

Propuesta de actividades con el método de resolución de problemas al estilo japonés para
fomentar heurísticas en tercer grado de primaria.

Sandra Luz Dary Duarte

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bogotá, julio de 2025

Propuesta de actividades con el método de resolución de problemas al estilo japonés para
fomentar heurísticas en tercer grado de primaria.

Sandra Luz Dary Duarte

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada en Educación Básica Primaria

Asesora Dra. Claudia Salazar Amaya

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bogotá, julio de 2025

Tabla de Contenido

Introducción	1
Capítulo I. Orientaciones Generales de la Propuesta	3
1.1. Motivaciones para el Desarrollo de la Propuesta Didáctica	3
1.2. Referentes curriculares de la propuesta	7
1.3. Pregunta Orientadora de la Propuesta de Trabajo de Grado	9
1.4. Objetivos	9
1.4.1. Objetivo General	9
1.4.2. Objetivos Específicos	10
1.5. Experiencias Investigativas que Aportan al Diseño de la Propuesta ...	10
Capitulo II. Marco Teórico	15
2.1. Problemas en la Clase de Matemáticas	15
2.2. Resolución de Problemas al Estilo Japonés	17
2.3. Formulación de Problemas en la Clase de Matemáticas	19
2.4. Heurísticas en la Resolución de Problemas	20
2.5. Heurísticas de Composición Aditiva de un Número	21
2.6. Dificultades y errores en los Dominios Aritmético y Métrico del Conocimiento Matemático	22

2.6.1. Dificultades en el Dominio de la Aritmética, sus Heurísticas y Algunos Errores	22
2.7. Heurísticas, Dificultades y Algunos Errores de Área y Superficie en el Dominio Aritmético y Métrico.....	24
2.7.1. Heurísticas de Área y Superficie de una Figura	25
2.7.2. Dificultades y errores que se Presentan en el Cálculo del Área de una Figura	27
Capítulo III. Presentación del Diseño de la Secuencia.....	29
3.1. Método de Resolución de Problemas al Estilo Japonés	29
3.2. Segmentos de la Clase y Propósitos en el Método de Resolución de Problemas al Estilo Japonés	30
3.3. Plan de Pizarra, Cuaderno y Pistas	32
3.4. Presentación de las Tareas de la Secuencia	33
3.5. Justificación de la Secuencia	36
3.6. Perfil Sociodemográfico de la Muestra.....	38
Capítulo IV. Caracterización del Desarrollo de las Sesiones	39
4.1. Sesión Uno. Descomposición Aditiva de un Número	39
4.2. Sesión Dos. Área de la figura dibujada (L en cuadrícula)	43

4.3. Sesión Tres. Área del Trapecio	46
4.4. Sesión Cuatro: Problemas de Estructura Aditiva de Combinación con Cantidad Inicial Desconocida.	51
4.5. Sesión Cinco. Problema de Estructura Aditiva de Igualación.	54
Capítulo V. Evaluación y Resultados de la Secuencia	57
5.1. Evaluación de los problemas y su potencial para desarrollar heurísticas	57
5.2. Evaluación de los Segmentos de Clase en la Metodología de Resolución de Problemas al Estilo Japonés	82
Capítulo VI. Conclusiones	84
Referencias Bibliográficas	88

Índice de Tablas

Tabla 1 Matriz secuencial de sesiones.	33
Tabla 2 Proyección de dificultad en las tareas de la secuencia	37
Tabla 3 Formato de la secuencia didáctica. Sesión 1	39
Tabla 4 Formato de la secuencia didáctica. Sesión 2	43
Tabla 5 Formato de la secuencia didáctica. Sesión 3	46
Tabla 6 Formato de la secuencia didáctica. Sesión 4	51
Tabla 7 Formato de la secuencia didáctica. Sesión 5	54
Tabla 8 Matriz de evaluación y resultados sesión 1	58
Tabla 9 Matriz de evaluación y resultados sesión 2	62

Tabla 10 Matriz de evaluación y resultados sesión 3	67
Tabla 11 Matriz de evaluación y resultados sesión 4	75
Tabla 12 Matriz de evaluación y resultados sesión 5	79
Tabla 13 Matriz de evaluación de los segmentos de clase	82

Introducción

La educación matemática se encuentra en constante evolución y presenta múltiples desafíos por resolver. Entre estos, se encuentra la búsqueda de los docentes del área de estrategias efectivas que fortalezcan habilidades como la comunicación, la argumentación, el razonamiento, el análisis y, en especial, la resolución de situaciones problema. Los índices de competencia matemática reportados por el Ministerio de Educación Nacional son alarmantemente bajos, y las dificultades que enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas son evidentes en los resultados de pruebas externas como Saber e ICFES. Esta situación fue una de las principales motivaciones para desarrollar esta propuesta de trabajo de grado.

Además, el proyecto responde al interés profesional de la autora por implementar metodologías que promuevan la participación activa de todos los estudiantes durante la clase y que, a su vez, permitan evidenciar el uso de diversas heurísticas en la resolución de problemas. La propuesta se basa en una estrategia empleada por la comunidad de educadores matemáticos en Japón, conocida como “estudio de clase”, y se enfoca en la metodología de resolución de problemas al estilo japonés.

El propósito de este trabajo es diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica en el grado tercero de educación básica primaria que fomente el uso de heurísticas en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento métrico y numérico, empleando dicho método japonesa como eje central.

El informe escrito está estructurado en seis capítulos. El primer capítulo presenta las orientaciones generales que dieron origen a esta propuesta, incluyendo las motivaciones personales y profesionales surgidas de la experiencia docente, los lineamientos de la política educativa en torno a la organización curricular del área y las necesidades particulares de la institución donde se implementó la secuencia. También se exponen investigaciones previas que respaldan y contextualizan esta iniciativa.

El segundo capítulo desarrolla el marco teórico desde tres perspectivas: los conceptos propios del área de matemáticas relacionados con los pensamientos implicados en la propuesta; aspectos pedagógicos como los errores y dificultades frecuentes en el desarrollo del pensamiento

matemático; y los fundamentos del método japonés para la enseñanza de las matemáticas. Los conceptos matemáticos abordados pertenecen a la estructura aditiva y a algunos aspectos de la geometría, y se articulan con la intención de fomentar heurísticas en los pensamientos métrico y numérico a partir de la resolución de problemas.

En el tercer capítulo se presenta la fase de planeación de la propuesta, detallando el método de resolución de problemas al estilo japonés junto con los segmentos estructurales de cada sesión. Estos segmentos incluyen: presentación del problema, trabajo individual, trabajo grupal, socialización de heurísticas y construcción colectiva de conclusiones. Se incorpora, además, el uso del plan de pizarra como herramienta didáctica visual, que registra el recorrido de la clase; y se describen los materiales y las pistas diseñadas para fomentar el aprendizaje autónomo.

El cuarto capítulo da cuenta de la implementación de la propuesta, describiendo el desarrollo de cada sesión, los segmentos aplicados, las interacciones estudiantiles, las inquietudes surgidas y las soluciones generadas frente a los problemas propuestos. Cada sesión se presenta con su respectivo problema, fases y vivencias recopiladas durante su ejecución.

En el quinto capítulo se realiza una evaluación reflexiva por sesión, identificando las heurísticas empleadas por los estudiantes, los errores cometidos y las dificultades encontradas. Este análisis permite reconocer patrones comunes, diferencias entre las estrategias, y posibles causas de los errores. También se ofrecen sugerencias para optimizar el logro de los objetivos planteados.

Finalmente, el sexto capítulo recoge las conclusiones generales sobre el diseño, aplicación y evaluación de la secuencia didáctica, destacando los aprendizajes adquiridos, las proyecciones de mejora para futuras implementaciones y el potencial de réplica de la propuesta como una metodología innovadora para la enseñanza de las matemáticas.

Capítulo I. Orientaciones Generales de la Propuesta

En este capítulo se presentan las generalidades de la propuesta de trabajo de grado. Se inicia con las motivaciones personales, profesionales e institucionales que inspiraron su formulación; luego se contextualiza la propuesta en el marco de los referentes curriculares que la respaldan. A continuación, se expone la pregunta orientadora del estudio, enfocada en el diseño, aplicación y evaluación de la propuesta. Posteriormente, se plantean los objetivos del trabajo, y finalmente, se incluyen algunas experiencias investigativas relevantes que fortalecen su fundamentación.

1.1. Motivaciones para el Desarrollo de la Propuesta Didáctica

Las motivaciones que impulsaron el desarrollo de esta propuesta de secuencia didáctica como trabajo de grado son diversas. Por una parte, surgen de la experiencia personal y profesional como docente en una institución educativa; por otra, se vinculan con la participación activa en procesos de investigación relacionados con la Educación Matemática.

A nivel personal, se expresa el interés en avanzar hacia la obtención del título de licenciada y potenciar las propias habilidades matemáticas, al mismo tiempo que se busca ampliar el conocimiento y adoptar enfoques innovadores que enriquezcan el aprendizaje de los estudiantes en la clase de matemáticas. Esta motivación se basa en la necesidad de identificar y fortalecer los distintos estilos de aprendizaje presentes en el aula, promoviendo una participación más activa y significativa.

Desde la perspectiva institucional, se identifican retos relevantes en el desarrollo del pensamiento matemático. La institución en la que actualmente me desempeño, organiza el área en tres asignaturas diferenciadas por los pensamientos matemáticos estipulados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN): Geometría, que integra el pensamiento espacial y métrico; Estadística, que abarca el pensamiento aleatorio, variacional y de datos; Matemáticas, centrada en el pensamiento numérico y sistemas de numeración.

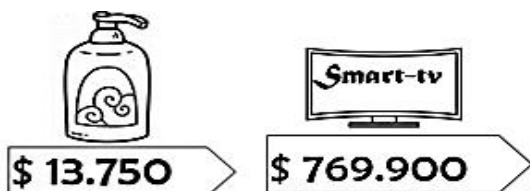
A partir de esta organización curricular, se elaboran las planeaciones de clase, pruebas escritas cortas y evaluaciones bimestrales, acompañadas de sus respectivos análisis. Uno de los insumos más reveladores proviene de los informes por curso y área, en los que se documentan los contenidos en los que los estudiantes evidencian mayores dificultades. Entre estas, se destaca

la resolución de problemas, donde se presentan errores frecuentes como la falta de comprensión del enunciado o la ejecución de operaciones correctas que no responden adecuadamente a la situación planteada.

No obstante, los estudiantes muestran avances en la interpretación del lenguaje matemático relacionado con expresiones como “aumentar”, “disminuir” o “reducir”, y logran asociarlas a operaciones específicas. Este contraste entre la resolución de problemas y el uso del lenguaje matemático evidencia una desarticulación entre la comprensión conceptual y la aplicación contextual de los conocimientos, lo cual representa un desafío para la enseñanza.

Frente a este panorama, la institución ha establecido como prioridad fortalecer las competencias matemáticas mediante la inclusión sistemática de la resolución de problemas en todas las asignaturas del área. En las pruebas estandarizadas internas, como las evaluaciones bimestrales y pruebas cortas, siempre se integra al menos una situación problema, y en estas, el bajo desempeño de los estudiantes ha sido una constante. Un análisis institucional sugiere que esta dificultad podría deberse a que las clases privilegian la ejercitación mecánica sobre el abordaje reflexivo de los problemas. La falta de análisis en la resolución de situaciones contextualizadas queda expuesta en ejemplos concretos extraídos de las pruebas, como aquellos en los que se presentan productos con sus respectivos precios acompañados de un enunciado específico así:

Emily compró jabón líquido y el Smart tv. Emily pagó con 800 mil los productos anteriores, ¿Cuánto recibe de vuelto?



Nota: Imagen propia tomada de prueba corta realizada en grado tercero.

En las evaluaciones institucionales se han incluido situaciones problema que exigen a los estudiantes identificar datos relevantes, seleccionar operaciones adecuadas y formular una respuesta coherente. Por ejemplo, en una de las pruebas se plantea: “Emily compró el jabón

líquido y el Smart TV. Pagó con 800.000 pesos. ¿Cuánto recibe de vuelto?” La intención de esta pregunta es que los estudiantes identifiquen los precios correspondientes, realicen una suma para obtener el total de la compra y luego una resta para calcular el cambio. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes realiza operaciones sin comprender el enunciado. Algunos suman directamente los precios (por ejemplo, $\$13.750 + \769.900) y dan ese resultado como el valor del vuelto. Otros realizan sumas o restas sin criterio claro. Solo una minoría obtiene la respuesta numérica correcta ($\$16.350$), aunque muchos no explican adecuadamente su proceso ni formulan una respuesta textual acorde con lo que la pregunta solicita. Estas evidencias permiten concluir que existen dificultades significativas en la interpretación de los enunciados, en la precisión de las respuestas y en la argumentación del procedimiento seguido. Por ello, se hace necesario incorporar el análisis de situaciones problema como una práctica habitual en la clase de matemáticas.

Una motivación adicional surge a partir de los planteamientos de Gaete y Jiménez (2011) y Meza et al. (2012), quienes proponen reestructurar la enseñanza de las matemáticas para alejarse de un modelo tradicional centrado exclusivamente en la repetición mecánica. Según estos autores, es urgente transitar hacia un enfoque que promueva el análisis, el razonamiento y, especialmente, la resolución de problemas. Si bien actualmente se recurre con mayor frecuencia al uso de material concreto para justificar los algoritmos, el objetivo principal sigue siendo muchas veces la ejecución de un procedimiento, no su comprensión. Herramientas como la Yupana permiten dotar de sentido los procesos de adición y sustracción con reagrupación, pero su uso debe ir más allá de lo instrumental, integrándose en estrategias que favorezcan la comprensión y la construcción activa del conocimiento.

Lo esencial no es únicamente utilizar material didáctico, sino repensar el propósito con que se emplea. Las estrategias seleccionadas deben promover que los estudiantes exploren, argumenten y lleguen a conclusiones lógicas acordes con los contenidos y competencias propuestas para el área de matemáticas. Estas pueden incluir el trabajo en grupos de estudio, el uso de juegos, problemas de lógica, esquemas representativos, atención personalizada, ejercicios graduados en complejidad y evaluación continua de las actividades realizadas.

Asimismo, otras motivaciones importantes provienen del marco normativo vigente. Según los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN), el rol del docente de

matemáticas no debe ser el de un transmisor de contenidos, sino el de un facilitador que fomente la autonomía de los estudiantes frente al conocimiento (MEN, 1994, p. 20). La propuesta educativa exige que el docente cree ambientes que despierten la curiosidad, formulen interrogantes y promuevan aprendizajes autónomos, donde el estudiante sea protagonista activo en la construcción del conocimiento. Los Estándares Básicos de Competencias también refuerzan esta visión del docente como un agente reflexivo y comprometido con procesos significativos de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, entre lo que dictan los lineamientos y lo que ocurre en el aula hay una distancia notable. Las clases de matemáticas tienden a centrarse en enseñar un único algoritmo o procedimiento, generando una práctica memorística donde se omiten otras rutas posibles para abordar un problema. Por ejemplo, la disposición vertical de cifras con base en su valor posicional, ejecutada de derecha a izquierda, se convierte en un modelo único de solución, dejando de lado estrategias como el cálculo mental, completar la decena, conteos ascendentes o descendentes por centenas o millares, o agrupaciones alternativas.

En muchas ocasiones, los docentes olvidamos que niños y niñas en preescolar y básica primaria tienen un potencial creativo para proponer soluciones diversas, razonar con lógica genuina y aprender de forma colaborativa. Estas capacidades deben ser reconocidas y fortalecidas como base para desarrollar un pensamiento matemático flexible y favorecer ambientes de aprendizaje más participativos.

Una tercera motivación está relacionada con el campo de investigación en educación matemática, donde se reconoce que la resolución de problemas representa uno de los mayores retos de enseñanza. Este proceso implica razonamiento, argumentación, comunicación y modelización para construir soluciones pertinentes. No obstante, su desarrollo en el aula es aún limitado debido a la complejidad que implica: análisis de situaciones, interpretación de enunciados y uso de representaciones diversas.

Estudios como el de Donoso et al. (2007), centrados en el análisis de Actividades Típicas del Aula (ATA), han revelado que las acciones pedagógicas más significativas solo ocurren en momentos específicos. Aunque se presentan problemas matemáticos en clase, suele haber escasa verificación de resultados, poca argumentación y limitada colaboración entre estudiantes.

Además, las ayudas pedagógicas tradicionales han mostrado un impacto restringido en los aprendizajes. (Universidad Pedagógica Nacional, LBEP taller 1,s.f.)

Como se puede observar, las motivaciones que fundamentan esta propuesta provienen de diversos ámbitos: vivencias personales, exigencias del contexto institucional, marcos legales vigentes y algunas reflexiones desde la investigación educativa. Todos ellos convergen en una convicción común: es urgente reconfigurar la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria a partir de estrategias que promuevan la comprensión, la participación y la resolución de problemas como práctica central del aprendizaje.

1.2. Referentes curriculares de la propuesta

En Colombia existen diversos documentos de política educativa que orientan la organización curricular del área de matemáticas en las instituciones educativas. Entre ellos se destacan los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Estos referentes guían la elaboración de los planes de estudio, la planeación de las clases y los criterios de evaluación, a partir de procesos fundamentales del pensamiento matemático como la modelación, el razonamiento, la comunicación, la ejercitación y la resolución de problemas.

Los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) proponen organizar la enseñanza de las matemáticas escolares a través de cinco pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Estos pensamientos no se abordan de manera aislada, sino que se articulan horizontalmente (relacionándose entre sí) y verticalmente (en niveles de complejidad que evolucionan de lo simple a lo complejo).

El pensamiento numérico promueve un uso significativo de los números y el desarrollo del sentido numérico. Esto implica la comprensión profunda del sistema de numeración decimal posicional, el manejo de cantidades, órdenes, magnitudes, estimaciones y relaciones, así como la operación con diferentes conjuntos numéricos (naturales, racionales, enteros e irracionales). Este pensamiento favorece el desarrollo de estrategias diversas para resolver problemas contextualizados.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos se conciben como un espacio para fortalecer la percepción espacial, las intuiciones sobre figuras bidimensionales y tridimensionales, y sus propiedades. Este pensamiento permite analizar, representar y modelar el mundo físico mediante la observación de relaciones, similitudes, transformaciones y argumentos espaciales.

El pensamiento métrico se enfoca en el estudio de atributos medibles como longitud, área, capacidad o peso. Este pensamiento promueve la comprensión de las unidades y patrones de medida, el desarrollo del sentido de la estimación y las habilidades para medir, además de incorporar relaciones con la aritmética. Se relaciona directamente con el pensamiento numérico, ya que muchas situaciones métricas requieren del uso de operaciones numéricas. También permite evidenciar la aplicabilidad de la matemática en contextos cotidianos.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos abordan contenidos de estadística y probabilidad. Este pensamiento fomenta el análisis e interpretación de datos y la toma de decisiones con base en información cuantitativa. La estadística, en particular, permite representar, cuestionar y explicar fenómenos reales mediante el uso de modelos. También se articula con otros pensamientos, como el métrico y el numérico, al requerir cálculos para el tratamiento de datos.

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos se centran en la identificación, generalización y representación de patrones. Desde las primeras formas de regularidad corporal o visual hasta representaciones simbólicas y algebraicas, este pensamiento prepara a los estudiantes para modelar y analizar fenómenos de cambio y variación. Se constituye así en una base sólida para el razonamiento algebraico y la abstracción.

Estos cinco pensamientos están acompañados por procesos que se entrelazan: para razonar se requiere comunicar; para resolver problemas, modelar; para ejercitar procedimientos, comprender su sentido. Así lo señalan los EBC y los DBA, al presentar una visión integradora del aprendizaje matemático.

Los Estándares Básicos de Competencias están organizados por ciclos de formación. En primaria, el Ciclo 1 abarca los grados primero, segundo y tercero, mientras que el Ciclo 2 comprende cuarto y quinto grado. Cada estándar se distribuye en una tabla de cinco columnas, correspondientes a los pensamientos mencionados, y permite guiar la formulación de planes de

estudio, metodologías y recursos según el enfoque pedagógico institucional. Los estándares mantienen una progresión lógica, con relaciones horizontales y verticales que potencian la complejidad de las competencias.

Por su parte, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) detallan lo que los estudiantes deben ser capaces de hacer o saber en cada grado. Cada derecho está compuesto por tres elementos significativos, el enunciado (habilidad o conocimiento esperado), las evidencias de aprendizaje (indicadores que permiten verificar el logro) y por último un ejemplo ilustrativo. Estos también se estructuran a partir de los cinco pensamientos matemáticos y están alineados con los estándares y lineamientos curriculares.

De acuerdo con este marco, el presente proyecto se centra en la resolución de problemas vinculados con los pensamientos numérico, métrico y geométrico. A través de esta propuesta, se busca fortalecer las competencias matemáticas definidas en los EBC para el ciclo uno de educación básica, empleando como estrategia principal la metodología de resolución de problemas al estilo japonés.

1.3. Pregunta Orientadora de la Propuesta de Trabajo de Grado

¿De qué manera se puede fomentar el desarrollo de diferentes heurísticas en la resolución de problemas aritméticos, geométricos y métricos en estudiantes de grado tercero de educación básica primaria?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica en grado tercero de básica primaria que promueva el uso de heurísticas en la resolución de problemas de tipo geométrico, métrico y numérico, a través del método de resolución de problemas al estilo japonés.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Explicitar los principios del método de resolución de problemas al estilo japonés y asumirlos como referente para el diseño y desarrollo de la propuesta.
- Diseñar tareas que fomenten en los estudiantes la resolución de problemas matemáticos mediante el uso de diversas estrategias de solución.
- Documentar la aplicación de la propuesta con el propósito de generar insumos para su análisis y retroalimentación.
- Evaluar la implementación de la secuencia didáctica a través del análisis de sus fortalezas y aspectos a mejorar, con miras a consolidarla como una alternativa válida para promover soluciones a problemas desde distintas estrategias.

1.5. Experiencias Investigativas que Aportan al Diseño de la Propuesta

Para el diseño y fundamentación de esta propuesta, además de los referentes curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006, 2020), se consideraron diversas investigaciones centradas en la resolución de problemas en el área de matemáticas en educación básica primaria. Estas investigaciones, tanto a nivel nacional como regional (específicamente en Cundinamarca y Bogotá), han contribuido al fortalecimiento de diferentes procesos matemáticos y han servido como insumo clave en la estructuración de esta propuesta.

Una de las investigaciones consideradas fue desarrollada por Duarte y Villacrés (2020), titulada *“Entretejiendo heurísticas alrededor de la resolución de problemas mediante el método de Polya”*. Su objetivo fue fortalecer la competencia de resolución de problemas mediante la implementación de estrategias heurísticas en estudiantes de aula multigrado de la Institución Educativa Rural Río Blanco, sede Juanambú, en el municipio de Villa Garzón, Colombia. La experiencia se llevó a cabo con 14 estudiantes, quienes trabajaron problemas verbales relacionados con composición, transformación y comparación.

Este proyecto se inscribió dentro del paradigma cualitativo, utilizando un enfoque crítico social. Los resultados evidenciaron que los estudiantes no asumían la resolución de problemas como un proceso estructurado, sino como un ejercicio más del aula, lo que evidenciaba

desconocimiento de estrategias no convencionales para abordar situaciones problemáticas. La implementación de la estrategia didáctica basada en el método de Polya se organizó en cuatro fases fundamentales:

- a. Comprender el problema,
- b. Configurar un plan,
- c. Ejecutar el plan,
- d. Verificar la respuesta.

Durante estas fases, se promovieron estrategias heurísticas como el uso de esquemas, analogías, representaciones gráficas y revisión de procedimientos. Uno de los aportes más valiosos del estudio fue la identificación de elementos clave en el trabajo con aulas multigrado, como la flexibilidad curricular, la necesidad de diversificar contenidos y la importancia del trabajo colaborativo. Además, la incorporación de material concreto motivó la participación activa de docentes y estudiantes, en una dinámica que resulta coherente con la propuesta de este trabajo de grado.

Otra investigación relevante para esta propuesta fue la desarrollada por Álvarez (2020), titulada *“La heurística como método didáctico para el fortalecimiento de la competencia matemática de resolución de problemas en estudiantes de 5° grado de educación básica de la I.E.D. Rodolfo Llinás Riascos”*, en la ciudad de Barranquilla. El objetivo principal fue desarrollar la competencia en resolución de problemas mediante la implementación del método heurístico de Polya. Esta investigación adoptó un enfoque cualitativo, bajo el método de Investigación-Acción Participativa.

Al igual que en la presente propuesta, el proyecto de Álvarez se centró en potenciar la participación activa de los estudiantes en la solución de problemas, fomentando la capacidad de análisis, planificación, ejecución y evaluación de sus propios procesos. Al finalizar, los estudiantes fueron capaces de reflexionar sobre su desempeño, lo que fortaleció su pensamiento crítico, incrementó su motivación y promovió la autonomía en el abordaje de situaciones problemáticas. Estos resultados refuerzan el sentido de esta propuesta, que también busca

desarrollar estrategias variadas y efectivas para la resolución de problemas desde la participación activa.

Otra investigación relevante fue desarrollada por Córdova et al. (s.f.), titulada *“Elementos de Innovación Docente en la Mejora del Aprendizaje: El Impulsor Cualitativo y su Aplicación en la Resolución de Problemas en Matemáticas”*. Su objetivo fue introducir un nuevo componente que mejorara la capacidad de resolución de problemas en matemáticas por parte de los estudiantes, e identificar elementos innovadores que los docentes emplean para transformar sus prácticas y fomentar competencias matemáticas. Este estudio se llevó a cabo en la Universidad Santa María, campus Guayaquil (Ecuador). Entre sus conclusiones destaca que, para fortalecer procesos vinculados al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), resulta clave integrar tecnologías, metodologías activas y aprendizaje colaborativo, ya que estas estrategias hacen que los aprendizajes sean más significativos. Las clases dinámicas e innovadoras contribuyeron también a una mayor motivación, participación y rendimiento de los estudiantes. Se subraya, además, el rol del docente como facilitador, dando protagonismo a los estudiantes en la construcción de sus propios conceptos matemáticos.

También se consideró la investigación centrada en el desarrollo del pensamiento métrico y el sistema de medidas. Un ejemplo es el estudio de Trujillo (2011), titulado *“El uso de los pentominós en la iniciación al estudio del área y el perímetro de figuras planas”*, desarrollado en la Universidad Santiago de Cali con estudiantes de grado cuarto. Su objetivo fue diseñar e implementar situaciones de aprendizaje que introdujeran los conceptos de área y perímetro mediante el uso de pentominós. Esta estrategia permitió trabajar procesos matemáticos vinculados al pensamiento métrico a través de la resolución de problemas, incentivando en los estudiantes el uso de recursos tangibles y la formulación de estrategias heurísticas para dar respuesta a situaciones contextualizadas. Los resultados mostraron un fortalecimiento en los procesos de análisis y la argumentación de los estudiantes a través de sus propias heurísticas.

Aunque la formación docente no es el foco directo de este trabajo, se retoma la investigación de Álvarez y Hernández (2017), titulada *“Evaluación de los significados institucionales del profesor de matemáticas. Un proceso de estudio sobre los conceptos de perímetro y área en quinto grado”*. Este estudio tuvo como propósito evaluar los significados institucionales reflejados en las prácticas didácticas al enseñar área y perímetro. Uno de sus

aportes principales fue evidenciar que las estrategias del docente no solo transmiten contenidos, sino que también reproducen discursos institucionales que, en algunos casos, limitan la innovación pedagógica. Los autores insisten en la importancia de reflexionar críticamente sobre la práctica docente, en especial sobre los objetivos, enfoques y estrategias que permiten articular el conocimiento procedimental y conceptual con las necesidades reales del aula.

Asimismo, se tomaron en cuenta investigaciones relacionadas con la enseñanza de la estructura aditiva, es decir, la comprensión de los conceptos y esquemas asociados a la suma y la resta, con y sin reagrupación. Algunos estudios abordan esta estructura de forma aislada, centrados en la enseñanza del algoritmo, mientras que otros la articulan con contextos o situaciones problema. En esta última línea se encuentra la investigación de Ruiz y Lemos (2018), *“Recursos Didácticos para la Enseñanza de Resolución de Problemas de Suma – Resta”*, desarrollada en la Institución Educativa Simón Bolívar, Puerto Libertador (Córdoba) en grado primero. Su objetivo fue diseñar e implementar una unidad didáctica que empleara recursos del entorno como apoyo en la enseñanza de problemas aditivos. Los resultados evidencian la utilidad del material concreto para favorecer la apropiación de los conceptos y resaltan la importancia de trabajar con situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes, lo que mejora su participación y comprensión. Concluyen que el aprendizaje contextualizado fortalece el análisis y el sentido de las operaciones.

En una línea similar, López de los Mozos García-Núñez (2001) desarrolló la investigación *“Desarrollo de las operaciones de sumar y restar: comprensión de los problemas verbales”*, con el objetivo de analizar cómo comprenden y resuelven problemas verbales los estudiantes de educación infantil y los tres primeros grados de primaria en Ciudad Real, España. Los resultados demostraron que no basta con memorizar una operación: los estudiantes requieren comprender la situación planteada, identificar la información relevante y reconocer la estructura del enunciado. El estudio concluye que es necesario implementar metodologías de aula más eficaces, que prioricen la comprensión sobre la repetición.

Por último, se destaca la investigación de Zumbado Castro (2012), *“A propósito de la introducción de la función logarítmica. Una correlación entre la clase ‘japonesa’ y el currículo costarricense de Matemáticas”*, desarrollada en Costa Rica en grado décimo. Su objetivo fue analizar la relación entre la metodología propuesta por el Ministerio de Educación Pública (MEP)

y la estructura de la clase japonesa, tomando como ejemplo la enseñanza de funciones logarítmicas. Ambas propuestas coinciden en cuatro momentos fundamentales: planteamiento del problema, trabajo individual, discusión interactiva para validar estrategias y cierre. Estos momentos se corresponden con la estructura metodológica de la presente propuesta, que busca fortalecer habilidades matemáticas a través de una secuencia didáctica estructurada y participativa. El estudio resalta el papel del docente como observador y facilitador en el momento del trabajo individual, como guía durante la discusión entre pares, y como moderador durante el cierre de la clase. Este método exige del docente un dominio pedagógico y matemático que permita acompañar el proceso sin imponer definiciones o soluciones que invisibilicen las estrategias de los estudiantes.

Capítulo II. Marco Teórico

En el desarrollo de esta propuesta se abordan diversos aspectos teóricos relevantes, entre ellos: la definición de problema, las estrategias heurísticas, los conceptos de composición y recomposición aditiva, área y superficie, y la estructura aditiva. También se presentan algunas dificultades y errores frecuentes en el aula durante el abordaje de estos conceptos. Finalmente, se incluye una descripción del método de resolución de problemas al estilo japonés, junto con el uso estratégico de la pizarra dentro de esta práctica.

2.1. Problemas en la Clase de Matemáticas

En el contexto de esta propuesta, se entiende el concepto de problema matemático como una situación contextualizada que plantea una necesidad de solución. Resolver dicha situación requiere la puesta en marcha de procesos de pensamiento que van más allá de la simple aplicación de una operación; implica identificar estrategias, reflexionar y formular una respuesta completa, que en ocasiones puede necesitar revisión o reformulación.

Desde esta perspectiva, Torres (1993) define un problema como “una situación que plantea un reto para el estudiante, que no puede resolverse de manera inmediata y requiere el uso de estrategias matemáticas para encontrar solución” (p. 87). De manera complementaria, Polya (1968) plantea que un problema consiste en: “Encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados” (p. 14).

Tradicionalmente, la clase de matemáticas se ha caracterizado por la repetición de ejercicios centrados en operaciones, lo que ha llevado a una interpretación reducida del concepto de problema. Según Castro y Torres (2017), se ha asumido erróneamente que resolver un problema es simplemente responder un enunciado mediante una operación. Así, el problema se convierte en un medio para aplicar una fórmula previamente explicada, perdiendo su carácter de reto cognitivo. En muchos casos, la selección de la operación se basa en una palabra clave del enunciado, sin considerar el contexto o el sentido real de la situación.

Autores como Arteaga y Macías (2016) advierten que, cuando los estudiantes aplican procedimientos enseñados para resolver enunciados sin generar estrategias propias, no se trata de resolución de problemas sino de mera ejercitación. La resolución de problemas supone un proceso de construcción de conocimiento, no únicamente la elección y ejecución de una operación. En ese sentido, Mancera y Grepe (2000) establecen tres condiciones básicas para que una situación sea considerada un problema matemático:

Por una parte, su solución no puede deducirse de forma inmediata; requiere comprensión del enunciado, análisis de los datos y relación entre estos y la pregunta formulada. De otro lado, exige procesos de asimilación y evocación de conocimientos previos, cotidianos o escolares, para ser adaptados a nuevos contextos y finalmente, debe tener una o más soluciones posibles, siempre que el proceso para alcanzarlas implique reflexión y razonamiento.

El rol del docente resulta clave en este proceso. No se limita a presentar problemas, sino que debe generar curiosidad, formular preguntas estimulantes y ofrecer recursos que guíen el pensamiento de los estudiantes. Como señala Polya (1968), el docente que propone problemas adecuados al nivel de los alumnos les permite explorar, equivocarse, reflexionar y construir conocimientos significativos.

Al enfrentarse a un problema, es común que el estudiante recurra a experiencias previas para buscar analogías o estrategias útiles. En palabras de Polya (1989): “Para resolver un cierto problema A, introducimos y examinamos otro problema B, con la esperanza de poder sacar algún provecho para la solución del problema A” (p. 100). Esta relación entre problemas ayuda a activar el pensamiento y favorece procesos de transferencia y reflexión.

Por lo tanto, la diferencia entre ejercitar y resolver un problema radica en la profundidad del pensamiento involucrado. Polya (1989) advierte que “un profesor que dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias matará en ellos el interés” (p. 5), mientras que uno que promueve la resolución de problemas fomentará la curiosidad y el desarrollo del pensamiento lógico y creativo. Este tipo de enseñanza fortalece habilidades como la interpretación, el análisis, la argumentación y la valoración de estrategias, siempre considerando tanto la complejidad del problema como el nivel cognitivo de los estudiantes.

2.2. Resolución de Problemas al Estilo Japonés

El método de resolución de problemas al estilo japonés hace parte de la propuesta denominada estudio de clases (Jyugyo Kenkyu), una práctica ampliamente reconocida por su aporte al desarrollo del pensamiento crítico y de habilidades matemáticas del profesor y los estudiantes. Ahora bien, es importante explicitar que la propuesta denominada estudio de clases busca la mejora continua de la enseñanza a través del análisis colaborativo y reflexivo de las sesiones impartidas. Según Baba y Kojima (2005), “el Estudio de Clases en términos sencillos, es la investigación que tiene como objeto la clase” (p. 225). Su objetivo es acercarse a una clase ideal: participativa, significativa, efectiva e inclusiva para todos los estudiantes. En palabras de Isoda y Olfos (2009), “desde una perspectiva más teórica, el Estudio de Clases se entiende como investigación sobre la práctica” (p. 35).

Dentro de este marco, el método de resolución de problemas al estilo japonés (RPEJ) promueve el trabajo colaborativo y la construcción conjunta del conocimiento. En las sesiones, los estudiantes tienen la oportunidad de debatir, argumentar, cuestionar y proponer estrategias de solución, de manera que el aprendizaje se genera a partir del intercambio activo de ideas entre pares. Como lo indica Mena González (2013), “durante la clase se espera que el estudiante por iniciativa propia o por efecto de la comunicación con sus pares avance en el aprendizaje” (p. 12). Este proceso fomenta la interacción reflexiva, en la cual cada estudiante puede apoyar o necesitar del otro para avanzar en la solución de un problema. A través de este método, se establece una conexión directa entre los elementos teóricos de las matemáticas y su aplicación en la práctica.

Una de las particularidades del método es la participación plena de los estudiantes a lo largo de la clase: se espera que cada uno formule una estrategia individual, la ponga en práctica, y luego participe en la socialización y análisis de las distintas soluciones planteadas por sus compañeros. Esto permite identificar diversas heurísticas, procedimientos y caminos posibles para resolver un mismo problema. Además, se impulsa el autoaprendizaje mediante ayudas autónomas, como las pistas, de forma que el docente cumple un rol de acompañamiento, más cercano al de un observador que interviene con preguntas orientadoras, pero no impone rutas fijas.

Este enfoque no solo busca que los estudiantes resuelvan un problema, sino que comprendan el sentido de lo que hacen, validen sus propias estrategias, aprendan del error y

desarrollen una postura crítica frente a los procesos matemáticos. Todo esto en un ambiente colaborativo, flexible y respetuoso de los diferentes ritmos de aprendizaje.

Las etapas o momentos de la clase establecidos en este método se desarrollan ampliamente en el apartado 3.2. Segmentos de la Clase y Propósitos en el Método de Resolución de Problemas al Estilo Japonés, aquí solo se enlistan, estos son:

- a. presentación del problema
- b. trabajo individual
- c. trabajo colectivo (opcional, depende del problema)
- d. socialización de todas y cada una de las respuestas en plenaria
- e. clasificación y asignación de etiquetas a cada heurística
- f. acuerdos o conclusiones.

El desarrollo de este enfoque contempla tres etapas en la práctica docente:

a. La planeación que es la fase en la cual los docentes establecen el objetivo de la lección, seleccionan un problema pertinente que permita múltiples caminos de solución, y diseñan los momentos de la clase considerando el nivel cognitivo del grupo. Se definen los elementos centrales de la sesión, como el planteamiento del problema, las ayudas previstas (materiales o pistas), los recursos del aula y las posibles formas de participación. Esta planeación no es rígida: puede adaptarse con base en lo que suceda durante la clase. En palabras de Isoda (2012), “comienza con la búsqueda y selección de materiales relevantes para el propósito de la clase” (p. 26–28), y continúa con la preparación detallada de los recursos y estrategias.

a. La etapa de ejecución que corresponde a la puesta en marcha del plan de clase. Cada momento previsto en la planeación se desarrolla de forma dinámica, permitiendo que los estudiantes propongan ideas no previstas inicialmente. En Japón, estas clases son observadas por otros docentes como parte del ejercicio reflexivo. La actitud del docente debe ser de escucha activa, con intervenciones precisas que orienten sin limitar. Según Benavides (2013), “el maestro es quien orienta la consecución de las alternativas de solución” (p. 51), lo que implica un acompañamiento respetuoso del proceso de los estudiantes.

b. Y la reflexión o retroalimentación en la cual el docente registra lo sucedido durante la clase, las estrategias utilizadas, las preguntas surgidas, las dificultades observadas y las respuestas dadas. Como indica Isoda (2012), “el propósito de esta sesión de revisión es explorar maneras de mejorar la clase analizando cualquier disparidad entre los objetivos que se plantearon y las interacciones que se dieron en el aula para su logro” (p. 39). En algunos casos, esta fase cuenta con la participación de docentes externos, especialmente cuando surgen situaciones inesperadas que requieren análisis compartido.

Este enfoque no solo busca que los estudiantes resuelvan un problema, sino que comprendan el sentido de lo que hacen, validen sus propias estrategias, aprendan del error y desarrollen una postura crítica frente a los procesos matemáticos. Todo esto en un ambiente colaborativo, flexible y respetuoso de los diferentes ritmos de aprendizaje.

2.3. Formulación de Problemas en la Clase de Matemáticas

La formulación de problemas es un proceso esencial y complejo dentro del desarrollo de la habilidad para resolver situaciones matemáticas. Rodríguez et al. (2015) afirman que esta es una de las capacidades clave que deben fomentarse en el proceso de resolución de problemas. Implica la creación de nuevos enunciados a partir de la interpretación personal y del significado que el estudiante le otorga a una situación específica o a un problema previamente planteado (Espinoza, 2017). Dado que esta construcción puede estar mediada por una visión subjetiva desde la propia realidad del estudiante, se vuelve fundamental prestar especial atención a los insumos elegidos para formular problemas con sentido y pertinencia.

Desde esta perspectiva, el docente debe propiciar espacios que inviten a los estudiantes a crear y desarrollar sus propias situaciones problemáticas. Esta formulación puede surgir como invención de un escenario hipotético, basado en elementos reales o en experiencias cercanas, que requiera una solución. Una estrategia útil para fomentar este proceso es la interrogación constante, la cual, según Halmos (1984), motiva a los estudiantes a hacerse preguntas a partir del ejemplo y los entrena para crear sus propios planteamientos.

Una alternativa efectiva consiste en ofrecer a los estudiantes una situación base que puedan modificar. Por ejemplo, el docente puede presentar una situación de compra que incluya artículos familiares para los estudiantes y solicitarles que seleccionen los elementos que desean

adquirir, formulen la pregunta y luego verifiquen si esta es comprensible al plantearla a un compañero. Esta estrategia también permite observar su comprensión del problema y su capacidad para adaptarlo. Otra opción consiste en el uso de imágenes que representen escenas cotidianas y contextualizadas; estas actúan como estímulo visual y permiten establecer una conexión natural entre el entorno de los estudiantes, su vida diaria y la matemática.

En este mismo sentido, Rodríguez et al. (2015) sugieren proporcionar información intencionalmente seleccionada para que el estudiante, de manera creativa, diseñe un problema basado en ella. Este tipo de tareas no solo promueve la formulación de situaciones diversas, sino que también fortalece procesos comunicativos que son fundamentales en el desarrollo de las competencias matemáticas.

2.4. Heurísticas en la Resolución de Problemas

La heurística es entendida como el proceso de construcción de razonamiento para resolver un problema. Su uso se remonta a pensadores como Descartes y Leibniz, quienes abordaron la idea de sistemas heurísticos dentro de su pensamiento filosófico y matemático. No obstante, fue Polya (1965) quien incorporó el término de manera explícita al ámbito matemático, señalando que "la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo" (p. 105).

En la actualidad, la heurística en matemáticas se asocia con estrategias, técnicas o caminos que permiten encontrar soluciones aproximadas a problemas, especialmente en situaciones en las que no existe un procedimiento exacto o definido. Simon y Herbert (1976) la definen como un conjunto de métodos y reglas aproximadas que permiten tomar decisiones o resolver problemas complejos de forma eficiente, particularmente cuando hay limitaciones de tiempo o recursos.

La resolución de problemas es, por tanto, el espacio natural para desarrollar y poner en práctica estas estrategias. Las heurísticas están cargadas de la interpretación personal de quien propone la solución y suelen estar vinculadas a los saberes previos y habilidades particulares del estudiante. Estas estrategias permiten explorar conjeturas, reconocer patrones y generar ideas que más adelante pueden ser validadas o ajustadas.

Desde esta perspectiva, Bermejo et al. (2009) recomiendan apartarse, al menos en la fase inicial, de la enseñanza centrada exclusivamente en algoritmos tradicionales. En lugar de ello, proponen comenzar por las estrategias espontáneas que los estudiantes emplean para abordar una operación, permitiendo que emerjan formas de pensar propias y más significativas. Esta apertura no solo favorece el análisis, sino que también amplía las posibilidades de comprensión. Como expresan autores como Ponte (2006), es necesario "aparcar" el algoritmo como única vía y facilitar la exploración libre de procedimientos personales.

El desarrollo de heurísticas cobra aún más valor cuando se activa en contextos colaborativos. La interacción entre pares favorece el contraste de ideas, el reconocimiento de errores y la consolidación de razonamientos sólidos. En este sentido, el aula se convierte en un espacio para el diálogo matemático, donde el análisis y la argumentación emergen de la comparación de estrategias. Como subraya Bermejo et al. (2009), esta dinámica permite "la reflexión colectiva sobre cada una de estas estrategias y evaluar su utilidad para, poco a poco, introducir formas más abstractas, sistemáticas y económicas de cálculo" (p. 194).

2.5. Heurísticas de Composición Aditiva de un Número

La composición aditiva de un número está relacionada con el principio de cardinalidad, ya que parte de la idea de que un número puede descomponerse en cantidades menores que él. Es decir, un número puede representarse como la suma de otros números menores, los cuales constituyen sus partes y conforman la totalidad a la que se refiere ese número. Esta descomposición también está asociada a acciones como agregar o completar cantidades, que reflejan situaciones concretas de la vida cotidiana.

Freudenthal (1983) sostiene que el modelo aditivo tiene un carácter agregativo, y está vinculado a tareas como unir y trasladar objetos. Desde esta visión, la comprensión del número se construye desde una perspectiva concreta y visual, asociada a acciones como juntar y mover elementos dentro de un conjunto. El uso de objetos reales en la enseñanza de la composición aditiva facilita la comprensión de las operaciones, al permitir que el estudiante interactúe con materiales que representan numéricamente situaciones cercanas a su realidad.

Una de las estrategias que desarrollan los estudiantes en este proceso es el uso de los dobles, que consiste en emplear dos veces el mismo número como sumando para formar otro

número. Esta estrategia promueve el reconocimiento de patrones numéricos que impliquen sumar un mismo número y fortalece la agilidad mental en cálculos sencillos como obtener mitades.

Otra estrategia común es la composición según el valor posicional, que implica sumar las cifras de un número teniendo en cuenta el lugar que ocupa cada una (centenas, decenas, unidades). Este procedimiento ayuda a comprender que un número está conformado por la suma de sus partes, y que cada una tiene un valor determinado según su posición en el sistema decimal. Para afianzar esta comprensión, es valioso utilizar ejemplos contextualizados con elementos del entorno, como billetes y monedas, que permitan representar de forma tangible situaciones como completar el precio de un producto conocido por los estudiantes.

Además, puede aparecer en el aula la estrategia de suma reiterada, la cual establece una conexión entre la estructura aditiva y la multiplicativa. En este caso, se expresa un número como la suma repetida de un mismo valor, es decir, la adición de sumandos iguales. Esta estrategia corresponde al primer acercamiento conceptual a la multiplicación. Como lo indica Vergnaud (1983), “las estructuras multiplicativas cuentan en parte con las estructuras aditivas, pero tienen su propia organización intrínseca” (p. 15).

En suma, la composición aditiva permite desarrollar múltiples estrategias de pensamiento numérico que favorecen el análisis de cantidades desde una perspectiva relacional, apoyando así la construcción de operaciones más complejas y significativas.

2.6. Dificultades y errores en los Dominios Aritmético y Métrico del Conocimiento Matemático

En concordancia con lo abordado en el inicio de este trabajo, sobre el desarrollo de procesos matemáticos en los estudiantes, es posible clasificar, identificar y caracterizar algunas dificultades recurrentes, especialmente en las heurísticas relacionadas con las estructuras aditivas y del cálculo de áreas como parte del dominio métrico. A continuación, se describen aquellas observadas en los dominios numérico y métrico, como parte del conocimiento matemático.

2.6.1. Dificultades en el Dominio de la Aritmética, sus Heurísticas y Algunos Errores

En el dominio de los procesos matemáticos relacionados con el pensamiento numérico, resulta fundamental asumir el concepto de número como cardinal. Desde esta perspectiva, se

hace necesario identificar y analizar las dificultades que pueden presentarse en el desarrollo de estos procesos dentro del aula, particularmente en lo relacionado con la composición aditiva de los números. Según Bedoya (2013), “hay principios matemáticos basados en la comprensión del número y que son necesarios para comprender la estructura del mismo” (p. 101), por lo que una comprensión errónea de dicha estructura puede afectar el desarrollo adecuado de los algoritmos.

Una de las dificultades más comunes en la composición aditiva está vinculada con el uso y comprensión de los ceros. Algunos estudiantes presentan errores al escribir los números o al descomponerlos según su valor posicional, especialmente cuando se trata de cantidades con ceros intermedios. Bedoya (2017) señala que estas dificultades surgen, principalmente, en cifras de cuatro o más dígitos, cuando decenas o centenas son nulas, y se hace necesario comprender cómo las unidades de orden inferior se integran aditivamente en las superiores. Otra dificultad frecuente es la colocación incorrecta del punto de millar. De acuerdo con Orozco (1994), “en estos casos se presentan dos tipos de problemas: en primer lugar, los niños confunden el número de ceros que deben escribir y, en segundo lugar, no saben dónde colocar los puntos que indican unidades de mil” (p.11). Esta confusión se origina cuando los estudiantes asocian automáticamente el término “mil” con la necesidad de insertar un punto, sin atender a la posición correcta ni a la cantidad total de cifras.

Dentro de las dificultades encontradas en las heurísticas que se emplean en la resolución de problemas de estructura aditiva está "no establecer el vínculo entre el valor posicional de los números y el procedimiento establecido para realizar la operación de suma o resta", por lo anterior, se observan errores en la aplicación del algoritmo para las operaciones de suma y resta. Estos errores se explican, en muchos casos, por una descomposición equivocada del número, situación que puede estar relacionada con una comprensión débil del esquema parte-todo. Como lo afirma Bermejo (2004), “el aprendizaje del esquema parte-todo permite comprender que el número está compuesto por otros números” (p. 67), lo cual es clave para una descomposición adecuada.

Al trabajar con la suma con reagrupación, otro problema común es la incapacidad de los estudiantes para comprender la relación entre los valores posicionales. Por ejemplo, al sumar columnas de unidades y obtener un resultado mayor que nueve, el estudiante debería colocar las unidades en la posición correspondiente y trasladar las decenas como sumando adicional a la

columna siguiente. Sin embargo, en muchas ocasiones, lo que ocurre es que el estudiante escribe el número completo en la columna de las unidades, sin realizar el traslado que corresponde.

Un error común se presenta cuando los estudiantes registran incorrectamente la reagrupación en el nivel superior. Si bien ubican las cifras de las unidades en el lugar correcto, no efectúan el traslado de las decenas a la columna siguiente y, por tanto, las omiten en el cálculo. Esto revela problemas en la comprensión del funcionamiento del sistema posicional y limita la ejecución adecuada de algoritmos básicos. Asimismo, es común observar errores cuando los sumandos tienen diferente cantidad de cifras. Los estudiantes, en lugar de alinear los números según sus columnas de valor posicional, los escriben desordenadamente, lo que genera resultados incorrectos. Como menciona Godino (2004), “colocación de números... no hacen coincidir las columnas de las cifras del primer número con las columnas del segundo” (p.194).

Por último, debe destacarse que la aplicación mecánica de los algoritmos sin comprensión de su sentido genera errores significativos en la resolución de problemas. En el contexto escolar suele enfatizarse el cumplimiento de procedimientos rígidos, lo que dificulta el razonamiento matemático. En palabras de Castro et al. (2013), “saber sumar no solo es aplicar un algoritmo, sino también establecer relaciones y comprender las propiedades de las operaciones” (p.8). Estos autores subrayan la importancia de fomentar procesos como comunicar, argumentar, analizar, razonar y explicar, los cuales se fortalecen cuando los estudiantes desarrollan sus propias heurísticas y comparten sus estrategias en espacios de discusión entre pares. Este tipo de prácticas permite validar razonamientos, enriquecer el aprendizaje y avanzar hacia una comprensión más profunda de las operaciones.

2.7. Heurísticas, Dificultades y Algunos Errores de Área y Superficie en el Dominio Aritmético y Métrico.

El aprendizaje de las ideas sobre área y superficie y su cálculo en matemáticas presenta diversas dificultades conceptuales, cognitivas y didácticas al igual que errores, que ya han sido documentados por la investigación. A continuación, se presentan de manera global las principales:

Uno de los errores cometidos en el estudio geométrico es debido a la confusión entre longitud, área y volumen. Muchos estudiantes confunden el área con el perímetro. En niveles más avanzados, se dificulta diferenciar entre superficie (2D) y volumen (3D) y utilizan procedimientos y uso indebido de unidades de medida de los mismos.

Dificultades en la visualización espacial. Estas dificultades están relacionadas con visualizar figuras planas (como triángulos o paralelogramos) dentro de otras figuras, muchos problemas de área requieren dividir figuras irregulares en figuras conocidas. En este sentido una dificultad es identificar las propiedades de las figuras y la forma de separarlas para realizar los cálculos solicitados.

Otra de las dificultades encontradas son los problemas con el uso de fórmulas. Estas dificultades están asociadas al uso mecánico de fórmulas sin comprensión del significado geométrico; memorizar sin entender por qué funcionan las fórmulas; olvidar unidades o usarlas incorrectamente o desconocer que el área no depende de la posición de la figura sino de sus dimensiones.

Algunas estrategias para superar estas dificultades que se han planteado desde la didáctica de las matemáticas son: usar representaciones múltiples (dibujos, modelos 3D, imágenes dinámicas e interactivas); fomentar el razonamiento más allá de las fórmulas (descomponer, estimar, justificar); conectar las tareas con contextos reales; introducir gradualmente el simbolismo matemático después del entendimiento concreto. Báez, A. M., Pérez González, O. L., & Triana Hernández, B. (2017)

2.7.1. Heurísticas de Área y Superficie de una Figura

En la aplicación de heurísticas para calcular el área de una figura los estudiantes suelen emplear diversas estrategias para calcular el área de una figura, partiendo del proceso de comprensión del concepto mismo. Para facilitar esa comprensión, en la clase de matemáticas, especialmente en el enfoque geométrico, se recurre con frecuencia al uso de materiales tangibles y concretos, como cuadrados y bloques que permiten recubrir superficies. A través de estas actividades, los estudiantes pueden acercarse progresivamente a la formulación de las reglas y fórmulas propias del cálculo de áreas.

Como señala Cayetano et al. (2011), “para la comprensión del concepto de área es importante realizar con los alumnos actividades de manipulación de materiales con el propósito de que ellos formulen sus primeras nociones o ideas y que posteriormente ellos mismos lo profundicen hasta llegar a la conceptualización” (p. 664). Este tipo de actividades fomenta una aproximación intuitiva al concepto y permite que los estudiantes construyan significados más sólidos antes de llegar a un nivel formal.

Una estrategia común en el aula es el uso de fórmulas para el cálculo de áreas. Jaimes-Pérez et al. (2024) afirman que “el uso de fórmulas es una estrategia común entre los estudiantes para calcular el área de figuras planas, como rectángulos, triángulos y círculos” (p. 14). Sin embargo, esta estrategia, aunque eficiente en términos operativos, no siempre asegura una comprensión profunda. Los estudiantes tienden a aplicar fórmulas de forma memorística, como requisito para obtener una respuesta numérica, sin considerar las unidades de medida involucradas o el sentido del procedimiento que utilizan.

Otra heurística frecuente es el uso de unidades de recubrimiento, que se repiten hasta cubrir por completo una superficie. Esta estrategia, además de ser visualmente efectiva, permite vincular el concepto de área con situaciones reales del entorno. Según Cárdenas-Pinto (2023), al emplear actividades de recubrimiento, los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos en contextos significativos, reforzando el sentido práctico del área. Aunque el cuadrado es la unidad más habitual para estas actividades, el empleo de otras figuras como triángulos puede enriquecer la comprensión y diferenciar entre unidades lineales y cuadradas, aspecto clave en la transición hacia el pensamiento métrico más abstracto.

También se recurre al uso de unidades no estandarizadas para representar gráficamente el área. Estas estrategias, aunque menos precisas, permiten a los estudiantes vincular el aprendizaje matemático con elementos de su entorno cotidiano. Godino (2004) considera que esta forma de aproximación favorece la apropiación conceptual del área, aunque al no existir un patrón uniforme, los resultados pueden variar entre estudiantes, lo que también representa una oportunidad para la reflexión colectiva sobre la necesidad de criterios comunes.

Otra estrategia útil es la descomposición de figuras complejas en partes más simples. Este procedimiento facilita el cálculo del área total, ya que permite trabajar con formas conocidas y manejables, como triángulos o rectángulos. Marmolejo Avenia y Vega Restrepo (2012)

describen cómo “los estudiantes hacen refaccionamientos sobre la figura de inicio que la descomponen en dos subconfiguraciones iguales, cada una compuesta por figuras más simples como triángulos y cuadrados pequeños. Posteriormente, realizan reconfiguraciones y traslados de estas partes para facilitar el conteo y cálculo del área total” (p. 25). Por ejemplo, al calcular el área de un rombo, algunos estudiantes lo dividen en dos triángulos; o en el caso de un trapecio, lo descomponen en un rectángulo y un triángulo, calculan las áreas por separado y luego las suman. Este tipo de estrategias no solo facilita el cálculo, sino que también promueve la comprensión estructural de las figuras.

2.7.2. Dificultades y errores que se Presentan en el Cálculo del Área de una Figura

El estudio de las unidades de medida suele comenzar con magnitudes lineales como la longitud, generalmente a través del uso de partes del cuerpo y objetos del entorno, antes de introducir las medidas estandarizadas. Sin embargo, cuando los estudiantes se enfrentan al concepto de área dentro del enfoque geométrico, el proceso se vuelve más complejo. La dificultad radica en la transición hacia patrones estandarizados, ya que el área, a diferencia de la longitud, no se visualiza ni se mide con la misma inmediatez, lo que puede generar múltiples errores y confusiones.

Una de las equivocaciones más frecuentes es la confusión entre el área y el perímetro. Muchos estudiantes tienden a asignar el valor numérico más alto al área y el más bajo al perímetro, sin comprender que se trata de magnitudes diferentes. Según la Universidad de Granada (UGR, s. f.), en ciertos casos, al calcular ambas medidas, los niños suelen adjudicar el dato mayor al área y el menor al perímetro, lo cual pone en evidencia una falta de diferenciación conceptual entre ambos. Esta confusión puede deberse a que se asocia erróneamente el área con el borde de la figura, el perímetro, en lugar de relacionarlo con el espacio que ocupa la superficie plana.

Esta confusión conlleva al uso incorrecto de las unidades de medida según la magnitud solicitada. Este error suele estar relacionado con una interpretación deficiente de las dimensiones de las figuras, además del empleo inadecuado de las herramientas de medición. López (2022) señala que una causa frecuente es la toma incorrecta de las medidas, ya sea porque no se cubre completamente la figura al recubrirla con unidades, se superponen elementos de forma desigual, las fronteras se dejan incompletas, o se utilizan objetos concretos de diferentes tamaños sin un

patrón de medida unificado. Estas imprecisiones impiden que los estudiantes obtengan resultados válidos, y afectan la comprensión del concepto de área como superficie cubierta.

Estos errores y dificultades subrayan la importancia de implementar estrategias didácticas que permitan una comprensión clara de la diferencia entre perímetro y área, y que promuevan el uso adecuado de las unidades de medida en función de la magnitud que se desea calcular. Vincular el aprendizaje con situaciones concretas, materiales estandarizados y actividades reflexivas resulta esencial para garantizar que el concepto de área sea entendido más allá de la simple ejecución de procedimientos.

Capítulo III. Presentación del Diseño de la Secuencia

En este capítulo se expone el diseño de la secuencia didáctica que se plantea como una propuesta para fortalecer los procesos de pensamiento matemático en estudiantes de grado tercero de básica primaria, a través del método de resolución de problemas al estilo japonés. Para el desarrollo de esta propuesta se eligió un método que permitiera la participación activa y equitativa de todos los estudiantes en cada fase de la secuencia. La elección de esta estrategia responde a la necesidad de partir desde las ideas y propuestas que los propios estudiantes construyen al enfrentarse a problemas matemáticos, posicionando el método japonés como eje articulador de la experiencia de aprendizaje. De igual manera, se reconoció la importancia de incorporar el error como parte esencial del proceso formativo, de valorar el rol de todos los agentes implicados en la sesión, y de transformar el papel del docente hacia una figura que facilita medios, indaga, acompaña y promueve diversas heurísticas, sin centrar la clase únicamente en el contenido.

3.1. Método de Resolución de Problemas al Estilo Japonés

La propuesta se sustenta en una estrategia de trabajo basada en el método de resolución de problemas al estilo japonés. En este enfoque, es el estudiante quien construye la clase al enfrentarse a un problema verbal, gráfico o con materiales concretos que requiere solución. A partir de la lectura del enunciado, comienza a realizar procesos de interpretación, análisis, asociación con experiencias previas y selección de recursos que le permitan formular una estrategia de solución. Cuando surgen dudas o bloqueos, puede recurrir a las pistas preparadas por el docente, las cuales están elaboradas en distintos formatos, imágenes, símbolos o ejemplos similares, y ubicadas estratégicamente en el aula. Estas pistas funcionan como apoyos autónomos que guían sin condicionar, promoviendo en los estudiantes una actitud activa frente a su propio aprendizaje.

Cada estudiante realiza su propuesta de solución de forma individual, y estas son acogidas públicamente en el desarrollo de la clase. Las respuestas se registran y se exponen en la parte central de la pizarra, permitiendo que la construcción colectiva se base en la diversidad de ideas y estrategias que surgen del grupo. Esta dinámica transforma la sesión en un escenario

participativo, donde la reflexión y la discusión se convierten en elementos centrales del aprendizaje matemático.

Este método también transforma radicalmente el rol del docente. Antes de cada sesión, el maestro define con claridad el objetivo y selecciona el problema que se trabajará en función de dicho propósito. A partir de ello, diseña las ayudas que se ofrecerán en la clase, anticipando los desafíos cognitivos que pueden surgir. Las pistas se elaboran según la naturaleza del problema e incluyen representaciones gráficas, ejemplos comparables o símbolos que amplíen las posibilidades de pensamiento de los estudiantes. Este método exige del docente una formación continua, una disposición abierta al análisis de estrategias diversas y una actitud crítica frente a modelos tradicionales que podrían limitar la creatividad de los estudiantes. Como lo advierte Mena (2014), “el proceso de aprendizaje se centra en el alumno; este tiene una responsabilidad importante en su formación, el profesor tiene un rol de facilitador, de generador de espacios de trabajo, de ser un modelo de pensamiento” (p. 111).

En este sentido, la resolución de problemas al estilo japonés no solo se convierte en un método didáctico, sino también en una postura pedagógica que redefine la enseñanza de las matemáticas, colocando al estudiante como protagonista del pensamiento y al docente como guía reflexivo del proceso de aprendizaje.

3.2. Segmentos de la Clase y Propósitos en el Método de Resolución de Problemas al Estilo Japonés

La resolución de problemas al estilo japonés favorece el trabajo colaborativo tanto entre docentes como entre estudiantes. Este método exige que los maestros conformen una comunidad profesional en la que se comparten saberes, se diseñan propuestas y se promueve la formación continua. La elaboración conjunta de planes de clase, las clases demostrativas y las clases públicas funcionan como escenarios de co-construcción y reflexión, fortaleciendo los vínculos pedagógicos entre docentes y posibilitando la mejora progresiva de las prácticas educativas, aunque este aspecto de colaboración entre colegas no fue desarrollado en esta propuesta, se reconoce como un aspecto fundamental en la propuesta marco desarrollada por la comunidad de educadores en Japón.

Dentro del aula, este método también promueve el trabajo colectivo entre los estudiantes. Las heurísticas propuestas para resolver los problemas se comparten, se analizan y se clasifican, reconociéndolas como producciones válidas que enriquecen el proceso formativo. Esta construcción no se concibe de forma individual, sino como resultado de la interacción entre los estudiantes, en la que el diálogo y la argumentación fortalecen el pensamiento matemático.

La clase se organiza en una serie de segmentos definidos, que responden a un orden estructurado y flexible a la vez. El primer segmento es la presentación del problema, a cargo del docente, quien propone una situación que responde al objetivo de la sesión. El problema puede adoptar distintas formas y referencias, pero siempre debe ser accesible para los estudiantes, generando un reto abordable que estimule la reflexión sin causar bloqueo. A continuación, se desarrolla **el trabajo individual**, momento en el que cada estudiante construye una idea propia para resolver el problema. Esta etapa fortalece la confianza en sí mismo y fomenta una participación equitativa en el grupo, permitiendo que cada estudiante se acerque a la solución desde su propio razonamiento.

Luego se realiza el **trabajo colectivo** (este puede ser opcional en algunas clases), que puede llevarse a cabo en parejas o pequeños grupos. En este espacio se socializan las distintas soluciones, promoviendo el análisis conjunto, el contraste de ideas y la argumentación entre pares. Posteriormente se realiza la socialización en plenaria, donde se presentan las propuestas de cada estudiante o grupo, se identifican coincidencias y se da visibilidad a las distintas rutas seguidas para resolver el problema. Esta etapa permite reconocer la diversidad de pensamiento presente en el aula.

Seguido a ello, **se clasifican y etiquetan las heurísticas utilizadas**, reconociéndolas como parte de la producción colectiva. Esta clasificación permite sistematizar las estrategias y ponerlas a disposición de toda la comunidad, como referentes que enriquecen futuras clases. Finalmente, **se establecen acuerdos** sobre normas socio-matemáticas, que permiten identificar atributos relevantes de las soluciones, tales como eficacia, simplicidad o utilidad, y reflexionar en conjunto sobre el contenido trabajado y el objetivo alcanzado.

3.3. Plan de Pizarra, Cuaderno y Pistas

Uno de los elementos esenciales en el desarrollo de la clase bajo el método de resolución de problemas al estilo japonés es el plan de pizarra. Este corresponde a la manera en que el docente organiza la información en el tablero durante la sesión. Su valor pedagógico radica en que actúa como un cuaderno colectivo, en el cual se sintetizan tanto los momentos de desarrollo como los resultados obtenidos a lo largo de la clase. Lo registrado en este espacio sirve como herramienta de apoyo para los estudiantes que deseen retomarlo, ya que les permite revisar las estrategias planteadas, los razonamientos compartidos y las conclusiones construidas en grupo.

A pesar de la relevancia del tablero como recurso común, los estudiantes tienen autonomía sobre lo que desean registrar en sus cuadernos individuales. En ellos, pueden decidir qué anotar, qué describir y cómo organizar esa información, de acuerdo con su comprensión personal. Este ejercicio de selección revela, a su vez, el grado de apropiación que tienen sobre los contenidos trabajados. De esta forma, los cuadernos se convierten también en un instrumento de lectura pedagógica para el docente, quien puede observar qué aspectos han sido considerados como relevantes, qué ideas han sido mejor comprendidas y cuáles discusiones han tenido mayor impacto en el grupo.

La organización del plan de pizarra está pensada para facilitar la lectura visual del trabajo en clase. En el lado izquierdo se ubica el enunciado del problema de la sesión, al centro se registran las heurísticas que los estudiantes han propuesto como estrategias de solución, y en el lado derecho se colocan las conclusiones o acuerdos generados durante la etapa final. Este diseño permite visualizar el recorrido completo del pensamiento colectivo: desde la pregunta inicial hasta la síntesis de lo aprendido.

A lo largo de la sesión, otro recurso fundamental son las pistas, las cuales se ponen a disposición de los estudiantes que lo necesiten, especialmente en momentos de atascamiento cognitivo. Las pistas no se imponen ni se activan automáticamente: el estudiante decide si requiere observarlas, cuántas revisar y cuántas veces hacerlo. Esta autonomía permite que cada estudiante se enfrente al problema desde su propio punto de partida, utilizando los recursos que considere más adecuados para construir su estrategia de solución.

La naturaleza de las pistas debe ser variada y significativa. Estas pueden expresarse de forma gráfica, simbólica o mediante lenguaje cotidiano, y deben estar relacionadas con situaciones similares al problema propuesto, aunque nunca ser idénticas ni contener la solución directa. Pueden también ofrecer una operación vinculada o una idea clave sin explicitar el procedimiento completo. De hecho, el diseño de las pistas puede contemplar distintos niveles de complejidad, unas más abstractas y otras más explicativas, lo que permite al docente hacer un seguimiento del nivel de comprensión de los estudiantes y valorar la forma en que se aproximan al problema. Así, las pistas no solo funcionan como andamiaje cognitivo, sino también como indicador diagnóstico del proceso de aprendizaje.

Finalmente, en el extremo derecho del tablero, como ya se indicó, se ubican las conclusiones o acuerdos. Estos constituyen una síntesis colectiva del aprendizaje logrado, y recogen las generalidades encontradas a lo largo de la sesión. No se trata de una exposición del contenido formal, sino de una construcción compartida entre el docente y los estudiantes sobre lo que se logró comprender, discutir y valorar. Este cierre reafirma el sentido de la clase como un espacio para la construcción activa del conocimiento, en el que todos los participantes son protagonistas del proceso.

3.4. Presentación de las Tareas de la Secuencia

A continuación, se presentan las tareas que componen esta secuencia, junto con los objetivos, aprendizajes, actividades y criterios de evaluación propias de cada una. Una sesión inicial de adaptación a la metodología, dos sesiones correspondientes al pensamiento métrico y geométrico, dos sesiones correspondientes al pensamiento numérico las cuales se describen a continuación.

Tabla 1

Matriz secuencial de sesiones.

Objetivo 1	
Desarrollar estrategias con base en la composición aditiva de un número, al igual que introducir a los estudiantes con el método de resolución de problemas al estilo japonés.	
Aprendizajes a desarrollar	<ul style="list-style-type: none"> • Composición aditiva de un número. • Fortalecimiento del cálculo mental ya que los estudiantes deben sumar, multiplicar o combinar valores para componer el número 27 con las cartas. • Estrategias de resolución de problemas • Análisis de problemas.

	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión del valor numérico y la comparación de números, al analizar distintas combinaciones posibles para llegar a la suma deseada • Incremento de la motivación y el interés por las matemáticas a través de una actividad lúdica y dinámica, que transforma el aprendizaje en una experiencia divertida y memorable.
Secuencia de actividades de la sesión	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación del problema. Se escribirá en la zona superior izquierda del tablero la frase Componer el número 27 usando las cartas. • Presentación individual de estrategias de los estudiantes: Se les da a los estudiantes una hoja en la que escribirán su propia estrategia. • Revisión de pistas: Se les informa a los estudiantes que en la parte sur del salón se encontrarán algunas pistas que funcionan como comodines o ayuda para plantear una solución. • Socialización y clasificación de las estrategias propuestas. Se tendrán en cuenta las estrategias similares y los propios estudiantes deducirán las similitudes • Presentación de las estrategias encontradas y se exponen las que cumplen el criterio principal componer 27 puntos exactos. • Conclusiones: Se analizan las propuestas dadas, encontrando desde los escolares aquellas que cumplen el criterio de cardinal 27 sugerido. Si llegarán a proponer estrategias que no cumplan con el propósito se debe hacer aclaración de la razón por la que no sea válida.
Recursos	Tablero, marcador, cartas de naípe, hoja de trabajo, lápiz, pistas escritas, sobre de acetato, cinta adhesiva.
Criterios de evaluación	El estudiante: Identifica el valor cardinal de una colección Reconoce las partes de una cantidad cardinal desde su composición aditiva. Aplica conteos para completar cantidades cardinales. Reconoce el valor posicional de una cantidad como una estrategia de composición aditiva.
Objetivo 2	
Promover heurísticas en el cálculo del área de una figura desde la comprensión del concepto de área.	
Aprendizajes a desarrollar	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión conceptual del área de una figura. • Identificar el área de una figura. • Reconocer las heurísticas posibles para calcular el área de una figura • Utilizar las unidades de medida de área de una figura. • Calcula el área de rectángulos.
Secuencia de actividades de la sesión	<ul style="list-style-type: none"> • Se escribe el enunciado de calcular el área con el dibujo de la L en una cuadrícula en la parte superior izquierda del tablero. • Se entrega a cada estudiante una hoja de trabajo en la cual está la L dibujada en una cuadrícula y un espacio para escribir el proceso que utiliza cada estudiante. Se les informa acerca de las pautas que se ubican en la zona sur del salón. • Se les da un tiempo de 10 minutos para pensar en la estrategia de cálculo de área que van a utilizar. Cada estudiante da una propuesta de solución. • Se les comunica la ubicación de las pistas y la libertad de observarlas y usar la que mejor entiendan. • Las soluciones se colocan en un sobre de acetato y se ubica en el tablero. • Se clasifican y se agrupan las soluciones presentadas entre las que sean similares. • Se realizan aclaraciones acerca de lo que es área y las soluciones acertadas en un conversatorio con preguntas guía.
Recursos	Tablero, hoja de trabajo, lápiz, pistas escritas, sobre de acetato, cinta adhesiva, propuestas de solución
Criterios de evaluación	El estudiante: Calcula el área usando diferentes estrategias como recubriendo la figura con cuadrados, separar en cuadrados grandes la figura propuesta. Calcula áreas individuales y al final las suma. Realiza el conteo de cuadraditos que componen la figura. Utiliza la multiplicación en el cálculo de área del rectángulo. Realiza cálculos correctos y usa las unidades de medida correctas.

Objetivo 3

Fortalecer y esclarecer el concepto de área a partir de la promoción de heurísticas para figuras compuestas

Aprendizajes a desarrollar	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión conceptual del área • Calcular el área de rectángulos. • Calcular el área de triángulos. • Calcular el área de figuras compuestas entre triángulos y rectángulos. • Descomposición de figuras compuestas. • Promover discusiones y trabajo colaborativo entre pares.
Secuencia de actividades de la sesión	<ul style="list-style-type: none"> • Se escribe en la parte superior izquierda del tablero Calcula el área del trapecio, la figura está dibujada sin cuadrícula. • Se les entrega la hoja de trabajo en la que se encuentra la instrucción del tablero. Además, se les recuerda que hay pistas que pueden utilizar como comodines de ayuda para encontrar una solución ubicadas en la parte sur del salón y que son diferentes en su presentación. • Se les da un tiempo de 10 minutos para que puedan revisar las pistas de ser necesario y plantear una solución al problema planteado. Al terminar el tiempo cada estudiante ubica su propuesta en la zona central del tablero, dispuestas para ello. • Se les dan 15 minutos de socialización y clasificación de propuestas, encontrando las similares, leyendo una y los estudiantes buscan las similares a esta, hasta tener todas clasificadas. • Conclusiones: Para finalizar se les pregunta ¿qué es el área de una figura? ¿Cómo se puede calcular? ¿Qué unidades de medida de área se pueden utilizar? ¿En qué ocasiones cotidianas se necesita utilizar? Esas respuestas se socializan y se escriben en la parte derecha del tablero?
Recursos	Tablero, hoja de trabajo, pistas escritas, sobre de acetato, cinta adhesiva, marcadores.
Criterios de evaluación	<p>El estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> Aplica estrategias para evidenciar el concepto de área. Descompone una figura, calcula las áreas parciales y por último las suma. Descompone la figura formando una figura con rectángulos únicamente, calculando su área. Descompone una figura en triángulos y rectángulos, calcula sus áreas parciales y las suma. Utiliza la fórmula adecuada para calcular el área de un rectángulo y un triángulo.. Utiliza unidades de medida adecuadas para calcular áreas.

Objetivo 4

Fortalecer heurísticas relacionadas con la solución de problemas de estructura aditiva de combinación con cantidad inicial desconocida

Aprendizajes a desarrollar	<ul style="list-style-type: none"> • Formula problemas a partir de imágenes de dos colecciones con una desconocida. • Identifica la estructura, la relación de dos colecciones y su diferencia. • Reconoce que el problema involucra la unión de dos colecciones, donde una de las partes es desconocida. • Relaciona la sustracción en la estructura aditiva en un problema de combinación. • Utiliza diferentes métodos para resolver el problema, como descomposición numérica, uso de material concreto o cálculo mental.
Secuencia de actividades de la sesión	<ul style="list-style-type: none"> • Se coloca en la parte superior izquierda dos tarjetas con imágenes. En la primera tarjeta se encuentran dos bolsas de colores diferentes y una de ellas con el signo de interrogación. Las dos bolsas están vaciando su contenido, el cual cae a una caja dibujada en la segunda tarjeta en la que hay parte del contenido de ambas bolsas que ha caído previamente. • Se les da a los estudiantes una hoja de trabajo donde se encuentra el dibujo del problema con una zona para escribir el problema y un espacio para escribir cómo lo resolvería. Se les recuerda que en la parte sur del salón encuentran pistas que les ayudan a encontrar una solución al problema. En la primera parte de esta sesión se da un tiempo para que los estudiantes escriban un problema con base en la información gráfica presentada. • Se les da un tiempo de 10 minutos para escribir una propuesta sobre cómo calcular la cantidad inicial desconocida. Al terminar el tiempo cada estudiante entrega su propuesta la que es ubicada en el tablero en la zona central.

	<ul style="list-style-type: none"> • Para socializar y clasificar las propuestas se lee una y se asocian las similares. • Conclusiones: Se les pregunta a los escolares: Cuando hay dos colecciones se forma un total ¿Cómo se puede calcular el valor de una de las colecciones? ¿Cuántas formas de resolver un problema hay? ¿Cuántas formas de resta conocen? ¿Cuántas formas de sumar conocen?
Recursos	Tablero, fichas o tarjetas, marcador, hoja de trabajo, pistas escritas, sobre de acetato, cinta adhesiva.
Criterios de evaluación	El estudiante: Reconoce que el problema implica una combinación donde una parte es desconocida y establece relaciones entre las cantidades dadas (parte conocida y total). Construye diagramas donde se reconoce la relación parte-todo en la estructura aditiva. Determina que la sustracción o resta como operación para obtener la cantidad desconocida. Aplica algoritmos convencionales o no convencionales (como descomposición numérica o uso de material concreto) para resolver la operación
Objetivo 5	
Promover heurísticas en el desarrollo de problemas de estructura aditiva de igualación.	
Aprendizajes a desarrollar	<ul style="list-style-type: none"> • Fórmula problemas matemáticos a partir de imágenes de dos colecciones que se requieren igualar. • Identifica la igualación o equilibrio entre dos colecciones. • Utilizan adición o sustracción para resolver la igualación entre dos colecciones. Utiliza diferentes métodos como la comparación directa, la búsqueda sistemática o el uso de operaciones inversas para resolver problemas.
Secuencia de actividades de la sesión	<ul style="list-style-type: none"> • En el enunciado de esta sesión se presenta una imagen de una balanza y en ella un niño pensando como igualarla colocada en el tv, en el tablero se dibuja una balanza. • Se les entrega una hoja de trabajo con una balanza que tiene la pregunta ¿Cómo igualarlos? Se les da un tiempo para la formulación del problema con base en lo observado. • Se les recuerda la utilización de las pistas y la ubicación de las mismas, en caso de no tener una propuesta de solución. Se les recuerda que pueden utilizar las pistas que deseen. • Se les dan 10 minutos para escribir su propuesta de solución, la cual está escrita en la hoja de trabajo se coloca en un sobre de acetato y se ubica en el tablero en la zona de las propuestas. • Socialización y clasificación de las propuestas: se toma una propuesta, se lee y se buscan las similares, los estudiantes las agrupan. • Conclusiones: Cuando hay un problema de igualamiento se puede ¿sumar? ¿restar? ¿Qué se suma? ¿Qué se resta?
Recursos	Televisor, tablero, marcadores, hoja de trabajo, sobre de acetato, cinta adhesiva.
Criterios de evaluación	El estudiante: Reconoce la estructura del problema de igualación. Representa la situación mediante diagramas, dibujos o expresiones matemáticas que reflejan la igualdad buscada. Selecciona y aplica la operación correcta para solucionar problemas. Explica con claridad el procedimiento seguido para resolver el problema, justificando cómo llegó a la solución y verificando que esta sea coherente.

Nota. Elaboración propia, 2025.

3.5. Justificación de la Secuencia

La secuencia didáctica desarrollada para esta investigación consta de cinco sesiones cuidadosamente organizadas. Su diseño no se basa en el tratamiento de un concepto específico, sino en la progresión del nivel de dificultad asociado al proceso de composición y


descomposición, el cual aparece como núcleo común en los enunciados propuestos. Esta estructura busca establecer una relación directa con los pensamientos matemáticos: numérico, geométrico y métrico, permitiendo que, a lo largo de la secuencia, los estudiantes enfrenten retos que incrementan gradualmente su complejidad.

El objetivo principal es que, a medida que avanzan las sesiones, los estudiantes desarrollen estrategias cada vez más refinadas para abordar situaciones problemáticas que implican descomponer o componer elementos numéricos o geométricos. La primera sesión presenta un problema orientado a la composición y descomposición aditiva de números, lo cual permite observar las heurísticas espontáneas que los estudiantes emplean frente a cantidades numéricas. En las siguientes dos sesiones, los enunciados se centran en figuras geométricas y requieren que los estudiantes realicen procesos de descomposición y recomposición espacial para identificar medidas de área, favoreciendo el desarrollo del pensamiento métrico y geométrico. Finalmente, las últimas dos sesiones plantean problemas que involucran colecciones de objetos, en los cuales los estudiantes deben componer o descomponer cantidades que representan cardinales de colecciones, vinculándose nuevamente con el pensamiento numérico y el sentido de cantidad.

Esta progresión secuencial permite que los estudiantes se familiaricen con el proceso de resolución a partir de problemas accesibles y, paulatinamente, se enfrenten a tareas más complejas que requieren mayor análisis, reflexión y uso de estrategias. Así, se espera que no solo se desarrollen habilidades técnicas, sino también capacidades argumentativas y heurísticas que favorezcan el pensamiento matemático flexible.

Tabla 2

Proyección de dificultad en las tareas de la secuencia

Proceso de composición y descomposición en el pensamiento numérico, geométrico y métrico	
	
<i>El nivel de dificultad que implicaba la tarea en el proceso de composición/descomposición aumenta en la secuencia y asimismo los distintos tipos de heurísticas que podían proponer los estudiantes</i>	
Dificultad en relación con el tipo de heurística (creación de razonamientos y estrategias que permiten resolver el problema)	Dificultad en relación con el enunciado
Tarea 1	
El enunciado de la primera tarea no implicaba razonamientos de distinto tipo para su resolución, si implicaba distintas estrategias	El enunciado contiene una parte de enunciado verbal y una parte

	del enunciado en material tangible
Tarea 2	
Este enunciado implicaba razonamientos asociados al pensamiento geométrico para poder descomponer la figura en figuras elementales y también razonamientos asociados al pensamiento métrico para poder medir el área de esas figuras y por último razonamientos del pensamiento numérico por las operaciones entre las cantidades numéricas involucradas	El enunciado se compone de una parte de enunciado verbal y una parte gráfica
Tarea 3	
Este enunciado implicaba razonamientos asociados al pensamiento geométrico (de mayor dificultad por el tipo de figura) para poder descomponer la figura en figuras elementales y también razonamientos asociados al pensamiento métrico para poder medir el área de esas figuras y por último razonamientos del pensamiento numérico por las operaciones entre las cantidades numéricas involucradas	El enunciado se compone de una parte de enunciado verbal y una parte gráfica
Tarea 4	
Este enunciado implicaba un razonamiento asociado al pensamiento numérico que sobre la unión de dos colecciones y su diferencia. Y luego un razonamiento de este pensamiento asociado a una operación aritmética con una cantidad inicial desconocida (cardinal de una colección)	El enunciado es solo gráfico y ellos debían formular la pregunta
Tarea 5	
Los tres enunciados que componen esta tarea implican razonamientos que involucran el pensamiento numérico y métrico pues aparecen distintas medidas de distintas de las magnitudes: cantidad y masa. Los enunciados corresponden a problemas de igualamiento que implican la composición/descomposición asociada al cambio o transformación de una cantidad para obtener una igualdad	Los enunciados eran todos gráficos acompañados de distintas preguntas

Nota. Elaboración propia, 2025.

3.6. Perfil Sociodemográfico de la Muestra

Este proyecto fue implementado en el Liceo Santa Catalina de Siena, una institución educativa de carácter privado ubicada en el barrio Britalia, perteneciente a la localidad de Kennedy en la ciudad de Bogotá. La propuesta se desarrolló con estudiantes del grado tercero de básica primaria, conformado por 26 niños y niñas entre los 7 y 9 años de edad, distribuidos en 14 estudiantes hombres y 12 estudiantes mujeres.

La elección de este grupo respondió a la observación de ciertas características pedagógicas relevantes. Se identificó que los estudiantes han recibido una formación predominantemente conductista, en la que el docente es visto como única fuente de validación. Esto se evidencia en expresiones frecuentes como “¿está bien lo que hice?”, cuando intentan compartir una idea matemática. Esta dependencia del juicio externo limita la autonomía en el

razonamiento y la construcción de estrategias propias, lo que motivó la implementación de una metodología centrada en el desarrollo de heurísticas y el pensamiento crítico.

En cuanto al contexto familiar, la mayoría de los padres de los estudiantes se desempeñan como negociantes independientes, propietarios de pequeños negocios. Una minoría cuenta con formación profesional, principalmente en áreas relacionadas con el comercio. Este perfil sociocultural aporta elementos importantes para comprender el entorno cotidiano de los estudiantes y las formas en que se vinculan con el aprendizaje matemático.


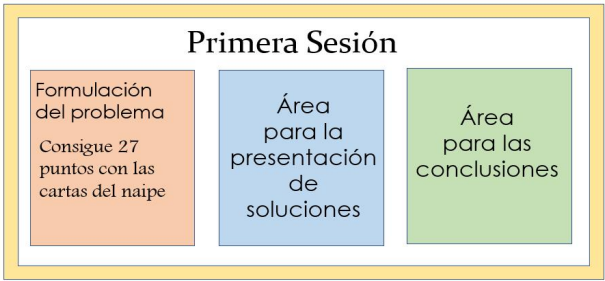
Capítulo IV. Caracterización del Desarrollo de las Sesiones

En este capítulo se presenta de manera descriptiva y detallada el desarrollo de cada una de las sesiones, se puntualizan aspectos relativos a la gestión de la clase.

4.1. Sesión Uno. Descomposición Aditiva de un Número

Tabla 3

Formato de la secuencia didáctica. Sesión 1

Formato secuencia didáctica	
Sesión Uno. Descomposición aditiva de un número	
	
Plan de pizarra y formulación del problema	
Material suministrado:	Una hoja en blanco. Un sobre de acetato.
Enunciado del problema:	Descomposición aditiva de un número. Consigna: “Consigue 27 puntos con el naipe”.

Pistas propuestas para el trabajo individual:

En el salón de clase se ubicaron las siguientes pistas en la zona sur del salón.

Pista 1: Consigna presentada en lenguaje usual

SESION : NAIPES COMODIN 1

¿Sabías que un número natural puede formarse a partir de una suma de números? A esto se le llama componer aditivamente un número. Por ejemplo: $50+8=58$ o $20+10+20+4+4=58$

Pista 2: Descomposición con valor posicional

SESION 1: NAIPES COMODIN 2

Ejemplo

Mariana está formando el número 34 con bloques multibase. Observa su procedimiento.

Descomposición aditiva por lugar de posición

Pista 3: Regletas de Cuisinaire

SESION 1: NAIPES COMODIN 3

3

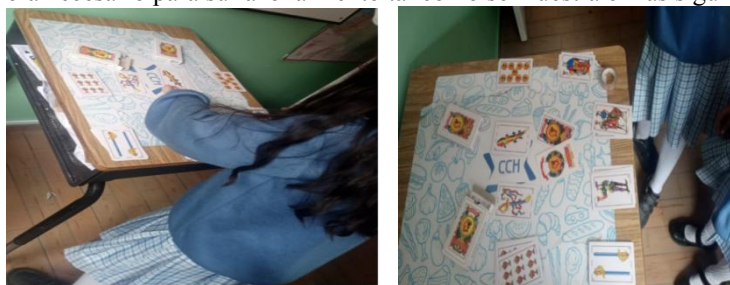
10

Usando regletas Cuisinaire para componer números. Cada fila horizontal es una forma de hacer el número

En esta sesión las pistas presentadas contenían imágenes, símbolos y explicaciones de estrategias que podían utilizar en la composición del número.

Segmento de trabajo individual:

El primer segmento de la clase fue el tiempo de trabajo individual, que correspondió a 20 minutos en los que los estudiantes pensaron cómo podrían resolver el problema y se animaron a presentar alguna solución. Como apoyo para el trabajo individual los estudiantes disponían de un naipes de cartas sobre la mesa, al que podían acudir solo si era necesario para su razonamiento tal como se muestra en las siguientes imágenes:



Preguntas realizadas por los estudiantes:

En relación con el material de apoyo y las cartas del naipes, los estudiantes preguntaron por el significado de las letras en las cartas porque había varios tipos de naipes, aunque estas cartas no fueron usadas porque no se estableció una equivalencia numérica para ellas. Se utilizaron los naipes correspondientes a la baraja española.

Respuestas realizadas por la docente:

Se les planteó: “¿de qué manera podían obtener un número a partir de otros, de otros números más pequeños? y se les invitó a usar las pistas de las que disponían en el salón de clase.

Utilización de las

Los estudiantes se acercaron al fondo del salón y elegían la pista que creían les

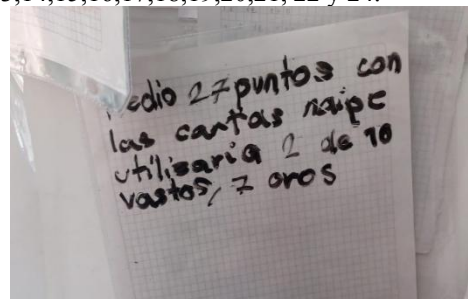
pistas: ayudaba a desarrollar el ejercicio. De este acontecimiento se puede concluir que la pista 1 fue la más utilizada, debido a que a partir de ella los estudiantes propusieron diferentes soluciones basadas en la composición aditiva. La pista más interesante fue la 3, la eligieron varios estudiantes para preguntar por las regletas y si las tenía para realizar el ejemplo. (Se hace la salvedad de que los estudiantes ya habían tenido oportunidad de conocer las regletas de Cuisinaire previamente en una sesión de clase regular del área).

Presentación de soluciones: **de** *Solución 1. Razonamientos uso del mismo número*
Esta solución fue propuesta por los estudiantes 4 y 23, con algunas diferencias que se analizarán en el capítulo 5 de evaluación de las sesiones.



Solución 2. uso del menor número de cartas posible (3 cartas)

Esta solución consta de una suma de solo tres sumandos. La mayoría de los estudiantes plantearon esta propuesta de solución. Sin embargo, sus sumandos (números) varían al igual que la forma de proceder para obtenerlos, cuyas diferencias se analizarán en el capítulo 5. Los estudiantes que realizaron esta propuesta, aunque con diferentes sumandos, fueron 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 y 24.



Solución 3: Uso 6 cartas para conformar los puntos

Para proponer esta solución los estudiantes buscaron las cartas de menor denominación numérica.



Esta solución fue propuesta por los estudiantes 2 y 23. Sin embargo, las propuestas fueron diferentes y se explicaron en el capítulo 5 de evaluación.

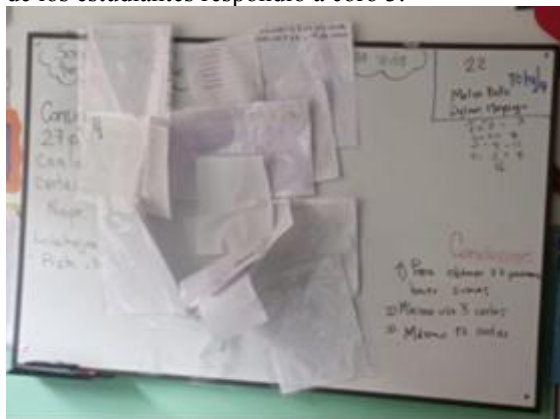
Trabajo grupal: Identificación de aspectos en los que se diferenciaban o coincidían. Los estudiantes a medida que se leían las propuestas de solución iban comentando: “*esa se parece a mi propuesta, usamos las mismas cantidades*”.



En relación con la formulación del problema los estudiantes preguntaron: ¿Cómo conseguir los puntos? La docente respondió que si algo no entendían las pistas les podían ayudar y que se dirigieran a ellas. El estudiante 9, pregunta a la docente ¿Puedo solo sumar? A lo cual se le responde que siga la instrucción, que lea con detenimiento. Entonces la estudiante 9 concluye: “no, debo usar las cartas del naipe, gracias”. El estudiante 19 pregunta a otra compañera ¿Tengo que tomar cartas de la mesa del naipe? La estudiante 23, responde: “si puedes, pero también puedes leer las pistas, la que tú quieras”. Juntas se acercan al naipe para reconocer las cartas que lo conforman y sus números.

Momento de las conclusiones:

Después de diez minutos de trabajo grupal, se solicita tomar sus lugares y se realiza la pregunta: ¿Qué se puede concluir de lo realizado el día de hoy? El estudiante 19 responde: Para obtener los puntos se debe sumar. Otro estudiante comenta que se debe recordar que es usando las cartas del naipe. Después de presentadas las socializaciones, los estudiantes comenzaron a buscar nuevas posibilidades de soluciones que no estuvieran contenidas en el tablero. En este segmento de clase se promovió de forma espontánea la identificación de soluciones diferentes a las desarrolladas en el trabajo individual. Otros estudiantes al descubrir que la estructura de la solución correspondía a la adición, colocaron diferentes sumandos sin tener en cuenta el valor de las cartas, dando más posibilidades. Para la segunda conclusión se pregunta ¿cuál es el menor número posible de cartas que se debe usar para obtener los 27 puntos? La gran mayoría de los estudiantes respondió a coro 3.



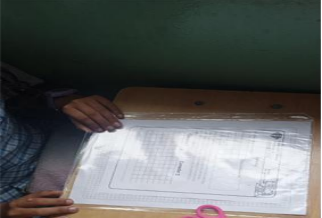
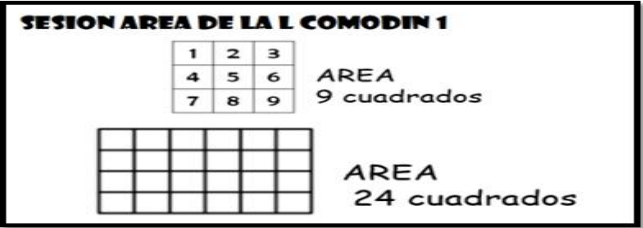


Nota. Imágenes de elaboración propia y fotografías de materiales de la sesión propuesta

4.2. Sesión Dos. Área de la figura dibujada (L en cuadrícula)

En la tabla 4, se presenta la sesión dos correspondiente a área de la L. En esta sesión de clase se planteó un problema geométrico, basado en el concepto de área o superficie de una figura.

Tabla 4
Formato de la secuencia didáctica. Sesión 2

Formato secuencia didáctica				
Sesión Dos. Área de la L				
				
Plan de pizarra y formulación del problema	<div style="border: 2px solid yellow; padding: 10px;"> <p style="text-align: center;">Segunda Sesión</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; padding: 5px; background-color: #f9cb9c;"> Formulacion del problema Calcula el área de la figura L </td> <td style="width: 33%; padding: 5px; background-color: #a6c9ec;"> Área para la presentación de soluciones </td> <td style="width: 33%; padding: 5px; background-color: #c6e0b4;"> Área para las conclusiones </td> </tr> </table> </div>	Formulacion del problema Calcula el área de la figura L	Área para la presentación de soluciones	Área para las conclusiones
Formulacion del problema Calcula el área de la figura L	Área para la presentación de soluciones	Área para las conclusiones		
Material suministrado:	Hoja con la figura en cuadrícula Un sobre de acetato.			
	 			
Enunciado del problema:	del “Calcula el área de la figura L” escrito en la pizarra o tablero en la parte superior izquierda con la figura mencionada en una cuadrícula.			
Pistas propuestas para el trabajo individual:	Pista 1: Contar cuadrados que conforman la figura			
				
	Pista 2: Explicación en lenguaje vernáculo del proceso de calcular área.			

SESIÓN AREA DE LA L COMODÍN 2

PARA CALCULAR EL AREA DE UNA FIGURA SE PUEDE DIVIDIR LA FIGURA EN CUADRADOS IGUALES QUE MIDAN 1 CM DE LADO. Y CALCULARLA EN CENTIMETROS CUADRADOS CONTANDO LOS CUADRADOS HECHOS.

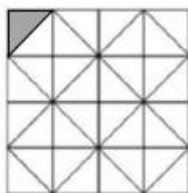
Pista 3: Explicación del concepto de área.

SESION AREA DE LA L COMODIN 3

El área de una figura geométrica hace referencia a la superficie de la misma, es decir, al espacio que queda encerrado en los límites de la misma

Pista 4: Imagen recubierta por triángulos y explicación vernácula de la misma con un ejemplo.

SESION AREA DE LA L COMODIN 4



AREA
Cuenta los
triángulos
IGUALES
32 triángulos.

Andres recubre su pupitre con triángulos de la misma medida y cuenta los triángulos utilizados.

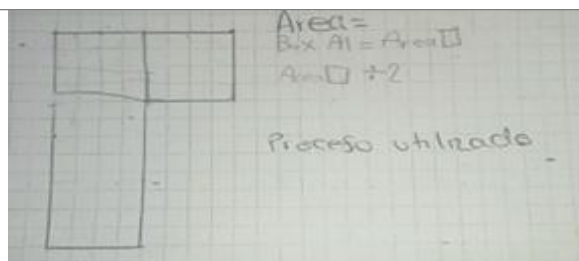
Segmento de trabajo individual: El primer segmento de la clase fue el tiempo de trabajo individual, que correspondió a 10 minutos en los que los estudiantes pensaron cómo podrían resolver el problema y se animaron a presentar su propuesta de solución. Durante este tiempo los estudiantes revisaron el tablero, su hoja de trabajo y las pistas de la sesión que preferían y las veces que las necesitaran.



Por ser la segunda sesión fue menos el tiempo utilizado para proponer una solución. La participación fue más fluida.

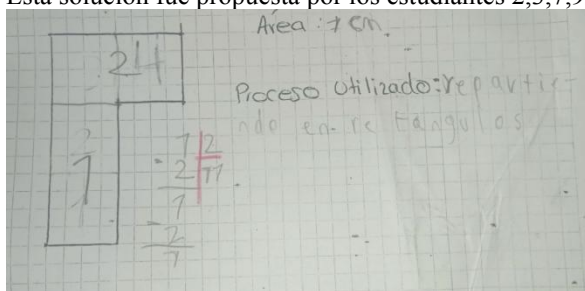
Preguntas realizadas por los estudiantes: Entre las principales inquietudes de esta sesión se destaca la del estudiante 10 acerca de las medidas ¿Cuánto mide cada lado de la figura?
En un 80% se preguntaban dónde estaban los cm para realizar los cálculos de área. Cuatro estudiantes preguntaron qué era el área.

Presentación de soluciones: *Solución 1: Aplicar fórmulas de área*
En esta solución usaron una de las pistas, sin tener en cuenta la figura aplicaron base por altura dividido en dos. Esta solución fue propuesta por estudiantes 8 y 16.



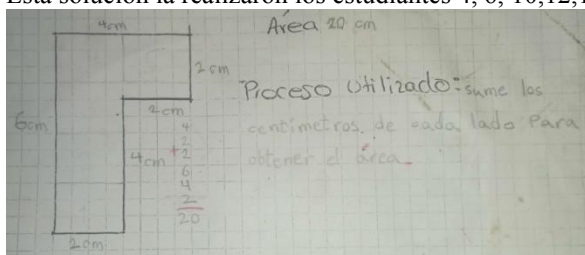
Solución 2: Conteo de los cuadros de adentro.

Esta solución fue propuesta por los estudiantes 2,3,7,9, 13, 14,15 y 22.



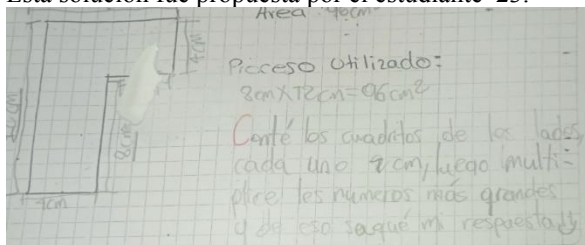
Solución 3: sumar la medida de los lados

Esta solución la realizaron los estudiantes 4, 6, 10,12,17,20,21 y 22.



Solución 4: Multiplicar medidas del rectángulo grande.

Esta solución fue propuesta por el estudiante 23.



Trabajo grupal:

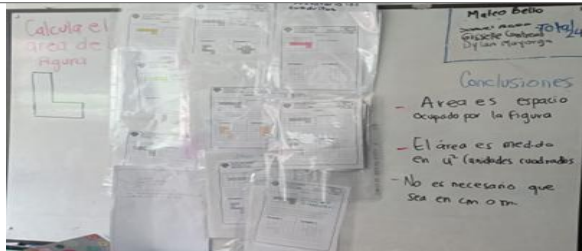
Se realizó una organización de las propuestas en el tablero, en la cual los estudiantes identifican similitudes entre algunas propuestas de ellos con otros compañeros. Se reúnen para debatir la más acertada y observan y explican mutuamente las pistas.



Entre algunas de las heurísticas similares están el conteo de cuadrados, suma de los lados que se evaluarán en el capítulo siguiente.

Momento de las Para finalizar se realizan las conclusiones en el tablero.

conclusiones:



Las conclusiones surgen del conversatorio con los estudiantes quienes de las particularidades logran generalizar.



Nota. Imágenes de elaboración propia y fotografías de materiales de la sesión propuesta

4.3. Sesión Tres. Área del Trapecio

A continuación, en la Tabla 5, se presenta la sesión tres correspondiente al cálculo del área de una figura compuesta por rectángulos y triángulos como es el trapecio. En esta sesión se desarrolló un contenido sobre el pensamiento métrico con base en la magnitud de área de una figura.

Tabla 5

Formato de la secuencia didáctica. Sesión 3

Formato secuencia didáctica	
Sesión Tres. Área del trapecio	
	
Plan de pizarra y formulación del problema	
Material suministrado:	Hoja cuadriculada Sobre de acetato
Enunciado del problema:	En la sesión tres el enunciado del problema estaba relacionado con la rama de la matemática denominada geometría, dentro del pensamiento métrico y fue “Calcula el área del trapecio”, mostrando la imagen de un trapecio isosceles.
Pistas propuestas para el trabajo individual:	Pista 1: Imagen con el lenguaje simbólico de fórmula del área del triángulo y rectángulo. Para calcular el área total se requiere realizar una suma de las áreas parciales de la figura.

SESION AREA DEL TRAPECIO COMODIN 1

altura 7
base 9

4
6

$A = \frac{b \times h}{2}$
Area = ?

$\frac{4 \times 6}{2} = 24 \div 2 = 12 \text{ u}^2$

altura 7
base 9

A = Base \times Altura
 $9 \times 7 = 63 \text{ u}^2$

A total = $12 + 63 = 75 \text{ u}^2$

Pista 2: Imagen con las áreas seccionadas de una figura compuesta.

SESION AREA DEL TRAPECIO COMODIN 2

7 cm
6 cm
10 cm
7 cm

7 cm
6 cm
7 cm

7 cm
10 cm
7 cm

42 cm²
49 cm²
35 cm²

Área total = $42 + 49 + 35 = 126 \text{ cm}^2$

Pista 3: Lenguaje vernácula explicando cómo se puede calcular el área de una figura compuesta calculando sus partes.

SESION AREA DEL TRAPECIO COMODIN 3

Para calcular el área de figuras compuestas, se realizan trazos auxiliares que permitan formar cuadrados o rectángulos. Luego, el área sería igual a la suma o resta de las áreas de los cuadrados o rectángulos formados.

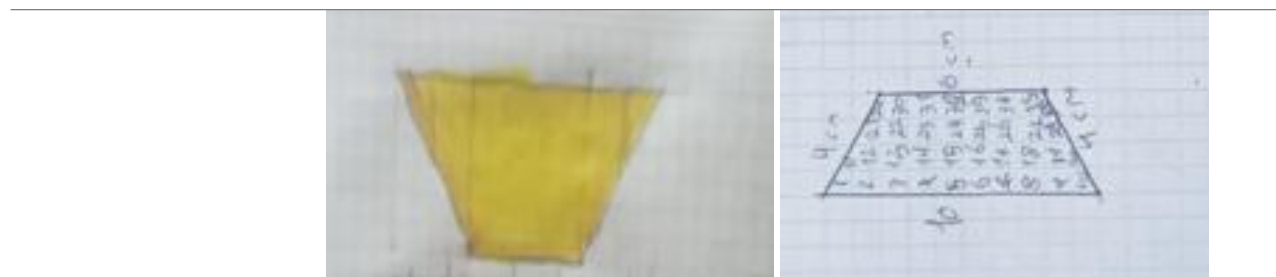
Pista 4: Lenguaje vernácula de ejemplo de una situación real de aplicación de área de una figura compuesta.

SESION AREA DEL TRAPECIO COMODIN 4

Carlos necesita conocer el área que ocupa el patio y la cocina, para ello decide repartir la zona en dos grandes espacios, un cuadrado y un rectángulo, calcular sus áreas y sumarlas al final.

Segmento de trabajo individual:

El primer segmento de la clase fue el tiempo de trabajo individual, que correspondió a 10 minutos en los que los estudiantes pensaron cómo podrían resolver el problema y se animaron a presentar alguna solución. Como apoyo para el trabajo se le solicitó hacer un trapezio en hoja cuadrículada y se realizó uno en el tv, sin unidades de medida, sin cuadrícula.



Preguntas realizadas por los estudiantes:

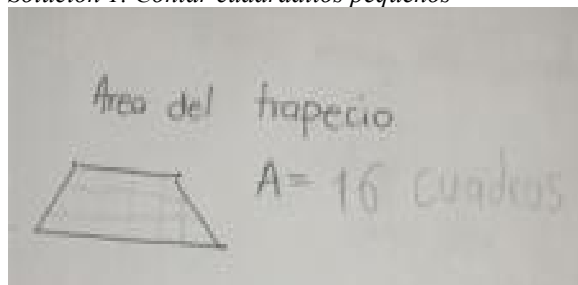
En relación con la formulación del problema los estudiantes preguntaron: El estudiante 18: ¿Qué es eso del área? El estudiante 23, responde: Lo que vimos la vez pasada, lo que hay por dentro, los cuadrados que caben dentro de la figura y que sean iguales. En cuanto a las pistas los estudiantes que aún no habían participado de las sesiones hicieron la primera pregunta la cual fue: estudiante 18: ¿Debo copiar lo que dice el comodín en la hoja? estudiante 23: No, esas son ayudas. Si no puedes resolverlo tú solo, tomas una pista, la lees y tratas de solucionar lo del tablero con ella. estudiante 16: No se puede hacer porque el trapezio no tiene medidas ¿cierto?, pregunta a la docente. Ante la inquietud del estudiante se brinda respuesta que todo tiene una solución que si requiere le coloque medidas e indique cómo lo solucionaría.

Utilización de las pistas:

La pista más utilizada fue la 2, a partir de ella los estudiantes dedujeron como repartir en varias zonas el trapezio. Las pistas que menos revisaron fueron la 3 y 4, que contenían letras sin dibujos.

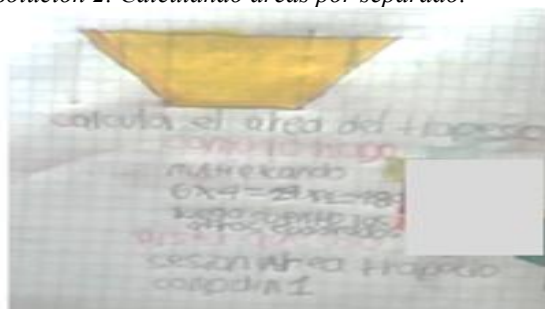
Presentación de soluciones:

Solución 1. Contar cuadraditos pequeños



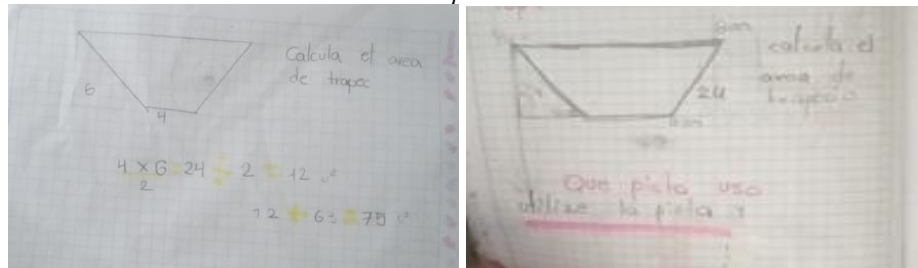
Esta solución la propusieron los estudiantes 6, 8, 10, 11, 19 y 24.

Solución 2. Calculando áreas por separado.



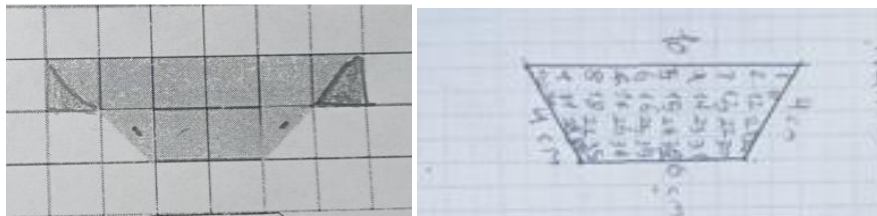
Esta solución la propuso el estudiante 20.

Solución 3. Área de un cuadrilátero multiplicando todos sus lados.



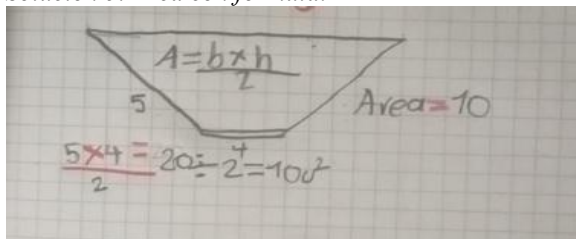
Esta solución la propusieron los estudiantes 14 y 23.

Solución 4. Completando cuadraditos pequeños con los triángulos.



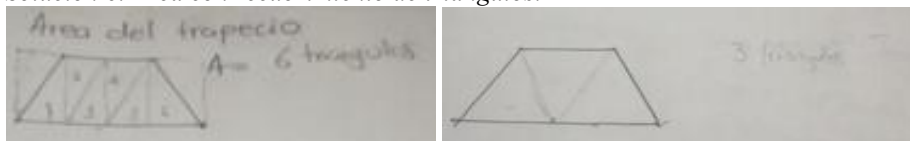
Esta solución la propusieron los estudiantes 13 y 17.

Solución 5. Área con fórmula.



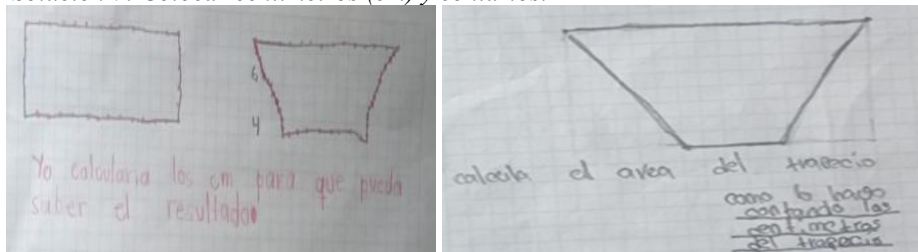
Esta solución la propuso el estudiante 3.

Solución 6. Área con recubrimiento de triángulos.



Esta solución la propusieron los estudiantes 5 y 16.

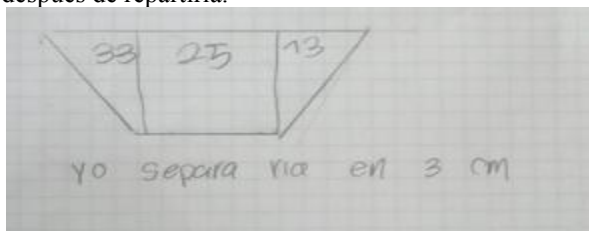
Solución 7: Colocar centímetros (cm) y contarlos.



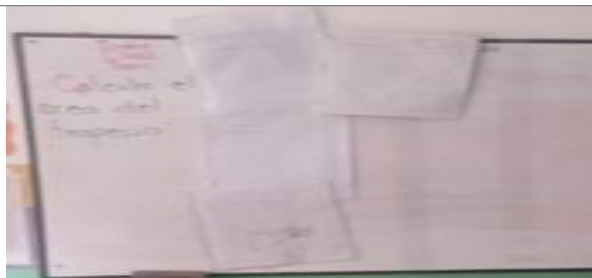
Esta solución fue propuesta por los estudiantes 4 y 12.

Solución 8. Separar en zonas.

En esta propuesta los estudiantes crearon una medida hipotética del área de cada zona, después de repartirla.



En el tablero se ubican las propuestas de los estudiantes.

**Trabajo grupal:**

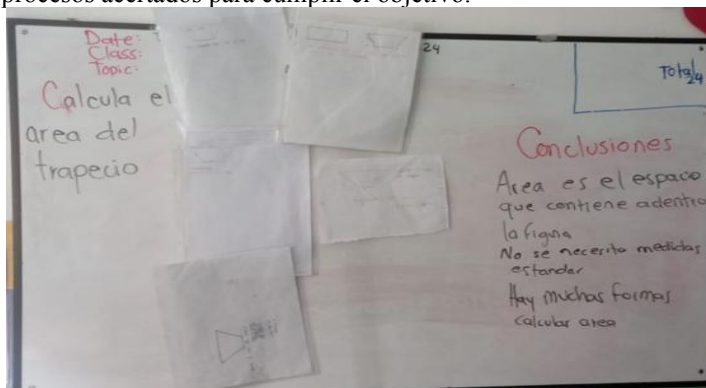
Clasificación de las soluciones, identificación de aspectos en los que se diferenciaban o coincidían. Los estudiantes que propusieron soluciones similares de solución, aunque en algunos casos se parecían en que el proceso o propuesta era parecida, el resultado es diferente.



En esta sesión los estudiantes se preguntan entre pares cosas como el estudiante 1: ¿Qué toca hacer?, el estudiante 14 le responde que debe proponer una solución a lo escrito en el tablero. En cuanto a las pistas los estudiantes que aún no habían participado de las sesiones hicieron la primera pregunta, la cual fue hecha por estudiante 18: ¿Debo copiar lo que dice el comodín en la hoja? estudiante 23: No, esas son ayudas. Si no puedes resolverlo tú solo, tomas una pista, la lees y tratas de solucionar lo del tablero con ella.

Momento de las conclusiones:

Para terminar la sesión, se les realizan preguntas como qué es el área y cuáles fueron los procesos acertados para cumplir el objetivo.



Los estudiantes realizaron las conclusiones a partir de lo ocurrido en la sesión.

Nota. Imágenes elaboradas y fotografías propias de la sesión ejecutada.



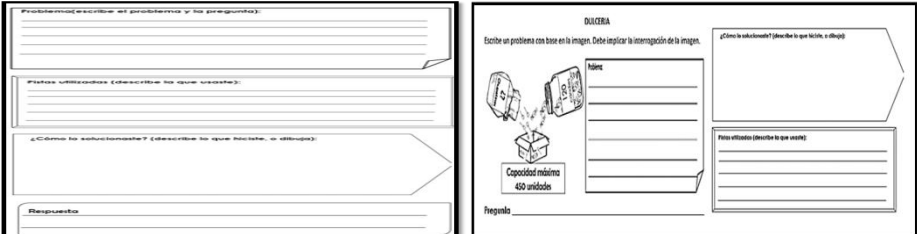
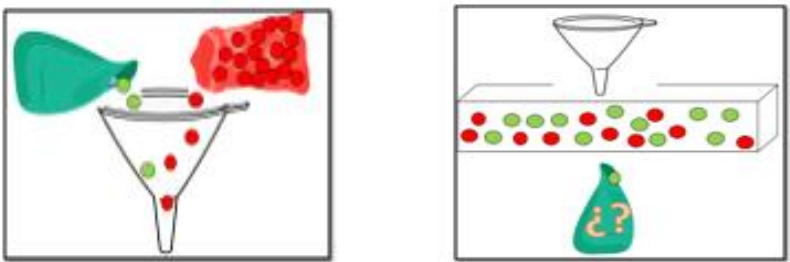
4.4. Sesión Cuatro: Problemas de Estructura Aditiva de Combinación con Cantidad

Inicial Desconocida.

En la tabla 6, se presenta la sesión cuatro correspondiente al desarrollo de un problema de enunciado verbal de combinación con cantidad inicial desconocida desde la lectura de dos imágenes relacionadas en cadena.

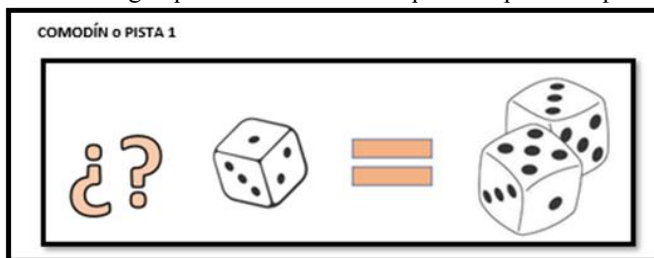
Tabla 6

Formato de la secuencia didáctica. Sesión 4

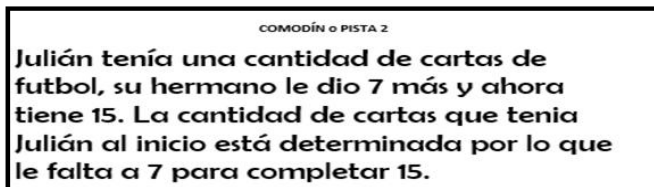
Formato secuencia didáctica	
Sesión Cuatro. Problemas de estructura aditiva de combinación con cantidad inicial desconocida	
Plan de pizarra y formulación del problema	
Material suministrado:	Sobre de acetato - Dos fichas
	
Enunciado problema:	<p>del El enunciado acerca de un problema de estructura aditiva de combinación con cantidad inicial desconocida fue “una imagen de dos bolsas de colores diferentes que contenían elementos a los cuales caían al mismo recipiente, conociendo la cantidad de uno de las bolsas y el total.</p>
	

Pistas propuestas para el trabajo individual:

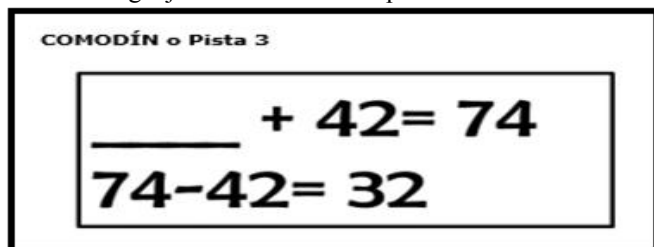
Pista 1: Imagen para razonar sobre lo que falta para completar la cantidad.



Pista 2: Lenguaje vernáculo de un problema similar al propuesto en la pizarra o tablero y la solución.



Pista 3: Lenguaje simbólico de las operaciones de estructura aditiva (suma y resta).



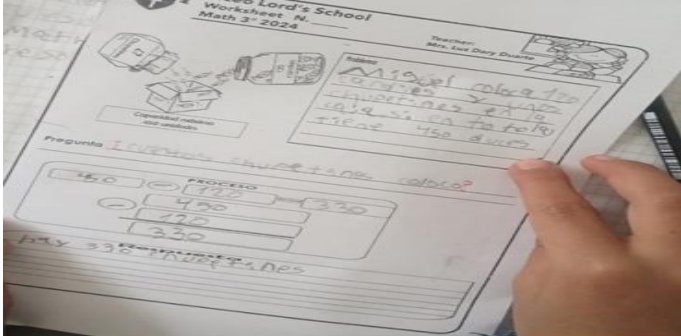
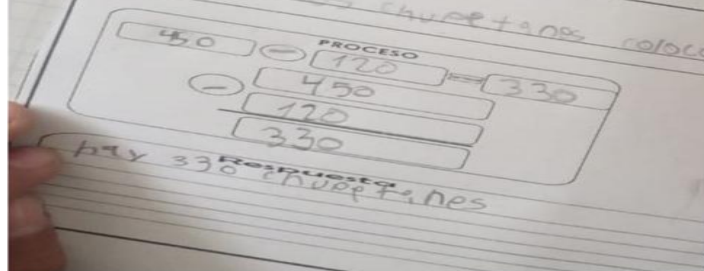
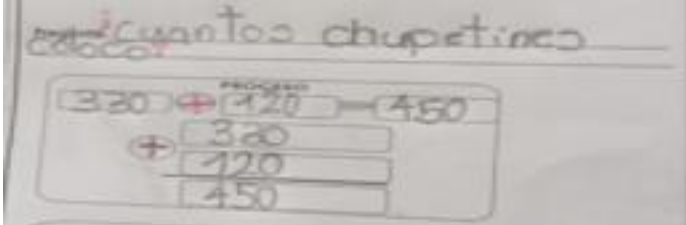
Segmento de trabajo individual:

El primer segmento de la clase fue para realizar la formulación del problema por parte de los estudiantes, lo cual ocupó más tiempo del previsto. En el capítulo 5 se explicarán los motivos. El tiempo de trabajo individual, que correspondió a 20 minutos en los que los estudiantes pensaron en la formulación del problema, la pregunta de acuerdo con la imagen del tablero y la posible solución al mismo.

Preguntas realizadas por los estudiantes:

En relación con la formulación del problema los estudiantes preguntaron: estudiantes 22: ¿Esto sirve? ¿Cuántas manzanas tenía Miguel en total? El estudiante 14: La pregunta podría ser ¿Cuánto le falta a Pedro? estudiante 13: ¿Está bien el problema? Como respuesta a estas preguntas se debió pausar la actividad y realizar preguntas como ¿Qué se observa en la primera imagen? Se explica en el capítulo 5. Aproximadamente el 50% de los estudiantes respondieron: 2 bolsas 1 con bolas verdes y otra con bolas rojas. Entonces se les preguntó qué se podía deducir que estaba ocurriendo con las bolsas. El estudiante 23, responde: están colocando el contenido de las dos bolsas en una caja. Se pregunta: ¿Qué color son las bolsas y su contenido? El estudiante 20 responde: Hay una bolsa roja con dulces rojos y una bolsa verde con dulces verdes. Después se les pregunta ¿qué imagen tiene el interrogante? El estudiante 8 responde la bolsa verde. Para culminar con éxito la formulación del problema se les pregunta ¿cuál debe ser la pregunta del problema? A lo cual el estudiante 23 responde. ¿Cuántos dulces hay en la bolsa verde? Para comenzar el trabajo individual el estudiante 9 pregunta: ¿Puedo colocar manzanas? A lo cual se les responde afirmativamente.



Utilización de las pistas:	<p>Durante los siguientes 10 minutos los estudiantes pensaron en la posible solución a la situación planteada y unificada.</p> <p>En cuanto a las pistas la más utilizada fue la 1. A partir de ella los estudiantes decían a 1 punto de los dados cuánto les falta para completar ocho. La pista que fue mejor comprendida fue la 3, debido a que había una operación que era la suma que se relacionaba con su operación inversa como es la resta.</p>
Presentación de soluciones:	<p><i>Solución 1. Quitar del mayor el menor</i></p> 
	<p>Esta solución fue propuesta de diferentes formas, los estudiantes proponen la operación con diferentes formas de desarrollo.</p> <p><i>Solución 1.1. Resta descomponiendo el sustraendo:</i> El estudiante 18: Resto primero las unidades y después las decenas completas. Ejemplo 92 menos 47 le quitó a 92 le quito 7 me quedan 85 y le quitó 40 me quedan 45. Esta propuesta la realizaron los estudiantes 7, 14, 17, 18 y 23.</p> <p><i>Solución 1.2. Resta tradicional reagrupando:</i> El estudiante 9: Ejemplo para restar 782 menos 488. En el 782 el ocho le presta 1 decena al dos para poder restar, por lo tanto, el 8 de las decenas se convierte en 7, y se comienza por las unidades. Esta solución la propusieron los estudiantes 2,4 y 9.</p>
	
	<p><i>Solución 2. Completamos el mayor</i> En esta solución los estudiantes realizaron diferentes procesos o estrategias.</p> <p><i>Solución 2.1 Completamos el mayor por cálculo mental.</i> estudiantes 15: se cuenta del menor hacia el mayor lo que falta, completando las decenas y contando de diez en diez, se tiene en cuenta lo que se va agregando. Esta solución la propusieron los estudiantes 3 y 13.</p> <p><i>Solución 2.2. Completamos el mayor con suma tradicional</i> En esta solución los estudiantes ubicaron un sumando y el total y calcularon el otro sumando faltante.</p>
	
Trabajo grupal:	<p>Se realiza clasificación de las respuestas en el tablero y se reúnen por parejas para determinar en lo que coinciden. Inicialmente los estudiantes coincidieron en la</p>



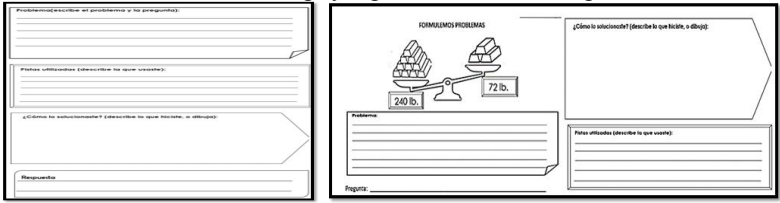
	formulación porque la pregunta común fue: ¿cuánto le falta a para igualar a ...?
Momento de las conclusiones:	Se escriben en el tablero. Existen varias estrategias para solucionar el problema. La respuesta es la misma. Las conclusiones son generalidades propuestas por los estudiantes desde las particularidades que concurren en el aula como obtener la misma respuesta numérica de la situación.

Nota. Imágenes elaboradas y fotografías propias de la sesión ejecutada.

4.5. Sesión Cinco. Problema de Estructura Aditiva de Igualación.

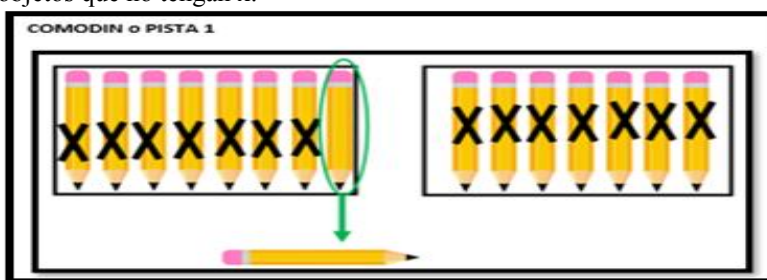
En la tabla 7 se presenta la sesión cinco. En esta sesión correspondiente, se presenta el problema de enunciado verbal de igualación relacionado con estructura aditiva.

Tabla 7
Formato de la secuencia didáctica. Sesión 5

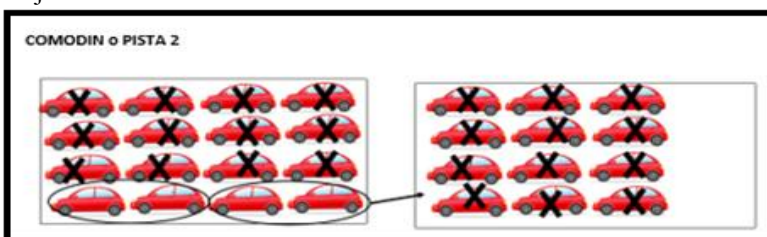
Formato secuencia didáctica		
Sesión Cinco. Problema de estructura aditiva de igualación		
Plan de pizarra y formulación del problema		
Material suministrado:	Sobre de acetato – Guía de apoyo, primera versión del problema	
		
Enunciado del problema:	El enunciado del problema de estructura aditiva de igualación fue “una imagen de una balanza que se quiere igualar” En el tv se colocó la imagen con manzanas mientras en el tablero solo se dibujó la balanza y la pregunta ¿cómo se pueden igualar? Primero se solicitó un espacio para que los estudiantes leyeran la imagen. Los estudiantes miraron la imagen del televisor e hicieron algunos comentarios que se explicarán en el capítulo de evaluación de las sesiones.	

Pistas propuestas para el trabajo individual:

Pista 1: Lenguaje icónico con imágenes que indican cómo igualar dos conjuntos sacando objetos que no tengan x.



Pista 2: Lenguaje icónico igualar sacando los sobrantes y repartiendo por igual en ambos conjuntos



Pista 3: Lenguaje simbólico de la operación adición y su relación con la sustracción.

PISTA 3

$$20 + \underline{\quad} = 25$$

$$25 - 20 = 5$$

Pista 4: Lenguaje vernácula explicando cómo igualar cantidades diferentes.

COMODIN o PISTA 4

Encierra con correspondencia uno de cada elemento en cada uno de los grupos.

Cuenta los elementos que quedan sin encerrar, esos son los que le faltan a un conjunto para igualar al otro.

<p>Segmento de trabajo individual:</p>	<p>El primer segmento de la clase fue el tiempo de trabajo individual, que correspondió a 15 minutos en total distribuidos en dos partes. Los primeros 5 minutos correspondientes a la observación de la imagen para que los estudiantes pensaran con claridad en la formulación del problema y poder presentar alguna solución al mismo. Como apoyo para el trabajo individual los estudiantes disponían de una guía de trabajo individual, para escribir el problema y cómo solucionarlo.</p>
<p>Preguntas realizadas por los estudiantes:</p>	<p>En este segmento de clase correspondiente al trabajo individual algunos estudiantes formularon las siguientes preguntas: En relación con la formulación del problema los estudiantes preguntaron: El estudiante 6: La pregunta puede ser ¿Cuánto se le debe colocar al que pesa menos para igualar al que pesa más? El estudiante 14: Sirve, ¿Cuánto le quito al que pesa más para igualarlos? Como respuesta a estas preguntas yo les solicité escribir los problemas propuestos. En cuanto a las propuestas de solución los estudiantes preguntan cosas como por qué los problemas son distintos y si sirven los planteados por ellos al igual que sus soluciones.</p>
<p>Utilización de las</p>	<p>La pista 3 fue la más utilizada debido a que en la imagen se podía observar que estaban</p>

pistas: tachadas la misma cantidad de autos en ambos conjuntos. La pista que mejor se entendió fue la 4 en la que se encontraba la operación.

Presentación de soluciones: *Solución 1. Quitar al que tiene más.*

Pregunta: *cuantos lingotes de oro tengo que quitarle al que pesa más*

Se plantean dos formas de hacer la resta:

Solución 1.1. Resta tradicional reagrupando

Debemos hacer una resta de 240 de Sandra con la cantidad de carne de Martha

$$\begin{array}{r} 240 \\ - 92 \\ \hline 148 \end{array}$$

Respuesta: *148*

Esta solución fue presentada por los estudiantes 1, 3, 5, 7, 11 y 14. *Solución 1.2. Resta con cálculo mental quitando decenas y unidades completas.*

PROCESO

32	-	240	-	108
		230		
		32		
		168		

Esta solución fue propuesta por los estudiantes 6, 13, 17, 20 y 23.

Solución 2. Sumarle al menor

Solución 2.1 Sumar tradicionalmente

Pregunta: *Cuanto hay que sumar le a 72 lb.*

Pregunta: *Cuanto le falta a 72 lb para llegar a 240 lb*

PROCESO

72	+	168	=	240
		72		
		168		
		240		

Esta solución fue propuesta por los estudiantes 2, 9, 15, 19, 21 y 24.

Solución 2.2. Sumar completando decenas, centenas.

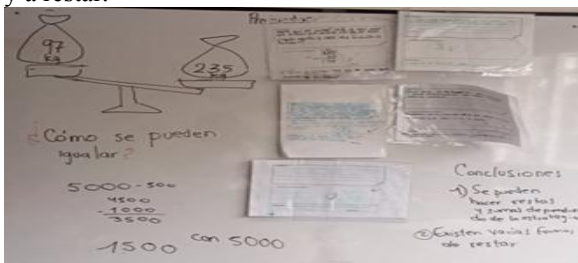
Yo sumaría 97 más y para que no de 100 y después de eso sumaría 135 para que no de 235 y así así el resultado

Esta solución fue propuesta por los estudiantes 4, 8, 10, 12, 16, 18 y 22.

Trabajo grupal: Clasificación de las soluciones, identificación de aspectos en los que se diferenciaban o coincidían.



Momento de las conclusiones: Se realizaron conclusiones y generalidades colectivas en cuanto a la relatividad de la formulación de un problema y como la expresión completa del proceso puesto en desarrollo y no solo decir una operación como la palabra suma o resta sino determinar lo que se va a sumar y a restar.



Nota. Imágenes elaboradas y fotografías propias de la sesión ejecutada.

Capítulo V. Evaluación y Resultados de la Secuencia

5.1. Evaluación de los problemas y su potencial para desarrollar heurísticas

Para el desarrollo de la secuencia, en cada sesión se seleccionó una situación problema elaborada en lenguaje vernáculo, es decir, formulada con palabras comunes, o en formato gráfico, utilizando imágenes familiares para los estudiantes. Estas situaciones se ubicaron en la parte superior izquierda del tablero con el propósito de que los alumnos pudieran leerlas por iniciativa propia, comprenderlas desde su experiencia y construir una estrategia para resolverlas. Esta disposición busca fomentar la autonomía y la apropiación del problema desde el primer momento de la clase, permitiendo que los estudiantes activen sus conocimientos previos, reconozcan el contexto de la situación y propongan soluciones desde sus propias heurísticas.


A lo largo de la secuencia se evidenció que cada sesión ofrecía elementos que podían incorporarse a la siguiente para enriquecerla y hacerla más efectiva. De manera progresiva, se

observó que las decisiones tomadas en torno al diseño del problema, la ubicación de las pistas y la organización de los momentos de la clase generaban nuevas posibilidades para fortalecer la participación estudiantil y para afinar el tipo de razonamientos desarrollados. En este sentido, las situaciones presentadas se constituyen como ejes centrales que no solo permiten evaluar el desempeño de los estudiantes, sino también valorar el potencial de cada problema para movilizar diferentes heurísticas.

En las Tablas 8 a 12 se resumen los aspectos observados en cada una de las sesiones, incluyendo análisis de las interacciones que se dieron en el aula, las dificultades encontradas, los elementos que funcionaron como facilitadores del aprendizaje, y las recomendaciones surgidas para mejorar futuras implementaciones. Este análisis considera específicamente el diseño del problema, el uso y pertinencia de las pistas, las heurísticas empleadas por los estudiantes y los interrogantes que emergieron durante el desarrollo de cada clase.

Tabla 8

Matriz de evaluación y resultados sesión 1

Formato evaluación y resultados	
Sesión Uno. Descomposición aditiva de un número	
Formulación del problema:	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">  </div> <p>El problema trabajado en la primera sesión fue presentado en lenguaje vernáculo y se formuló de la siguiente manera: “Consigue 27 puntos con el naipe.” Este enunciado se ubicó en la parte superior izquierda del tablero, conforme a la organización prevista en el plan de pizarra. La intención era que los estudiantes lo leyeran de manera autónoma, lo analizaran desde sus propios referentes y propusieran una estrategia de solución. Durante el desarrollo de la clase, la presentación del problema generó interrogantes inmediatos por parte de los estudiantes, especialmente preguntas como “¿qué toca hacer?”, lo que permitió identificar que la instrucción no había sido completamente comprendida. Ante esta situación, se realizó una indagación inicial sobre si conocían el concepto de “naipe”, y un 60% del grupo manifestó que no. En respuesta, se les mostró la mesa donde se encontraban tres cartas, y se les explicó que podían acercarse para observarlas. Además, se orientó al grupo sobre la posibilidad de utilizar las pistas disponibles en el aula, aclarando que la tarea consistía en “obtener 27 puntos usando el valor de las cartas del naipe” (Docente).</p>

Esta intervención fue clave para resignificar la consigna del problema y habilitar otras formas de interpretación. Dado el nivel de dificultad en la comprensión inicial del enunciado, se extendió el tiempo previsto de trabajo individual, pasando de 10 a 20 minutos, con el fin de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de leer con detenimiento, explorar las cartas, consultar las pistas y construir una estrategia propia que les permitiera abordar la situación planteada.

Potencia para promover distintas heurísticas y soluciones:

El problema permitió obtener diferentes heurísticas y soluciones, las cuales se diferenciaban en tanto los procesos que llevó a cabo cada estudiante, debido a que el objetivo eran 27 puntos, como en la propuesta de adición que ellos diseñaron.

Entre las soluciones planteadas se encuentran:

Adiciones de 3 sumandos, las cuales se realizaron de formas diferentes. Algunos estudiantes realizaron conteos, otros realizaban sumas verticales y otros de cálculo mental, como se va a presentar a continuación.

Una de las propuestas con tres sumandos de los estudiantes fueron 3, 7 y 8, que realizaron la suma de $11+11+5$ usando cartas, para lo cual se acercaron al lugar donde estaban los naipes, escogiendo y sumando los números de las cartas para llegar a la respuesta como se observa en la siguiente imagen:

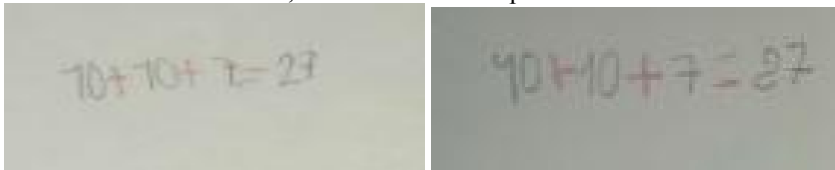


Otras adiciones de 3 sumandos fueron propuestas por los estudiantes 6, 10, 12, 15, 17, 18, 19 y 22 la cual era $10+10+7$.

En este caso la diferencia entre las propuestas de los estudiantes radica en la forma de encontrar las cartas. Los estudiantes 6, 15 y 18 utilizan las cartas vistas en la imagen, contando con los dedos.

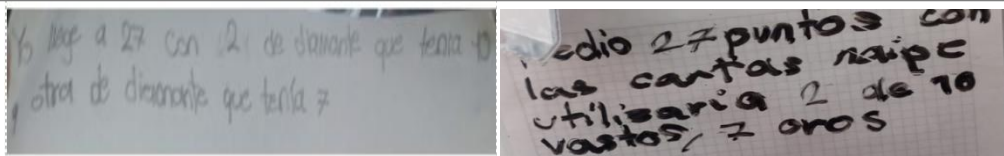


Los estudiantes 10, 12, 17 y 19 escriben la suma sin usar cartas solo sumandos, sin tener en cuenta si sonoros o bastos, se dedican a la composición aditiva de forma netamente numérica.

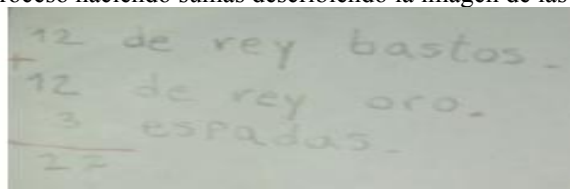


De las anteriores imágenes se puede extraer que estos estudiantes utilizaron el valor posicional para realizar la descomposición aditiva del número, la cual fue una de las heurísticas menos utilizadas por los estudiantes, pero la más enfatizada en la enseñanza de lectura y escritura de cantidades, como se describe en el capítulo del marco teórico.

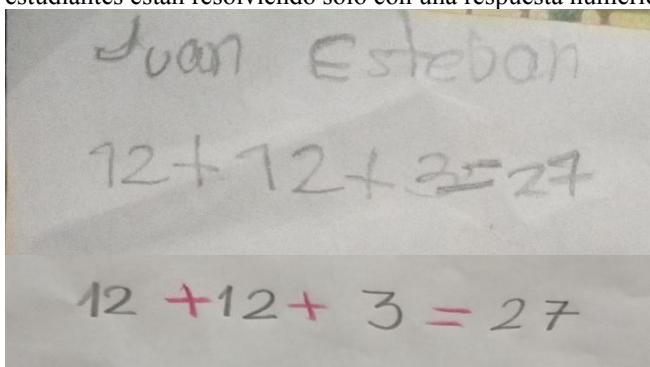
Otra propuesta de solución, presente en esta sesión fue la de los estudiantes 9, 14, 16, 20 y 24 quienes describieron en el papel el proceso, teniendo presente la clasificación de la imagen de la carta elegida como bastos, diamantes etc., tal como se observa en la imagen. Otros usaron 2 cartas de un tipo que cada una tuviera 10 puntos y 1 carta de 7 puntos.



En las anteriores Heurísticas están presentes la descomposición aditiva de un número según su valor posicional, descrito en el capítulo de marco teórico en el apartado sobre heurísticas de composición aditiva. Los estudiantes 5, 11 y 13 utilizan también tres sumandos que fueron $12+12+3$. Sin embargo, sus propuestas se diferencian en que el estudiante 5 describe su proceso haciendo sumas describiendo la imagen de las cartas escogidas, sumando $12+12+3$.



Aunque los estudiantes 11 y 13 realizaron la misma suma no especificaron las cartas utilizadas, como se muestra en la siguiente imagen. En este caso se puede establecer que los estudiantes están resolviendo solo con una respuesta numérica el problema.



En el desarrollo de estas estrategias o heurísticas se puede encontrar que los estudiantes aplicaron el concepto de dobles para sumar y agregar lo que falte para completar el número, tal como se describe en el capítulo del marco teórico.

Otra heurística o propuesta de solución fue la del estudiante 3, quien realiza conteo de cantidades iguales con los dedos, pero debe realizar correcciones a su elección de cartas, debido a que en el primer conteo comete el error de no correspondencia uno a uno en el doble conteo.



En este caso se puede evidenciar que algunos estudiantes requieren aún objetos tangibles y realizar conteos de los mismos objetos varias veces, para cumplir con la correspondencia número a objeto.

Otra heurística o solución presentada es la del estudiante 21, el cual realiza una suma sin hacer especificación de las cartas utilizadas, como se observa en la siguiente imagen. Utiliza el concepto de descomposición de valor posicional y la suma de dobles, simultáneamente.

$$10+10+2+2+3$$

Otra heurística o solución presentada es la del estudiante 23, que realiza la propuesta de 3 cartas iguales, realizando la suma y su representación multiplicativa, tal como se observa en la imagen.

3 cartas de 9

3 cartas de 9

$$9+9+9=27$$

$$9 \times 3 = 27$$

Este estudiante aplica el concepto de suma reiterada, como noción de la multiplicación, el cual se describe en el capítulo del marco teórico de este trabajo.

Otra heurística o propuesta de solución es la presentada por el estudiante 2, quien realiza una propuesta basada en la suma de más de tres sumandos.

9 corazones

9 trebol

2 corazones

2 diamante

2 corazon

3 de petfolio

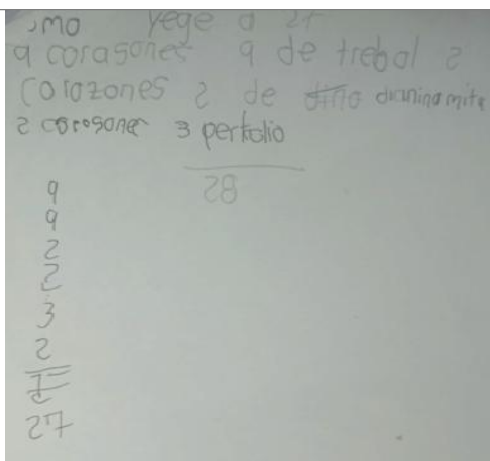
27

Terminada la presentación de todas las propuestas los estudiantes 2 y 23, voluntariamente propusieron más soluciones para el ejercicio. Entre ellas la de usar la mayor cantidad de cartas, para lo cual el estudiante 2 escoge las cartas de valor más pequeño posible.



El estudiante 2 realiza una propuesta basada en la suma de varios sumandos (más de dos sumandos).

Otra propuesta extra fue:



Las pistas:	Las pistas utilizadas en esta primera sesión resultaron pertinentes y efectivas, ya que estaban alineadas con el tipo de proceso que se esperaba que los estudiantes desarrollaran. Su presencia contribuyó de manera significativa al desbloqueo cognitivo de quienes tenían dificultades para formular una propuesta de solución. Se observó que aquellos estudiantes que consultaban al menos una de las pistas lograba avanzar hacia la construcción de una estrategia clara. La redacción fue precisa, con niveles de complejidad acordes al problema planteado y al perfil del grupo, lo que garantizó que fueran útiles para diversos casos. Además, la inclusión de distintos formatos, lenguaje vernáculo, representaciones gráficas y simbólicas, permitió que se generaran propuestas variadas, mostrando diferentes modos de abordar la situación, según las estrategias que cada estudiante pudo activar.
Reformulación del problema	A partir de lo observado en esta sesión, se identificó la necesidad de revisar la formulación del problema original. El enunciado “Conseguir 27 puntos con el naipes” generó ambigüedades que dificultaron la comprensión inicial. Uno de los aspectos por mejorar sería el verbo empleado en la consigna. Reemplazar “conseguir” por otros términos como “conformar”, “formar” u “obtener” ayudaría a orientar mejor la intención de la tarea, facilitando la conexión con el proceso de composición aditiva. Esta modificación también permitiría a los estudiantes reconocer con mayor claridad el material que se debe utilizar, las cartas del naipes, y abrir posibilidades de interpretación sin perder el desafío de la actividad. La curiosidad por explorar las cartas se mantendría, especialmente al tenerlas físicamente disponibles en el aula. Una reformulación sugerida del enunciado sería: “ <i>Conformar 27 puntos con las cartas del naipes de la baraja española</i> ”. Esta versión ofrece una consigna más clara, reduce ambigüedades en cuanto a los materiales y permite guiar mejor la comprensión desde el inicio de la sesión, sin limitar la iniciativa de los estudiantes en la construcción de sus estrategias.

Nota. Elaboración propia, 2025.

Tabla 9

Matriz de evaluación y resultados sesión 2

Formato de evaluación y resultados

Sesión Dos. Área de la L



Formulación del problema:	El problema planteado en esta sesión se formuló como “Calcula el área de la L”. Su presentación generó desde el inicio preguntas espontáneas por parte de los estudiantes, relacionadas con el significado del área, el concepto de medir y el uso de unidades de medida. Esta reacción fue valiosa porque permitió identificar nociones previas y activar discusiones en torno al pensamiento métrico. Sin embargo, se evidenció que la palabra “área” en el enunciado podía generar confusión inicial, especialmente en estudiantes que aún no han consolidado su comprensión del concepto. En este sentido, se sugiere reformular el enunciado utilizando un lenguaje más cercano y visual, como, por ejemplo: “Calcula la superficie
----------------------------------	--

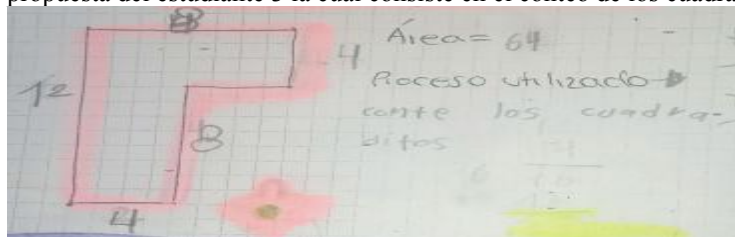
ocupada por la figura L". Esta versión propone una alternativa que permite vincular de manera más directa el problema con la acción de recubrimiento, facilitando que los estudiantes interpreten la tarea como una situación concreta en la que deben observar, comparar y estimar el espacio cubierto por la figura, lo cual puede resultar más accesible y comprensible en los primeros acercamientos al concepto de área.

Potencia para promover distintas heurísticas y soluciones:

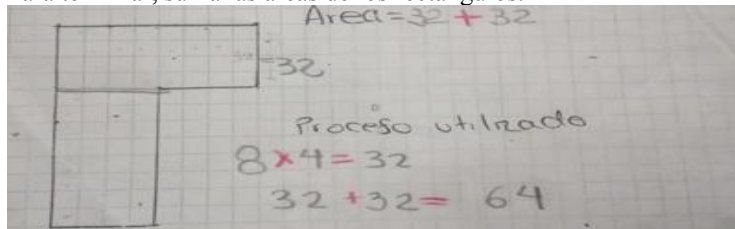
En esta sesión el enunciado suscita varios interrogantes e inquietudes que dieron espacio a diferentes propuestas de solución. Entre las más destacadas inquietudes que permiten promover diferentes heurísticas están las de cómo llegar al área, para lo cual las pistas cumplieron el papel fundamental de contribuir en la aplicación de alguna estrategia, como comprensión del asunto. El concepto de área de una figura fue una de las mayores dificultades encontradas porque los estudiantes en su mayoría hacían referencia al perímetro o borde de la figura. Sin embargo, al encontrar pistas que les permitían pensar en formas de hacer lo solicitado, las heurísticas fueron comenzando a darse. Sin embargo, es uno de los contenidos más complejos abordados en esta secuencia que permitieron diferentes propuestas y respuestas.

Las heurísticas propuestas en esta sesión por los estudiantes fueron:

Los estudiantes 2, 3, 14 y 21 proponen que el área es 64 haciendo el conteo de los cuadraditos pequeños, aunque se diferencian en la forma de plantearlo. A continuación, se presenta la propuesta del estudiante 3 la cual consiste en el conteo de los cuadraditos.



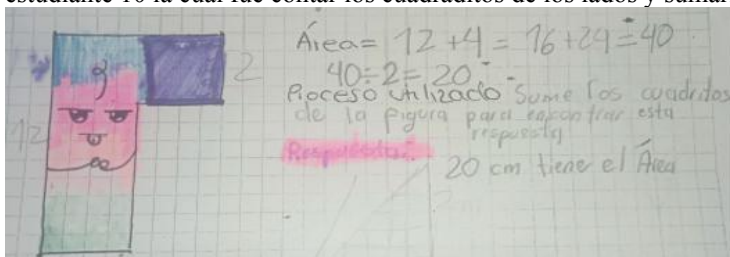
La siguiente es la solución propuesta por el estudiante 15, contar y sumar los cuadraditos pequeños (los de la cuadrícula). Los estudiantes que aplicaron esta propuesta de solución demuestran comprender el concepto de área como el espacio que está delimitado, además utilizan la cuadrícula como patrón de medida, estrategia descrita en el marco teórico y que demuestra que el área no tiene un instrumento estandarizado y directo de medida del área. A continuación, se muestra la solución del estudiante 2 que consiste en repartir la figura en dos rectángulos grandes, contar los cuadrillos de cada dimensión largo y ancho y multiplicarlas. Para terminar, suma las áreas de los rectángulos.



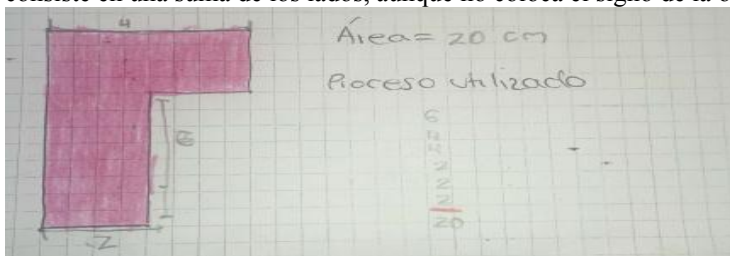
En la presentación de esta propuesta se puede inferir que los estudiantes aplican dos estrategias, por una parte, descomponen la figura en partes más simples como lo es rectángulos y aplican la fórmula de los rectángulos y suman sus resultados, sin embargo, el patrón de medida continúa siendo el cuadrado de la cuadrícula. El estudiante 4 propuso colocar las medidas de cada lado en centímetros (cm), teniendo en cuenta que cada dos cuadraditos son 1 cm y después sumar esas medidas.



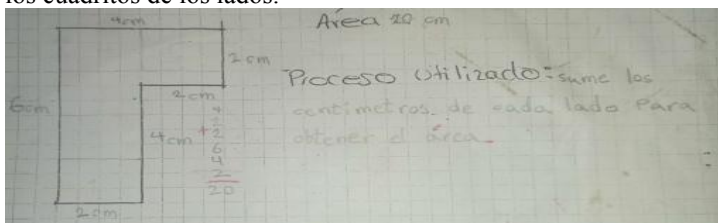
En esta solución se puede evidenciar la relación estrecha entre el desarrollo del pensamiento geométrico y métrico. Los estudiantes realizan la relación entre centímetro (cm) y cuadrícula. Sin embargo, para finalizar con éxito el proceso debían contar los cuadrados encontrados y lo que realizaron fue una suma de cada lado. A continuación, se presenta la solución del estudiante 10 la cual fue contar los cuadraditos de los lados y sumarlos y dividirlos en 2.



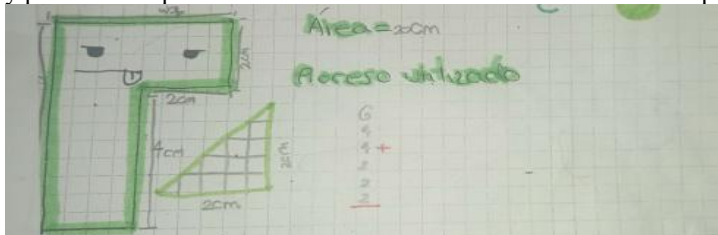
En esta ocasión se puede identificar que el estudiante asocia el concepto de área a la sumatoria de la medida de los lados y cuando divide en dos, lo asocia a la fórmula del triángulo, porque recuerda que en algún momento se dividía. La siguiente es la propuesta del estudiante 22, consiste en una suma de los lados, aunque no coloca el signo de la operación.



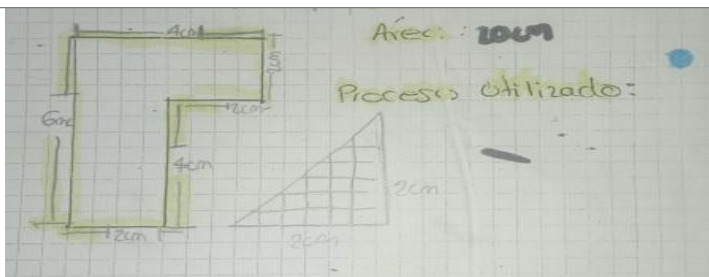
A continuación, se presenta la propuesta del estudiante 19 correspondiente a la sumatoria de los cuadrillos de los lados.



La siguiente es la propuesta del estudiante 20. En esta propuesta, el estudiante calcula el área de la figura sumando los valores numéricos correspondientes a cada sección que previamente ha dividido. La sumatoria representada ($6 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2$) corresponde a la cantidad de cuadrículas pequeñas que conforman las distintas partes de la figura, agrupadas de acuerdo con el procedimiento que él mismo estableció. Este tipo de descomposición facilita el conteo y permite interpretar el área como la suma total de cuadrados ocupados por la figura

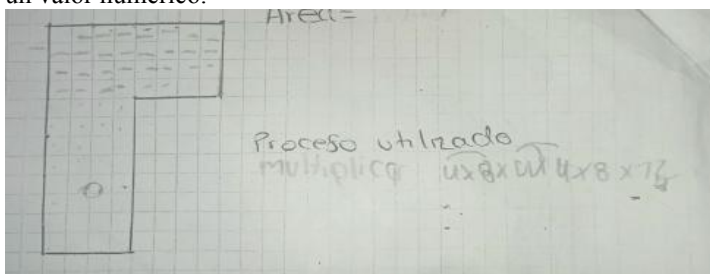


La siguiente es la propuesta del estudiante 17, sólo coloca el resultado y la medida de los lados, al realizar la sumatoria.

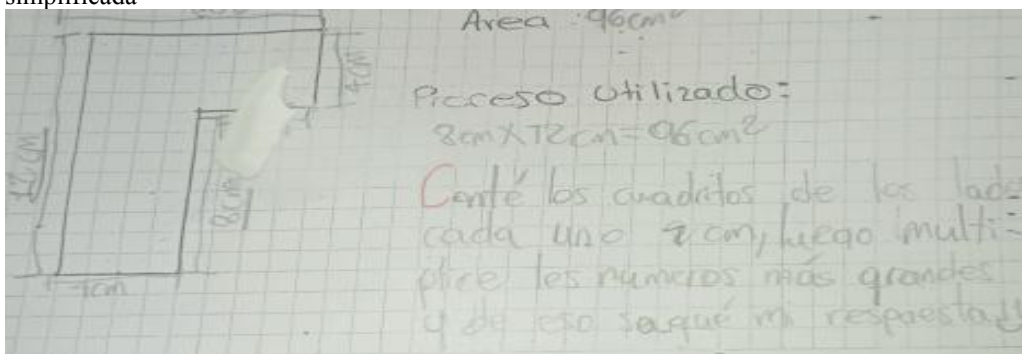


En estas propuestas se evidencia que los estudiantes confunden el concepto de perímetro con área, como se menciona en el marco teórico en el apartado de dificultades y errores del cálculo de área de figuras al encontrar que la sumatoria de las longitudes corresponden al cálculo del perímetro. Al socializar estas respuestas, los estudiantes lograron reconocer sus errores conceptuales. A partir del intercambio de propuestas y la discusión en plenaria, se evidenció una toma de conciencia progresiva sobre la diferencia entre área y perímetro. Algunos estudiantes comentaron que habían sumado los lados “porque eran los números visibles”, mientras otros concluyeron que “el área debía ser lo que estaba dentro de la figura”. Este diálogo permitió clarificar el sentido de cada magnitud, relacionar sus unidades de medida y reorientar el uso de las heurísticas empleadas.

Otra propuesta consistente en el uso de la multiplicación realizada por los estudiantes 11 y 24. El estudiante 11 propone el proceso de multiplicar las medidas de los lados de la L, pero no da un valor numérico.

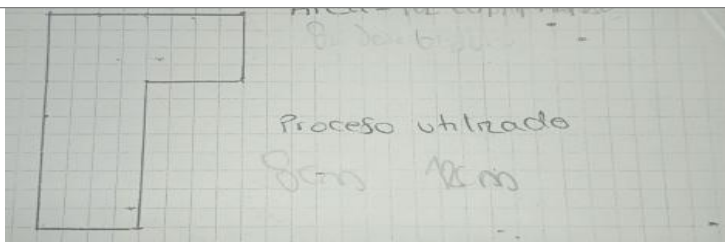


El estudiante 24 propone multiplicar 12 por 8. En esta solución, el estudiante emplea el razonamiento métrico de recubrimiento, al asumir que la figura puede representarse como un rectángulo de dimensiones 12 por 8 unidades. Aunque no detalla qué representa cada número, se deduce que está aplicando la fórmula de área mediante una estrategia heurística simplificada

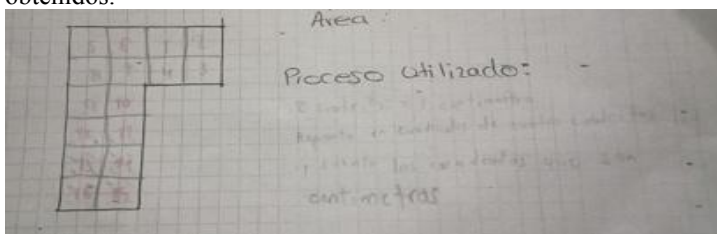


Otra propuesta dada por los estudiantes fue la correspondiente a cuadrados de 1 cm de lado y contar los cuadrados, con la aclaración que los estudiantes conocían que aproximadamente 1 cm estaba conformado por 2 cuadraditos de la cuadrícula.

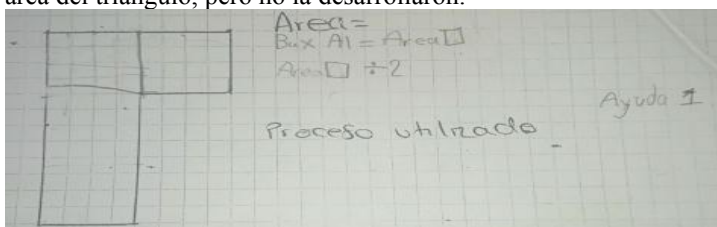
El estudiante 6 propuso verbalmente la suma, sin embargo, en el escrito solo ubica los números.



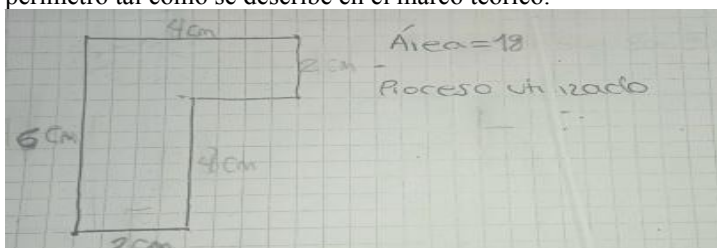
El estudiante 7, propuso repartir primero cada dos cuadrillos una línea y contar los cuadrados obtenidos.



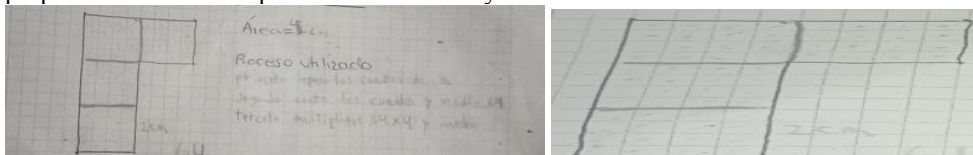
Otra propuesta diferente fue la de los estudiantes 8 y 16 quienes escribieron la fórmula del área del triángulo, pero no la desarrollaron.



El estudiante 12, propuso la suma de los cuadrillos de cada lado y obtuvo 18. Aunque utilizó una ayuda, el estudiante comprendió erróneamente que debía sumar los cuadrillos del borde de la figura para obtener el área, lo que se interpreta como un error al confundir área con perímetro tal como se describe en el marco teórico.



Otra propuesta de los estudiantes fue repartir en cuadrados iguales la figura y contarlos. Esta propuesta fue realizada por los estudiantes 4 y 17.



Las pistas utilizadas en esta primera sesión resultaron en general pertinentes y útiles, aunque no en todos los casos fueron efectivas en términos de comprensión. Aproximadamente el 60% de los estudiantes que acudieron a ellas lograron avanzar en la formulación de una estrategia de solución; sin embargo, cerca del 40% presentó dificultades persistentes, especialmente en la distinción entre perímetro y área. Aunque las pistas aportaron información visual y conceptual relevante, no bastaron por sí solas para resolver esta confusión en algunos estudiantes, lo que evidencia la necesidad de complementar su uso con intervenciones pedagógicas explícitas que profundicen en los conceptos involucrados.

Las pistas:

En el desarrollo de esta segunda sesión, las pistas se evidenciaron como recursos pertinentes y necesarios, especialmente por el tipo de dificultad conceptual que enfrentaron los estudiantes

al abordar el cálculo del área o superficie de la figura. Todos los participantes acudieron a ellas antes de formular su propuesta de solución, lo que reafirma su papel como elemento desencadenante del pensamiento matemático. La diversidad de representaciones empleadas en las pistas, simbólica, vernácula y gráfica, permitió que los estudiantes encontraran múltiples caminos posibles para abordar el problema, dando lugar a una variedad significativa en los procesos y estrategias construidas por cada uno.

Las pistas funcionaron como motor del desarrollo conceptual durante la sesión, aunque su impacto fue diferenciado según el tipo de dificultad que presentaban los estudiantes. En particular, una de ellas, expresada en lenguaje vernáculo, incluía explícitamente una definición acompañada de un ejemplo, lo cual facilitó la comprensión del concepto de área para parte del grupo que aún no lo tenía consolidado. Otras pistas ofrecían representaciones de figuras similares que ilustraban métodos posibles de cálculo, sin entregar directamente la solución. Este equilibrio entre orientación y autonomía permitió que muchos estudiantes se apoyaran en los recursos sin depender de ellos de manera mecánica. No obstante, en algunos casos se observó que la confusión entre perímetro y área persistió, incluso después de consultar las pistas, lo que evidencia que para ciertos contenidos más complejos es necesario complementar estos apoyos con explicaciones más dirigidas, discusiones colectivas o análisis comparativos que ayuden a profundizar en el significado de cada magnitud. Antes de pasar a la etapa de conclusiones, varias de estas pistas se retomaron como insumo para hacer aclaraciones generales sobre el concepto trabajado y las estrategias observadas.

Reformulación del problema	En relación con el enunciado del problema, se propone una reformulación que facilite la interpretación inicial y oriente a los estudiantes hacia el contenido que se espera abordar. Una sugerencia sería reemplazar el término “área” por una expresión más próxima al lenguaje cotidiano, como “superficie ocupada por la figura”, lo cual puede ser más intuitivo para este grupo. Una versión ajustada del enunciado podría ser: “Encuentra el área de la superficie ocupada por la figura. Escribe cómo lo logras.” Esta alternativa conserva el reto de la tarea, pero clarifica desde el principio qué se espera analizar y registrar, favoreciendo una comprensión más directa y precisa del propósito de la sesión. Se puede incluir más variedad de pistas, una de ellas que incluya el concepto de área.
-----------------------------------	--

Nota. Elaboración propia, 2025.

Tabla 10
Matriz de evaluación y resultados sesión 3

Formato de evaluación y resultados

Sesión Tres. Área del trapecio



Formulación del problema:	El problema presentado en esta sesión se formuló como: “Calcula el área del trapecio”. Este enunciado, ubicado en el extremo superior izquierdo de la pizarra según el plan previsto, generó entre los estudiantes una reacción inmediata de reconocimiento. El estudiante 2 comentó que el problema “se parece a la vez pasada”, lo que indica que comenzaron a establecer conexiones entre los contenidos trabajados en sesiones anteriores, específicamente con el cálculo de área en otras figuras. A diferencia de las sesiones previas, en esta ocasión las preguntas sobre el enunciado no fueron dirigidas al docente, sino que surgieron entre los propios estudiantes, lo que muestra una evolución en la dinámica de aula hacia mayor autonomía en la interpretación de la consigna. También se evidenció cómo el trabajo colaborativo tiene lugar de manera espontánea: el estudiante 1, quien no había asistido a las sesiones anteriores, manifestó no comprender cómo funcionaba el proyecto. Ante esto, el estudiante 23 asumió el rol de mediador y le explicó que debía proponer una forma de resolver lo que la docente había
----------------------------------	---

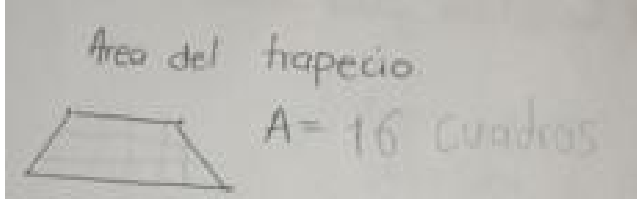
Potencia para promover distintas heurísticas y soluciones:

escrito en el tablero. Esta interacción refuerza el valor de la construcción colectiva y el rol activo que los estudiantes están asumiendo en el proceso de aprendizaje.

Esta sesión reafirmó el concepto de área, en parte gracias a las aclaraciones realizadas en la etapa de conclusiones y a las estrategias compartidas entre los estudiantes durante la socialización. La revisión colectiva de las propuestas permitió identificar cuál correspondía al cálculo del área y cuál al perímetro, lo que contribuyó a consolidar una noción más estructurada del concepto en algunos casos. Esto abrió la posibilidad de encontrar propuestas más variadas, ya que los estudiantes exploraron formas como descomposición de figuras, conteo de cuadrículas, uso de sumas parciales y aplicación intuitiva de fórmulas. El enunciado permitió a los estudiantes proponer las siguientes soluciones:

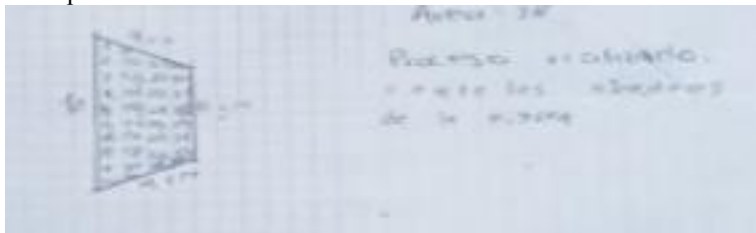
Una de las soluciones planteadas por los estudiantes consistió en repartir el trapecio en cuadrados y contar los cuadraditos, aunque con diferencias significativas. Los estudiantes 8, 13, 17, 19 y 24 aclararon que completaban cuadraditos mediante la unión de dos triángulos iguales, mostrando comprensión de la estrategia de recubrimiento parcial mediante unidades homogéneas, como se sugiere en Cárdenas-Pinto (2023). Esta heurística refleja un avance en el pensamiento geométrico, al identificar formas equivalentes para cubrir la figura.

A continuación, se presenta la imagen de la solución de los estudiantes 8, 13, 17, 19 y 24 quienes aclararon que se completaba cuadraditos con 2 triángulos iguales.



Sin embargo, los estudiantes 6, 10 y 11, que propusieron un proceso similar, no distinguieron entre cuadrados completos y áreas incompletas en los extremos del trapecio, lo que evidenció una dificultad en la interpretación de unidades de medida para el cálculo de superficie. Esta confusión está directamente relacionada con lo planteado en el marco teórico sobre errores frecuentes en el cálculo del área, especialmente aquellos descritos por López (2022) y la UGR (s.f.), quienes advierten que los estudiantes tienden a recubrir figuras sin precisar bordes o unidades fraccionadas, generando estimaciones incorrectas. En estos casos, no se logró diferenciar entre lo que “cubre” una figura y lo que la “rodea”, reproduciendo el error de confusión entre área y perímetro.

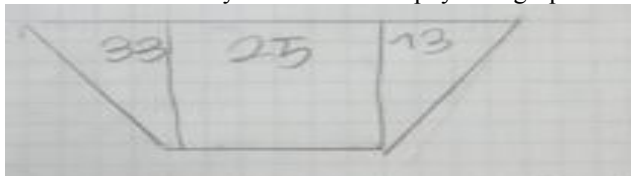
Durante la socialización, se promovieron preguntas como “¿Estos cuadraditos están completos?”, “¿Cómo sabes que un triángulo equivale a medio cuadrado?” o “¿Podemos confiar en que todo lo contado corresponde a la superficie interna?”, lo que permitió identificar y corregir estas dificultades mediante discusión y validación colectiva. Esta intervención no solo permitió evidenciar los errores, sino también movilizar el pensamiento métrico más allá del simple conteo, avanzando hacia una comprensión más precisa del concepto de área.



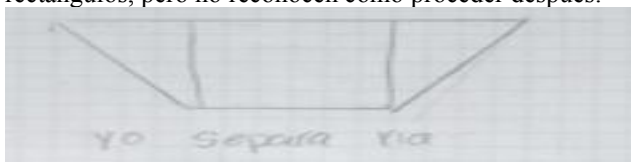
Otra solución planteada por los estudiantes, al revisar la pista 2, fue separar la figura en zonas y calcular el área individual de cada una para luego sumarlas. En particular, los estudiantes 2 y 7 propusieron descomponer el trapecio en triángulos y rectángulos, asignando valores propios a cada zona sin justificar su origen. Como se planteó en el marco teórico, este tipo de estrategia se relaciona con el proceso de *refaccionamiento* descrito por Marmolejo y Vega (2012), en el cual los estudiantes descomponen una figura en subconfiguraciones más simples como triángulos o rectángulos, aunque en este caso no lograron establecer una

correspondencia métrica válida entre la figura original y las partes identificadas. Esto evidencia un razonamiento geométrico valioso, pero sin consolidación del pensamiento métrico, especialmente en lo que respecta al uso y reconocimiento de unidades de medida estandarizadas.

Durante la socialización de respuestas, se generaron preguntas como: “¿De dónde salen esos números?” o “¿Cuánto mide realmente esa parte de la figura?” Estas intervenciones guiaron a los estudiantes a reflexionar sobre la necesidad de justificar los datos que emplean y a diferenciar entre estimaciones arbitrarias y cálculos fundamentados. Se reafirmó que, si bien toda propuesta inicial es bienvenida, esta debe sustentarse para ser válida dentro del contexto matemático. En ese sentido, la socialización no implicó aceptación automática de las respuestas, sino que funcionó como un espacio de contraste argumentativo, donde los errores fueron visibilizados y discutidos con apoyo del grupo.

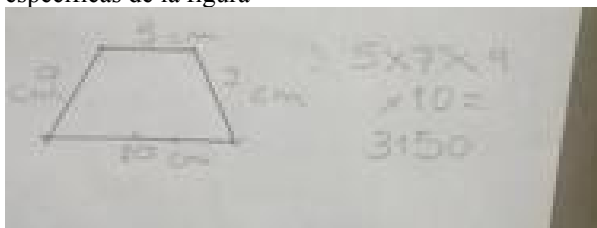


Los estudiantes 9 y 22 plantean separar la figura en zonas conocidas como triángulos y rectángulos, pero no reconocen cómo proceder después.

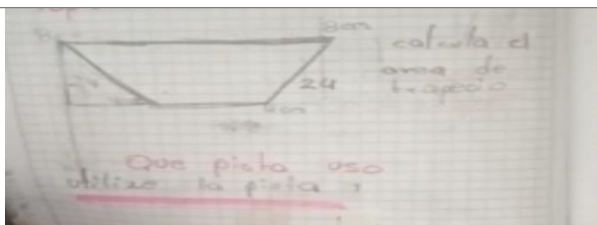


Otra solución propuesta por los estudiantes consistió en aplicar multiplicaciones como estrategia para calcular el área del trapecio, aunque se evidenciaron diferencias importantes en el razonamiento. Los estudiantes 14 y 20 multiplicaron directamente la medida de la base mayor por la altura, aplicando parcialmente la fórmula tradicional del área del trapecio, aunque sin incorporar el promedio entre bases requerido. Esta aproximación revela un conocimiento procedimental incompleto, lo que coincide con lo señalado por Jaimes-Pérez et al. (2024), quienes advierten que el uso de fórmulas sin comprensión del contexto geométrico puede conducir a errores en la resolución.

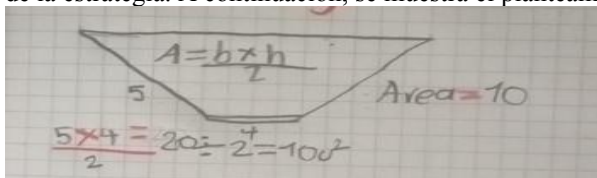
Por otro lado, el estudiante 18 propuso multiplicar las medidas de los cuatro lados del trapecio, lo que evidencia una confusión estructural entre área y perímetro, tal como se describe en los trabajos de López (2022) y UGR (s.f.) sobre errores frecuentes en el cálculo de área. Esta propuesta muestra una apropiación incorrecta del concepto, ya que asume que multiplicar cualquier par de medidas proporcionará el área, sin reconocer las propiedades específicas de la figura



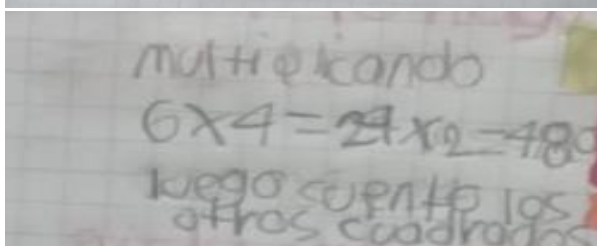
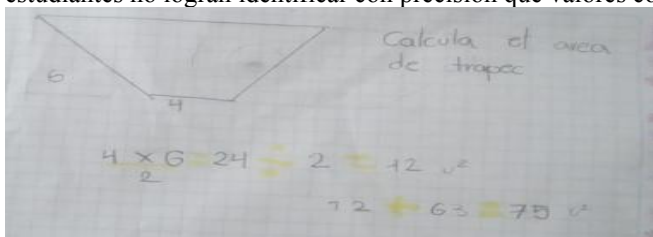
Finalmente, el estudiante 23 presentó una estrategia más elaborada: transformó visualmente el trapecio en un rectángulo mediante el desplazamiento de uno de sus triángulos laterales, para luego aplicar la multiplicación entre largo y ancho. Esta heurística implica un refaccionamiento espacial, descrito por Marmolejo y Vega (2012), que refleja un pensamiento geométrico más estructurado, aunque se requiere validar si la transformación mantiene la equivalencia métrica. Este tipo de razonamiento pone en juego una noción más avanzada de visualización y estimación, y aunque no haya llegado al procedimiento formal completo, demuestra que el estudiante movilizó con éxito procesos cognitivos propios del pensamiento geométrico.



Otra de las propuestas de los estudiantes consistió en aplicar la fórmula de área del triángulo, sin tener en cuenta que el trapecio es una figura geométrica diferente. Esta fórmula aparecía en la pista 1, junto a la del rectángulo, lo que pudo generar confusión en la lectura y selección de la estrategia. A continuación, se muestra el planteamiento del estudiante 3.

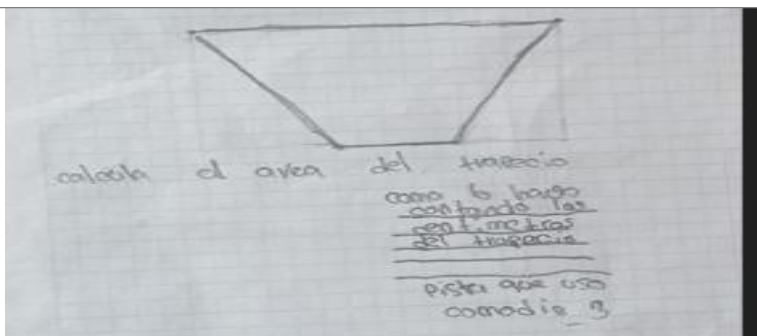


El estudiante 3 la utilizó directamente, mientras que el estudiante 15 propuso una multiplicación seguida de una división por 2, reproduciendo la estructura propia del área de un triángulo. Este tipo de razonamiento refleja una transferencia mecánica de fórmulas sin análisis del contexto geométrico, lo cual está relacionado con lo que Jaimes, et al. (2024) señalan como uso algorítmico no fundamentado en la comprensión de las propiedades de las figuras. Además, como plantea López (2022), este tipo de errores se agrava cuando no se distingue adecuadamente entre atributos medibles como base, altura o lados, y cuando los estudiantes no logran identificar con precisión qué valores corresponden a cada dimensión.

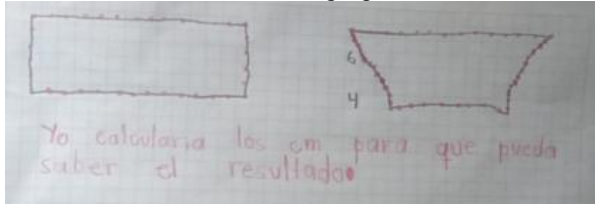


Durante la socialización, se formuló la pregunta “¿Esta figura tiene los mismos lados que un triángulo?” y se promovió la comparación entre figuras simples y compuestas, lo que ayudó a clarificar la diferencia estructural entre el trapecio y el triángulo, y permitió que los estudiantes detectaran que sus fórmulas no se ajustaban a la figura en cuestión.

Por otra parte, otros estudiantes como el 4 y el 12 plantearon como estrategia colocar cm a los lados del trapecio y contarlos, lo que indica que persiste la confusión entre perímetro y área. Esta dificultad se relaciona directamente con lo planteado en el marco teórico, donde la UGR (s.f.) y López (2022) describen que uno de los errores más comunes en el pensamiento métrico es atribuir la medida lineal de los bordes al cálculo del área. En la socialización se retomaron estas ideas a partir de preguntas como “¿Si sumamos los lados, estamos midiendo lo que ocupa la figura o lo que la rodea?”, logrando que algunos estudiantes comenzaran a diferenciar entre ambos conceptos.

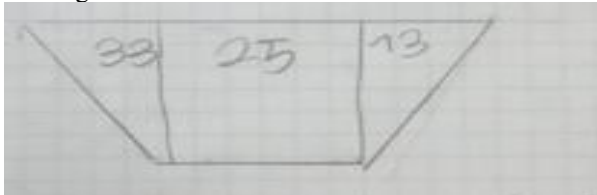


A continuación, se muestra la propuesta del estudiante 12.



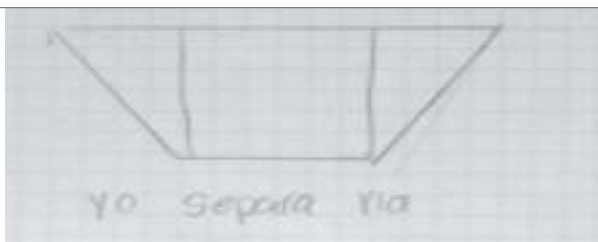
Otra propuesta realizada por los estudiantes fue la de recubrir la figura con triángulos, estrategia que presentó variaciones según el nivel de comprensión del concepto de área. Algunos estudiantes ubicaron triángulos congruentes sobre el trapecio, intentando cubrir la figura de forma aproximada, lo cual se relaciona con la estrategia de recubrimiento descrita por Cárdenas (2023). No obstante, se evidenciaron dificultades para reconocer si la cobertura era exacta y para traducirla en unidades de medida precisas, lo que remite a los errores señalados por López (2022) sobre el uso inadecuado de patrones de medida en el pensamiento métrico.

Otra solución fue separar el trapecio en zonas elementales y calcular el área individual de cada parte para luego sumarlas. Este enfoque aparece en las propuestas de los estudiantes 2 y 7, quienes lo asociaron al análisis de la pista 2. Aunque lograron descomponer la figura en triángulos y rectángulos, asignaron valores inventados, sin justificar las medidas o relacionarlas con la figura real. Esto evidencia una aplicación incompleta del proceso de refaccionamiento señalado por Marmolejo y Vega (2012), pues si bien reconocen que las figuras compuestas pueden reconfigurarse en formas elementales, no logran integrar esta visión geométrica con una estimación métrica fundamentada.



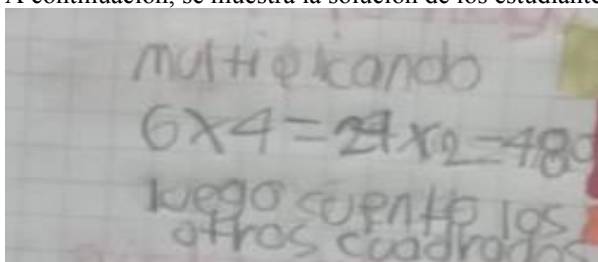
En el caso de los estudiantes 9 y 22, también se identificó el uso del refaccionamiento, pero sin claridad sobre cómo proceder con el cálculo de área después de la descomposición. Esto indica una desconexión entre el análisis geométrico y la acción métrica, señalada en el marco teórico como una de las dificultades en la transición entre comprensión visual y cuantificación (Cayetano et al., 2011).

Durante la socialización, se realizaron preguntas como: “¿Cómo sabes que esa zona mide lo que escribiste?” o “¿Cuántos cuadraditos equivalen al triángulo que dibujaste?” Estas intervenciones ayudaron a que los estudiantes cuestionaran la validez de sus medidas y comenzaran a distinguir entre estimaciones arbitrarias y mediciones justificadas, generando ajustes sobre sus propuestas.

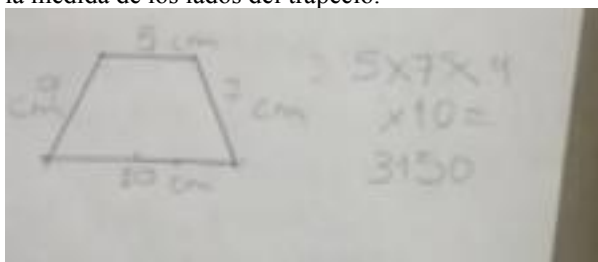


Por último, se presentaron soluciones que recurrieron a la multiplicación como estrategia de cálculo, aunque con distintos grados de precisión. Los estudiantes 14 y 20 aplicaron una multiplicación entre la base mayor del trapecio y su altura, lo que evidencia una aplicación parcial de la fórmula del área del trapecio (sin incluir el promedio de las bases), como lo advierte Jaimes, et al. (2024) respecto al uso mecánico de fórmulas. Aunque esta operación refleja una intención métrica, al omitir elementos clave de la estructura de la figura se convierte en un procedimiento incompleto. Estas propuestas fueron discutidas en plenaria a partir de preguntas como “¿Faltó algo en la fórmula?” y “¿Las medidas usadas corresponden a qué partes del trapecio?”, lo que permitió reafirmar que el uso de fórmulas requiere comprensión previa de los atributos geométricos.

A continuación, se muestra la solución de los estudiantes 14 y 20.

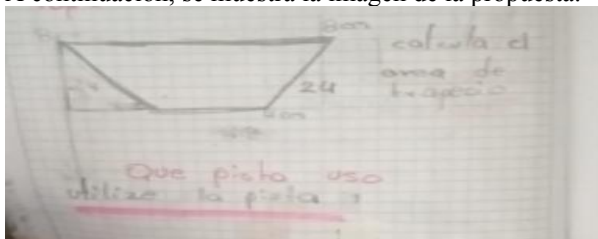


La siguiente imagen corresponde a la propuesta del estudiante 18 que consiste en multiplicar la medida de los lados del trapecio.

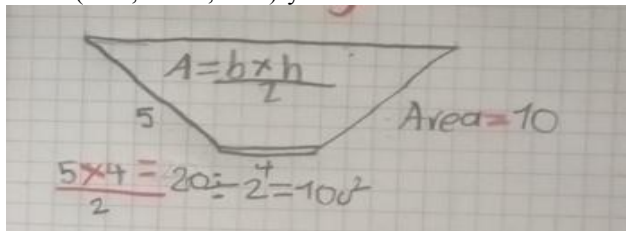


La propuesta del estudiante 23 consistió en formar un rectángulo moviendo un triángulo de uno de los extremos del trapecio para así multiplicar la medida del largo por el ancho. Esta heurística se relaciona directamente con el concepto de refaccionamiento visual descrito por Marmolejo y Vega (2012), en el cual los estudiantes descomponen o transforman figuras compuestas en otras más conocidas, como rectángulos, para facilitar su cálculo. Aunque la transformación muestra un avance en la visualización geométrica, se evidenció que el estudiante no verificó si dicha reconfiguración mantenía una equivalencia métrica real, lo que revela una desconexión entre el pensamiento geométrico y el métrico, tal como lo señalan Cayetano, et al. (2011) en relación con las dificultades de conceptualización del área.

A continuación, se muestra la imagen de la propuesta.

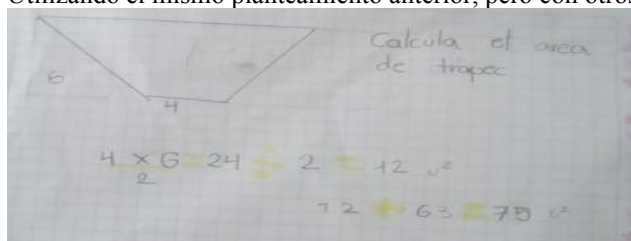


De forma distinta, los estudiantes 3 y 15 aplicaron la fórmula del área del triángulo, sin advertir que el trapecio es una figura distinta. Esta situación apunta a lo descrito por Jaimes, et al. (2024), quienes advierten que el uso de fórmulas se convierte en una acción memorística si no está sustentado en el reconocimiento estructural de la figura. En ambos casos, se identificó una dificultad para ubicar la altura, interpretarla correctamente y asociarla al cálculo de superficie. Esto indica que persiste el error señalado por López (2022) sobre la confusión entre dimensiones (base, altura, lado) y la selección errónea de datos al momento de aplicar

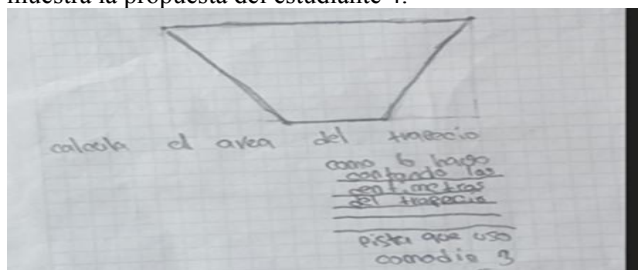


una fórmula.

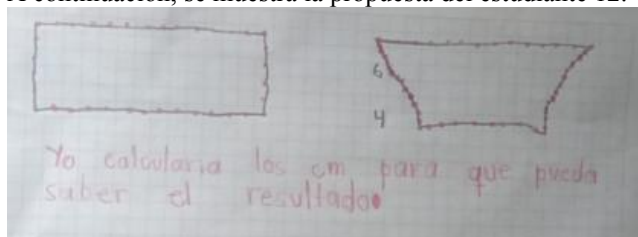
Utilizando el mismo planteamiento anterior, pero con otros valores, el estudiante 15 propone:



Otro planteamiento, propuesto por los estudiantes 4 y 12, consistió en asignar medidas en centímetros a los lados del trapecio y realizar una suma. Este tipo de razonamiento evidencia una dificultad recurrente en la comprensión del concepto de área, al confundirlo con el perímetro, tal como se describe en el marco teórico y en los aportes de la Universidad de Granada (s.f.), donde se señala que los estudiantes tienden a atribuir el valor más alto al área simplemente por extensión, sin distinguir entre la magnitud que ocupa una superficie y la que rodea una figura. En la socialización se realizaron preguntas como “¿Qué estamos midiendo al sumar los lados?” o “¿Esto representa lo que cubre la figura o lo que la bordea?”, permitiendo que varios estudiantes identificaran el error y ajustaran sus propuestas. A continuación, se muestra la propuesta del estudiante 4.



A continuación, se muestra la propuesta del estudiante 12.

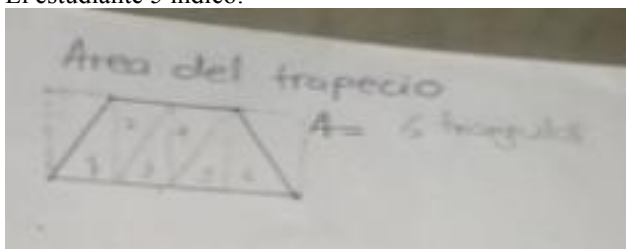


Otra propuesta realizada por los estudiantes fue la de recubrir el trapecio con triángulos, estrategia que presentó variaciones según el tipo de figura construida. Los estudiantes 1 y 16 lo dividieron visualmente en tres grandes triángulos isósceles, mientras que el estudiante 5 utilizó triángulos rectángulos del mismo tamaño para cubrir la figura en su totalidad y luego realizar el conteo. Estas propuestas muestran un acercamiento intuitivo al concepto de área

mediante el uso de unidades de recubrimiento, como lo plantea Cayetano et al. (2011), quienes destacan la importancia de manipular elementos geométricos para construir nociones iniciales de superficie. Los estudiantes 1 y 16 indicaron que:



El estudiante 5 indicó:



Sin embargo, estas heurísticas también revelan una dificultad en la precisión de los patrones de medida. Según López (2022), muchos estudiantes enfrentan problemas al cubrir una figura sin considerar si las unidades usadas corresponden exactamente a la forma o si se superponen o quedan incompletas. En los ejemplos descritos, aunque la visualización geométrica está presente, no se establece una relación métrica clara entre las figuras que recubren el trapecio y el área total del mismo. Esto sugiere que, aunque el pensamiento geométrico está activo, aún se requiere fortalecer la transición hacia el pensamiento métrico, especialmente en lo que respecta al uso de unidades estandarizadas y la validación de equivalencia.

Durante la socialización, se promovieron preguntas como “¿El triángulo que usaste cubre una parte exacta del trapecio?” o “¿Qué pasaría si usamos triángulos más pequeños?”, lo que permitió que los estudiantes analizaran la correspondencia entre el patrón elegido y la figura original, reconociendo los límites de su aproximación y ajustando sus propuestas en función de nuevas hipótesis compartidas en grupo.

Las pistas:

Las pistas presentadas en esta sesión jugaron un papel importante en el desarrollo de la clase. Se ofrecieron cuatro en total: dos escritas en lenguaje vernáculo y dos en formatos gráfico y simbólico. La diversidad en sus representaciones permitió atender distintos estilos de pensamiento entre los estudiantes, aunque no todas fueron igualmente accesibles. La pista 1, por ejemplo, generó interrogantes sobre el significado de los símbolos “b” y “h”, lo que indica que su nivel de abstracción fue más alto en comparación con las demás. Ante estas dudas, los estudiantes buscaron apoyo entre sus compañeros, evidenciando la consolidación del trabajo colaborativo como recurso para comprender el problema.


En esta sesión, se observó que aproximadamente el 85% de los estudiantes consultaron al menos una de las pistas antes de formular su propuesta de solución, siendo las más comprendidas la número 2 y la número 3. La pista 2 presentaba una figura dividida en zonas rectangulares y triangulares, lo cual permitió a cerca de 18 estudiantes identificar partes conocidas de la figura compuesta, calcular sus áreas de forma individual y luego sumar los resultados como estrategia para abordar el problema principal. Este tipo de descomposición visual facilitó la activación de heurísticas basadas en el refaccionamiento espacial, aunque no todos lograron justificar con precisión las dimensiones o valores utilizados. La pista 3, redactada en lenguaje vernáculo, aportó claridad conceptual sobre el proceso de descomposición y fue usada principalmente por quienes presentaban mayor dificultad en la lectura icónica. La pista 3, en cambio, explicaba el procedimiento paso a paso mediante lenguaje vernáculo, lo que ofreció a varios estudiantes un marco claro para organizar sus ideas. En particular, se evidenció que al menos 7 estudiantes (entre ellos los números 3, 7, 13, 15, 20, 22 y 23) formularon propuestas de solución directamente relacionadas con el proceso descrito en esta pista. Aunque no todos replicaron los ejemplos al pie de la letra, usaron como referencia la secuencia lógica planteada, lo que les permitió construir una estrategia coherente

	<p>y avanzar en la comprensión del concepto de área.</p> <p>El uso de estas pistas no solo facilitó el acceso al contenido trabajado, sino que permitió a más de la mitad del grupo (aproximadamente 14 estudiantes) generar soluciones que involucraban diferentes rutas de razonamiento: conteo de cuadrículas, descomposición en zonas, uso de triángulos para recubrimiento y aplicación parcial de fórmulas. Por otro lado, un grupo de aproximadamente 10 estudiantes presentó errores persistentes, como confusión entre perímetro y área, o dificultad para justificar los valores asignados. Esto sugiere que, aunque las pistas fueron un recurso valioso, su impacto dependió del nivel de comprensión previa de cada estudiante, y que deben combinarse con momentos de explicación guiada y socialización para consolidar verdaderamente el aprendizaje.</p>
Reformulación del problema	<p>En cuanto al enunciado del problema, se propone una reformulación que oriente mejor la comprensión desde el inicio. Una alternativa más clara podría ser: <i>“Calcula el área o superficie que ocupa la figura conocida como trapecio, compuesto por rectángulos y triángulos. Por favor escribe cómo lo harías paso a paso y tu respuesta final. Utiliza las unidades de medida correctas.”</i> Esta versión permite identificar el tipo de figura trabajada, explicita la solicitud de registrar el procedimiento completo y hace énfasis en el uso adecuado de las unidades, elementos clave para garantizar una interpretación más precisa del desafío planteado.</p>

Nota. Elaboración propia, 2025.

Tabla 11

Matriz de evaluación y resultados sesión 4

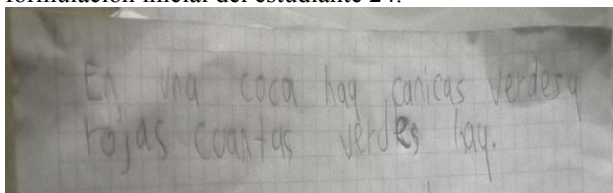
Formato de evaluación y resultados	
Sesión Cuatro. Problemas de estructura aditiva de combinación con cantidad inicial desconocida	
Formulación del problema:	<div style="float: right; text-align: center;">  <p>SESIÓN 4</p> <p><small>PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA DE COMBINACIÓN CON CANTIDAD INICIAL DESCONOCIDA</small></p> </div> <p>En esta sesión, el problema se planteó a partir de una imagen dispuesta en el tablero. La ilustración mostraba dos bolsas ubicadas en la parte superior: una con balotas rojas y otra con balotas verdes. Las balotas caían a través de un embudo hacia una caja ubicada en la parte inferior, en la cual ya se observaban mezcladas ambas balotas. A diferencia de sesiones anteriores, en esta ocasión se brindó un espacio para que fueran los propios estudiantes quienes formularan un problema a partir de la imagen observada.</p> <p>Este segmento generó múltiples inquietudes que requirieron flexibilizar el tiempo inicialmente previsto, con el fin de permitir la adecuación de las propuestas. Para facilitar el acceso a la tarea, la docente formuló preguntas generales orientadoras, como “¿Qué hay en la imagen?”, ante la cual los estudiantes respondieron con descripciones del contenido, por ejemplo, “una bolsa con pelotas rojas”. Al continuar el diálogo, se preguntó: “¿Qué está sucediendo en la imagen?”, y una estudiante comentó que “las pelotas están cayendo a una caja”. Estas intervenciones favorecieron una construcción progresiva del enunciado, aunque persistieron dudas sobre qué tipo de lenguaje o elementos incorporar en el planteamiento del problema.</p> <p>Uno de los aspectos que generó controversia fue la denominación de los objetos representados en la imagen. Algunos estudiantes los llamaban “piquis”, otros “pelotas” o “pimpones”, lo que dio lugar a diferencias en la elección del vocabulario para el problema. Para resolver estos conflictos, se les sugirió que eligieran el término con el que se sintieran más cómodos y formularan la situación con base en ese referente. La diversidad de interpretaciones abrió también la posibilidad de que algunos estudiantes vincularan la imagen con otros elementos, como frutas de colores o conceptos opuestos.</p> <p>Durante este proceso de formulación, se presentaron preguntas espontáneas que permitieron evaluar el grado de comprensión. Por ejemplo, el estudiante 22 preguntó: “¿Esto sirve?</p>

¿Cuántas manzanas tenía Miguel en total?”, y la docente le respondió que sí, si consideraba que su pregunta tenía sentido dentro de la imagen. Otro caso fue el del estudiante 14, quien planteó: “La pregunta podría ser ¿Cuánto le falta a Pedro?”, a lo cual la docente respondió con otra pregunta: “¿Cuánto le falta para qué?”, incentivando la necesidad de contextualizar la interrogante.

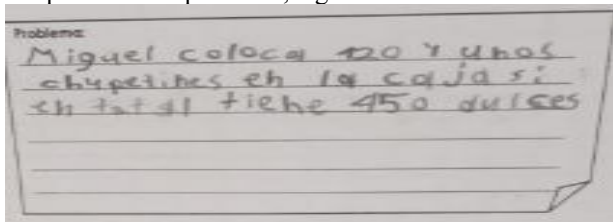
Ante las dificultades observadas, especialmente por la ausencia de cantidades visibles en la imagen, se orientó a los estudiantes a asignar un número de balotas en la bolsa roja y otro mayor en la caja inferior, lo que permitió que se estructuraran problemas con sentido aditivo. Una vez que la mayoría logró formular su propio problema, se les entregó una guía con una nueva imagen que presentaba dos tarros de dulces vaciándose en una caja, para continuar el trabajo sobre situaciones similares y consolidar el ejercicio de composición y descomposición.

Potencia para promover distintas heurísticas y soluciones:

Desde el inicio de la sesión el planteamiento permite promover diferentes propuestas. Se comienza la sesión con los planteamientos de los problemas. A continuación, se presenta la formulación inicial del estudiante 24.



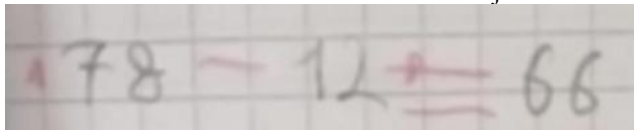
Después de la explicación, algunos estudiantes formularon problemas como:



En un audio el estudiante 19 propone el siguiente problema: Esteban tiene 468 tomates, pero también le puso manzanas verdes y no las había contado. Vio que en la caja había 78 manzanas y tomates ¿cuántas manzanas hay?

Para el segmento de proposición de soluciones los estudiantes propusieron varios procesos. En esta sesión, se debe hacer la aclaración de que las dos operaciones básicas propuestas fueron la adición y la sustracción, con diferencias marcadas en el proceso que desarrollaron algunos estudiantes. Se analizaron las propuestas de resta o sustracción desde varios procesos, mas no desde el resultado obteniendo los siguientes datos:

El estudiante 18 explica: para saber cuánto le falta a 39 para llegar a 56 contamos desde 39 hasta que llegue hasta que lleguemos a 56, hace conteo con los dedos. Nos da 18, deduciendo así que realizó un conteo desde el dato conocido hasta el total. (transcripción de audio). Otra solución planteada por la mayoría de los estudiantes fue la resta o sustracción. Sin embargo, la diferencia en esta ocasión se evidencia en la ejecución de esta.



Una forma de sustracción que se evidenció fue la de descomposición del sustraendo. El estudiante 13 explica que él para restar $78 - 12$, primero le quita 2 a 78 que serían 76 y a ese resultado le quita 10 y eso da como resultado 66 (Transcripción audio). En el desarrollo de esta heurística de la operación de sustracción coinciden los estudiantes 6, 16 y 22. Otra forma de restar evidenciada fue la de descomposición del sustraendo, pero empezando a restar por la derecha decenas completas, la explica el estudiante 17: Para restar 39 menos 27. Primero 39 le resto 20 y me da 19 y ahora le resto 7 y da 12. (transcripción audio).



Otra heurística de descomposición del sustraendo consiste en descomponer el sustraendo en dos sumandos la describe el estudiante 15: para restar 78 menos 12. Descompuse el 12 en 9 y 3. A 78 le quite 9 (contando hacia atrás con dedos) y me da 69 y a ese resultado le quito 3, me da 66 (transcripción audio).

$$78 - 12 = 66$$

Otra heurística de la sustracción es la de sustracción con reagrupación en columna, la cual los estudiantes mencionan como resta prestando. El estudiante 1 explica: para restar 56 menos 39, comienzo por las unidades. Como a 6 no se le puede restar 9 entonces las 5 decenas, le prestó el 6 de las unidades (minuendo) así que el 6 se convierte en 16 y hago cuánto le falta 9 para llegar a 16, son 7. Paso a las decenas el 5 (del minuendo) se convirtió en 4 y a ese le resto 3, así que da 1. (Transcripción audio). Esta propuesta la realizaron los estudiantes 1, 3, 11 y 24.

$$\begin{array}{r} 56 \\ - 39 \\ \hline 17 \end{array}$$

El mismo proceso con centenas se encuentra en la solución propuesta por el estudiante 19, quien la explicó así: Yo resté 782 menos 468. A 2 no le puedo quitar 8 así que el 8 (del minuendo) le presta una (decena) al 7 y se convierte en 12, mientras el 8 (del minuendo) se convierte en 7. A 12 le quitó 8 me quedan 4 unidades. Paso a las decenas y a 7 le quitó 6 me queda 1. Y en las centenas a 7 le quitó 4 me da 3. Y me da resultado 314 (transcripción). Esta propuesta la realizaron los estudiantes 5, 8 y 19.

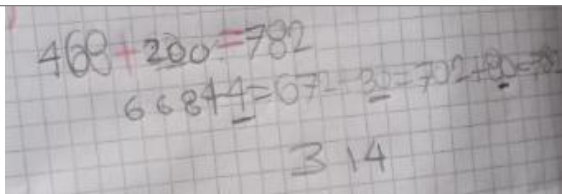
$$\begin{array}{r} 314 \\ + 468 \\ \hline 782 \end{array}$$

Otra heurística que surgió en la experiencia fue la de adición, con algunas diferencias. Algunos estudiantes proponen realizar una adición con reagrupación en busca del segundo sumando.

Estudiante 14: Yo sumé el número de mis canicas rojas con el número que supuse que eran las canicas verdes hasta que me dieron total. Esta solución fue propuesta por los estudiantes 4, 10 y 23 usando cantidades de 3 cifras.

$$\begin{array}{r} 314 \\ + 468 \\ \hline 782 \end{array}$$

Otra propuesta de adición fue completar el total, a partir del dato conocido. El estudiante 20: Para saber cuántas piquis verdes hay, debo sumar un número a 468 hasta llegar a 782. Por eso a 468 sume 200 y me dio 668 y luego le sume 4 y me dio 702, a eso le sume 80 para completar los 782 que son el total. Cómo ya llegué al resultado, sume 200 con 4 con 30 y 80 y me dio 314. Transcripción.

**Las pistas:**

En esta cuarta sesión, las pistas desempeñaron un papel decisivo para el desarrollo de propuestas de solución. Su pertinencia y necesidad se evidenciaron en el hecho de que la mayoría de los estudiantes acudieron a ellas antes de plantear una estrategia. La pista 1, de tipo gráfico, con datos como elementos representativos, fue percibida como la más compleja de interpretar; varios estudiantes formularon preguntas como “¿qué es la b y la h?”, lo que reveló la dificultad para reconocer símbolos y abstraer significados desde una representación más técnica. Ante estas dudas, muchos optaron por consultar otras pistas que les resultaran más accesibles.

Por su parte, la pista 2, escrita en lenguaje vernáculo, explicaba una situación-problema junto con su proceso de resolución, y fue utilizada por aproximadamente 16 de los 26 estudiantes, siendo la que recibió mayor número de consultas. Esta alta recurrencia permite considerarla la más comprendida y utilizada dentro de la sesión. Varios estudiantes expresaron que era “más fácil” o “más clara”, especialmente porque manejaba cantidades pequeñas (por ejemplo, inferiores a 100), lo cual les facilitaba la manipulación mental sin necesidad de algoritmos complejos. Esto sugiere que el grado de dificultad percibido influye directamente en la selección de pistas: los estudiantes tienden a preferir aquellas que les permiten visualizar procesos de resolución con menor carga cognitiva, incluso si no corresponden exactamente al problema planteado. La efectividad de esta pista se reflejó en que más de la mitad de los estudiantes retomaron elementos de su procedimiento en sus propias estrategias de solución, aunque no todos lograron aplicarlo correctamente, lo que demuestra su capacidad para activar el razonamiento, pero también la necesidad de acompañarla con orientación docente que ayude a transferir el ejemplo a la tarea específica.

La pista 3 fue revisada por aproximadamente la mitad del grupo, aunque su contenido fue socializado entre pares para facilitar su comprensión, mostrando cómo el trabajo colaborativo se consolida como herramienta de mediación entre el recurso y el estudiante.

Reformulación del problema:

En cuanto a la reformulación del problema, es importante resaltar que esta sesión utilizó una imagen como punto de partida, lo cual generó inicialmente dificultades interpretativas entre los estudiantes. Esto sugiere la necesidad de contar siempre con un plan alternativo cuando el enunciado visual no es comprendido con claridad. Para esto, se recomienda iniciar con preguntas orientadoras como: ¿Qué objetos se observan en la imagen? ¿Qué diferencias hay entre ellos? ¿De qué colores son? ¿Qué está sucediendo? ¿Qué objetos reales podrían reemplazar lo que vemos?


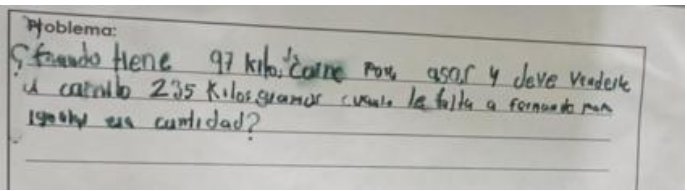
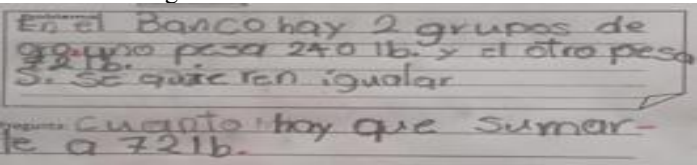
Durante los primeros minutos de la sesión, se invirtió más tiempo del previsto en la construcción de una pregunta adecuada. A partir de las observaciones realizadas, se orientó a los estudiantes para que identificaran las cantidades involucradas, proponiendo que en la bolsa de balotas rojas hubiera un valor inicial y en la caja inferior una cantidad mayor que permitiera activar procesos aditivos. Inicialmente, los estudiantes tuvieron libertad para asignar estas cantidades, pero se observó que la mayoría coincidía en plantear preguntas como “¿Cuánto es el total de balotas?”, lo que llevó a sugerir una gama más amplia de opciones numéricas que ayudaran a enriquecer los planteamientos.

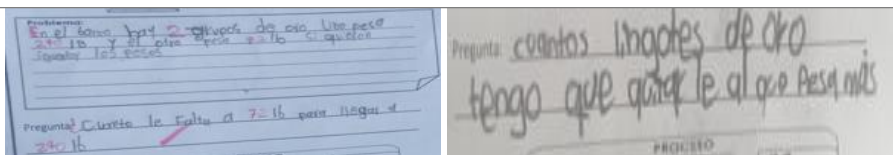
Se entregó además una guía complementaria con una imagen de dos tarros de dulces vertiéndose en una caja, sobre la cual debían describir sus situaciones y recibir sugerencias en la redacción. Una mejora futura en este tipo de formulación podría consistir en ajustar las imágenes y apoyos visuales para que contengan elementos más explícitos —como cantidades representadas gráficamente o indicadores visuales del total y las partes— manteniendo siempre el propósito central: que los estudiantes sean quienes formulen el problema a partir del contexto. Esta precisión visual no busca reemplazar la formulación original por una pregunta cerrada, sino favorecer la construcción autónoma de interrogantes matemáticamente coherentes, permitiendo que el estudiante relacione los datos disponibles con el tipo de operación esperada sin comprometer su rol activo en el diseño del enunciado. De esta manera,

se conserva el enfoque heurístico de la propuesta y se fortalecen las condiciones para que la formulación sea significativa y orientada al desarrollo del pensamiento crítico.

Nota. Elaboración propia, 2025.

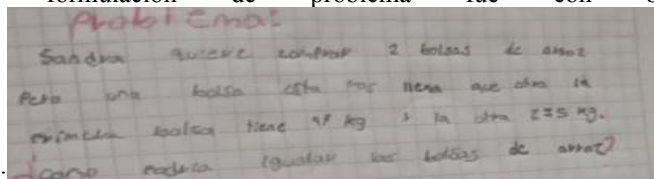
Tabla 12
Matriz de evaluación y resultados sesión 5

Formato de evaluación y resultados	
Sesión Cinco. Problema de estructura aditiva de igualación	
	
Formulación del problema:	<p>En esta última sesión, el problema se presentó mediante una imagen proyectada en el televisor del aula. En ella se mostraba una balanza con un niño en actitud reflexiva, aparentemente buscando la manera de igualar los dos lados. De forma complementaria, en el tablero se dibujó otra balanza con valores numéricos distribuidos en sus platillos, junto a la pregunta: “¿Cómo se pueden igualar?”. Esta propuesta visual generó de inmediato una reacción interpretativa por parte de los estudiantes, quienes, influenciados por la experiencia de la sesión anterior, asumieron que debían formular un problema a partir de lo que observaban.</p> <p>Para favorecer el proceso de observación e interpretación, se les brindaron cinco minutos exclusivamente para explorar la imagen en pantalla. Después de ese momento inicial, se les invitó a construir el enunciado del problema basándose en las representaciones visuales del tablero y los valores indicados. La formulación se realizó de forma abierta, permitiendo que los estudiantes eligieran libremente los elementos que consideraban adecuados para describir la situación. Entre las preguntas surgidas durante el proceso se destacan expresiones como “¿usamos manzanas o lingotes?”, a lo que la docente respondió con una invitación a decidir lo que les pareciera más apropiado. Esta estrategia permitió validar las distintas interpretaciones personales sin imponer un marco único de referencia.</p> <p>La dinámica reveló que los estudiantes estaban cada vez más familiarizados con la lógica de la propuesta metodológica. Aunque la imagen no incluía un enunciado explícito, el grupo fue capaz de deducir que debía construir un problema sobre equilibrio, lo que muestra un desarrollo progresivo en su capacidad para inferir, interpretar y estructurar situaciones matemáticas desde elementos visuales. Esta sesión evidenció también cómo la libertad en la formulación y el estímulo a la exploración favorecen la consolidación de estrategias propias y el fortalecimiento de la autonomía intelectual en el aula.</p>
Potencia para promover distintas heurísticas y soluciones:	<p>Desde la propia formulación del problema, la sesión sugiere una promoción de diferentes enunciados. Algunas formulaciones que propusieron los estudiantes fueron las siguientes:</p> <p>Con base en venta de carne:</p>  <p>Con base en lingotes de oro:</p> 



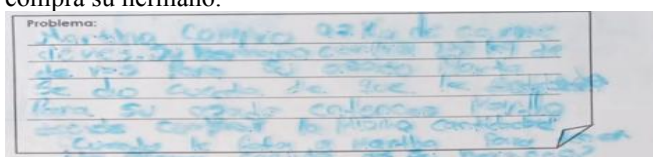
En las dos anteriores formulaciones, la diferencia se encuentra en la pregunta. Mientras el primer estudiante pregunta cuánto se debe sumar, el segundo, pregunta cuánto le falta al que menos peso tiene y la tercera pregunta cuánto tengo que quitarle al que más pesa.

Otra formulación de problema fue con base en peso de



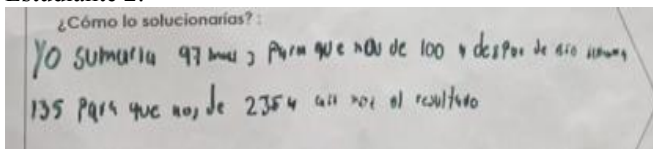
arroz:

Otro problema totalmente distinto es la comparación entre la carne que compra Marta y la que compra su hermano.



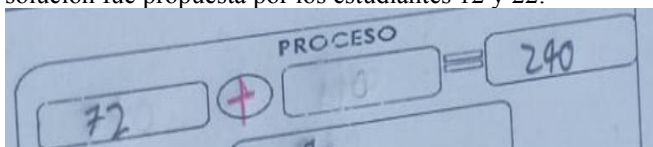
En el desarrollo de las propuestas de solución se pudo evidenciar que la mayoría de los estudiantes están condicionados por una operación Adición o sustracción. Sin embargo, presentan características diferentes como se observa a continuación. Los estudiantes que utilizan la adición lo realizan desde diferentes procesos.

Estudiante 2:

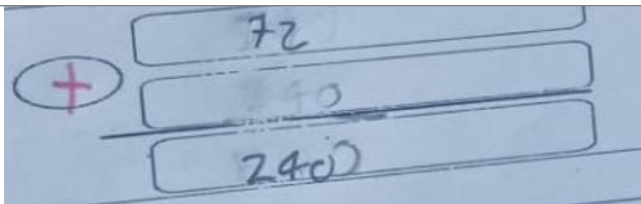


En esta propuesta se evidencia que el estudiante completa la centena más cercana y después suma la cantidad que completa el peso mayor. Esta propuesta fue dada por los estudiantes 4, 8, 10 y 16.

Otra de las propuestas explicada por el estudiante 2: Para saber cuánto les falta a 97 lingotes para igualar a 240 contamos, desde 97, y completa 100 y de ahí sumamos 140. Para finalizar sumamos lo que contamos para completar, es decir 3 y 140 y nos da 143. (Transcripción) Esta solución fue propuesta por los estudiantes 12 y 22:



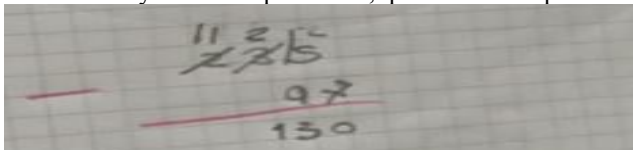
Otra propuesta de adición corresponde a la suma con un sumando faltante descrita así por el estudiante 9: Para igualar a 72 a 240, se escribe el sumando 72 arriba debajo se deja un espacio para el segundo sumando, hago la línea horizontal y se coloca el resultado que es 240 y comienzo a buscar un número que sumado con 2 de como resultado 10, ya que es el siguiente que termina en 0, y lo escribo en el espacio que dejé para el segundo sumando, llevo 1 a la columna de las decenas. A 7 le sumo lo que llevo que es 1 y da 8 y busco un número que sumado con 8 de 14, que es el siguiente que termina en 4, ese número es 6, y pasó a la columna de las centenas como llevo 1, busco un número que sumado con 1 de 2. El sumando que faltaba es 168. Dentro de estas propuestas se puede analizar e inferir que los estudiantes presentan algunas dificultades para relacionar el valor posicional de las cifras. Esto tiene relación con el problema de estructura aditiva conocido como la composición aditiva de un número.



Otras soluciones fueron planteadas con base en la sustracción.

Entre estas propuestas está el algoritmo tradicional de la resta con reagrupación. En estas propuestas de solución podemos encontrar dificultades en la comprensión de composición de valor posicional de un número al igual que la dificultad en la comprensión de la ubicación de las cantidades según su valor posicional. A continuación, se presentan algunos ejemplos de estos razonamientos

Estudiante 7: Para restar 235 menos 97 se comienza restando las unidades. A 5 no le puedo quitar 7, así que el 3 le presta 1 decena y se convierte en 15, a 15 le resto 7 quedan 8. Paso a las decenas y como 3 prestó 1 queda convertido en 2. A 2 no le puedo quitar 9, así que el 2 presta 1 decena y queda convertido en 12. A 12 se le quitan 9 y quedan 3. Paso a las cifras de las centenas y a 1 no le quito nada, queda 1. La respuesta es 138.



Estudiante 20: Para igualarlos a 240 se le quita 40, quedan 200 y le quito 30, para completar 70 que quito, me quedan 170 y a eso le quito 2, me quedan 168 (Transcripción).

Estudiante 23: Para igualarlos a 235 se le quitan 97, A 200 se le quitan 90 y quedan 110 a eso le quito 7 me quedan 103 y le sumo los 35 que no conté, me quedan 138 (Transcripción).

Estudiante 17: Para igualar a 72 con 240, resto 70 primero, me da 170 y a ese resultado le quito 2, contando hacia atrás y da 168.

Las pistas:

En la sesión 5, las pistas ofrecidas fueron variadas en formato: algunas se presentaron mediante elementos gráficos, otras mediante representaciones simbólicas y otras a través de lenguaje vernáculo. Esta diversidad permitió atender diferentes estilos de procesamiento entre los estudiantes. Sin embargo, se evidenció que los elementos gráficos, especialmente aquellos que aparecían sin explicación, solo fueron comprendidos al consultar la pista 4, que ofrecía una aclaración explícita sobre el procedimiento representado. Esto indica que, si bien el recurso gráfico capta la atención, requiere acompañamiento textual para generar verdadera comprensión. A pesar de esto, se observó que al menos 22 de los 26 estudiantes consultaron una o más pistas antes de construir su propuesta de solución, lo cual refuerza su utilidad como soporte cognitivo en el desarrollo de estrategias. Por ejemplo, la pista 3 fue usada explícitamente por los estudiantes 3, 13, 15 y 22, quienes replicaron elementos del procedimiento descrito en sus propias soluciones. La pista 2 permitió a estudiantes como el 2, 7, 9 y 23 descomponer el trapecio en zonas rectangulares y triangulares, intentando calcular sus áreas por separado. Aunque en algunos casos persistieron errores conceptuales o medidas arbitrarias, estas propuestas mostraron una activación clara de los recursos ofrecidos, evidenciando que las pistas no solo orientaron el pensamiento sino también desencadenaron procesos heurísticos visibles en las respuestas escritas y socializadas en plenaria.

Reformulación del problema:

Respecto a la reformulación del problema, se observó que, aunque los estudiantes tuvieron libertad para formularlo a partir de la imagen, como había sido propuesto, la mayoría presentó dificultades para construir una pregunta clara que orientara la situación matemática. Esto sugiere la necesidad de fortalecer procesos de lectura visual e interpretación contextual en la formulación de problemas. Una posible mejora consiste en brindar ejemplos modelo de enunciados previamente estructurados, acompañados de espacios para que los estudiantes puedan adaptar los datos y plantear interrogantes ajustados. También puede resultar útil proponer una secuencia de preguntas guía, tales como: ¿Qué representa cada objeto en la imagen? ¿Qué relación hay entre los elementos? ¿Cuál es el valor inicial y cuál el final? ¿Qué pregunta podría surgir de esa situación?

Nota. Elaboración propia, 2025.

5.2. Evaluación de los Segmentos de Clase en el método de Resolución de Problemas al

Estilo Japonés

En la tabla 13 se presenta la evaluación de los segmentos de la clase, en la metodología de resolución de problemas al estilo japonés.

Tabla 13

Matriz de evaluación de los segmentos de clase

Necesidad y la pertinencia del segmento de trabajo individual:	Uno de los componentes más significativos en la implementación de esta metodología fue el segmento de trabajo individual. Se evidenció que los estudiantes poseen ideas propias que, aunque inicialmente tímidas o no estructuradas, pueden convertirse en propuestas válidas de solución. Al comienzo de las sesiones, la participación individual fue difícil de activar; los estudiantes estaban acostumbrados a esperar el paso a paso por parte del docente, o a recibir una validación inmediata sobre si su estrategia era “correcta”. Esta expectativa condicionaba su iniciativa. Sin embargo, a medida que la secuencia avanzaba, se volvió más natural para ellos pasar al tablero, compartir sus ideas y valerse de los recursos disponibles. Incluso entre pares comenzaron a explicar el uso y sentido de las pistas, sobre todo cuando había compañeros que no habían estado presentes en sesiones anteriores. Esto evidenció un crecimiento significativo en la apropiación de los materiales y en la autonomía para abordar los problemas. La metodología permitió que cada estudiante propusiera desde su percepción, reconociendo que toda estrategia tiene un valor que puede ser comprendido y discutido colectivamente.
Necesidad y pertinencia del segmento de la presentación de soluciones individuales en la pizarra:	En relación con la presentación de soluciones individuales en la pizarra, durante la primera sesión se observó que los estudiantes no estaban habituados a exponer públicamente su razonamiento. Lo usual era que esperaran que alguien resolviera el problema y luego continuar con el siguiente ejercicio. Esta postura inicial también reflejaba el temor a equivocarse y la necesidad de aprobación por parte del docente. Para revertir este esquema, se propuso una intervención docente centrada en la idea de que existen múltiples formas de resolver una misma situación, y que cada propuesta es válida dentro de su propio contexto. Se les invitó a participar sin miedo al error, destacando que el ejercicio no era calificable y que lo que expresaran tenía valor para el aprendizaje conjunto. Esta postura generó mayor libertad y confianza en las sesiones posteriores, donde los estudiantes asumieron con mayor seguridad su rol como constructores del conocimiento.
Necesidad y pertinencia del momento de conclusión de la clase:	El momento de conclusión de cada clase fue igualmente relevante. Al observar el conjunto de propuestas en el tablero, ya organizadas y visibles, surgían nuevas heurísticas que no habían aparecido durante el trabajo individual o grupal. Este segmento permitió analizar las soluciones desde distintas perspectivas, caracterizarlas junto con los estudiantes y generar acuerdos sobre las propiedades, efectividad y utilidad de cada una. De esta forma, se consolidó el conocimiento generado durante la sesión, no solo desde lo conceptual sino también desde la valoración de la diversidad de pensamiento.
Necesidad y pertinencia del	Respecto a los materiales utilizados en la clase, se contó con una hoja de trabajo

material en la clase	individual en la cual cada estudiante escribía su propuesta. Esta se introducía en un sobre de acetato, lo que facilitaba su exposición en la pizarra sin alterar el contenido ni dificultar la reutilización. La cinta adhesiva dispuesta en el tablero permitía ubicar las propuestas ordenadamente y hacer visible la producción colectiva. No obstante, se presentó como dificultad la limitación del espacio disponible en el tablero, lo que impedía la exhibición simultánea de todas las soluciones. En futuras implementaciones podría considerarse el uso de superficies complementarias o estrategias digitales que amplíen el lugar de exposición sin perder la dimensión visual compartida.
Pertinencia de la presentación del enunciado del problema	La presentación del problema en formato gráfico, mediante imágenes contextualizadas, con elementos visuales reconocibles y situaciones abiertas, demostró ser una estrategia significativa para activar el pensamiento crítico en los estudiantes. El uso de representaciones visuales permitió que cada participante interpretara la situación desde su propia experiencia, formulara enunciados matemáticamente válidos y explorara caminos heurísticos diversos. Esta modalidad no solo promovió la autonomía cognitiva, sino que facilitó el desarrollo de creatividad, análisis y discusión colectiva. A pesar de que algunos estudiantes presentaron dificultades iniciales para construir una pregunta coherente a partir del estímulo gráfico, la intervención docente mediante preguntas orientadoras (¿qué sucede?, ¿qué se observa?, ¿cómo podría preguntarse?) y el apoyo entre pares permitieron avanzar hacia formulaciones cada vez más precisas. La inclusión de datos visuales sugerentes, como interrogantes visibles, cantidades referenciales o acciones en curso, resultó clave para guiar la interpretación sin cerrar la posibilidad de múltiples lecturas.

Nota. Elaboración propia, 2025.

Capítulo VI. Conclusiones

Esta propuesta se centra en transformar la metodología utilizada en las clases de matemáticas. Tradicionalmente, una sesión suele orientarse al seguimiento de instrucciones dadas por el docente para aplicar un único algoritmo de solución. En contraste, lo que aquí se propone es un enfoque centrado en el desarrollo de heurísticas por parte de los estudiantes, lo que permite que las sugerencias de solución sean variadas, dinámicas y contextualizadas. El punto de partida fue reconocer que en las clases de matemáticas se enseña una única heurística, sin ofrecer al estudiante la posibilidad de conocer y comparar diversas formas de resolver un problema. Esta situación se repite en distintos tipos de pensamiento, numérico, geométrico, métrico, aleatorio o variacional, tal como lo establece la organización curricular del área. Desde esta observación surgió la necesidad de replantear el modelo de enseñanza, privilegiando al estudiante como protagonista del aprendizaje y como generador de creatividad y pensamiento flexible.

Al conocer el método japonés en la resolución de problemas, se identificó su potencial para el desarrollo de múltiples heurísticas, así como para la participación activa de todos los estudiantes. Esta propuesta no solo promueve la individualidad en la construcción de ideas, sino que estimula el trabajo en equipo al reconocer coincidencias entre las estrategias planteadas y generar interacción entre pares en búsqueda de soluciones válidas. Uno de los elementos más significativos es el cambio de perspectiva frente al error, que deja de verse como castigo social y se resignifica como oportunidad de aprendizaje. Los estudiantes, en algunos casos, logran identificar sus fallos. De igual manera, si el estudiante no logra resolver el error con el uso de las pistas, lo puede hacer en la socialización de su propuesta de solución con la ayuda de sus compañeros

En el proceso de planeación, se concluyó que cada problema tiene particularidades propias, lo que exige el diseño de pistas específicas para acompañar su resolución. Esta afirmación no surge como una generalización, sino como resultado directo de la experiencia acumulada a lo largo de las cinco sesiones implementadas, en las cuales cada problema fue formulado considerando cuidadosamente su relación con el pensamiento matemático trabajado, el objetivo pedagógico de la sesión, la magnitud o estructura involucrada (numérica, métrica o geométrica) y el tipo de razonamiento que se deseaba promover. Además, se incluyeron

elementos visuales en el plan de pizarra y en los materiales de clase, como imágenes guía, tarjetas de situación, problemas representados simbólicamente y pistas redactadas en diversos lenguajes, lo que permitió ajustar el enunciado al nivel cognitivo del grupo y a sus posibilidades de interpretación.

Asimismo, se tuvo en cuenta la edad de los participantes, entre 7 y 9 años, y el perfil identificado de una formación conductista previa, lo que implicó anticipar posibles bloqueos en la lectura o análisis de los problemas. Estas condiciones hicieron evidente que la formulación del enunciado debía ser accesible pero retadora, abierta pero dirigida, para activar el pensamiento heurístico sin generar frustración en los estudiantes. La observación sistemática del comportamiento frente a cada problema permitió validar que estos criterios de diseño son fundamentales para guiar con precisión el tipo de operación, la comprensión de la estructura matemática y la construcción autónoma de estrategias de solución. En este sentido en la primera sesión, aunque era un enunciado de baja complejidad, este requirió de mucha estimulación verbal por parte de la profesora para que los estudiantes se atrevieran a proponer ideas, acercarse a las pistas e incluso acercarse a la zona de materiales tangible. Con la implementación de las otras sesiones el proceso se fue agilizando y en varias ocasiones, aunque se cometieran errores, estos fueron ocasión para entablar diálogos y preguntas de lo que se puede y no hacer en la resolución específica de un problema.

La implementación de esta propuesta reveló que los estudiantes desarrollan diversas heurísticas a lo largo de las sesiones, en contraste con la rutina que predomina en las clases convencionales. Este enfoque permite que los estudiantes analicen distintas estrategias, las comparen, descarten aquellas que consideren poco efectivas, y construyan sus propias soluciones a través de la argumentación. Un hallazgo relevante fue la necesidad de que los estudiantes formulen sus propios problemas, preferiblemente a partir de imágenes o secuencias visuales, lo que les permite vincular la matemática con su entorno y describir no solo el resultado, sino el proceso que lo sustentó.

En este sentido, la forma de presentación del problema ya sea mediante lenguaje vernáculo o icónico, influye directamente en el desarrollo de la clase y en el logro del objetivo. Si se espera que los estudiantes construyan una situación a partir de una imagen, esta debe contener

elementos específicos como cantidades claras, el símbolo de interrogación en una zona definida, objetos concretos y colores identificables, todo ello orientado a facilitar la comprensión.

Este método permite que los estudiantes sean verdaderamente protagonistas de su aprendizaje. La conversación entre pares no solo refuerza la seguridad en sus ideas, sino que amplía el repertorio de soluciones posibles. El docente, por su parte, asume un rol orientador, mediador y promotor de nuevas heurísticas, más allá de ser un transmisor de conocimientos. En cuanto al diseño y uso de las pistas, se resalta la importancia de ofrecer diversidad en su presentación. Las pistas en lenguaje vernáculo permiten explicar procesos; las gráficas muestran secuencias de acción; y las simbólicas ofrecen modelos operativos. Esta variedad no solo facilita el acceso al contenido, sino que se adapta a los estilos de aprendizaje de cada estudiante. En este sentido las pistas también permiten elaborar un diagnóstico del nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes, debido a que algunos de ellos requirieron el uso de más de una pista e incluso la explicación de lo que significaban los gráficos o los símbolos, por parte de uno de sus compañeros. Se evidencia que algunas de ellas, en especial las gráficas o las que contienen un ejemplo explicativo similar al presentado inicialmente son las más aceptadas, usadas e interpretadas asertivamente para proponer sus propias soluciones.

En el desarrollo de esta propuesta se pudo constatar la necesidad de permitir los espacios sugeridos por el método japonés tales como la presentación de una situación cotidiana, el trabajo individual, el trabajo en equipo y las aclaraciones de acuerdo con la solicitud del problema. Además, es evidente e innegable la variedad de heurísticas que pueden surgir de un mismo problema, imagen o enunciado.

Desde el punto de vista profesional, esta propuesta significó para mí un camino de apertura hacia la promoción activa de heurísticas en el aula. Comenzar una clase con una situación particular, escuchar atentamente las propuestas de los estudiantes y trabajar sobre ellas como núcleo del desarrollo matemático exige que el docente tenga conocimiento y dominio sobre múltiples heurísticas. La mayor dificultad observada es precisamente esa: preparar al docente para ejecutar este enfoque. En la práctica habitual, la clase de matemáticas se desarrolla con procedimientos unificados y repetitivos, debido a que el docente conoce y transmite una única forma de resolver. La interacción con otros maestros durante este proyecto confirmó que la enseñanza del área tiende a ser ejercitativo, enfocada en seguir pasos fijos sin atender al contexto

ni a la realidad de los estudiantes. Esta creencia, que enseñar matemáticas es aplicar algoritmos descontextualizados, convierte a la escuela en un espacio distante de la vida cotidiana. Por ello, esta propuesta busca recuperar el sentido de la matemática como herramienta de pensamiento, no solo desde experiencias concretas de la realidad, sino también desde la exploración estructural de conceptos. Los problemas abordados en la secuencia incluyen tanto situaciones vinculadas a contextos cotidianos, como aquellas que plantean desafíos geométricos y numéricos sin referencia directa al entorno, permitiendo el desarrollo de habilidades cognitivas complejas en distintos niveles de abstracción.

En este marco, los procesos de descomposición y recomposición de cantidades, figuras y estructuras matemáticas se consolidan como estrategias fundamentales para activar el pensamiento numérico, geométrico y métrico. Estos procedimientos permiten a los estudiantes representar, reorganizar y modelar situaciones desde diferentes perspectivas, y fomentan la construcción de heurísticas variadas: desde el conteo y el recubrimiento, hasta la aplicación flexible de fórmulas o la creación de soluciones propias. Este enfoque no solo promueve la comprensión profunda, sino que favorece el tránsito entre lo concreto y lo abstracto, fortaleciendo la autonomía intelectual del estudiante y su capacidad para analizar, argumentar y validar sus ideas en interacción con otros.

Uno de los mayores aportes en la realización de esta propuesta es la urgente auto reflexión del trabajo docente en el aula. La identificación de fortalezas, de planeación, modificación, contextualización de cada problema a la sociedad cercana del estudiante como papel fundamental en el éxito de obtener nuevas heurísticas.

Referencias Bibliográficas

- Álvarez, M. (2020). *La heurística como método didáctico para el fortalecimiento de la competencia matemática de resolución de problemas en estudiantes de 5° grado de educación básica de la I.E.D. "Rodolfo Llinás Riascos" de Barranquilla-Atlántico*. [Tesis de pregrado, Universidad Sergio Arboleda]. Repositorio Institucional - Universidad Sergio Arboleda. <https://goo.su/4yZCa>
- Álvarez, O. y Hernández, J. (2017). *Evaluación de los significados institucionales del profesor de matemáticas. Un proceso de estudio sobre los conceptos de perímetro y área en quinto grado*. [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco de Paula Santander]. Repositorio - Universidad Distrital Francisco de Paula Santander. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/evaluacion-de-los-significados-institucionales-del-profesor-de-matematicas-un-proceso-de-estudio-sobre-los-conceptos-de-perimetro-y-area-en-quinto-grado-2/>
- Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil. Aprender para enseñar*. Editorial Universidad Internacional de la Rioja. https://www.researchgate.net/publication/301200747_Didactica_de_las_matematicas_en_Educacion_Infantil_Aprender_para_ensenar
- Baba, T. y Kojima, M. (2005). *La historia del desarrollo de la educación en Japón: Estudio de Clases*. Instituto para la Cooperación Internacional Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA). https://www.jica.go.jp/Resource/jica-ri/IFIC_and_JBICISudies/english/publications/reports/study/topical/educational/pdf/edu
- Báez, A. M., Pérez González, O. L., & Triana Hernández, B. (2017). *Propuesta didáctica basada en múltiples formas de representación semiótica de los objetos matemáticos para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial*. *Revista Academia y Virtualidad*, 10(2), 20-30. https://doi.org/10.18359/ravi.2743cational_sp.pdf
- Barrera, F., Reyes, A. y Mendoza, J. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación matemática*, 30(3), 122-150. <https://doi.org/10.24844/em3003.06>

- Bedoya, E (2013). La enseñanza del cálculo en el currículo de secundaria en un ambiente de calculadora Graficadora, papel y lápiz. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Editorial Universidad de Granada.
<https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/apregeom/archivos2/homenaje/15BedoyaE.PDF>
- Bedoya, E. (2017). *Formación de profesores de educación básica y media en matemáticas y su didáctica: el conocimiento didáctico de contenido y el Análisis Didáctico*. Manuscrito no publicado. Cali: Universidad del Valle.
- Benavides, L. y Calvache, R. (2013). El estudio de clase como investigación en el aula. *Revista Universitaria, Investigación e Innovación*, 2(1), 32-55.
<https://revistas.udenar.edu.co/index.php/duniversitaria/article/view/582/0>
- Bermejo, V. (2005). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Editorial CCS.
<https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/download/1381/1079/>
- Bermejo, V., Vela, E. y Betancourt, S. (2009). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. CCS Editores.
- Cárdenas, Y. (2023). El potencial del pensamiento computacional. *Línea imaginaria*, 18(1), 523-551. <https://orcid.org/0000-0003-0350-7854>
- Castro, E., Castro, E., y Torralbo, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros*. Editorial Comares, S.L.
- Cayetano, S., Rouanet, R. y Asijtuj, A. (2011). *Comprendo las fórmulas de área de figuras geométricas*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/comprendo-las-formulas-de-area-de-figuras-geometricas/>
- Centro de Modelamiento Matemático (CMM). (2021, 15 de marzo). *Investigadores CMM plasmaron método japonés en textos estudiantes es*. Ingeniería y Ciencias U Chile.
<https://ingenieria.uchile.cl/noticias/174619/investigadores-cmm-plasmaron-metodo-japones-en-textos-estudiantes-es>

- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e investigaciones pedagógicas (CPEIP).
Investigación Acción. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2022/03/Investigacion_accion-1.pdf
- Córdova Rosas, N. C., Sánchez Casanova, R., & Urrutia Romaní, I. (año). Elementos de Innovación Docente en la Mejora del Aprendizaje: El Impulsor Cualitativo y su Aplicación en la Resolución de Problemas en Matemáticas. [Datos de publicación si están disponibles]. <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/8847/7558>
- Donoso, E., Valdés, R., Cisternas., P. y Cáceres P. (2020). Enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Un análisis de correspondencias múltiples. *Diálogos sobre educación*, 11(21), 13-20. <https://www.redalyc.org/journal/5534/553466654013/html/>
- Duarte, J. A. y Villacrés, M. (2020). Entretejiendo heurísticas alrededor de la resolución de problemas mediante el método de Polya. *Revista Fedumar Pedagogía y Educación*, 7(1), 133-149. <https://doi.org/10.31948/10.31948/rev.fedumar7-1.art9>
- Espinoza, J. La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, 3(39), 64-72.
<https://www.redalyc.org/journal/4780/478055149005/478055149005.pdf>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel. Dordrecht. <https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47235-X>
- Gaete, M. y Jiménez, W. (2011). Carencias en la formación inicial y continua de los docentes y bajo rendimiento estudiantes en matemática en Costa Rica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 8(9), 93-117.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6962/6648>
- García, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar: comprensión de los problemas verbales*. [Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid].
Repositorio - Universidad Complutense de Madrid
<https://webs.ucm.es/BUCM/tesis/psi/ucm-t25308.pdf>
- Godino, J. (2004). *Didáctica para maestros. Manual del estudiante*. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología

- y Fondos FEDER. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- Halmos, P. (1984). *Teoría intuitiva de conjuntos*. Editorial Continental.
- Isoda, M. (2012). El estudio de clases japonés en Matemáticas. Ediciones Universitarias Valparaíso.
https://weizmann.elsevierpure.com/ws/portalfiles/portal/112449582/aa_ElEstudiodeClasesJapon_s_PV2007.pdf
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases*. Ediciones Universitarias Valparaíso.
https://www.criced.tsukuba.ac.jp/pdf/ProblemSolving_Isoda_Olfos.pdf
- Jaimes, M., Arévalo, A. y García, M. (2024). El proceso de enseñanza y aprendizaje en la construcción del concepto de área y perímetro. Perspectivas de las investigaciones científicas. *Revista Educación*, 48(2), 1–22. <https://doi.org/10.15517/revedu.v48i2.58263>
- López de los Mozos García-Núñez, a (2001) desarrollo de las operaciones de sumar y restar. Comprensión de los problemas verbales (tesis doctoral universidad complutense de Madrid) <https://docta.ucm.es/entities/publication/098cb655-0d30-428c-b157-9335055f3e99>
- López, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363-371). www.seiem.es/docs/actas/25/Comunicaciones/363.pdf
- Mancera, E. y Grepe, N. (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas: la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas*. Grupo Editorial Iberoamérica.
https://descubridor.banrepcultural.org/discovery/fulldisplay/alma991013078929707486/57BDLRDC_INST:57BDLRDC_INST
- Marmolejo Avenia, G. A., & Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846001>

- Mena, J. (2014). *El aprendizaje de la matemática basado en la resolución de problemas: el estudio de clases japones*. Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica.
https://www.uned.ac.cr/actividades/encuentros/2013/Ponencias/Investiga/10_ABP_Japon_%20Johanna%20Mena.pdf
- Meza, L., Agüero, E. y Calderón, M. (2012). La teoría en la práctica educativa: Una perspectiva desde la experiencia de docentes graduados/as de la carrera Enseñanza de la Matemática asistida por computadora. *Revista digital matemática, educación e internet*, 13(1). 1-24.
<https://www.redalyc.org/pdf/6079/607972989003.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (1994). Lineamientos curriculares: Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Orozco, M. (1994). El sistema notacional en Base diez. Ediciones Universidad del Valle.
<http://cognitiva.univalle.edu.co/archivos/grupo%20matematica%20y%20cognicion/Marie%20la/capitulos/cap5.pdf>
- Polya, G. (1968). *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. 1). John Wiley and Sons, Inc.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
<https://ia801006.us.archive.org/30/items/ComoPlantearYResolverProblemasPolyaG/Polya%20G%20-%20Como%20Plantear%20Y%20Resolver%20Problemas.pdf>
- Rodríguez, L., García, L. y Lozano, M. (2015). El método de proyecto para la formulación de problemas matemáticos. *Revista Atenas*, 4(1), 100-112.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=478047208008>
- Ruiz, R. A., y Lemos, G.D (2018). Recursos didácticos para la enseñanza de resolución de problemas de suma-resta.
- Santos, L. (2015). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 333-346. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23952>

- Simon, Herbert A. (1976). Modeling strategy shifts in a problem-solving task. *Cognitive Psychology*, 8(1), 86-97.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0010028576900050>
- Castro, C., y Torres, E. (2017). La educación matemática inclusiva: una experiencia en la formación de estudiantes para profesor. *Infancias Imágenes*, 16(2), 295–304.
<https://doi.org/10.14483/16579089.9953>
- Torres, J. (1993). *La resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Torres, P (1993). *La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general*. [Tesis Doctoral, ISP Enrique José Varona], Repositorio ISP Enrique José Varona.
- Trujillo, S. (2011). *El uso de los pentominós en la iniciación al estudio del área y el perímetro de figuras planas* [Tesis de Pregrado, Universidad del Valle] Repositorio – Universidad del Valle. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/7546c198-3c7e-4913-b16a-b14c29b1d828/content>
- Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2),133-170. <https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf>
- Zumbado Castro, M. (2012). *A propósito de la introducción de la función logarítmica. Una correlación entre la clase 'japonesa' y el currículo costarricense de Matemáticas*. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19159/19215>