

Titulo del Proyecto: MODELADO DE SISTEMAS OSCILATORIOS MASA
RESORTE Y ONDAS CON AYUDA DE MATHEMATICA

Modalidad: Asociada al estudio de un tema específico, el tema que se pretende desarrollar está asociado a los sistemas oscilatorios y de ondas, y la programación en Mathematica.

Nombres, Números de identificación y Códigos de los Estudiantes:

Leidy Tatiana Ramírez Molina

1073508237

2010140080

José Rolando Romero Yara

1073156498

2010140057

Asesor

Harol Yesid Valencia Martínez

Firma del Asesor Asesor:

**MODELADO DE SISTEMAS OSCILATORIOS MASA
RESORTE Y ONDAS CON AYUDA DE MATHEMATICA**

PRESENTADO

**LEIDY TATIANA RAMÍREZ MOLINA
JOSÉ ROLANDO ROMERO YARA**

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas**

Bogotá D.C.

Agosto 2017 - II

**MODELADO DE SISTEMAS OSCILATORIOS MASA
RESORTE Y ONDAS CON AYUDA DE MATHEMATICA**

Presentado

LEIDY TATIANA RAMÍREZ MOLINA

2010140080

JOSÉ ROLANDO ROMERO YARA

2010140057

Asesor: Harol Yesid Valencia Martínez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá D.C.

Agosto 2017 - II

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL Realizando la Pedagogía	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 2	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Modelado de sistemas oscilatorios masa resorte y de ondas con ayuda de Mathematica
Autor(es)	Ramírez Molina, Leidy Tatiana; Romero Yara, José Rolando
Director	Harol Yesid Valencia Martínez
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 241 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	OSCILACIONES; ONDAS, MODELACIÓN CON MATHEMATICA

2. Descripción
Trabajo de grado que se propone realizar applets o manipulables, en Wólfram Mathematica, que permita visualizar lo ocurrido con los sistemas oscilatorios y de ondas, que sirvan de apoyo para la comprensión de algunos conceptos físicos, como lo son los sistemas masa resorte de 1, 2 y 3 masas, su aplicación a las áreas de química y biología, y las ondas sinusoidales. Los applets o manipulables que se crearon permiten la resolución de situaciones problema con mayor eficiencia, lo que permite a los estudiantes analizar los resultados obtenidos y relacionarlos con los conceptos que se están tratando.

3. Fuentes
- Agüero, C., Fallas, D., (S.F.), Mathematica Conceptos generales y aplicación, Universidad de Costa Rica, ECCI, San José, Costa Rica. - Canovás, J. (2010), Programación con Mathematica, Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena. - Englander, S.W., Kallenbach, N.R., Heeger, A.J., Krumhans, A.J., Litwin A., Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations, USA 77(1980), 7222 - 7226. - French, A., (S. F.), Vibraciones y ondas, Massachusetts Institute of Technology, Reverte S.A. - Goldstein, H. (2006), Mecánica Clásica, Editorial Reverte. - Howard, G.(215), The Physics of waves, Harvard University, New Jersey, editorial Prentice-Hall, Inc. - Jewett, W., Serway, R, Física para ciencias e ingeniería, sexta edición vol.1, Bogotá: Editorial Thomson. - Manejo del Osciloscopio (S.F.), Recuperado el 2015 de mayo de 27, de http://www.uhu.es/adoracion.hermoso/Documentos/practica-2-manejo-osciloscopio.pdf - Ramírez, A., Ruiz C., Takeuchi, Y., (1994), Ecuaciones Diferenciales, Colombia, Editorial Limusa S. A. - School of Mathematics and Statistics (Ed.). (2015). The MacTutor History of Mathematics archive. (U. o. Scotland, Productor) Recuperado el 05 de Abril de 2015, de The MacTutor History of Mathematics archive: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html - Yang, z., Zhong, W.(2014), Analytical solution to Sine-Gordon Equation With Variable Coefficient, Romanian Reports In Physics, Vol. 66, num. 2, pp. 262-273. - Zill, D. (2009), Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición, Cengage learning.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Realizando la Pedagogía</i>	FORMATO		
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01		
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 2		

4. Contenidos Dentro del contenido del trabajo se pueden encontrar las leyes de Newton, la mecánica Lagrangiana, la mecánica Hamiltoniana, una breve historia de Lissajous y Fourier. El desarrollo utilizando la mecánica Lagrangiana en los osciladores armónicos de 1, 2, 3 y n masas, las curvas de Lissajous, las ondas e interferencia de ondas y las aplicaciones en química y biología, además la programación y figuras obtenidas en Mathematica.

- | |
|--|
| <p align="center">5. Metodología</p> <ul style="list-style-type: none"> - Investigación de documentos relacionados a las oscilaciones masa resorte y las ondas. - Elaboración del trabajo que sustenta la programación en Mathematica - Creación de los manipulables o applets en Mathematica - Dar a evaluar los manipulables o applets a la página oficial de Wólfram Mathematica |
|--|

6. Conclusiones Estas aplicaciones para estudiantes sustentan y explican los conceptos de manejo de sistemas oscilatorios masa resorte y de ondas, permitiendo visualizar con un sistema teórico sus efectos físicos y matemáticos. Las aplicaciones además contienen modelos eficientes y manipulables del movimiento armónico simple, movimiento oscilatorio amortiguado, movimiento oscilatorio forzado. Se pueden estudiar y crear sistemas de ondas sinusoidales para ser aplicados de forma práctica y se muestra la aplicación en las moléculas triatómicas y en el modelo de ADN. Frente a los objetivos generales y específicos se completó un documento que registró las bases teóricas y los resultados del trabajo de grado.
--

Elaborado por:	Ramírez Molina, Leidy Tatiana; Romero Yara, José Rolando
Revisado por:	Harol Yesid Valencia Martínez

Fecha de elaboración del Resumen:	15	08	2017
--	----	----	------

Índice

Introducción	6
Justificación	8
Objetivos	9
General	9
Específicos	9
1. Antecedentes	10
1.1. Leyes de Newton	10
1.2. Mecánica Lagrangiana	11
1.3. Mecánica Hamiltoniana	15
2. Sistemas oscilatorios masa - resorte	17
2.1. Sistema masa resorte	19
2.2. Oscilador libre	20
2.3. Oscilador amortiguado	32
2.3.1. Oscilador subamortiguado	33
2.3.2. Oscilador con amortiguamiento crítico	36

2.3.3. Oscilador sobreamortiguado	38
2.4. Oscilador forzado	40
2.4.1. Oscilador libre forzado	41
2.4.2. Oscilador amortiguado forzado	45
2.5. Masa sujeta a dos resortes	50
3. Sistemas acoplados	56
3.1. Dos masas idénticas acopladas	56
3.1.1. Dos masas idénticas conectadas por tres resortes.	56
3.1.2. Dos masas idénticas conectadas por dos resortes	62
3.2. Tres masas idénticas acopladas	69
3.2.1. Tres masas idénticas conectadas por cuatro resortes.	69
3.2.2. Tres masas idénticas conectadas por tres resortes.	74
3.2.3. Tres masas idénticas conectadas por dos resortes.	77
3.3. Sistema de n masas idénticas acopladas	80
4. Curvas de Lissajous	82
4.1. Oscilador armónico simple de una dimensión	82
4.2. Oscilador armónico simple de dos dimensiones	84

4.3. Oscilador armónico simple de tres dimensiones	89
5. Deducción de la ecuación de onda	93
5.1. Solución de la ecuación clásica de onda	94
5.2. Ondas	98
5.2.1. Ondas electromagnéticas:	99
5.2.2. Ondas mecánicas:	99
5.3. Superposición de ondas	103
5.3.1. Interferencia constructiva	104
5.3.2. Interferencia destructiva	105
6. Ondas no sinusoidales:	110
6.1. Series de Fourier	110
6.1.1. Funciones pares e impares	111
7. Aplicaciones	118
7.1. Moléculas triatómicas:	118
7.2. Modelo de Englander et al.	121
8. Conclusiones	125

Bibliografía	127
ANEXOS	129
Anexo 1: Jules Antoine Lissajous	129
anexo 2: Jean Baptiste Joseph Fourier	129
Anexo 3: Solución ecuación diferencial sistema masa resorte	130
Anexo 4: Solución ecuaciones desacopladas	135
Anexo 5: Amplitud y ángulo de fase de ecuaciones desacopladas	148
Anexo 6: Solitones kink y antikink en la ecuación de Sine-Gordon	151
Anexo 7: Códigos de programación de manipulables	154
Anexo 7.1: Oscilatorios libre, amortiguado y forzado	154
Anexo 7.2: Sistemas acoplados que involucran dos masas	178
Anexo 7.3: Sistema que involucra tres masas	202
Anexo 7.4: Oscilador armónico simple	210
Anexo 7.5: Figuras de Lissajous en dos dimensiones	212
Anexo 7.6: Figuras de Lissajous en tres dimensiones	215

Anexo 7.7: Interferencia de ondas	219
Anexo 7.8: Series de Fourier	224
Anexo 7.9: Soluciones kink y anti-kink	231

Introducción

Se presenta un escrito en el que se muestran los movimientos relacionados, por ejemplo, con el movimiento periódico de los pistones de un motor, que se llama movimiento oscilatorio, y se muestra a través del estudio del sistema masa resorte, por otro lado se tratan las ondas mecánicas y su superposición, finalmente se estudian las ondas sinusoidales y no sinusoidales, utilizando las series de Fourier.

Este trabajo escrito sustenta la programación hecha en Mathematica, que es uno de los softwares utilizados en la actualidad para realizar gráficas de funciones, cálculos numéricos y analíticos; de sumatorias, productorias, derivadas e integrales; exploraciones geométricas, análisis de datos estadísticos, estudios geográficos y financieros, entre otro. Es un software diseñado no sólo para hacer procesos algebraicos, cálculos complejos y crear manipulables, sino que además es empleado como editor de imágenes, analizador de audio, compilador de datos estadísticos y análisis, herramienta de diseño de piezas mecánicas y estructuración de modelos robóticos.

Cuando se estudia el oscilador armónico que surge de emplear las leyes de Newton y Hooke o la Mecánica Lagrangiana, se obtiene una ecuación diferencial de segundo grado que se traduce en dos soluciones, cuya expresión viene dada en términos de senos y/o cosenos, que comprenden la solución de la ecuación diferencial y que depende de si el oscilador es libre o no.

Se hace necesario el modelado matemático con ayuda de Mathematica, para resolver situaciones problema de sistemas oscilatorios y de ondas, a partir de ecuaciones

diferenciales, porque no se encuentran con facilidad programas de modelado que sirvan de apoyo para la comprensión de algunos de los conceptos físicos. Dentro del campo profesional, se evidencia que el uso de la tecnología en el aula de clase es fundamental, por eso el interés de este trabajo es mostrar la aplicación matemática que tienen las oscilaciones y las ondas, y como estos temas tienen aplicaciones en la química y la biología.

En los procesos matemáticos tratados, está la solución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones desacopladas, que permiten encontrar las ecuaciones de movimiento de los sistemas que se presentan. En el apartado de ondas se evidencia la solución de una ecuación de onda en el campo matemático, y en el campo de la física se evidencian los resultados en las curvas de Lissajous.

Los resultados obtenidos en el trabajo escrito, permitieron hacer la programación en Mathematica, para crear los applets que modelan estas situaciones, en campos como física, química y biología. Los resultados logrados en Mathematica son mostrados a través de las figuras y los códigos de programación presentados en cada sección.

Justificación

El uso de herramientas tecnológicas para la creación de applets o manipulables, admite una mayor comprensión de temas matemáticos, físicos, biológicos, económicos, entre otros, porque permiten ver lo que sucede cuando se hace un análisis de diversas situaciones cambiando una o varias condiciones iniciales del problema. Programas como Mathematica permiten hacer ese tipo de análisis con gran detalle.

Gracias a que en Mathematica es posible realizar gráficos de funciones con coordenadas cartesianas, esféricas o polares, debido a que existen comandos específicos para cada uno de estos tipos de gráficos, para la mayoría de los procesos matemáticos existe una sentencia específica, además es uno de los programas más dinámicos, y como su nombre lo indica especializado en los procesos matemáticos y/o científicos, debido a que cuenta con la sentencia Manipulate, en la que basta determinar cuáles son las variables de la función que se quiere manipular y éstas aparecen como deslizadores.

El uso de nuevas herramientas tecnológicas contribuyen en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y la física, porque ayudan a entender con mayor facilidad y fluidez, los conceptos a estudiar, y esto se debe a que a los estudiantes les agradan estos entornos, que les permiten explorar y realizar conjeturas. Los estudiantes pueden interactuar con los manipulables de forma virtual, lo que permite así la exploración y planeación de múltiples escenarios.

Objetivos

A continuación se presenta el objetivo general y los objetivos específicos que hacen parte del trabajo.

General

Desarrollar y elaborar applets o manipulables, en Mathematica, que permitan visualizar los sistemas oscilatorios y de ondas, apoyados con un sustento teórico, tanto físico como matemático.

Específicos

- Modelar y crear manipulables del movimiento armónico simple.
- Estudiar y realizar manipulables del movimiento oscilatorio amortiguado.
- Modelar y crear manipulables del movimiento oscilatorio forzado.
- Estudiar y realizar los sistemas de ondas sinusoidales y su aplicación.
- Estudiar y realizar manipulables de los sistemas de ondas no sinusoidales y su aplicación.
- Estudiar las aplicaciones de los sistemas oscilatorios en otros campos científicos como la biología y la química.
- Realizar un documento en el cual se plasmen las bases teóricas y los resultados obtenidos en el trabajo de grado.

1. Antecedentes

Se hace una descripción de las bases teóricas de las oscilaciones y las ondas que sustentan la programación y trabajo realizado en Mathematica, los resultados obtenidos son incluidos como un apartado en cada tema, mostrado a través de gráficos. Además, se muestran ejemplos en los que los resultados son útiles. En la primera parte se hace una breve descripción de las leyes de Newton, la ecuación de Lagrange y una pequeña introducción a la mecánica Hamiltoniana, utilizadas en de los sistemas oscilatorios, que se presentarán más adelante.

1.1. Leyes de Newton

También llamadas Leyes de Movimiento, permiten describir el movimiento de astros, proyectiles y el funcionamiento mecánico de las máquinas en general, los problemas de mecánica presentados en el escrito pueden ser resueltos con las leyes de Newton. Los tres principios que describen esta ley son:

Definición 1.1. *Primera Ley: (ley de inercia), todo cuerpo que se encuentre en reposo o en movimiento rectilíneo a velocidad constante, debe permanecer en reposo o en su movimiento a velocidad constante, a menos de que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él:*

$$\sum \vec{F} = \hat{0},$$

y cada componente de la fuerza es nula:

$$\sum \vec{F}_x = \hat{0},$$

$$\sum \vec{F}_y = \hat{0},$$

expresado de forma vectorial como:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{x} = \vec{a} = \hat{0}. \quad (1)$$

Definición 1.2. *Segunda Ley: si una fuerza externa actúa sobre un cuerpo, este se acelera. La dirección de la aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. El vector de fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración. Se puede escribir de forma matemática como:*

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (2)$$

en estos casos la masa es una magnitud constante [7].

Definición 1.3. *Tercera ley: si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, entonces, B ejerce una fuerza sobre A. Estas dos fuerzas tiene la misma magnitud pero sentidos opuestos [7].*

$$|\vec{F}_{AB}| = |-\vec{F}_{BA}|. \quad (3)$$

1.2. Mecánica Lagrangiana

Para hablar de la mecánica lagrangiana es necesario mencionar a Joseph Louis de Lagrange (Piamonte 1736 - París 1813), quien aplica sus conocimientos matemáticos en la sistematización de la mecánica, que anteriormente había tratado Galileo (1638), utilizó el análisis de variaciones, que había desarrollado con Euler, deduciendo así las ecuaciones generales con las que se pueden resolver problemas de mecánica [5], como se explicará a continuación.

Considere un sistema de N partículas, cada una de las cuales tiene, coordenadas $\{\vec{r}_i\}$. El problema consiste en encontrar $\vec{r}_i(t)$, es decir encontrar $3N$ movimientos.

Las coordenadas generalizadas son el mínimo conjunto q_i de n variables en función de las cuales pueden escribirse los $\vec{r}_i$.

$$\vec{r}_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t),$$

a ese número mínimo se le llama grados de libertad de un sistema, que están ligados a las coordenadas generalizadas. Un sistema con k ecuaciones de ligadura y N partículas se define como $g = 3N - k$, donde g son los grados de libertad, $3N$ los movimientos posibles de cada partícula (el 3 indica el movimiento en las tres dimensiones) y k representa el número de ecuaciones de la ligadura. Los grados de libertad definen el número de coordenadas independientes que caracterizan el sistema.

Retomando, $g = 3N - k \Rightarrow \{\vec{q}_j\}$, coordenadas generalizadas q_j , con $j = 1, \dots, g$. Se establece una relación entre los vectores y las coordenadas generalizadas, utilizando las ecuaciones de ligadura:

$$f(\vec{r}, \vec{r}, t) \rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad (4)$$

si se deriva la ecuación (4) con respecto a t , se obtiene:

$$\vec{v}_i = \{\dot{\vec{r}}_i\} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

Donde $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial t} = \vec{\nabla}_j r_i$. En la ecuación (4) se están considerando sólo las variaciones sobre las coordenadas y no sobre el tiempo, entonces

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (5)$$

utilizando el principio D'Alembert, si se aplica una determinada fuerza, ésta provoca

un cambio en los estados dinámicos de las partículas.

Este principio incluye las causas y los efectos, de un todo, que permiten transformar un sistema estático en uno dinámico [5], que es mucho mas fácil de solucionar de forma matemática, $\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{p}) \delta \vec{r}_i = 0$ entonces, reemplazando el resultado obtenido en la ecuación (5),

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{p}) \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^g \left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - m \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j . \quad (6)$$

Se definen las fuerzas generalizadas como,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} ,$$

teniendo en cuenta el principio de los trabajos virtuales (se define como el producto $\delta W_{virtual} = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$), que se utiliza en un sistema en equilibrio y que busca anular las suma de los trabajos producidos por las fuerzas, que se ejercen sobre cada partícula del sistema. De forma matemática $\sum \vec{F}_T \delta \vec{r}_i = \sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum \vec{f}_i \delta \vec{r}_i = 0$, quiere decir que, $\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \quad \delta \vec{r}_i$.

Además:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \right) - \vec{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \right) \right\} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left\{ \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \right\} = \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} . \end{aligned}$$

donde $K = \frac{1}{2} m v^2$ es la energía cinética de la masa en movimiento .

Los resultados anteriores, se pueden sustituir en la ecuación (6), como sigue:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{p}) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{p}) \sum_{j=1}^g \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j^2} \delta q_j = \sum_{j=1}^g \left\{ Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \right\} = 0,$$

es decir,

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q_j} \right). \quad (7)$$

La ecuación (7) se conoce como la ecuación de Lagrange [5]. Las fuerzas se pueden expresar como el gradiente del potencial, para este caso, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla} U$, siendo U la energía potencial, entonces la ecuación (7) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

sea que U no depende de $\vec{q}_j$, por lo que,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K - U) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial q_j} (K - U) \right] = 0, \quad (8)$$

definiendo así una nueva función

$$L = K - U, \quad (9)$$

que representa el Lagrangiano, que muestra la diferencia entre la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) del sistema y que debe cumplir,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

donde L es una función escalar.

1.3. Mecánica Hamiltoniana

La mecánica lagrangiana consiste en una función, que es función de coordenadas $\{q_i\}$ generalizadas, y velocidades $\{\dot{q}_i\}$, $L = L(\{q_i, \dot{q}_i\}, t)$, por otro lado la mecánica hamiltoniana consiste en utilizar como variables $\{q_i, p_i\}$, por lo que se sustituye la velocidad por los momentos generalizados p_i .

Se va a definir la mecánica lagrangiana como sigue,

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L, \quad (11)$$

despejando las coordenadas generalizadas,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(\{q_i, \dot{q}_i\}; t) \rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q_i, p_i\}; t),$$

sustituyendo en la ecuación (11),

$$H(\{q_i, p_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \sum_i \dot{q}_i(\{q_i, p_i\}, t) p_i - L(\{q_i, \dot{q}_i(\{q_i, p_i\}, t)\}, t). \quad (12)$$

entonces el hamiltoniano quedo expresado en sus coordenadas $\{q_i, p_i\}$, por lo que,

$$L = L(\{q_i, \dot{q}_i\}; t) \rightarrow H = H(\{q_i, p_i\}; t).$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento que satisfacen las coordenadas y los momentos generalizados, se calcula el diferencial de H con respecto al tiempo, derivando

$$H, \quad dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (13)$$

utilizando la ecuación (12),

$$dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

$$dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

para el ultimo paso se utilizó, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$ y $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, si se simplifica y se iguala con la ecuación (13),

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (14)$$

luego los coeficientes diferenciales,

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s., \quad (15)$$

con $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones de Hamilton. Este apartado se utilizara en la sección de aplicación del modelo de Englandes et al.

2. Sistemas oscilatorios masa - resorte

En este apartado se describen los sistemas oscilatorios y su aplicación, correspondiente a los sistemas masa resorte horizontal y sistemas acoplados con n masas idénticas. Si una partícula se mueve a lo largo del eje x , esta presenta un movimiento armónico simple, cuando su desplazamiento x , desde la posición de equilibrio, varia con el tiempo de acuerdo a la función:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (16)$$

donde A representa la amplitud, ω la frecuencia, y φ_0 es el ángulo de fase, A , ω y φ , son constantes. El máximo desplazamiento de la posición de equilibrio ocurre cuando la función seno de $(\omega t + \varphi_0)$ es ± 1 por lo que,

$$x(t)_{max} = \pm A,$$

la amplitud A y el ángulo de fase φ_0 están determinados por las condiciones iniciales.

Como la función seno es periódica $x(t) = x(t + T)$, luego,

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi_0) &= \sin[\omega(t + T) - \varphi_0] = \sin(\omega t + \varphi_0 + \omega T) \\ &= \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega T) + \sin(\omega T) \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\cos(\omega T) = 1 \Rightarrow \omega T = 2\pi,$$

en donde se debe cumplir que,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (17)$$

la función es periódica en el tiempo y su frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. En el momento en que $t = 0$ se establecen las magnitudes de posición x_0 y velocidad v_0 como se

muestra a continuación:

Partiendo de la ecuación (16),

$$x_0 = A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \sin(\varphi_0) ,$$

la distancia cuando $t = 0$ queda establecida como,

$$x_0 = A \sin(\varphi_0) . \quad (18)$$

De forma similar para la velocidad, si $v_0 = \frac{dx}{dt} |_{t=0}$, entonces,

$$v_0 = \omega A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) ,$$

la velocidad cuando $t = 0$ queda definida como,

$$v_0 = \omega A \cos(\varphi_0) . \quad (19)$$

Con las ecuaciones (18) y (19) se puede calcular la amplitud A y el ángulo de fase φ_0 .

Para el caso de la amplitud (A), se tiene que,

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin(\varphi_0) & \sin(\varphi_0) &= \frac{x_0}{A} \\ v_0 &= \omega A \cos(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) &= \frac{v_0}{\omega A} \end{aligned} ,$$

como $\sin^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0) = 1$,

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega A}\right)^2 = 1 ,$$

con lo que se concluye que,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} . \quad (20)$$

Ahora bien, para el ángulo φ_0 , se tiene que,

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin(\varphi_0) & A &= \frac{x_0}{\sin(\varphi_0)} \\ v_0 &= \omega A \cos(\varphi_0) & A &= \frac{v_0}{\omega \cos(\varphi_0)} \end{aligned},$$

partiendo de,

$$\frac{x_0}{\sin(\varphi_0)} = \frac{v_0}{\omega \cos(\varphi_0)},$$

se concluye que,

$$\varphi_0 = \arctan \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right). \quad (21)$$

Aunque, se ha definido el sistema armónico simple en términos de la función seno, también se puede definir en términos de coseno, como se muestra a continuación:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (22)$$

la posición y velocidad, cuando $t = 0$, son respectivamente,

$$x_0 = A \cos(\varphi_0) \quad v_0 = -\omega A \sin(\varphi_0),$$

se pueden definir la amplitud y el ángulo φ_0 , respectivamente, como sigue,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \varphi_0 = \arctan \left(-\frac{v_0}{\omega x_0} \right),$$

2.1. Sistema masa resorte

En el sistema masa resorte, cuando se aleja la masa de la posición de reposo ésta vuelve a la posición de equilibrio, describiendo oscilaciones sinusoidales o sinusoidales amortiguadas en torno a esa posición. A continuación se explican los tres casos en que se presenta este sistema:

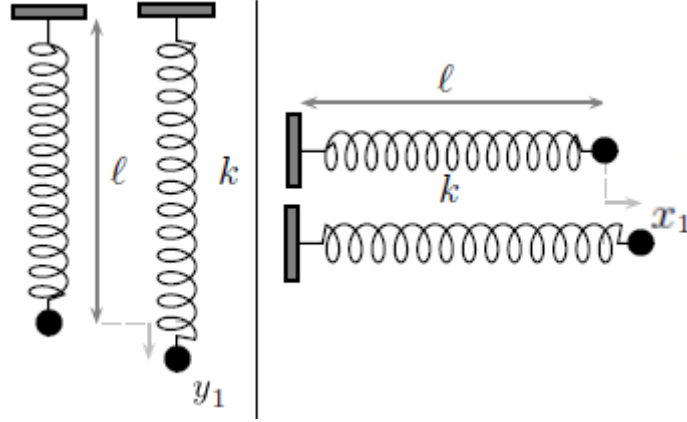


Figura 1: Masa sujeta a un resorte

2.2. Oscilador libre

En un sistema masa resorte horizontal, se considera una masa m , con movimiento en una dimensión, en donde el movimiento tiene un grado de libertad, su masa se considera despreciable y su comportamiento es lineal (obedece la Ley de Hooke [7]), se quiere a encontrar la ecuación de movimiento que describe el sistema.

Se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica (U) asociada al resorte, como se ve a continuación,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx^2,$$

de esta forma la ecuación lagrangiana del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

las fuerzas generalizadas son nulas $Q = 0$ ya que no hay rozamiento, se obtiene,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (23)$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Se observa que la ecuación (23) es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyas condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$, cuando $t = 0$, son:

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

la solución general de la ecuación diferencial (23), que se describe en el anexo 7 es:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (24)$$

Para hallar los valores de A y B , se determina la derivada de la ecuación (24),

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t),$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, aplicando las condiciones iniciales,

$$x(0) = A \Rightarrow A = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 B \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}, \quad \text{si} \quad \omega_0 = \frac{k}{m} \Rightarrow B = \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}},$$

de esta forma la solución general es:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\frac{k}{m}t\right) + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\frac{k}{m}t\right). \quad (25)$$

También se puede encontrar una función solución, particular, que se puede escribir de la forma,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \text{luego} \quad x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0 \right),$$

donde la amplitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \right)^2} \quad \text{y} \quad \varphi_0 = \arctan \left(-\frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Para el sistema masa resorte vertical, se suspende verticalmente un resorte y se fija una masa m del extremo libre, el alargamiento del resorte depende del peso de la masa. Por la ley de Hooke, el resorte ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s y se expresa como $F = ks$, donde k es la constante de elasticidad [12]. Cuando la masa m se

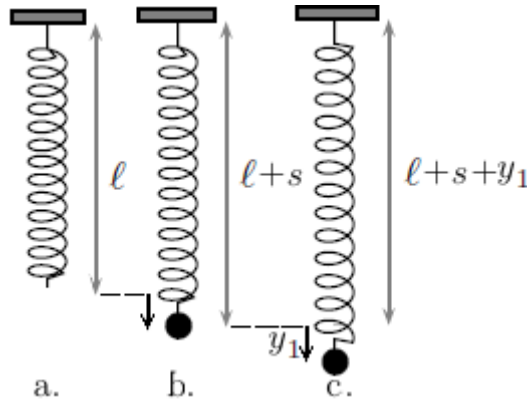


Figura 2: Masa sujeta a un resorte vertical

une al resorte vertical, el resorte se alarga una cantidad s , logrando la posición de equilibrio entonces el peso se equilibra a través de la fuerza restauradora ks , como se muestra en la figura 2b., el peso está definido por $W = mg$, además la condición de equilibrio es $mg = ks$. Como se ve en la figura 2c. la masa se desplaza una cantidad y de la posición de equilibrio, entonces la fuerza restauradora del resorte es $k(s + y)$.

Utilizando la mecánica Lagrangiana se halla la ecuación de movimiento:

Se determina energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U),

$$K = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}k(s + y^2) - mg = \frac{1}{2}ks + ky^2 - mg = \frac{1}{2}k(s + y^2) - mg,$$

de esta forma la ecuación lagrangina del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2,$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

las fuerzas generalizadas son nulas $Q = 0$ ya que no hay rozamiento, se obtiene,

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \tag{26}$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Como las ecuaciones de movimiento y su solución son completamente análogas al sistema masa resorte horizontal en este caso y en los presentados más adelante, se tiene para el oscilador libre, $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ y $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $y_0 = y$ con $t = 0$ y $v_0 = \dot{y}$ con $t = 0$.

Diagrama de fase:

La descripción de los movimientos dinámicos son representaciones $(x, \dot{x})$ (al rededor de un punto fijo), que pueden ser consideradas como coordenadas de un espacio bidimensional, llamado espacio de fase. Los espacios de fase son espacios con $2n$ dimensiones, donde n es el número de grados de libertad.

Las curvas en el espacio fase representan la evolución temporal del sistema con unas condiciones iniciales dadas. El diagrama de fase de un sistema, son todos los caminos posibles de las diferentes condiciones iniciales que puedan darse. Por ejemplo para el caso del oscilador libre se tiene:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) ,$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) ,$$

son las ecuaciones paramétricas de cada una de las curvas que conforman el diagrama de fase de un oscilador libre en una dimensión. Si se elimina el tiempo en las dos ecuaciones, se obtienen las curvas del diagrama de fase, para este caso tendría la forma:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1 ,$$

lo que quiere decir que las curvas del diagrama de fase del oscilador libre son elipses de semiejes A y $A\omega$, y su trayectoria es en el sentido de las manecillas del reloj.

Como es un punto fijo del espacio de fase el que describe el estado del sistema y como este se moverá siguiendo una determinada curva a lo largo del espacio fase, entonces se puede ver lo que ocurre cuando se perturba al rededor de un punto fijo, para sistemas con un grado de libertad.

Sea el sistema autónomo,

$$\dot{q} = f(q, p) ,$$

$$\dot{p} = g(q, p) ,$$

cuando el flujo en el espacio fase es estacionario, se denomina puntos fijo. En un punto fijo se cumple que (q_0, p_0) :

$$f(q_0, p_0) = 0 ,$$

$$g(q_0, p_0) = 0.$$

Lo que ocurre cuando se perturba al rededor de un punto fijo es,

$$\delta \dot{q} = f_q(q_0, p_0)\delta q + f_p(q_0, p_0)\delta p + \dots,$$

$$\delta \dot{p} = g_q(q_0, p_0)\delta q + g_p(q_0, p_0)\delta p + \dots,$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q(q_0, p_0) & f_p(q_0, p_0) \\ g_q(q_0, p_0) & g_p(q_0, p_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}, \quad (27)$$

la matriz,

$$M = \begin{pmatrix} f_q(q_0, p_0) & f_p(q_0, p_0) \\ g_q(q_0, p_0) & g_p(q_0, p_0) \end{pmatrix},$$

se llama matriz de estabilidad, si $\vec{E} = (\delta q, \delta p)$, la ecuación (27), queda reescrita

como,

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = M\vec{E},$$

que es un sistema lineal de ecuaciones de lineal que tiene una solución general de la forma,

$$\vec{E} = c_1 \vec{D}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{D}_2 e^{\lambda_2 t},$$

en donde $\vec{D}_i$ son los autovectores y λ_i los autovalores de la matriz M . Los vectores $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ son una base local del plano fase.

Clasificación de puntos fijos

Si se supone que el polinomio característico de la ecuación diferencial $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ lineal homogénea, donde b y c son constantes, es:

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0,$$

entonces,

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = a^2 - 4b,$$

por lo que los puntos se clasificaran dependiendo de los signos de a , b , y Δ . Si los λ son imaginarios puros, la perturbación permanecer acotada y girara al rededor del punto fijo, por el contrario si los λ son reales, la solución crecerá o decrecerá exponencialmente.

- **Nodo estable:** Se le llama nodo estable cuando $a < 0$ y $\Delta > 0$. λ_1 y λ_2 son reales negativos con $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

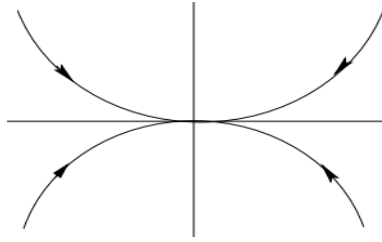


Figura 3: Nodo estable

Como se observa en la figura 3, la perturbación decae en todas las direcciones entonces el flujo converge hacia el punto fijo.

- **Nodo inestable:** Se le llama nodo inestable cuando $a < 0$, $0 < b < \frac{a^2}{4}$, y $0 < \Delta < |a|$. λ_1 y λ_2 son reales positivos con $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

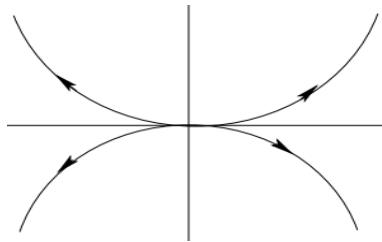


Figura 4: Nodo Inestable

Se observa en la figura 4, la perturbación crece en todas las direcciones entonces el flujo crece exponencialmente.

- **Punto hiperbólico:** Es un punto hiperbólico cuando $b < 0$. λ_1 y λ_2 son reales con $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

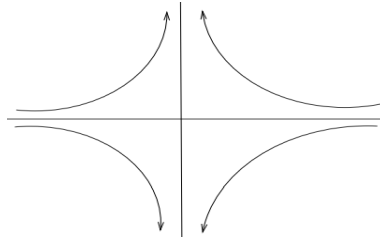


Figura 5: Punto hiperbólico

En la figura 5, las perturbación se alejan del origen.

- **Espiral estable:** Ocurre cuando $a < 0$, y $\Delta < 0$. λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$.

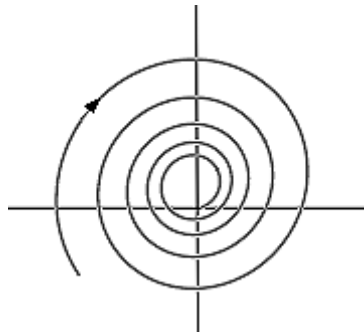


Figura 6: Espiral estable

Como se observa en la figura 6, el flujo gira en forma de espiral acercándose al punto fijo.

- **Espiral inestable:** Sucede cuando $a > 0$, y $\Delta > 0$. λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, además $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

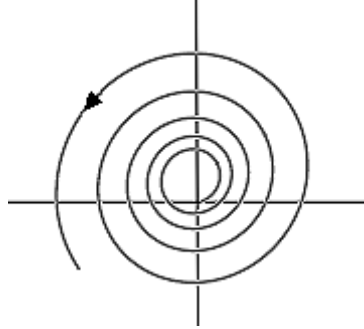


Figura 7: Espiral estable

En la figura 7, el flujo gira en forma de espiral alejándose del punto fijo.

- **Punto elíptico:** Sucede cuando $a = 0$ y $b > 0$. λ_1 y λ_2 son puramente imaginarios $\lambda_1 = +i\sqrt{b}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{b}$. La figura 8, muestra que el flujo gira al rededor

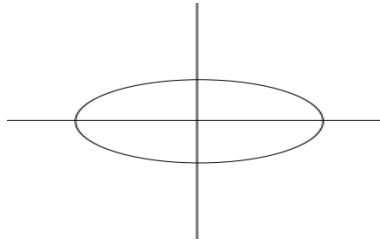


Figura 8: Punto eliptico

de un punto fijo, formando una elipse.

- **Puntos degenerados:** Ocurre cuando $\Delta = 0$. λ_1 y λ_2 son iguales y reales $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$. Pueden ocurrir dos casos, uno cuando las líneas de flujo son rectas y otro cuando son curvas.

Para el caso en el que las líneas de flujo son rectas, se presenta una estrella estable $a < 0$ y las líneas convergen al punto fijo como se muestra en la figura

9a; en el caso de la estrella inestable $a > 0$, y las líneas divergen del punto fijo como se ve en la figura 9b.

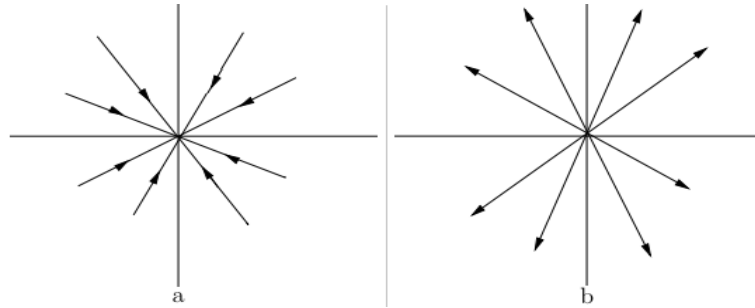


Figura 9: Punto eliptico

Para el caso en el que las líneas de flujo son curvas, se presenta un nodo estable $a < 0$ y las líneas convergen al punto fijo como se muestra en la figura 10a; en el caso del nodo inestable $a > 0$, y las líneas divergen del punto fijo como se ve en la figura 10b.

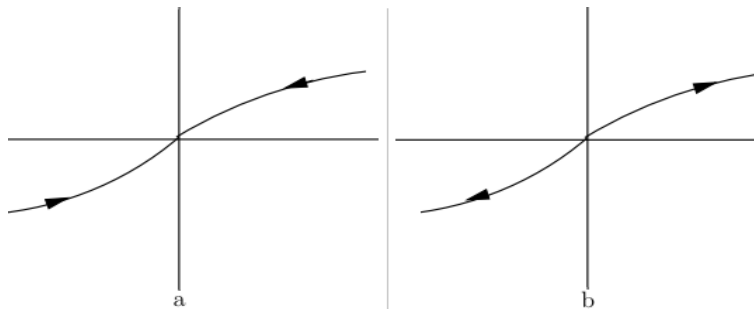


Figura 10: Punto eliptico

Ejemplo 1. Sistema masa resorte horizontal - libre

Una masa de 2,0 kg, se encuentra atada a un resorte cuya constante de elasticidad es de $4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. En $t = 0$ s el resorte se elonga 0,50 m y se lanza hacia su punto de

equilibrio con una velocidad inicial de $1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determine la ecuación de movimiento $x(t)$.

Para solucionar el problema se tiene $m = 2,0 \text{ kg}$ y $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, se deduce que la ecuación de movimiento que describe el sistema masa resorte horizontal libre está dada por,

$$2\ddot{x} + 4x = 0, \quad \ddot{x} + 2x = 0,$$

el desplazamiento inicial y la velocidad inicial son,

$$x(0) = \frac{1}{2}m \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = -1\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

el signo negativo implica el sentido de la velocidad inicial. Ahora $\omega = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$, luego la solución general de la ecuación diferencial y su derivada son:

$$x(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t),$$

si se aplican las condiciones iniciales a $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ se obtiene $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\sqrt{2}$, la ecuación de movimiento es,

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t). \quad (28)$$

El código Mathematica utilizado para este ejemplo, se describe a continuación:

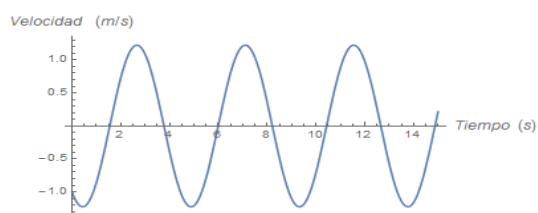
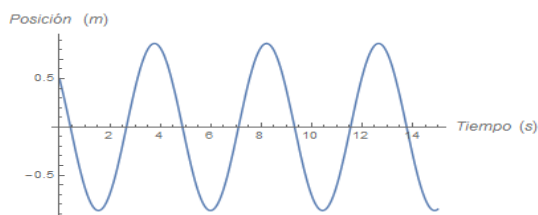
Mathematica 1: Solución de la ecuación $x''(t) + 2x(t) = 0$ con condiciones $x(0) = 1/2$ y $x'(0) = -1$

```
1 a = DSolve[{x''[t] + 2 x[t] == 0, x[0] == 1/2, x'[0] == -1}, x, t]
```

En la gráfica posición en función tiempo, se observa que el comportamiento de la gráfica, representa a un movimiento armónico simple y corresponde a la ecuación (28).

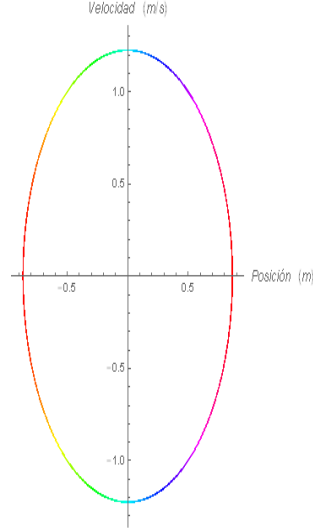
Mathematica 2: Gráfica de la posición $x(t)$ y la velocidad $x'(t)$

- 1 **Plot[Evaluate[x[t] /. a, {t, 0, 15}], PlotRange -> All, ImageSize -> {400, 300},
AxesLabel -> {Style[Tiempo (s), Italic, 12], Style["Posición (m)", Italic, 12]}**
 - 2 **Plot[Evaluate[x'[t] /. a, {t, 0, 15}], PlotRange -> All, ImageSize -> {400, 300},
AxesLabel -> {Style[Tiempo (s), Italic, 12], Style["Velocidad (m/s)", Italic, 12]}**
-



Mathematica 3: Trayectoria de la partícula en el espacio de fase (velocidad-posición)

- 1 **ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. a, {t, 0, 50}], ColorFunction -> Hue, AxesLabel
-> {Style["Posición (m)", Italic, 12], Style["Velocidad (m/s)", Italic, 12]}**
-



2.3. Oscilador amortiguado

Para este caso se presenta una fuerza de amortiguamiento por fricción que es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo oscilante. Sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, luego basta adicionar un término a las ecuaciones de movimiento, $F_f = -b\vec{v}_x$ en donde, la velocidad está definida por $\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt}$ y b es una constante positiva para describir la intensidad de la fuerza de amortiguamiento [7]. Las unidades en el S.I. de $[b] = \frac{N}{m} s$.

La ecuación de movimiento se puede encontrar, utilizando la mecánica lagrangiana, que se determina a partir de la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{y} \quad Q = -bx ,$$

Donde Q son las fuerzas generalizadas, que representa las fuerzas de amortiguamien-

to, de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

dado que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q,$$

se obtiene,

$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}, \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

reemplazando $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $2\Gamma = \frac{b}{m}$,

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{29}$$

Se observa que la ecuación (29), es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, la solución general de esta ecuación diferencial, se describe en el anexo 7, donde se evidencian tres casos, $\omega^2 > \Gamma^2$, $\omega^2 < \Gamma^2$ y $\omega^2 = \Gamma^2$, relacionados con el movimiento oscilatorio subamortiguado, sobreamortiguado y amortiguamiento crítico, respectivamente.

2.3.1. Oscilador subamortiguado

Para el caso en que $\omega^2 > \Gamma^2$, y cuyas condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$, cuando $t = 0$, son:

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

la solución general de la ecuación diferencial y su derivada son:

$$x(t) = e^{-\Gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)] ; \quad \dot{x}(t) = -\Gamma e^{-\Gamma t} [-A\omega_1(\sin \omega_1 t) + B\omega_1 \cos(\omega_1 t)] ,$$

con $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$, aplicando las condiciones iniciales y encontrando su derivada,

$$x(0) = A \Rightarrow A = x_0; \quad \dot{x}(0) = -\Gamma B \omega_1 \Rightarrow B = -\frac{\dot{x}_0}{\Gamma \omega_1},$$

si, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ entonces,

$$B = -\frac{\dot{x}_0}{\Gamma \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}},$$

reescribiendo la solución general:

$$x(t) = e^{-\Gamma t} \left[x_0 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} t \right) - \frac{\dot{x}_0}{\Gamma \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} t \right) \right], \quad (30)$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, y $\Gamma = \frac{b}{2m}$.

La particularidad de las oscilaciones amortiguadas es que su amplitud ya no es constante, pues disminuye con el tiempo, si el valor de b va en aumento entonces la amplitud disminuye y su frecuencia angular es menor, cuando b es muy grande tiende a cero, esto ocurre cuando $\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0$, se podría concluir que, $b = 2\sqrt{km}$.

Ejemplo 2. Sistema masa resorte horizontal - subamortiguado

Una masa que pesa 0,5 kg esta unida a un resorte. La constante de elasticidad del resorte es de 5,0 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Si la masa se elonga 2,0 m de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos de $x(t)$ si se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea $b = 1 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$.

Los datos para solucionar este problema son, $m = 0,5 \text{ kg}$, $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $b = 1 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$, luego la ecuación diferencial de movimiento describe el sistema masa resorte horizontal es:

$$\frac{1}{2}\ddot{x} + \dot{x} + 5x = 0, \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0,$$

se puede comprobar que $\omega_0^2 > \Gamma^2$ con,

$$\omega_1 = \sqrt{10 - 1} = 3; \quad \Gamma = \frac{b}{2m} = 1,$$

$$x(t) = e^{-t}(A \cos 3t + B \sin 3t).$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = -2$ m y $\dot{x}(0) = 0 \frac{m}{s}$, entonces $A = -2$ y $B = -\frac{2}{3}$,

entonces,

$$x(t) = e^{-t} \left(-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right),$$

determina la ecuación de movimiento del sistema.

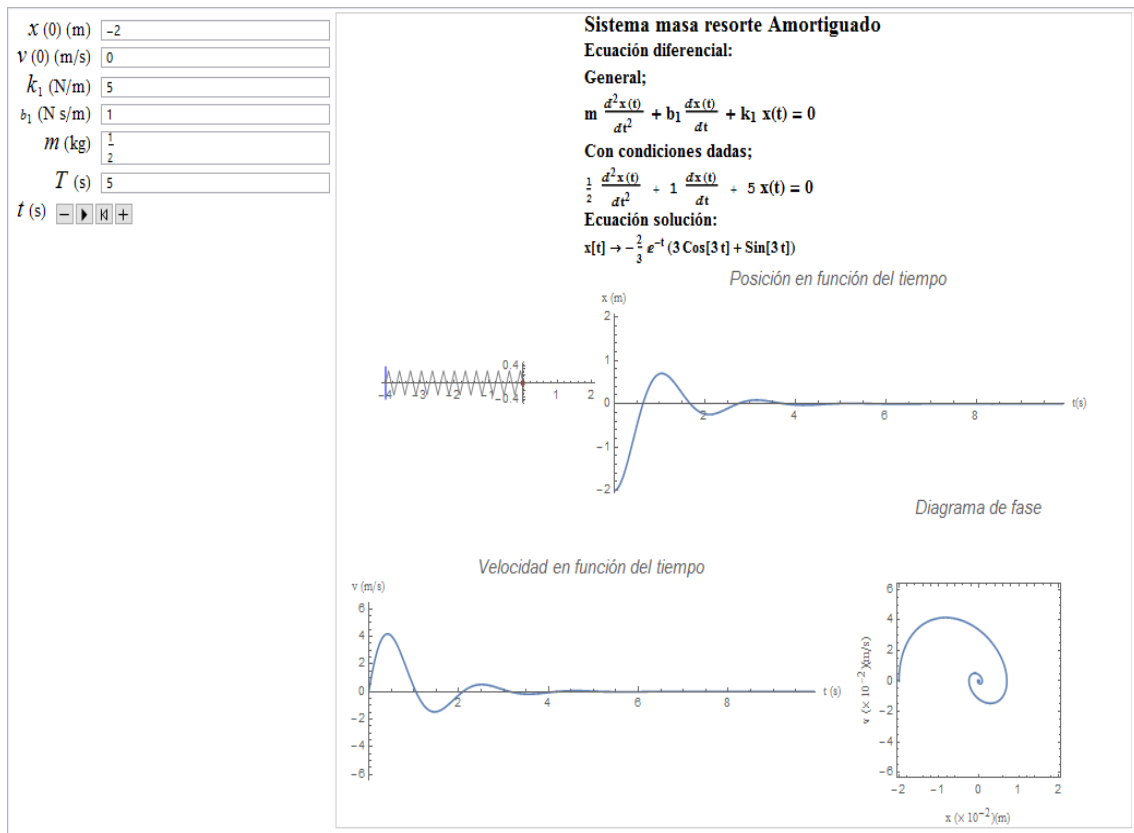


Figura 11: Ejemplo 2 Subamortiguado

Al utilizar Mathematica, es posible observar las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo estas se van decayendo suavemente hasta llegar a la posición de equilibrio, por otra parte en el diagrama de fase (velocidad en función de la posición)

se observa una curva que se dirige al origen del plano, todo esto debido al factor de amortiguamiento del sistema, como se muestra en la figura 11.

2.3.2. Oscilador con amortiguamiento crítico

Este caso se presenta cuando $\omega^2 = \Gamma^2$, cuyas condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$, cuando $t = 0$, son:

$$x(0) = x_0 \quad y \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

la solución general de la ecuación diferencial y su derivada son::

$$x(t) = e^{(-\Gamma t)}(At + B); \quad \dot{x}(t) = (-\Gamma) e^{(-\Gamma t)}(At + B) + Ae^{(-\Gamma t)},$$

aplicando las condiciones iniciales,

$$x(0) = B \Rightarrow B = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\Gamma B + A \Rightarrow \dot{x}_0 = -\Gamma B + A,$$

despejando A y reemplazando el valor de $B = x_0$,

$$A = \dot{x}_0 + \Gamma x_0,$$

de esta forma la solución general es:

$$x(t) = e^{(-\Gamma)t} [(\dot{x}_0 + \Gamma x_0)t + x_0]. \quad (31)$$

En este caso el sistema ya no oscila, lo que quiere decir que vuelve a la posición de equilibrio sin oscilar, cuando el objeto se desplaza y se suelta.

Ejemplo 3. Sistema masa resorte horizontal - amortiguado crítico

Una masa de 0,25 kg esta atada a un resorte, que tiene una constante de elasticidad $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velo-

cidad instantánea que actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento, si la masa se libera desde la posición de equilibrio lanzándola hacia la izquierda con una velocidad de $3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Para la solución de este problema se tiene la siguiente información $m = 0,25 \text{ kg}$, $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $b = 2,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}\text{s}$, la ecuación diferencial de movimiento describe el sistema masa resorte horizontal es entonces,

$$\frac{1}{4}\ddot{x} + 2\dot{x} + 16x = 0, \quad \ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0.$$

Ahora, si $b = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}\text{s}$, entonces $\omega^2 = \Gamma^2$ con, $x(t) = e^{-4t}(At + B)$.

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = 0 \text{ m}$ y $\dot{x} = -3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ respectivamente, el signo negativo indica que a la última condición se le aplica una velocidad hacia la izquierda. Se encuentra que $A = 0$ y $B = -3$ entonces

$$x(t) = -3te^{-4t},$$

que determina la ecuación de movimiento.

En la figura 12 es posible apreciar como, a causa del amortiguamiento crítico, la masa se dirige de la posición inicial hacia el punto de equilibrio del sistema manera inmediata, al analizar el diagrama de fase se observa que la curva inicia de manera suave y al transcurrir el tiempo se dirige de manera abrupta al origen.

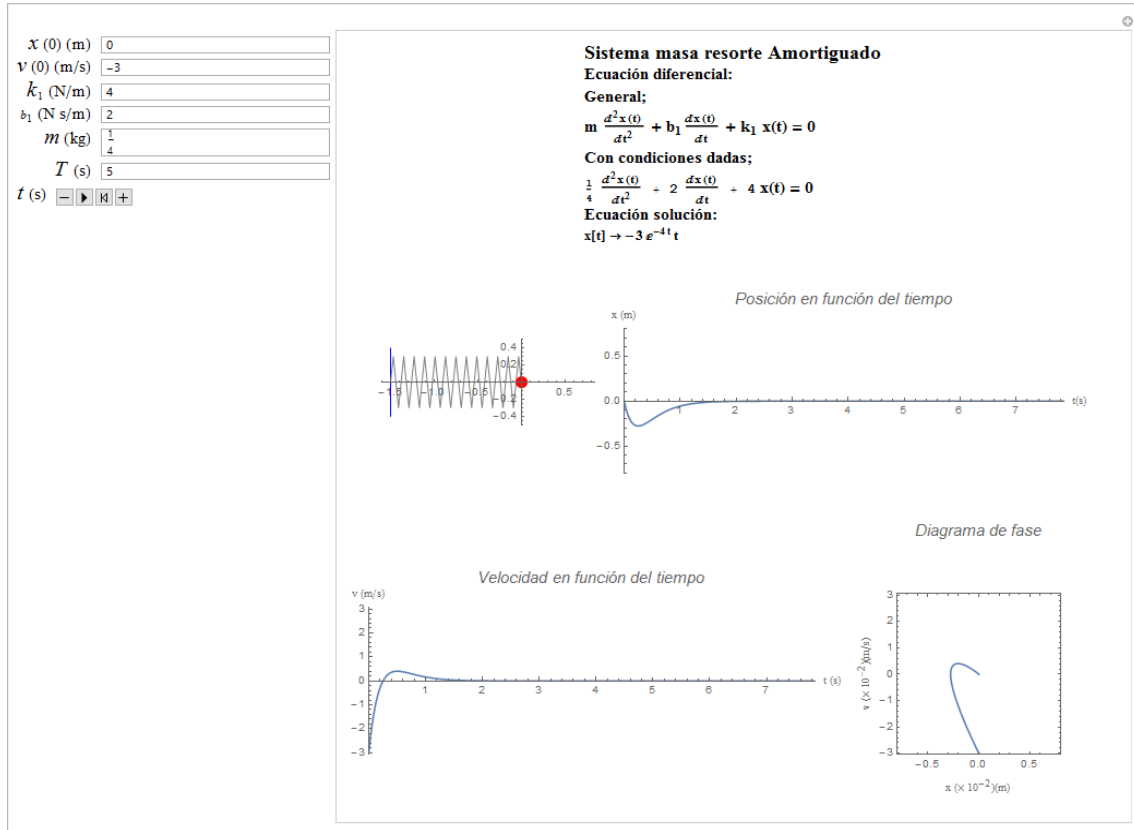


Figura 12: Ejemplo 3 Amortiguamiento Crítico

2.3.3. Oscilador sobreamortiguado

En el caso de $\omega^2 < \Gamma^2$, cuyas condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$, cuando $t = 0$, son:

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

la solución general de la ecuación diferencial y su derivada son:

$$x(t) = A e^{(-\Gamma + \omega_2)t} + B e^{(-\Gamma - \omega_2)t}; \quad \dot{x}(t) = (-\Gamma + \omega_2) A e^{(-\Gamma + \omega_2)t} + (-\Gamma - \omega_2) B e^{(-\Gamma - \omega_2)t},$$

con $\omega_2 = \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$, aplicando las condiciones iniciales, se obtiene:

$$x(0) = A + B,$$

$$x_0 = A + B, \quad (32)$$

$$\dot{x}(0) = (-\Gamma + \omega_2) A + (-\Gamma - \omega_2) B,$$

$$\dot{x}_0 = (-\Gamma + \omega_2) A + (-\Gamma - \omega_2) B, \quad (33)$$

despejando A y B de las ecuaciones (32) y (33),

$$A = \frac{\dot{x}_0 + x_0(\Gamma + \omega_2)}{2\omega_2}, \quad B = \frac{x_0(\omega_2 - \Gamma) - \dot{x}_0}{2\omega_2},$$

si $\omega_2 = \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$, de esta forma la solución general es:

$$x(t) = \left[\frac{\dot{x}_0 + x_0(\Gamma + \omega_2)}{2\omega_2} \right] e^{(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2})t} + \left[\frac{x_0(\omega_2 - \Gamma) - \dot{x}_0}{2\omega_2} \right] e^{(-\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (34)$$

Este sistema, que oscila con una amplitud constante decreciente, se presenta cuando $b > 2\sqrt{km}$, tampoco se presenta oscilación y el sistema regresa al equilibrio con más lentitud, que en el amortiguamiento crítico.

Ejemplo 4. Sistema masa resorte horizontal - Sobreamortiguado

En un sistema masa resorte horizontal cuyas condiciones iniciales están dadas por $\omega_0^2 = \frac{1}{10}$, $2\Gamma = \frac{3}{4} \frac{Ns}{mKg}$, $x(0) = -1$ y $\dot{x}_0 = -\frac{10}{9}$. Halle la ecuación de movimiento $x(t)$.

Se puede determinar la ecuación diferencial del sistema, $\ddot{x} + \frac{3}{4}\dot{x} + \frac{1}{10}x = 0$, de esta manera, se identifica que el sistema es sobreamortiguado. La ecuación de movimiento esta dada por,

$$x(t) = \frac{1}{234} \left[(-117 - 53\sqrt{65})e^{-\frac{3-\sqrt{\frac{13}{5}}}{8}t} - (-117 + 53\sqrt{65})e^{-\frac{3+\sqrt{\frac{13}{5}}}{8}t} \right].$$

Utilizando Mathematica: En la figura 13, se pueden visualizar los diferentes diagra-

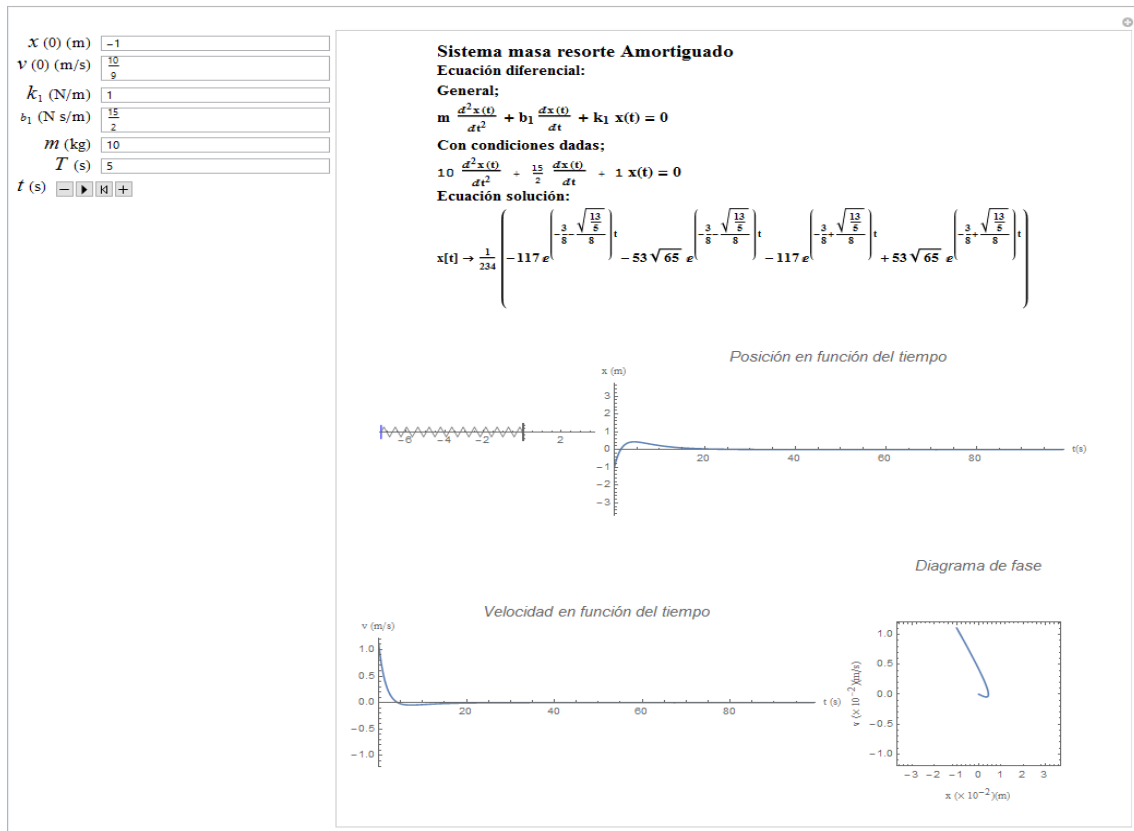


Figura 13: Ejemplo 4 Sobreamortiguado

mas de posición en función del tiempo, velocidad en función del tiempo y diagrama de fases, que corresponden a las condiciones dadas. Como se puede observar el desarrollo del movimiento tiende a disminuir hasta que llega a ser nulo, además es posible ver como la velocidad también disminuye a medida que el tiempo transcurre y como esta oscila, esto debido al coeficiente de amortiguamiento.

2.4. Oscilador forzado

Si se mantiene una oscilación de amplitud constante, aplicando una fuerza impulsora que varíe con el tiempo, con periodo y frecuencia definidos, se observará el fenómeno de oscilación forzada. Para el caso de la oscilación amortiguada se toma una fuerza

impulsora periódica, pero para este caso la frecuencia angular con la que la masa está oscilando, es igual, a la frecuencia angular impulsora, luego la amplitud de la oscilación que resulta, es mayor que cuando las dos frecuencias son distintas [7].

Se analiza una fuerza $F(0) = F_m \cos(\omega_t t)$ y el cambio de la amplitud en una oscilación forzada, en función de la frecuencia angular de la fuerza impulsora (ω_t). Se presentan dos casos uno en el que el oscilador es libre forzado y otro caso en el que el oscilador es amortiguado forzado.

2.4.1. Oscilador libre forzado

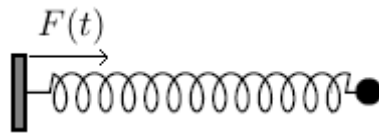


Figura 14: Masa sujeta a un resorte

En un sistema masa resorte, con una masa puntal m , con movimiento en una dimensión, el movimiento tiene un grado de libertad, el resorte no tiene masa y su comportamiento es lineal (obedece la Ley de Hooke [7]), pero se analiza con una fuerza que varía senoidalmente, como $F(t) = F_0 \cos(\omega_t t)$ se va a encontrar la ecuación de movimiento que describe el sistema.

Utilizando la mecánica lagrangiana, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}kx^2\right), \quad Q = \frac{f_0}{m}\cos(\omega_t t),$$

como,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{F_0}{m}\cos\omega_t t,$$

se obtiene,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_m \cos(\omega_t t), \quad (35)$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $F_m = \frac{f_0}{m}$.

La solución de esta ecuación diferencial esta compuesta por la solución de la ecuación diferencial homogénea $x_h(t)$ y una solución particular $x_p(t)$, esta solución esta descrita por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, como se muestra a continuación.

Solución homogénea,

$$\ddot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0,$$

por los métodos usuales, la solución es, $x_h(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

Ahora, por el método de coeficientes indeterminados (método para hallar una solución particular de la ecuación lineal completa, que consiste fundamentalmente en intuir la forma de una solución particular), se plantea una solución particular de la forma,

$$x_p(t) = a_1 \cos(\omega_t t) + b_t \sin(\omega_t t),$$

hallando la primera y segunda derivada, se obtiene,

$$\dot{x}_p(t) = -a_1\omega_t \sin(\omega_t t) + b_t\omega_t \cos(\omega_t t), \quad \ddot{x}_p(t) = -a_1\omega_t^2 \cos(\omega_t t) - b_t\omega_t^2 \sin(\omega_t t),$$

reemplazando estos valores en la ecuación (35),

$$-a_1\omega_t^2 \cos(\omega_t t) - b_t\omega_t^2 \sin(\omega_t t) + \omega_0^2 [a_1 \cos(\omega_t t) + b_t B \sin(\omega_t t)] = F_m \cos \omega_t t ,$$

reorganizando la expresión anterior,

$$(\omega_0^2 a_1 - \omega_t^2 a_1) \cos(\omega_t t) + (\omega_0^2 b_1 - \omega_t^2 b_1) \sin(\omega_t t) = F_m \cos \omega_t t ,$$

entonces,

$$(\omega_0^2 a_1 - \omega_t^2 a_1) = F_m \quad \text{y} \quad (\omega_0^2 b_1 - \omega_t^2 b_1) = 0 ,$$

se encuentran los valores para a_1 y b_1 ,

$$a_1 = \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2} \quad \text{y} \quad b_1 = 0 .$$

La solución de la ecuación diferencia (35) es,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + a_1 \cos(\omega_t t) + b_t \sin(\omega_t t) ,$$

reemplazando los valores de a_1 y b_1 ,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2} \cos(\omega_t t) ,$$

encontrando la derivada de la ecuación anterior y aplicando las condiciones iniciales

$x(0)$ y $\dot{x}(0)$, se encuentran los valores de A y B ,

$$A = x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} .$$

Cuando ω_0 tiende a ω_t el sistema esta en resonancia, lo que quiere decir que una fuerza relativamente pequeña, aplicada de forma repetida, hace que la amplitud del sistema se haga muy grande, un ejemplo de sistema de resonancia es la onda cuadrada que se vera más adelante.

Ejemplo 5. Sistema masa resorte horizontal - Libre forzado

Determinar la ecuación de movimiento para un sistema masa resorte, con las siguientes condiciones iniciales $x(0) = -\frac{1}{2} m$ y $\dot{x}(0) = \frac{6}{5} \frac{m}{s}$, además $m = 4,0 kg$ y $k = 12,0 \frac{N}{m}$ y suponiendo que la masa se mueve bajo la acción de una fuerza externa $F = 3,0 N \cos(2t)$.

se tiene la siguiente información para resolver el problema, $m = 4,0 kg$, $k = 12,0 \frac{N}{m}$ y $F = 3,0 N \cos(2t)$, la ecuación diferencial de movimiento que describe el sistema,

$$\ddot{x} + \frac{12}{4}x = \frac{3 \cos(2t)}{4},$$

el desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = -\frac{1}{2} m$ y $\dot{x}(0) = \frac{6}{5} \frac{m}{s}$ respectivamente. Se puede encontrar que $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{6}{5\sqrt{3}}$, entonces,

$$x(t) = \frac{1}{4} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{6}{5\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{3 \cos(2t)}{4}.$$

que describe la ecuación de movimiento del sistema libre forzado.

Utilizando Mathematica:

Es posible observar en la figura 15 que en el gráfico correspondiente a la posición en función del tiempo, se ve un acotamiento debido al forzamiento representado por la función $f(t) = \frac{3 \cos(2t)}{4}$, debido a esta misma la velocidad también sufre un acotamiento, el diagrama de fase permite visualizar el desarrollo del movimiento con respecto a la velocidad.

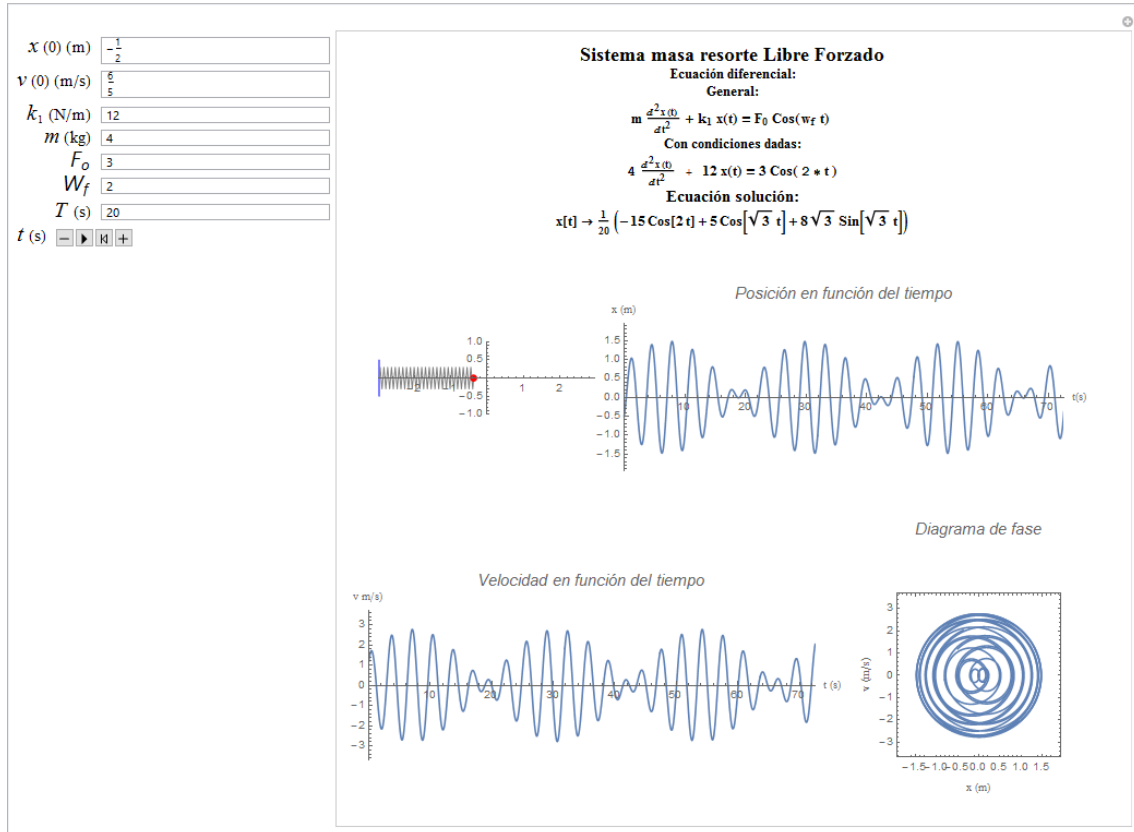


Figura 15: Ejemplo 5 Libre Forzado

2.4.2. Oscilador amortiguado forzado

Para este caso sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, basta adicionar un término a las ecuaciones de movimiento, $F_f = -b\vec{v}_x$ en donde, la velocidad está definida por $\vec{v}_x = \frac{dx}{dt}$ y b es una constante positiva para describir la intensidad de la fuerza de amortiguamiento [7] y se analiza con una fuerza que varía senoidalmente, como $F(t) = F_0 \cos(\omega_t t)$.

La ecuación de movimiento se puede encontrar utilizando la mecánica lagrangiana, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

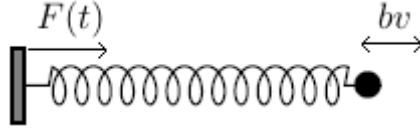


Figura 16: Masa sujeta a un resorte

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx^2 ,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 , \quad Q = f_m \cos(\omega_t t) - b\dot{x} ,$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f_m \cos(\omega_t t) ,$$

se obtiene,

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_m \cos(\omega_t t) , \quad (36)$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $F_m = \frac{f_0}{m}$, obteniendo así la ecuación de movimiento.

La solución de esta ecuación diferencial la determina la solución de la ecuación diferencial homogénea $x_h(t)$ y una solución particular $x_p(t)$, que está definida por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ como se muestra a continuación.

Solución homogénea,

$$\ddot{x}_h + 2\Gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 ,$$

por los métodos usuales, se presentan tres soluciones,

Caso 1: subamortiguado - forzado

Para el caso en que $\omega^2 > \Gamma^2$, se tiene,

$$x = e^{-\Gamma t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] . \quad (37)$$

Ahora por el método de coeficientes indeterminados, se plantea una solución particular de la forma,

$$x_p(t) = a_1 \cos(\omega_t t) + b_t \sin(\omega_t t),$$

hallando la primera y segunda derivada, se obtiene,

$$\dot{x}_p(t) = -a_1 \omega_t \sin(\omega_t t) + b_t \omega_t \cos(\omega_t t), \quad \ddot{x}_p(t) = -a_1 \omega_t^2 \cos(\omega_t t) - b_t \omega_t^2 \sin(\omega_t t),$$

reemplazando estos valores en la ecuación 36,

$$\begin{aligned} & -a_1 \omega_t^2 \cos(\omega_t t) - b_t \omega_t^2 \sin(\omega_t t) + 2\Gamma [-a_1 \omega_t \sin(\omega_t t) + b_t \omega_t \cos(\omega_t t)] + \\ & \omega_0^2 [(a_1 \cos(\omega_t t) + b_t B \sin(\omega_t t))] = F_m \cos \omega_t t, \end{aligned}$$

reorganizando la expresión anterior,

$$(\omega_0^2 a_1 - \omega_t^2 a_1 - 2\Gamma a_1) \cos(\omega_t t) + (\omega_0^2 b_1 - \omega_t^2 b_1 + 2\Gamma b_1) \sin(\omega_t t) = F_m \cos \omega_t t,$$

entonces,

$$(\omega_0^2 a_1 - \omega_t^2 a_1 - 2\Gamma a_1) = F_m \quad \text{y} \quad (\omega_0^2 b_1 - \omega_t^2 b_1 + 2\Gamma b_1) = 0,$$

se encuentran los valores para a_1 y b_1 ,

$$a_1 = \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} \quad \text{y} \quad b_1 = 0,$$

luego,

$$x_p(t) = \frac{F_m \cos(\omega_t t)}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma}.$$

La solución de la ecuación diferencial 35, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, cuando $\omega^2 > \Gamma^2$ es,

$$x(t) = e^{-\Gamma t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] + \frac{F_m \cos(\omega_t t)}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma},$$

encontrando la derivada de la ecuación anterior y aplicando las condiciones iniciales

$x(0)$ y $\dot{x}(0)$, se encuentran los valores de A y B ,

$$A = x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} \quad \text{y} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + \frac{\Gamma}{\omega_0} \left[x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} \right] .$$

Caso 2: sobreamortiguado - forzado

Para el caso en que $\omega^2 < \Gamma^2$, se tiene,

$$x = Ae^{(-\Gamma+\omega_0)t} + Be^{(-\Gamma-\omega_0)t} , \quad (38)$$

se tiene,
$$x(t) = Ae^{(-\Gamma+\omega_0)t} + Be^{(-\Gamma-\omega_0)t} + \frac{F_m \cos(\omega_t t)}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} ,$$

encontrando la derivada de la ecuación anterior y aplicando las condiciones iniciales

$x(0)$ y $\dot{x}(0)$, se encuentran los valores de A y B ,

$$A = \frac{\dot{x}_0}{2\omega_0} + \frac{(\Gamma + \omega_0)x_0}{2\omega_0} + \frac{(\Gamma + \omega_0)F_m}{2\omega(\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma)} ,$$

$$B = -\frac{\dot{x}_0}{2\omega_0} + \left(1 - \frac{\Gamma + \omega_0}{2\omega_0}\right) \left(x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma}\right) .$$

Caso 3: crítico - forzado

Para el caso en que $\omega^2 = \Gamma^2$, se tiene,

$$x = e^{-\Gamma t}(At + B) , \quad (39)$$

se tiene,

$$x(t) = e^{-\Gamma t}(At + B) + \frac{F_m \cos(\omega_t t)}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} ,$$

encontrando la derivada de la ecuación anterior y aplicando las condiciones iniciales

$x(0)$ y $\dot{x}(0)$, se encuentran los valores de A y B ,

$$A = \dot{x}_0 + \Gamma \left(x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} \right) \quad \text{y} \quad B = x_0 - \frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega_t^2 - 2\Gamma} .$$

Ejemplo 6. Sistema masa resorte - Amortiguado forzado

Una masa de $m = 7,0$ kg atada a un resorte que se mueve bajo la acción de una fuerza externa $F = 2,0 \cos(t)$ N. Si la constante del resorte es $k = 4,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $b = 0,8 \frac{\text{N}}{\text{m}} s$. Determine la ecuación de movimiento del sistema $x(t)$.

Se tiene la siguiente información para resolver el problema, $m = 7,0$ kg, $k = 4,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $F = 2,0 \cos(t)$ N, la ecuación diferencial de movimiento que describe el sistema es,

$$\ddot{x} + \frac{4}{35}\dot{x} + \frac{9}{14}x = \frac{2 \cos(t)}{7},$$

el desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = -\frac{2}{5} m$ y $\dot{x}(0) = \frac{3}{10} \frac{m}{s}$ respectivamente.

Se encuentra que $A = 0,21$ y $B = 3,88$, entonces,

$$x(t) = e^{\frac{2}{35}t} [0,21 \cos(t) + 3,88 \sin(t)] - \frac{20 \cos(t)}{33}.$$

que describe la ecuación de movimiento del sistema amortiguado forzado.

Empleando el manipulate correspondiente a este tipo de movimiento, el cual es posible encontrar en el anexo 7.1, se tienen las siguientes gráficas:

Al observar el diagrama de posición en función del tiempo presentado en la figura 17, se puede afirmar que debido al amortiguamiento y el transcurso del tiempo el movimiento resultante, será el correspondiente a la función de forzamiento, que en este caso es $f(t) = \frac{2 \cos(t)}{7}$, en el diagrama de fase es posible visualizar como el movimiento se desarrolla inicialmente como un espiral pero al transcurrir el tiempo

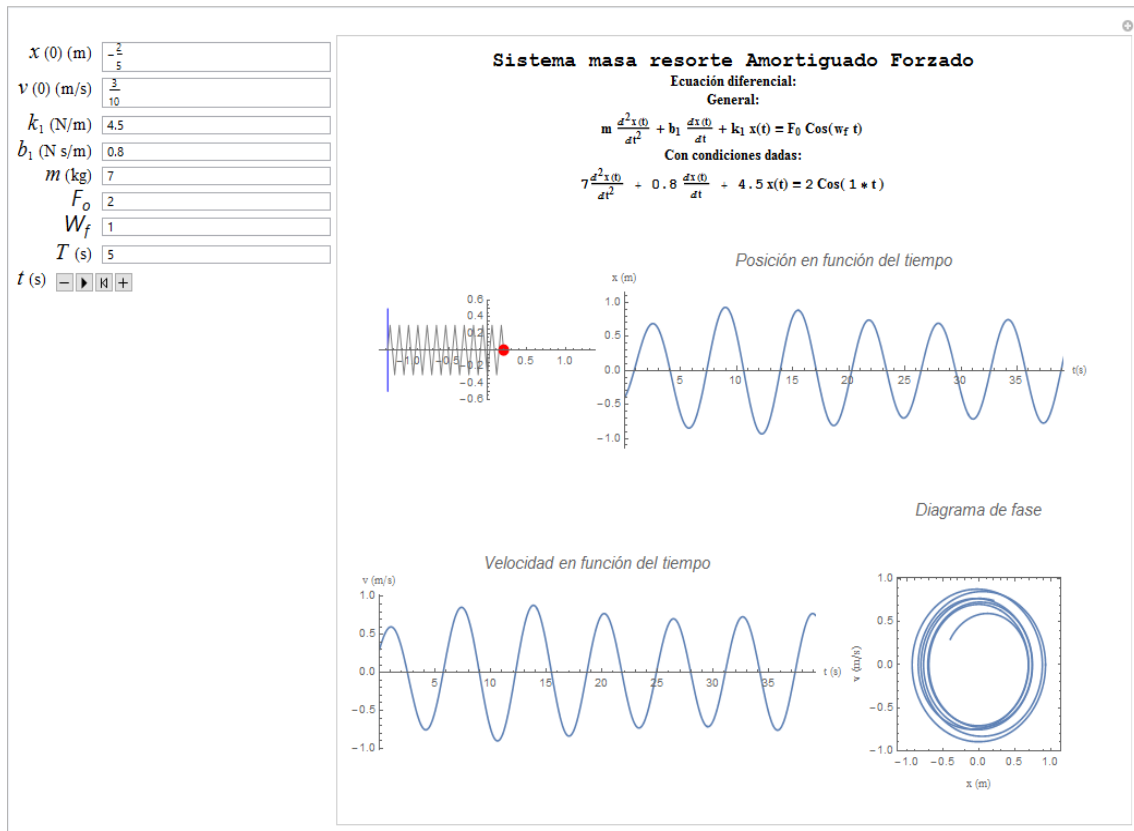


Figura 17: Ejemplo 6 Amortiguado Forzado

se transforma en una curva cerrada.

2.5. Masa sujeta a dos resortes

Ahora se analiza el caso en que la masa este acoplada a dos resortes fijos, como se ve en la imagen las constantes de elasticidad son k y k_1 , las longitudes entre los resortes cuando están en equilibrio, son l y L .

Caso 1: Ahora se analiza el caso en que los coeficientes de elasticidad son diferentes, k y k_1 .

La mecánica lagrangiana esta determinada por la energía cinética (K) de la masa

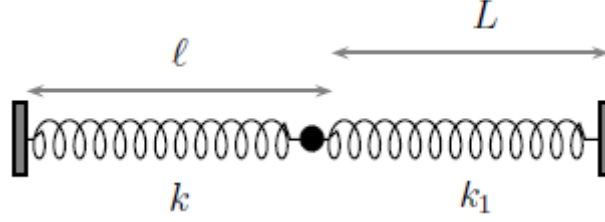


Figura 18: Masa sujeta a dos resortes con k y k_1

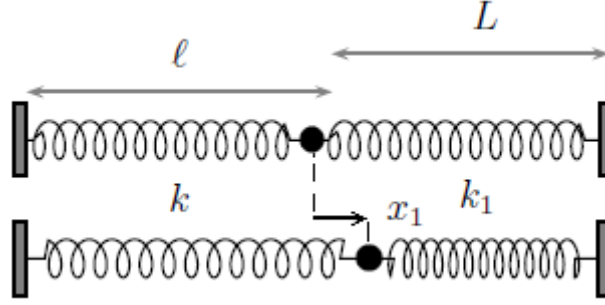


Figura 19: Masa sujeta a dos resortes, con coeficientes de elasticidad k y k_1 .

del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U), como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_1x^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_1x^2, \quad Q = 0,$$

ya que no hay fuerzas generalizadas. Definiendo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x} + x\omega^2 = 0, \tag{40}$$

con $\omega^2 = \frac{k+k_1}{m}$.

Se observa que la ecuación (40) es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyas condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$,

cuando $t = 0$, son:

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 ,$$

la solución general de la ecuación diferencial (40), se describe en el anexo 7, es:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) ; \quad \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) ,$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k+k_1}{m}}$, aplicando las condiciones iniciales,

$$x(0) = A \Rightarrow A = x_0 , \quad \dot{x}(0) = B\omega \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} ,$$

si $\omega = \sqrt{\frac{k+k_1}{m}}$, entonces,

$$B = \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{(k+k_1)}} ,$$

de esta forma la solución general es:

$$x(t) = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k+k_1}{m}} t \right) + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k+k_1}} \sin \left(\sqrt{\frac{k+k_1}{m}} t \right) . \quad (41)$$

La función solución también se puede escribir de la forma (ecuación 22),

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) ,$$

donde x_0 y v_0 representan,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} \quad \text{y} \quad \varphi_0 = \arctan \left(-\frac{v_0}{\omega x_0} \right) .$$

amplitud y ángulo de fase respectivamente.

Caso 2: Como en este caso las constantes de elasticidad k y k_1 son iguales, $k = k_1$.

Partiendo del caso anterior se tiene que:

$$\ddot{x} + x\omega_0^2 = 0 , \quad (42)$$

que describe el movimiento del sistema, con $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Entonces,

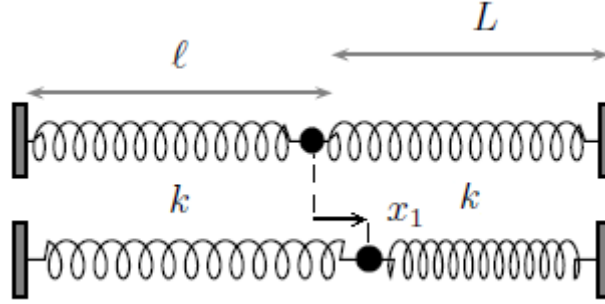


Figura 20: Masa sujeta a dos resortes con $k_1 = k$

$$x(t) = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right). \quad (43)$$

La función solución también se puede escribir de la forma (ecuación 22),

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

donde x_0 y φ_0 representan,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} \quad \text{y} \quad \varphi_0 = \arctan \left(-\frac{v_0}{\omega x_0} \right).$$

Ejemplo 7. Sistema de una masa acoplada con dos resortes

Dos resortes con constantes $k = 7,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_1 = 13,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, están unidos a una masa $m = 5,0 \text{ kg}$, y los extremos libres de los resortes se unen a dos soportes fijos, además las superficies carecen de rozamiento. Con la información dada encontrar la ecuación de movimiento $x(t)$ que describe este sistema.

Utilizando Mathematica, se pueden visualizar las gráficas de posición en función del tiempo, velocidad en función del tiempo y le diagrama de fase (velocidad - posición).

Se puede observar que el movimiento resultante en este sistema es de manera regular

y sin ningún tipo de debilitamiento, al observar el diagrama de fase se genera una curva cerrada dando la impresión de un movimiento perpetuo. Como a continuación se se observa en la figura 21.

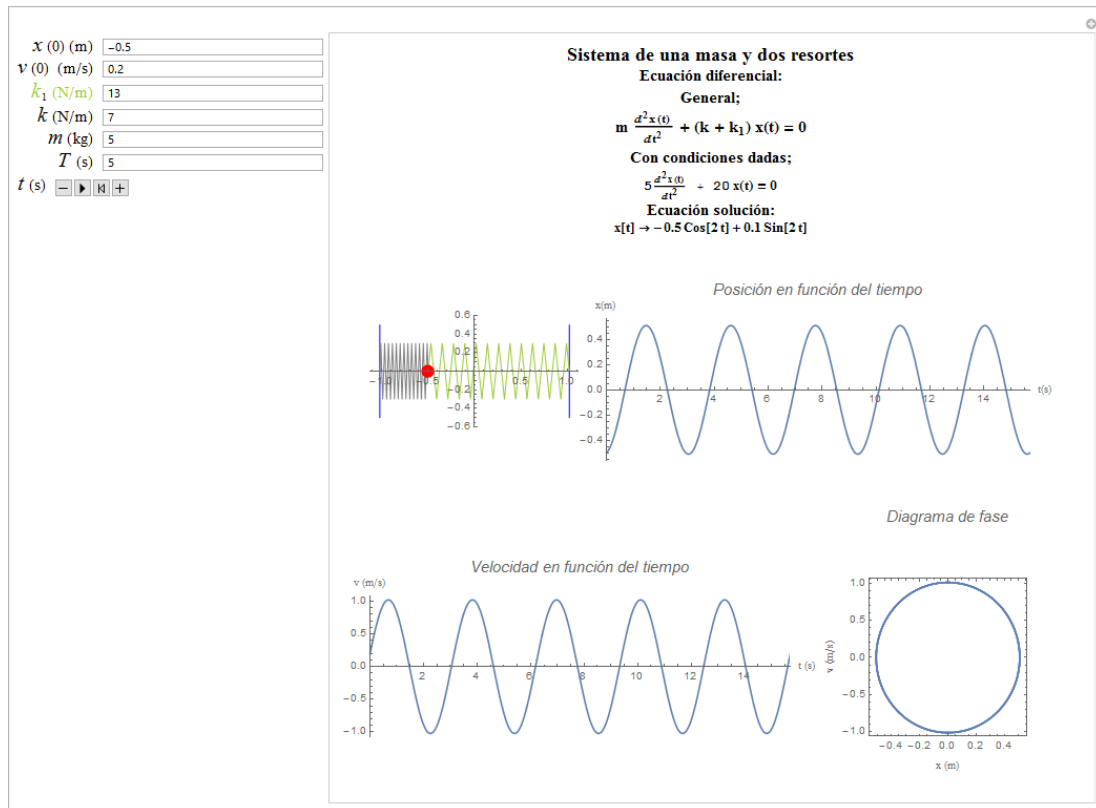


Figura 21: Ejemplo 7 Masa Sujeta a Dos Resortes

Ejercicios planteados:

- Suponga que una masa de 1,0 kg sujeta a un resorte de constante $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. a) Determine la ecuación de movimiento de un oscilador libre amortiguado, si la masa se libera 2,0 m a la izquierda de su posición de equilibrio, comprimiendolo, desde el reposo, suponiendo que la fuerza amortiguada es 4 veces la velocidad instantánea, b) Halle $x(t)$ y $v(t)$, c) Grafique $x(t)$ y $v(t)$ y c) Elabore el diagrama de fase del

sistema.

2. Considere una masa de $3,0 \text{ kg}$ sujeta a un resorte vertical de constante $k = 10,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Si la masa se suelta $2,0 \text{ m}$ por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial descendente de $1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a) Determine la ecuación de movimiento, b) Utilizando la información del ítem anterior halle $x(t)$ y $v(t)$, c) Elabore el diagrama de fase del sistema.

3. Determinar la ecuación de movimiento de un sistema masa resorte horizontal formado por una masa de $8,0 \text{ kg}$ sujeta por un muelle de constante $k = 32,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, se supone que, en ausencia de amortiguamiento, actúa una fuerza externa dada por $F(t) = 16 \cos(4t)$. La masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial ascendente de $1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a) Grafique $x(t)$ y $v(t)$ y b) Elabore el diagrama de fase del sistema.

4. A un sistema masa resorte horizontal no amortiguado con parámetros $m = 1,0 \text{ kg}$ y $k = 9,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ se le aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 5 \cos(3t)$. a) Determine la ecuación de movimiento suponiendo que $x(0) = 1$ y $\dot{x} = 0$, b) Grafique $x(t)$ y $v(t)$

3. Sistemas acoplados

Como se observó en el apartado anterior, los casos presentados, están relacionados con una masa. Para este apartado se exponen los casos con dos y tres masas, además se presenta la generalidad con n masas, mostrando los casos en que las constantes de elasticidad del resorte k , son iguales o diferentes.

3.1. Dos masas idénticas acopladas

Se analizan los casos con dos masas idénticas atadas a dos y tres resortes. Se tienen dos masas idénticas que están conectadas entre sí mediante tres resortes, en donde las constantes de restitución son k , k_1 y k_2 , la longitud entre los resortes cuando están en equilibrio son l y L .

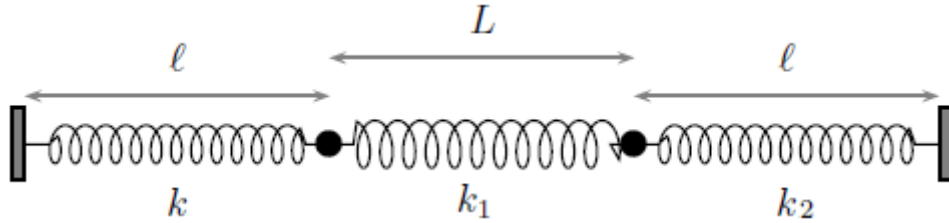


Figura 22: Dos masas idénticas conectadas por resortes.

3.1.1. Dos masas idénticas conectadas por tres resortes.

Como se muestra en la figura 23, se tienen dos masas idénticas que están conectadas entre sí mediante tres resortes, en donde las constantes de restitución son k , k_1 y k_2 , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son l y L .

Para encontrar la ecuación de movimiento utilizando la mecánica lagrangiana, se determina a partir de la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía

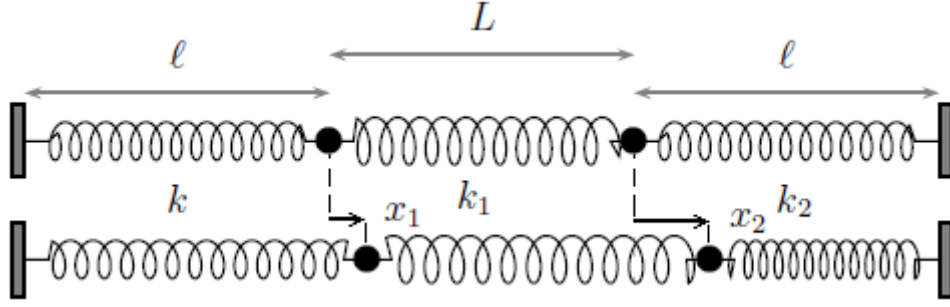


Figura 23: Dos masas idénticas conectadas por tres resortes, con coeficientes de elasticidad k , k_1 y k_2

potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2)^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1)^2 - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) = 0, \quad (44)$$

para x_2 , se obtiene,

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m}x_2 + \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) = 0, \quad (45)$$

Las ecuaciones (44) y (45) comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, al desacoplarlas se encuentra la solución, como se muestra en el anexo 6, y

encontrar los valores para las frecuencias ω_a y ω_b , para esto se tienen las ecuaciones:

$$m\ddot{x}_1 = -(k + k_1)x_1 + k_1x_2 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = k_1x_1 - (k_1 + k_2)x_2,$$

entonces los valores propios de la raíz, para este caso son,

$$\lambda_a = \frac{k + 2k_1 + k_2 + \sqrt{(k + 2k_1 + k_2)^2 - 4(kk_2 + kk_1 + k_1k_2)}}{2},$$

$$\lambda_b = \frac{k + 2k_1 + k_2 - \sqrt{(k + 2k_1 + k_2)^2 - 4(kk_2 + kk_1 + k_1k_2)}}{2},$$

por lo que

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k + 2k_1 + k_2 + \sqrt{(k + 2k_1 + k_2)^2 - 4(kk_2 + kk_1 + k_1k_2)}}{2m}},$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k + 2k_1 + k_2 - \sqrt{(k + 2k_1 + k_2)^2 - 4(kk_2 + kk_1 + k_1k_2)}}{2m}},$$

en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales (44) y (45) son:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (46)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (47)$$

respectivamente; donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$A = \sqrt{(x_{10} + x_{20})^2 + \frac{(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2}{\omega_a^2}}, \quad B = \sqrt{(x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2}{\omega_b^2}},$$

$$\varphi_a = \arctan \left[-\frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{\omega_a(x_{10} + x_{20})} \right], \quad \varphi_b = \arctan \left[-\frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{\omega_b(x_{10} - x_{20})} \right],$$

como se muestra en el anexo 7.

A continuación se presentan tres casos particulares, que se deducen del caso anterior:

Caso 1: Se muestra el caso en que las constantes de restitución del segundo y tercer resorte son iguales, como se muestra en la figura 24. Partiendo del caso general, se tiene que:

$$m\ddot{x}_1 = -(k + k_1)x_1 + kx_2 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2,$$

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran

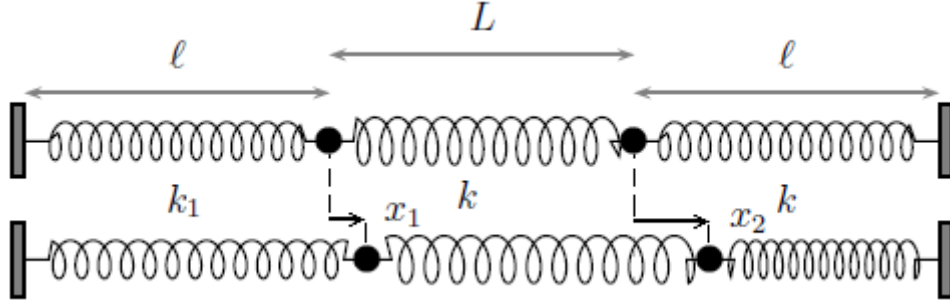


Figura 24: Dos masas idénticas conectadas por tres resortes, con coeficientes de elasticidad k y k_1

los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = \frac{k_1+3k+\sqrt{(k_1+3k)^2-4(2kk_1+k^2)}}{2}$ y $\lambda_b = \frac{k_1+3k-\sqrt{(k_1+3k)^2-4(2kk_1+k^2)}}{2}$, por lo que $\omega_a = \sqrt{\frac{k_1+3k+\sqrt{(k_1+3k)^2-4(2kk_1+k^2)}}{2m}}$ y $\omega_b = \sqrt{\frac{k_1+3k-\sqrt{(k_1+3k)^2-4(2kk_1+k^2)}}{2m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (48)$$

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (49)$$

respectivamente, en donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$A = \sqrt{(x_{10} + x_{20})^2 + \frac{(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2}{\omega_a^2}}, \quad B = \sqrt{(x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20})^2}{\omega_b^2}},$$

$$\varphi_a = \arctan \left[-\frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{\omega_a(x_{10} + x_{20})} \right] \quad \text{y} \quad \varphi_b = \arctan \left[-\frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{\omega_b(x_{10} - x_{20})} \right],$$

como se muestra en el anexo 7.

Caso 2: Se muestra el caso en que las constantes de restitución del primer y tercer resorte son iguales como se muestra en la figura 25, Partiendo del caso general, se tiene que:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_1(x_2 - x_1) \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_1(x_2 - x_1),$$

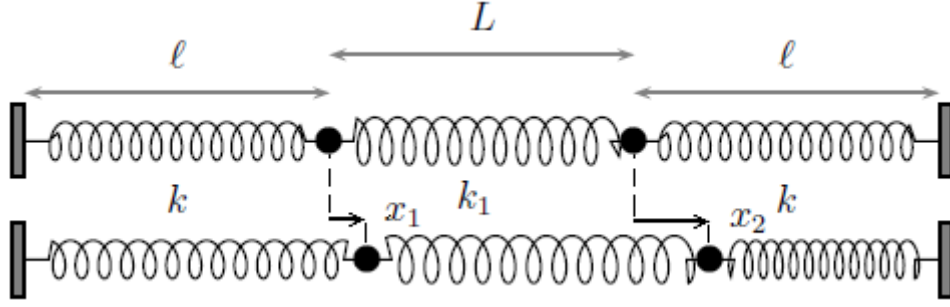


Figura 25: Dos masas idénticas conectadas por tres resortes, con coeficientes de elasticidad k y k_1

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran

los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = k$ y $\lambda_b = k + 2k_1$, con $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

y $\omega_b = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}} t + \varphi_b \right), \quad (50)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) - B \cos \left(\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}} t + \varphi_b \right), \quad (51)$$

respectivamente, en donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$A = \sqrt{(x_{1_0} + x_{2_0})^2 + \frac{m(\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0})^2}{k}}, \quad B = \sqrt{(x_{1_0} - x_{2_0})^2 + \frac{m(\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0})^2}{k + 2k_1}},$$

$$\varphi_a = \arctan \left[-\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0}}{(x_{1_0} + x_{2_0})} \right] \quad \varphi_b = \arctan \left[-\sqrt{\frac{m}{k + 2k_1}} \frac{\dot{x}_{1_0} - \dot{x}_{2_0}}{(x_{1_0} - x_{2_0})} \right],$$

como se muestra en el anexo 7.

Caso 3: Caso en que las constantes de restitución de todos los resortes son iguales.

Partiendo del caso general, se tiene que:

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2,$$

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran

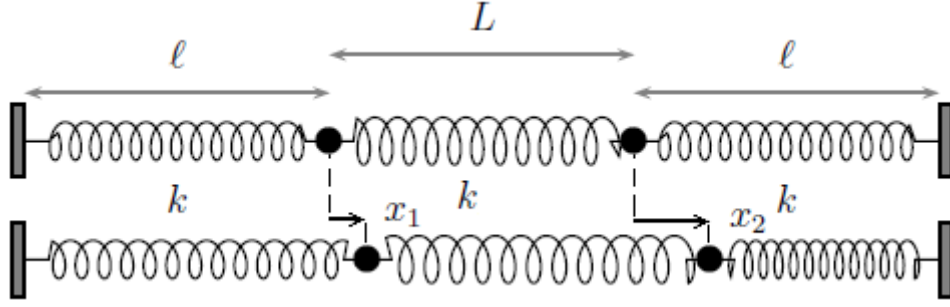


Figura 26: Dos masas idénticas conectadas por tres resortes, con $k = k_1 = k_2$

los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = k$ y $\lambda_b = 3k$, con $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_b = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_b \right) \quad (52)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) - B \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \varphi_b \right). \quad (53)$$

respectivamente, en donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$A = \sqrt{(x_{10} + x_{20})^2 + \frac{m(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2}{k}}; \quad B = \sqrt{(x_{10} - x_{20})^2 + \frac{m(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2}{3k}},$$

$$\varphi_a = \arctan \left[-\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{(x_{10} + x_{20})} \right] \quad \varphi_b = \arctan \left[-\sqrt{\frac{m}{3k}} \frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{(x_{10} - x_{20})} \right],$$

como se muestra en el anexo 7.

Ejemplo 8. Modos simétrico y antisimétrico

Las figuras 27 y 28 muestran los modos simétrico y antisimétrico del sistema acoplado, dos masas idénticas y tres resortes y sus diagramas de velocidad contra tiempo:

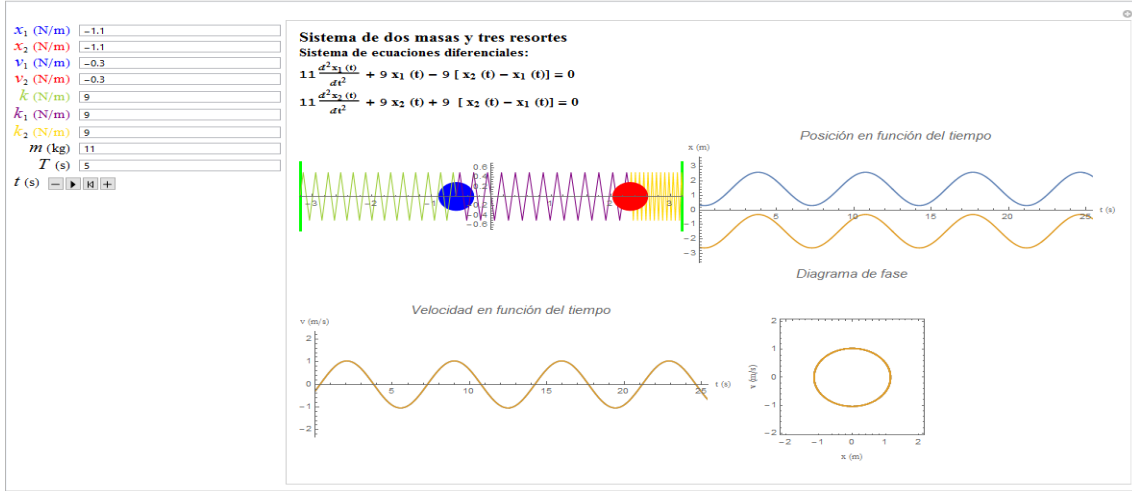


Figura 27: modo simétrico de sistema con dos masas idénticas y tres resortes con condiciones iniciales: $x_1(0) = -1,1$, y $\dot{x}(0) = -0,3$ y $k = 9$, $m = 11$.

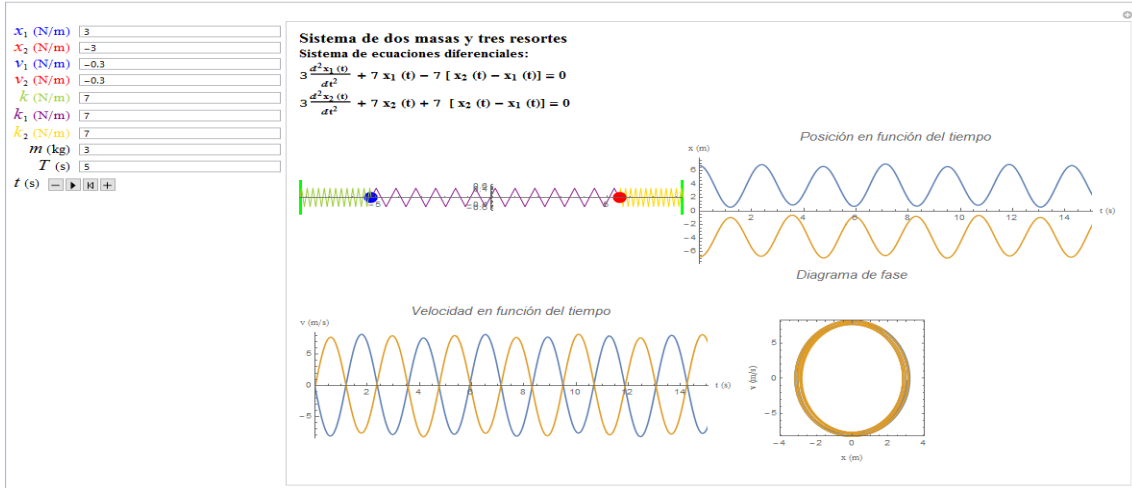


Figura 28: modo anti simétrico de sistema con dos masas idénticas y tres resortes con condiciones iniciales: $x_1(0) = 1,1, x_2(0) = -1,1$ y $\dot{x}(0) = -0,3$, $k = 9,0$ y $m = 3,0$.

3.1.2. Dos masas idénticas conectadas por dos resortes

En donde las constantes de restitución son k y k_1 , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son l y L . La ecuación de movimiento utilizando la mecánica lagrangiana, se determina a partir de la energía cinética (K) de la masa del movimiento

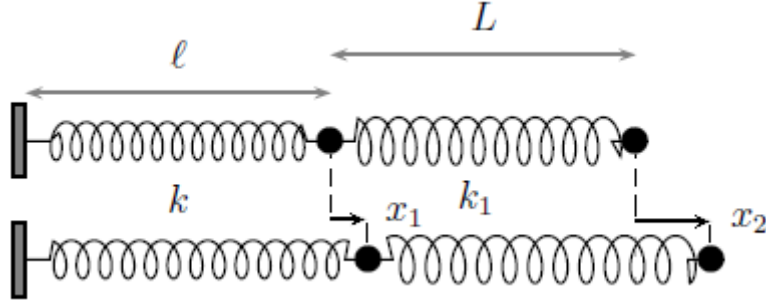


Figura 29: Dos masas idénticas conectadas por dos resortes, con $k \neq k_1$

y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx_1 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1 - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_0'^2 (x_2 - x_1) = 0, \quad (54)$$

para x_2 , se obtiene,

$$\ddot{x}_2 + \omega_0'^2 (x_2 - x_1) = 0, \quad (55)$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $\omega_0'^2 = \frac{k_1}{m}$. Las ecuaciones (54) y (55) comprenden un sistema de

ecuaciones diferenciales acopladas, para encontrar la solución al sistema, se deben

desacoplar las ecuaciones (54) y (55), como se muestra en el anexo 6, y encontrar

los valores para las frecuencias ω_a y ω_b . Se tienen las ecuaciones:

$$m\ddot{x}_1 = -(k + k_1)x_1 + k_1x_2 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = k_1x_1 - k_1x_2,$$

en consecuencia los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = \frac{2k_1+k+\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2}$ y $\lambda_b = \frac{2k_1+k-\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2}$, por lo que $\omega_a = \sqrt{\frac{2k_1+k+\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}}$ y $\omega_b = \sqrt{\frac{2k_1+k-\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales (54) y (55) son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k_1+k+\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}} t + \varphi_1 \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{2k_1+k-\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}} t + \varphi_2 \right), \quad (56)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k_1+k+\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}} t + \varphi_1 \right) - B \cos \left(\sqrt{\frac{2k_1+k-\sqrt{4k_1^2+k^2}}{2m}} t + \varphi_2 \right), \quad (57)$$

respectivamente, en donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(x_{1_0} + x_{2_0})^2 + \frac{2m(\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0})^2}{2k_1 + k + \sqrt{4k_1^2 + k^2}}}, \\ B &= \sqrt{(x_{1_0} - x_{2_0})^2 + \frac{2m(\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0})^2}{(2k_1 + k - \sqrt{4k_1^2 + k^2})}}, \\ \varphi_a &= \arctan \left[-\sqrt{\frac{2m}{2k_1 + k + \sqrt{4k_1^2 + k^2}}} \frac{\dot{x}_{1_0} + \dot{x}_{2_0}}{(x_{1_0} + x_{2_0})} \right], \\ \varphi_b &= \arctan \left[-\sqrt{\frac{2m}{2k_1 + k - \sqrt{4k_1^2 + k^2}}} \frac{\dot{x}_{1_0} - \dot{x}_{2_0}}{(x_{1_0} - x_{2_0})} \right], \end{aligned}$$

como se muestra en el anexo 7.

A continuación se presenta el caso particular, que se puede deducir del caso anterior:

Caso 1: Se muestra el caso en que las constantes de restitución son iguales, entonces $k_1 = k$. Partiendo del caso general, se tiene que:

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 = kx_1 - kx_2,$$

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, en conse-

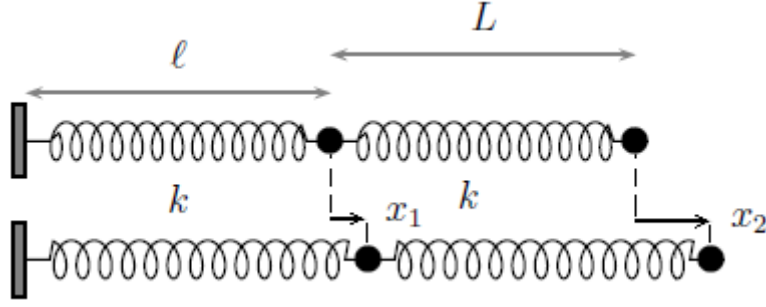


Figura 30: Dos masas idénticas conectadas por dos resortes, con $k = k_1$

cuencia los valores propios de la raíz, $\lambda_a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}k$ y $\lambda_b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}k$, $\omega_a = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}}$ y $\omega_b = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t + \varphi_1 \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t + \varphi_2 \right), \quad (58)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t + \varphi_1 \right) - B \cos \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} t + \varphi_2 \right), \quad (59)$$

respectivamente.

En donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y sus derivadas representan,

$$A = \sqrt{(x_{10} + x_{20})^2 + \frac{2(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2 m}{(3 + \sqrt{5})k}},$$

$$B = \sqrt{(x_{10} - x_{20})^2 + \frac{2(\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20})^2 m}{(3 - \sqrt{5})k}},$$

$$\varphi_a = \arctan \left[-\sqrt{\frac{2m}{(3 + \sqrt{5})k}} \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{(x_{10} + x_{20})} \right],$$

$$\varphi_b = \arctan \left[-\sqrt{\frac{2m}{(3 - \sqrt{5})k}} \frac{\dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}{(x_{10} - x_{20})} \right],$$

como se muestra en el anexo 7.

Ejemplo 9. Sistema de dos masa acopladas por dos resortes

En una superficie horizontal, una masa $m_1 = 5,0$ kg está unida a una pared fija mediante un resorte con constante $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Otra masa $m_2 = 5,0$ kg esta unida a la masa m_1 mediante un resorte con constante $k_1 = 7,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Se tiene que, $m_1 = m_2 = 5,0$ kg, $k = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_1 = 7,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, se concluye que las ecuaciones de movimiento son,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = 0, \quad \ddot{x}_2 + \frac{2}{7}(x_2 - x_1) = 0,$$

Los objetos están alineados en forma horizontal, de modo que los resortes tiene su longitud natural. Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen este sistema.

Al hacer uso de Mathematica es posible ver los siguientes gráficos:

En la figura 31 el diagrama de posición en función del tiempo se observa la trayectoria de las masas al transcurrir el tiempo, también se puede observar la velocidad que cada una de las masas y las figuras que se forman en el diagrama de fase son curvas cerradas.

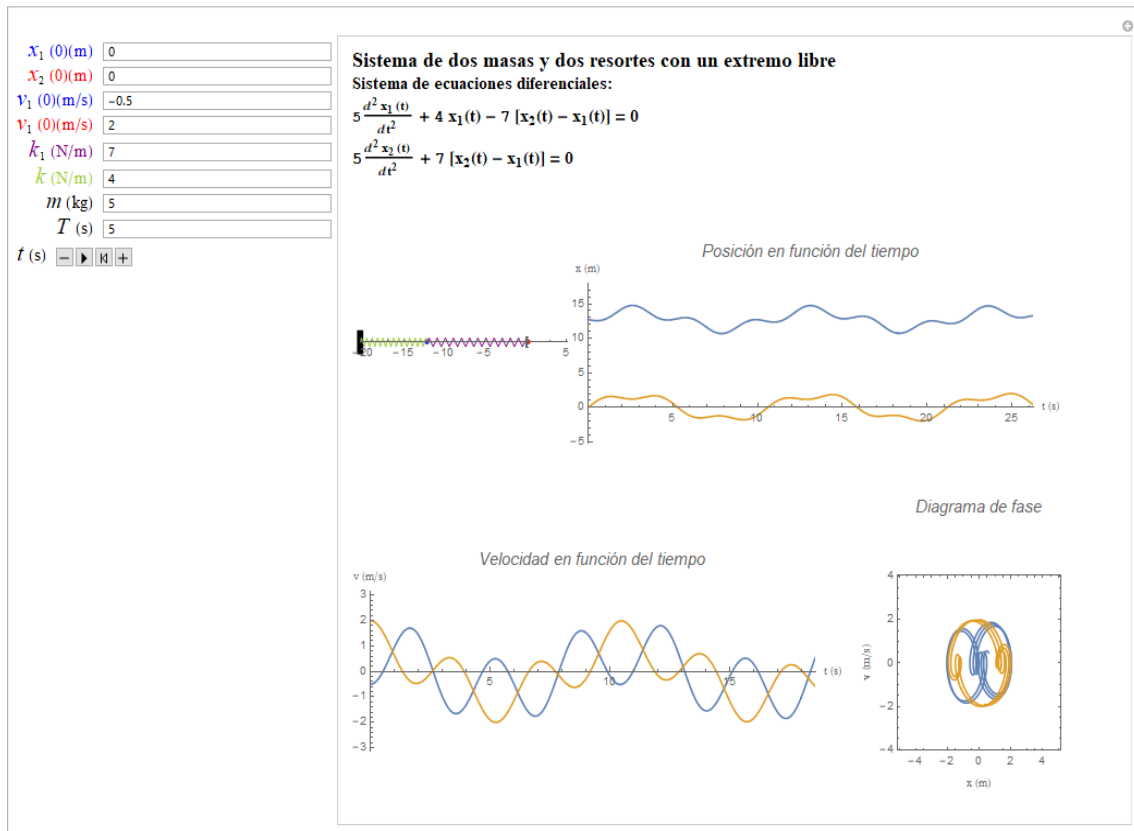


Figura 31: Ejemplo 9, dos masas sujetas a dos resortes con un extremo libre

Ejemplo 10. Sistema de dos masa acopladas por un resorte

Dos masas $m_1 = 19,0$ kg y $m_2 = 19,0$ kg se encuentran unidas por un resorte con constante $k = 2,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Encuentre la ecuación de movimiento que describe este sistema.

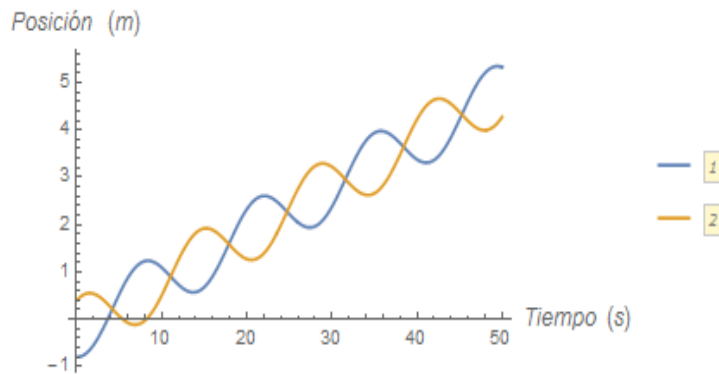
El código Mathematica utilizado para este ejemplo es:

Mathematica 4: Solución de la ecuación diferencial

```
1 NDSolve[{x''[t] + 2/19 (x[t] - y[t]) == 0, y''[t] + 2/19 (y[t] - x[t]) == 0, x[0] == -0.8,
y[0] == 0.4, y'[0] == 0.2, x'[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 50}]
```

Mathematica 5: Gráfico de las posiciones de las dos masas en función del tiempo

```
1 Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. First[%]], {t, 0, 50}, PlotLegends -> "Placeholder", AxesLabel  
-> {Style["Tiempo(s)", Italic, 12], Style["Posición(m)", Italic, 12]}]
```



Ejercicios propuestos:

1. Como se ve en la figura 32, se tienen dos masas idénticas conectadas por un resorte, en donde, la constante de restitución es k , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio es L . Encuentre las ecuaciones de movimiento que describen esta situación.

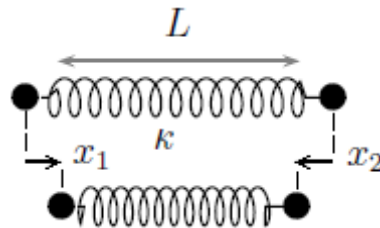


Figura 32: Dos masas idénticas conectadas por un resorte

2. Se tienen dos resortes y dos masas están unidos en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. El sistema se pone en movimiento manteniendo la masa m_2 en su posición de equilibrio y moviendo la masa m_1 a la izquierda de su posición de

equilibrio una distancia de 1,00 m, para luego liberar ambas masas. Determine las ecuaciones de movimiento si $m_1 = m_2 = 2,0$ kg, $k_1 = 4,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 3,3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

3. Dos resortes y tres masa se unan en linea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. Deduzca el sistema de ecuaciones diferenciales si $m_1 = m_2 = 1,0$ kg, $k_1 = 3,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $k_2 = 2,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

4. Dos masas unidas por un resorte se unen en linea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. El sistema se pone en movimiento manteniendo la masa m_2 en su posición de equilibrio y moviendo la masa m_1 a la izquierda de su posición de equilibrio a una distancia de 2,0 m, para luego liberar ambas masas. Determine las ecuaciones de movimiento para las dos masas teniendo en cuenta que $m_1 = m_2 = 2,0$ kg y $k = 1,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

3.2. Tres masas idénticas acopladas

Como se muestra en la figura 33, se tienen tres masas idénticas que están conectadas entre sí, mediante 4 resortes, en donde las constantes de restitución estarán dadas por k , k_1 , k_2 y k_3 , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son l y L . No se trata la solución de esta situación dado lo extenso de los resultados, pero se muestra algunos casos particulares.

3.2.1. Tres masas idénticas conectadas por cuatro resortes.

Como se muestra en la figura 34, se tienen tres masas idénticas que están conectadas entre sí mediante cuatro resortes, en donde las constantes de restitución estarán

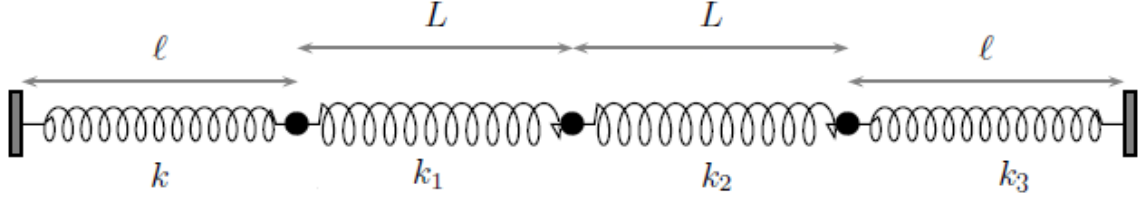


Figura 33: Tres masas idénticas conectadas por cuatro resortes

dadas por k y k_1 , además la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son L y l . Se encontrarán las ecuaciones de movimiento que describen esta situación.

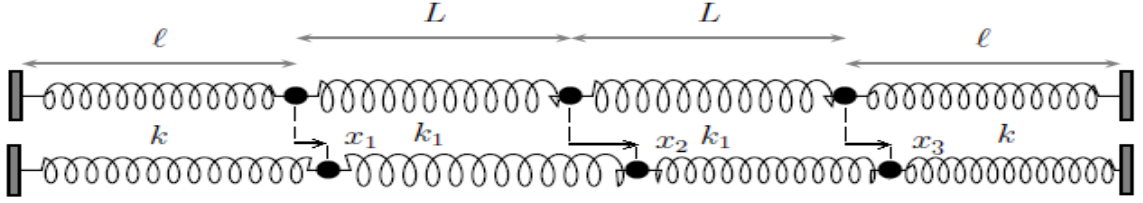


Figura 34: Tres masas idénticas conectadas por cuatro resortes

Para encontrar la ecuación de movimiento utilizando la mecánica lagrangiana, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_2)^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_3^2 - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_2)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) = 0, \quad (60)$$

para x_2 , se obtiene,

$$\ddot{x}_2 - \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k_1}{m}(x_3 - x_2) = 0, \quad (61)$$

y finalmente para x_3 , definiendo,

$$\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}x_1x_3 + \frac{k_1}{m}(x_3 - x_2) = 0, \quad (62)$$

las ecuaciones (61) y (62) comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, para encontrar la solución al sistema, se deben desacoplar las ecuaciones 60, (61) y (62) como se muestra en el anexo 6, y encontrar los valores para las frecuencias ω_a , ω_b y ω_c , para esto se tienen las ecuaciones:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_1(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_1(x_3 - x_2) \text{ y } m\ddot{x}_3 = -k_1(x_3 - x_2) - kx_3,$$

entonces los valores propios de la raíz, para este caso serán, $\lambda_a = (k + k_1)$,

$$\lambda_b = \frac{3k + k_1 + \sqrt{k^2 - 2kk_1 + 9k_1^2}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_c = \frac{3k + k_1 - \sqrt{k^2 - 2kk_1 + 9k_1^2}}{2}, \quad \text{con} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k + k_1}{m}},$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{3k + k_1 + \sqrt{k^2 - 2kk_1 + 9k_1^2}}{2m}} \quad \text{y} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{3k + k_1 - \sqrt{k^2 - 2kk_1 + 9k_1^2}}{2m}}, \text{ en consecuencia la solución}$$

de las ecuaciones diferenciales (60), (61) y (62) son:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_2) - C \cos(\omega_c t + \varphi_3), \quad (63)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_a t + \varphi_2) + B \cos(\omega_b t + \varphi_2) + C \cos(\omega_c t + \varphi_3), \quad (64)$$

$$x_3 = A \cos(\omega_a t + \varphi_2) + B \cos(\omega_b t + \varphi_2) - C \cos(\omega_c t + \varphi_3). \quad (65)$$

A continuación se presenta el caso particular, que se puede deducir del caso anterior:

Caso 1: los coeficientes de elasticidad son iguales, con $k = k_1 = k_2 = k_3$. Partiendo del caso general, se tiene que:

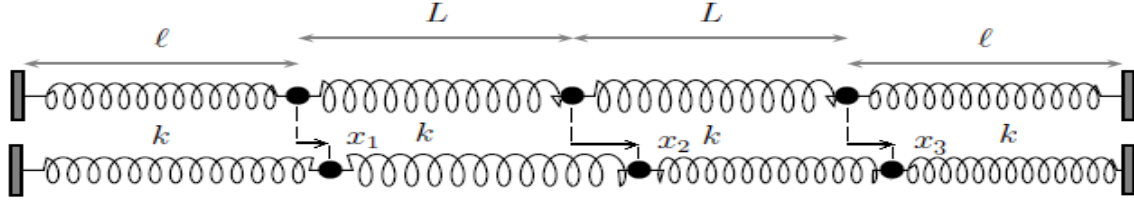


Figura 35: Tres masas idénticas conectadas por cuatro resortes

$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$, $m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$ y $m\ddot{x}_3 = kx_2 - kx_3$,
 encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran
 los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = 2k$, $\lambda_b = k(2 + \sqrt{2})$ y
 $\lambda_c = k(2 - \sqrt{2})$, por lo que $\omega_a = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_b = \sqrt{\frac{k(2+\sqrt{2})}{m}}$ y $\omega_c = \sqrt{\frac{k(2-\sqrt{2})}{m}}$, en
 consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \varphi_2 \right) - C \cos \left(\sqrt{\frac{k(2 - \sqrt{2})}{m}}t + \varphi_3 \right), \quad (66)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \varphi_2 \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{k(2 + \sqrt{2})}{m}}t + \varphi_2 \right) + C \cos \left(\sqrt{\frac{k(2 - \sqrt{2})}{m}}t + \varphi_3 \right), \quad (67)$$

$$x_3 = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \varphi_2 \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{k(2 + \sqrt{2})}{m}}t + \varphi_2 \right) - C \cos \left(\sqrt{\frac{k(2 - \sqrt{2})}{m}}t + \varphi_3 \right). \quad (68)$$

Ejemplo 11. Sistema de tres masa acoplada con cuatro resortes

Cuatro resortes con constantes $k = 13,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_1 = 7,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_2 = 10,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 20,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$,
 están unidos a masas de $m = 0,15 \text{ kg}$, y los extremos libres de los resortes se unen
 a dos soportes fijos, además las superficies carecen de rozamiento y las condiciones

iniciales son $x_1 = -1,0 \text{ m}$, $v_1 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, para la masa uno, $x_2 = 0,0 \text{ m}$, $v_2 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, para la masa dos, $x_3 = 1,0 \text{ m}$, $v_3 = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, para la masa tres.

Utilizando Mathematica:

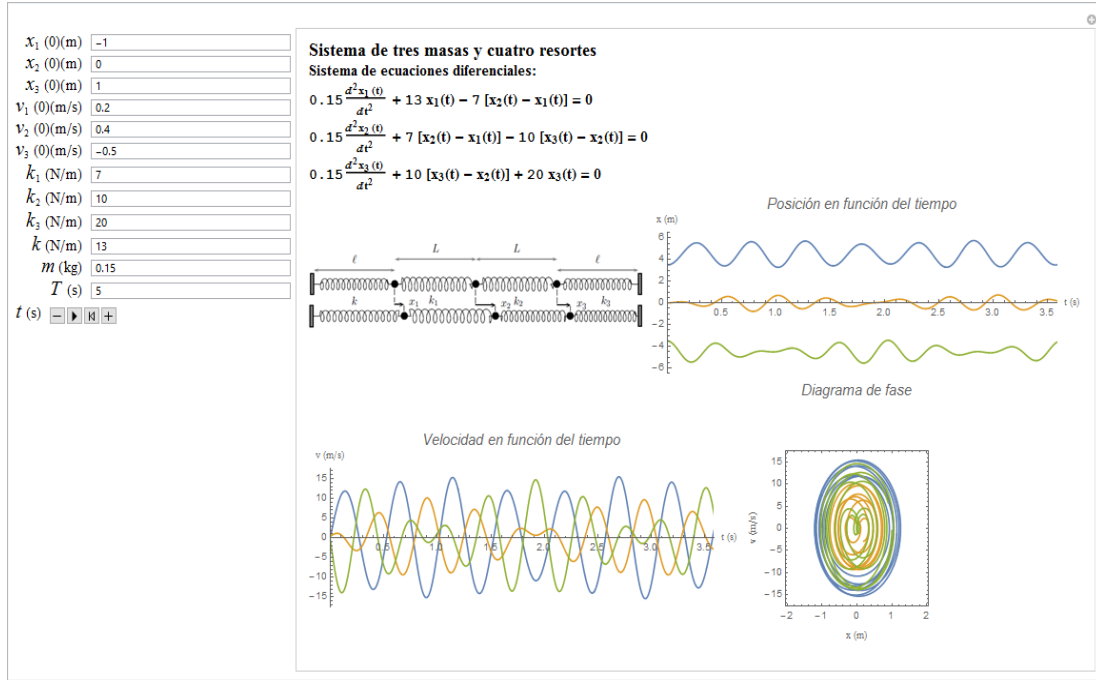


Figura 36: Ejemplo 11

Es posible visualizar las gráficas de posición en función del tiempo, velocidad en función del tiempo y el diagrama de fase (velocidad - posición) gracias a la figura 36. Donde se puede observar el sistema de ecuaciones diferenciales a solucionar, por otra parte los gráficos de posición en función del tiempo y velocidad en función del tiempo y el diagrama de fase de velocidad en función de la posición, y las condiciones iniciales antes declaradas, esto con el fin de analizar el desarrollo del sistema.

3.2.2. Tres masas idénticas conectadas por tres resortes.

Como se muestra en la figura 37, se tienen tres masas idénticas que están conectadas entre sí mediante tres resortes, en donde las constantes de restitución estarán dadas por k , k_1 y k_2 , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son L y ℓ . Se encontrarán las ecuaciones de movimiento que describen esta situación.

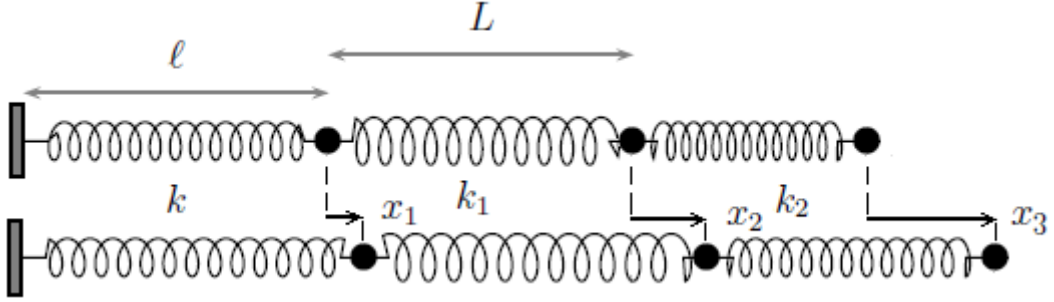


Figura 37: Tres masas idénticas conectadas por tres resortes, con coeficientes de elasticidad k , k_1 y k_2

Utilizando la mecánica lagrangiana para encontrar la ecuación de movimiento, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) = 0, \quad (69)$$

para x_2 , se obtiene,

$$\ddot{x}_2 - \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k_2}{m}(x_3 - x_2) = 0, \quad (70)$$

y finalmente para x_3 , se obtiene,

$$\ddot{x}_3 + \frac{k_2}{m}(x_3 - x_2) = 0, \quad (71)$$

las ecuaciones (44) y (45) comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, para encontrar la solución al sistema, se deben desacoplar las ecuaciones (69), (70) y (71), como se muestra en el anexo 6, y encontrar los valores para las frecuencias ω_a , ω_b y ω_c , para esto se tienen las ecuaciones:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2),$$

entonces los valores propios de la raíz, para este caso son λ_a , λ_b y λ_c , con $\omega_a = \sqrt{\frac{\lambda_a}{m}}$, $\omega_b = \sqrt{\frac{\lambda_b}{m}}$ y $\omega_c = \sqrt{\frac{\lambda_c}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales (69), (70) y (71) son:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (72)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (73)$$

$$x_3 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c). \quad (74)$$

respectivamente.

A continuación se presenta el caso particular, que se puede deducir del caso anterior:

Caso 1: Los coeficiente de elasticidad son iguales, con $k = k_1 = k_2 = k_3$. Partiendo del caso general, se tiene que:

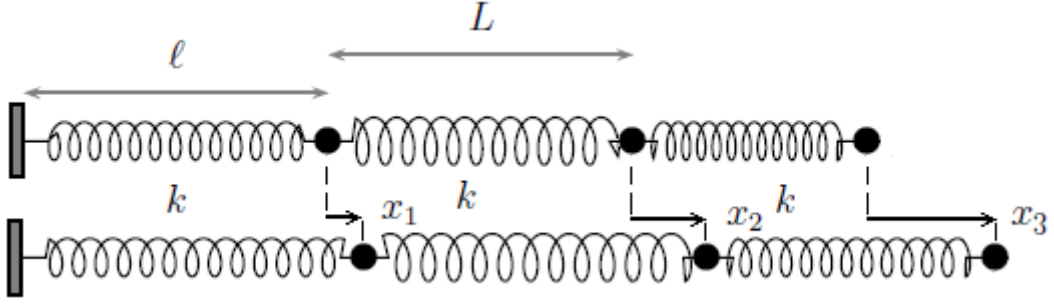


Figura 38: Tres masas idénticas conectadas por tres resortes, con $k = k_1 = k_2$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2),$$

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran

los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = k$, $\lambda_b = 2k$ y $\lambda_c = k(2 - k)$, con

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_b = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{k(2-k)}{m}},$$

en consecuencia la solución de las ecuaciones

diferenciales son:

$$x_1 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) - C \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi_c \right), \quad (75)$$

$$x_2 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) - B \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi_c \right) + C \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi_c \right), \quad (76)$$

$$x_3 = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_a \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi_c \right) + C \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + \varphi_c \right), \quad (77)$$

respectivamente.

3.2.3. Tres masas idénticas conectadas por dos resortes.

Se tienen tres masas idénticas que están conectadas entre sí mediante dos resortes, en donde las constantes de restitución estarán dadas por k y k_1 , la longitud entre las masas cuando están en equilibrio son ℓ y L .

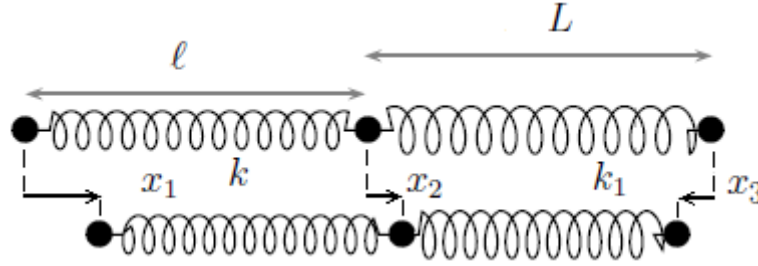


Figura 39: Tres masas idénticas conectadas por dos resortes, con coeficiente de elasticidad k y k_1

Utilizando la mecánica lagrangiana, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_2)^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_2)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0, \tag{78}$$

para x_2 , se obtiene,

$$\ddot{x}_2 - \frac{k}{m}x_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{k_1}{m}\right)x_2 - \frac{k}{m}x_3 = 0, \quad (79)$$

y finalmente para x_3 , se obtiene,

$$\ddot{x}_3 + \frac{k_1}{m}x_3 - \frac{k_1}{m}x_2 = 0, \quad (80)$$

las ecuaciones (78), (79) y (80) comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, se deben desacoplar las ecuaciones (78), (79) y (80), para encontrar la solución al sistema, como se muestra en el anexo 6, y encontrar los valores para las frecuencias ω_a , ω_b y ω_c , para esto se tienen las ecuaciones:

$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$, $m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k_1(x_3 - x_2)$ y $m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$, entonces los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = 0$, $\lambda_b = k + k_1 + \sqrt{k^2 - kk_1 + k_1^2}$ y $\lambda_c = k + k_1 - \sqrt{k^2 - kk_1 + k_1^2}$, por lo que $\omega_a = 0$, $\omega_b = \sqrt{\frac{k+k_1+\sqrt{k^2-kk_1+k_1^2}}{m}}$ y $\omega_c = \sqrt{\frac{k+k_1-\sqrt{k^2-kk_1+k_1^2}}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales (78), (79) y (80) son:

$$x_1 = A \cos(\varphi_a) - C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (81)$$

$$x_2 = A \cos(\varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_c) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (82)$$

$$x_3 = A \cos(\varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_c) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (83)$$

respectivamente.

A continuación se presentan el caso particular, que se puede deducir del caso anterior:

Caso 1: En este caso los coeficientes de elasticidad son iguales, k , con $k = k_1$, se

encontrarán las ecuaciones de movimiento que describen esta situación.

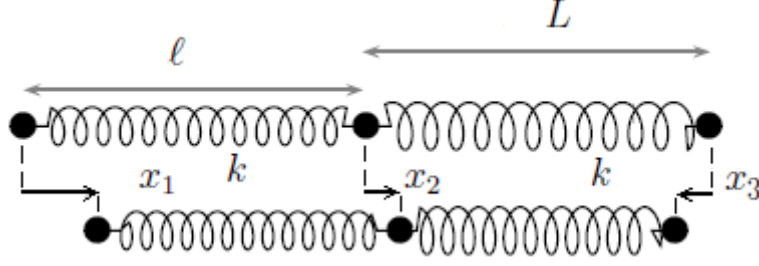


Figura 40: Tres masas idénticas conectadas por dos resortes, con $k_1 = k$

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2),$$

encontrando la solución a este sistema, como se muestra en el anexo 6, se encuentran los valores propios de la raíz, para este caso son, $\lambda_a = 0$, $\lambda_b = k$ y $\lambda_c = 3k$, con

$\omega_a = 0$, $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_c = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales son:

$$x_1 = A \cos(\varphi_a) - C \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_c\right), \quad (84)$$

$$x_2 = A \cos(\varphi_a) - B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_c\right) + C \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_c\right), \quad (85)$$

$$x_3 = A \cos(\varphi_a) + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_c\right) + C \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_c\right), \quad (86)$$

respectivamente.

3.3. Sistema de n masas idénticas acopladas

En este caso el coeficiente de elasticidad está dado por $k, k_1, k_2, \dots, k_n$, se encontrarán las ecuaciones de movimiento que describen esta situación.

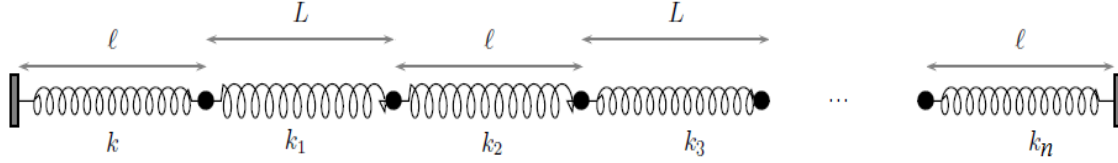


Figura 41: n masas sujetas por n resortes, con coeficiente de elasticidad $k, k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ y k_n

En los apartados anteriores se ha utilizado la mecánica lagrangiana para encontrar más fácilmente las ecuaciones de movimiento, para este caso, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \dots + \frac{1}{2}m\dot{x}_{n-1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2,$$

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2 + \dots + \frac{1}{2}k_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{2}k_nx_n^2,$$

de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U,$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \dots + \frac{1}{2}m\dot{x}_{n-1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2 -$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2 - \dots - \frac{1}{2}k_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 - \frac{1}{2}k_nx_n^2,$$

aplicando la ecuación de Lagrange para x_{n-1} , ya que lo otros casos se han abordado

en la sección anterior,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial (\dot{x}_{n-1})} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial (\dot{x}_{n-1})} = m\dot{x}_{n-1}; \quad \frac{\partial L}{\partial x_{n-1}} = -k_{n-2}(x_{n-1} + x_{n-2}) + k_{n-1}(x_n - x_{n-1}),$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_n + \frac{k_{n-2}}{m}(x_{n-1} - x_{n-2}) - \frac{k_{n-1}}{m}(x_n - x_{n-1}) = 0, \quad (87)$$

aplicando la ecuación de Lagrange para x_n ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = m\dot{x}_n \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) - k_n x_n,$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_n + \frac{k_{n-1}}{m}(x_n - x_{n-1}) + \frac{k_n}{m}x_n = 0, \quad (88)$$

con $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_{n-1}^2 = \frac{k_{n-1}}{m}$ y $\omega_{n-2}^2 = \frac{k_{n-2}}{m}$, las ecuaciones (88) comprenden un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, para encontrar la solución al sistema, se deben desacoplar el conjunto de ecuaciones (88), como se muestra en el anexo 6 y encontrar los valores para las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 , ..., ω_{n-1} y ω_n , para esto se tienen las ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n \ddot{x}_j + \omega_{j-1}^2(x_j - x_{j-1}) + \omega_j^2 x_j = 0 \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (89)$$

entonces se deben encontrar los valores propios de la raíz, para este caso, λ_1 , λ_2 y λ_3 , ..., λ_{n-1} y λ_n con $\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{\lambda_3}{m}}$, ..., $\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{m}}$, en consecuencia la solución de las ecuaciones diferenciales 89 se pueden hallar a partir de la ecuación:

$$\sum_{j=1}^n x_j(t) = a_{jj} A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (90)$$

como se muestra en el anexo 6.

4. Curvas de Lissajous

Se tratarán las curvas de Lissajous, debido a que estas se obtienen a partir de oscilaciones armónicas simples de dos dimensiones, en este apartado se muestra el estudio de éstas curvas utilizando oscilaciones armónicas simples de dos dimensiones. A continuación se evidencia cómo se hace la transposición entre las oscilaciones de una dimensión a dos dimensiones.

4.1. Oscilador armónico simple de una dimensión

Como se vio en la sección sistema masa resorte, la ecuación de movimiento que representa el sistema masa resorte horizontal libre es,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (91)$$

cuya solución puede ser:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \quad (92)$$

en donde A es la amplitud, ω_0 representa la frecuencia y φ_a la fase y gráficamente se observa que en las figuras 42 y 43 estos valores pueden modificar la figura.

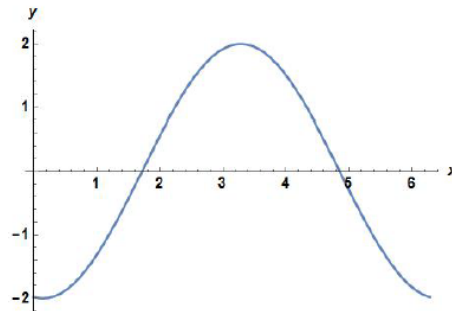


Figura 42: $A = 2$, $\omega_0 = 1$ y $\varphi_a = 3$.

Las figuras 42 y 43 se crearon con la ayuda del el manipulable oscilador armónico

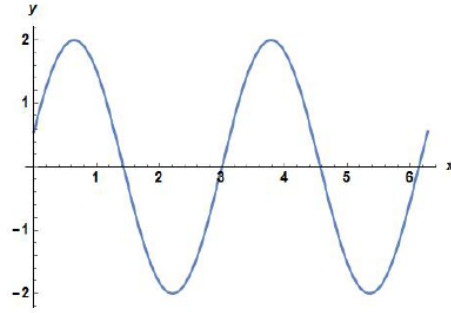


Figura 43: $A = 2$, $\omega_0 = 2$ y $\varphi_a = 5$.

simple cuyo código de programación se puede encontrar en el anexo 7.4 en el apartado de oscilador armónico simple

Otra forma de expresarla solución de la ecuación (91) es,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (93)$$

en este caso la amplitud y la fase están determinadas por los valores de A y B , la frecuencia sigue siendo ω_0 . En la figura 44 si $A = 2$, $B = 1$ y $\omega_0 = 1$. Entonces la amplitud, como se muestra en la figura 44 es 2,25, si se cambian los valores de A y B , $A = 1$, $B = 2$ y la frecuencia se deja igual, como se observa en la figura 45,

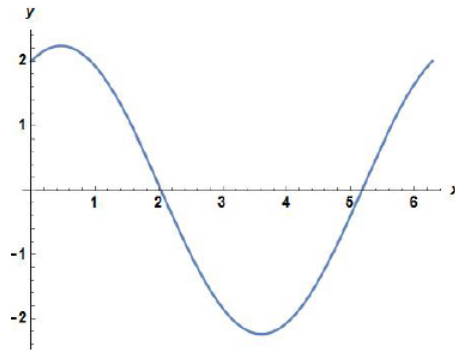


Figura 44: Ecuación (93), $A = 2$, $B = 1$ y $\omega_0 = 1$.

Se observa en las figuras 44 y 45 que los valores de A y B determinan la amplitud

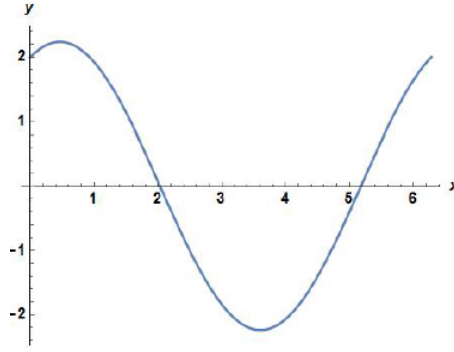


Figura 45: Ecuación (93), $A = 2$, $B = 1$ y $\omega_0 = 1$.

y fase del sistema.

Las figuras 44 y 45 se realizaron haciendo uso del manipulable oscilador armónico simple, cuyo código de programación se puede encontrar en el anexo 7, en el apartado de oscilador armónico simple.

4.2. Oscilador armónico simple de dos dimensiones

Se analiza lo que ocurre con cada una de las soluciones anteriores del sistema unidimensional, en el sistema de dos dimensiones. Primero se pasa el sistema anterior a dos dimensiones como sigue:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \ddot{p} + \omega_0^2 p = 0,$$

en donde $p = (x, y)$.

Se tiene,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

se observa que son dos movimientos oscilatorios independientes con la misma frecuen-

cia ω , luego para el caso particular de la ecuación (92) se obtienen como soluciones del sistema,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \quad (94)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi_b), \quad (95)$$

y para las ecuaciones (94) y (95) respectivamente,

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (96)$$

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t), \quad (97)$$

graficando las ecuaciones (94), (95), (96) y (97), que se pueden obtener las figuras de Lissajous. En las ecuaciones (94) y (95), los valores A y B representan la amplitud de los ejes x y y respectivamente, los valores de φ_a y φ_b determina la fase de cada uno de los sistemas, estos valores se observan mejor en la figura 46, siempre será cerrada a menos que $\omega_0 < 1$.

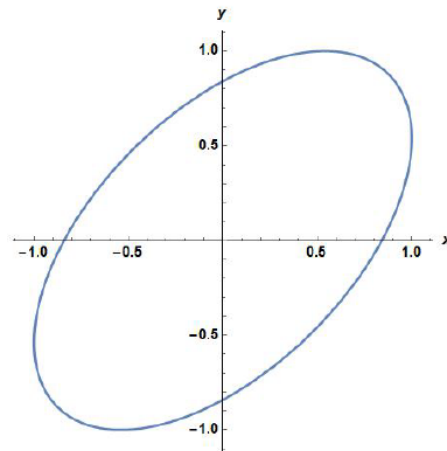


Figura 46: Ecuaciones /94) y (95), $A = 1$, $B = 1$, $\omega_0 = 1$, $\varphi_a = 5$ y $\varphi_b = 6$.

Como las diferencias entre las ecuaciones (94), (95) y (96), (97) son muy pocas en cuanto a la representación, entonces los cálculos se harán sólo con las ecuaciones (94) y (95). Ahora se analiza el caso en que las frecuencias son diferentes, para esto se reescribirán las ecuaciones de la siguiente manera,

$$x(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a), \quad (98)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (99)$$

con $\omega_a \neq \omega_b$. Los valores de A y B representan la amplitud de cada sistema y φ_a , φ_b las fases, en la figura 47 se observa mejor esta situación,

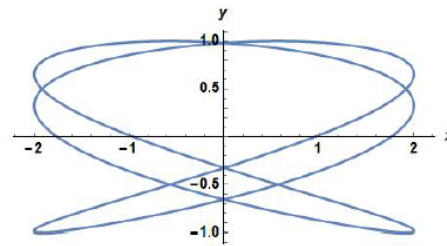


Figura 47: Ecuaciones (98) y (99), $A = 2$, $B = 1$, $\omega_a = 3$, $\omega_b = 2$, $\varphi_a = 1$ y $\varphi_b = 4$.

En la figura 47 se observa que las curvas son cada vez mas complejas, pero se puede determinar cuándo son o no curvas cerradas. Por ejemplo, si una de las dos frecuencias es número entero la curva es cerrada, pero si $\omega_a = n$ y $\omega_b = b$ con $n \notin \mathbb{Z}$ la curva es abierta. Si las frecuencias aumentan entonces las curvas se harán más complejas, incluso si se deja una de ellas estable y la otra varia [4]. Las figuras 46 y 47 se hicieron empleando el manipulable figuras de Lissajous 2D, cuyo código de programación se puede encontrar en el anexo 7.5, en el apartado que lleva el nombre de esta sección.

Aplicaciones cuvar de Lissajous:

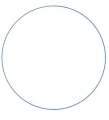
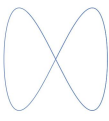
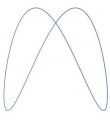
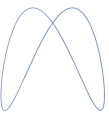
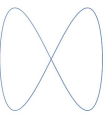
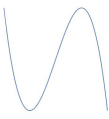
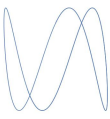
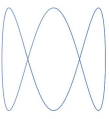
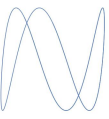
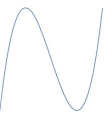
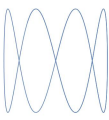
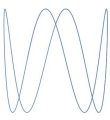
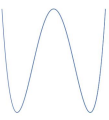
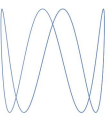
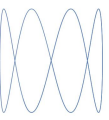
Un osciloscopio es un instrumento que sirve para ver la representación gráfica de las señales eléctricas. Este instrumento mide tensiones en función del tiempo, representa las señales eléctricas en forma de coordenadas en una pantalla. El eje x representa el tiempo y el eje y las tensiones o voltaje, las representaciones que aparecen en la pantalla son las figuras de Lissajous [8]. En el osciloscopio las figuras de Lissajous sirven para medir y comparar las frecuencias (entre los límites 0, 1 y 10, aunque se restringe a frecuencias cuya relación es, el cociente entre números enteros que se encuentran entre dichos límites, con el fin de facilitar su visualización) y fases de las entradas de corriente.

Este método determina la diferencia de fases si se cumplen las siguientes condiciones:

- La frecuencia de las dos señales debe ser la misma
- La amplitud de las dos señales debe ser la misma
- La forma de la onda debe estar perfectamente centrada

La relación entre las dos frecuencias, f_H y f_V , frecuencia horizontal y vertical respectivamente, se puede determinar porque generar una figura que la caracteriza. Dependiendo de la relación entre las frecuencias de las señales y sus diferencias de fase se pueden obtener las figuras de Lissajous. que se presentan en el cuadro 1:

Si las ondas tiene la misma frecuencia $f_H = f_V$, se visualiza alguna curva de la primera fila. Si la diferencia de las dos señales es de 0° o 180° se visualiza una linea

$\frac{f_V}{f_H} = \frac{\omega_H}{\omega_V}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1 : 1					
1 : 2					
1 : 3					
1 : 4					

Cuadro 1: Relación de frecuencias y desfase

recta y si la diferencia es de 90° se observa una circunferencia o una elipse [10].

La relación de frecuencias se puede determinar trazando una tangente horizontal y otra vertical a los bucles (picos redondeados) de la curva cerrada y contando el número de puntos de tangencia con las rectas horizontal y vertical. Entonces la relación entre las dos frecuencias, donde T_H y T_V son el número de puntos de tangencia horizontales y verticales respectivamente es,

$$\frac{f_V}{f_H} = \frac{T_H}{T_V}. \quad (100)$$

Por otra parte las figuras de Lissajous también se pueden utilizar para determinar la

relación de fases de dos ondas de la misma frecuencia. Si las señales tienen la misma fase, resultará como figura una recta inclinada que sube de izquierda a derecha y el ángulo de inclinación dependerá de la amplitud de las dos señales [8].

El método para determinar la diferencia de fases funciona si se cumplen las siguientes condiciones:

- La frecuencia de las dos señales a comparar debe ser la misma.
- La amplitud de las dos señales debe ser la misma.
- La forma de onda debe estar centrada respecto a los ejes $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, o hay que ubicar el punto en el centro del eje de ordenadas.

4.3. Oscilador armónico simple de tres dimensiones

En esta sección se analiza lo que ocurre con cada una de las soluciones anteriores del sistema unidimensional, en el sistema de tres dimensiones. Primero se pasa el sistema anterior a dos dimensiones, como sigue:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \ddot{p} + \omega_0^2 p = 0 ,$$

donde $p = (x, y, z)$, entonces si se tiene,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 ,$$

se obtienen tres movimientos oscilatorios independientes con la misma frecuencia ω_0 , que para el caso particular de la ecuación 92 se obtienen como soluciones del sistema,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \quad (101)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi_b), \quad (102)$$

$$z(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi_c), \quad (103)$$

y para la ecuación (93),

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (104)$$

$$z(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t), \quad (105)$$

$$z(t) = E \cos(\omega_0 t) + F \sin(\omega_0 t), \quad (106)$$

con las ecuaciones (101), (102), (103), (104), (105 y (106), que se pueden obtener las figuras de Lissajous en tres dimensiones. En las ecuaciones (101), (102) y (103), los valores A , B y C representan la amplitud de los ejes x , y y z respectivamente, los valores de φ_a , φ_b y φ_c determina la fase de cada uno de los sistemas, estos valores se observan mejor en la figura 48,

Si $\omega_0 < 1$ la figura no se cierra.

Ahora se analiza el caso en que las frecuencias son diferentes, para esto se reescribirán las ecuaciones de la siguiente manera,

$$x(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a), \quad (107)$$

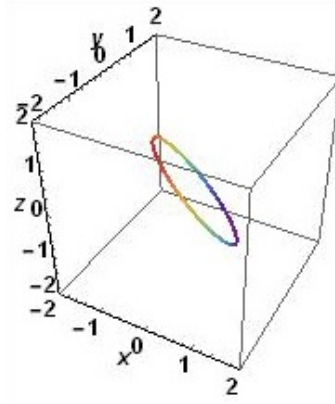


Figura 48: Ecuaciones (101), (102) y (103), $A = B = C = 1$, $\omega_0 = 1$, $\varphi_a = 3$, $\varphi_b = 5$ y $\varphi_c = 7$.

$$y(t) = B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (108)$$

$$y(t) = C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (109)$$

con $\omega_a \neq \omega_b \neq \omega_c$. Los valores de A , B y C representan la amplitud de cada sistema y φ_a , φ_b y φ_c las fases, en la figura 49 se observa mejor esta situación.

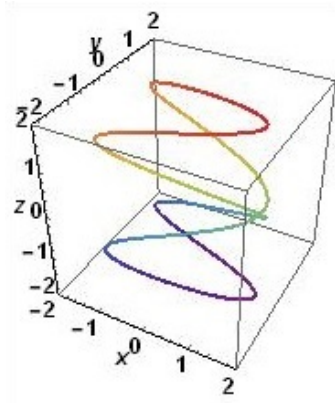
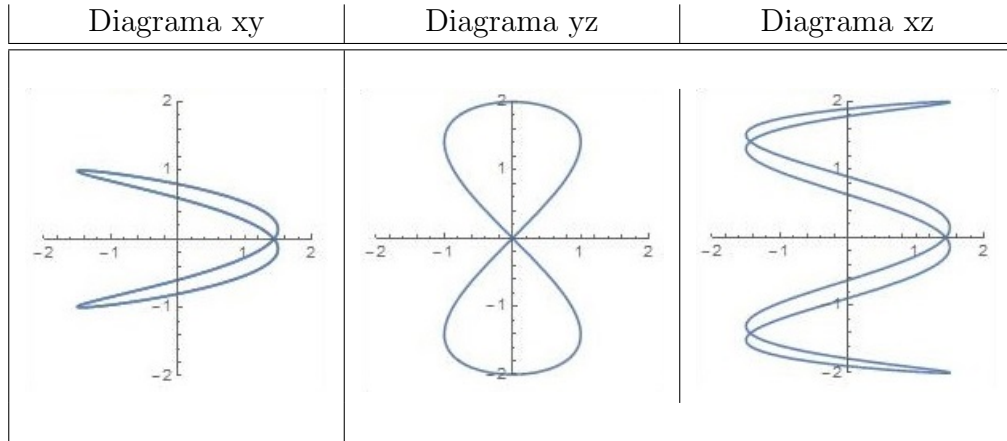


Figura 49: Ecuaciones (107), (108) y (109), $A = 1,5$, $B = 1$, $C = 2$, $\omega_a = 4$, $\omega_b = 2$, $\omega_c = 1$, $\varphi_a = 3$, $\varphi_b = 4$ y $\varphi_c = 2$.

Una vez más es posible apreciar que las figuras cada vez se vuelven más complejas, sin

mencionar que por cada cara del cubo se pueden observar las figuras de Lissajous que componen la figura fina y los diagramas bidimensionales correspondientes se ven en el cuadro 2. Las figuras 48, 49 y 2 se realizaron haciendo uso parcial o total del manipulable figuras de Lissajous 3D, cuyo código de programación se puede encontrar en el anexo 7.6, en el apartado que lleva el nombre de esta sección.



Cuadro 2: Diagramas de dos dimensiones, de las figuras 49, $A = 1,5$, $B = 1$, $C = 2$, $\omega_a = 4$, $\omega_b = 2$, $\omega_c = 1$, $\varphi_a = 3$, $\varphi_b = 4$ y $\varphi_c = 2$.

5. Deducción de la ecuación de onda

Para obtener la ecuación de onda a partir del los sistemas acoplados masa resorte, se debe suponer que el número de oscilaciones acopladas es muy grande y tiende a infinito, la separación que hay entre ellas tiende a cero y que la longitud de onda permanece constante.

Como se tienen que mantener finitas la inercia por unidad de longitud (está relacionado con las propiedades del material, determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión) $\left(\frac{m}{l_0}, \frac{L}{l_0}\right)$ y los acoplamientos elásticos (resortes) $\left(\frac{k^{-1}}{l_0}, \frac{A}{l_0}\right)$, se supone que los parámetros m , L , k^{-1} y A de los osciladores individuales tienden a cero.

La variable de oscilación $u_j(t)$, se hace un cambio de variable $u_j(t) = x_j(t)$ de la ecuación (90), para convertirse en una función de dos variables continuas $u(z, t)$, en donde z es la variable continua que marca y ordena los elementos del movimiento oscilatorio.

En el paso a las redes continuas se consideran los siguientes límites:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow \infty, & l_0 &\longrightarrow 0, & nl_0 &= cte, \\ \{m, L, k^{-1}, A\} & \quad \left\{ \frac{m}{l_0}, \frac{L}{l_0}, \frac{k^{-1}}{l_0}, \frac{A}{l_0} \right\} & \longrightarrow \text{ctes finitas}, \\ z_j &\longrightarrow z, & u_j(t) &\longrightarrow u(z, t), \end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones (90) para una red homogénea de n masas idénticas, no forzada y no amortiguada, queda reescrito de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \omega^2 u(z, t) + \omega_1^2 [u(z + \Delta z, t) - u(z, t)] - \omega_1^2 [u(z, t) - u(z - \Delta z, t)], \quad (110)$$

se ha utilizado la notación $l_0 = \Delta z$. Si se quieren obtener coeficientes finitos al tomar el límite de $\Delta z \rightarrow 0$, se multiplica y se dividen los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (110) por Δz ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = \omega^2 u(z, t) + \omega_1^2 \frac{[u(z + \Delta z, t) - u(z, t) - u(z, t) + u(z - \Delta z, t)]}{\Delta z^2} \Delta z^2,$$

la cantidad $\omega \Delta z$, tiene dimensiones de velocidad y tiende a un límite infinito cuando $\Delta z \rightarrow 0$, entonces se define:

$$v = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \omega_1 \Delta z. \quad (111)$$

Cuando se toma el límite de $\Delta z \rightarrow 0$ el sistema a original de n ecuaciones ordinarias toma la forma de una ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(z, t) = -\omega_0^2 - (z, t)v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(z, t) \quad (0 \leq z \leq L), \quad (112)$$

la ecuación (112) es una ecuación diferencial parcial, lineal, homogénea y de segundo orden en z y t , en la que se deben considerar estas dos posibilidades:

- si $\omega = 0$, se denomina ecuación clásica de ondas.
- si $\omega \neq 0$, se denomina ecuación de Klein-Gordon.

5.1. Solución de la ecuación clásica de onda

Para la ecuación de onda unidimensional de una perturbación que se propaga en un medio unidimensional, está descrita por la función $u(x, t)$ que sea solución de la ecuación diferencial,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(z, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(z, t) \quad \text{con} \quad (0 \leq z \leq L), \quad (113)$$

donde v es la rapidez de la propagación de la onda.

La función solución de la ecuación de onda se plante como un producto de función independientes, se tratará la variable espacial z por separado, de la variable temporal t , por consiguiente se tiene que:

$$u(z, t) = f(z)g(t), \quad (114)$$

la parte espacial es representada por $f(z)$ y la parte temporal por $g(t)$. Reemplazando la ecuación (113) en la ecuación (114) se tiene que,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z)g(t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z)g(t), \quad (115)$$

en este caso $f(z)$ no depende del tiempo entonces se puede tomar la derivada como una constante, en la parte izquierda de la ecuación, en la parte derecha $g(t)$ no depende de la posición entonces también se toma como constante, es decir,

$$f(z)\ddot{g}(t) = v^2 f''(z)g(t), \quad (116)$$

dondedonde $\ddot{g}(t) := \frac{d^2 g}{dt^2}$ es la derivada temporal y $f'' := \frac{d^2 f}{dz^2}$ es la derivada espacial, entonces de la expresión anterior se despejan las funciones derivadas,

$$f''(z) = \frac{\ddot{g}(t)}{v^2 g(t)} f(z), \quad (117)$$

$$\ddot{g}(t) = \frac{v^2 f''(z)}{f(z)} g(t), \quad (118)$$

como la función $g(t)$ no depende de la posición entonces las derivadas de esta tampoco, luego el cociente de la ecuación (117), se puede escribir como una constante,

$$c_g = \frac{\ddot{g}(t)}{v^2 g(t)},$$

lo mismo sucede con la ecuación (118),

$$c_f = \frac{v^2 f''(z)}{f(z)},$$

entonces las ecuaciones (117) y (118) se pueden escribir como sigue,

$$f''(z) = c_g f(z), \quad (119)$$

$$\ddot{g}(t) = c_f g(t), \quad (120)$$

de las dos ecuaciones se puede concluir que la función que se está buscando, es una función en la que su derivada debe ser proporcional a la original y por otro lado, está estructura es de una ecuación diferencial de la que se conocen las soluciones,

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

por consiguiente las soluciones de las ecuaciones (118) y (119) son,

$$f(z) = A_z \cos(kz) + B_z \sin(kz), \quad (121)$$

$$g(t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t), \quad (122)$$

partiendo de la forma general,

$$u(z, t) = f(z)g(t),$$

y sustituyendo las soluciones encontradas, ecuaciones (121) y 122 se obtiene,

$$u(z, t) = [A_z \cos(kz) + B_z \sin(kz)] [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] , \quad (123)$$

efectuando las operaciones respectivas,

$$u(z, t) = A_z A_t \cos(kz) \cos(\omega t) + A_z B_t \cos(kz) \sin(\omega t) + B_z A_t \sin(kz) \cos(\omega t) + B_z B_t \sin(kz) \sin(\omega t) ,$$

utilizando las identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} u(z, t) = & A_z A_t \frac{\cos(kz + \omega t) + \cos(kz - \omega t)}{2} + A_z B_t \frac{\sin(kz + \omega t) - \sin(kz - \omega t)}{2} \\ & + B_z A_t \frac{\sin(kz + \omega t) + \sin(kz - \omega t)}{2} + B_z B_t \frac{\cos(kz + \omega t) - \cos(kz - \omega t)}{2} , \end{aligned}$$

entonces la solución resulta ser,

$$u(z, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) . \quad (124)$$

Ahora se analizarán los parámetros k y ω ; se tiene la ecuación (120) entonces la solución es la ecuación (122) y se hace la sustitución,

$$\frac{d^2}{dt^2} [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] = c_f [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] ,$$

desarrollando las derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [-A_t \omega \sin(\omega t) + B_t \omega \sin(\omega t)] &= c_f [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] , \\ [-A_t \omega^2 \cos(\omega t) - B_t \omega^2 \sin(\omega t)] &= c_f [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] , \end{aligned}$$

factorizando $-\omega^2$ se tiene,

$$-\omega^2 = c_f ,$$

reemplazando este resultado en la ecuación (119),

$$\omega^2 = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} . \quad (125)$$

Si se hace el tratamiento para la ecuación (119) y su solución es la ecuación (121), se obtiene

$$-k^2 = \frac{\ddot{g}(t)}{v^2 g(t)}, \quad (126)$$

si se sustituye la ecuación (125) en la ecuación (126), se obtiene,

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{v^2},$$

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (127)$$

reemplazando en la ecuación (127), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ entonces,

$$v = \frac{\lambda}{T}, \quad (128)$$

donde T es el periodo y λ es la longitud de onda

5.2. Ondas

Las ondas o movimiento ondulatorio dependen de la propagación de una perturbación en un medio determinado (por perturbación se entiende a cualquier tipo de cambio efectuado en un medio que genere una propagación). La propagación y la perturbación tienen dirección, la dirección de la perturbación la determina el lugar en el que se produce la perturbación, y la dirección de la propagación la define la dirección en la que se transmite la energía [6].

Las ondas se pueden clasificar de dos formas, por el medio de propagación y por su dirección; cuando se clasifican por el medio de propagación se dividen en mecánicas y electromagnéticas; pero, si se clasifica por su dirección se habla de paralelas y

perpendiculares, que también son llamadas longitudinales y transversales, respectivamente, esta última clasificación sólo se aplica a la clase de ondas mecánicas y serán descritas en la siguiente sección.

5.2.1. Ondas electromagnéticas:

Son ondas que no necesitan un medio para propagarse, porque se pueden propagar en el vacío o se propagan en un medio material como el agua o el aire. Se pueden definir como ondas que viajan de un lugar a otro originando una perturbación del campo electromagnético. Son ondas transversales, porque el campo eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de la propagación. Ejemplos de las ondas electromagnéticas son las ondas de radio, televisión, las micro-ondas, la radiación infrarroja, visible o ultravioleta.

5.2.2. Ondas mecánicas:

Estas ondas se caracterizan porque necesitan un medio, para que se puedan propagar, se pueden definir como ondas que viajan de un lugar a otro a través de un medio material, lo que origina una perturbación transitoria en el medio en el que se propaga. Todo movimiento ondulatorio tiene una energía asociada, en la que se transporta energía, pero el material no se desplaza.

Un ejemplo claro de ondas mecánicas son las ondas sonoras que necesitan del aire para propagarse. Las ondas mecánicas se pueden clasificar teniendo en cuenta la dirección del movimiento de las partículas de la materia, lo que quiere decir con

respecto a la dirección en la que se propaga la onda [6], como se muestra a continuación.

longitudinales: Si el movimiento de la perturbación es en un sentido y otro, a lo largo de la dirección de la propagación entonces es una onda longitudinal. Por ejemplo el sonido, se propaga a través de medios materiales que mantengan la perturbación, entonces se hace evidente que no se propagan en el vacío, como es el caso del sonido que puede generar un terremoto, pues las partículas y la propagación de onda se mueven en la misma dirección.

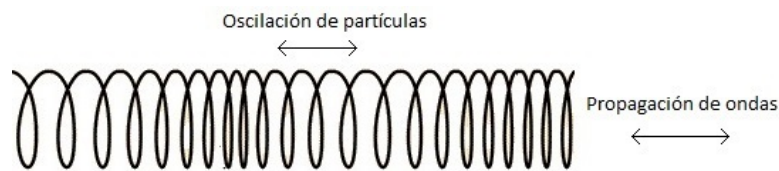


Figura 50: Ejemplo de onda longitudinal, de un resorte que se comprime y se estira.

Transversales Si el movimiento de la perturbación es de forma perpendicular a la dirección de la propagación de la onda, entonces se trata de una onda transversal. Si se presenta el caso de una onda mecánica de desplazamiento, la onda es transversal, si las partículas que están siendo afectadas por la onda son perpendiculares a la dirección de la propagación de la onda.

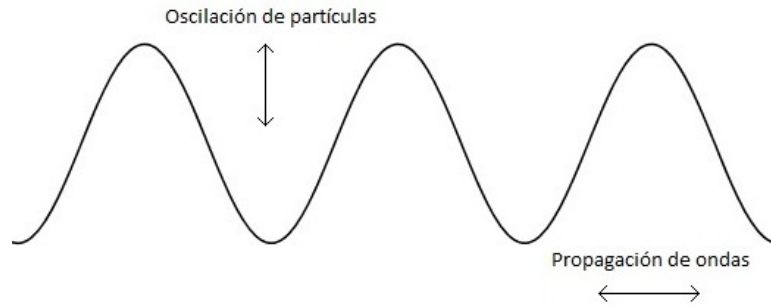


Figura 51: Ejemplo de onda transversal, de una cuerda.

Ondas armónicas o senoidales: Las ondas armónicas son aquellas en que la perturbación se mueven con un movimiento armónico simple y presentan la forma de la función seno o coseno. Algunos de los elementos que caracterizan a estas ondas son:

Fase: Es el movimiento de una onda que esta comprendido entre dos puntos consecutivos de posiciones semejantes.

Periodo (T): Es el tiempo que pasa durante la fase. En una onda periódica es el intervalo de tiempo en que se forma una onda completa. Unidades (s)

Frecuencia (f): El número de fases por cada unidad de tiempo. La frecuencia es inversa al periodo, unidades $s^{-1} = Hz$, $f = \frac{1}{T}$.

Longitud de onda (λ): Es la distancia, que se mide en la dirección de la propagación de la onda, que existe entre dos puntos consecutivos de posiciones semejantes. Para una onda periódica, es la distancia entre dos crestas, dos valles o dos nodos no consecutivos.

Rapidez de onda (v): Magnitud de la velocidad de propagación de la onda, que

se puede determinar sólo por las características del medio, unidades $\frac{m}{s}$, $v = \frac{\lambda}{T}$.

Frecuencia angular (ω): Es la frecuencia angular del movimiento armónico simple, unidades $\frac{Rad}{s}$, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

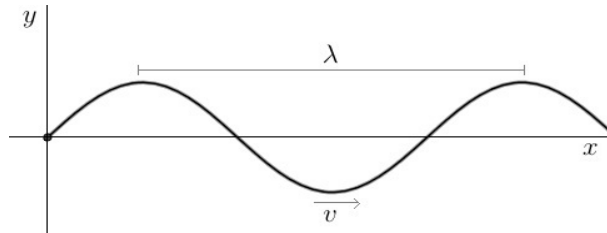


Figura 52: Movimiento de la onda que describe una cuerda.

Amplitud (A): Es la altura de una cresta o la profundidad de un valle, unidades m .

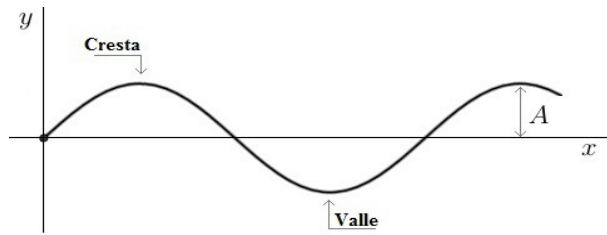


Figura 53: Se muestran las crestas y los valles, que son los puntos más altos y bajos de la onda respectivamente.

Ondas senoidales: Tomando una onda con forma senoidal, teniendo un tren de ondas a lo largo de una cuerda de la forma:

$$y = A \sin(\omega t + kx), \quad (129)$$

donde A representa la amplitud, ω la frecuencia angular, la dirección de la velocidad es $+x$, con $\omega = 2\pi f$ y $k = \frac{\omega}{v}$ por lo que la ecuación (129) queda reescrita como:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (130)$$

El tiempo necesario para que un punto en cualquier posición x realice un ciclo

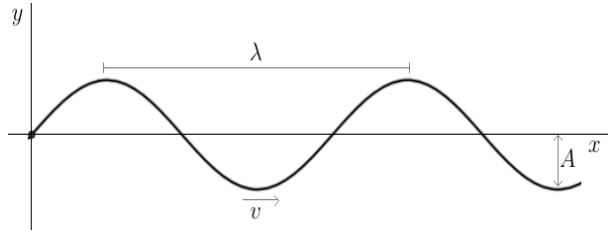


Figura 54: Onda senoidal perturbada en $t=0$ y con amplitud A

completo de movimiento transversal, es el periodo T , en este caso equivale a un cambio de 2π radianes en la fase. Durante ese tiempo la onda recorre una distancia que corresponde a la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{1}{T}, \quad (131)$$

entonces la ecuación (130) se puede reescribir:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right), \quad (132)$$

de acuerdo a esta última expresión se puede concluir que y , en cualquier instante, toma el mismo valor en x .

5.3. Superposición de ondas

La superposición entre ondas, hace referencia a la interferencia de dos o más ondas de la misma naturaleza, con frecuencias idénticas o similares, coinciden simultáneamente en una región del espacio. Luego que estas coinciden, cada una continua su

camino como si no hubiera existido interferencia alguna. De esta interferencia resulta la creación de un nuevo patrón de ondas.

El principio de superposición de ondas establece que la magnitud del desplazamiento ondulatorio en cualquier punto del medio es igual a la suma de los desplazamientos en ese mismo punto [4], es decir, si se tienen dos ondas armónicas,

$$Y_1 = A_1 \sin(kx - \omega_1 t + \varphi_1),$$

$$Y_2 = A_2 \sin(kx - \omega_2 t + \varphi_2),$$

donde A_1 y A_2 representan la amplitud, ω_1 y ω_2 la frecuencia y φ_1 y φ_2 el ángulo de fase, partiendo del caso general,

$$Y = Y_1 + Y_2 = A_1 \sin(kx - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(kx - \omega_2 t + \varphi_2), \quad (133)$$

Se analizan los casos en que las constantes A , ω y φ son iguales o diferentes.

5.3.1. Interferencia constructiva

Esta se refiere a la superposición de dos o mas ondas de la misma naturaleza, con frecuencias iguales, que cuando se interfieren, crean un nuevo patrón de ondas de mayor intensidad (amplitud), que llegan a la cima en el antinodo y retoman su forma original.

Caso 1 Si la amplitud, la frecuencia y la fase son iguales, $A = A_1 = A_2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2$ y $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = 2A \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (134)$$

el movimiento ondulatorio resultante es una onda de amplitud igual al doble de la amplitud original.

Caso 2 Si las amplitudes son diferentes, pero la frecuencia y la fase son iguales, $A_1 \neq A_2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2$ y $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = (A_1 + A_2) \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (135)$$

si las ondas están en fase $x = 0$, el movimiento ondulatorio resultante es una onda de amplitud $A_1 + A_2$.

Las ecuaciones (133) y (134) representan las ondas resultantes, cuando las dos ondas están en fase, quiere decir que ambas alcanzan los valores máximos y mínimos en los mismos instantes y pasan por cero al mismo tiempo, donde el periodo y la frecuencia será el mismo.

Al observar la figura 55, es posible afirmar las ondas contribuyen a la creación de una tercera dando la impresión de que se envuelven la una a la otra.

5.3.2. Interferencia destructiva

Esta se refiere a la superposición de dos o mas ondas de la misma naturaleza, con frecuencias idénticas o similares, que cuando se interfieren, crean un nuevo patrón de ondas de menor intensidad (amplitud), luego de pasar el punto llamado nodo, las ondas vuelven a su estado original antes de interferirse.

Caso 3

Si las ondas que se interfieren están desfasadas en media longitud de onda (se logra

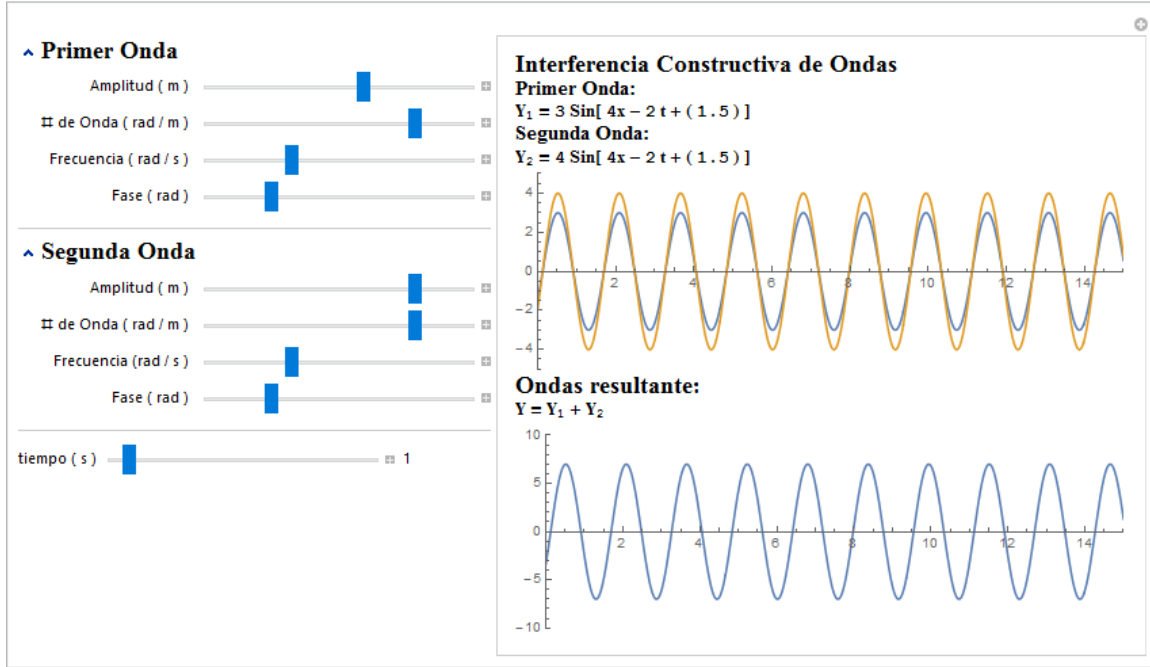


Figura 55: Ejemplo de ondas constructivas.

sumando π radianes al argumento de la función sin), lo que quiere decir que la cresta coincide con el valle de la otra, la resultante de estas dos ondas es una onda de amplitud cero, entonces no habría onda resultante. Si $A = A_1 = A_2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2$ y $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = A \sin(kx - \omega t + \varphi) + A \sin(kx - \omega t + \varphi + \pi) = A \sin(kx - \omega t + \varphi) - A \sin(kx - \omega t + \varphi + \pi) = 0,$$

la ecuación (136) representa el valor de la onda resultante. (136)

Caso 4 Si las amplitudes son diferentes, pero la frecuencia y la fase son iguales,

$A_1 \neq A_2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2$ y $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = (A_1 - A_2) \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (137)$$

el movimiento ondulatorio resultante es una onda de amplitud $|A_1 - A_2|$. Si las

ondas están en fase $x = 0$, serán opuestas si $\varphi = \pi$, quiere decir que ambas alcanzan los valores máximos y mínimos en los mismos instantes y pasan por cero al mismo tiempo aunque sus sentidos son opuestos como se observa en la figura 56.

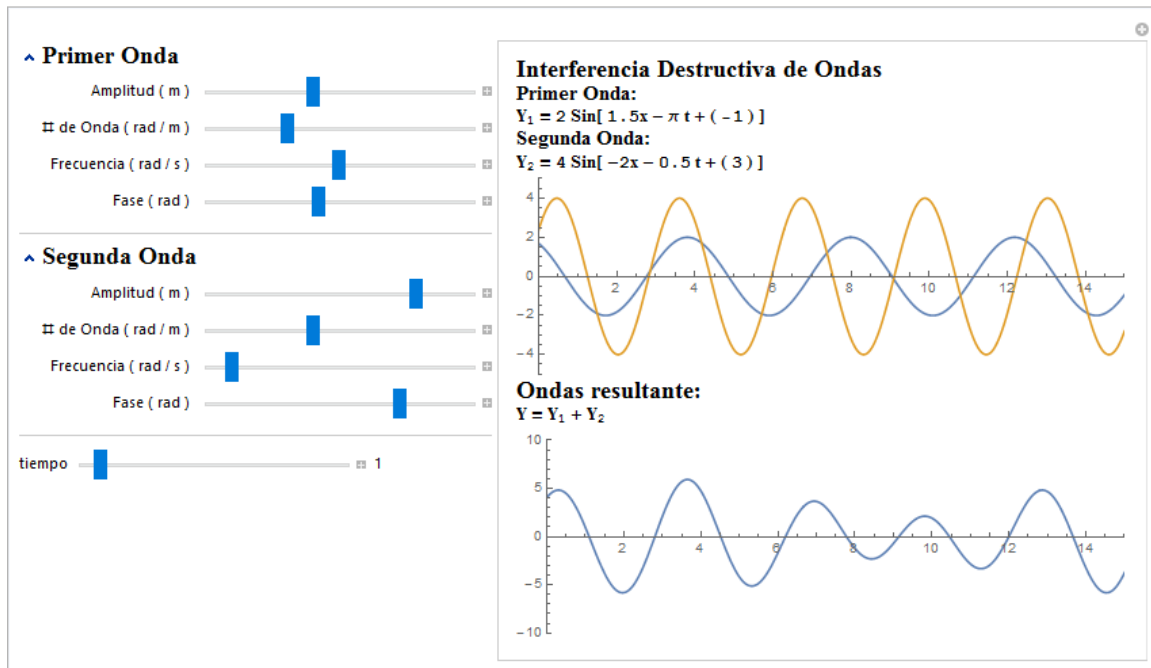


Figura 56: Ejemplo de ondas destructivas.

Como es posible observar las ondas por separado tienen una amplitud considerable pero al realizar la superposición de las ondas se tiene como resultado una curva con una amplitud que en este caso tiende a ser nula. Las figuras correspondientes a los ejemplos de ondas constructivas y destructivas fueron realizadas con la ayuda del manipulable superposición de ondas que se puede encontrar en el anexo 7.3 en el apartado interferencia de ondas

La interferencia de ondas constructivas y destructivas, son los casos extremos, para la interferencia de ondas, los casos intermedios en los que las ondas componentes

están desfasadas una de la otra por cualquier fracción de longitud de onda, se presentan a continuación.

Caso 5 Si las amplitudes y las frecuencias son diferentes, pero las fases son iguales, se tiene $A_1 \neq A_2$, $\omega = \omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = A_1 \sin(kx - \omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_2), \quad (138)$$

utilizando identidades trigonométricas y factorizando se obtiene,

$$Y = A_1 [\sin(kx - \omega t) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos(kx - \omega t)] + A_2 [\sin(kx - \omega t) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos(kx - \omega t)],$$

si se toma,

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2,$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2,$$

entonces,

$$Y = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

por lo que la onda compuesta es senoidal y con igual frecuencia, aunque su amplitud y fase sean diferentes. Para este caso las fases entre las dos ondas que interfieren tienen una diferencia de fase múltiplo par de π , la amplitud que resulta es un máximo, pero si es múltiplo impar, da un mínimo.

Caso 6 Si las amplitudes son iguales, pero la frecuencia y las fases son diferentes, $A = A_1 = A_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, la ecuación (133) queda reescrita como,

$$Y = A \sin(kx - \omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(kx - \omega_2 t + \varphi_2), \quad (139)$$

utilizando identidades trigonométricas y factorizando se obtiene,

$$Y = 2a \sin \left[\frac{1}{2}(2kx - (\omega_1 + \omega_2)t) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2) \right],$$

ahora se define la fase y la frecuencia como sigue,

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2); & \varphi' &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \omega'' &= \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2); & \varphi'' &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2),\end{aligned}$$

entonces,

$$Y = 2A \sin(\omega't + \varphi') \cos(\omega''t + \varphi''),$$

la onda resultante son grupos de ondas que están separadas por nodos, que se producen periódicamente. Si las frecuencias son cercanas entonces los nodos estarán mas separados, pero si las frecuencias son iguales los nodos desaparecen.

6. Ondas no sinusoidales:

No todas las ondas tienen una representación sinusoidal, como pasa con las ondas de sonido que emiten diversos instrumentos, dicho de otra forma, es distinta la onda que emite un clarinete a la que emite un piano y estas no son sinusoidales pero si tienen un periodo, luego si es posible encontrar una representación matemática a partir de senos y cosenos, con ayuda del teorema de Fourier que permite expresar cualquier función periódica mediante sumas de senos y cosenos e identificando cuales son sus frecuencias.

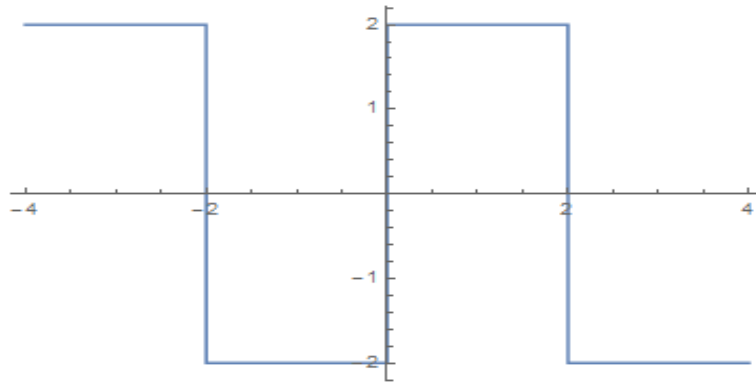


Figura 57: Onda Cuadrada

La figura 57 muestra un clásico ejemplo de las ondas no sinusoidales esta es la onda cuadrada.

6.1. Series de Fourier

Cualquier función de una variable x que este definida entre dos límites y que se repite periódicamente, que además tienen un número finito de discontinuidades puede ser representada mediante la serie de Fourier, de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx)] + \sum_{n=0}^{\infty} [b_n \sin(nx)] , \quad (140)$$

usando las propiedades de sumatorias se obtienen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] ,$$

como las funciones $\cos(x)$ y $\sin(x)$ tiene periodo 2π y se tienen que el periodo de la función no sinusoidal tiene periodo $2L$, el periodo resultante es $\frac{\pi}{L}$, de modo que se

tiene,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \left[\frac{n\pi}{L} x \right] + b_n \sin \left[\frac{n\pi}{L} x \right] \right) ,$$

cuando $n = 0$ se tiene,

$$a_0 \cos \left[\frac{0\pi}{L} x \right] + b_0 \sin \left[\frac{0\pi}{L} x \right] = a_0 ,$$

entonces,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left[\frac{n\pi}{L} x \right] + b_n \sin \left[\frac{n\pi}{L} x \right] \right) , \quad (141)$$

cada uno de los coeficientes de la sumatoria se denominan coeficientes de Fourier y se obtiene mediante la solución de las siguientes integrales, para una función periódica:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx ,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx ,$$

6.1.1. Funciones pares e impares

Es importante definir las funciones pares e impares cuando se habla de series de Fourier, porque si se realizan gráficas de las funciones que representan algunos tipos de ondas en las que se puede identificar de manera adecuada la paridad o no de las funciones. A continuación se da una definición de función par e impar:

Función par: una función es par si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, lo que quiere decir que $f(t) = f(-t)$

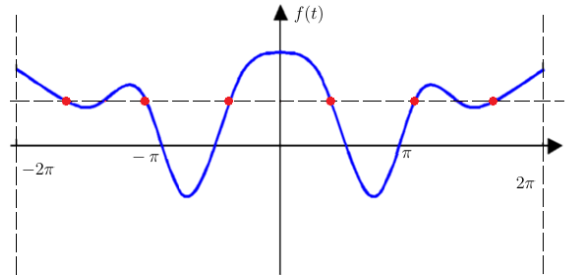


Figura 58: Función par.

Función impar: una función es impar si su gráfica es simétrica respecto al origen, lo que quiere decir que $-f(t) = f(-t)$

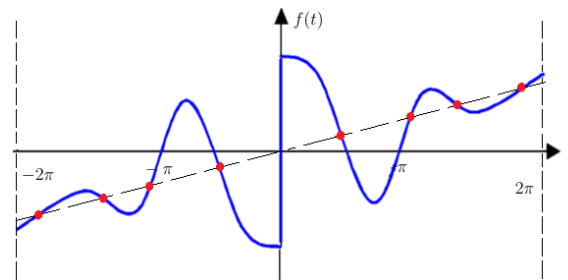


Figura 59: Función impar.

Transformada de Fourier

Sea la función $f(t)$, localmente integrable, donde su integral valor absoluto esta acotada en $\mathbb{R}$. la transformada de Fourier se define a partir de la siguiente ecuación:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad (142)$$

su trasformada inversa es,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (143)$$

se observa que en las ecuaciones (142) y (143) se puede calcular $F(\omega)$, cuyo dominio es la frecuencia a partir de $f(t)$, en el que el dominio es el tiempo, y viceversa.

La transformada de Fourier se denota por $F(\omega)$ de $f(t)$ que respectivamente se denota por F o $\vec{f}$, es decir

$$F[f(t)] = F(\omega) = \vec{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

ahora para obtener $f(t)$ a partir de $F(\omega)$, que se llama la transformada de Fourier inversa y se denota por F^{-1} ,

$$F^{-1}[f(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} dt,$$

como algunas funciones no poseen transformada de Fourier, entonces debe cumplir la condición de suficiencia para que la transformada de Fourier de $f(x)$, $F(\omega)$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty, \quad (144)$$

lo que quiere decir que $f(x)$ sea de cuadrado sumable. Funciones que no vayan asintóticamente a cero cuando x tienda a ∞ y $-\infty$ en general no tiene transformadas de Fourier.

A continuación se observaran las aproximaciones de tres ondas no sinusoidales mediante las series de Fourier, con el animo de tener mayor claridad en cuanto al método utilizado por Fourier, dichas ondas son, la onda cuadrada, la onda escalonada y la onda triangular. Se utilizaron las series de Fourier para programar y modelar en

Mathematica dichas ondas, como se muestra a continuación.

Onda cuadrada: la representación por partes de la onda cuadrada es,

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $L = 2$ al calcular los coeficientes de Fourier se obtiene,

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{4(1 - \cos[n\pi])}{n\pi},$$

en la figura 60 se puede apreciar la serie de Fourier asociada

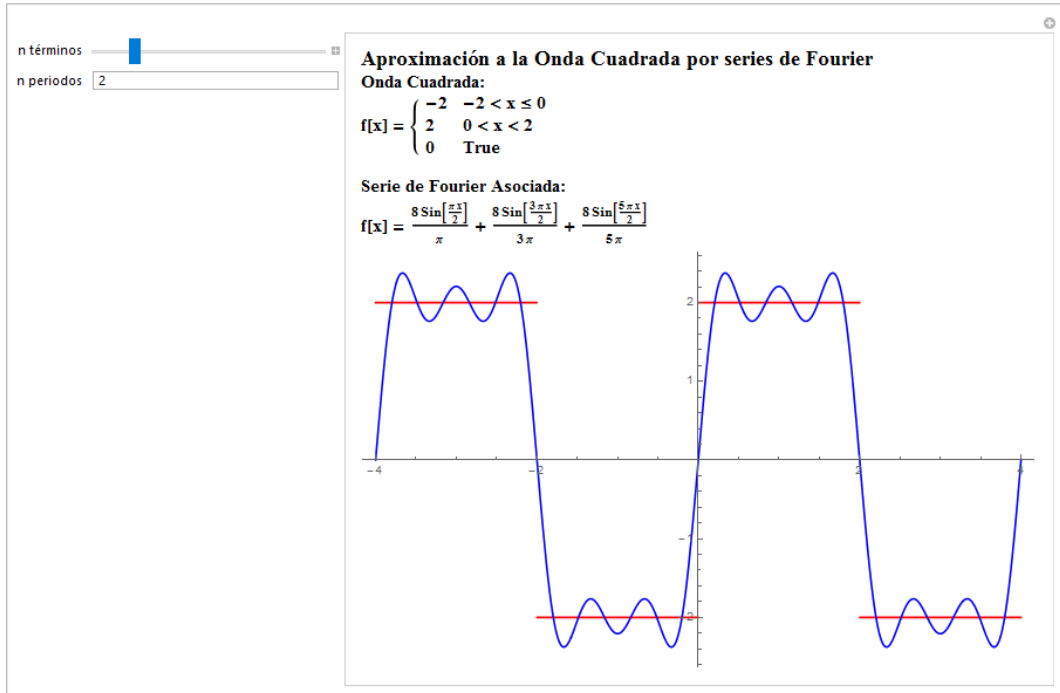


Figura 60: Onda Cuadrada aproximación por series de Fourier, con una aproximación de orden 6

Onda escalonada: la representación a trozos de la onda escalonada es,

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

como $L = 2$ al calcular los coeficientes de Fourier se tiene,

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2(n\pi \cos[n\pi] - 2 \sin\left[\frac{n\pi}{2}\right])}{n^2\pi^2},$$

la figura 61 muestra la serie de Fourier asociada

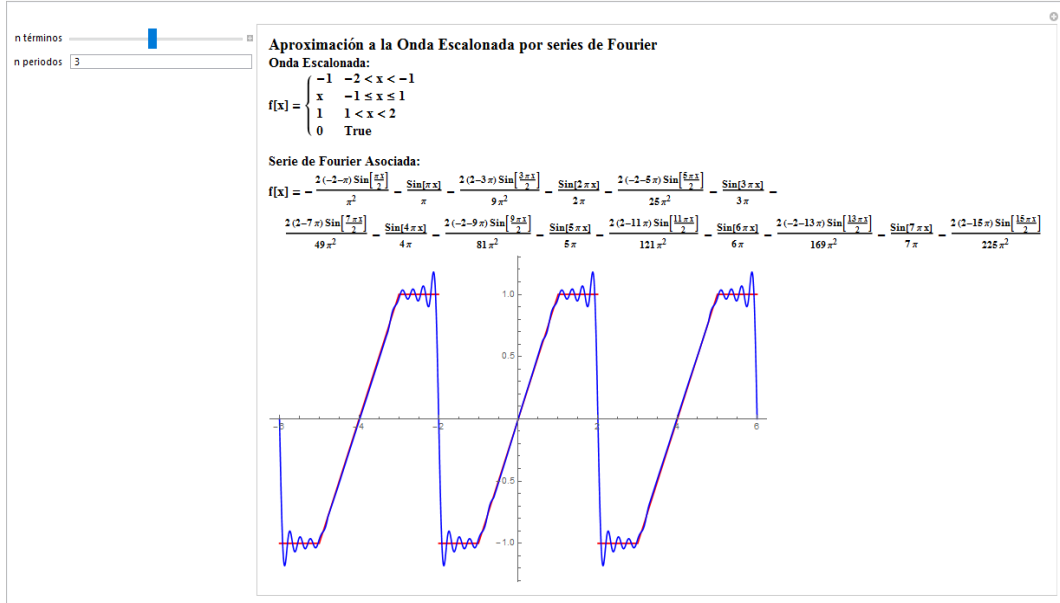


Figura 61: Onda Escalonada aproximación por series de Fourier y se cuenta con una aproximación de orden 15

Onda triangular: la representación por partes de la onda triangular es,

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $L = 2$ al calcular los coeficientes de Fourier se obtiene,

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2(-2 + 2\cos[n\pi] + n\pi \sin[n\pi])}{n^2\pi^2},$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 0,$$

en la figura 62 es posible observar la serie de Fourier asociada

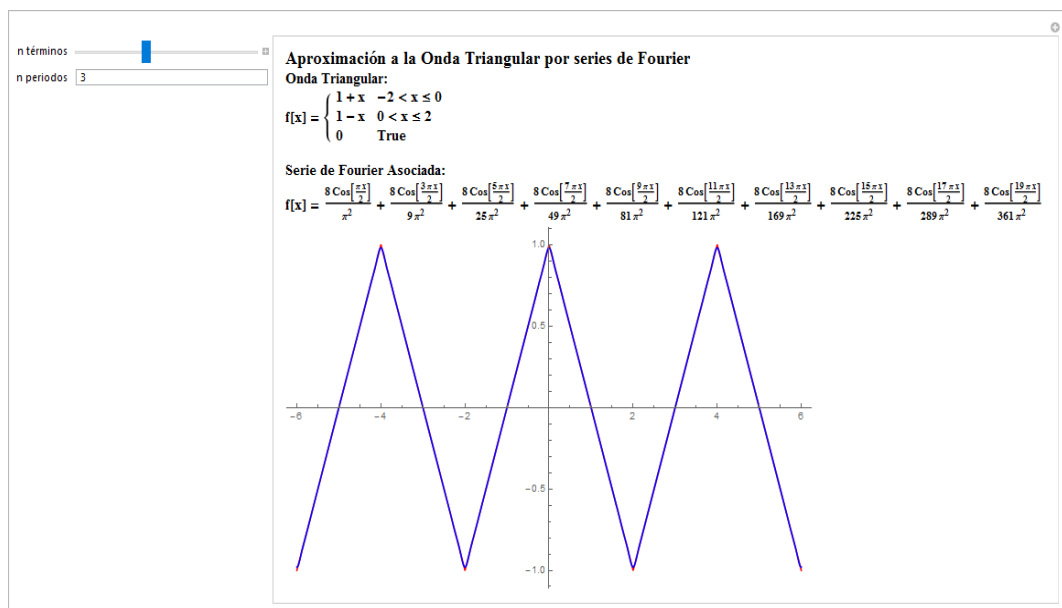


Figura 62: Onda Triangular, aproximación por series de Fourier, con una aproximación de orden 20

7. Aplicaciones

Se presentan las aplicaciones en química y física del sistema oscilatorio masa resorte, con una molécula triatómica y ondas, con el modelo del ADN.

7.1. Moléculas triatómicas:

Las moléculas triatómicas son un grupo de átomos ligados, se representan con el símbolo del elemento al que pertenecen y a este se le añade el número de átomos. El agua (H_2O), el dióxido de carbono (CO_2), el amonio (NH_4), el ácido sulfúrico (H_2SO_4), el propano (C_3H_8), el hidróxido de sodio ($Na(OH)$) y el ácido fosfórico (H_3PO_4), son ejemplos de moléculas triatómicas.

Se va a describir el comportamiento mecánico de una molécula lineal de CO_2 :

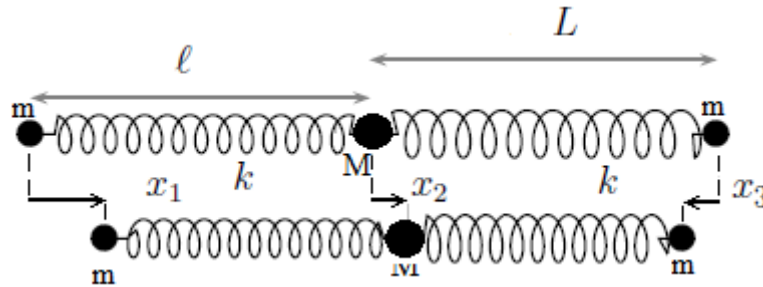


Figura 63: Modelo mecánico para la molécula CO_2

Utilizando la mecánica lagrangiana para encontrar la ecuación de movimiento, se determina la energía cinética (K) de la masa del movimiento y la energía potencial elástica asociada al resorte (U) como sigue,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2,$$

m es la masa del oxígeno y M la masa del carbono, de esta forma el Lagrangiano del sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2,$$

aplicando la ecuación de Lagrange para x_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m\dot{x}_1 & \frac{\partial L}{\partial x_1} &= k(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0, \quad (145)$$

para x_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= M\dot{x}_2 & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -k(x_2 - x_3) + k(x_3 - x_2), \end{aligned}$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{M}(-x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 \quad (146)$$

y finalmente para x_3 ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= m\dot{x}_3 & \frac{\partial L}{\partial x_3} &= -k(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

se obtiene,

$$\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(-x_2 + x_3) = 0, \quad (147)$$

Para encontrar la solución al sistema, se deben desacoplar las ecuaciones (145), (146)

y (147), como se muestra en el anexo 6, y encontrar los valores para las frecuencias

ω_a , ω_b y ω_c , que para este caso son $\omega_a = 0$, $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$, en

consecuencia se presentan tres modos normales, hallando los vectores propios, que

se describen en el anexo 6:

- para $\omega_a = 0$ el vector propio es, $v(1, 1, 1)$, en este modo normal, todas las masas tiene en mismo desplazamiento, como se observa en la figura 64.

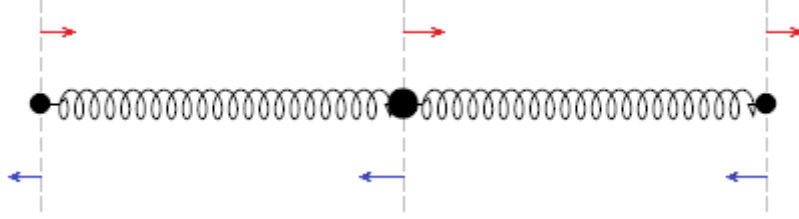


Figura 64: Modo normal para $\omega_a = 0$

- para $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{m}}$ el vector propio es, $v(1, 0, -1)$, en este modo normal los desplazamientos de las masas m son opuestos mientras la masa M permanece estática, como se observa en la figura 65.

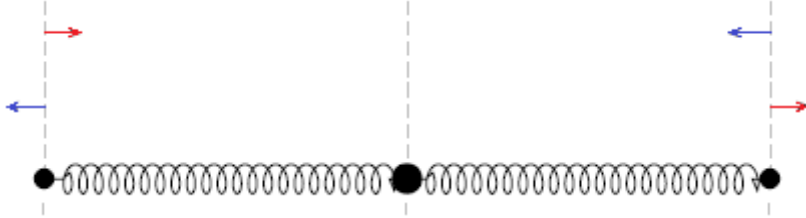


Figura 65: Modo normal para $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- para $\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$ el vector propio es, $v(0, 0, 0)$, en este modo normal los desplazamientos de las masas m son iguales y la masa central M lo hace en dirección opuesta a estas, como se observa en la figura 66.

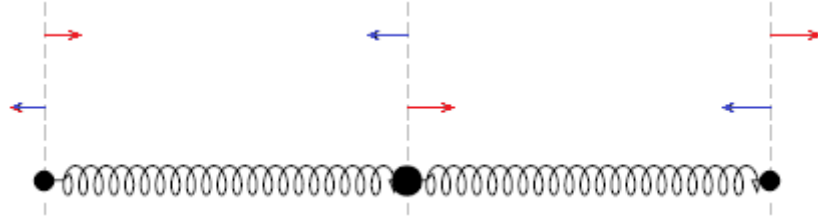


Figura 66: Modo normal para $\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$

7.2. Modelo de Englander et al.

En 1980 S.W. Englander et al. proponen un modelo mecánico bastante sencillo, para describir los estados ante la ruptura de los puentes de hidrogeno presentes en los enlaces de las bases (Adenina - Timina, Citosina - Guanina) que conforman las cadenas del ADN.

La idea de Englander et al. consiste en modelar la estructura, azúcar - fosfato por una cadena de osciladores acoplados, las bases son modeladas por péndulos. Considerando sólo los movimientos giratorios en el plano xy , además, asume que la otra cadena generada por la ruptura de la molécula ADN produce un potencial efectivo sobre la primera cadena de la forma $V_e = -mgh$, algo análogo a un campo gravitatorio.

Las bases poseen un momento de inercia I y los nucleótidos (enlaces azúcar-fosfatos) se comportan como un resorte de torsión con una constante τ ver figura 67 y 68.

Si I es el momento de inercia y τ el coeficiente de torsión de los nucleótidos. Entonces el hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_n \frac{I}{2} \dot{\varphi}_n^2 + \sum_n \frac{\tau l^2}{2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + V_e(\varphi_1, \dots, \varphi_N), \quad (148)$$

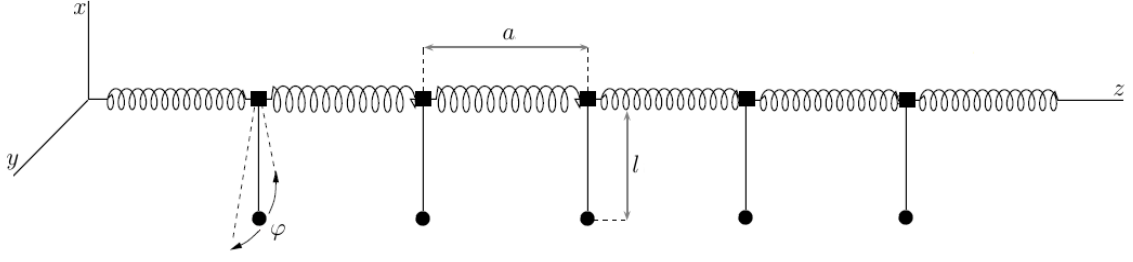


Figura 67: Modelo mecánico de una doble cadena de ADN

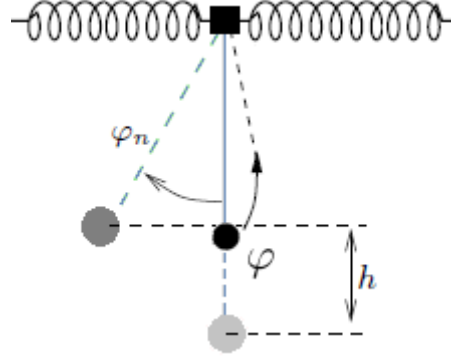


Figura 68: Movimiento de rotación en el modelo mecánico de una doble cadena de ADN, donde $h = l(1 - \cos \varphi_n)$.

por lo que las ecuaciones de movimiento que describen el sistema son:

$$I\ddot{\varphi}_n = \tau l^2(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi_n}, \quad (149)$$

si se considera que $V_e = -mgh$ entonces se tiene para φ_n la ecuación,

$$I\ddot{\varphi}_n = \tau l^2(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) - mgl \sin \varphi_n, \quad (150)$$

si ahora se supone que la distancia a (distancia entre los nucleótidos) es lo suficientemente pequeña, la ecuación 149 por derivadas parciales se obtendría,

$$I\varphi_{tt} = \tau a^2 l^2 \varphi_{zz} + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi}, \quad (151)$$

$$\varphi_{tt} = \varphi_{zz} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varphi},$$

utilizando variables adimensionales,

$$\varphi TT = \varphi ZZ + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi}, \quad (152)$$

y su ecuación en derivadas parciales adimensionales,

$$\varphi TT - \varphi ZZ = \sin \varphi, \quad (153)$$

que es la ecuación de Sine-Gordon. Las soluciones que se presentan a la ecuación (153) son conocidas como kink y antikink, que se muestran en el anexo 6,

$$\varphi(Z, T) = \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{Z - VT}{\sqrt{1 - V^2}} \right) \right], \quad |V| < 1. \quad (154)$$

La particularidad de estas ondas viajeras, es que su energía se localiza al rededor del centro kink y antikink. las soluciones de las ecuaciones kink y antikink corresponden a la propagacion de los estados abiertos del ADN [3]. si se supone que se tiene dos cadenas, y cada una de ellas genera un potencial efectivo $V_e(\varphi_{n,j}) = mg_j l \cos \varphi_{n,j}$, $j = 1, 2$, sobre la otra. Las ecuaciones de movimiento son dos ecuaciones desacopladas de Sine-Gordon,

$$\begin{aligned} \varphi 1_{tt} &= \varpi_1^2 \varphi 1_{zz} - \omega_1^2 \sin \varphi_1, \\ \varphi 2_{tt} &= \varpi_2^2 \varphi 2_{zz} - \omega_2^2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

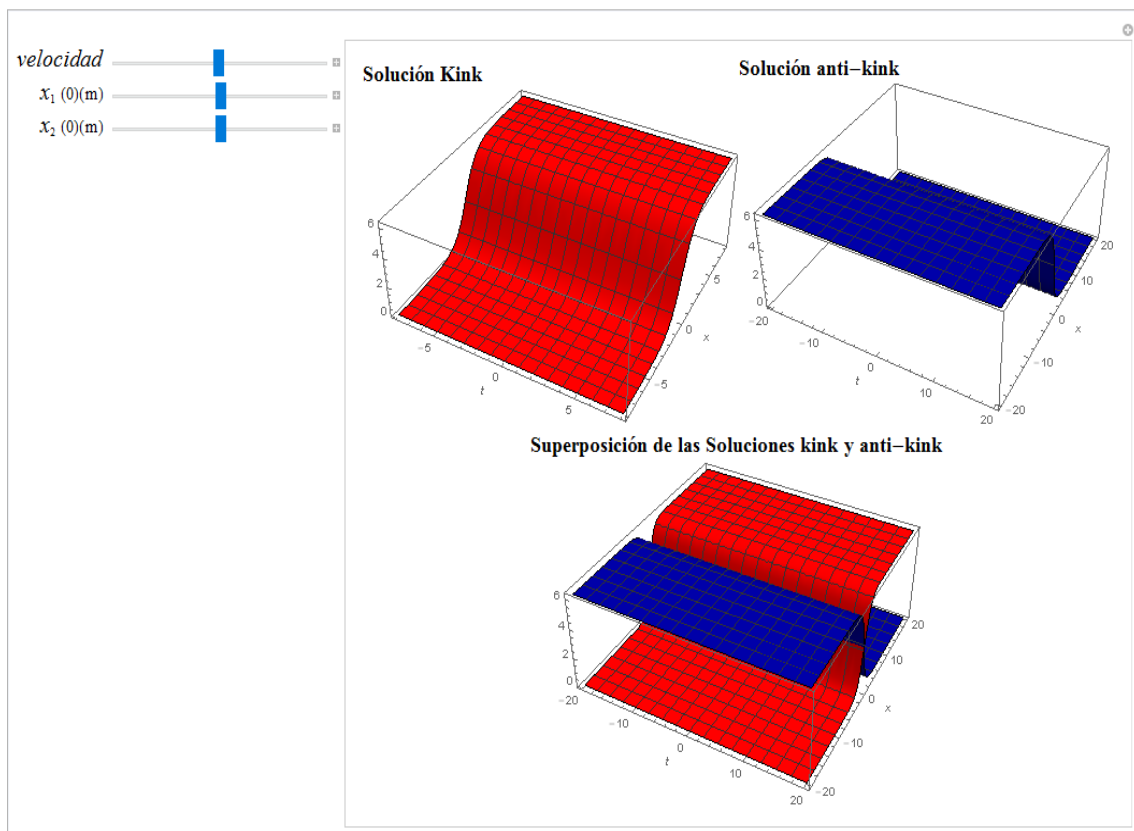


Figura 69: gráficos de las soluciones kink y anti-kink en 3D.

8. Conclusiones

Durante la creación de esta monografía se logró estudiar los sistemas oscilatorios masa resorte propuestos, los cuales son el movimiento armónico simple, el amortiguado y el forzado, de dos tipos de formas los cuales son, el uso de la física clásica empleando las leyes de Newton y por otra parte el uso de la mecánica Lagrangiana que se hace recurriendo al análisis hecho por Lagrange. Además se estudiaron otros sistemas oscilatorios que no se habían propuesto como los diferentes sistemas acoplados, dichos sistemas son los que involucran dos masas y tres masas, y de esta manera deducir el modo general de n masas idénticas.

Con respecto a los manipulables o applets relacionados a los sistemas oscilatorios, aunque, inicialmente se tenía contemplado realizar los manipulables o applets de manera individual, se decidió realizar un manipulable que incluyera todos los sistemas antes mencionados, estos tienen las figuras de posición en función del tiempo, velocidad en función del tiempo, además, se realizó un manipulable que muestra los diagramas de fase de los sistemas oscilatorios. Por otra parte, se realizó un manipulable que muestra la posición velocidad y aceleración en función del tiempo de los sistemas acoplados que involucran dos masas.

Con relación a los sistemas de ondas se realizó la deducción de la ecuación de una onda partiendo de la ecuación del sistema acoplado de n masas idénticas y dando como resultado la ecuación general de una onda, el manipulable creado con respecto a las ondas, es el de la superposición de ondas para mostrar cuando la interferencia

de ondas puede ser constructiva o destructiva bajo ciertas condiciones.

Otro elemento de estudio fue la superposición de ondas de manera perpendicular, dando como resultado las figuras de Lissajous, estas se estudiaron en dos y tres dimensiones para los cuales se realizaron los manipulables en los que se puede observar la figura de Lissajous resultante y las ondas unidimensionales o sistemas oscilatorios que lo componen.

Se mostró que dentro del campo de la química existen aplicaciones de los sistemas oscilatorios, presentando un modelo que es aplicable a los tipos de moléculas triatómicas. También se presentan la aplicación en el campo de la biología con el modelo de ruptura del ADN, en la estructura azúcar - fosfato, a través de una cadena de osciladores acoplados.

Bibliografía

- [1] Agüero, C., Fallas, D., (S.F.), *Mathematica Conceptos generales y aplicación*, Universidad de Costa Rica, ECCI, San José, Costa Rica.
- [2] Canovás, J. (2010), *Programación con Mathematica*, Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena.
- [3] Englander, S.W., Kallenbach, N .R., Heeger, A.j., Krumhans, A.J., Litwin A., *Nature of the open state in long polynucleotid double helices: possibility of soliton escitations*, USA 77(1980), 7222 - 7226.
- [4] French, A., (S. F.), *Vibracions y ondas*, Massachusets institud of tecnology, Revertre S.A.
- [5] Goldstein, H. (2006), *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté.
- [6] Howard, G.(215), *The Physics of waves*, Harvard University, New Jersey, editorial Prentice-Hall, Inc.
- [7] Jewett, W.,. Serway, R, *Física para ciencias e ingeniería*, sexta edición vol.1, Bogotá: Editorial Thomson.

- [8] Manejo del Osciloscopio (S.F.), Recuperado el 2015 de mayo de 27, de <http://www.uhu.es/adoracion.hermoso/Documentos/practica-2-manejo-osciloscopio.pdf>

- [9] Ramírez, A., Ruiz C., Takeuchi, Y., (1994), *Ecuaciones Diferenciales*, Colombia, Editorial Limusa S. A.

- [10] School of Mathematics and Statistics (Ed.). (2015). *The MacTutor History of Mathematics archive*. (U. o. Scotland, Productor) Recuperado el 05 de Abril de 2015, de The MacTutor History of Mathematics archive: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>

- [11] Yang, z., Zhong, W.(2014), *Analytical solution to Sine-Gordon Equation With Variable Coefficient*, Romanian Reports In Physics, Vol. 66, num. 2, pp. 262-273.

- [12] Zill, D. (2009), *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, novena edición, Cengage learning.

ANEXOS

Anexo 1: Jules Antoine Lissajous

Matemático y físico Francés. Nació en Versalles (Francia), el 4 de mayo de 1822, reconocido por las curvas que estudió, que fueron analizadas por Nathaniel Bowditch en 1815 con la ayuda de un péndulo compuesto, en 1841 entró en la École Normale Supérieure. En 1847 fue nombrado profesor de Matemáticas en el Liceo Saint-Louis, en donde permaneció hasta 1874.

En 1855 hizo estudios, reflejando con un espejo, un haz de luz sobre otro espejo, que se encontraba vibrando, las figuras resultantes son hoy conocidas como las figuras o curvas de Lissajous. Del estudio de las curvas surgió la publicación titulada, caso particular de la estereoscopia proporcionada por el estudio de los movimientos vibratorios ópticos, en 1856.

En 1873 Lissajous recibe el premio Lacaze, gracias a sus estudios realizados sobre las vibraciones y debido especialmente a los experimentos efectuados, pues sus curvas ya habían sido estudiadas antes. En 1867 los experimentos fueron exhibidos en la Exposición Universal de París. Finalmente murió el 24 de junio de 1880, a la edad de 58 años en Polombières Francia [10].

Anexo 2: Jean Baptiste Joseph Fourier

Nace en Francia en el año 1768, noveno hijo de los doce, de un sastre. En su temprana edad se educó en una escuela de monjes, allí sobresalió siempre en el estudio de las matemáticas. Participo en la revolución francesa y contó con grandes amistades que lo ligaron a la política, como Napoleón Bonaparte. Luego de desligarse del mundo de la política, se dedicó por completo al mundo científico, al estudio de la física y las matemáticas dejando grandes aportes por sus investigaciones y métodos para resolver ciertos problemas. Finalmente, Fourier fallece en París el 16 de mayo de 1830 dejando consigo un gran legado de estudios en física.

Históricamente las series de Fourier surgieron al resolver un problema de contorno de ecuaciones en derivadas diferenciales, empleando el método de separación de variables. Como ha sido habitual a través de la historia, los matemáticos de la época (1753) rechazaron su teoría porque pensaban que era imposible expresar una función $f(x)$, cualquiera, como suma de senos y cosenos. El ingeniero Joseph Fourier se encargó de recopilar información y realizar pruebas exhaustivas para convencer al mundo científico de la veracidad de la teoría presentada.

Anexo 3: Solución ecuación diferencial sistema masa resorte

Oscilador libre:

Como la ecuación (23) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficiente constante, se toma en consideración la ecuación siguiente,

$$x = Ce^{\lambda t},$$

se halla para qué valores de λ la ecuación anterior es solución de la ecuación diferencial, si λ satisface la ecuación de segundo grado,

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

las soluciones de esta ecuación son,

$$\lambda_1 = -\omega_0 i \quad \vee \quad \lambda_2 = \omega_0 i,$$

la solución general de la ecuación es:

$$x = e^{\alpha t} [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)] ,$$

para escribir la solución $\alpha = 0$ y $\beta = \omega_0$, luego,

$$x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (155)$$

Oscilador amortiguado

Como la ecuación (29) $\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden y con coeficiente constantes entonces, se toma en consideración la ecuación siguiente,

$$x = Ce^{\lambda t},$$

se halla para qué valores de λ la ecuación anterior es solución de la ecuación diferencial, si λ satisface la ecuación de segundo grado,

$$\lambda^2 + 2\Gamma\lambda + \omega_0^2\lambda = 0,$$

para encontrar las soluciones de esta ecuación se utiliza, la ecuación secular,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

en donde $a = 1$, $b = 2\Gamma$ y $c = \omega_0^2$, reemplazando en la ecuación anterior,

$$\lambda = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2},$$

entonces se dan 3 casos,

$$\omega_0^2 > \Gamma^2,$$

$$\omega_0^2 < \Gamma^2,$$

$$\omega_0^2 = \Gamma^2,$$

que se relacionan con el movimiento oscilatorio amortiguado, sobre amortiguado y crítico, que se trataran a continuación.

subamortiguado

$$\omega_0^2 > \Gamma^2,$$

Con la que se obtienen dos raíces complejas

$$\lambda_1 = -\Gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}i,$$

$$\lambda_2 = -\Gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}i.$$

Se toma la frecuencia angular como $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ para simplificar cálculos, luego para definir las soluciones de la ecuación se tiene que $\alpha = -\Gamma$ y $\beta = \omega$,

$$x = e^{\lambda t} [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)] ,$$

$$x = e^{-\Gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] . \quad (156)$$

Sobreamortiguado

$$\omega_0^2 < \Gamma^2 ,$$

Se encuentran dos raíces reales pero no describen exactamente un movimiento oscilatorio,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2} , \\ \lambda_2 &= -\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2} , \end{aligned}$$

Se toma la frecuencia angular como $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ para simplificar cálculos, para definir las soluciones de la ecuación se tiene que $\alpha_1 = -\Gamma + \omega$ y $\alpha_2 = -\Gamma - \omega$,

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} ,$$

$$x = Ae^{(-\Gamma + \omega)t} + Be^{(-\Gamma - \omega)t} . \quad (157)$$

amortiguado crítico

$$\omega_0^2 = \Gamma^2 ,$$

En el que se presenta una raíz doble,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\Gamma ,$$

para definir las soluciones de la ecuación se tiene que $\alpha_1 = -\Gamma$

$$x = e^{\alpha_1 t}(At + B) ,$$

$$x = e^{-\Gamma t}(At + B) . \quad (158)$$

Sistema oscilatorios con dos resortes

Como la ecuación (40) $\ddot{x} + x\omega^2 = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficiente constante, se toma en consideración la ecuación siguiente,

$$x = Ce^{\lambda t} ,$$

se halla para qué valores de λ la ecuación anterior es solución de la ecuación diferencial, si λ satisface la ecuación de segundo grado,

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 ,$$

las soluciones de esta ecuación son,

$$\lambda_1 = -\sqrt{2}\omega \vee \lambda_2 = \sqrt{2}\omega i ,$$

la solución general de la ecuación es:

$$x = e^{\alpha t} [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)] ,$$

para escribir la solución se considera que $\alpha = 0$ y $\beta = \sqrt{2}\omega$, luego,

$$x = A \cos(\sqrt{2}\omega t) + B \sin(\sqrt{2}\omega t) . \quad (159)$$

Anexo 4: Solución ecuaciones desacopladas

Dos ecuaciones acopladas

A continuación se muestra la forma general de encontrar mas fácilmente la solución de las ecuaciones acopladas, luego se deben desacoplar como sigue:

La forma general de las ecuaciones de movimiento se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k_1(x_2 - x_1) & m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k_1(x_2 - x_1), \\ \boxed{m\ddot{x}_1} &= \boxed{k_1x_2 - x_1(k + k_1)} & \boxed{m\ddot{x}_2} &= \boxed{k_1x_1 - x_2(k + k_1)}, \end{aligned}$$

y se pueden escribir matricialmente como:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

que se reescribe de forma mas breve como sigue,

$$m\ddot{x} + Ax = 0, \tag{160}$$

en donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta que la matriz A es simétrica.

Ahora para desacoplar las ecuaciones, se va a tomar $\eta = Sx$ en consecuencia se tiene que $\ddot{\eta} = S\ddot{x}$ con S una matriz constante e invertible. De la ecuación (168) obtenemos,

$$m\ddot{x} = -ax ,$$

multiplicando esta ecuación por la matriz S se obtiene,

$$mS\ddot{x} = -ASIx ,$$

por propiedades de la matriz inversa se tiene que,

$$mS\ddot{x} = -SASS^{-1}x = -SAS^{-1}\eta ,$$

como resultado

$$SAS_{-1} = Ad = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix} ,$$

entonces,

$$m\eta = - \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix} \eta ,$$

que dan como resultado las ecuaciones desacopladas,

$$m\eta_a = -\lambda_a\eta_a$$

$$m\eta_b = -\lambda_b\eta_b$$

$$m\eta_a + \lambda_a\eta_a = 0$$

$$m\eta_b + \lambda_b\eta_b = 0 , \quad (161)$$

hallando $\det(A - \lambda I) = 0$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0 , \quad (162)$$

efectuando la resta entre las matrices,

$$\begin{vmatrix} (k + k_1) - \lambda & -k_1 \\ -k_1 & (k + k_1) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollándolo se obtiene,

$$(k + k_1) - \lambda)^2 - k_1^2 = 0,$$

factorizando,

$$(k - \lambda)(k + 2k_1 - \lambda) = 0,$$

en consecuencia los valores propios de la raíz son, $\lambda_a = k$ y $\lambda_b = k + 2k_1$.

Se deben calcular los vectores propios, primero para $\lambda_a = k$,

$$(A - \lambda_a I) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{reemplazando } (A - \lambda_a I) = \begin{pmatrix} (k + k_1) - k & -k \\ -k & (k + k_1) - k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (k + k_1) - k & -k \\ -k & (k + k_1) - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

desarrollando se obtiene,

$$[(k + k_1) - k] a_1 - k_1 a_2 = 0,$$

factorizando,

$$k_1 a_1 = k_1 a_2,$$

$a_1 = a_2$ y si $a_1 = 1$ entonces $a_2 = 1$,

luego el vector propio para $\lambda_b = k + 2k_1$,

$$(A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

reemplazando $(A - \lambda_b I) = \begin{pmatrix} (k + k_1) - (k + 2k_1) & -k \\ -k & (k + k_1) - (k + 2k_1) \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} (k + k_1) - (k + 2k_1) & -k \\ -k & (k + k_1) - (k + 2k_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

desarrollando se obtiene,

$$[(k + k_1) - (k + 2k_1)] b_1 - k_1 b_2 = 0,$$

factorizando,

$$k b_1 = -k b_2,$$

$-b_1 = b_2$ y si $b_1 = 1$ entonces $b_2 = -1$, se concluye que la matriz S esta determinada

por:

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ahora se determina $\ddot{\eta} = S\ddot{x}$ como sigue,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_a \\ \ddot{\eta}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix},$$

se obtiene dos ecuaciones:

$$\ddot{\eta}_a = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \qquad \ddot{\eta}_b = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2,$$

Normalizando los vectores,

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \frac{1}{\|b\|} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

entonces $\ddot{\eta}_a$ y $\ddot{\eta}_b$ estarían definidos por,

$$\ddot{\eta}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) \qquad \ddot{\eta}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2),$$

Si se efectúa la suma y resta de las ecuaciones anteriores se obtiene:

Suma:

$$\ddot{\eta}_a + \ddot{\eta}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = \frac{\ddot{\eta}_a + \ddot{\eta}_b}{\sqrt{2}},$$

como $\ddot{\eta}_a = \ddot{x}_1$ y $\eta_a = x_1$,

$$x_1 = \frac{\eta_a + \eta_b}{\sqrt{2}}. \tag{163}$$

Resta:

$$\ddot{\eta}_a - \ddot{\eta}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = \frac{\ddot{\eta}_a - \ddot{\eta}_b}{\sqrt{2}},$$

como $\ddot{\eta}_a = \ddot{x}_2$ y $\eta_b = x_2$,

$$x_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}}. \tag{164}$$

Retomando las ecuaciones desacopladas (161), donde $\omega_a^2 = \frac{\lambda_1}{m}$ y $\omega_b^2 = \frac{\lambda_b}{m}$,

$$m\ddot{\eta}_a + \lambda_a = 0 \qquad \ddot{\eta}_b + \omega_b^2 \eta_b = 0. \tag{165}$$

Como las ecuaciones (165) son ecuaciones diferenciales lineales homogénea con coeficientes constantes entonces, se toma como solución las siguientes ecuaciones,

$$\eta_a = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) \qquad \eta_b = B \cos(\omega_b t + \varphi_b),$$

se reemplazan los valores de η_a y en η_b en las ecuaciones (165),

$$x_1 = \frac{A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b)}{\sqrt{2}} \quad x_2 = \frac{A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b)}{\sqrt{2}},$$

se sabe que A y B son constantes, $\sqrt{2}$ puede ser incluida dentro de estas y las ecuaciones quedan escritas como:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (166)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b). \quad (167)$$

Tres ecuaciones acopladas

A continuación se muestra la forma general de encontrar mas fácilmente la solución de las ecuaciones acopladas, se deben desacoplar como sigue:

La forma general de las ecuaciones de movimiento se muestra a continuación,

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2),$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - kx_3,$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

que se reescribe de forma mas breve como sigue,

$$m\ddot{x} + Ax = 0, \quad (168)$$

en donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta que la matriz A es simétrica.

Ahora para desacoplar las ecuaciones, se va a tomar $\eta = Sx$ en consecuencia se tiene que $\ddot{\eta} = S\ddot{x}$ con S una matriz constante e invertible. luego de la ecuación (168) obtenemos,

$$m\ddot{x} = -ax,$$

multiplicando esta ecuación por la matriz S se obtiene,

$$mS\ddot{x} = -ASIx,$$

por propiedades de la matriz inversa se tiene que,

$$mS\ddot{x} = -SASS^{-1}x = -SAS^{-1}\eta,$$

como resultado

$$SAS_{-1} = Ad = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_c \end{pmatrix},$$

entonces,

$$m\eta = - \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_c \end{pmatrix} \eta ,$$

que dan como resultado las ecuaciones desacopladas,

$$m\eta_a = -\lambda_a\eta_a , \quad (169)$$

$$m\eta_b = -\lambda_b\eta_b , \quad (170)$$

$$m\eta_c = -\lambda_c\eta_c , \quad (171)$$

hallando $\det(A - \lambda I) = 0$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0 , \quad (172)$$

efectuando la resta entre las matrices,

$$\begin{vmatrix} 2k - \lambda & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda & -k \\ 0 & -k & 2k - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

desarrollándolo se obtiene,

$$(2k - \lambda)(2k^2 - 4k\lambda + \lambda^2) = 0 ,$$

en consecuencia los valores propios de la raíz son, $\lambda_a = k$, $\lambda_b = k(k + \sqrt{2})$ y

$$\lambda_c = k(k - \sqrt{2}).$$

Se deben calcular los vectores propios, primero para $\lambda_a = 2k$,

$$(A - \lambda_a I) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{reemplazando } (A - \lambda_a I) = \begin{pmatrix} 2k - 2k & -k & 0 \\ -k & 2k - 2k & -k \\ 0 & -k & 2k - 2k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2k - 2k & -k & 0 \\ -k & 2k - 2k & -k \\ 0 & -k & 2k - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

desarrollando se obtiene,

$$a_2 = 0,$$

$$-a_1 = a_3,$$

$a_1 = a_3$ y $a_2 = 0$ si $a_1 = 1$ entonces $a_3 = -1$,

luego el vector propio para $\lambda_b = k(2 + \sqrt{2})$,

$$(A - \lambda_b I) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{reemplazando } (A - \lambda_b I) = \begin{pmatrix} 2k - k(2 + \sqrt{2}) & -k & 0 \\ -k & 2k - k(2 + \sqrt{2}) & -k \\ 0 & -k & 2k - k(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2k - k(2 + \sqrt{2}) & -k & 0 \\ -k & 2k - k(2 + \sqrt{2}) & -k \\ 0 & -k & 2k - k(2 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

desarrollando se obtiene,

$$-\sqrt{2}b_1 = b_2,$$

y

$$b_1 = b_3,$$

$b_1 = b_3$, $-\sqrt{2}b_1 = b_2$ y si $b_1 = 1$ entonces $b_3 = 1$ y $b_2 = -\sqrt{2}$, ahora el vector propio

para $\lambda_c = k(2 - \sqrt{2})$,

$$(A - \lambda_c I) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{reemplazando } (A - \lambda_c I) = \begin{pmatrix} 2k - k(2 - \sqrt{2}) & -k & 0 \\ -k & 2k - k(2 - \sqrt{2}) & -k \\ 0 & -k & 2k - k(2 - \sqrt{2}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2k - k(2 - \sqrt{2}) & -k & 0 \\ -k & 2k - k(2 - \sqrt{2}) & -k \\ 0 & -k & 2k - k(2 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

desarrollando se obtiene,

$$\sqrt{2}c_1 = c_2,$$

y

$$c_1 = c_3,$$

$c_1 = c_3$, $\sqrt{2}c_1 = c_2$ y si $c_1 = 1$ entonces $c_3 = 1$ y $c_2 = \sqrt{2}$,

Se concluye que la matriz S esta determinada por:

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ahora se determina $\ddot{\eta} = S\ddot{x}$ como sigue,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_a \\ \ddot{\eta}_b \\ \ddot{\eta}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix},$$

entonces se obtiene tres ecuaciones:

$$\ddot{\eta}_a = -\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 \quad \ddot{\eta}_b = -\sqrt{2}\ddot{x}_2 + \sqrt{2}\ddot{x}_3 \quad \ddot{\eta}_c = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3,$$

Normalizando los vectores,

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \frac{1}{\|b\|} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \hat{c} = \frac{1}{\|c\|} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces $\ddot{\eta}_a$, $\ddot{\eta}_b$ y $\ddot{\eta}_c$ estarían definidos por,

$$\ddot{\eta}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) \quad \ddot{\eta}_b = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}\ddot{x}_2 - \sqrt{2}\ddot{x}_3) \quad \ddot{\eta}_c = \frac{1}{2}(-\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3),$$

se resuelve el sistema de ecuaciones y se encuentran los valores de $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ y $\ddot{x}_3$:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{\eta}_a - \ddot{\eta}_c \quad \ddot{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\ddot{\eta}_a - \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{\eta}_b + \frac{1}{2}\ddot{\eta}_c \quad \ddot{x}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\ddot{\eta}_a + \frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{\eta}_b + \frac{1}{2}\ddot{\eta}_c,$$

como $\ddot{\eta}_a = \ddot{x}_1$, $\ddot{\eta}_b = \ddot{x}_2$ y $\ddot{\eta}_c = \ddot{x}_3$ y $\eta_a = x_1$, $\eta_b = x_2$ y $\eta_c = x_3$, entonces,

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_a - \eta_c, \tag{173}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\eta_a - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_b + \frac{1}{2}\eta_c, \tag{174}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\eta_a + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_b + \frac{1}{2}\eta_c, \quad (175)$$

Retomando las ecuaciones desacopladas (169), (170) y (171), se reemplaza $\omega_a^2 = \frac{\lambda_a}{m}$,

$$\omega_b^2 = \frac{\lambda_b}{m} \text{ y } \omega_c^2 = \frac{\lambda_c}{m},$$

$$m\ddot{\eta}_a + \lambda_a = 0 \quad \ddot{\eta}_a + \omega_a^2\eta_a = 0, \quad (176)$$

$$m\ddot{\eta}_b + \lambda_b = 0 \quad \ddot{\eta}_b + \omega_b^2\eta_b = 0, \quad (177)$$

$$m\ddot{\eta}_c + \lambda_c = 0 \quad \ddot{\eta}_c + \omega_c^2\eta_c = 0, \quad (178)$$

Como las ecuaciones (176),(177) y (178), son ecuaciones diferenciales lineales homogénea con coeficientes constantes entonces, se toma como solución las siguientes ecuaciones,

$$\eta_a = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad \eta_b = B \cos(\omega_b t + \varphi_b) \quad \eta_c = C \cos(\omega_c t + \varphi_c),$$

se reemplazan los valores de η_1 , η_2 y η_3 en las ecuaciones (176), (177) y (178):

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b),$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - \frac{\sqrt{2}}{2}B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + \frac{1}{2}C \cos(\omega_c t + \varphi_c),$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + \frac{\sqrt{2}}{2}B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + \frac{1}{2}C \cos(\omega_c t + \varphi_c),$$

como A , B y C son constantes, las ecuaciones quedan escritas como:

$$x_1 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b), \quad (179)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (180)$$

$$x_3 = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b) + C \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad (181)$$

n ecuaciones acopladas

Se tienen las ecuaciones (88):

$$\sum_{j=1}^n \ddot{x}_j + \omega_{j-1}^2(x_j - x_{j-1}) - \omega_j^2(x_{j+1} - x_j) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n m \ddot{x}_j = -k_{j-1}(x_j - x_{j-1}) + k_j(x_{j+1} - x_j) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

realizando el mismo procedimiento para 2 y tres masas, se puede llegar a concluir

que:

$$\sum_{j=1}^n x_j(t) = a_{jj} A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j),$$

encontrando los valores propios de la raíz se puede determinar la la matriz S (matriz constante e invertible), ésta determina los valores para a_{jj} ,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix},$$

Anexo 5: Amplitud y ángulo de fase de ecuaciones desacopladas

Dos ecuaciones desacopladas

Se tiene las ecuaciones (179) y (181)

$$x_1(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b),$$

$$x_2(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) - B \cos(\omega_b t + \varphi_b),$$

en el momento en que $t = 0$ se establecen las magnitudes de distancia y velocidad.

La distancia, cuando $t = 0$ estaría dada por,

$$x_1(0) = A \cos(\varphi_a) + B \cos(\varphi_b), \quad (182)$$

$$x_2(0) = A \cos(\varphi_a) - B \cos(\varphi_b), \quad (183)$$

y al hallar la velocidad, $v(t) = \frac{dx}{dt}$, se obtiene,

$$v_1(t) = -\omega_a A \sin(\omega_a t + \varphi_a) - \omega_b B \sin(\omega_b t + \varphi_b),$$

$$v_2(t) = -\omega_a A \sin(\omega_a t + \varphi_a) + \omega_b B \sin(\omega_b t + \varphi_b),$$

cuando $t = 0$ la velocidad queda determinada por,

$$v_1(0) = -\omega_a A \sin(\varphi_a) - \omega_b B \sin(\varphi_b), \quad (184)$$

$$v_2(0) = -\omega_a A \sin(\varphi_a) + \omega_b B \sin(\varphi_b). \quad (185)$$

Con las ecuaciones (182), (183), (184) y (185), se puede calcular la amplitud A y B y el ángulo φ_a y φ_b .

Para la amplitud A se tiene que,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) + x_2(0) = A \cos(\varphi_a) \\ v_1(0) + v_2(0) = -\omega_A A \sin(\varphi_a) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi_a) = \frac{x_1(0) + x_2(0)}{\omega_a A} \\ \sin(\varphi_a) = \frac{v_1(0) + v_2(0)}{A} \end{array} \right. ,$$

Como $\sin^2(\varphi_a) + \cos^2(\varphi_a) = 1$ luego,

$$\left(\frac{v_2(t) + v_2(t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{x_1(0) + x_2(0)}{\omega_a A} \right)^2 = 1 ,$$

con lo que se concluye que,

$$A = \sqrt{[x_1(0) + x_2(0)]^2 + \left[\frac{v_2(t) + v_2(t)}{\omega_a^2} \right]^2} , \quad (186)$$

Para la Amplitud B se tiene que,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) - x_2(0) = B \cos(\varphi_b) \\ v_1(0) - v_2(0) = -\omega_b B \sin(\varphi_b) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi_b) = \frac{x_1(0) - x_2(0)}{B} \\ \cos(\varphi_b) = \frac{v_1(0) - v_2(0)}{\omega_b B} \end{array} \right. ,$$

Como $\sin^2(\varphi_b) + \cos^2(\varphi_b) = 1$ luego,

$$\left(\frac{v_1(t) + v_2(t)}{B} \right)^2 + \left(\frac{x_1(0) - x_2(0)}{\omega_b B} \right)^2 = 1 ,$$

con lo que se concluye que,

$$B = \sqrt{[x_1(0) - x_2(0)]^2 + \left(\frac{v_1(t) - v_2(t)}{\omega_b^2}\right)^2}. \quad (187)$$

Ahora bien para el ángulo φ_a , se tiene que,

$$\begin{cases} x_1(0) + x_2(0) = A \cos(\varphi_a) \\ v_1(0) + v_2(0) = -\omega_A A \sin(\varphi_a) \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{x_1(0) + x_2(0)}{\cos(\varphi_a)} \\ A = -\frac{v_1(0) + v_2(0)}{\sin(\varphi_a \omega_a)} \end{cases},$$

partiendo de,

$$\frac{x_1(0) + x_2(0)}{\cos(\varphi_a)} = -\frac{v_1(0) + v_2(0)}{\sin(\varphi_a) \varphi_a},$$

se concluye que,

$$\varphi_a = \arctan \left[-\frac{v_1(0) + v_2(0)}{x_1(0) + x_2(0) \omega_a} \right]. \quad (188)$$

Ahora para el ángulo φ_b , se tiene que,

$$\begin{cases} x_1(0) - x_2(0) = B \cos(\varphi_b) \\ v_1(0) - v_2(0) = -\omega_b B \sin(\varphi_b) \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{x_1(0) - x_2(0)}{\cos(\varphi_b)} \\ B = -\frac{v_1(0) - v_2(0)}{\sin(\varphi_b \omega_b)} \end{cases},$$

partiendo de,

$$\frac{x_1(0) - x_2(0)}{\cos(\varphi_b)} = -\frac{v_1(0) - v_2(0)}{\sin(\varphi_b) \omega_b},$$

se concluye que,

$$\varphi_b = \arctan \left[-\frac{v_1(0) - v_2(0)}{x_1(0) - x_2(0) \omega_a} \right]. \quad (189)$$

Anexo 6: Solitones Kink y Antikink en la ecuación de sine-Gordon

la ecuación de sine -Gordon es una ecuación diferencial no lineal, las aplicaciones de esta se ven en la teoría de campos relativista, en la física (del estado solido) y en el transporte de señales de la fibra óptica. Se presentan las soluciones de topo solitón (es una partícula que permite alta capacidad de transmisión de señales. La tecnología que se refiere a este tipo de partícula) kink y antikink haciendo un moldeamiento matemático.

Ecuación de sine-Gordon: Partiendo de la teoría de campos la ecuación lineal de Klein Gordon es:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m^2 \varphi, \quad (190)$$

que se puede obtener del lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (191)$$

si se reemplaza $\frac{1}{2}(m^2 \varphi^2)$ por una variación periódica $\frac{1}{2}m^2 [1 - \cos(\varphi)]$, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m^2 \sin \varphi, \quad (192)$$

ecuación diferencial no lineal de Sine-Gorndon.

Para este caso se tomara $m = 1$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi, \quad (193)$$

Solución de la ecuación de Sine-Gordon, si $\varphi(x, t) = u(x - vt) = U(e)$, en donde v es la velocidad del solitón, haciendo los cambios de variable en la ecuación 193

teniendo en cuenta que,

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d}{d\varepsilon} = -v \frac{d}{d\varepsilon},$$

resulta,

$$(1 - v^2) \frac{d^2 u}{\sin u} = \sin u, \quad (194)$$

la ecuación (194) se multiplica por $\frac{du}{d\varepsilon}$ y se divide por $1.v^2$, resulta,

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \frac{du}{d\varepsilon} - \frac{\sin u}{(1 - v^2)} \frac{du}{d\varepsilon}, \quad (195)$$

teniendo en cuenta que,

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 \right] = 0,$$

$$-\frac{\sin u}{(1 - v^2)} \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\cos u}{1 - v^2} \right)$$

la ecuación (195) quedaría escrita como,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 \right] + \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\cos u}{1 - v^2} \right) = 0, \quad (196)$$

integrando la ecuación (196) se obtiene,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{\cos u}{1 - v^2} = A, \quad (197)$$

en donde A es una constante de integración. resolviendo la ecuación diferencial (197),

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{2A - \frac{2 \cos u}{1 - v^2}}, \quad (198)$$

se hace un cambio de variable, $B = A(1 - v^2)$,

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{B - \cos u}, \quad (199)$$

integrando a ambos lados de la ecuación (199),

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{B - \cos u}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (200)$$

se toma $B = 1$ por conveniencia y teniendo en cuenta que, $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, se simplifica la ecuación 200,

$$\int_{u_0}^u \frac{de}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{u}{2}}} = \mp \sqrt{\frac{2}{1 - v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (201)$$

resolviendo las integrales de la ecuación (200) y recordando que $\varphi(x, t) = u(\varepsilon)$ se obtiene,

$$\varphi(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (202)$$

esta ecuación representa la solución analítica de la ecuación de Sine-Gordon. El signo positivo hace referencia a los solitones kink y el signo negativo hace referencia a los solitones antikink.

Anexo 7: Códigos de programación de manipulables

Anexo 7.1: Sistemas oscilatorios libre, amortiguado y forzado

Oscilador libre

Mathematica 6: Manipulable del Oscilador libre

¹ resorte [a0-, y10-, y20-] :=

² **Module**[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;

```

3   xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4   yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5   Line[Transpose@{xv, yv}];
6 Manipulate[
7   With[{s =
8     Quiet@NDSolve[{(x^[Prime][Prime])[t] + (k1/m) x[t] == 0,
9       x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0},
10    x, {t, 0, T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}]},
11
12   Column[{Column[{Style["Sistema_masa_resorte_Libre", Bold, 18,
13     FontFamily -> "Times"],
14     Style["Ecuacion_diferencial :", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
15     Style["General;", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
16     Style["m_!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[
17 \[ DifferentialD ]\), _\((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\_\)\)\), _\
18 \(\([ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\), _\((2\)]\)\)\)_+_ \
19 \!\(\(*SubscriptBox[\(k\), _\((1\)]\)\)_x(t)_=_0", 15, Bold,
20     FontFamily -> "Times"],
21     Style["Con_condiciones_dadas;", 15, Bold,
22     FontFamily -> "Times"],
23     Row[{Style[m, Bold],
24     Style["_!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[
25 \[ DifferentialD ]\), _\((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\_\)\)\), _\
26 \(\([ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\), _\((2\)]\)\)\)"] , Bold,
27     FontFamily -> "Times"],
28     Style["_+_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k1, Bold],

```

```

29      Style["x(t)=0", Bold, FontFamily -> "Times"]}],
30      Style["Ecuacion_solucion:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
31      Style[DSolve[{(x^[Prime][Prime])[t] + (k1/m) x[t] == 0,
32          x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0}, x[t], t][[1, 1]],
33          Bold, FontFamily -> "Times"]], Alignment -> Left],
34      Row[{Graphics[
35          {Thickness[.001], Blue,
36          Line[{{-2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)], -0.4}, {-2 Sqrt[
37              x0^2 + xp0^2/(k1/m)], 0.4}}], Gray,
38          resorte [0.3, -2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
39          Evaluate[x[tf] /. s][[1]]], Red,
40          Disk[{Evaluate[x[tf] /. s][[1]], 0}, 0.07]},
41          PlotRange -> {{-2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)] - 0.1,
42              Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)] + 0.1}, {-0.5, 0.5}},
43          ImageSize -> {200, 200}, Axes -> True],
44          Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, tf},
45          PlotRange -> {{0,
46              T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
47              Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}}, AspectRatio -> 1/3,
48          ImageSize -> 450, AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x(m)"]}],
49          PlotLabel ->
50          Style[" Posicion_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]]],
51      Row[{Plot[Evaluate[Derivative[1][x][t] /. s], {t, 0, tf},
52          PlotRange -> {{0,
53              T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-Sqrt[
54              k1/m (x0^2 + xp0^2/(k1/m))}, Sqrt[

```

```

55      k1/m (x0^2 + xp0^2/(k1/m))]]}, AspectRatio -> 1/3,
56      ImageSize -> 450,
57      AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["v(m/s)"]},
58      PlotLabel ->
59      Style["Velocidad en funcion del tiempo", Italic, 15]],
60      ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. s], {t, 0, tf},
61      PlotRange -> {{-0.05 - Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
62      0.05 + Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}, {-0.05 - Sqrt[
63      k1/m (x0^2 + xp0^2/(k1/m))],
64      0.05 + Sqrt[k1/m (x0^2 + xp0^2/(k1/m))]]}, Frame -> True,
65      ImageSize -> 250, PlotRange -> All, ImagePadding -> 50,
66      AspectRatio -> 1, Axes -> False,
67      FrameLabel -> {Text[
68      "x(\[Times]!\[SuperscriptBox[(10),(-2)])(m)",
69      Text["v(m/s)"]},
70      PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]}},
71      Alignment -> Center]],
72
73      {{x0, 0.1,
74      Text@Row[{Style["x", Italic, 20], Style["(0)(m)", 15]}}]},
75      {{xp0, 0.2,
76      Text@Row[{Style["v", Italic, 20], Style["(0)(m/s)", 15]}}]},
77      {{k1, 7,
78      Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20], 1],
79      Style["(N/m)", 15]}}]},
80      {{m, 1, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["(kg)", 15]}}]},

```

```

81  {{T, 3, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["_(s)", 15]}]}},
82  Grid[{{Control[{{tf, 0.1,
83      Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["_(s)", 15]}]}], 0.1,
84      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1], .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
85      AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
86      "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}], {}]},
87  ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

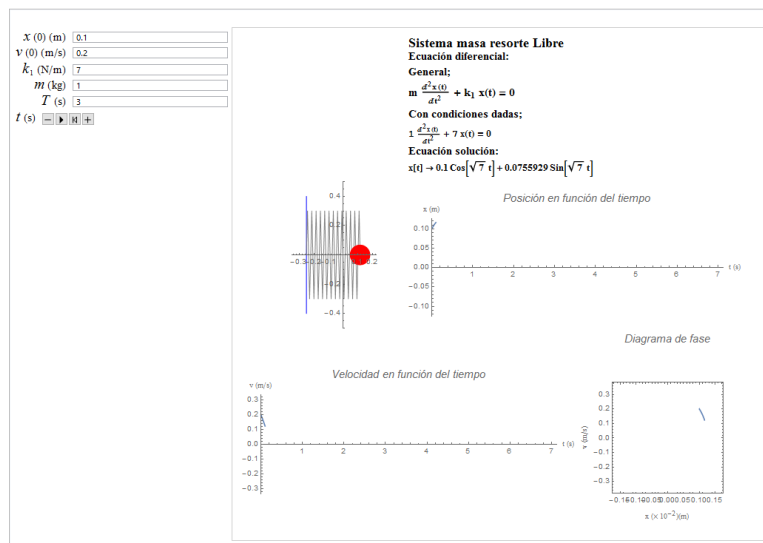


Figura 70: Vista previa del manipulable Manipulable de sistemas masa resorte horizontal libre

La figura 70 se puede apreciar la que el manipulable en cuestión cuenta con cajas en la parte izquierda que permiten ingresar los valores de las variables, constantes y condiciones iniciales del sistema, entre estas se pueden encontrar la constante de elasticidad (k), la constante de amortiguamiento (b), masa (m), entre otros, en la parte derecha del manipulable podemos apreciar el diagrama masa resorte horizontal y las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo, y el diagrama de fase

el cual corresponde a la posición en función de la velocidad

Oscilador Amortiguado

Mathematica 7: Manipulable Oscilador Amortiguado

```

1 resorte [a0_, y10_, y20_] :=
2   Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;
3     xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4     yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5     Line[Transpose@{xv, yv}]];
6
7 Manipulate[
8   With[{s =
9     Quiet@NDSolve[{(x^[Prime][Prime])[
10       t] + (b/m) Derivative[1][x][t] + (k1/m) x[t] == 0,
11       x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0},
12       x, {t, 0, T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}]},
13
14   Column[{Column[{Row[{Style[" Sistema_masa_resorte_Amortiguado",
15     Bold, 18, FontFamily -> "Times"]}],
16     Style[" Ecuacion_diferencial :", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
17     Style[" General;", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
18     Style[" m_!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\(*
19     \[DifferentialD ]\),_ \((2\))x\)\_ \((t)\)\(\(\_\)\)\),_ \
20     \(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\(*
21     \[DifferentialD ]\),_ \((2\))]\)\)\_ \_ +_ \
22     \!\(\(*SubscriptBox[\(\(*SubscriptBox[\(\(*SubscriptBox[\(\(*

```



```

48      Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)] + 0.1}, {-0.5, 0.5}},
49      ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
50      Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, tf},
51      PlotRange -> {{0,
52      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.05 - Sqrt[
53      x0^2 + xp0^2/(k1/m)], 0.05 + Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}},
54      AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
55      AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x(m)"]},
56      PlotLabel ->
57      Style["Posicion en funcion del tiempo", Italic, 15]]],
58      Row[{Plot[Evaluate[Derivative[1][x][t] /. s], {t, 0, tf},
59      PlotRange -> {{0,
60      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.05 -
61      Sqrt[k1/m]*Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
62      0.05 + Sqrt[k1/m]*Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}},
63      AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
64      AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["v(m/s)"]},
65      PlotLabel ->
66      Style["Velocidad en funcion del tiempo", Italic, 15]],
67      ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. s], {t, 0, tf},
68      PlotRange -> {{-0.05 - Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
69      0.05 + Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}, {-0.05 -
70      Sqrt[k1/m]*Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)],
71      0.05 + Sqrt[k1/m]*Sqrt[x0^2 + xp0^2/(k1/m)]}},
72      Frame -> True, ImageSize -> 250, PlotRange -> All,
73      ImagePadding -> 50, AspectRatio -> 1, Axes -> False,

```

```

74      FrameLabel -> {Text[
75          "x(\[Times] \! \(\*SuperscriptBox[\(10\), \(-2\)]\)) (m)",
76          Text["v(\[Times] \! \(\*SuperscriptBox[\(10\), \(-2\)]\)) (m/s)"]},
77      PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]}],
78      Alignment -> Center]],
79
80
81      {{x0, -1, Text@Row[{Style["x", Italic, 20], Style["(0) (m)", 15]}}]},
82      {{xp0, 10/3,
83      Text@Row[{Style["v", Italic, 20], Style["(0) (m/s)", 15]}}]},
84      {{k1, 13,
85      Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20], 1],
86      Style["(N/m)", 15]}}]},
87      {{b, 1/2,
88      Text@Row[{Subscript[Style["b", Italic ], 1],
89      Style["(N.s/m)", 15]}}]},
90      {{m, 0.1, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["(kg)", 15]}}]},
91      {{T, 5, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["(s)", 15]}}]},
92      Grid[{{Control[{{tf, 0.01,
93      Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["(s)", 15]}}]}, 0.1,
94      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1], .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
95      AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
96      "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}, {}]},
97      ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

En la figura 71 se puede apreciar el manipulable correspondiente al sistema amor-

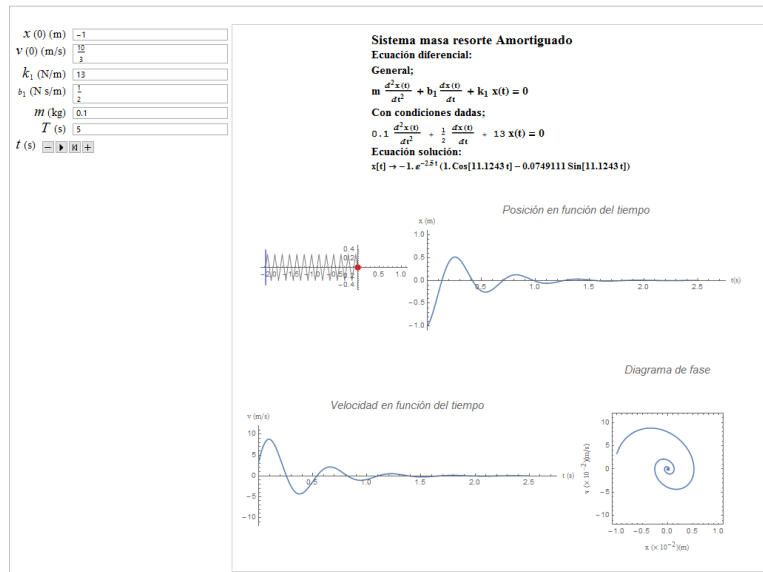


Figura 71: Vista previa del manipulable Manipulable de sistemas masa resorte horizontal amortiguado

tiguado, el cual cuenta con cajas en la parte izquierda que permiten ingresar los valores de las variables, constantes y ademas de los parametro con los que contaba el anterior manipulable este cuenta con la constante de amortiguamiento (b_1), en la parte derecha del manipulable podemos apreciar el diagrama masa resorte horizontal y las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo, y el diagrama de fase el cual corresponde a la posición en función de la velocidad y en la parte superior las ecuaciones del sistema

Oscilador Libre forzado

Mathematica 8: Manipulable Oscilador libre forzado

- 1 resorte [a0_, y10_, y20_] :=
- 2 **Module**[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 100}, h = (y2 - y1)/n;

```

3   xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4   yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5   Line[Transpose@{xv, yv}]];
6 Manipulate[
7   With[{s =
8     Quiet@NDSolve[{(x^[Prime][Prime])[t] + (k1/m) x[t] == (c/m)*
9       Cos[wf*t], x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0},
10      x, {t, 0, T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}]},
11
12   Column[{Column[{Style["Sistema_masa_resorte_Libre_Forzado", Bold,
13     18, FontFamily -> "Times"],
14     Style["Ecuacion_diferencial :", Bold, FontFamily -> "Times"],
15     Style["General:", Bold, FontFamily -> "Times"],
16     Style["m_!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[
17   \[ DifferentialD ]\),_ \((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\_\)\)\),_ \
18   \(\[ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\),_ \((2\)]\)\)\)_+_ \
19   !\(\(*SubscriptBox[\(k\),_ \((1\)]\)\)_x(t)_=_!\(\(*SubscriptBox[\(F\),_ \
20   \((0\)]\)\)_Cos[\(\(*SubscriptBox[\(w\),_ \((f\)]\)\)_t]_", Bold,
21     FontFamily -> "Times"],
22     Style["Con_condiciones_dadas:", Bold, FontFamily -> "Times"],
23     Row[{Style[m, Bold] Style[
24       "!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[ DifferentialD ]\)\]
25     ,_ \((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\_\)\)\),_ \(\[ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\
26     \),_ \((2\)]\)\)\)", Bold, FontFamily -> "Times"], " _+_ ",
27     Style[k1, Bold, FontFamily -> "Times"],
28     Style[" _x(t)_=_", Bold, FontFamily -> "Times"],

```

```

29 Style[c, Bold, FontFamily -> "Times"],
30 Style["_Cos(_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[wf, Bold],
31 Style["_*_*t_)", Bold, FontFamily -> "Times"]]],
32 Style["Ecuacion_solucion:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
33 Style[FullSimplify[
34   DSolve[(x^\[Prime]\[Prime])[t] + (k1/m) x[t] == (c/m)*
35     Cos[wf*t], x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0}, x[t],
36   t][[1, 1]], Bold, FontFamily -> "Times"]],
37 Alignment -> Center, Row[{Graphics[
38   {Thickness[.001], Blue,
39     Line[{{-2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
40       Sqrt[m]))^2] +
41       Sqrt[(c/(
42         k1 - m*wf^2))^2], -0.5}, {-2 (Sqrt[(x0 - c/(
43         k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[m]))^2] +
44         Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2], 0.5}}], Gray,
45     resorte [0.3, -2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[
46       k1] /Sqrt[m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2],
47     Evaluate[x[tf] /. s][[1]], Red,
48     Disk[{Evaluate[x[tf] /. s][[1]], 0}, 0.1]],
49     PlotRange -> {{-2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[
50       k1] /Sqrt[m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2],
51       2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[
52       m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2]}], {-1, 1}},
53     ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
54     Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, tf},

```

```

55 PlotRange -> {{0,
56   T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.1 -
57   7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[
58     m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
59   0.1 + 7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
60     Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}},
61 AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
62 AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x(m)"]},
63 PlotLabel ->
64   Style["Posicion en funcion del tiempo", Italic, 15]],
65 Row[{Plot[Evaluate[Derivative[1][x][t] /. s], {t, 0, tf},
66   PlotRange -> {{0,
67     T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.5 -
68     Sqrt[k1/
69     m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
70     Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
71     0.5 + Sqrt[k1/
72     m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
73     Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}},
74   AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
75   AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["v(m/s)"]},
76   PlotLabel ->
77     Style["Velocidad en funcion del tiempo", Italic, 15]],
78 ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. s], {t, 0, tf},
79   PlotRange -> {{-0.1 -
80     7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[

```

```

81      m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
82      0.1 + 7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
83      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}, {-0.5 -
84      Sqrt[k1/
85      m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
86      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2)],
87
88      0.5 + Sqrt[k1/
89      m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
90      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2)}}}, Frame -> True,
91      ImageSize -> 250, PlotRange -> All, ImagePadding -> 50,
92      AspectRatio -> 1, Axes -> False,
93      FrameLabel -> {Text["x⏟(m)"], Text["v⏟(m/s)"]},
94      PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]]],
95      Alignment -> Center]],
96
97      {{x0, -2, Text@Row[{Style["x", Italic, 20], Style["⏟(0)⏟(m)", 15]}}]},
98      {{xp0, 6,
99      Text@Row[{Style["v", Italic, 20], Style["⏟(0)⏟(m/s)", 15]}}]},
100     {{k1, 15,
101     Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20], 1],
102     Style["⏟(N/m)", 15]}}]},
103     {{m, 2, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["⏟(kg)", 15]}}]},
104     {{c, 3, Style["!\(\\*SubscriptBox[(F\\),⏟(o\\)]\\)", Italic, 20]}},
105     {{wf, 4, Style["!\(\\*SubscriptBox[(W\\),⏟(f\\)]\\)", Italic, 20]}},
106     {{T, 20, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["⏟(s)", 15]}}]},

```

```

107 Grid[{{Control[{{tf, 40,
108   Text@Row[{{Style["t", Italic, 20], Style["_(s)", 15]}]}, 0.1,
109   T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1], .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
110   AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
111     "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}, {}]},
112 ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

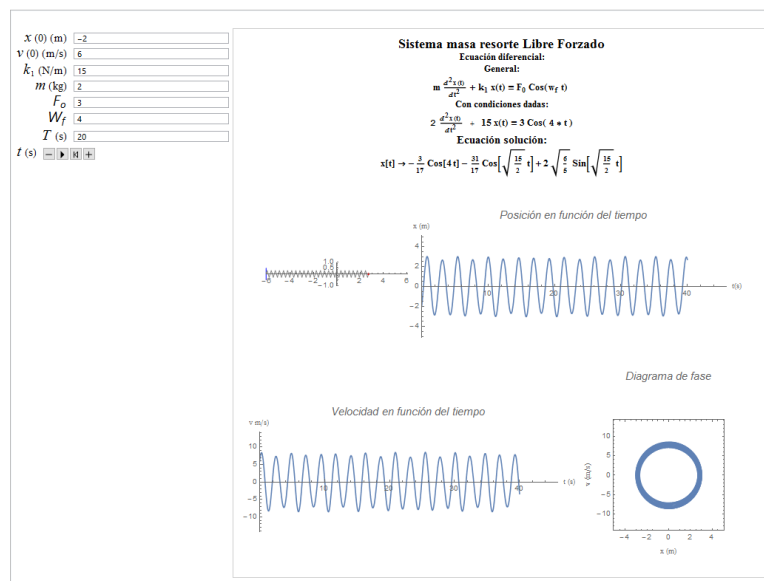


Figura 72: Vista previa del manipulable Manipulable de sistemas masa resorte horizontal amortiguado

La figura 72 muestra el manipulable correspondiente al sistema libre forzado, a diferencia de los anteriores este cuenta con las cajas para introducir los valores de frecuencia de forzamiento (w_f) y la constante de forzamiento (F_0)

Oscilador Amortiguado forzado

```

1  resorte[a0_, y10_, y20_] :=
2  Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 100}, h = (y2 - y1)/n;
3    xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4    yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5    Line[Transpose@{xv, yv}]];
6  Manipulate[
7    With[{s =
8      Quiet@NDSolve[{(x^[Prime][Prime])[t] + (k1/m) x[t] == (c/m)*
9        Cos[wf*t], x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0},
10      x, {t, 0, T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}]},
11
12    Column[{Column[{Style["Sistema_masa_resorte_Libre_Forzado", Bold,
13      18, FontFamily -> "Times"],
14      Style["Ecuacion_diferencial :", Bold, FontFamily -> "Times"],
15      Style["General:", Bold, FontFamily -> "Times"],
16      Style["m_!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[
17  \[ DifferentialD ]\), _\((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\(\_)\)\), _\
18  \(\[ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\), _\((2\)]\)\)]\) _+_ \
19  \!\(\(*SubscriptBox[\(k\), _\((1\)]\)\)_x(t) _=_ \!\(\(*SubscriptBox[\(F\), _\
20  \((0\)]\)\)_Cos(\!\(\(*SubscriptBox[\(w\), _\((f\)]\)\)_t) _", Bold,
21      FontFamily -> "Times"],
22      Style["Con_condiciones_dadas:", Bold, FontFamily -> "Times"],
23      Row[{Style[m, Bold] Style[
24        "\!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\[ DifferentialD ]\)\) \
25        , _\((2\)]x\)_\((t)\)\(\(\(\_)\)\), _\(\[ DifferentialD ]*\SuperscriptBox[\(t\ \
26        \), _\((2\)]\)\)]\) ", Bold, FontFamily -> "Times"], " _+_ ",

```

```

27 Style[k1, Bold, FontFamily -> "Times"],
28 Style[" $\omega(t)$ ", Bold, FontFamily -> "Times"],
29 Style[c, Bold, FontFamily -> "Times"],
30 Style[" $\cos$ ", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[wf, Bold],
31 Style[" $\omega$ "], Bold, FontFamily -> "Times"]}],
32 Style["Ecuacion solución:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
33 Style[FullSimplify[
34   DSolve[{(x'[Prime])[Prime])[t] + (k1/m) x[t] == (c/m)*
35     Cos[wf*t], x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0}, x[t],
36     t][[1, 1]], Bold, FontFamily -> "Times"]],
37 Alignment -> Center, Row[{Graphics[
38   {Thickness[.001], Blue,
39     Line[{{-2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
40       Sqrt[m]))^2] +
41       Sqrt[(c/(
42       k1 - m*wf^2))^2], -0.5}, {-2 (Sqrt[(x0 - c/(
43       k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[m]))^2] +
44       Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2], 0.5}}], Gray,
45     resorte [0.3, -2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[
46       k1] /Sqrt[m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2],
47     Evaluate[x[tf] /. s][[1]], Red,
48     Disk[{Evaluate[x[tf] /. s][[1]], 0}, 0.1]],
49     PlotRange -> {{-2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[
50       k1] /Sqrt[m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2],
51       2 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[
52       m]))^2] + Sqrt[(c/(k1 - m*wf^2))^2]}}, {-1, 1}},

```

```

53      ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
54      Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, tf},
55      PlotRange -> {{0,
56          T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.1 -
57          7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[
58          m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
59          0.1 + 7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
60          Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}},
61      AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
62      AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x_(m)"]},
63      PlotLabel ->
64      Style["Posicion_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]]],
65      Row[{Plot[Evaluate[Derivative[1][x][t] /. s], {t, 0, tf},
66      PlotRange -> {{0,
67          T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}, {-0.5 -
68          Sqrt[k1/
69          m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
70          Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
71          0.5 + Sqrt[k1/
72          m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
73          Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}},
74      AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
75      AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["v_m/s"]},
76      PlotLabel ->
77      Style["Velocidad_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]],
78      ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. s], {t, 0, tf},

```

```

79 PlotRange -> {{-0.1 -
80      7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /Sqrt[
81      m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2],
82      0.1 + 7/4 Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
83      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}, {-0.5 -
84      Sqrt[k1/
85      m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
86      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2)],
87
88      0.5 + Sqrt[k1/
89      m]*7/4 (Sqrt[(x0 - c/(k1 - m*wf^2))^2 + (xp0/(Sqrt[k1] /
90      Sqrt[m]))^2 + (c/(k1 - m*wf^2))^2]}}}, Frame -> True,
91 ImageSize -> 250, PlotRange -> All, ImagePadding -> 50,
92 AspectRatio -> 1, Axes -> False,
93 FrameLabel -> {Text["x(m)"], Text["v(m/s)"]},
94 PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]]],
95 Alignment -> Center]],
96
97 {{x0, -2, Text@Row[{Style["x", Italic, 20], Style["(0)(m)", 15]}}]},
98 {{xp0, 6,
99      Text@Row[{Style["v", Italic, 20], Style["(0)(m/s)", 15]}}]},
100 {{k1, 15,
101      Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20], 1],
102      Style["(N/m)", 15]}}]},
103 {{m, 2, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["(kg)", 15]}}]},
104 {{c, 3, Style["!\(\\*SubscriptBox[(F\\),\\(o\\)]\\)", Italic, 20]}},

```

```

105 {{wf, 4, Style["\!\(\*SubscriptBox[\(W\),\(\f\)]\)"] , Italic , 20]}},
106 {{T, 20, Text@Row[{Style["T", Italic , 20], Style["\(\s)", 15]}]}},
107 Grid[{{Control[{{tf, 40,
108   Text@Row[{Style["t", Italic , 20], Style["\(\s)", 15]}]}], 0.1,
109   T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1], .1, Trigger , DisplayAllSteps -> True,
110   AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
111     "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}], {}]},
112 ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

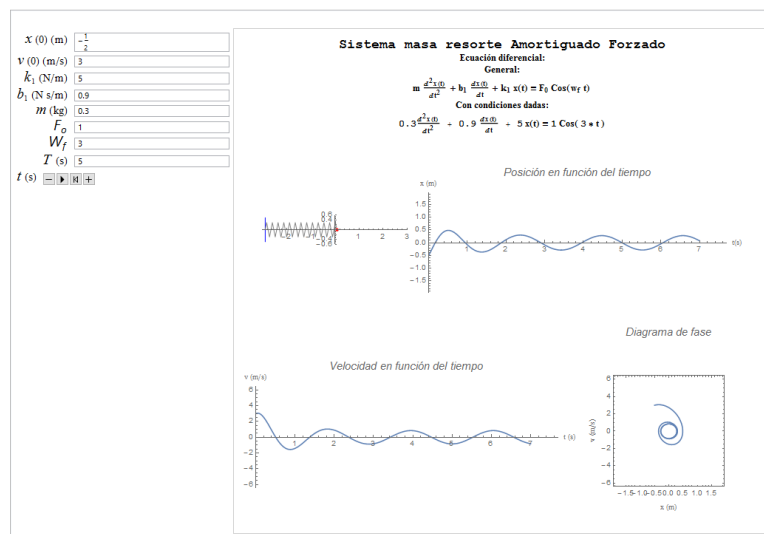


Figura 73: Vista previa del manipulable Manipulable de sistemas masa resorte horizontal amortiguado forzado

Oscilador de una masa y dos resortes

Mathematica 10: Manipulable una masa dos resortes

- 1 resorte [a0_, y10_, y20_] :=
- 2 **Module**[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;

```

3   xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4   yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5   Line[Transpose@{xv, yv}]];
6 Manipulate[
7   With[{s =
8     Quiet@NDSolve[{(x[Prime])'[Prime])[t] + ((k2 + k1)/m) x[t] == 0,
9     x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0},
10    x, {t, 0, T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k1]}]},
11
12   Column[{Column[{Style["Sistema de una masa y dos resortes", Bold,
13     18, FontFamily -> "Times"],
14     Style["Ecuacion diferencial :", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
15     Style["General;", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
16     Style["m  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x(t) = 0$ ", 15, Bold,
17     FontFamily -> "Times"],
18     Style["Con condiciones dadas;", 15, Bold,
19     FontFamily -> "Times"],
20     Row[{Style[m, Bold,
21     Style[
22     " $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x(t) = 0$ ", Bold,
23     FontFamily -> "Times"], " + ", Style[k2 + k1, Bold,

```

```

29     Style["x(t)=0", Bold, FontFamily -> "Times"]}],
30     Style["Ecuacion_solucion:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
31     Style[DSolve[{(x^[Prime][Prime])[t] + ((k2 + k1)/m) x[t] == 0,
32         x[0] == x0, Derivative[1][x][0] == xp0}, x[t], t][[1, 1]],
33     Bold, FontFamily -> "Times"]], Alignment -> Center],
34 Row[{Graphics[
35     {Thickness[.001], Blue,
36     Line[{{-2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)], -0.5}, {-2 Sqrt[
37         x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)], 0.5}}],
38     Line[{{2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)], -0.5}, {2 Sqrt[
39         x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)], 0.5}}], Gray,
40     resorte [0.3, -2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
41     Evaluate[x[tf] /. s][[1]], ColorData["HTML"]["YellowGreen"],
42     resorte [0.3, 2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
43     Evaluate[x[tf] /. s][[1]], Red,
44     Disk[{Evaluate[x[tf] /. s][[1]], 0}, 0.07]},
45     PlotRange -> {{-2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)] - 0.1,
46         2 Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)] + 0.1}, {-0.6, 0.6}},
47     ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
48     Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, tf},
49     PlotRange -> {{0,
50         T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k2 + k1]}, {-0.05 - Sqrt[
51         x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
52         0.05 + Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)]}},
53     AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
54     AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x(m)"]}],

```

```

55      PlotLabel ->
56      Style["Posicion_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]]],
57      Row[{Plot[Evaluate[Derivative[1][x][t] /. s], {t, 0, tf},
58      PlotRange -> {{0,
59      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k2 + k1]}, {-0.05 -
60      Sqrt[Sqrt[((k2 + k1)/m)^2]*Sqrt[
61      x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
62      0.05 + Sqrt[Sqrt[((k2 + k1)/m)^2]*Sqrt[
63      x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)]}], AspectRatio -> 1/3,
64      ImageSize -> 450,
65      AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["v_(m/s)"]},
66      PlotLabel ->
67      Style["Velocidad_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]],
68      ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. s], {t, 0, tf},
69      PlotRange -> {{-0.05 - Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
70      0.05 + Sqrt[x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)]}, {-0.05 -
71      Sqrt[Sqrt[((k2 + k1)/m)^2]*Sqrt[
72      x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)],
73      0.05 + Sqrt[Sqrt[((k2 + k1)/m)^2]*Sqrt[
74      x0^2 + xp0^2/((k2 + k1)/m)]}], Frame -> True,
75      ImageSize -> 250, PlotRange -> All, ImagePadding -> 50,
76      AspectRatio -> 1, Axes -> False,
77      FrameLabel -> {Text["x_(m)"], Text["v_(m/s)"]},
78      PlotLabel -> Style["Diagrama_de_fase", Italic, 15]]]]],
79      Alignment -> Center]],
80

```

```

81  {{x0, 0.5,
82    Text@Row[{Style["x", Italic, 20], Style["⌊(0)⌊(m)", 15]}]},
83  {{xp0, -0.7,
84    Text@Row[{Style["v", Italic, 20], Style["⌊(0)⌊(m/s)", 15]}]},
85  {{k1, 15,
86    Text@Row[{Subscript[
87      Style["k", Italic, 20, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]], 1,
88      Style["⌊(N/m)", 15, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]]}]},
89  {{k2, 7, Text@Row[{Style["k", Italic, 20], Style["⌊(N/m)", 15]}]},
90  {{m, 2, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["⌊(kg)", 15]}]},
91  {{T, 5, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["⌊(s)", 15]}]},
92  Grid[{{Control[{{tf, 0.01,
93    Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["⌊(s)", 15]}]}, 0.1,
94    T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[k2 + k1], .1, Trigger,
95    DisplayAllSteps -> True,
96    AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
97      "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}, {}]},
98  ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

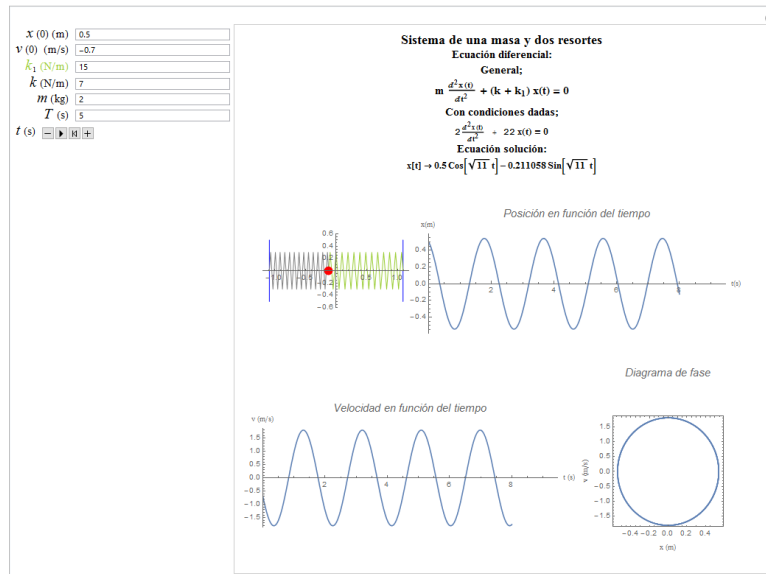


Figura 74: Vista previa del Manipulable de sistemas horizontal de una masa y dos resortes

Anexo 7.2: Sistemas acoplados que involucran dos masas

Oscilador de dos masas y un resorte

Mathematica 11: Manipulable Sistemas acoplados dos masas un resorte

```

1 resorte [a0_, y10_, y20_] :=
2   Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;
3     xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4     yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5     Line[Transpose@{xv, yv}]];
6
7 Manipulate[
8   With[{sol =
9     NDSolve[{m x1''[t] == -k1 (x1[t] - x2[t]),
10      m x2''[t] == -k1 (x2[t] - x1[t]), x1[0] == x01, x2[0] == x02,
```

```

11      x1'[0] == xp01, x2'[0] == xp02}, {x1, x2}, {t, 0,
12      T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[2 k1]}}],
13
14      Column[{Column[{Style["Sistema_de_dos_masas_y_un_resorte", Bold, 18,
15          FontFamily -> "Times"],
16          Style["Sistema_de_ecuaciones_diferenciales :", Bold, 15,
17          FontFamily -> "Times"],
18          Row[{Style[m, Bold,
19              Style["\!\(\*FractionBox[\(\(\*SuperscriptBox[\(\
20          \[DifferentialD]\), \(\(2\)]\)*SubscriptBox[\(x\), \(\(1\)]\)\)\((t)\)\(\(\)\)\
21          \)\), \(\(\[DifferentialD]\)*SuperscriptBox[\(t\), \(\(2\)]\)\)\)\)+", 15,
22              Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k1, 15, Bold],
23              Style["\!\(\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\(1\)]\)\)(t)-\
24          \!\(\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\(2\)]\)\)(t)]-\(0\)", 15, Bold,
25              FontFamily -> "Times"]}],
26          Row[{Style[m, Bold,
27              Style["\!\(\*FractionBox[\(\(\*SuperscriptBox[\(\
28          \[DifferentialD]\), \(\(2\)]\)\)\(\*\*SubscriptBox[\(x\), \(\(2\)]\)\)\)\
29          \(\((t)\)\(\(\)\)\)\), \(\(\[DifferentialD]\)*SuperscriptBox[\(t\), \
30          \(\(2\)]\)\)\)\)+", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
31              Style[k1, 15, Bold],
32              Style["\!\(\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\(2\)]\)\)(t)-\
33          \!\(\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\(1\)]\)\)(t)]-\(0\)", 15, Bold,
34              FontFamily -> "Times"]}],}, Alignment -> Left], Row[{Graphics[
35          {Blue, Disk[{Evaluate[x1[t0] /. sol][[1]], 0}, 0.4], Gray,
36          resorte [0.9, Evaluate[x1[t0] /. sol][[1]],

```

```

37      Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]], Red,
38      Disk[{Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]], 0}, 0.4]},
39      PlotRange -> {{-Sqrt[
40          x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] - 2,
41          Sqrt[x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] + 2}, {-0.6,
42          0.6}}, ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
43      Plot[{Evaluate[x1[t] /. First[sol]],
44          Evaluate[x2[t] /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
45      PlotRange -> {{0,
46          T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[
47          2 k1]}, {-Sqrt[x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] -
48          2, Sqrt[x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] + 2}},
49      AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
50      AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["x_(m)"]},
51      PlotLabel ->
52      Style["Posicion_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]]],
53      Row[{Plot[{Evaluate[x1'[t] /. First[sol]],
54          Evaluate[x2'[t] /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
55      PlotRange -> {{0,
56          T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[
57          2 k1]}, {-Sqrt[(k1/m)]*Sqrt[
58          x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] - 0.25,
59          Sqrt[k1/m]*Sqrt[x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)] +
60          0.25}}, AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
61      AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["v_(m/s)"]},
62      PlotLabel ->

```

```

63     Style["Velocidad_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]],
64     ParametricPlot[{Evaluate[{x1[t], x1'[t]} /. First[sol]],
65         Evaluate[{x2[t], x2'[t]} /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
66     PlotRange -> {{-1 - Sqrt[
67         x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)],
68         1 + Sqrt[
69         x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)]}, {-0.25 -
70         Sqrt[k1/m]*Sqrt[x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)],
71         0.25 + Sqrt[k1/m]*Sqrt[
72         x01^2 - x02^2 + (xp01^2 - xp02)/(2 k1/m)]}},
73     Frame -> True, ImageSize -> 250, PlotRange -> All,
74     ImagePadding -> 50, AspectRatio -> 1, Axes -> False,
75     FrameLabel -> {Text["x(m)"], Text["v(m/s)"]},
76     PlotLabel -> Style["Diagrama_de_fase", Italic, 15]]]],
77     Alignment -> Center]],
78     {{x01, 5,
79     Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20], 1],
80     Style["_(0)_(m)", 15]}}}},
81     {{x02, -1.,
82     Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20], 2],
83     Style["_(0)_(m)", 15]}}}},
84     {{xp01, 0.2,
85     Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20], 1],
86     Style["_(0)_(m/s)", 15]}}}},
87     {{xp02, 0.2,
88     Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20], 2],

```

```

89     Style["_(0)_(m/s)", 15]]]}},
90   {{k1, 7,
91     Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20], 1],
92       Style["_(N/m)", 15]]]}},
93   {{m, 0.15, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["_(kg)", 15]]]}},
94   {{T, 5, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["_(s)", 15]]]}},
95   Grid[{{Control[{{t0, 3,
96     Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["_(s)", 15]]}, 0.1,
97     T*(2 Pi Sqrt[m])/Sqrt[2 k1], .1, Trigger,
98     DisplayAllSteps -> True,
99     AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
100      "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}}, {}]},
101   ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

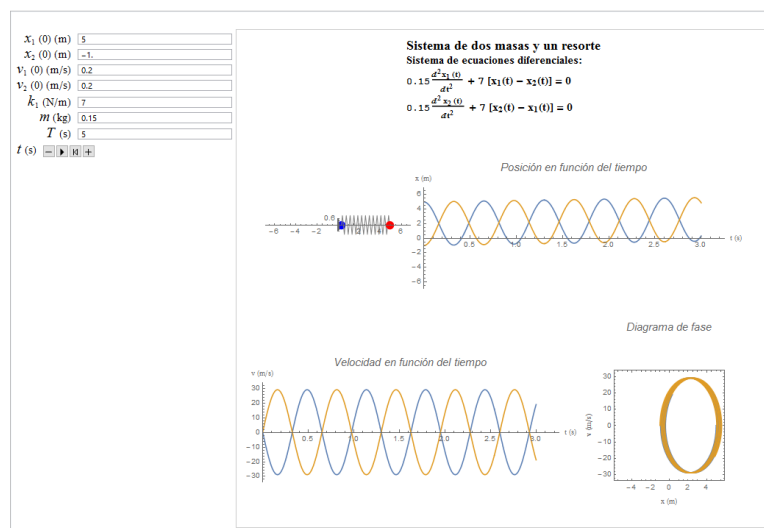


Figura 75: Vista previa del Manipulable de sistemas horizontal de una masa y dos resortes

En la figura 75 se observa el manipulable correspondiente a los gráficos de la posición y velocidad en función del tiempo , de los sistemas acoplados, se puede apreciar que

tanto las condiciones iniciales como los valores de la masa, constante de elasticidad entre otros, cuentan con cajas para introducir los datos.

Oscilador de dos masas y dos resortes

Mathematica 12: Manipulable Sistemas acoplados dos masas un resorte

```

1  resorte [a0_, y10_, y20_] :=
2  Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;
3  xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4  yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5  Line[Transpose@{xv, yv}]];
6  Manipulate[
7  With[{sol =
8  NDSolve[{m x1''[t] + k1 x1[t] - k2 (x2[t] - x1[t]) == 0,
9  m x2''[t] + k2 (x2[t] - x1[t]) == 0, x1[0] == x01, x2[0] == x02,
10 x1'[0] == xp01, x2'[0] == xp02}, {x1, x2}, {t, 0,
11 T (4 Pi)/(
12 Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)] + Sqrt[(
13 2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]}],
14 Column[{Column[{Style[
15 "Sistema_de_dos_masas_y_dos_reesortes_con_un_extremo_libre",
16 Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
17 Style["Sistema_de_ecuaciones_diferenciales :", Bold, 15,
18 FontFamily -> "Times"],
19 Row[{Style[m, Bold],
20 Style["\!\(\*FractionBox[\(\(\*SuperscriptBox[\(\
```

```

21 \[ DifferentialD ]\), \((2\))\)\(\)*SubscriptBox[(x\), \((1\))\)]\)\
22 \(((t)\)\(\(\(\(\)\)\)\), \([ DifferentialD ]\)*SuperscriptBox[(t\), \
23 \((2\))\)]\)\)\) + \", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
24
25 Style[k1, 15, Bold],
26
27 Style["\(!\(\)*SubscriptBox[(x\), \((1\))\)](t)\) - \", 15, Bold,
28
29 FontFamily -> "Times"], Style[k2, 15, Bold],
30
31 Row[{Style[m, 15, Bold],
32
33 Style["\(!\(\)*FractionBox[(\(\(\)*SuperscriptBox[(\
34 \[ DifferentialD ]\), \((2\))\)\)\(\)*SubscriptBox[(x\), \((2\))\)]\)\)\
35 \(((t)\)\(\(\(\(\)\)\)\), \([ DifferentialD ]\)*SuperscriptBox[(t\), \
36 \((2\))\)]\)\)\) + \", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
37
38 Style[k2, 15, Bold],
39
40 Style["\(!\(\)*SubscriptBox[(x\), \((2\))\)](t)\) - \
41 \(!\(\)*SubscriptBox[(x\), \((1\))\)](t)\) = 0", 15, Bold,
42
43 FontFamily -> "Times"]}], }, Alignment -> Left],
44
45 Row[{Graphics[
46
47 {Thickness[.03], Black,
48
49 Line[{ {-4 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
50
51 2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
52
53 Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
54
55 2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))},
56
57 1}, {-4 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
58
59 2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +

```

```

47      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
48      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))], -1}]],
49  Thickness[.003], Blue,
50  Disk[{Evaluate[x1[t0] /. sol ][[1]] -
51      5 /2 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
52      2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
53      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
54      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))], 0}, 0.3],
55  ColorData["HTML"]["YellowGreen"],
56  resorte [0.5, -4 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
57      2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
58      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
59      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))],
60  Evaluate[x1[t0] /. sol ][[1]] -
61      5 /2 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
62      2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
63      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
64      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))]], Purple,
65  resorte [0.5,
66  Evaluate[x1[t0] /. sol ][[1]] -
67
68      5 /2 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
69      2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
70      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
71      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]))],
72  Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]]], Red,

```

```

73      Disk[{Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]], 0}, 0.3]},
74      PlotRange -> {{-4 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
75          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
76          Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
77          2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])] -
78          0.05, (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
79          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
80          Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
81          2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])] + 0.05}, {-0.6,
82          0.6}}, ImageSize -> {200, 250}, Axes -> True],
83      Plot[{Evaluate[x1[t] /. First[sol]] +
84          5/2 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
85          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
86          Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
87          2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])],
88      Evaluate[x2[t] /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
89      PlotRange -> {{0,
90          T (4 Pi)/(
91          Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)] + Sqrt[(
92          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(
93          2 m)]}, {-(Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
94          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
95          Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
96          2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])] - 0.05,
97          7/2 (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
98          2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +

```

```

99      Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
100      2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) + 0.05}},
101  AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
102  AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["x_(m)"]},
103  PlotLabel ->
104  Style["Posicion_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]]],
105  Row[{ Plot[{ Evaluate[x1'[t] /. First[sol]],
106  Evaluate[x2'[t] /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
107  PlotRange -> {{0,
108  T (4 Pi)/(
109  Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/m] + Sqrt[(
110  2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/
111  m]}}, {-(Sqrt[(2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
112  Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
113  2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
114  Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
115  Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
116  2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2 + k1^2])) -
117  0.25, (Sqrt[(2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
118  Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
119  2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])) +
120  Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
121  Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
122  2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2 + k1^2])) + 0.25}},
123  AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
124  AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["v_(m/s)"]},

```

```

125 PlotLabel ->
126   Style["Velocidad_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]],
127 ParametricPlot[{Evaluate[{x1[t], x1'[t]} /. First[sol]],
128   Evaluate[{x2[t], x2'[t]} /. First[sol]]], {t, 0, t0},
129 PlotRange -> {{-0.05 - (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (
130   2 m (xp01 + xp02)^2)/(
131   2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
132   Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
133   2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])],
134   0.05 + (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
135   2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
136   Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
137   2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])]}, {-0.05 - (Sqrt[(
138   2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
139   Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
140   2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
141   Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
142   Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
143   2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])],
144   0.05 + (Sqrt[(2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
145   Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(
146   2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2]]) +
147   Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]
148   Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2 m (xp01 - xp02)^2)/(
149   2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2]])]}], Frame -> True,
150 ImageSize -> 250, PlotRange -> All, ImagePadding -> 50,

```

```

151     AspectRatio -> 1, Axes -> False,
152     FrameLabel -> {Text["x⊥(m)"], Text["v⊥(m/s)"]},
153     PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]]]],
154     {{x01, 0.5,
155       Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20, Blue], 1],
156         Style["⊥(0)(m)", 15, Blue]]}},
157     {{x02, 1,
158       Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20, Red], 2],
159         Style["⊥(0)(m)", 15, Red]]}},
160     {{xp01, -0.5,
161       Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20, Blue], 1],
162         Style["⊥(0)(m/s)", 15, Blue]]}},
163     {{xp02, 2,
164       Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20, Red], 1],
165         Style["⊥(0)(m/s)", 15, Red]]}},
166     {{k2, 7,
167       Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20, Purple], 1],
168         Style["⊥(N/m)", 15, Purple]]}},
169     {{k1, 4,
170       Text@Row[{Style["k", Italic, 20, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]],
171         Style["⊥(N/m)", 15, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]]]}},
172     {{m, 3, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["⊥(kg)", 15]}}},
173     {{T, 5, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["⊥(s)", 15]}}},
174     Grid[{{Control[{{t0, 15,
175       Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["⊥(s)", 15]}}}, 0.1,
176       T (4 Pi)/(

```

```

177      Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)] + Sqrt[(
178      2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)], .1, Trigger ,
179      DisplayAllSteps -> True,
180      AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
181      "PlayPauseButton", "ResetButton"}}, {}},
182      ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

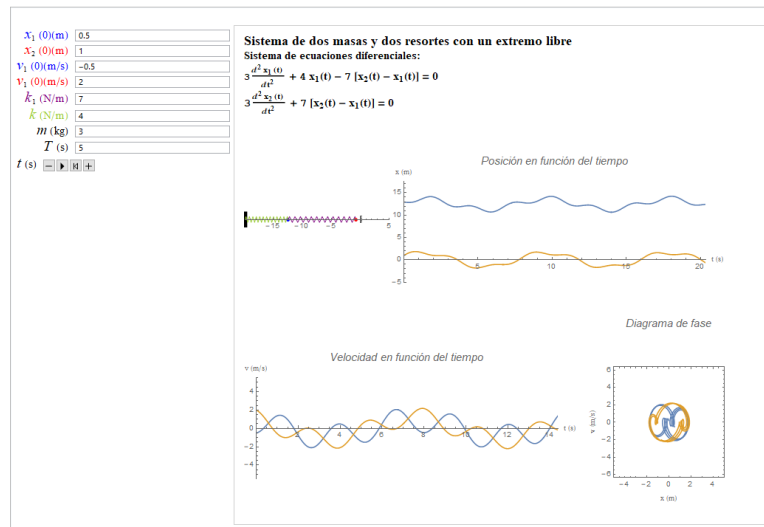


Figura 76: Vista previa del Manipulable de sistemas horizontal de dos masas y dos resortes

Oscilador de dos masas y tres resortes

Mathematica 13: Manipulable Sistemas acoplados dos masas tres resorte

```

1  resorte [a0_, y10_, y20_] :=
2  Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 50}, h = (y2 - y1)/n;
3  xv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4  yv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5  Line[Transpose@{xv, yv}];

```

```

6 Manipulate[
7   With[{sol =
8     NDSolve[{m x1''[t] + k1 x1[t] - k2 (x2[t] - x1[t]) == 0,
9       m x2''[t] + k3 x2[t] + k2 (x2[t] - x1[t]) == 0, x1[0] == x01,
10      x2[0] == x02, x1'[0] == xp01, x2'[0] == xp02}, {x1, x2}, {t, 0,
11      T ((4 Pi)/(Sqrt[1/(
12        2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
13          Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
14            4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + Sqrt[1/(
15        2 m) (k1 + 2 k2 + k3 -
16          Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
17            4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])]) }]}},
18   Column[{Column[{Style["Sistema de dos masas y tres resortes", Bold,
19     18, FontFamily -> "Times"],
20     Style["Sistema de ecuaciones diferenciales :", Bold, 15,
21       FontFamily -> "Times"],
22     Row[{Style[m, 15, Bold],
23       Style["\!\(\*FractionBox[\(\(\*SuperscriptBox[\(\
24 \[ DifferentialD ]\), \((2)\)]\*SubscriptBox[\(x\), \((1)\)]\)\)\((t)\)]\)\)\)\
25 \)\), \(\[ DifferentialD ]\*SuperscriptBox[\(t\), \((2)\)]\)\)\)\)+", Bold,
26       15, FontFamily -> "Times"], Style[k1, 15, Bold],
27       Style["\!\(\*SubscriptBox[\(x\), \((1)\)]\)\(t)\)", 15, Bold,
28         FontFamily -> "Times"], Style[k2, 15, Bold],
29       Style["\!\(\*SubscriptBox[\(x\), \((2)\)]\)\(t)\)",
30       \!\(\*SubscriptBox[\(x\), \((1)\)]\)\(t)\) = 0", 15, Bold,
31       FontFamily -> "Times"]}],

```

```

32      Row[{Style[m, 15, Bold],
33
34      Style["!\(\(*FractionBox[\(\(*SuperscriptBox[\(\
35 \[ DifferentialD ]\), \((2\))]\(*SubscriptBox[\(x\), \((2\))]\)\)\((t)\)\(\(\)\)\
36 \)\), \(\[ DifferentialD ]\(*SuperscriptBox[\(t\), \((2\))]\)\)\)\(_+\)"] , 15,
37
38      Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k3, 15, Bold],
39
40      Style["\(*SubscriptBox[\(x\), \((2\))]\)\)\(_+\)"] , 15, Bold,
41
42      FontFamily -> "Times"], Style[k2, 15, Bold], ,
43
44      Style["\(*SubscriptBox[\(x\), \((2\))]\)\)\(_+\)"] , 15, Bold,
45
46      FontFamily -> "Times"]}],}, Alignment -> Left],
47
48      Row[{Graphics[
49
50      {Thickness[.01], Green,
51
52      Line[{{(11/
53
54      4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
55
56      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
57
58      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
59
60      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
61
62      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
63
64      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
65
66      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]), -1}, {(11/
67
68      4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
69
70      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
71
72      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
73
74      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
75
76      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
77
78      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -

```

```

58      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), 1}]],
59 Line[{{-(11/4) \[Sqrt](2 (x01^2 + x02^2))/
60      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
61      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
62      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)] + (2 m (xp01 -
63      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
64      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
65      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), -1}, {-(11/
66      4) \[Sqrt](2 (x01^2 + x02^2))/
67      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
68      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
69      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)] + (2 m (xp01 -
70      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
71
72      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
73      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), 1}]],
74 Thickness[.001], Blue,
75 Disk[{Evaluate[x1[t0] /. sol ][[1]] -
76      5 /4 \[Sqrt](2 (x01^2 + x02^2))/
77      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
78      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
79      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)] + (2 m (xp01 -
80      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
81      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
82      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), 0}, 0.3],
83 ColorData["HTML"]["YellowGreen"],

```

```

84     resorte [0.5, -(11 /
85         4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
86         4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
87         Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
88         4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
89         xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
90         Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
91         4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])),
92     Evaluate[x1[t0] /. sol][[1]] -
93     5 / 4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
94     4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
95     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
96     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
97     xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
98     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
99     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), Purple,
100     resorte [0.5,
101     Evaluate[x1[t0] /. sol][[1]] -
102     5 / 4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
103     4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
104     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
105     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
106     xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
107     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
108     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])),
109     Evaluate[x2[t0] /. sol][[1]] +

```

```

110      5 /4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
111      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
112      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
113      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
114      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
115      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
116      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])),
117 ColorData["HTML"]["Gold"],
118 resorte [0.5,
119 Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]] +
120      5 /4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
121      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
122      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
123      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
124      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
125      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
126      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), +(11 /
127      4) (\[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
128      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
129
130      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
131      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
132      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
133      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
134      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]))), Red,
135 Disk[{ Evaluate[x2[t0] /. sol ][[1]] +

```

```

136      5 / 4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
137      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
138      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
139      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
140      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
141      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
142      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])), 0}, 0.3]],
143 PlotRange -> {{-(11/4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
144      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
145      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
146      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
147      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
148      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
149      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]))}, (11/
150      4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
151      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
152      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
153      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
154      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
155      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
156      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]))}}, {-0.7, 0.7}},
157 ImageSize -> {400, 100}, Axes -> True],
158 Plot[{Evaluate[x1[t] /. First[sol]] +
159      5 / 4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
160      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
161      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -

```

```

162      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3))) + (2 m (xp01 -
163      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
164      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
165      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])),
166 Evaluate[x2[t] /. First[sol]] -
167 5 /4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
168 4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
169 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
170 4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
171 xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
172 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
173 4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]))}, {t, 0, t0},
174 PlotRange -> {{0,
175 T ((4 Pi)/(\[Sqrt](1/(
176 2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
177 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
178 4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) + \[Sqrt](1/(
179 2 m) (k1 + 2 k2 + k3 -
180 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
181 4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])))))}, {-9 /
182 4) \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
183 4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
184 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
185 4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
186 xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
187 Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -

```

```

188      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3))) - 1,
189  9 /4 \[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
190      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
191      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
192      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
193      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
194      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
195      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) + 1}},
196  AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
197  AxesLabel -> {Text["t(s)"], Text["x(m)"]},
198  PlotLabel ->
199  Style["Posicion en funcion del tiempo", Italic, 15]]],
200  Row[{Plot[{Evaluate[x1'[t] /. First[sol]],
201      Evaluate[x2'[t] /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
202  PlotRange -> {{0,
203      T ((4 Pi)/(\[Sqrt](1/(
204      2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
205      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
206      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) + \[Sqrt](1/(
207      2 m) (k1 + 2 k2 + k3 -
208      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
209      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])))]}, {-\[Sqrt](1/(
210      2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
211      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
212      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) \[Sqrt]((
213      2 (x01^2 + x02^2))/

```

```

214
215      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
216      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
217      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
218      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
219      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
220      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) -
221 0.5, (\[Sqrt](1/(
222      2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
223      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
224      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) \[Sqrt]((
225      2 (x01^2 + x02^2))/
226      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
227      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
228      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
229      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
230      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
231      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) + 0.5}},
232 AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
233 AxesLabel -> {Text["t_(s)"], Text["v_(m/s)"]},
234 PlotLabel ->
235   Style["Velocidad_en_funcion_del_tiempo", Italic, 15]],
236 ParametricPlot[{Evaluate[{x1[t], x1'[t]} /. First[sol]],
237   Evaluate[{x2[t], x2'[t]} /. First[sol]]}, {t, 0, t0},
238 PlotRange -> {{-\[Sqrt]((2 (x01^2 + x02^2))/
239      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +

```

240 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 241
 242 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -$
 243 $xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -$
 244 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 245 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))] -$
 246 $1, \sqrt{((2 (x01^2 + x02^2))/$
 247 $4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +$
 248 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 249 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -$
 250 $xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -$
 251 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 252 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))] +$
 253 $1\}, \{-\sqrt{(1/($
 254 $2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +$
 255 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 256 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))] \sqrt{(($
 257 $2 (x01^2 + x02^2))/$
 258 $4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +$
 259 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 260 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -$
 261 $xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -$
 262 $\text{Sqrt}[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -$
 263 $4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))] -$
 264 $0.25, (\sqrt{(1/($
 265 $2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +$

```

266      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
267      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) \[Sqrt]((
268      2 (x01^2 + x02^2))/
269      4 + (2 m (xp01 + xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 +
270      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
271      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)]) + (2 m (xp01 -
272      xp02)^2)/(k1 + 2 k2 + k3 -
273      Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
274      4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)])) + 0.25}},
275      Frame -> True, ImageSize -> 250, PlotRange -> All,
276      ImagePadding -> 50, AspectRatio -> 1, Axes -> False,
277      FrameLabel -> {Text["x(m)", Text["v(m/s)"]]},
278      PlotLabel -> Style["Diagrama de fase", Italic, 15]]]]],
279      {{x01, 3,
280      Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20, Blue], 1],
281      Style[" (N/m)", 15, Blue]}}]},
282      {{x02, -2,
283      Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20, Red], 2],
284      Style[" (N/m)", 15, Red]}}]},
285      {{xp01, 0.7,
286      Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20, Blue], 1],
287      Style[" (N/m)", 15, Blue]}}]},
288      {{xp02, -0.3,
289      Text@Row[{Subscript[Style["v", Italic, 20, Red], 2],
290      Style[" (N/m)", 15, Red]}}]},
291      {{k1, 7,

```

```

292 Text@Row[{Style["k", Italic, 20, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]],
293   Style["⌊(N/m)", 15, ColorData["HTML"]["YellowGreen"]]}]},
294 {{k2, 11,
295   Text@Row[{Subscript[Style["k", Italic, 20, Purple], 1],
296     Style["⌊(N/m)", 15, Purple]}]}},
297 {{k3, 9,
298   Text@Row[{Subscript[
299     Style["k", Italic, 20, ColorData["HTML"]["Gold"]], 2],
300     Style["⌊(N/m)", 15, ColorData["HTML"]["Gold"]]}]}},
301 {{m, 12, Text@Row[{Style["m", Italic, 20], Style["⌊(kg)", 15]}]}},
302 {{T, 5, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style["⌊(s)", 15]}]}},
303 Grid[{{Control[{{t0, 25,
304   Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style["⌊(s)", 15]}]}], 0.1,
305   T ((4 Pi)/(\[Sqrt](1/(
306     2 m) (k1 + 2 k2 + k3 +
307     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
308     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))] + \[Sqrt](1/(
309     2 m) (k1 + 2 k2 + k3 -
310     Sqrt[(k1 + 2 k2 + k3)^2 -
311     4 (k1 k2 + k1 k3 + k2 k3)))]))], .1, Trigger,
312   DisplayAllSteps -> True,
313   AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
314     "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}, {}},
315 ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

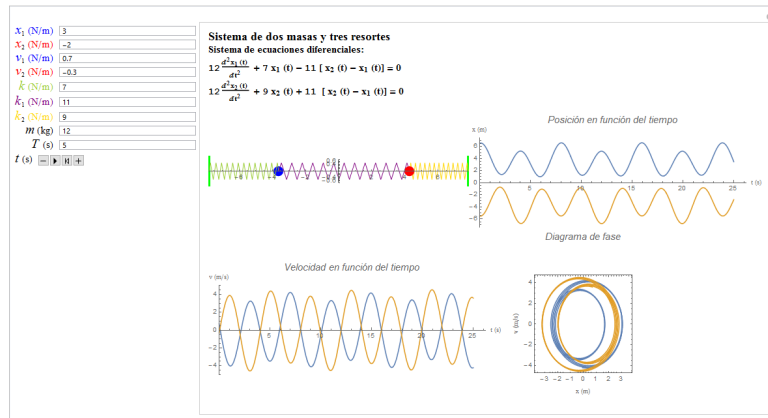


Figura 77: Vista previa del Manipulable de sistemas horizontal de dos masas y tres resortes

Anexo 7.3: Sistema que involucra tres masas

Mathematica 14: Manipulable Sistema acoplado de tres masas y cuatro resortes

```

1  resorte [a0_, y10_, y20_] :=
2  Module[{a = a0, y1 = y10, y2 = y20, n = 100}, h = (y2 - y1)/n;
3  yv = Table[k, {k, y1, y2, h}];
4  xv = Table[a Sin[(r Pi)/2], {r, 0, n}];
5  Line[Transpose@{xv, yv}]];
6 Manipulate[
7  With[{sol =
8    NDSolve[{m x1''[t] + k1 x1[t] - k2 (x2[t] - x1[t]) == 0,
9      m x2''[t] + k2 (x2[t] - x1[t]) - k3 (x3[t] - x2[t]) == 0,
10     m x3''[t] + k3 (x3[t] - x2[t]) + k4 x3[t] == 0, x1[0] == x01,
11     x2[0] == x02, x3[0] == x03, x1'[0] == xp01, x2'[0] == xp02,
12     x3'[0] == xp03}, {x1, x2, x3}, {t, 0,
13     T (4 Pi)/(
14       Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)] + Sqrt[(
15       2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)]}],

```

```

16 Column[{Column[{Style["Sistema_de_tres_masas_y_cuatro_resortes",
17     Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
18     Style["Sistema_de_ecuaciones_diferenciales :", Bold, 15,
19         FontFamily -> "Times"],
20     Row[{Style[m, 15, Bold],
21         Style["\\!\\(*FractionBox[\\(*SuperscriptBox[\\(*
22     \\[DifferentialD]\\),_\\(2\\)]\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(1\\)]\\)\\_\\((t)\\)\\(\\\\\\_\\
23     \\)\\),_\\(*[DifferentialD]\\(*SuperscriptBox[\\(t\\),_\\(2\\)]\\)\\)\\_+_\"", 15,
24         Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k1, 15, Bold],
25         Style["_\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(1\\)]\\)(t)_-_", 15, Bold,
26         FontFamily -> "Times"], Style[k2, 15, Bold],
27         Style["_\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(2\\)]\\)(t)_-_"
28     "\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(1\\)]\\)(t)]_=_0\"", 15, Bold,
29         FontFamily -> "Times"]}],
30     Row[{Style[m, 15, Bold],
31         Style["\\!\\(*FractionBox[\\(*SuperscriptBox[\\(*
32     \\[DifferentialD]\\),_\\(2\\)]\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(2\\)]\\)\\_\\((t)\\)\\(\\\\\\_\\
33     \\)\\),_\\(*[DifferentialD]\\(*SuperscriptBox[\\(t\\),_\\(2\\)]\\)\\)\\_+_\"", 15,
34         Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k2, 15, Bold],
35         Style["_\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(2\\)]\\)(t)_-_"
36     "\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(1\\)]\\)(t)]_=_0\"", 15, Bold,
37         FontFamily -> "Times"], Style[k3, 15, Bold],
38         Style["_\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(3\\)]\\)(t)_-_"
39     "\\!\\(*SubscriptBox[\\(x\\),_\\(2\\)]\\)(t)]_=_0\"", 15, Bold,
40         FontFamily -> "Times"]}],
41     Row[{Style[m, 15, Bold],

```


68

```

69 .....Sqrt[(x01-x02)^2+(2.m.(xp01-xp02)^2)/(
70 .....2.k2+k1-Sqrt[4.k2^2+k1^2]))],{t,0,t0},
71 .....PlotRange->{{0,
72 .....T.(4.Pi)/(
73 .....Sqrt[(2.k2+k1-Sqrt[4.k2^2+k1^2])/(2.m)]+Sqrt[(
74 .....2.k2+k1+Sqrt[4.k2^2+k1^2])/(2.m))]}, {13./
75 .....4.(Sqrt[(x01+x02)^2+(2.m.(xp01+xp02)^2)/(
76 .....2.k2+k1+Sqrt[4.k2^2+k1^2]))+
77 .....Sqrt[(x01-x02)^2+(2.m.(xp01-xp02)^2)/(
78 .....2.k2+k1-Sqrt[4.k2^2+k1^2]))],-(13./
79 .....4).(Sqrt[(x01+x02)^2+(2.m.(xp01+xp02)^2)/(
80 .....2.k2+k1+Sqrt[4.k2^2+k1^2]))+
81 .....Sqrt[(x01-x02)^2+(2.m.(xp01-xp02)^2)/(
82 .....2.k2+k1-Sqrt[4.k2^2+k1^2]))]}},
83 .....AspectRatio->1/3,ImageSize->450,
84 .....AxesLabel->{Text["t (s)"],Text["x (m)"]},
85 .....PlotLabel->
86 .....Style["Posicion en funcion del tiempo",Italic,15]],
87 ....Row[{Plot[{Evaluate[x1'[t]/.First[sol]],
88 .....Evaluate[x2'[t]/.First[sol]],
89 .....Evaluate[x3'[t]/.First[sol]]},{t,0,t0},
90 .....PlotRange->{{0,
91 .....T.(4.Pi)/(
92 .....Sqrt[(2.k2+k1-Sqrt[4.k2^2+k1^2])/(2.m)]+Sqrt[(
93 .....2.k2+k1+Sqrt[4.k2^2+k1^2])/(

```

```

94 .....2_m))}}, {-0.05 - (Sqrt[(
95 .....2_k2 + k1 + Sqrt[4_k2^2 + k1^2])/(2_m)]
96 .....Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2_m(xp01 + xp02)^2)/(
97 .....2_k2 + k1 + Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]} +
98 .....Sqrt[(2_k2 + k1 - Sqrt[4_k2^2 + k1^2])/(2_m)]
99 .....Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2_m(xp01 - xp02)^2)/(
100 .....2_k2 + k1 - Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]}),
101 .....0.05 + (Sqrt[(2_k2 + k1 + Sqrt[4_k2^2 + k1^2])/(2_m)]
102 .....Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2_m(xp01 + xp02)^2)/(
103 .....2_k2 + k1 + Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]} +
104 .....Sqrt[(2_k2 + k1 - Sqrt[4_k2^2 + k1^2])/(2_m)]
105 .....Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2_m(xp01 - xp02)^2)/(
106 .....2_k2 + k1 - Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]}]}},
107 .....AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 450,
108 .....AxesLabel -> {Text["t (s)"], Text["v (m/s)"]},
109 .....PlotLabel ->
110 .....Style["Velocidad en funcion del tiempo", Italic, 15],
111 .....ParametricPlot[{Evaluate[{x1[t], x1'[t]} /. First[sol]],
112 .....Evaluate[{x2[t], x2'[t]} /. First[sol]],
113 .....Evaluate[{x3[t], x3'[t]} /. First[sol]]], {t, 0, t0},
114 .....PlotRange -> {{-0.05 - (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (
115 .....2_m(xp01 + xp02)^2)/(
116 .....2_k2 + k1 + Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]} +
117 .....Sqrt[(x01 - x02)^2 + (2_m(xp01 - xp02)^2)/(
118 .....2_k2 + k1 - Sqrt[4_k2^2 + k1^2])]}),
119 .....0.05 + (Sqrt[(x01 + x02)^2 + (2_m(xp01 + xp02)^2)/(

```

```

120 .....2.k2+.k1+.Sqrt[4.k2^2+.k1^2]])+
121 .....Sqrt[(x01-.x02)^2+.(2.m.(xp01-.xp02)^2)/(
122 .....2.k2+.k1-.Sqrt[4.k2^2+.k1^2]))],{-0.05-.Sqrt[(
123 .....2.k2+.k1+.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])/(2.m)]
124 .....Sqrt[(x01+.x02)^2+.(2.m.(xp01+.xp02)^2)/(
125 .....2.k2+.k1+.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])))+
126 .....Sqrt[(2.k2+.k1-.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])/(2.m)]
127 .....Sqrt[(x01-.x02)^2+.(2.m.(xp01-.xp02)^2)/(
128 .....2.k2+.k1-.Sqrt[4.k2^2+.k1^2]))],
129 .....0.05+.Sqrt[(2.k2+.k1+.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])/(2.m)]
130 .....Sqrt[(x01+.x02)^2+.(2.m.(xp01+.xp02)^2)/(
131 .....2.k2+.k1+.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])))+
132 .....Sqrt[(2.k2+.k1-.Sqrt[4.k2^2+.k1^2])/(2.m)]
133 .....Sqrt[(x01-.x02)^2+.(2.m.(xp01-.xp02)^2)/(
134 .....2.k2+.k1-.Sqrt[4.k2^2+.k1^2]))}],Frame->True,
135 .....ImageSize->250,PlotRange->PlotRange->Automatic,
136 .....ImagePadding->50,AspectRatio->1,Axes->False,
137 .....FrameLabel->{Text["x (m)"],Text["v (m/s)"]},
138 .....PlotLabel->Style["Diagrama de fase",Italic,15]]]]],
139 {-{x01,-1,
140 ...Text@Row[{Subscript[Style["x",Italic,20],1],
141 .....Style["(0)(m)",15]}}},
142 {-{x02,0,
143 ...Text@Row[{Subscript[Style["x",Italic,20],2],
144 .....Style["(0)(m)",15]}}},
145 {-{x03,1,

```

```

146 ____Text@Row[{Subscript[Style["x", _Italic , _20], _3],
147 _____Style[" (0)(m)", _15]}}}},
148 _{{xp01, _0.2,
149 ____Text@Row[{Subscript[Style["v", _Italic , _20], _1],
150 _____Style[" (0)(m/s)", _15]}}}},
151 _{{xp02, _0.4,
152 ____Text@Row[{Subscript[Style["v", _Italic , _20], _2],
153 _____Style[" (0)(m/s)", _15]}}}},
154 _{{xp03, _0.5,
155 ____Text@Row[{Subscript[Style["v", _Italic , _20], _3],
156 _____Style[" (0)(m/s)", _15]}}}},
157 _{{k2, _7,
158 ____Text@Row[{Subscript[Style["k", _Italic , _20], _1],
159 _____Style[" (N/m)", _15]}}}},
160 _{{k3, _10,
161 ____Text@Row[{Subscript[Style["k", _Italic , _20], _2],
162 _____Style[" (N/m)", _15]}}}},
163 _{{k4, _20,
164 ____Text@Row[{Subscript[Style["k", _Italic , _20], _3],
165 _____Style[" (N/m)", _15]}}}},
166 _{{k1, _13, _Text@Row[{Style["k", _Italic , _20], _Style[" (N/m)", _15]}}}},
167 _{{m, _0.15, _Text@Row[{Style["m", _Italic , _20], _Style[" (kg)", _15]}}}},
168 _{{T, _5, _Text@Row[{Style["T", _Italic , _20], _Style[" (s)", _15]}}}},
169 _Grid[{{Control[{{t0, _0.1,
170 _____Text@Row[{Style["t", _Italic , _20], _Style[" (s)", _15]}}}], _0.1,
171 _____T_(4_Pi)/(

```

```

172 .....Sqrt[(2 k2 + k1 - Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)] + Sqrt[(
173 .....2 k2 + k1 + Sqrt[4 k2^2 + k1^2])/(2 m)], 1, Trigger,
174 ..... DisplayAllSteps -> True,
175 ..... AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
176 ..... "PlayPauseButton", "ResetButton"}],
177 ...}], ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]
178 ..

```

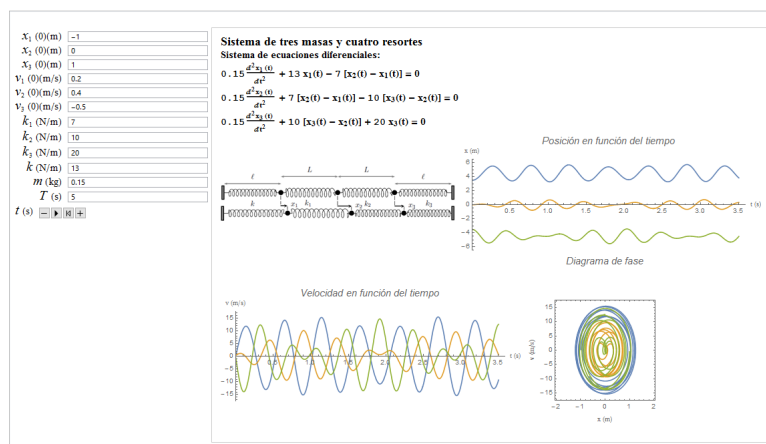


Figura 78: Vista previa del Manipulable de sistemas horizontal de tres masas y cuatro resortes

Anexo 7.4: Oscilador armónico simple

Usando la ecuación $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_a)$

Mathematica 15: Manipulable oscilador armónico simple

```

1 Manipulate[
2   Column[{Style["Oscilador_Armonico_Simple", Bold, 18,
3     FontFamily -> "Times"],
4     Style["Ecuacion", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],

```

```

5   Row[{Style["x(t)=", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
6     Style[a, 15, Bold],
7     Style[" Cos[", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
8     Style[w0, 15, Bold],
9     Style[" t + ", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
10    Style["\[Alpha]", 15, Bold],
11    Style[" )", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}],
12   Plot[a Cos[w0 t + \[Alpha]], {t, -0.001, k},
13   PlotRange -> {{0, T 2 Pi}, {-5, 5}}, ImageSize -> Medium]],
14   OpenerView[{"Parametros de la funcion en x", Column[{
15     Control[{{a, 4, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
16     Control[{{w0, Pi/4, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi}],
17     Control[{{\[Alpha], 3 Pi/4, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi}]]],
18   True], Delimiter ,
19
20   {{T, 2, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}]}},
21   Grid[{{Control[{{k, 12,
22     Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}]}, 0.2,
23     T 2 Pi, .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
24     AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
25       "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}]}],
26   , ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

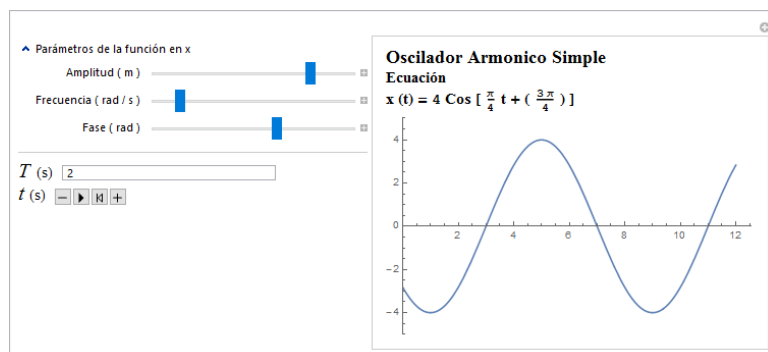


Figura 79: Vista previa del manipulable oscilador armónico simple

En la figura 73 se puede observar el manipulable correspondiente al oscilador armónico simple, en este es posible corroborar que los valores de la amplitud (A), frecuencia (ω) y fase (α), se pueden modificar mediante scrolls a diferencia de los manipulables anteriormente mostrados esta es otra herramienta que es posible utilizar en la creación de los estas herramientas didácticas, este permite escoger valores que tienen tres dígitos decimales, además de tener una caja de valores que se puede modificar directamente y botones que permiten variar los valores de manera continua, en la parte inferior se puede apreciar la gráfica del sistema armónico simple.

Usando la ecuación $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

Anexo 7.5: Figuras de Lissajous en dos dimensiones

Mathematica 16: Manipulable figuras de Lissajous 2D

```
1 Manipulate[
2   Column[{Style["Funcion en x:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
3     Row[{Style["x(t) = ", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
```

```

4      Style[a, 15, Bold],
5      Style["_Cos_", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
6      Style[w0, 15, Bold],
7      Style["_t+_(", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
8      Style["[Alpha]", 15, Bold],
9      Style["_)", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}],
10     Style["Funcion_en_y:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
11     Row[{Style["y(t)=", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
12         Style[b, 15, Bold],
13         Style["_Cos_", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
14         Style[w1, 15, Bold],
15         Style["_t+_(", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
16         Style["[Beta]", 15, Bold],
17         Style["_)", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}], Grid[{
18     {Item["Diagrama_y", Alignment -> Center],
19       Item["Diagrama_2D", Alignment -> Center]},
20     {Dynamic[
21         Plot[b Cos[w1 t + \"[Beta]\", {t, -0.001, k},
22           PlotRange -> {{0, T 2 Pi}, {-5, 5}}],
23         ParametricPlot[{a Cos[w0 t + \"[Alpha]\",
24           b Cos[w1 t + \"[Beta]\"], {t, -0.001, k },
25         PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}, Background -> Black,
26         ColorFunction -> "Rainbow",
27         LabelStyle -> Directive[White, Bold]]},
28     {Item["Diagrama_x", Alignment -> Center],
29       Item["_", Alignment -> Center]}, {Dynamic[

```

```

30      Plot[a Cos[w0 t + \[Alpha]], {t, -0.001, k},
31      PlotRange -> {{0, T 2 Pi}, {-5, 5}}], Frame -> All]],
32 OpenerView[{"Parametros de la funcion en x", Column[{
33   Control[{{a, 3, "Amplitud (cm)"}, 0, 5}],
34   Control[{{w0, Pi/2, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi}],
35   Control[{{\[Alpha], 2, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi}]]],
36   True], Delimiter ,
37 OpenerView[{"Parametros de la funcion en y", Column[{
38   Control[{{b, 2, "Amplitud (cm)"}, 0, 2}],
39   Control[{{w1, Pi, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi}],
40   Control[{{\[Beta], 1/2, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi}]]],
41   True], Delimiter ,
42 {{T, 2, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}]}},
43 Grid[{{Control[{{k, 6,
44   Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}]}, 0.2,
45   T 2 Pi, .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
46   AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
47     "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}]}],
48 , ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

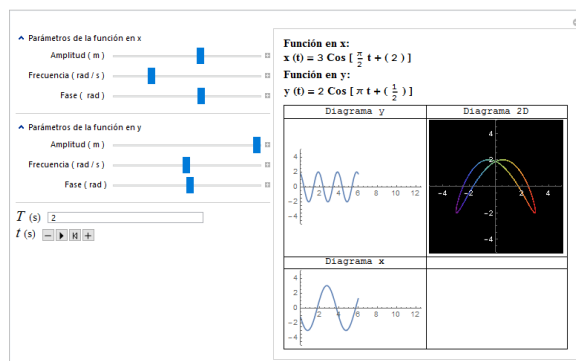


Figura 80: Vista previa del manipulable Figuras de Lissajous 2D

En la figura 75 se puede observar el manipulable correspondiente al oscilador armónico simple de dos dimensiones, para el cual se puede ver que tiene unos menús desplegables, estos fueron hechos con la sentencia **OpenerView**, que permiten visualizar los valores de la amplitud, frecuencia y fase de cada uno de los osciladores, claro esta todos estos se pueden modificar, que componen los el oscilador bidimensional en la parte inferior se puede apreciar las figuras de los osciladores independientes como del como del oscilador de dos dimensiones dando paso a la construcción de las figuras de Lissajous.

Anexo 7.6: Figuras de Lissajous en tres dimensiones

Mathematica 17: Manipulable figuras de Lissajous 3D

```

1 Manipulate[
2   Column[{Style["Funcion en x:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
3     Row[{Style["x(t) = ", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
4       Style[a, 15, Bold],
5       Style[" Cos[", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],

```

```

6      Style[w0, 15, Bold],
7      Style["t+α", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
8      Style["[Alpha]", 15, Bold],
9      Style["α)", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}],
10     Style["Funcion_en_y:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
11     Row[{Style["y(t)=", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
12         Style[b, 15, Bold],
13         Style["Cos", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
14         Style[w1, 15, Bold],
15         Style["t+α", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
16         Style["[Beta]", 15, Bold],
17         Style["α)", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}],
18     Style["Funcion_en_z:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
19     Row[{Style["z(t)=", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
20         Style[c, 15, Bold],
21         Style["Cos", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
22         Style[w2, 15, Bold],
23         Style["t+α", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
24         Style["[Gamma]", 15, Bold],
25         Style["α)", 15, Bold, FontFamily -> "Times"]}],
26     Grid[{
27         {Item["Diagrama_xy", Alignment -> Center],
28         Item["Diagrama_3D", Alignment -> Center]},
29         {Dynamic[
30             ParametricPlot[{a Cos[w0 t + [Alpha]],
31                 b Cos[w1 t + [Beta]]}, {t, -0.001, k},

```

```

32      PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}]],
33      ParametricPlot3D[{a Cos[w0 t + \[Alpha]], b Cos[w1 t + \[Beta]],
34        c Cos[w2 t + \[Gamma]]}, {t, -0.001, k },
35      PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}}, Background -> Black,
36      AxesLabel -> {x, y, z}, AxesStyle -> Directive[White, 12],
37      ColorFunction -> "Rainbow",
38      LabelStyle -> Directive[White, Bold], PlotStyle -> {Thick},
39      PerformanceGoal -> "Quality"]],
40    {Item["Diagramayz", Alignment -> Center],
41      Item["Diagramaxz", Alignment -> Center]}, {Dynamic[
42      ParametricPlot[{b Cos[w1 t + \[Beta]],
43        c Cos[w2 t + \[Gamma]]}, {t, -0.001, k},
44      PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}]],
45      Dynamic[
46      ParametricPlot[{a Cos[w0 t + \[Alpha]],
47        c Cos[w2 t + \[Gamma]]}, {t, -0.001, k},
48      PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}]]}], Frame -> All]],
49    OpenerView[{"Parametros de la funcion en x", Column[{
50      Control[{{a, 1, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
51      Control[{{w0, Pi/4, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi]],
52      Control[{{\[Alpha], 1, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi}}]}],
53    True], Delimiter ,
54    OpenerView[{"Parametro de la funcion en y", Column[{
55      Control[{{b, 4, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
56      Control[{{w1, Pi/2, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi]],
57      Control[{{\[Beta], -3, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi}}]}],

```

```

58   True], Delimiter ,
59   OpenerView[{"Parametro de la funcion en z", Column[{
60     Control[{{c, 3, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
61     Control[{{w2, 2 Pi/3, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi}],
62     Control[{{[Gamma], 2, "Fase (rad)"}, -3 Pi, 3 Pi]]}],
63   True], Delimiter ,
64   {{T, 2, Text@Row[{Style["T", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}}]},
65   Grid[{{Control[{{k, 7,
66     Text@Row[{Style["t", Italic, 20], Style[" (s)", 15]}}]}, 0.2,
67     T 2 Pi, .1, Trigger, DisplayAllSteps -> True,
68     AppearanceElements -> {"StepLeftButton", "StepRightButton",
69     "PlayPauseButton", "ResetButton"}]}, {}]},
70   ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

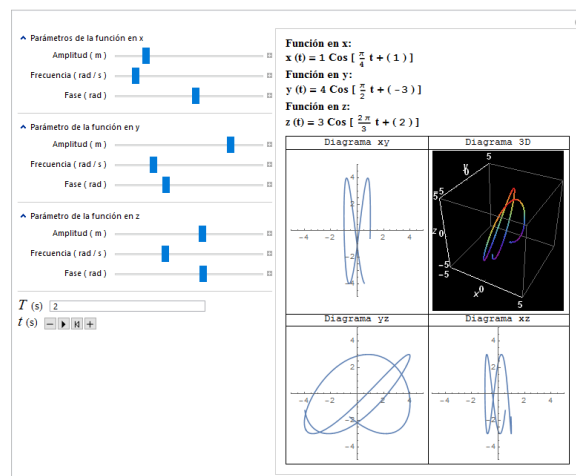


Figura 81: Vista previa del manipulable Figuras de Lissajous 3D

La figura 76 muestra el manipulable correspondiente al oscilador armónico simple de tres dimensiones, para el cual, se puede observar, una vez más que tiene los menús

desplegables, en esta ocasión son tres que corresponde a cada uno de los osciladores que componen la figura de Lissajous final, en la parte inferior se logra apreciar las figuras que se de dos dimensiones que componen el oscilador de tres dimensiones y la figura de Lissajous de tridimensional, por otra parte es posible mover el diagrama de caja de la figura resultante picando sobre ella y arrastrando.

Anexo 7.7: Interferencia de ondas

Interferencia constructiva de ondas

Mathematica 18: Manipulable Superposición de ondas

```

1 Manipulate[
2   Column[{Column[{Style["Interferencia_Constructiva_de_Ondas", Bold,
3     18, FontFamily -> "Times"],
4     Style["Primer_Onda:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
5     Row[{Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 1],
6       Style["_=" , Bold, FontFamily -> "Times"], Style[A1, Bold],
7       Style["_Sin[", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k1, Bold],
8       Style["x", Bold, FontFamily -> "Times"],
9       Style["_=" , Bold, FontFamily -> "Times"], Style[w1, Bold],
10      Style["_t+_(", Bold, FontFamily -> "Times"],
11      Style["\[CurlyPhi]1, Bold],
12      Style["_)]", Bold, FontFamily -> "Times"]}],
13   Style["Segunda_Onda:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
14   Row[{Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 2],

```

```

15     Style[" $\omega$ ", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[A2, Bold],
16     Style[" $\sin$ ", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k2, Bold],
17     Style["x", Bold, FontFamily -> "Times"],
18     Style[" $\omega$ ", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[w2, Bold],
19     Style[" $t$ ", Bold, FontFamily -> "Times"],
20     Style[" $\phi$ ", Bold],
21     Style[" $\phi$ ", Bold, FontFamily -> "Times"]]]],
22     Alignment -> Left],
23     Plot[{A1 Sin[k1 x - w1 t +  $\phi$ 1],
24           A2 Sin[k2 x - w2 t +  $\phi$ 2]}, {x, 0, 15},
25     PlotRange -> {{0, 15}, {-5, 5}}, AspectRatio -> 1/3,
26     ImageSize -> 450],
27     Column[{Style["Ondas resultante:", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
28             Row[{Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"],
29                   Style[" $\omega$ ", Bold, FontFamily -> "Times"],
30                   Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 1],
31                   Style[" $t$ ", Bold, FontFamily -> "Times"],
32                   Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 2]}]},
33     Alignment -> Left],
34     Plot[{A1 Sin[k1 x - w1 t +  $\phi$ 1] +
35           A2 Sin[k2 x - w2 t +  $\phi$ 2]}, {x, 0, 15},
36     PlotRange -> {{0, 15}, {-10, 10}}, AspectRatio -> 1/3,
37     ImageSize -> 450]],
38     OpenerView[{Style["Primer Onda", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
39     Column[{
40     Control[{A1, 3, "Amplitud ( $m$ )", 0, 5}],

```

```

41 Control[{{k1, 0.6, "#_de_Onda_(_rad_/_m_)_"}, 0, 5}],
42 Control[{{w1, 2, "Frecuencia_(_rad_/_s_)_"}, 0, 2 Pi}],
43 Control[{{\[CurlyPhi]1, 1, "Fase_(_rad_)_"}, 0,
44 2 Pi }]}], Delimiter,
45 OpenerView[{Style["Segunda_Onda_", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
46 Column[{
47 Control[{{A2, 4, "Amplitud_(_m_)_"}, 0, 5}],
48 Control[{{k2, 3, "#_de_Onda_(_rad_/_m_)_"}, 0, 5}],
49 Control[{{w2, 0.5, "Frecuencia_(_rad_/_s_)_"}, 0, 2 Pi}],
50 Control[{{\[CurlyPhi]2, 3, "Fase_(_rad_)_"}, 0,
51 2 Pi }]}], Delimiter,
52 {{t, 1, "tiempo_(_s_)"}, 0.1, 15, Appearance -> "Labeled"},
53 ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

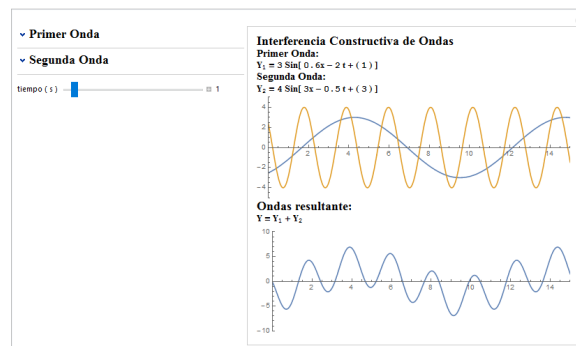


Figura 82: Vista previa del Manipulable Interferencia constructiva de ondas

Interferencia destructiva de ondas

Mathematica 19: Manipulable Superposición de ondas

```

1 Manipulate[

```

```

2 Column[{Column[{Style["Interferencia_Destructiva_de_Ondas", Bold, 18,
3     FontFamily -> "Times"],
4     Style["Primer_Onda:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
5     Row[{Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 1],
6         Style["_=_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[A1, Bold],
7         Style["_Sin[_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k1, Bold],
8         Style["x", Bold, FontFamily -> "Times"],
9         Style["_=_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[w1, Bold],
10        Style["_t+_(", Bold, FontFamily -> "Times"],
11        Style[\[CurlyPhi]1, Bold],
12        Style["_)_"]", Bold, FontFamily -> "Times"]}]],
13    Style["Segunda_Onda:", 15, Bold, FontFamily -> "Times"],
14    Row[{Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 2],
15        Style["_=_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[A2, Bold],
16        Style["_Sin[_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[k2, Bold],
17        Style["x", Bold, FontFamily -> "Times"],
18        Style["_=_", Bold, FontFamily -> "Times"], Style[w2, Bold],
19        Style["_t+_(", Bold, FontFamily -> "Times"],
20        Style[\[CurlyPhi]2, Bold],
21        Style["_)_"]", Bold, FontFamily -> "Times"]}]]},
22    Alignment -> Left],
23 Plot[{A1 Sin[k1 x - w1 t + \[CurlyPhi]1],
24     A2 Sin[-k2 x - w2 t + \[CurlyPhi]2]}, {x, 0, 15},
25 PlotRange -> {{0, 15}, {-5, 5}}, AspectRatio -> 1/3,
26 ImageSize -> 450],
27 Column[{Style["Ondas_resultante:", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],

```

```

28   Row[{Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"],
29       Style["=" , Bold, FontFamily -> "Times"],
30       Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 1],
31       Style["+" , Bold, FontFamily -> "Times"],
32       Subscript[Style["Y", Bold, FontFamily -> "Times"], 2] ]},
33   Alignment -> Left],
34   Plot[{A1 Sin[k1 x - w1 t + \[CurlyPhi]1] +
35       A2 Sin[-k2 x - w2 t + \[CurlyPhi]2]}, {x, 0, 15},
36   PlotRange -> {{0, 15}, {-10, 10}}, AspectRatio -> 1/3,
37   ImageSize -> 450]],
38   OpenerView[{Style["Primer Onda", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
39       Column[{
40           Control[{{A1, 2, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
41           Control[{{k1, 1.5, "# de Onda (rad/m)"}, 0, 5}],
42           Control[{{w1, Pi, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi],
43           Control[{{\[CurlyPhi]1, -1, "Fase (rad)"}, -2 Pi,
44               2 Pi } ] ] ]], Delimiter ,
45   OpenerView[{Style["Segunda Onda", Bold, 18, FontFamily -> "Times"],
46       Column[{
47           Control[{{A2, 4, "Amplitud (m)"}, 0, 5}],
48           Control[{{k2, 2, "# de Onda (rad/m)"}, 0, 5}],
49           Control[{{w2, 0.5, "Frecuencia (rad/s)"}, 0, 2 Pi],
50           Control[{{\[CurlyPhi]2, 3, "Fase (rad)"}, -2 Pi,
51               2 Pi } ] ] ]], Delimiter ,
52   {{t, 1, "tiempo"}, 0.1, 15, Appearance -> "Labeled"},
53   ControlPlacement -> Left, SaveDefinitions -> True]

```

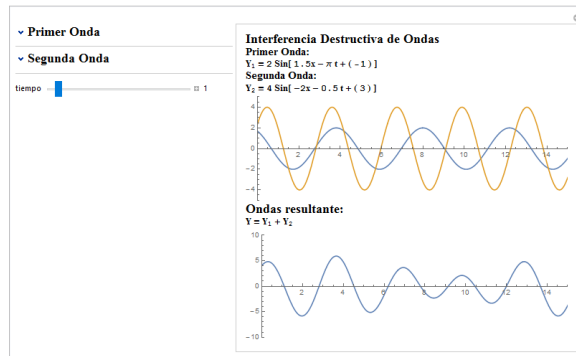


Figura 83: Vista previa del manipulable Interferencia destructiva de ondas

Anexo 7.8: Series de Fourier

Series de Furier onda Cuadrada

Mathematica 20: Manipulable Series de Furier onda Cuadrada

```

1 f[x_] = Piecewise[{{-2, -10 < x <= -8}, {2, -8 < x <= -6}, {-2, -6 <
2     x <= -4}, {2, -4 < x < -2}, {-2, -2 < x <= 0}, {2,
3     0 < x <= 2}, {-2, 2 < x <= 4}, {2, 4 < x <= 6}, {-2,
4     6 < x <= 8}, {2, 8 < x < 10}}];
5
6 L = 4;
7 a1 = 2/L \!\(
8 \*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\),
9     FractionBox[\(-L\), \((2\)]],
10    FractionBox[\(L\), \((2\)]])\((f[x] \[DifferentialD ]x)\);
11 ak = 2/L \!\(
12 \*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\),

```

13 **FractionBox** $\left[\frac{-L}{2}\right]$,

14 **FractionBox** $\left[\frac{L}{2}\right]$ $\left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right)$;

15 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

16 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

17 **FractionBox** $\left[\frac{-L}{2}\right]$,

18 **FractionBox** $\left[\frac{L}{2}\right]$ $\left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right)$;

19 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

20 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

21 $g[j_-, x_-] := a_1 + \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

22 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

23 $\frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx$

24 Manipulate[

25 **Column**[{Style[

26 "Aproximacion_a_la_Onda_Cuadrada_por_series_de_Fourier", Bold, 18,

27 **FontFamily** -> "Times"],

28 Style["Onda_Cuadrada:", Bold, 15, **FontFamily** -> "Times"],

29 **Row**[{Style["f[x]=", Bold, 15, **FontFamily** -> "Times"],

30 Style[**Piecewise**[{{-2, -2 < x <= 0}, {2, 0 < x < 2}}, Bold, 15,

31 **FontFamily** -> "Times"]], ,

32 Style["Serie_de_Fourier_Asociada:", Bold, 15,

33 **FontFamily** -> "Times"],

34 **Row**[{Style["f[x]=", Bold, 15, **FontFamily** -> "Times"],

35 Style[a1 + \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx

36 \frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx

37 \frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \sin\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx

38 \frac{2}{L} \int_0^L \left(f[x] \cos\left[\frac{2k\pi x}{L}\right] \left[\text{DifferentialD } x\right]\right) dx

```

39 \*FractionBox[(2\ k\ Pi\ x\), \ (L\))]\), Bold, 15,
40 FontFamily -> "Times"]],
41 Plot[{f[x], g[j, x]}, {x, -2 a, 2 a}, PlotStyle -> {Red, Blue},
42 ImageSize -> Large]], {{j, 1, "n_terminos"}, 1, 30,
43 1}, {{a, 2, "n_periodos"}}, ControlPlacement -> Left,
44 SaveDefinitions -> True][Column[{ Plot[{A1 Sin[f1 x+t],A2 Sin[f2 x-t]},{x,0,15},PlotRange
    ->{{0,15},{-5,5}},AspectRatio->1/3,ImageSize->450],Plot[{A1 Sin[f1 x+t]+A2 Sin[f2
    x-t]},{x,0,15},PlotRange->{{0,15},{-10,10}},AspectRatio->1/3,ImageSize->450]}],
45 {{A1,1,"Amplitud de la onda #1"},-5,5,Appearance->"Labeled"},
46 {{A2,1,"Amplitud de la onda #2"},-5,5,Appearance->"Labeled"},
47 {{f1,1,"Frecuencia de la onda #1"},1,10,Appearance->"Labeled"},
48 {{f2,1,"Frecuencia de la onda #1"},1,10,Appearance->"Labeled"},
49 {{t,1,"tiempo"},0.1,15,Appearance->"Labeled"}]

```

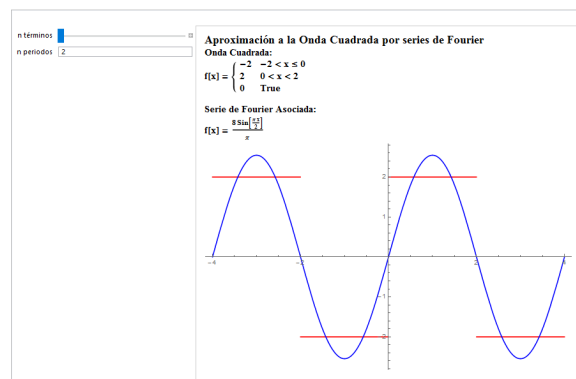


Figura 84: Vista previa del manipulable Fourier-cuadrada

Series de Furier onda Escalonada

Mathematica 21: Manipulable Series de Furier onda Escalonada

```

1 f[x_] = Piecewise[{{-1, -10 < x < -9}, {x + 8, -9 <=
2      x <= -7}, {1, -7 < x < -6}, {-1, -6 < x < -5}, {x + 4, -5 <=
3      x <= -3}, {1, -3 < x < -2}, {-1, -2 < x < -1}, {x, -1 <= x <=
4      1}, {1, 1 < x < 2}, {-1, 2 < x < 3}, {x - 4, 3 <= x <= 5}, {1,
5      5 < x < 6}, {-1, 6 < x < 7}, {x - 8, 7 <= x <= 9}, {1,
6      9 < x < 10}}];

7 L = 4;

8 a1 = 2/L \!\(
9 \*SubsuperscriptBox[(\[Integral]),
10 FractionBox[(-L), (2)],
11 FractionBox[(L), (2)]](f[x] \[DifferentialD ]x)\);

12 ak = 2/L \!\(
13 \*SubsuperscriptBox[(\[Integral]),
14 FractionBox[(-L), (2)],
15 FractionBox[(L), (2)]](f[x] \ Cos[
16 \*FractionBox[(2 \ k \ Pi \ x), (L)]] \[DifferentialD ]x)\);

17 bk = 2/L \!\(
18 \*SubsuperscriptBox[(\[Integral]),
19 FractionBox[(-L), (2)],
20 FractionBox[(L), (2)]](f[x] \ Sin[
21 \*FractionBox[(2 \ k \ Pi \ x), (L)]] \[DifferentialD ]x)\);

22 g[j_, x_] := a1 + \!\(
23 \*UnderoverscriptBox[(\[Sum]), (k = 1), (j)]((ak \ Cos[
24 \*FractionBox[(2 \ k \ Pi \ x), (L)]] + bk \ Sin[
25 \*FractionBox[(2 \ k \ Pi \ x), (L)]]))\);

26 Manipulate[

```

```

27 Column[{Style[
28   "Aproximacion_a_la_Onda_Escalonada_por_series_de_Fourier", Bold,
29   18, FontFamily -> "Times"],
30   Style["Onda_Escalonada:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
31   Row[{Style["f[x]=_", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
32     Style[Piecewise[{{-1, -2 < x < -1}, {x, -1 <= x <= 1}, {1,
33       1 < x < 2}}], Bold, 15, FontFamily -> "Times"}]], ,
34   Style["Serie_de_Fourier_Asociada:", Bold, 15,
35     FontFamily -> "Times"],
36   Row[{Style["f[x]=_", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
37     Style[a1 + \!(
38 \*UnderoverscriptBox[(\[Sum]\), \((k = 1\), \((j\))\)((ak\ Cos[
39 \*FractionBox[(2\ k\ Pi\ x\), \((L\))]] + bk\ Sin[
40 \*FractionBox[(2\ k\ Pi\ x\), \((L\))]]\)\), Bold, 15,
41     FontFamily -> "Times"}]],
42   Plot[{f[x], g[j, x]}, {x, -2 a, 2 a}, PlotStyle -> {Red, Blue},
43   ImageSize -> Large]], {{j, 5, "n_terminos"}, 1, 30,
44   1}, {{a, 3, "n_periodos"}}, ControlPlacement -> Left,
45   SaveDefinitions -> True]

```

Series de Furier onda Triangular

Mathematica 22: Manipulable Series de Furier onda Triangular

```

1 f[x_] = Piecewise[{x + 9, -10 < x <= -8}, {-x - 7, -8 <
2   x <= -6}, {x + 5, -6 < x <= -4}, {-x - 3, -4 < x < -2}, {x +

```

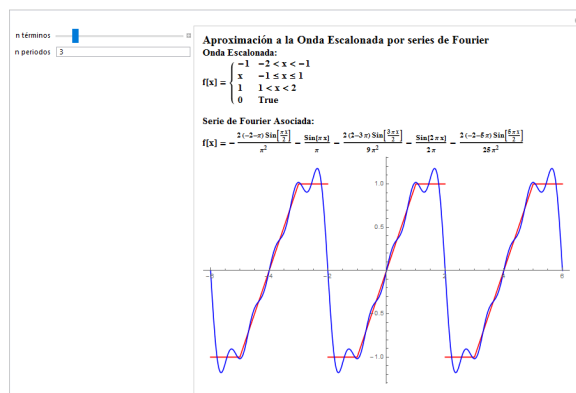


Figura 85: Vista previa del manipulable Fourier-Escalonada

$1, -2 < x \leq 0\}, \{-x + 1, 0 < x \leq 2\}, \{x - 3,$
 $2 < x \leq 4\}, \{-x + 5, 4 < x \leq 6\}, \{x - 7, 6 < x \leq 8\}, \{-x + 9,$
 $8 < x < 10\}\};$
 $L = 4;$
 $a_1 = \frac{2}{L} \int_{-L}^{-L/2} f(x) dx;$
 $a_k = \frac{2}{L} \int_{-L}^{-L/2} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx;$
 $b_k = \frac{2}{L} \int_{-L}^{-L/2} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx;$

```

20 FractionBox[(L), (2)](f[x] Sin[
21  \*FractionBox[(2 k Pi x), (L)] \[DifferentialD x]);
22 g[j_, x_] := a1 + \!(
23  \*UnderoverscriptBox[(Sum), (k = 1), (j)](ak Cos[
24  \*FractionBox[(2 k Pi x), (L)] + bk Sin[
25  \*FractionBox[(2 k Pi x), (L)]])\)\);
26 Manipulate[
27  Column[{Style[
28    "Aproximacion_a_la_Onda_Triangular_por_series_de_Fourier", Bold,
29    18, FontFamily -> "Times"],
30    Style["Onda_Triangular:", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
31    Row[{Style["f[x]=", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
32      Style[Piecewise[{x + 1, -2 < x <= 0}, {-x + 1, 0 < x <= 2}],
33      Bold, 15, FontFamily -> "Times"]}], ,
34    Style["Serie_de_Fourier_Asociada:", Bold, 15,
35      FontFamily -> "Times"],
36    Row[{Style["f[x]=", Bold, 15, FontFamily -> "Times"],
37      Style[a1 + \!(
38  \*UnderoverscriptBox[(Sum), (k = 1), (j)](ak Cos[
39  \*FractionBox[(2 k Pi x), (L)] + bk Sin[
40  \*FractionBox[(2 k Pi x), (L)]])\)\), Bold, 15,
41    FontFamily -> "Times"]}],
42    Plot[{f[x], g[j, x]}, {x, -2 a, 2 a}, PlotStyle -> {Red, Blue},
43    ImageSize -> Large]], {j, 5, "n_terminos"}, 1, 50,
44    1}, {{a, 3, "n_periodos"}}, ControlPlacement -> Left,
45  SaveDefinitions -> True]

```

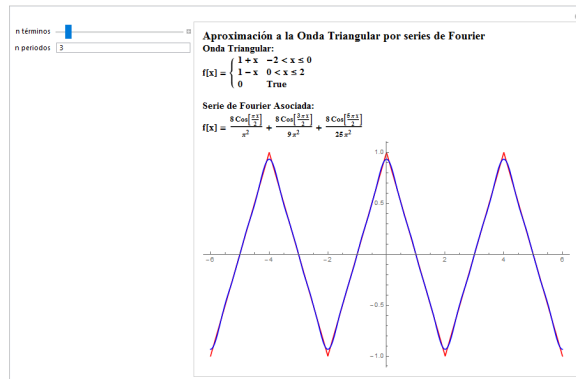


Figura 86: Vista previa del manipulable Fourier-Triangular

Anexo 7.9: Soluciones kink y anti-kink

Series de Furier onda Cuadrada

Mathematica 23: Manipulable Soluciones kink y anti-kink

```

1 Manipulate[
2   Column[{Row[{Column[{Style["Solucion_Kink", Bold, 18,
3     FontFamily -> "Times"],
4     Plot3D[{4 ArcTan[E^((-t v + x - x1)/Sqrt[1 - v^2])]}, {t, -8,
5       8}, {x, -8, 8}, ImageSize -> 350, PlotStyle -> {Red},
6     AxesLabel -> {t, x}}]},
7   Column[{Style["Solucion_anti-kink", Bold, 18,
8     FontFamily -> "Times"],
9     Plot3D[{4 ArcTan[
10      E^(-((-t v + x - x2)/Sqrt[1 - v^2]))]}, {t, -20,
11      20}, {x, -20, 20}, ImageSize -> 350, PlotStyle -> {Blue},

```

```

12      AxesLabel -> {t, x}}]]],
13      Style["Superposicion de las Soluciones kink y anti-kink", Bold, 18,
14      FontFamily -> "Times"],
15      Plot3D[{4 ArcTan[E^((-t v + x - x1)/Sqrt[1 - v^2])],
16      4 ArcTan[E^(-((-t v + x - x2)/Sqrt[1 - v^2]))]}, {t, -20,
17      20}, {x, -20, 20}, PlotStyle -> {Red, Blue}, ImageSize -> 350,
18      AxesLabel -> {t, x}}],
19      Alignment -> Center], {{v, 0,
20      Text@Row[{Style["velocidad", Italic, 20]}], -0.99, 0.99,
21      0.001}, {{x1, 0.1,
22      Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20], 1],
23      Style["_(0)(m)", 15]}], -5, 5, 0.1},
24      {{x2, 0.1,
25      Text@Row[{Subscript[Style["x", Italic, 20], 2],
26      Style["_(0)(m)", 15]}], -5, 5, 0.1}, ControlPlacement -> Left,
27      SaveDefinitions -> True]

```

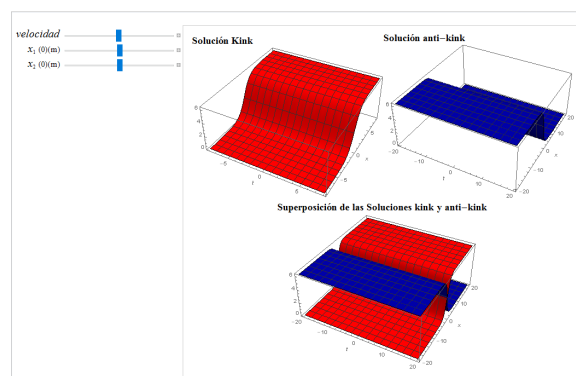


Figura 87: Vista previa del manipulable Soluciones kink y anti-kink