir del experimento de la doble rendija, esta vez con solo un orificio de la siguiente manera:

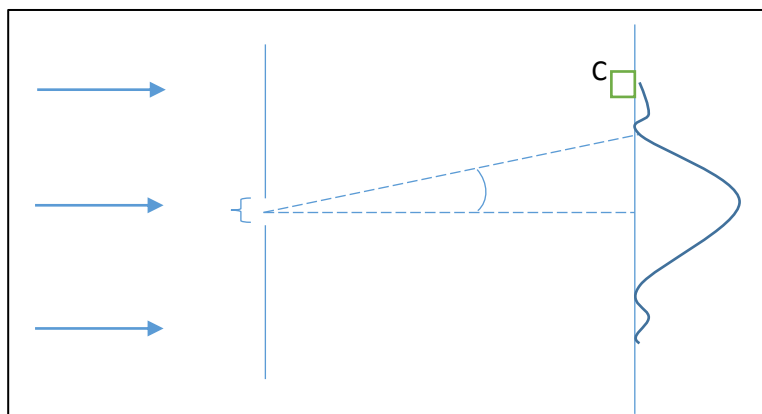


Fig. IV.1. B es la longitud del agujero, C es el detector y $\Delta\theta$ es el ángulo formado entre la dirección horizontal con que venía la partícula y el lugar donde hace contacto en la pantalla.

Supóngase que desde muy lejos vienen partículas con una energía determinada, es decir que todas vienen en forma horizontal, de izquierda a derecha en la figura IV.1. Todas las partículas antes de cruzar el agujero B tienen un momento horizontal p_0 , pero como vienen de una fuente muy lejana, las partículas no se mueven ni hacia arriba ni hacia abajo y el momento en el eje vertical p_y es 0. Cuando cruzan un agujero B , se sabe la posición vertical ' y ' con una precisión de la mitad del ancho del agujero $\Delta y = \pm \frac{B}{2}$. Lo que ha sucedido ahora es que el momento ha dejado de ser completamente horizontal y el vertical ha dejado de ser cero. En resumen cuando se intentó determinar la posición vertical de la partícula haciéndola pasar por el agujero, se ha perdido la información del momento en ese mismo eje.

Cuando la partícula que tiene comportamiento ondulatorio, pasa por el agujero sufre un efecto de difracción, como ocurre con la luz. De acuerdo con esto existe una probabilidad de que las partículas no sigan en línea recta después de cruzar la rendija. Por lo tanto hay alguna posibilidad de que la partícula se esté moviendo hacia arriba o hacia abajo, lo que indica que tiene un momento en y que hace que llegue hasta el contador C , ubicado en cualquier lugar de la pantalla

y el cual recibe la partícula completa. El diagrama de la figura 16 muestra un ángulo que es la medida de la indeterminación de un ángulo final por el efecto de la difracción.

La dispersión del momento vertical p_y de la partícula es igual a $p_0\Delta\theta$, sin embargo $\Delta\theta$ es tan grande como pequeño sea el orificio que atraviesa, de tal manera que $\Delta\theta = \frac{\lambda}{B}$ y Δp_y es $p_0 \frac{\lambda}{B}$. Si el orificio es muy pequeño se puede saber con mucha precisión la posición de la partícula, pero entonces el ángulo de difracción se haría mucho más grande y por lo tanto p_y se indeterminaría cada vez más. Si el agujero es muy ancho, el momento en y no variará mucho, pero no se tendrá una buena precisión para medir su posición. Como la incertidumbre en la posición es $\Delta y = \pm \frac{B}{2}$, es posible escribir:

$$\Delta p_y = p_0 \frac{\lambda}{2\Delta y}$$

Además de esto, en la mecánica cuántica la constante de Planck h se define como el producto de p_0 y λ , de lo que se obtiene:

$$\Delta p_y \Delta y = \frac{\hbar}{2} \quad (4.1)$$

Se puede notar que alguien puede determinar la posición de la partícula y decir con qué momento venía para llegar hasta ese lugar, sin embargo la ecuación 4.1 y el principio de incertidumbre no se refiere a eso, ni a comentarios sobre el pasado, sino que tiene un carácter predictivo y es la imposibilidad de medir simultáneamente con total precisión la posición y su respectiva componente de momento.

La forma de la ecuación 4.1 obtenida por la deducción del experimento de difracción, es la fórmula propuesta por Heisenberg, con $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.2)$$

APENDICE 5

MATRIZ DE HAMILTONIANO

Cuando se habla de la evolución de un sistema, se está hablando de los cambios de estado que tiene al pasar por un aparato, que puede ser un campo eléctrico o magnético, un polarizador etc. Al atravesar dicho aparato ha transcurrido un tiempo. Si se supone un sistema en el estado ϕ en un tiempo t_1 que posteriormente atraviesa un aparato y sale en el tiempo t_2 , tiene una probabilidad de estar en ese estado χ diferente a si no hubiese existido demora bajo la acción del aparato. La operación de esperar su puede nombrar como U y especificando los tiempos de inicio y fin se puede escribir U_{t_2, t_1} .

La amplitud que se quiere se puede escribir como $\chi U_{t_2, t_1} \phi$ e introduciendo el operador unidad a cada lado del operador ‘esperar’, se tiene que $i U_{t_2, t_1} j$ es el operador escrito en forma matricial. El físico teórico se encarga de construir esta matriz para cada experimento que realiza. Si el experimentador tiene un par de protones, uno que está quieto y otro que se aproxima desde el infinito atómico, cuando colisionan, pueden salir dos Kaones, seis Piones y dos neutrones en distintas direcciones con diferentes momentos. El estado ϕ habla sobre cómo están los protones antes de colisionar, por ejemplo incluye información sobre los momentos y el spin. El estado χ especificaría todos los momentos, spines etc., de todas las partículas.

Para comprender la matriz U_{t_2, t_1} y cómo evoluciona el sistema en un intervalo infinitesimal de tiempo, para $t_2 = t_1 + \Delta t$. Llámese $\psi(t)$ al estado en el instante t ; un instante después de transcurrido el pequeño intervalo de tiempo Δt es:

$$\psi(t + \Delta t) = U_{t + \Delta t, t} \psi(t) \quad (4.9)$$

Si se introduce el operador unidad en la ecuación 4,9 y se encuentra la amplitud de que el estado ψ en un tiempo posterior quede en un estado base i , entonces la ecuación 4.9 toma la siguiente forma:

$$i \psi(t + \Delta t) = \sum_j i U_{t + \Delta t, t} j j \psi(t) \quad (4.10)$$

Si se tiene que $C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle$ representa la amplitud de estar en el estado de base i en el instante t , se puede considerar esta amplitud variando en el tiempo. Al tiempo $t + \Delta t$ cada amplitud es proporcional a todas las otras amplitudes al tiempo t multiplicadas por un conjunto de coeficientes de la matriz $U_{ij}(t) = \langle i | U | j \rangle$, de esta manera la ecuación 4.10 se convierte en:

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) C_j(t) \quad (4.11)$$

Si Δt tiende a cero se obtiene el estado original, por lo que $U_{ii} \rightarrow 1$ y $U_{ij} \rightarrow 0$ si $i \neq j$, es decir, $U_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ para $\Delta t \rightarrow 0$. Así que cada coeficiente, U_{ij} debe diferir de δ_{ij} en cantidades proporcionales a Δt , de tal manera que $U_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} \Delta t$. Si de la matriz K_{ij} , se factoriza un factor $(-i/\hbar)$, la matriz U_{ij} en función del tiempo como:

$$U_{ij}(t + \Delta t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \quad (4.12)$$

Si reemplazamos la ecuación 4.12 en la 4.11 se obtiene que:

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j \left(\delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \right) C_j(t) \quad (4.13)$$

Si se hace la suma $\sum_j \delta_{ij} C_j(t)$, se obtiene simplemente C_i , si se organiza la ecuación 4.13 se tiene:

$$\frac{C_i(t + \Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) C_j(t)$$

$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) C_j(t) \quad (4.14)$$

Como $C_i(t) = \langle i | \psi(t) \rangle$, la ecuación 4.14 indica como cada amplitud de encontrar el estado ψ en uno de los estados base i , varía en el tiempo, o dicho de otra manera la ecuación informa sobre como ψ varía en el tiempo, ya que se está describiendo con cada amplitud. Además la variación de ψ en el tiempo se describe mediante la matriz H_{ij} , que de manera natural incluye todo lo que se le hace al sistema para que cambie. Si se conoce los H_{ij} que contienen la física de la situación y que en general pueden depender del tiempo, se tiene una descripción completa del sistema. La

ecuación 4.14 es entonces la ecuación de la dinámica del mundo cuántico, escrita en forma matricial e introducida inicialmente por Heisenberg.

Además de esto se puede establecer que los estados base también cambian en el tiempo, sin embargo en términos geométricos implica emplear un sistema de coordenadas rotante, de modo que es satisfactoriamente completo considerar que los estados de base no cambian en el tiempo.

Los coeficientes H_{ij} se denominan matriz Hamiltoniana o Hamiltoniano, si se conocen estos coeficientes se puede responder a cualquier pregunta relacionada con lo que sucederá. Cada sistema o partícula en un campo magnético, en un campo eléctrico o en alguna situación particular, tienen una matriz de Hamiltoniano particular.

Otro modo de escribir la ecuación 4.14 es escribiendo explícitamente C_i , de modo que $i\hbar \frac{d}{dt} C_i \psi = \sum_j H_{ij} C_j \psi$ o del modo $i\hbar \frac{d}{dt} C_i \psi = \sum_j C_j H_{ji} \psi$. La amplitud C_j describe la posibilidad bajo las condiciones físicas descritas por H de que un estado j engendre durante un tiempo dt el estado i . De esta manera se obtiene que el operador Hamiltoniano es:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi = H \psi \quad (4.15)$$

Según la ecuación 4.15, el operador hamiltoniano, que se interpreta como la energía del sistema, produce el mismo resultado que $\frac{d}{dt}$ cuando actúa sobre cualquier estado. No obstante la ecuación no afirma que el operador H sea idénticamente la misma operación que $\frac{d}{dt}$, pues la ecuación es la que constituye la ley de movimiento para los sistemas cuánticos.

El Hamiltoniano tiene una propiedad $H_{ij}^* = H_{ji}$ que proviene de la condición de la probabilidad total $\sum_i C_i^2 = 1$ de que el sistema estando en algún estado no cambie. Si se tiene alguna partícula, se seguirá teniendo a medida que transcurre el tiempo.

Si las condiciones físicas no varían en el tiempo, entonces H es independiente del tiempo. Como un ejemplo puede haber un sistema que tenga tan solo un estado base, donde su Hamiltoniano no cambia en el tiempo, algo así como un átomo de hidrogeno en reposo. Para este caso se tiene:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11} C_1$$

Como no se alteran las condiciones físicas y H_{11} es independiente del tiempo, la solución de la ecuación diferencial se convierte en:

$$C_1 = a e^{-(i/\hbar) H_{11} t}$$

La ecuación 4.14 es la dependencia temporal de un estado de energía $E = H_{11}$ definida y a , la constante de integración.

Si en otro caso se tienen dos estados de base, las ecuaciones diferenciales que se plantearían serían:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= H_{11} C_1 + H_{12} C_2 \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= H_{21} C_1 + H_{22} C_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier sistema que puede estar constituido por dos estados base.

AMPLITUDES DE PROBABILIDAD PARA UN SISTEMA CON DOS ESTADOS: LA MOLECULA DE AMONIACO

La molécula de amoniaco tiene un átomo de nitrógeno y tres de hidrogeno, la molécula tiene una estructura tal que sus cargas se equilibran y tiene forma tetraédrica o en pirámide. Esta molécula como cualquier otra, tiene un número infinito de estados, puede girar alrededor de cualquier eje, puede vibrar internamente o trasladarse y de esta manera tener infinitas formas de estar. Sin embargo para dar un ejemplo de cómo funciona la ecuación 4.16, se puede considerar que la molécula vibra lo menos posible, que no tiene energía cinética de traslación y que además solo gira alrededor del eje de simetría. Ahora los dos estados que se pueden considerar, manteniendo todos los demás constantes son las dos posibles posiciones del átomo de nitrógeno, arriba o debajo del plano que forman los hidrógenos, tal como lo muestra la figura V.1.

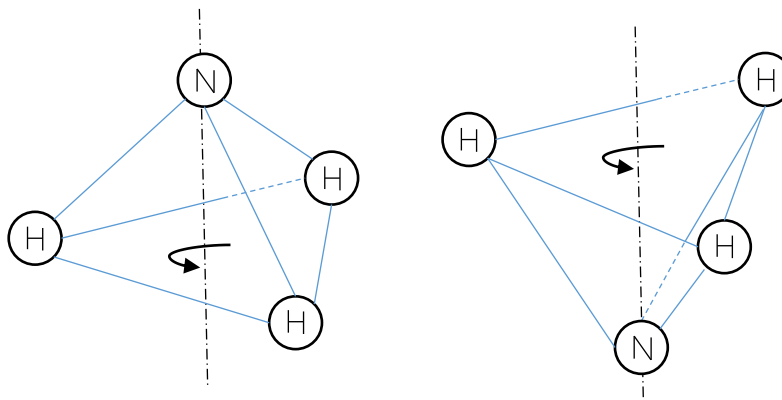


Fig. V.1. Ordenamiento geométrico de la molécula de amoniaco.

Cuando el sistema está en el estado 1 el nitrógeno está arriba y cuando está en el estado 2, el nitrógeno está abajo. Así que se tiene el caso de un sistema con dos estados. En cualquier instante el estado real ψ de la molécula se representa dando $C_1 = \langle 1 | \psi \rangle$, la amplitud de estar en el estado 1 y $C_2 = \langle 2 | \psi \rangle$, la amplitud de estar en el estado 2, de esta manera el estado real de la molécula se escribe como:

$$\psi = |1\rangle \langle 1 | \psi \rangle + |2\rangle \langle 2 | \psi \rangle$$

$$\psi = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2$$

Los coeficientes C_1 y C_2 varían en el tiempo conforme la ecuación 4.16. Si se ha hecho una selección de la molécula de modo que se sabe que inicialmente está en el estado 1 y un tiempo más tarde hay una probabilidad de que se encuentre en el estado 2. Ésta probabilidad se encuentra solucionando la ecuación diferencial propuesta en 4.16, de cómo las amplitudes varían en el tiempo. En general hay varias formas de solucionarlas y el resultado obtenido es:

$$C_1 = \frac{a}{2} e^{-i \hbar^{-1} E_0 - A t} + \frac{b}{2} e^{-i \hbar^{-1} E_0 + A t} \quad (4.17)$$

$$C_2 = \frac{a}{2} e^{-i \hbar^{-1} E_0 - A t} - \frac{b}{2} e^{-i \hbar^{-1} E_0 + A t} \quad (4.18)$$

En las ecuaciones 4.17 y 4.18 a y b son las constantes de integración, E_0 es H_{11} y H_{22} , pues es la energía cuando el nitrógeno está en cualquiera de los dos extremos. Es posible que el nitrógeno se abra paso entre los hidrógenos y llegue al otro lado, así que hay cierta amplitud de que la

molécula estando en el estado 1 pase al estado 2 o viceversa, por lo que se consideran iguales y $H_{12} = H_{21} = -A$.

Las moléculas se configuran de tal manera que estén en equilibrio eléctrico, así que se necesitaría mucha energía para pasar el nitrógeno de un lado a otro por el medio de los Hidrógenos. Clásicamente si la molécula de amoniaco no tiene energía suficiente, no es posible que teniendo arriba el nitrógeno, éste llegue abajo, pese a esto en mecánica cuántica es posible escurrirse rápidamente por una región energéticamente ilegal.

Si $b = 0$ las ecuaciones 4.17 y 4.18 son iguales, por lo que tienen la misma frecuencia $\omega = E_0 - A / \hbar$. Si todo cambia con la misma frecuencia significa que el sistema está en un estado de energía definida $E_0 - A$, por lo tanto tenemos que las amplitudes de que el átomo de nitrógeno este arriba o esté abajo son iguales. Otro estado estacionario se obtiene si $a = 0$, debido a que ambas frecuencias son $E_0 + A / \hbar$ con una energía estacionaria $E_0 + A$. Por lo tanto la energía de la molécula para lograr cambiar de estado no es simplemente E_0 como se esperaría, sino que hay dos niveles de energía $E_0 + A$ y $E_0 - A$.

Si en $t = 0$ la molécula está en el estado 1, la amplitud $C_1(0)$ es igual a uno y $C_2(0)$ es igual a cero. Lo interesante del problema es saber cual es la probabilidad en el tiempo de que el nitrógeno esté arriba o esté abajo, así que con la condición inicial $C_1(0) = \frac{a+b}{2} = 1$ y $C_2(0) = \frac{a-b}{2} = 0$ se tiene que $a = b = 1$ y con esto se puede reescribir las ecuaciones 4.17 y 4.18 como:

$$C_1(t) = e^{-i \hbar E_0 t} \frac{e^{i \hbar A t} + e^{-i \hbar A t}}{2}$$

$$C_2(t) = e^{-i \hbar E_0 t} \frac{e^{i \hbar A t} - e^{-i \hbar A t}}{2}$$

Es posible escribir éstas ecuaciones como:

$$C_1(t) = e^{-i \hbar E_0 t} \cos \frac{At}{\hbar}$$

$$C_2(t) = e^{-i \hbar E_0 t} \sin \frac{At}{\hbar}$$

El módulo de las dos amplitudes varía armónicamente en el tiempo. La probabilidad de que la molécula se encuentre en el estado 2 al tiempo t es el cuadrado del valor absoluto de $C_2(t)$:

$$|C_2(t)|^2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}$$

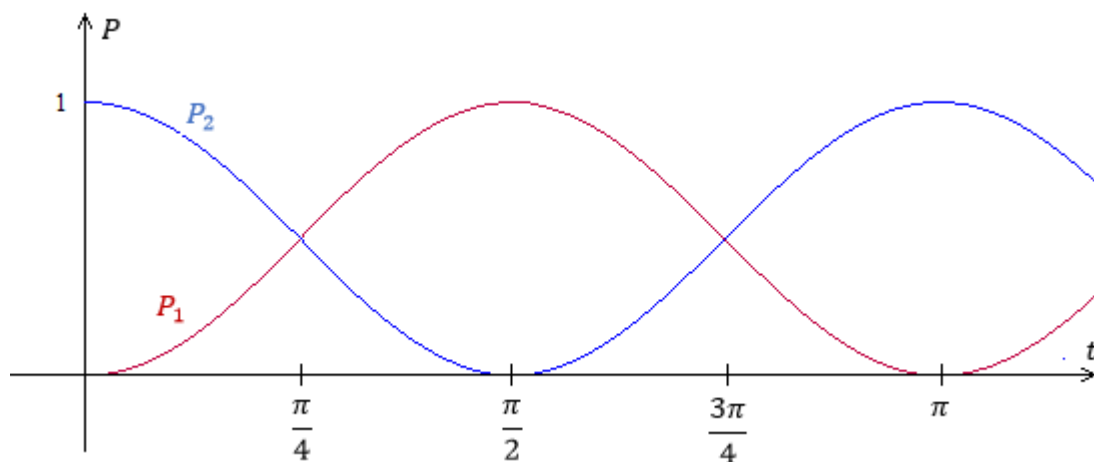


Fig. V.2. Probabilidades de que una molécula de amoniaco que estaba en el estado 1 al tiempo $t = 0$, se encuentre en el estado 1, es decir, P_1 o en el estado 2, P_2 al tiempo t .

En la figura V.2 se muestra como la probabilidad de que la molécula esté en el estado 2 comienza en 0 debido a las condiciones iniciales, a medida que transcurre el tiempo esta probabilidad incrementa hasta hacerse única y vaciando la probabilidad de que la molécula siga en el estado 1. La probabilidad va y viene de uno al otro.

Lo que resta por decir de la molécula de amoniaco, es que el sistema no se encuentra ni en uno ni en el otro estado, está en una superposición de estados, está en 1 y 2 al mismo tiempo y tan pronto como el observador quiera saber en qué posición está el nitrógeno, hará las mediciones precisas y obtendrá un estado, bien sea que el nitrógeno está arriba o está abajo. Este fenómeno es descrito en el cuarto postulado de la mecánica cuántica y es el que describe el colapso instantáneo de nuestro conocimiento sobre el sistema al hacer una medida.