

**Estudio de algunos objetos del análisis real y su significado desde el sistema de
coordenadas polares**

Rodríguez Salamanca Cristhian David

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2025

**Estudio de algunos objetos del análisis real y su significado desde el sistema de
coordenadas polares**

Rodríguez Salamanca Cristhian David

2018140071

C.C. 1014244307

**Trabajo de grado para optar por el título
de Licenciado en Matemáticas**

Dirigido por: José Leonardo Ángel

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2025

Dedicatoria

*A mi madre, Daicy; a mi esposa, Vivian; a nuestras mascotas, Nix y Pola;
y a nuestra hija en camino, Amelie.*

¡Las amo!

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	12
OBJETIVOS	14
Objetivo General.....	14
Objetivos Específicos	14
CAPÍTULO I: REFLEXIONES HISTÓRICAS Y CURRICULARES RELATIVAS AL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES	15
Sección 1: emergencia histórica de las coordenadas polares.....	15
Espiral de Arquímedes	22
Concoide de Nicomedes	27
Cisoide de Diocles	32
Sección 2: reflexiones sobre el tratamiento del sistema coordinado polar en el currículo.....	41
CAPÍTULO II: DESCRIPCIÓN DE UN SISTEMA DE COORDENADAS POLARES	43
Sección 1: Definiciones Fundamentales	43
Sección 2: Sobre Distancias Entre Puntos	51
Definición Distancia Lineal	52
Definición Distancia Angular	52
Definición Distancia Polar Entre dos Puntos.....	53

Definición Distancia Euclidiana Entre dos Puntos.....	57
Sección 3: Algunos Lugares Geométricos	58
Circunferencia Polar	58
CAPÍTULO III: ALGUNAS FUNCIONES EN EL SISTEMA DE COORDENADAS	
POLARES.....	67
Funciones Polinómicas	68
Funciones Constantes	68
Funciones Polinómicas de Primer Grado	70
Funciones Polinómicas de Segundo Grado	96
Funciones Polinómicas de Tercer Grado	114
CAPÍTULO IV: ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO .	
Sección 1: Límites	127
Definición Límite.....	130
Cálculo de Límites	131
Sección 2: Continuidad.....	132
Definición Función Continua	132
Sección 3: Integral	134
El Área Delimitada por una Curva	134
Sección 4: Derivada.....	140
Razón de Cambio.....	140

Razón de Cambio Instantánea	143
Derivada de una Función	147
CONCLUSIONES	148
Respecto al Tratamiento de Algunos Conceptos del Cálculo a Partir de un Sistema de Coordenadas Polares.....	148
Acerca de los Aportes Matemáticos y Didácticos a la Formación Como Profesor de Matemáticas.....	149
Acerca del Alcance del Objetivo General.....	149
BIBLIOGRAFÍA	151
Anexo A: Algunas Recomendaciones Para Estudiar Coordenadas Polares En GeoGebra	153
Un sistema de coordenadas polares para el plano	154
Declaración de funciones en el sistema polar	158

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Cuadratriz de Hipias Arenzana (1998).....	18
Figura 2: Transposición a plano cartesiano.	21
Figura 3: Espiral de Arquímedes,	23
Figura 4 Reinterpretación de la espiral. Rodríguez (2025).....	24
Figura 5: Trasposición a plano cartesiano. Rodríguez (2025)	26
Figura 6: Concoide de Nicomedes. Andres (sf).....	27
Figura 7: Reescritura de la concoide de Nicomedes Rodríguez (2025)	28
Figura 8 descripción algebraica concoide Nicomedes.....	29
Figura 9: Concoide de Nicomedes en plano cartesiano	31
Figura 10: Cisoide de Diocles, De Andres(sf)	32
Figura 11: Cisoide de Diocles.....	33
Figura 12: Cisoide de Diocles, 2.....	34
Figura 13: Cisoide de Diocles, 3.....	36
Figura 14 Coordenadas polares de un punto.....	43
Figura 15: Distancia euclidiana	57
Figura 16. Primeros puntos de la circunferencia polar	60
Figura 17 Puntos principales circunferencia polar	61
Figura 18: circunferencia polar con centro en $5, \pi 3$	62

figura 19: Intersección $\rho=2\theta$ y un rayo cualquiera.	72
figura 20: Cortes espiral grado uno con el eje polar	85
Figura 21 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in 0,2\pi$	87
Figura 22 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in 0,5\pi$	87
Figura 23 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in 0,11\pi$	87
Figura 24 rama negativa función $\rho = 2\theta + 5\pi$	90
Figura 25 Ejemplo grafica función $\rho = \theta + \pi$	91
Figura 26 Gráfica función $\rho = \theta$, con $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$	92
Figura 27 Nudos en la función $\rho=\theta$ con $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$	94
Figura 28 Gráfica función $\rho = -\theta^2 - 4\theta + 3$	102
Figura 29 Espiral $\rho = -\theta^2 - 4\theta + 3$ alrededor del polo.	103
Figura 30 espiral $\rho = 30\theta^2$ alrededor del polo.....	107
Figura 31 Gráfica función $\rho = 15\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$	121
Figura 32 función $\rho = 15\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$ alrededor del polo	121
Figura 33 Gráfica de $f\theta = \theta^2 + \theta - 2$ con $\theta \in [0, \pi]$	128
Figura 34 intervalo para $\delta = 0.5$	128
Figura 35 intervalo para $\delta = 0.2$	128
Figura 36 intervalo para $\delta = 0.05$	128
Figura 37 $f\theta - \delta, f\theta + \delta$ para $\delta = 0.5$	129

Figura 38 $f\theta - \delta, f\theta + \delta$ para $\delta = 0.2$	129
Figura 39 $f\theta - \delta, f\theta + \delta$ para $\delta = 0.05$	129
Figura 40 área sector circular.....	135
Figura 41: región R de $f(\theta)$	135
Figura 42 área superior e inferior de R	136
Figura 43 subdivisiones región R	137
Figura 44 función $f\theta = 5$	138
Figura 45 razón de cambio entre dos puntos	141
Figura 46 función $f\theta = \theta^2$	144
Figura 47 traslación del punto Q en $f\theta = \theta^2$	145

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Relación curva, gráfica y expresión polar	38
Tabla 2: Documentos curriculares	41
Tabla 3: paralelo ángulo polar	44
Tabla 4: paralelo distancia radial	45
Tabla 5: Casos de Coordenadas para el punto P	46
Tabla 6 Rastro de distancias angulares	62
Tabla 7: Lugares geométricos de curvas equidistantes	63
Tabla 8: Ejemplos de funciones constantes.	69
Tabla 9: Ejemplo $\rho = 2\theta$ y su relación con la espiral de Arquímedes	71
Tabla 10: Ejemplo funciones de primer grado con dominio positivo	72
Tabla 11 funciones grado 1 diferentes con amplitud equivalente.	77
Tabla 12 funciones grado 1 diferentes con amplitud equivalente con $\theta \in R +$	78
Tabla 13 Espirales de primer grado	83
Tabla 14 cortes de la función $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$ con el eje polar.....	86
Tabla 15 Cortes de la espiral en dirección al eje polar.....	88
Tabla 16 Cortes de la espiral en dirección opuesta al eje polar.	88
Tabla 17 Espirales de segundo grado.....	97
Tabla 18 Cortes función de segundo grado.....	100
Tabla 19 funciones de segundo grado alrededor del polo.....	103

Tabla 20 Ejemplos de funciones de tercer grado	115
Tabla 21 Ejemplos de funciones de tercer grado alrededor del polo.....	117
Tabla 22. Funciones de tercer grado y el polo	125
Tabla 23 Valores de $f\theta = \theta^2 + \theta - 2$ para θ alrededor de 2.....	127

INTRODUCCIÓN

En matemáticas se evidencia un uso predominante del sistema cartesiano para estudiar una representación gráfica de objetos del análisis real, permitiendo a la vez una construcción de significados para dichos objetos. Sin embargo, también se ha podido observar que en algunas ocasiones es necesario o pertinente utilizar otros sistemas coordenados para un plano con el fin de estudiar algunos objetos de una manera más fácil y eficiente. Por ejemplo, cuando calculamos el área de regiones determinadas por arcos de circunferencias descritas en el sistema cartesiano, se observa la utilidad de emplear un sistema coordenado polar a través del cual la representación de los objetos lleva a realizar cálculos mucho más simples.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo surge con el interés de abordar el estudio de algunos objetos del análisis real partiendo de su representación en un sistema de coordenadas polares, en lugar de uno cartesiano. A lo largo de este estudio surge constantemente el interrogante de porqué el sistema cartesiano es considerado uno de los ejes primordiales y hegemónicos en este tipo de estudios. Este cuestionamiento surge, por un lado, al observar que conforme se avanza en el estudio de objetos cada vez más complejos en análisis se ve necesario y útil el cambio del sistema de representación del plano, de uno cartesiano a uno polar, y por otro lado, ya que históricamente se reconoce la existencia de curvas cuya construcción y análisis conllevan al desarrollo del sistema de coordenadas polares como uno de los primeros sistemas de referencia para el plano. Así, en este trabajo se buscó desarrollar un estudio en el que se exaltarán los significados de los objetos matemáticos que surgen a partir de su representación en un sistema polar evitando aludir a uno cartesiano.

Particularmente, este documento se encuentra distribuido en cuatro capítulos, organizados de la siguiente manera: en el primer capítulo se realiza una reflexión en torno a la emergencia histórica de sistemas de coordenadas polares exclusivamente en la época de la Grecia clásica, es decir, indaga sobre cómo la historia, en sus inicios, nos lleva a observar que la descripción de curvas en el plano a partir de movimientos rectilíneos y angulares permite reflexionar sobre la pertinencia histórica de incluir o abordar un sistema de coordenadas polares. Además, en este capítulo, se cuestiona sobre el tratamiento de las coordenadas polares en algunos documentos curriculares como los Derechos Básicos de Aprendizaje, Los estándares básicos de competencias en matemáticas y los estándares presentados por la NCTM para tener una visión más global. En el segundo capítulo se estudian algunos conceptos preliminares como lo son la construcción de un sistema de coordenadas polares, definiciones fundamentales sobre distancias entre puntos y algunos lugares geométricos, para así abordar en el tercer capítulo lo correspondiente a algunas funciones polinómicas de variable real. Por último, en el cuarto capítulo se aborda el significado de algunos conceptos fundamentales del cálculo, tales como límites, integral y derivada partiendo de un sistema de coordenadas polares para el plano.

Finalmente se presentan las conclusiones que responden a tres ejes claves: en primer lugar, el tratamiento del cálculo en coordenadas polares, su belleza y posibilidades; en segundo lugar, las contribuciones de este trabajo a la formación matemática y formación docente del autor, y en tercer lugar los objetivos planteados. Al final del documento, se presenta un anexo en el que se explica la implementación y adecuación de algunas herramientas en el programa GeoGebra, para el estudio y representación en un sistema de coordenadas polares.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Realizar un estudio de algunos objetos del análisis real destacando su significado bajo la representación en coordenadas polares, sin aludir a un sistema cartesiano.

Objetivos Específicos

- Estudiar algunos significados de conceptos del análisis real asociados al sistema coordenado polar.
- Abordar el estudio del cálculo de límites, derivadas e integrales para algunas funciones descritas bajo el sistema coordenado polar.
- Implementar el uso de software matemáticos que faciliten la representación de curvas en coordenadas polares.

CAPÍTULO I: REFLEXIONES HISTÓRICAS Y CURRICULARES

RELATIVAS AL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Sección 1: emergencia histórica de las coordenadas polares

En este apartado se presenta una revisión histórica de algunas situaciones que permiten observar la pertinencia de emplear un sistema de coordenadas polares para su estudio. Cabe aclarar que en este capítulo no se presentará un estudio exhaustivo de los objetos geométricos abordados o de las heurísticas propuestas a lo largo de la historia de la matemática, solo se mencionarán algunos trabajos matemáticos relacionados con el tema de interés, que para este caso son los que presuntamente se pueden relacionar con un sistema coordenado polar.

Uno de los grandes periodos de la historia, en el cual se dio un impulso al desarrollo y organización de las matemáticas, corresponde a la época griega clásica, aproximadamente desde el siglo VI a.C. hasta el siglo II d.C. Esta época es conocida por promover un paradigma de organización formal y lógica de las matemáticas bajo las ideas de Platón y Aristóteles, y por trabajos representativos en geometría desarrollados por matemáticos como Eudoxo, Euclides y Arquímedes entre otros. Sin embargo, la aparición de problemas que no pueden ser solucionados bajo esta visión, por ejemplo, en el marco de una geometría Euclidiana, llevó a que diferentes matemáticos propusieran el uso de diferentes artefactos, como curvas cinemáticas¹ y el uso de proporciones, para afrontar tales problemas. Algunos de estos problemas se conocen como *problemas clásicos* que según Burton (2011) llamaban la atención de los geómetras de la época por las limitaciones de abordarlos únicamente con

¹ Aunque diferentes textos de historia de las matemáticas utilizan el término mecánico para referirse a estas curvas, vale la pena mencionar que un término más apropiado sería cinemático, ya que no nos interesa abordar las causas, fuerzas o agentes externos que producen el movimiento sino el movimiento o curva en sí.

regla y compás. Tales problemas son conocidos como: *la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo*. Burton (2011) describe que el primer problema se puede enunciar con un simple interrogante: “¿es posible construir un cuadrado cuya área sea igual al área de un círculo dado?”. De igual manera Burton (2011) afirma que otro famoso problema de construcción geométrica era “encontrar la arista de un cubo que tenga un volumen dos veces mayor que el de un cubo dado”; se plantea que el posible origen de este problema se atribuye a los primeros pitagóricos, quienes lograron solucionar de manera aproximada duplicar el cuadrado, lo cual llevaría a cuestionarse acerca de esta situación en tres dimensiones. Finalmente, Burton (2011) enfatiza que, aunque la bisección de un ángulo haciendo uso de regla y compás resulta ser una de las construcciones geométricas más simples, dividir un ángulo en tres partes iguales con condiciones similares terminaría siendo imposible. Todos estos problemas tienen como característica común que su solución con regla y compás es imposible, en particular, puesto que tomando un segmento como unidad de medida no es posible construir con regla y compás todos los números reales².

Así, para abordar estos problemas, con las herramientas de la época, surgieron algunas propuestas que no fueron aceptadas por la comunidad matemática, pues no tenían lugar en la geometría euclidiana que predominaba en la época. Particularmente, algunas de estas propuestas involucraban objetos geométricos determinados por el movimiento de otros objetos (v.g. rectas, puntos). Es decir que se mezclaban ideas de la geometría euclidiana con el movimiento. Entre los objetos más representativos de este tipo de geometría están las

² Al hablar de construir con regla y compás los números reales nos referimos a construir segmentos de recta, partiendo de una unidad de medida, cuya medida corresponde a tales números reales actualmente.

llamadas curvas cinemáticas donde los objetos dependía de dos movimientos principales: lineal y angular. Para el caso del movimiento lineal, se toma como referencia la distancia desde un punto de referencia, denominado *polo*, a cada uno de los puntos de la curva, en tanto para el movimiento angular se toma como referencia el ángulo con vértice en el *polo*, determinado por dos segmentos los cuales son: un segmento base, perteneciente a lo que denominaremos *eje polar* y otro segmento determinado por el *polo* y cada punto P de la curva cinemática dada.

Estos objetos, aunque relegados en la época griega, podían dar solución a los problemas clásicos. A continuación, se presentan algunas de las curvas mencionadas.

Cuadratriz de Hipias o Cuadratriz de Dinostrato

De Andrés (*sf*), historiador, presenta a la cuadratriz de Hipias como la primera curva que aparece diferente a las rectas y circunferencias. Esta curva permitía rectificar arcos de circunferencia como estrategia intermedia para solucionar el problema de la trisección del ángulo, pues ya se tenían métodos para trisecar segmentos rectilíneos y con este método se podía obtener la trisección del ángulo; adicionalmente con esta curva también se puede dar respuesta al problema de la cuadratura del círculo. Arenzana (1998) presenta la siguiente descripción para la cuadratriz:

“Dado un cuadrado $ABGD$ describamos con centro en A el arco BED . La recta BG , manteniéndose constantemente paralela a la AD arrastre al punto B en su recorrido sobre AB , además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman AB y AD , es decir el punto B recorrerá el arco BED en el mismo tiempo que la recta BG se traslada a lo largo de BA .

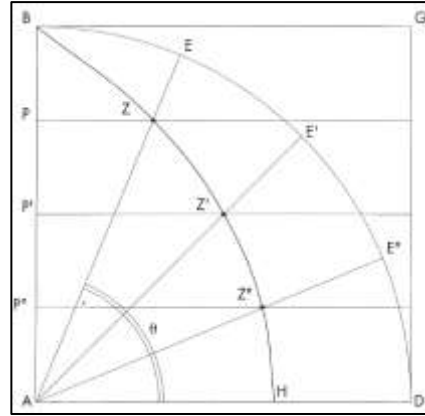


Figura 1: Cuadratriz de Hipias Areznana (1998)

Es evidente que las rectas AB y BG coincidirán simultáneamente con la AD y, como consecuencia dichas rectas AB y BG coincidirán en un punto constantemente transportado por ellas, el cual describirá una línea cóncava en la misma dirección, tal como la BZH en el espacio comprendido entre las rectas AB y AD y el arco BED . ”

Es importante precisar que, dentro de la descripción presentada anteriormente, que en el lenguaje utilizado por los griegos para referirse a lo que hoy conocemos como segmentos era el término recta, indicando sus extremos. Por ejemplo, en la descripción se afirma que la recta BG se traslada a lo largo de la recta BA , y como se puede evidenciar en la gráfica tales rectas terminan siendo los segmentos³: \overline{BG} y \overline{BA} .

Tal como está descrita la cuadratriz se tiene que el punto B se mueve de dos formas diferentes. El primer movimiento es lineal tal que B se desplaza a lo largo del \overline{AB} desde B hacia A , lo que significa que en el movimiento dado se determinan los puntos P, P', P'', P''', \dots en el \overline{AB} como se muestra en la Figura 1. El segundo movimiento es angular

³ Para efectos prácticos, dentro de este trabajo el uso de esta notación puede hacer referencia tanto al segmento como objeto geométrico, como a su magnitud según el contexto.

tal que B se desplaza por el arco de circunferencia dado, lo cual determina los puntos E, E', E'', \dots del arco⁴ \widehat{BD} . Adicionalmente se tiene que estos dos movimientos mencionados se dan de manera simultánea tal que B recorre el segmento y el arco de circunferencia en el mismo tiempo, es decir que el punto B se desplaza con velocidad uniforme a lo largo de los dos recorridos que realiza. De lo cual se obtiene, empleando el lenguaje de proporciones, que

$$\frac{\widehat{DE}}{\widehat{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Ahora, en un lenguaje actual podemos reescribir la expresión anterior teniendo en cuenta que \widehat{DE} es igual al ángulo θ determinado por los \overline{AD} y \overline{AE} multiplicado por el radio r de esa sección de circunferencia, es decir $\overline{AB} = r$. También se tiene que la longitud del \widehat{BD} es igual a $\frac{\pi}{2}\overline{AB}$ pues tal sección representa un cuarto de circunferencia. De lo cual se obtiene que

$$\frac{\overline{AB}\theta}{\overline{AB}\frac{\pi}{2}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

$$\overline{AP} = \frac{2\theta}{\pi}r$$

Ahora sea la distancia $\overline{AZ} = \rho$ se puede concluir que

$$\sin \theta = \frac{\overline{AP}}{\rho}$$

O lo que es lo mismo

⁴ Para efectos prácticos, dentro de este trabajo el uso de esta notación puede hacer referencia tanto al arco de circunferencia como objeto geométrico, como a su magnitud según el contexto.

$$\rho = \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{2\theta}{\pi} r \right)$$

Ahora si \overline{AB} se considera como la unidad de medida en un sistema de referencia, es decir $\overline{AB} = 1$ entonces se tiene que $r = 1$ y por lo tanto la expresión se reduce a

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi \sin \theta}$$

Es decir que cada punto Z de la cuadratriz se puede representar algebraicamente como una expresión en la cual la distancia de Z al punto de referencia A (o polo) está dado en términos del ángulo θ , el cual se mide con base en el segmento (o eje polar) determinado por los puntos A y D y el \overline{AZ} .

Una observación importante sobre el análisis realizado a la cuadratriz, partiendo del uso de proporciones y empleando trigonometría, es que para su descripción analítica podemos pensar de forma natural en emplear un sistema de referencia basado en un punto (el polo) y un rayo (eje polar) cuyo extremo es el punto mencionado. Además, los movimientos angular y lineal usados en la definición de la curva llevan a establecer la utilidad de emplear un sistema coordenado polar. Así, las coordenadas de un punto de la cuadratriz en el plano, según la descripción lograda, resulta ser $(\rho, \theta) = \left(\frac{2\theta}{\pi \sin \theta}, \theta \right)$ tomando como polo A y eje polar \overline{AD} .

Por el contrario, no resulta tan intuitivo pensar en usar un sistema cartesiano (ed. un sistema de referencia basado en dos rectas concurrentes y en el uso de rectas paralelas a ellas para describir la posición de un punto) ya que la definición de la curva no permite determinar de forma directa la relación de cada punto con un sistema de abscisas y ordenadas, y si quisiéramos representar tal curva en un sistema cartesiano de puntos (x, y) se tendría que:

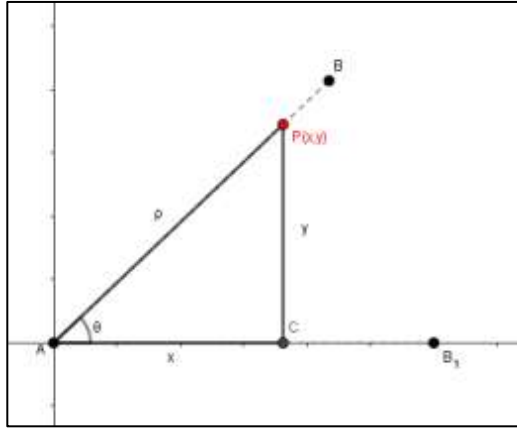


Figura 2: Transposición a plano cartesiano.

Con base en la gráfica anterior y partiendo del punto P con coordenadas (ρ, θ) , dadas en el sistema polar descrito, y utilizando ahora como ejes de referencia para el sistema cartesiano las rectas perpendiculares *eje x* y *eje y*, se obtiene que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\sin \theta = \frac{y}{\rho}$ es decir

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

de lo que se obtiene

$$\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Y ahora sustituyendo ρ y θ en la expresión inicial se tiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2 \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\pi \sin \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right)$$

$$y = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

que es equivalente a

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

expresión que no resulta tan natural en términos de resaltar las características de la descripción de la curva.

Espiral de Arquímedes

Es conocido que al indagar acerca de los aportes matemáticos en la época griega, la mayoría de los historiadores convergen a la escuela de Alejandría, cuyo mayor exponente fue Arquímedes con desarrollos en múltiples campos. Para el contexto académico de la época, el estudio de objetos geométricos estaba ligado a la geometría euclidiana, basada en representaciones hechas mediante rectas y circunferencias, llamadas, representaciones con regla y compás. La aparición de objetos que rompieran con este paradigma resultó ser novedoso y a la vez tensionante. Arquímedes también presenta un objeto para abordar los problemas clásicos: la espiral de Arquímedes. Esta curva permite dar solución a la trisección del ángulo y a la cuadratura del círculo. Martin, A & Martin, R. (2005) aseguran que, dentro de los aportes de Arquímedes, se describe el apartado *Sobre La Espiral*; donde éste establece una curva determinada por los puntos X cuya distancia a un punto de referencia P (polo) es proporcional al ángulo con vértice en el polo, determinado por un segmento fijo y todos los

segmentos formados con dichos puntos X . Ahondando en este objeto Martin, A. & Martin, R. (2005) afirman que Arquímedes presenta la siguiente descripción para su espiral:

“sí una línea recta que permanece fija en un extremo, se le hace girar en el plano con velocidad constante, hasta hacerla volver de nuevo a la posición de la que ha partido, y junto con la recta que gira, se mueve un punto sobre la recta, también a velocidad constante iniciando su movimiento desde el extremo fijo, el punto describe en el plano una espiral.”

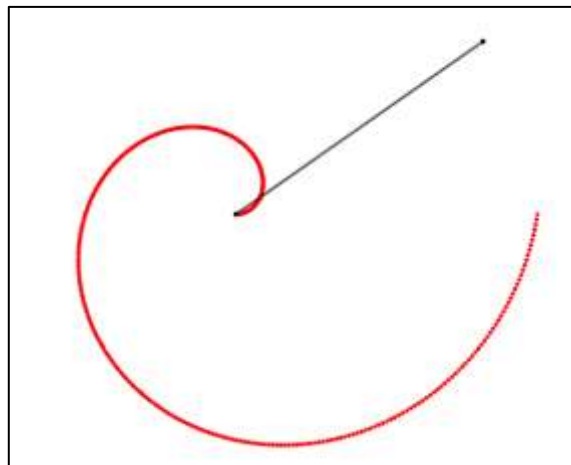


Figura 3: Espiral de Arquímedes.

Haciendo una interpretación actual de la definición de este objeto, análoga a la realizada para la cuadratriz de Hippias, pero manteniéndolo en el lenguaje y conocimiento de la época, podemos caracterizar la espiral de Arquímedes a partir de un \overline{AB} el cuál es el segmento que se hace girar y permanece fijo en A y P el punto que se mueve en la dirección determinada por la recta AB , partiendo de A y en el sentido de A a B . Por lo tanto, el lugar geométrico determinado por el punto P resulta ser la espiral de Arquímedes. Para representar esta situación, sin pérdida de generalidad, determinaremos que la posición original del segmento está determinada por los puntos A y B_1 y que los puntos P y P_1 equidistan de A . Como se muestra en la Figura 4.

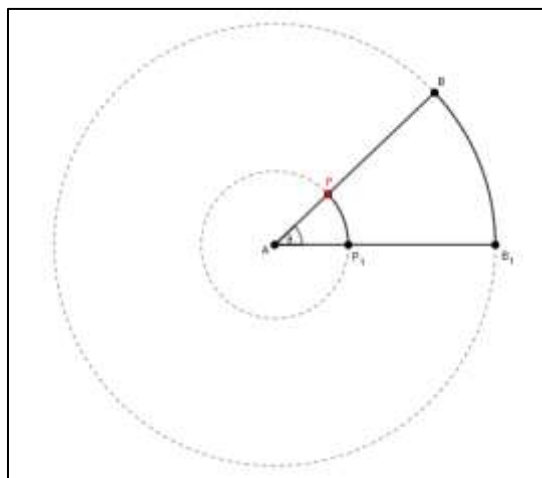


Figura 4 Reinterpretación de la espiral. Rodríguez (2025)

La definición indica que el giro del \overline{AB} y el movimiento de P son a velocidad constante, por lo tanto, podemos considerar que el punto P recorre el \overline{AB} al mismo tiempo que el punto B recorre la circunferencia envolvente. Esta circunferencia se puede obtener a partir del giro completo que simula el \overline{AB} con centro en A de la espiral. Tal circunferencia está centrada en A , su radio es \overline{AB} ; de lo cual se obtiene que la longitud L de tal circunferencia es $L = 2\pi\overline{AB}$. Es decir que se puede establecer una relación entre el movimiento lineal del punto P y el movimiento angular del punto B pues se tiene que la distancia recorrida por el punto P con respecto al \overline{AB} debe ser igual a la longitud del $\widehat{BB_1}$ con respecto a L . Es decir que la relación entre los movimientos que definen la espiral puede expresarse como

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\widehat{BB_1}}{L}$$

En Martin, A. & Martin, R. (2005) afirman que este descubrimiento algunos autores se lo atribuyen a su maestro Conón de Samos.

Un elemento importante para resaltar de la descripción de esta curva cinemática consiste en la existencia implícita de un sistema de referencia basado en un punto y una línea inicial que parte de tal punto. Además, la descripción del movimiento implica un movimiento angular y uno lineal. Esto nos lleva a observar, de forma similar a lo hecho para la cuadratriz, la pertinencia de usar un sistema coordenado polar para describir tal curva.

Puntualmente, partiendo de la proporción

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\widehat{BB_1}}{L}$$

tomando como polo el punto A , como eje polar el $\overline{AB_1}$, $\overline{AP} = \rho$ y $\overline{AB} = r$ se tiene

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\widehat{BB_1}}{L}$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\theta r}{2\pi r}$$

$$\rho = \theta \frac{r}{2\pi}.$$

Dado que la distancia de segmento determinado por A y B es constante, se tiene que el cociente $\frac{r}{2\pi}$ es un valor constante a . Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión para la espiral de Arquímedes en un sistema coordenado polar

$$\rho = a\theta$$

La expresión obtenida anteriormente cuyo centro de referencia es el punto A y el ángulo θ se mide en sentido antihorario con base en \overline{AB} representa justamente la relación entre la distancia radial $\overline{AP} = \rho$ con respecto al movimiento angular de B , o lo que es lo

mismo respecto al ángulo θ . Pero tal expresión no corresponde al sistema cartesiano de ejes perpendiculares x y y

Si quisiéramos una expresión en un sistema cartesiano de los puntos (x, y) que representan la espiral centrada en el origen, es decir con A en $(0,0)$ y el ángulo θ medido a partir del eje de abscisas en sentido antihorario, obtendríamos como representación gráfica de cada punto de una espiral y su expresión algebraica como sigue:

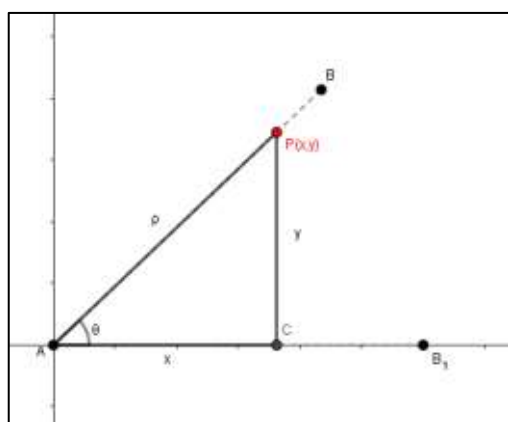


Figura 5: Trasposición a plano cartesiano. Rodríguez (2025)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

Despejando θ :

$$\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Y ahora sustituyendo ρ y θ en la expresión inicial se tiene

$$\rho = a\theta$$

o

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Expresión que, por la naturaleza de la espiral de Arquímedes, no representa a y como una función en términos de x , y es equivalente a

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$$

Cabe aclarar que la espiral de Arquímedes no fue la primera ni la última de este tipo de curvas. Es tan solo una de muchas otras que generaron la necesidad de abordar otro tipo de geometría, diferente a la geometría clásica.

Concoide de Nicomedes

De Andres (sf) afirma que la concoide de Nicomedes surge alrededor del siglo II a.C a partir de un método para trisecar un ángulo propuesto por Arquímedes diferente a su espiral. De Andres (sf) presenta tal método de la siguiente manera

Dado un ángulo AOB dibujamos, con centro en el vértice O del ángulo, una circunferencia G; desde el punto A de intersección de la circunferencia con uno de los lados del ángulo, construimos una recta no paralela al otro lado del ángulo, esta recta corta al otro lado en un punto C.

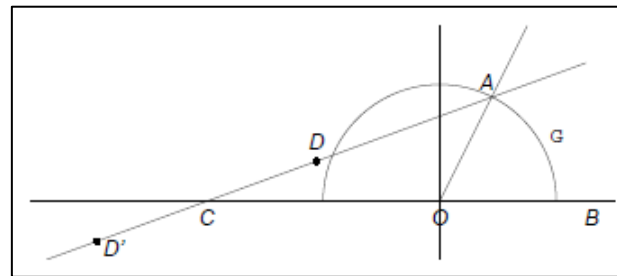


Figura 6: Concoide de Nicomedes. Andres (sf)

A partir de C tomamos los puntos D y D' de manera que la distancia de C a D y D' es igual al radio de la circunferencia G. Cuando el punto D (o D') está sobre la circunferencia, el ángulo ACB es la tercera parte del ángulo dado.

Vale la pena mencionar algunos elementos que aparecen de forma implícita en la descripción anterior: la circunferencia Γ es de radio \overline{OA} ; no se considera la circunferencia completa pues basta con la semicircunferencia que se muestra en la Figura 6; y la recta no paralela a \overline{OB} a la que pertenece el punto A determina el punto de intersección C con el rayo

opuesto a \overrightarrow{OB} . Ahora, si dibujamos todos los puntos D y D' , que se obtienen al desplazar el punto C a lo largo de la recta \overrightarrow{OB} , obtenemos la concoide de Nicomedes.

Podemos reescribir la descripción de la concoide de la siguiente manera, esta vez enfocándonos únicamente en determinar el lugar geométrico de la concoide y no en la idea de la trisección del ángulo:

Dado un punto fijo A y una recta m a una distancia d del punto A se considera la \overrightarrow{AC} con C un punto de la recta m . Los puntos D y D' en la recta \overrightarrow{AC} a una distancia k del punto C determinan el lugar geométrico de la concoide.

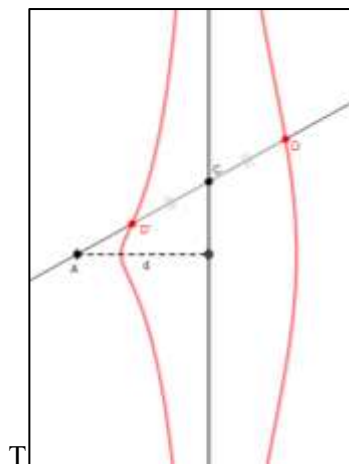
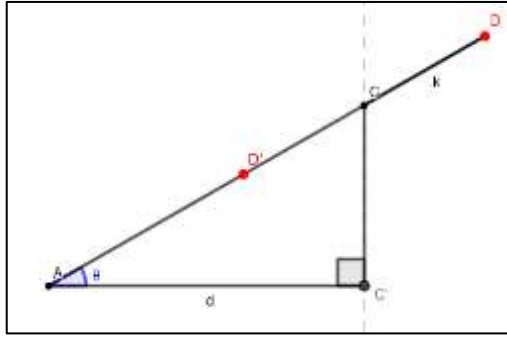


Figura 7: Reescritura de la concoide de Nicomedes Rodríguez (2025)

Lo primero que podemos percibir en la descripción de la concoide de Nicomedes es que, a diferencia de las curvas anteriores, no se hace referencia a las velocidades o los movimientos que se pueden dar, pero si implican un movimiento angular y con respecto a este se obtiene una distancia lineal. También se tiene que en la concoide de Nicomedes resultan dos curvas continuas denominadas rama externa y rama interna que corresponden al lugar geométrico de D' , el punto más distante de A , y D , el punto más cercano a A respectivamente. Si observamos la rama externa de la concoide, que corresponde al lugar geométrico determinado por el punto D , con la intención de describir algebraicamente esta curva, se obtiene lo siguiente:



La distancia de A a D se puede determinar bajo la expresión

$$\overline{AD} = \overline{AC} + k, \text{ con } k > 0$$

Si θ es la medida del ángulo formado por el \overline{AC} y el $\overline{AC'}$, se tiene que

$$\cos \theta = \frac{d}{\overline{AC}}.$$

Figura 8 descripción algebraica conoide Nicomedes

Ahora si denotamos como ρ a la medida del segmento determinado por el punto de referencia A y el punto de la curva D . Es decir $\overline{AD} = \rho$ se tiene que

$$\rho = \overline{AC} + k$$

o de forma equivalente

$$\rho = \frac{d}{\cos \theta} + k$$

Resultado que es válido para los valores de θ en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Esto, considerando que θ corresponde a la medida del $\angle C'AC$; Y por la construcción de la conoide no existe tal ángulo en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ahora, si se hace un razonamiento análogo para la rama interna, bajo la misma representación empleada en el caso anterior, se tiene que:

$$\rho = \overline{AC} - k,$$

de donde

$$\rho = \frac{d}{\cos \theta} - k$$

Expresión que nuevamente es válida para los valores de θ en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, por el mismo razonamiento presentado en el caso anterior.

Con el análisis realizado a la concoide, partiendo de las distancias involucradas y empleando geometría, para su descripción analítica nuevamente obtenemos una expresión que nos lleva a pensar de forma natural en emplear un sistema de referencia basado en un punto (A) y un rayo ($\overrightarrow{AC'}$). Adicionalmente se tiene implícitamente un movimiento angular, pues el lugar geométrico de la concoide con base en el punto D y D' dependen directamente de la posición del punto C en la recta m , es decir que dependen del $\angle C'AC$. Lo cual no lleva a establecer la utilidad de emplear un sistema coordenado polar, ya que las expresiones obtenidas para cada rama de la concoide resultan en una relación de la distancia ρ y la medida del ángulo θ tomando como polo el punto A y eje polar $\overrightarrow{AC'}$.

Nuevamente obtenemos una expresión en la cual se relaciona la distancia de los puntos de la curva al punto de referencia o polo y con respecto al ángulo. Es decir, nuevamente, resulta natural pensar en un sistema de coordenadas polares para la concoide.

Por lo tanto, al igual que en los ejemplos presentados anteriormente, no se obtiene una expresión que corresponda a un sistema cartesiano de abscisas y ordenadas. Así que si se desea una expresión para la concoide en un sistema cartesiano procedemos como sigue

Sea P un punto cualquiera de la rama externa de la conchoide. De lo cual se obtiene que:

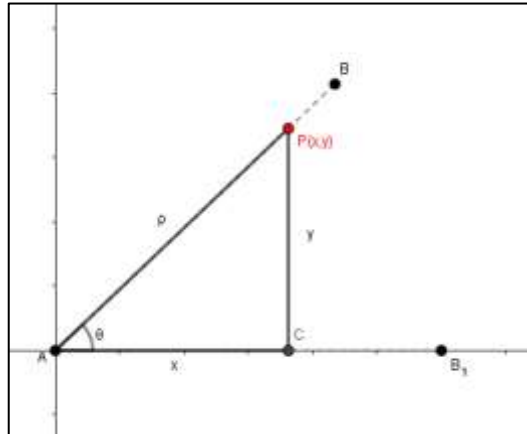


Figura 9: Conchoide de Nicomedes en plano cartesiano

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho}$$

Ahora si sustituimos estos valores en la expresión algebraica de la rama correspondiente de la conchoide, se tiene que

$$\rho = \frac{d}{\cos \theta} + k$$

de donde

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{d}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + k$$

o

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + k.$$

Análogamente, para la rama interna se obtiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{x} - k$$

Expresión que, por la misma naturaleza de la conchoide, no resulta en una función de y en términos de x .

Cisoide de Diocles

Se presenta una curva denominada Cisoide de Diocles en De Andres (*sf*) para resolver el problema de la duplicación del cubo. Esta curva fue propuesta por el matemático griego Diocles alrededor del siglo II a. C. De Andres (*sf*) describe la curva como sigue.

Dada una circunferencia Γ y una recta L tangente a ella, trazamos las rectas que pasan por el punto O , diametralmente opuesto al de tangencia; estas rectas cortan a la circunferencia en un punto R y la recta en el punto Q . La cisoide de Diocles es el conjunto de los puntos P tales que $OR = PQ$.

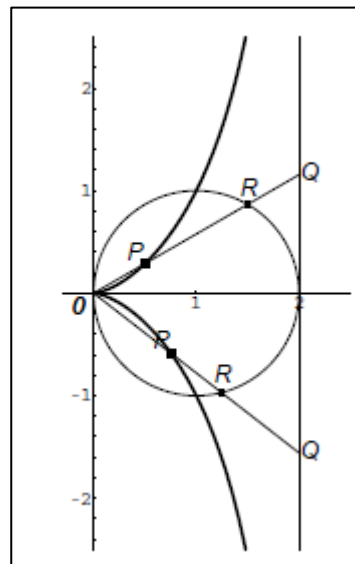


Figura 10: Cisoide de Diocles, De Andres(*sf*)

Es importante resaltar algunos elementos implícitos en la construcción de la conchoide para su posterior análisis: sea A el punto de tangencia de la circunferencia, l la recta tangente, O el punto diametralmente opuesto a A y r el radio de la circunferencia. Notaremos los puntos importantes de la construcción Q , R y P tal como se ven en la Figura 10: Q el punto de intersección entre la recta l tangente a la circunferencia y la recta que contiene al punto

O , R el punto de intersección de la circunferencia dada de radio r y la \overline{OQ} y P el punto en la \overline{OQ} tal que $\overline{OR} = \overline{PQ}$.

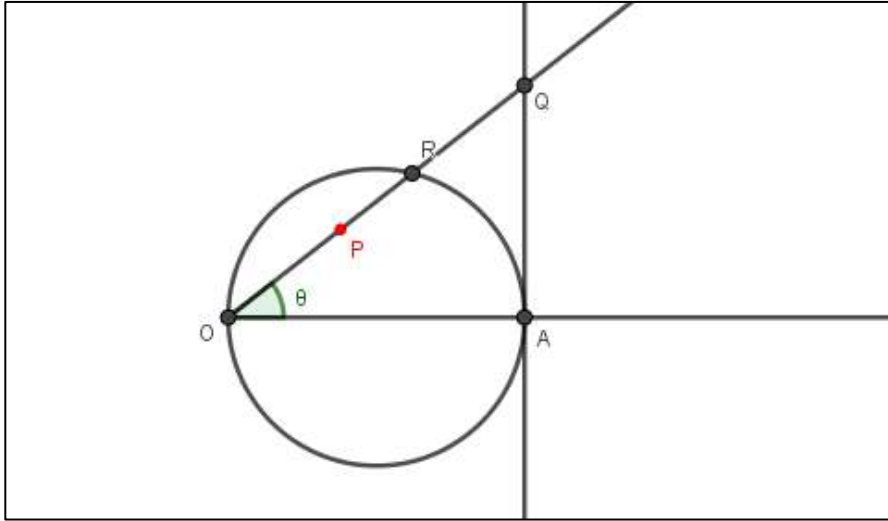


Figura 11: Cisoide de Diocles

Es decir que, de la igualdad indicada anteriormente y analizando los puntos involucrados (O, P, Q y R) que determina la cisoide de Diocles, se tienen las siguientes relaciones que

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ},$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{OR},$$

y

$$\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{OR}.$$

Dado que la cisoide corresponde al lugar geométrico de los puntos P , denotaremos la distancia \overline{OP} como ρ . Es decir $\rho = \overline{OQ} - \overline{OR}$.

Ahora consideremos la siguiente Figura 12 en la que θ corresponde a la medida del $\angle AOQ$ y $\overline{OA} = 2r$. Esto con el fin de analizar los triángulos rectángulos ΔOAQ y ΔORA .

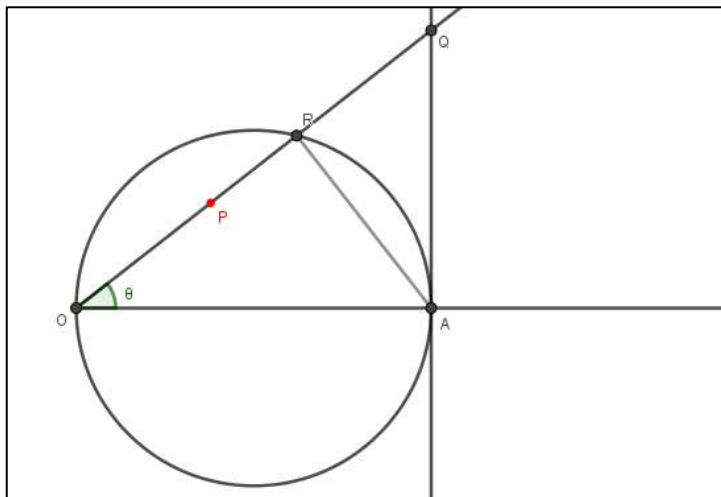


Figura 12: Cisoide de Diocles, 2

Es inmediato determinar que $\overline{OQ} = \frac{2r}{\cos \theta}$. Ahora como los triángulos ΔOAQ y ΔORA son rectángulos y comparten el ángulo θ , entonces son semejantes. Es decir que se tiene

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$$

y

$$\overline{OR} = \frac{(\overline{OA})^2}{\overline{OQ}}$$

Sustituyendo los valores asignados a \overline{OA} y \overline{OQ} se llega a que

$$\overline{OR} = \frac{(2r)^2}{\frac{2r}{\cos \theta}}$$

o de forma equivalente

$$\overline{OR} = 2r \cos \theta.$$

Así, con los valores obtenidos para \overline{OQ} y \overline{OR} se puede dar una expresión analítica para la cisoide. Inicialmente se tenía $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{OR}$, expresión que se puede reescribir como

$$\rho = \frac{2r}{\cos \theta} - 2r \cos \theta$$

o

$$\rho = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

En este caso se obtiene una expresión que es válida para los valores de θ en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Pues θ es la medida correspondiente al $\angle AOQ$ y dada la construcción y razonamiento empleado anteriormente, no existe $\angle AOQ$, o punto Q , tal que la medida del ángulo pertenezca al intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Es decir que la cisoide se puede expresar analíticamente como una relación entre la distancia lineal ρ y el ángulo θ . Para esto se requiere un punto de referencia (polo), el cual es O y un rayo base (o eje polar), que en este caso es \overrightarrow{OA} , pues θ es la medida del $\angle AOQ$ medido de forma usual, en sentido antihorario, partiendo de \overrightarrow{OA} hacia \overrightarrow{OQ} . Lo cual nuevamente nos lleva a pensar en que un sistema de referencia óptimo para este objeto, dada su construcción y descripción, corresponde a un sistema polar.

Ahora, para expresar esta curva en el sistema cartesiano usual debemos realizar un análisis diferente.

Sea P un punto de la Cisoide en el sistema de coordenadas cartesianas. Por lo tanto, se tiene que

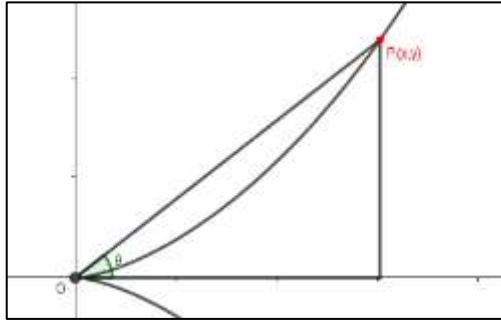


Figura 13: Cisoide de Diocles, 3

$$\overline{OP} = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sustituyendo en la expresión encontrada inicialmente para la cisoide se tiene

$$\rho = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

de donde

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}},$$

expresión equivalente a

$$x = 2r \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

la cual permite obtener la ecuación

$$x^3 + y^2x - 2ry^2 = 0,$$

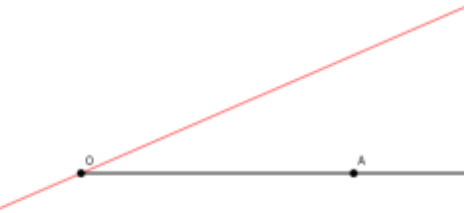
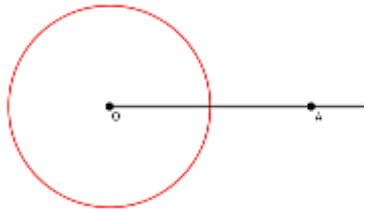
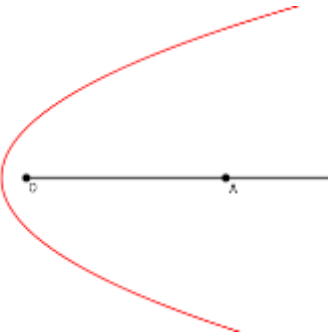
o

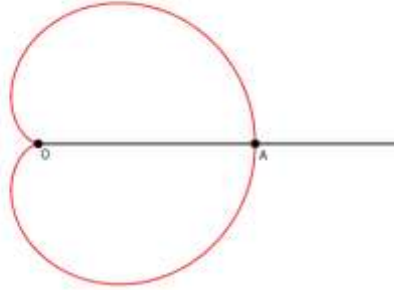
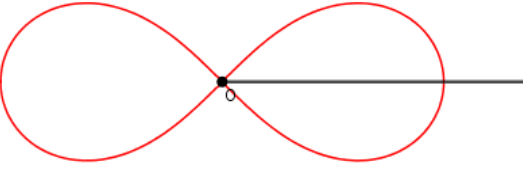
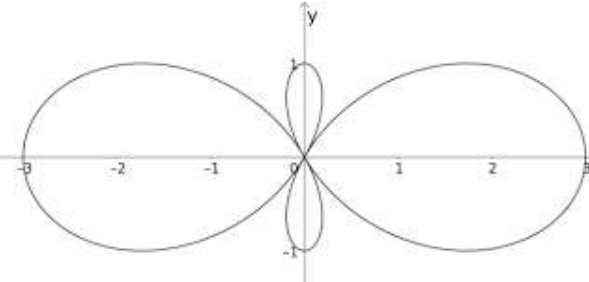
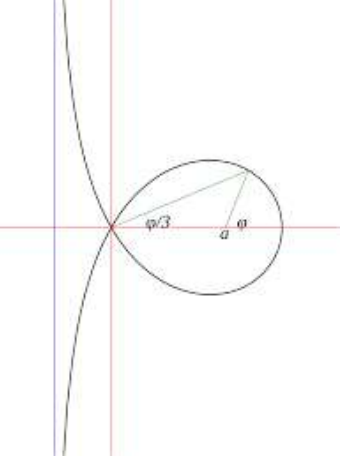
$$x^3 + y^2(x - 2r) = 0$$

Expresión que satisface cada punto de la conoide en un sistema de coordenadas cartesiano.

Ahora bien, se ha podido dar evidencia de la existencia de diferentes curvas trabajadas en la historia cuyo tratamiento analítico conduce de manera natural al uso de un sistema de coordenadas polar. Esto se obtiene gracias a la descripción de estas curvas, puesto que se emplean dos movimientos para describirlas, un movimiento angular y otro lineal. Así su descripción, análisis y representación se puede basar en un punto llamado polo, y un rayo llamado eje polar cuyo extremo es el polo. Todo lo anterior ejemplifica la utilidad de hacer uso de un sistema de coordenadas polares, una motivación para su estudio y la necesidad de entender cómo realizar análisis en el mismo. Ahora bien, a continuación, se muestran grosso modo otras curvas que dado su desarrollo también aportan de manera natural al establecimiento del sistema coordenado polar, como un sistema referente primario y no, como se le ha visto, como un sistema sujeto al sistema coordenado cartesiano.

Tabla 1: Relación curva, gráfica y expresión polar

CURVA	GRÁFICA	EXPRESIÓN EN COORDENADAS POLARES
<p>Recta que contiene al polo.</p>		$\theta = a$ <p>con a constante.</p>
<p>Circunferencia con centro en el polo y radio a.</p>		$\rho = a$ <p>con a constante.</p>
<p>Parábola con el eje polar contenido en el eje de simetría. Foco en el polo. Y vértice a $\frac{a}{2}$ del polo.</p>		$\rho = \frac{a}{1 - \cos \theta}$ <p>con a constante.</p>

<p>Cardioide a partir de dos circunferencias de radio $\frac{a}{2}$.</p>		$\rho = a(1 + \cos \theta)$ <p>con a constante.</p>
<p>Lemniscata</p>		$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ <p>con a constante.</p>
<p>Trisectriz de Ceva</p>		$\rho = 1 + 2 \cos 2\theta$
<p>Trisectriz de MacLaurin</p>		$\rho = \frac{a}{2 \cos \frac{\theta}{3}}$ <p>con a constante.</p>

Finalmente, se observa que muchas de las curvas que aparecieron en la historia y son estudiadas hoy en día pueden abordarse en un sistema coordenado polar, lo cual plantea el cuestionamiento acerca del porqué se establece un sistema de referencia cartesiano como un sistema predeterminado para el estudio de curvas, si la historia y el mismo estudio de algunas curvas ha mostrado la versatilidad del uso del sistema de referencia polar.

Sección 2: reflexiones sobre el tratamiento del sistema coordenado polar en el currículo.

Como se ha podido evidenciar, en particular cuando se trata de describir la posición de un punto en relación con un punto específico de referencia, el uso de las coordenadas polares ofrece un acercamiento más intuitivo y eficiente. Sin embargo, la ausencia de este concepto en los documentos curriculares puede limitar su comprensión y aplicación; ya que las coordenadas polares, más allá de que permiten abordar objetos geométricos de manera natural e intuitiva también pueden ser de gran aporte en competencias matemáticas como: visualización y resolución de problemas.

Al realizar un breve análisis a los referentes curriculares en educación colombiana, se puede evidenciar que, en específico, el concepto de coordenadas polares termina siendo segregado, abordándolo únicamente de manera superficial restándole la importancia teórica y procedimental que éste requiere. Desconociendo así la transversalidad de las coordenadas polares para el abordaje y conceptualización de conceptos tanto del cálculo como de la geometría. A continuación, se presenta un cuadro comparativo donde se evidencia lo encontrado que se pueda relacionar al concepto de coordenadas polares, realizando una revisión en los Derechos Básicos de Aprendizaje, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, e incluso en los *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

Tabla 2: Documentos curriculares

Derechos Básicos de Aprendizaje (grado 11)
Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.

Estándares básicos de competencias en Matemáticas (ciclo 10° y 11°)
Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
<i>National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (Grado de 9-12)</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Comprender y utilizar tanto coordenadas polares como cartesianas. • Convertir entre coordenadas polares y cartesianas. • Representar puntos y ecuaciones en ambos sistemas de coordenadas.

De lo anterior podemos evidenciar qué el abordaje de coordenadas polares termina realizándose únicamente entre los grados 9° y 11°, de igual manera, para los tres ejemplos expuestos, este abordaje termina dependiendo de su análisis desde una relación con coordenadas cartesianas. Logrando así que los estudiantes desconozcan la importancia e independencia existente entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

Las coordenadas polares son fundamentales para entender conceptos como la simetría, la rotación y la traslación en el plano. De este modo, por ejemplo, abordar situaciones problemas que involucren objetos geométricos en los que sea más fácil abordarlos desde las coordenadas polares, termina siendo dispendioso debido a la clara carencia de bases teóricas y curriculares que involucren coordenadas polares. Es por esto por lo que, la inclusión de las coordenadas polares en los documentos curriculares termina siendo fundamental para proporcionar en las aulas una completa comprensión de la geometría y el cálculo.

CAPÍTULO II: DESCRIPCIÓN DE UN SISTEMA DE COORDENADAS

POLARES

Sección 1: Definiciones Fundamentales

En este apartado se realizará un estudio de un sistema de coordenadas polares partiendo de los constructos elaborados en una geometría plana con base en el espacio métrico de los números reales. Para tal estudio se define el sistema coordenado para el plano euclídeo en el cual cada punto le asigna los parámetros de una distancia y un ángulo respecto a un punto y una semirrecta correspondientemente. Sistema coordenado que se denomina *Coordenadas Polares*.

Definición Sistema de coordenadas Polar

Dado un plano α , dos puntos O y A en α y un rayo \overrightarrow{OA} , se define un sistema de coordenadas polares para α con polo O y eje polar \overrightarrow{OA} como el conjunto $\alpha_{O,A} = \{(\rho, \theta) : \rho, \theta \in \mathbb{R}\}$ tal que a cada punto $P \in \alpha$ le corresponde una pareja ordenada (ρ, θ) de $\alpha_{O,A}$, denotamos el

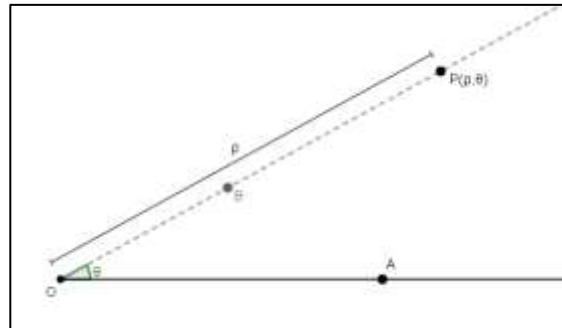


Figura 14 Coordenadas polares de un punto

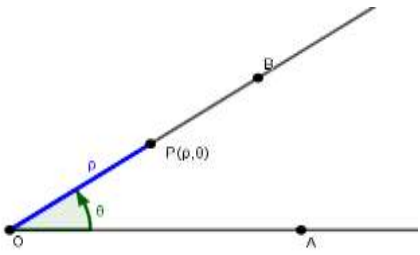
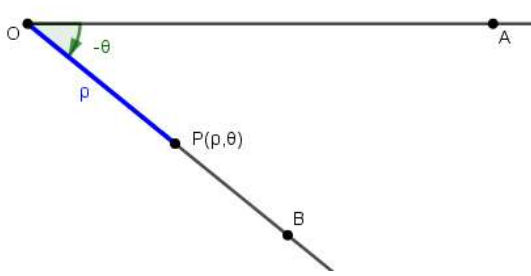
conjunto de parejas ordenadas (ρ, θ) para todos los puntos P de un plano α con polo O y eje polar \overrightarrow{OA} como $\alpha_{O,A}$. donde P está en el rayo \overrightarrow{OB} , θ es la medida en radianes del $\angle AOB$, partiendo del rayo \overrightarrow{OA} en sentido antihorario, y la distancia de P al polo O es igual al valor absoluto de ρ .

El número real θ que corresponde al ángulo formado por el eje polar y el rayo \overrightarrow{OB} se denomina *ángulo polar*. El número real ρ el cual determina la distancia entre el polo y el punto P se denomina *distancia radial*⁵.

Es importante mencionar que la medida del ángulo y lo que se denomina ángulo polar θ son objetos de diferente naturaleza. Igualmente, entre la distancia radial ρ y la distancia del polo al punto P . Puesto que tanto θ como ρ pertenecen al conjunto de los números reales \mathbb{R} , entonces pueden ser positivos o no. A diferencia de la medida del ángulo o la distancia entre puntos que es por definición un real positivo en la métrica que se definan.

Así, como se definió el sistema coordenado $\alpha_{O,A}$, si el ángulo polar θ es mayor que cero se considera la medida correspondiente θ en sentido antihorario, pero si es menor que cero se considera la medida $-\theta$ en sentido horario.

Tabla 3: paralelo ángulo polar

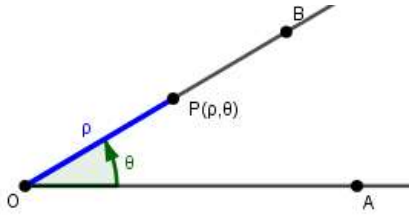
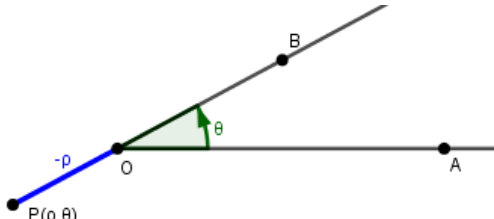
Representación para $\theta > 0$	Representación para $\theta < 0$
	

Así como el ángulo polar determina la orientación para representar un punto P , la distancia radial también lo hace. Si la distancia radial ρ es mayor que cero entonces el punto

⁵ Tener en cuenta que la distancia radial ρ pertenece al conjunto de los números reales, por lo tanto, puede ser mayor, menor o igual que cero. Esto definirá la orientación lineal en el sistema coordenado definido.

P pertenece al rayo \overrightarrow{OB} , pero si ρ es menor que cero entonces P pertenece al rayo opuesto a \overrightarrow{OB} . Es claro que, para puntos de igual ángulo polar, pero distancia radial opuesta, se tiene que los puntos son diametralmente opuestos con respecto a la circunferencia de centro en el polo y radio el valor absoluto de alguna de las dos distancias radiales.

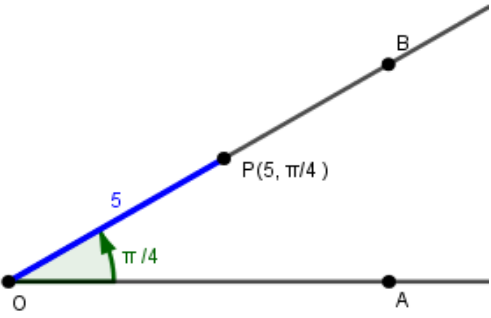
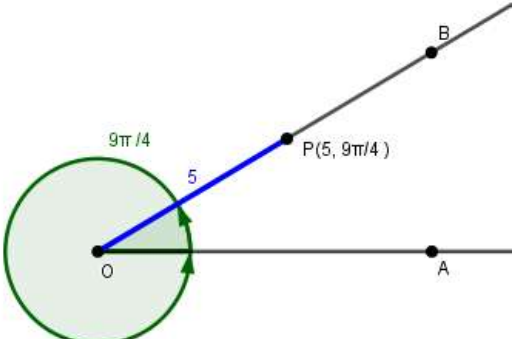
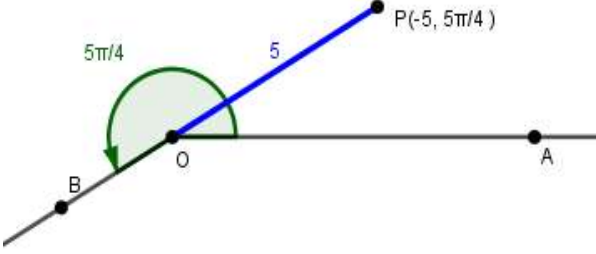
Tabla 4: paralelo distancia radial

Representación para $\rho > 0$	Representación para $\rho < 0$
	

De lo anterior se puede concluir que a cada pareja ordenada $(\rho, \theta) \in \alpha_{O,A}$ le corresponde un único punto P en el plano α . Pero esta unicidad no se tiene en sentido contrario, pues a cada punto P del plano α le corresponden infinitas parejas ordenadas $(\rho, \theta) \in \alpha_{O,A}$. Un ejemplo puede ser la pareja ordenada $(5, \frac{\pi}{4})$ que corresponde a un punto P que se encuentra a una distancia 5 del polo y corresponde a un ángulo $\angle AOP$ de medida $\frac{\pi}{4}$. Luego a esta coordenada le corresponde un único punto en el plano α . Pero para ese mismo punto P resulta sencillo asignar otra coordenada, por ejemplo $(5, \frac{9\pi}{4})$. Pues la medida del ángulo correspondiente a $\angle AOP$ es $\frac{\pi}{4}$ y la distancia al polo sigue siendo 5. Hasta este momento se podría considerar que las infinitas parejas que se le pueden asignar al mismo punto P se obtienen cada vez que el ángulo polar da una vuelta completa, es decir sumando

algún múltiplo de 2π a la medida del ángulo $\angle AOP$. Pero esta no es la única forma, pues la coordenada $(-5, \frac{5\pi}{4})$ también corresponde al mismo punto P .

Tabla 5: Casos de Coordenadas para el punto P

<p>Punto P de coordenadas $(5, \frac{\pi}{4})$</p>	
<p>Punto P de coordenadas $(5, \frac{9\pi}{4})$</p>	
<p>Punto P de coordenadas $(-5, \frac{5\pi}{4})$</p>	

Se puede evidenciar que para dos puntos cuales quiera cuya distancia radial ρ_1 y ρ_2 sea igual, tales puntos pertenecen a la misma circunferencia con centro en el polo O y de

radio ρ_1 . De igual manera si dos puntos cuales quiera cuyo ángulo polar θ_1 y θ_2 sea igual, tales puntos pertenecen a la misma recta.

Definición puntos cocíclicos

Dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ en $\alpha_{O,A}$, si $\rho_1 = \rho_2$ o $\rho_1 = -\rho_2$ se dice que P y Q son puntos cocíclicos centrados en el polo. Es decir que pertenecen a la misma circunferencia, la cual tiene centro en el polo O y radio $|\rho|$.

Definición puntos colineales

Dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ en $\alpha_{O,A}$, si $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, para k entero, se dice que los puntos P y Q son colineales con el polo.

Ya se ha ilustrado que una coordenada en el sistema polar representa un único punto en el plano, sin embargo, a un punto cualquiera en el plano se le pueden asignar diferentes coordenadas.

Teorema punto- infinitas coordenadas

A un punto P de coordenadas (ρ, θ) en $\alpha_{O,A}$ le corresponden infinitas parejas ordenadas de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$ o $(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$ con k entero.

Demostración

La demostración se realizará en dos partes, una para cada tipo de coordenada que se le puede asignar al punto P .

Parte I. Para parejas de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$

Sea (ρ, θ) la única coordenada que se le puede asignar a un punto P fijo en el plano, lo que es equivalente a que los puntos $P(\rho, \theta)$ y $Q(\rho, \theta + 2k\pi)$ son diferentes. Si P y Q son diferentes implica que sus coordenadas también lo son, lo cual implica que $OP \neq OQ$ o que los ángulos $\angle AOP$ y $\angle AOQ$ no son coterminales. El primer caso es absurdo, pues $OP = \rho$ y $OQ = \rho$, es decir que $OP = OQ$ por la propiedad transitiva de los números reales. Por lo tanto, P y Q son cocíclicos.

Es decir que se debe cumplir que los ángulos $\angle AOP$ y $\angle AOQ$ no son coterminales. Ahora, dado que el punto P está determinado por el ángulo θ , si se modifica tal ángulo adicionando algún valor implica que el punto P hace una rotación al punto P' , claramente sobre la misma circunferencia. Así, si el valor que se adiciona al ángulo $\angle AOP = \theta$ es 2π se tiene que el punto resultante de la rotación P' es el mismo punto P pues se ha realizado una rotación de 2π con respecto al polo.

Ahora supongamos que si se repite tal proceso n veces se sigue cumpliendo que el punto de rotación es el mismo P , es decir que para algún valor n se tiene que el ángulo polar θ y $\theta + 2n\pi$ determinan ángulos coterminales. Luego, si al punto P determinado por el ángulo polar $\theta + 2n\pi$ se le hace rotar 2π , naturalmente se obtiene el mismo punto P , pero de ángulo polar $\theta + 2n\pi + 2\pi$. Expresión que se reduce a $\theta + 2(n + 1)\pi$.

Es decir que para cualquier valor $k \in \mathbb{N}$ se tiene que los ángulos polares θ y $\theta + 2k\pi$ determinan ángulos coterminales.

Por lo que se tiene que los puntos $P(\rho, \theta)$ y $Q(\rho, \theta + 2k\pi)$ son cocíclicos (con la misma orientación pues tienen la misma magnitud como distancia radial) y además están

determinados por ángulos coterminales. Es decir que P y Q son el mismo punto. Lo cual contradice la hipótesis inicial.

Por lo tanto, se ha demostrado que para cualquier punto $P(\rho, \theta)$ le corresponden también todas las coordenadas de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y este resultado se puede extender a los números enteros si en lugar de adicionar 2π se sustraía tal valor. Es decir, rotar -2π , pues el razonamiento es análogo y el resultado equivalente al que se obtuvo.

Parte II. Para parejas de la forma $(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$

Sea (ρ, θ) la única coordenada que se le puede asignar a un punto P fijo en $\alpha_{O,A}$ o lo que es lo mismo, los puntos $P(\rho, \theta)$ y $Q(-\rho, \theta + 2(k + 1)\pi)$ son diferentes.

Para empezar, es inmediato que los puntos P y Q son cocíclicos por definición. Ahora, si al punto P se le aplica una rotación de π se obtiene un punto $P'(\rho, \theta + \pi)$. De lo cual se obtiene que los puntos P y P' son cocíclicos y también resultan diametralmente opuestos pues la rotación aplicada corresponde a un recorrido de media circunferencia. Ahora al punto P' también le corresponden todas las coordenadas de la forma $(\rho, \theta + \pi + 2n\pi)$ para cualquier valor n entero (esto quedó demostrado en la primera parte de esta demostración).

También es inmediato que para cualquier punto en el plano se puede obtener otro diametralmente opuesto si se mantiene el ángulo polar y se cambia la distancia radial por su opuesto aditivo, pues esto cambia la orientación del punto. Es decir que para el punto $P'(\rho, \theta + \pi + 2n\pi)$ se puede obtener un punto diametralmente opuesto R de coordenadas $(-\rho, \theta + \pi + 2n\pi)$. Pero esta última expresión se puede reducir a $(-\rho, \theta + (2n + 1)\pi)$. Lo

que implica que para algún valor $k \in \mathbb{Z}$ el punto R tiene exactamente las mismas coordenadas que el punto $Q(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$.

De lo cual se obtiene que P es diametralmente opuesto a P' y P' es diametralmente opuesto a Q . Por lo tanto, P y Q son el mismo punto. Lo cual contradice la hipótesis inicial.

Es decir que a un punto P fijo de coordenadas (ρ, θ) se le puede asignar también todas las parejas ordenadas de la forma $(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$.

Por lo tanto, con los resultados obtenidos en *parte I* y *parte II* queda demostrado que para un punto P de coordenadas (ρ, θ) en $\alpha_{O,A}$ le corresponden infinitas parejas ordenadas de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$ o $(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$.

■ *QED*

Ahora, sí es claro que se está trabajando en un único plano y no hay ambigüedad, se omitirá mencionar este. Y a pesar de que ya se ha visualizado en las representaciones presentadas anteriormente, vale la pena aclarar que para hacer referencia a un punto P de coordenadas polares (ρ, θ) se empleará la notación $P(\rho, \theta)$.

Definición de coordenadas equivalentes

Dadas dos coordenadas (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) que correspondan al mismo punto P en el plano, se dice que (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) son coordenadas equivalentes.

La definición anterior permite establecer una relación de igualdad entre dos coordenadas que correspondan al mismo punto. Tal relación es una relación de equivalencia pues satisface ser: reflexiva, simétrica y transitiva.

Dado que a un punto $P(\rho, \theta)$ en el plano se le pueden asignar infinitas coordenadas, para evitar confusión en el desarrollo de este trabajo, se consideran las clases de equivalencia que se pueden obtener y únicamente se trabajarán los representantes de las clases de equivalencia, los cuales se elegirán de tal forma que $\rho > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Aquellas coordenadas que cumplan esta condición se denominarán representantes de las clases de equivalencia de un punto fijo P .

Adicionalmente, como el polo O con la condición dada sigue teniendo infinitas coordenadas asignadas, entonces se define $(0,0)$ como la coordenada representante del polo.

Sección 2: Sobre Distancias Entre Puntos

Una herramienta útil para caracterizar y analizar curvas en un plano bajo un sistema de coordenadas polares consiste en definir una distancia entre dos puntos; sin embargo, al igual que en el sistema cartesiano, existen diferentes formas de definir una métrica en este sistema.

Dada la naturaleza del sistema y la forma de dar coordenadas a los puntos del plano polar, resulta natural pensar en que la función de distancia entre dos puntos este dada bajo los mismos parámetros. Así, es posible pensar en un tipo de distancia para cada parámetro del sistema: *Distancia lineal* y *Distancia angular*:

Una de las primeras distancias que se puede determinar es la distancia entre puntos que son colineales, dado que sus ángulos resultan coterminales. Esta la definimos como *distancia lineal*.

Definición Distancia Lineal

Dados $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ tal que P y Q son colineales con el polo, por definición $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, entonces la distancia lineal entre P y Q denotado como $d_{lp}(P, Q)$ se define como:

Caso I.

Si k es par entonces

$$d_{lp}(P, Q) = |\rho_1 - \rho_2|$$

Caso II. $k \neq 0$

Si k es impar entonces definimos $\rho_3 = -\rho_2$, así la función distancia entre P y Q es

$$d_{lp}(P, Q) = |\rho_1 - \rho_3|$$

Ahora, siguiendo la misma idea que plantea la definición anterior, es posible pensar en puntos que sean cocíclicos. Esta distancia será nombrada *distancia angular*.

Definición Distancia Angular

Dados $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ tal que P y Q son cocíclicos, por definición $\rho_1 = \rho_2$ o $\rho_1 = -\rho_2$, entonces la distancia angular entre P y Q denotado como $d_p(P, Q)$ se define como:

Caso I.

Si las distancias radiales son iguales, es decir $\rho_1 = \rho_2$ entonces

$$d_{ap}(P, Q) = |\theta_1 - \theta_2|$$

Caso II.

Si $\rho_1 = -\rho_2$ entonces definimos $\theta_3 = \theta + \pi$ y

$$d_{ap}(P, Q) = |\theta_1 - \theta_3|$$

En este orden de ideas, lo que se define en este trabajo como *distancia polar* se inspira en los dos movimientos iniciales que permitieron la construcción de curvas cinemáticas, un movimiento angular y un movimiento lineal. En general, para cualesquiera puntos en el plano se define la distancia polar de la siguiente forma:

Definición Distancia Polar Entre dos Puntos

Se define la **distancia polar** entre dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ cualesquiera como la suma de diferencia de las distancias radiales más la diferencia de los ángulos polares y se denota como $d_p(P, Q)$.

$$d_p(P, Q) = |\rho_1 - \rho_2| + |\theta_1 - \theta_2|$$

Note que los análisis previos sobre *distancia angular* y *distancia lineal* resultan ser casos particulares de lo que se ha definido como *distancia polar*. Adicionalmente, para verificar que la definición de *distancia polar* sea una función de distancia definida de \mathbb{R}^2 en $[0, \infty)$ y cumpla las características de métrica, se verifican tales condiciones.

Axioma de separación

La distancia polar entre cualesquiera par de puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ es no negativa

Demostración

$\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2$ son números reales y para todo número real se cumple que el valor absoluto es no negativo, entonces se tiene que:

$$|\rho_1 - \rho_2| \geq 0 \text{ y } |\theta_1 - \theta_2| \geq 0.$$

entonces

$$|\rho_1 - \rho_2| + |\theta_1 - \theta_2| \geq 0$$

lo que equivale a

$$d_p(P, Q) \geq 0.$$

Por lo tanto, la distancia polar definida es no negativa para cualquier par de puntos.

Axioma de coincidencia

La distancia entre dos puntos P y Q es cero si y solo si P y Q son el mismo punto.

Demostración

Parte I.

Si la distancia entre dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ es cero se representa como

$$d_p(P, Q) = |\rho_1 - \rho_2| + |\theta_1 - \theta_2| = 0$$

Luego como los sumandos involucrados son valores absolutos y estos son no negativos, implica que $|\rho_1 - \rho_2| = 0$ y $|\theta_1 - \theta_2| = 0$. Lo que equivale a

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0$$

$$|\theta_1 - \theta_2| = 0$$

$$\begin{aligned}\rho_1 - \rho_2 &= 0 & \theta_1 - \theta_2 &= 0 \\ \rho_1 &= \rho_2 & \theta_1 &= \theta_2\end{aligned}$$

Es decir que las ordenadas y abscisas de P y Q son iguales respectivamente. Por lo tanto P y Q son iguales.

Parte II.

Si los puntos P y Q son iguales entonces sus respectivas coordenadas son $P(\rho, \theta)$ y $Q(\rho, \theta)$. Aplicando la definición de distancia se tiene que

$$d_p(P, Q) = |\rho - \rho| + |\theta - \theta|$$

$$d_p(P, Q) = |0| - |0|$$

$$d_p(P, Q) = 0$$

Por lo tanto, con lo demostrado en la *parte I* y *parte II*, la distancia polar cumple con el axioma de coincidencia.

Simetría

Dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$, $d_p(P, Q) = d_p(Q, P)$

Demostración

Aplicando la definición de distancia a los puntos P y Q dados se tiene que

$$d_p(P, Q) = |\rho_1 - \rho_2| + |\theta_1 - \theta_2|$$

$$= |-(\rho_2 - \rho_1)| + |-(\theta_2 - \theta_1)|$$

$$= |\rho_2 - \rho_1| + |\theta_2 - \theta_1|$$

$$= d_p(Q, P)$$

Por lo tanto, la distancia polar es simétrica.

Desigualdad triangular

Para cuales quiera puntos $P(\rho_1, \theta_1)$, $Q(\rho_2, \theta_2)$ y $R(\rho_3, \theta_3)$ se cumple que

$$d_p(P, R) \leq d_p(P, Q) + d_p(Q, R)$$

Demostración

Aplicando la definición de distancia polar se tiene

$$d_p(P, Q) + d_p(Q, R) = [|\rho_2 - \rho_1| + |\theta_2 - \theta_1|] + [|\rho_3 - \rho_2| + |\theta_3 - \theta_2|]$$

Desarrollando algebraicamente esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} d_p(P, Q) + d_p(Q, R) &= |\rho_2 - \rho_1| + |\rho_3 - \rho_2| + |\theta_2 - \theta_1| + |\theta_3 - \theta_2| \\ &\geq |\rho_2 - \rho_1 + \rho_3 - \rho_2| + |\theta_2 - \theta_1 + \theta_3 - \theta_2| \\ &= |\rho_3 - \rho_1| + |\theta_3 - \theta_1| \\ &= d_p(P, R) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad triangular para cualquier terna de puntos con la distancia polar definida.

Con lo anterior queda demostrado que la distancia polar es una métrica.

Ahora bien, de lo anterior se puede observar que la distancia polar resulta análoga a la métrica del taxista en un sistema cartesiano.

Por otro lado, una segunda métrica que puede abordarse en este sistema es la dada por una trayectoria lineal entre los puntos, sin basarse en la relación entre movimiento lineal y angular como fue empleado en la métrica polar. Así, podemos abordar la métrica euclidiana clásica, en donde dados los puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ arbitrarios, la distancia corresponde a la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos P y Q (ver Figura 15).

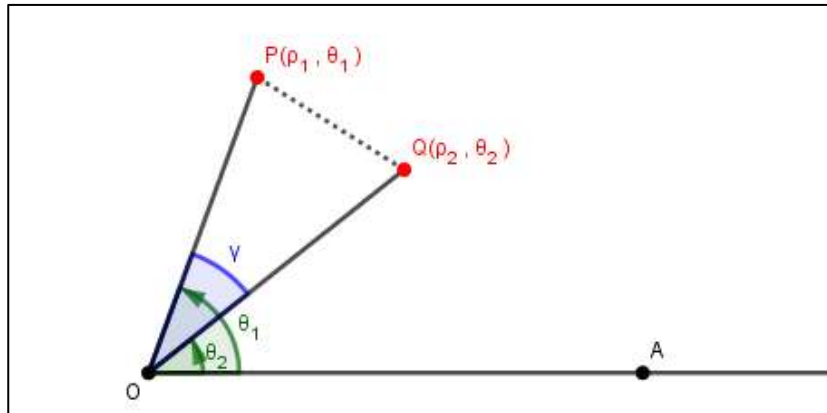


Figura 15: Distancia euclidiana

Luego, considerando el triángulo de vértices O, P y Q donde \overline{OP} y \overline{OQ} tienen como medida ρ_1 y ρ_2 respectivamente, se puede determinar la medida de \overline{PQ} empleando el teorema del coseno.

Definición Distancia Euclidiana Entre dos Puntos

Dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$, la **distancia** entre ellos, notada como $d(P, Q)$, está dada por la siguiente expresión.

$$[d(P, Q)]^2 = (\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 - 2(\rho_1)(\rho_2)\cos(\gamma)$$

Donde γ es la medida del ángulo $\angle POQ$. Es decir $\gamma = |\theta_1 - \theta_2|$.

Con lo anterior se puede concluir que para el sistema de coordenadas polares es posible definir más de una métrica para determinar la distancia entre dos puntos. Sin embargo, para efectos del presente estudio se considerará únicamente la distancia polar como se definió anteriormente. Así, la distancia entre dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ cualesquiera, viene dada por la expresión $d_p(P, Q) = |\rho_1 - \rho_2| + |\theta_1 - \theta_2|$.

De lo anterior vale la pena cuestionarse acerca de la representación gráfica de algunos objetos geométricos definidos a partir de la distancia polar, por ejemplo, la circunferencia o cualquier otro objeto definido a partir de la distancia. Sin ir muy lejos se podría considerar la definición analítica de cada una de las curvas cónicas (parábola, hipérbola y elipse).

Sección 3: Algunos Lugares Geométricos

En el presente trabajo ya se ha definido un sistema de coordenadas y una función de distancia entre puntos para el mismo sistema. Con esto se pueden reinterpretar algunas curvas definidas como lugar geométrico a partir de la definición de distancia. Así, uno de los primeros objetos definidos de tal manera, y que ya se ha analizado desde la perspectiva del sistema de coordenadas polares, es la circunferencia.

La circunferencia en la geometría euclidiana se define como el lugar geométrico de los puntos equidistantes a un punto fijo denominado centro. Sin embargo, con la definición de distancia polar se obtiene otro tipo de curva a partir de la misma descripción de circunferencia.

Circunferencia Polar

Dado un punto fijo $P(\rho, \theta)$ y un número $k \in \mathbb{R}$, la circunferencia polar es el lugar geométrico de todos los puntos Q en el plano tal que $d_p(P, Q) = k$.

Con la anterior definición se puede esbozar la gráfica de la curva analizando algunos puntos básicos o principales, por ejemplo, aquellos que satisfacen la condición de equidistancia polar dada linealmente y luego angularmente. Para ilustrar esta situación se considerará un punto $P(\rho, \theta)$ arbitrario y un número real k tal que sea menor que la distancia lineal entre el polo y P , es decir $k < |\rho|$.

Por ejemplo, considere el punto $P\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ y el número real $k = 2$. Con lo anterior se obtienen que los puntos que satisfacen la condición de la circunferencia polar, únicamente, de forma lineal son aquellos puntos Q tal que $d_p(P, Q) = 2$. Es decir:

$$d_p(P, Q) = |5 - \rho| = 2.$$

Aplicando la definición de valor absoluto se tiene

$$2 = 5 - \rho$$

$$\rho = 3$$

$$-2 = 5 - \rho$$

$$\rho = 7$$

Como los puntos de interés se establecieron considerando únicamente la distancia lineal, quiere decir que estos puntos son colineales con el polo, es decir que estos puntos pertenecen al \overrightarrow{OP} como se muestra en la Figura 16. Por lo tanto, la distancia angular de los puntos Q y el punto P es equivalente. De lo cual se obtiene que los puntos $Q_1\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ y $Q_2\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ pertenecen a la curva equidistante para $P\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ y $k = 2$.

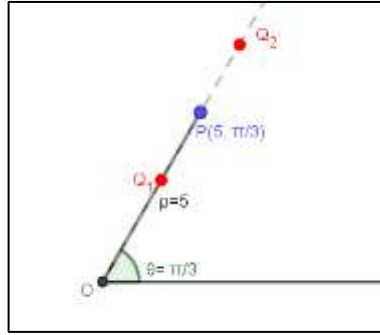


Figura 16. Primeros puntos de la circunferencia polar

Luego, analizando únicamente los puntos cuya distancia angular satisfacen la condición de la curva equidistante, es decir $d_p(P, Q) = 2$, se obtienen que:

$$d_p(P, Q) = \left| \frac{\pi}{3} - \theta \right| = 2.$$

Aplicando la definición de valor absoluto se tiene

$$2 = \frac{\pi}{3} - \theta$$

$$-2 = \frac{\pi}{3} - \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} - 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2$$

Como los puntos de interés se establecieron considerando únicamente la distancia angular, quiere decir que estos puntos son cocíclicos con P . Por lo tanto, la distancia lineal de los puntos Q y el punto P es equivalente. De lo cual se obtiene que los puntos $Q_3 \left(5, \frac{\pi}{3} + 2 \right)$ y $Q_4 \left(5, \frac{\pi}{3} - 2 \right)$ pertenecen a la curva equidistante para $P \left(5, \frac{\pi}{3} \right)$ y $k = 2$ como se ilustra en la Figura 17.

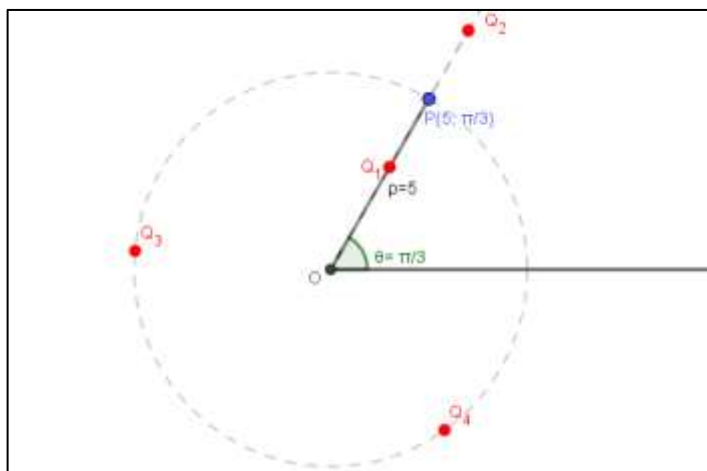
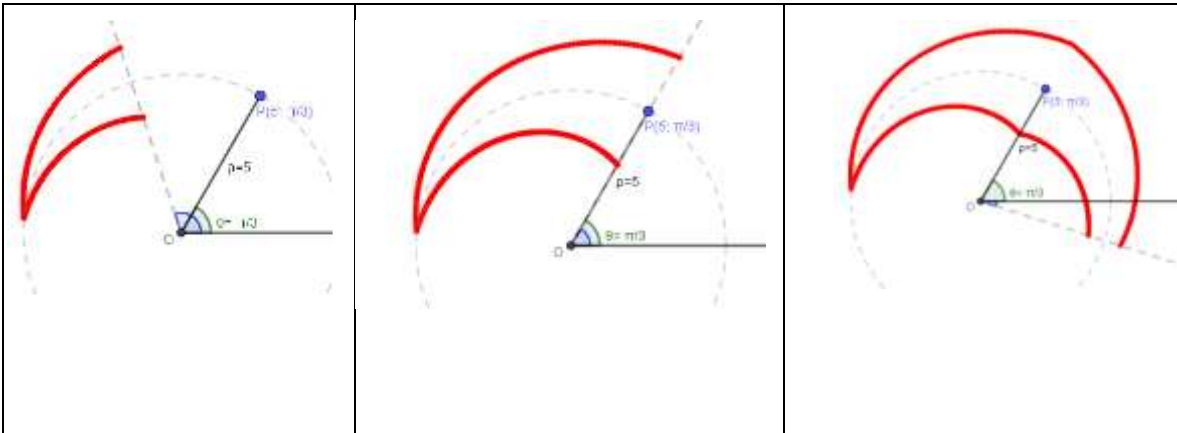


Figura 17 Puntos principales circunferencia polar

Los cuatro puntos determinados anteriormente cumplen con la condición dada, pues cada uno de estos puntos dista polarmente 2 del punto P .

Determinar todos los puntos que pertenecen a la circunferencia polar para el punto P y el número real k dados, de forma algebraica no resulta ser una tarea de solución inmediata como en los casos anteriores, pues se deben considerar ahora puntos que no son colineales ni cocíclicos. Es decir, tales puntos se obtienen determinando todos los valores para ρ y θ que satisfacen la expresión $d_p(P, Q) = |5 - \rho| + |\frac{\pi}{3} - \theta|$. Así que para ilustrar la circunferencia polar se ha implementado el software de geometría dinámica GeoGebra con el cual se puede visualizar en la Figura 18 el rastro punto a punto de la curva que se genera al considerar diferentes distancias angulares

Tabla 6 Rastro de distancias angulares



Por lo tanto, dado el punto fijo $P\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ y el real positivo $k = 2$, la representación gráfica de los puntos Q en el plano tal que $d_p(P, Q) = 2$ está dada en la Figura 19.

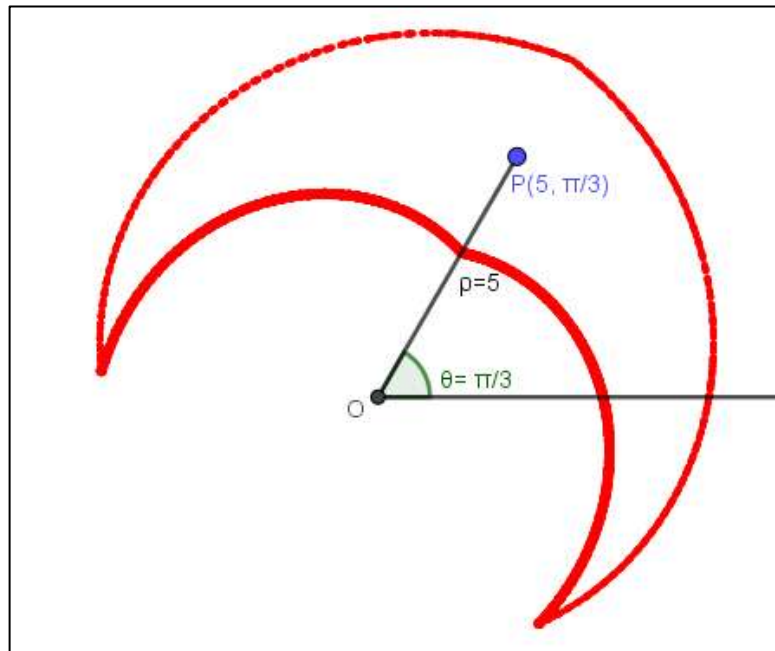
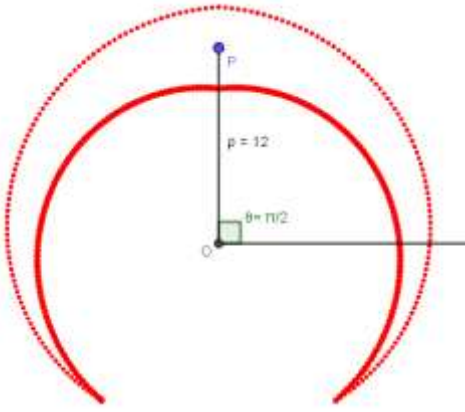
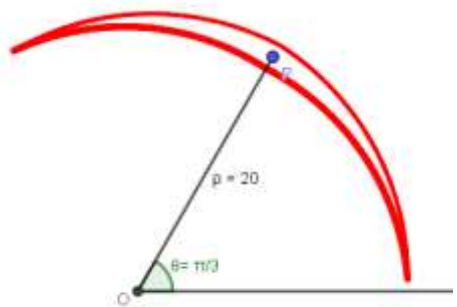


Figura 18: circunferencia polar con centro en $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

Como se puede evidenciar, el lugar geométrico obtenido bajo la definición de circunferencia euclidiana usual resulta, bajo la métrica establecida para el sistema de

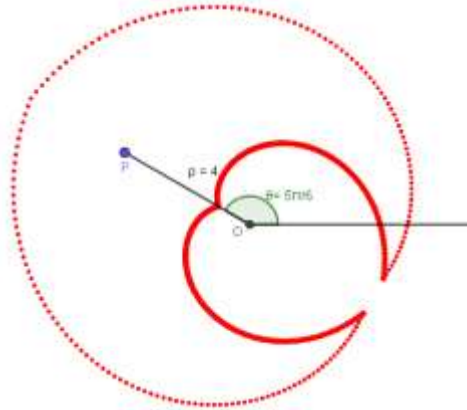
coordenadas polares, en una especie de medialuna para el punto P y distancia k dados. Sin embargo, modificando los valores de P y k se obtienen variaciones de esta curva. En la *Tabla 6*. Se presentan algunos ejemplos con puntos y distancias diferentes con el fin de vislumbrar los lugares geométricos que se pueden obtener bajo la misma definición.

Tabla 7: Lugares geométricos de curvas equidistantes

$P\left(12, \frac{\pi}{2}\right)$ $k = 2.5$	
$P\left(20, \frac{\pi}{3}\right)$ $k = 1$	

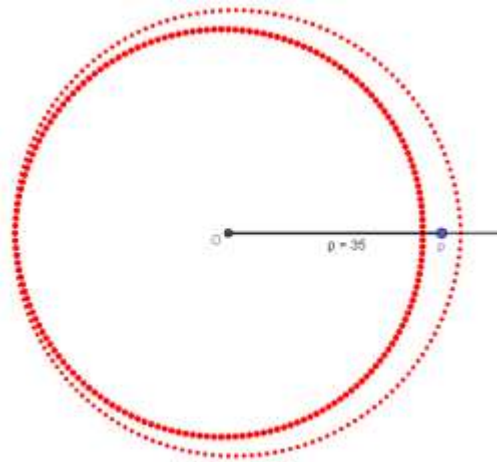
$$P\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k = 3$$



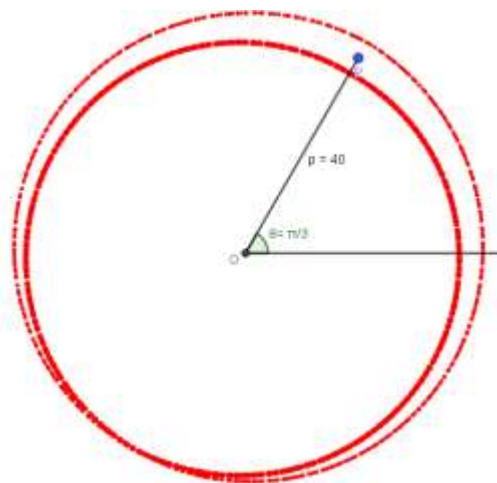
$$P(35, 0)$$

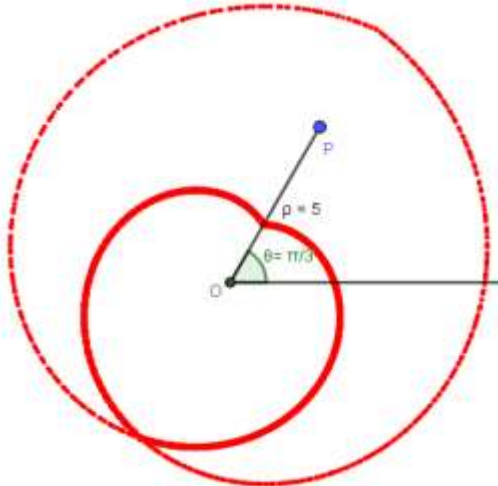
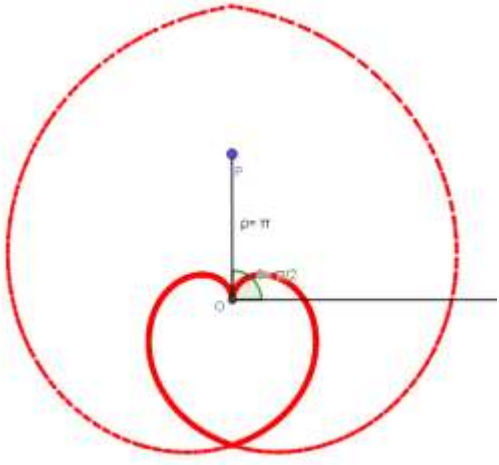
$$k = \pi$$



$$P\left(40, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$k = \pi$$



$P\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $k = \pi$	
$P\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ $k = \pi$	

A partir de estos ejemplos, se observa que con la definición de circunferencia y la distancia polar el lugar geométrico generado tiende a ser dos corazones entrelazados cuya distancia disminuye cada vez más a medida que la distancia lineal ρ del punto P es cada vez mayor. Ahora, un análisis similar se puede realizar con otros tipos de curvas que usualmente estén definidos a partir de distancias entre puntos. Por ejemplo, se podría analizar qué lugares geométricos se generan empleando la distancia polar en lugar de la distancia euclidiana a partir de la definición de otras cónicas como elipses o hipérbolas. Sin embargo, estos análisis

exceden los intereses de este trabajo el cual pretende estudiar algunos objetos del análisis real más allá de las representaciones geométricas de algunos objetos en particular.

CAPÍTULO III: ALGUNAS FUNCIONES EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

*“El concepto más importante de todas las matemáticas es,
sin dudarlo, el de función” - Spivak*

En este capítulo se estudiarán algunas familias de funciones reales y se analizará su representación gráfica en el sistema de coordenadas polares tratando de identificar significados asociados a ciertas propiedades o comportamientos de las curvas. Para ello, se emplearán las definiciones usuales de los conceptos de función, dominio, rango, imagen, variable dependiente, variable independiente. Para profundizar, se puede revisarse Spivak, Muñoz, Apóstol, entre otros.

Particularmente, se trabajará con funciones reales en donde la variable independiente será θ , ρ será la variable dependiente y el dominio de la función será un subconjunto de los números reales. De esta forma, bajo la definición de función se tiene que, si θ está en su dominio, entonces existe una única imagen $\rho = f(\theta)$. Así, la gráfica de la función f en un sistema de coordenadas polar será el conjunto de todas las parejas de la forma (ρ, θ) , con $\rho = f(\theta)$. Vale la pena mencionar que, en el estudio usual de la representación gráfica de una función en un sistema de coordenadas cartesiano, el orden de la pareja ordenada cambia.

Ahora bien, dentro del conjunto de funciones reales, existen diferentes clases como funciones polinómicas, racionales, exponenciales y trascendentes entre otras; sin embargo, con el propósito de dotar de significado y entender de mejor forma la relación entre la expresión analítica o algebraica y la representación gráfica, comenzaremos trabajando con funciones polinómicas. Recordemos la definición de funciones polinómicas

Funciones Polinómicas

Se definen las funciones polinómicas reales como aquellas funciones f para las cuales existen números reales a_0, a_1, \dots, a_n tal que

$$f(\theta) = a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + a_{n-2}\theta^{n-2} + \dots + a_2\theta^2 + a_1\theta^1 + a_0$$

para todo θ en \mathbb{R} .

La potencia más alta de θ con coeficiente distinto de cero recibe el nombre de *grado* de f . Por ejemplo, de las curvas abordadas en el primer capítulo, se puede concluir que la espiral de Arquímedes, cuya expresión algebraica es de la forma $\rho = a\theta$, es una función polinómica de grado 1; la cuadratriz de Hipias, cuya expresión algebraica es de la forma $\rho = \frac{2\theta}{\pi \sin \theta}$, no corresponde a una función polinómica; y la circunferencia centrada en el origen de radio a , cuya expresión algebraica es de la forma $\rho = a$, es una función polinómica de grado 0, o también conocida algebraicamente como función constante.

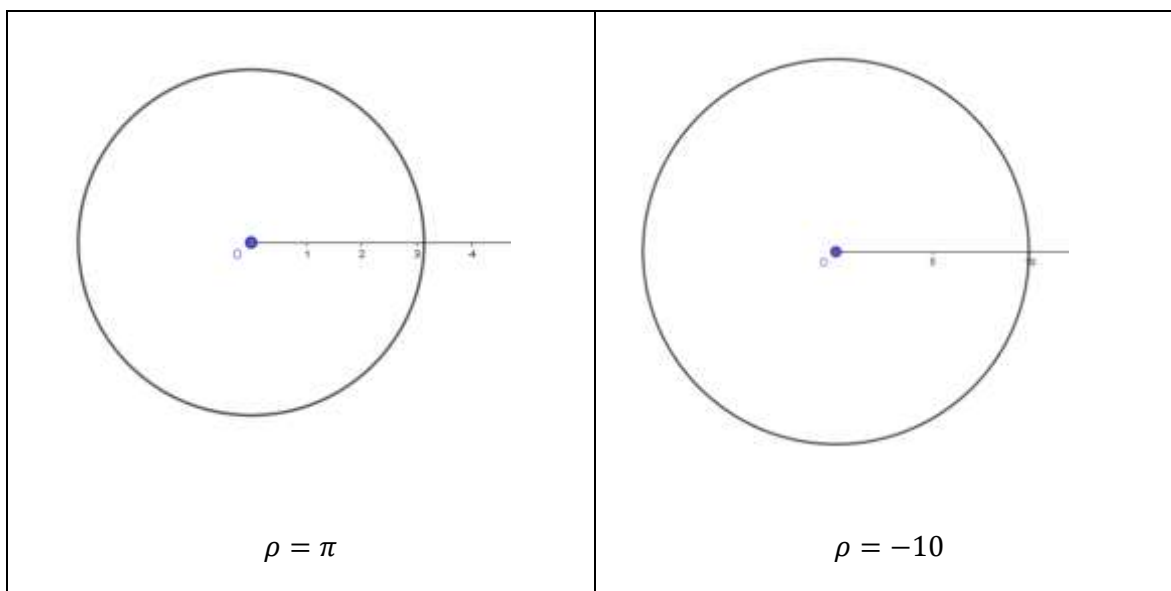
Funciones Constantes

La primera familia de funciones y una de las más simples es la de funciones constantes con dominio todos los números reales. Puntualmente, las funciones reales constantes son aquellas de la forma $\rho = f(\theta) = a$, donde a es un número real cualquiera.

Dado que en la expresión algebraica no interviene la variable independiente θ , entonces el valor de la distancia lineal ρ no varía en función de la distancia angular θ . Esto quiere decir que a todos los puntos del plano que satisfacen la función les corresponde la misma distancia lineal sin importar el valor de la distancia angular. De ahí, se infiere que su representación gráfica en un sistema de coordenadas polares es una circunferencia centrada

en el polo y con radio $|a|$. Para realizar esta y las siguientes representaciones de funciones polares se ha empleado el software de geometría dinámica GeoGebra el cual se puede configurar para representar curvas en el plano polar (ver Anexo A).

Tabla 8: Ejemplos de funciones constantes.



A pesar de que la función constante sea algebraicamente la más simple de las funciones polinómicas, esta función y su gráfica poseen algunas características muy interesantes que pueden ser útiles en el estudio de funciones (polinómicas o no) de mayor complejidad:

- La función $\rho = a$ representa en el plano polar una circunferencia de radio $|a|$ centrada en el polo.
- La función $\rho = 0$ representa en el plano polar un solo punto, el polo.
- Para cada uno de los puntos de la circunferencia de una función constante no existe una, sino infinitas parejas ordenadas asignadas a tal punto que satisfacen la función.

En relación con el último ítem se puede observar que mientras que en un sistema cartesiano a cada punto P de una curva en el plano le corresponde una única pareja ordenada (x, y) que satisface $f(x) = y$, en un sistema de coordenadas polares esto no se da ya que a cada punto P de una curva en el plano polar le pueden corresponder más de una (e incluso infinitas)⁶ parejas ordenadas (ρ, θ) que satisfacen la función.

Por ejemplo, dada la función constante $\rho = 10$, para el punto con coordenadas $(10, \pi)$ que pertenece a la gráfica de la función se tiene que la pareja $(10, 3\pi)$ es equivalente a la anterior y también satisface que $f(3\pi) = 10$.

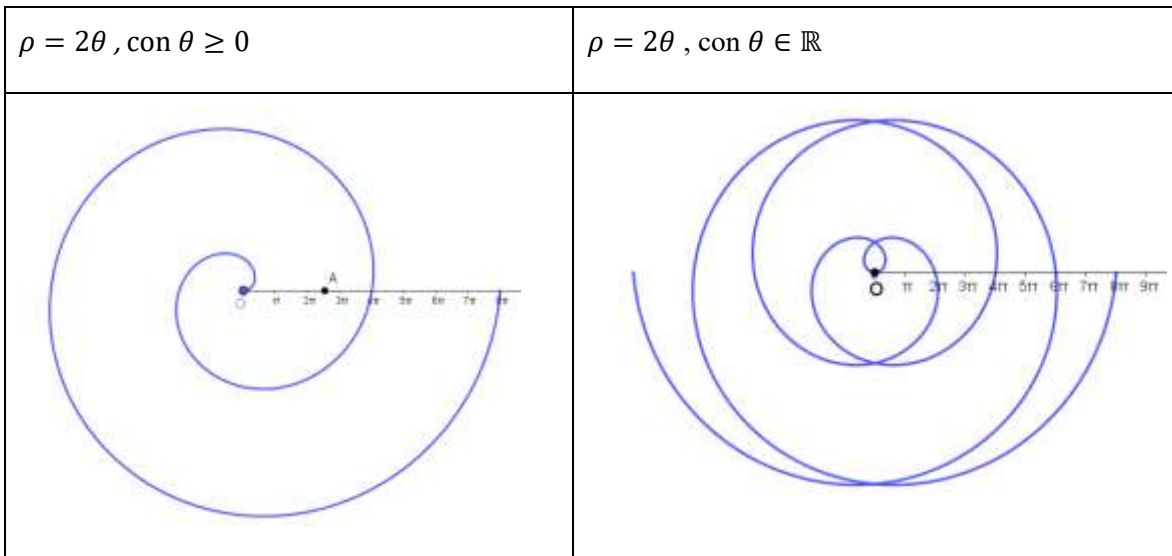
Funciones Polinómicas de Primer Grado

Las funciones reales polinómicas de primer grado (o simplemente funciones de grado 1 o de primer grado) son todas aquellas que se pueden representar algebraicamente como $\rho = f(\theta) = a\theta + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Como ya se ha observado a lo largo del presente trabajo, una familia de curvas que cumple la propiedad de ser funciones de grado 1 son las espirales de Arquímedes, pues su representación algebraica es de la forma $\rho = a\theta$, siendo a constante. Por ejemplo, la función $\rho = 2\theta$ gráficamente representa la una espiral de Arquímedes si consideramos el θ positivo. Pero al ser una función la gráfica comprende valores de $\theta \in \mathbb{R}$.

⁶ Remitirse a coordenadas equivalentes del presente capítulo.

Tabla 9: Ejemplo $\rho = 2\theta$ y su relación con la espiral de Arquímedes

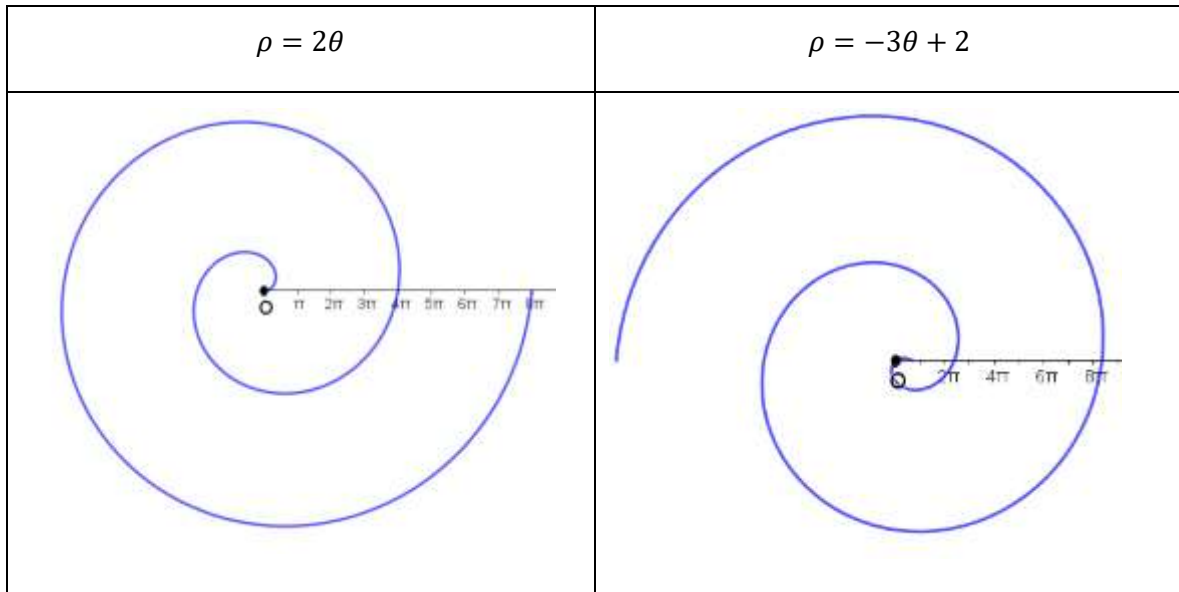


Dada la construcción de las espirales de primer grado⁷, para facilitar la visualización y estudio de las mismas, se debe restringir la ventana de visualización con algún intervalo según corresponda. Esto no significa que se esté restringiendo el dominio de la función. Por ejemplo, en las gráficas anteriores se consideró una ventana de visualización para $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.

Vale la pena resaltar que cuando se trabajó en la sección sobre la Espiral de Arquímedes, únicamente se tomó como dominio \mathbb{R}^+ ya que tanto la distancia lineal como la distancia angular se tomaban como números reales positivos. Así, para analizar con mayor facilidad este tipo de funciones, vale la pena primero trabajarlas con dominio en los reales positivos y luego pasar al dominio negativo e incluso a todo el dominio de la función \mathbb{R} . Por ejemplo, en la siguiente gráfica se presentan dos funciones reales con dominio positivo y ventana de visualización $[0, 5\pi]$.

⁷ Las gráficas de las funciones de grado 1, funciones de primer grado o funciones de primer orden se nombrarán espirales de grado 1, espirales de primer grado o espirales de primer orden.

Tabla 10: Ejemplo funciones de primer grado con dominio positivo



Una de las primeras observaciones que podemos realizar para funciones de primer orden es que al construir un rayo que parte del polo, este rayo interseca a la curva en infinitos puntos; por ejemplo, al graficar la función $\rho = 2\theta$ y un rayo cualquiera se obtiene la siguiente representación.

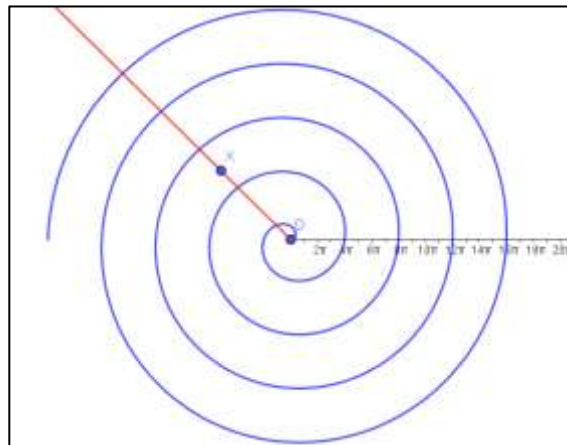


figura 19: Intersección $\rho=2\theta$ y un rayo cualquiera.

Estas intersecciones tienen una particularidad y es que sin importar el rayo (que parte del origen), la distancia entre dos puntos de intersección consecutivos en el rayo es constante. Esta observación motiva las siguientes definiciones.

Definición puntos consecutivos

Dada una función $\rho = f(\theta)$ se dice que dos puntos P y Q son puntos **consecutivos** si y solo si P y Q son colineales y la distancia angular entre los puntos es 2π .

Definición amplitud de espiral

Dada una función de primer orden, se denomina **amplitud** de la función a la distancia entre dos puntos consecutivos de la espiral de primer orden.

Por ejemplo, los puntos $(\pi, \frac{\pi}{2})$ y $(5\pi, \frac{5\pi}{2})$ pertenecen a la función $\rho = 2\theta$ y son colineales con el polo. Así, la distancia entre estos puntos es $|\pi - 5\pi| = 4\pi$ y por lo tanto la amplitud de $\rho = 2\theta$ es 4π . En general, dada una función de primer grado de la forma $f(\theta) = a\theta + b$ y los puntos consecutivos $(f(\theta_1), \theta_1)$ y $(f(\theta_1 + 2\pi), (\theta_1 + 2\pi))$, se tiene que la amplitud de f se puede determinar como la diferencia entre la distancia lineal de los puntos dados.

$$\begin{aligned} & |f(\theta_1 + 2\pi) - f(\theta_1)| \\ & |[a(\theta_1 + 2\pi) + b] - [a\theta_1 + b]| \\ & = |a\theta_1 + 2a\pi + b - a\theta_1 - b| \\ & = |2a\pi| \\ & = |a|2\pi \end{aligned}$$

Así, se observa que la **amplitud** de una espiral depende de a ; además, este número puede calcularse empleando cualquier par de puntos de la espiral.

Definición coeficiente de amplitud

Dada una función de primer grado $f(\theta) = a\theta + b$ se denota el coeficiente principal a como **coeficiente de amplitud** de la espiral correspondiente a la función.

Teorema dos puntos coeficiente de amplitud

Dados cualquier par de puntos de una función de primer orden $\rho = a\theta + b$, el coeficiente de amplitud es igual al cociente entre la diferencia de las distancias lineales y la diferencia de las distancias angulares de tales puntos

Demostración

Considere dos puntos cualesquiera en la función $\rho = a\theta + b$, $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$, entonces

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{a\theta_2 + b - (a\theta_1 + b)}{\theta_2 - \theta_1} = a.$$

■ *QED*

Es decir que con dos puntos de una función de primer grado se puede determinar la **amplitud** de la misma espiral. Para ello basta con hallar el **coeficiente de amplitud** a en valor absoluto y luego multiplicarlo por 2π .

De lo anterior vale la pena preguntarse, si se tienen dos puntos cuales quiera en el plano polar, ¿existe una función de primer grado que los contenga? y si tal función existe ¿es única? La respuesta a estas preguntas se obtiene analizando dos casos, uno donde los puntos

no son cocíclicos y otro donde los puntos son cocíclicos; los cuales se presentarán a continuación.

Teorema dos puntos - espiral

Dados dos puntos en el plano polar $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ existe una única función de primer grado a la cual pertenecen los puntos P y Q .

Demostración

Ya se ha evidenciado que una de las características principales de las funciones de primer grado es la amplitud que está determinada por cualquier par de puntos de la función. Así, por el teorema anterior (*teorema dos puntos coeficiente de amplitud*), para P y Q , el coeficiente de amplitud de la función de primer orden $f(\theta) = a\theta + b$ que los contiene está dado por

$$a = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Ahora, para calcular el término independiente de la función b se observa que, se deben satisfacer las siguientes igualdades

$$\rho_1 = a\theta_1 + b$$

$$\rho_2 = a\theta_2 + b$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, se puede despejar el valor de b en cualquiera de las dos igualdades

$$b = \rho_1 - a\theta_1$$

Con lo cual se obtiene que dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ existe una función de primer grado de la forma $f(\theta) = a\theta + b$, con $a = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\theta_2 - \theta_1}$ y $b = \rho_1 - a\theta_1$, que los contiene.

Ahora, veamos por contradicción que tal función es única. Supongamos que los puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$ pertenecen a dos funciones de primer grado. Por el teorema dos puntos coeficiente de amplitud, el coeficiente principal de la función a es único. Por lo cual, podemos suponer que los puntos P y Q pertenecen a las funciones

$$f_1(\theta) = a\theta + b_1$$

$$f_2(\theta) = a\theta + b_2$$

Tal que b_1 es diferente de b_2 . Ya que por hipótesis las funciones f_1 y f_2 son funciones de primer orden a las que pertenecen los puntos P y Q se cumple que

$$f_1(\theta_1) = \rho_1 = a\theta_1 + b_1$$

$$f_2(\theta_1) = \rho_1 = a\theta_1 + b_2$$

De lo cual, despejando los términos independientes b_1 y b_2 , se tiene

$$b_1 = \rho_1 - a\theta_1$$

$$b_2 = \rho_1 - a\theta_1$$

de donde, por transitividad, $b_1 = b_2$. Y esto es contradictorio a la hipótesis inicial.

■ *QED*

Ahora bien, conociendo que el coeficiente principal de una función de primer orden permite definir la amplitud, gráficamente, ¿qué significado tiene el coeficiente b ? Para dar

respuesta a esta pregunta, podemos analizar la relación que existe entre dos funciones de primer orden con el mismo coeficiente principal.

Familia de espirales con igual amplitud

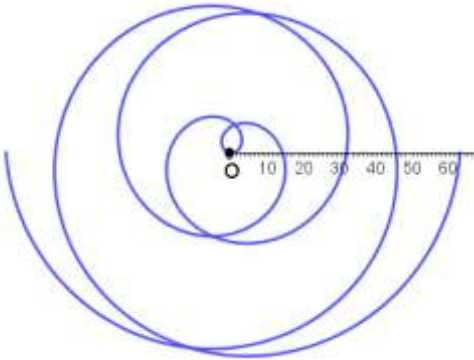
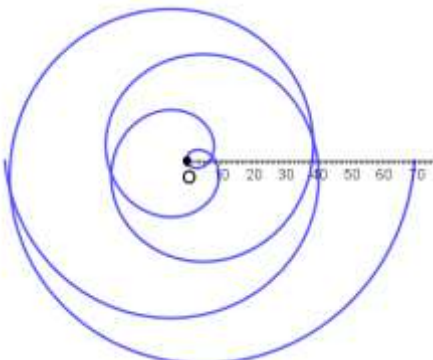
Para comenzar el análisis, suponga que tenemos dos funciones de primer grado cuya amplitud es igual, pero con término independiente diferente, por ejemplo

$$f_1(\theta) = 5\theta + 1$$

$$f_2(\theta) = 5\theta + 7$$

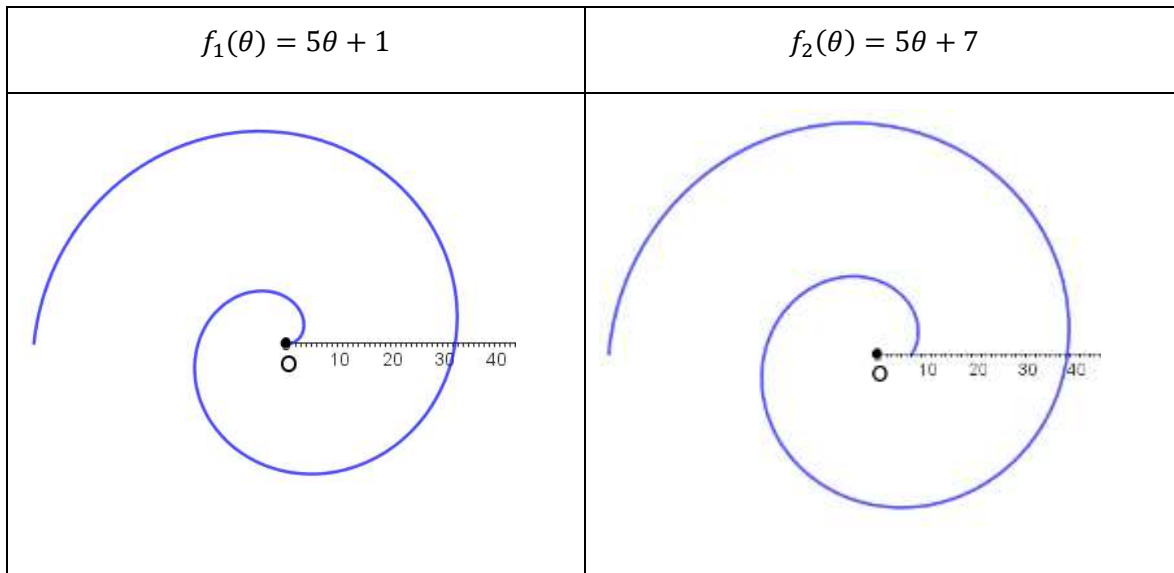
La representación gráfica de estas funciones se presenta a continuación con una ventana de visualización del dominio en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$.

Tabla 11 funciones grado 1 diferentes con amplitud equivalente.

$f_1(\theta) = 5\theta + 1$	$f_2(\theta) = 5\theta + 7$
	

Ahora, con el propósito de visualizar de mejor la relación entre funciones de esta familia, podemos tomar dos funciones con dominio \mathbb{R}^+ , como se observa en la *tabla 11*.

Tabla 12 funciones grado 1 diferentes con amplitud equivalente con $\theta \in R^+$.



Claramente las funciones tienen representaciones diferentes, y si se evalúa cada función en $\theta = 0$, se observa que b representa la coordenada de un punto de corte de la función con el eje polar. Sin embargo, es claro que algebraicamente se puede transformar una función a partir de la otra simplemente sumando un valor constante 6, así, por ejemplo

$$\begin{aligned}
 f_2(\theta) &= f_1(\theta) + 6 \\
 &= 5\theta + 1 + (6) \\
 &= 5\theta + 7
 \end{aligned}$$

Pero geométicamente ¿qué otro significado tiene tal transformación? Observando las gráficas de las funciones presentadas, se puede concluir que al adicionar un valor cualquiera a una función de grado 1, la espiral obtiene una transformación de rotación.

Por lo tanto, dos funciones de primer orden diferentes, pero de amplitud equivalente, corresponden gráficamente, a dos espirales tal que al realizar cierta rotación a una espiral se obtiene la otra.

Ahora, la pregunta que surge naturalmente debería ser: si se realiza una adición en la variable independiente θ ¿Qué pasa con la función?

Para responder a esta pregunta, realizaré el trabajo algebraico correspondiente.

Dada una función $\rho = a\theta + b$, realizar una adición de un valor fijo h en la variable independiente θ se obtiene lo siguiente

$$\rho = a(\theta + h) + b$$

$$\rho = a\theta + ah + b$$

$$\rho = a\theta + (ah + b)$$

Dado que la amplitud a , el término independiente b y el valor adicionado h son números reales, entonces $ah + b$ también es un número real. Con lo cual se puede reescribir la anterior expresión de la siguiente forma.

$$\rho = a\theta + b_1, \text{ con } ah + b = b_1$$

Es decir que adicionar un valor en la variable independiente resulta equivalente a adicionar algún valor en la variable dependiente. Es decir que también genera una rotación en la gráfica de la espiral de grado 1.

Dado que las transformaciones obtenidas anteriormente adicionando valores fijos a ρ y θ generan rotaciones de la espiral de primer grado con respecto al polo y que la variable θ representa la distancia angular en el sistema de coordenadas polares, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema espiral – rotación

Dadas funciones de grado 1 e igual coeficiente de amplitud $f(\theta) = a\theta + b_1$ y $h(\theta) = a\theta + b_2$ tal que $b_2 - b_1 = k$ entonces la segunda función h equivale a una rotación de la primera función f de $\frac{k}{a}$ radianes en sentido horario.

Demostración

Dadas las funciones $f(\theta) = a\theta + b_1$ y $h(\theta) = a\theta + b_2$, Entonces existe un valor x el cual al adicionarlo a la primera función f en la variable independiente da como resultado la segunda función h . Algebraicamente esto significa que

$$a(\theta + x) + b_1 = a\theta + b_2$$

Ahora basta con despejar el valor x para determina cual es la rotación realizada en la espiral.

$$a\theta + ax + b_1 = a\theta + b_2$$

$$ax = b_2 - b_1$$

$$ax = k$$

$$x = \frac{k}{a}$$

Por lo tanto, al rotar $\frac{k}{a}$ (con $k = b_2 - b_1$) la gráfica de la primera función $f(\theta) = a\theta + b_1$ se obtiene la segunda función $h(\theta) = a\theta + b_2$.

■ QED

Ejemplo:

Para este ejemplo retomare dos funciones ya presentadas y graficadas anteriormente.

Sean las funciones $f_1(\theta) = 5\theta + 1$ y $f_2(\theta) = 5\theta + 7$.

Se tiene que $k = b_2 - b_1$ en este caso $k = 6$. Con lo cual podemos aplicar la rotación

$\frac{k}{a} = \frac{6}{5}$ a la primera función

$$f_1\left(\theta + \frac{6}{5}\right) = 5\left(\theta + \frac{6}{5}\right) + 1$$

$$f_1\left(\theta + \frac{6}{5}\right) = 5\theta + 6 + 1$$

$$f_1\left(\theta + \frac{6}{5}\right) = 5\theta + 7$$

Con lo cual, efectivamente, se obtuvo la segunda función $f_2(\theta) = 5\theta + 7$.

En este punto es pertinente hacer una pausa para relacionar los resultados obtenidos hasta el momento con aquellos que ya se conocen. Por ejemplo, es posible establecer comparaciones entre el sistema de coordenadas polares y el sistema cartesiano tradicional, con el cual el lector puede estar más familiarizado. Como se ha evidenciado, al tratarse de una función de primer grado, si se adiciona algún valor a la variable independiente θ o a toda la función $f(\theta)$, se obtiene como resultado una nueva función de primer orden cuya representación gráfica en el sistema de coordenadas polar corresponde a una rotación de la gráfica de la función original. De igual manera, si observamos la representación gráfica de funciones de primer orden en el plano cartesiano usual, las cuales corresponden a rectas, alguna transformación de la misma naturaleza genera una traslación de la recta. De este modo, puede considerarse análogo que, independientemente del sistema de representación, a

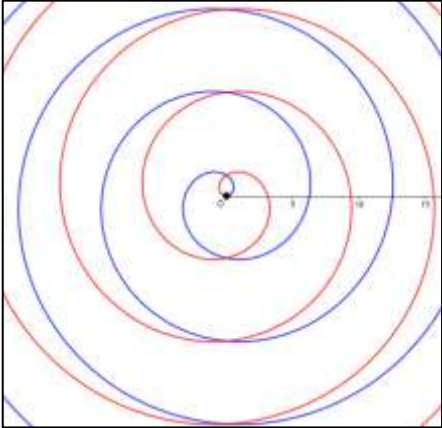
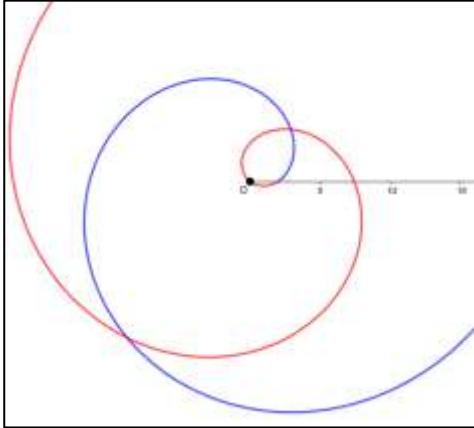
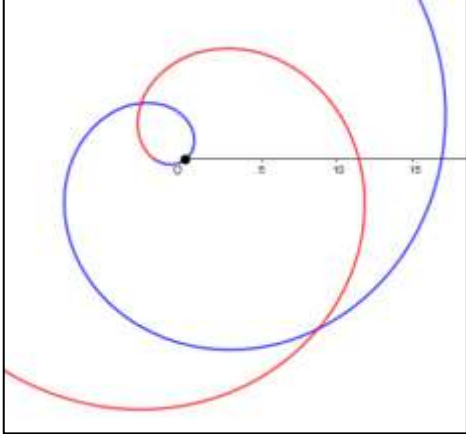
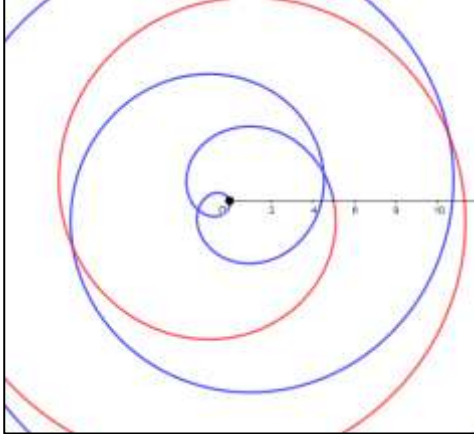
partir de cualquier función de primer orden es posible obtener otra función del mismo tipo y con el mismo coeficiente principal; lo único que varía es el significado de la transformación según el sistema de coordenadas empleado.

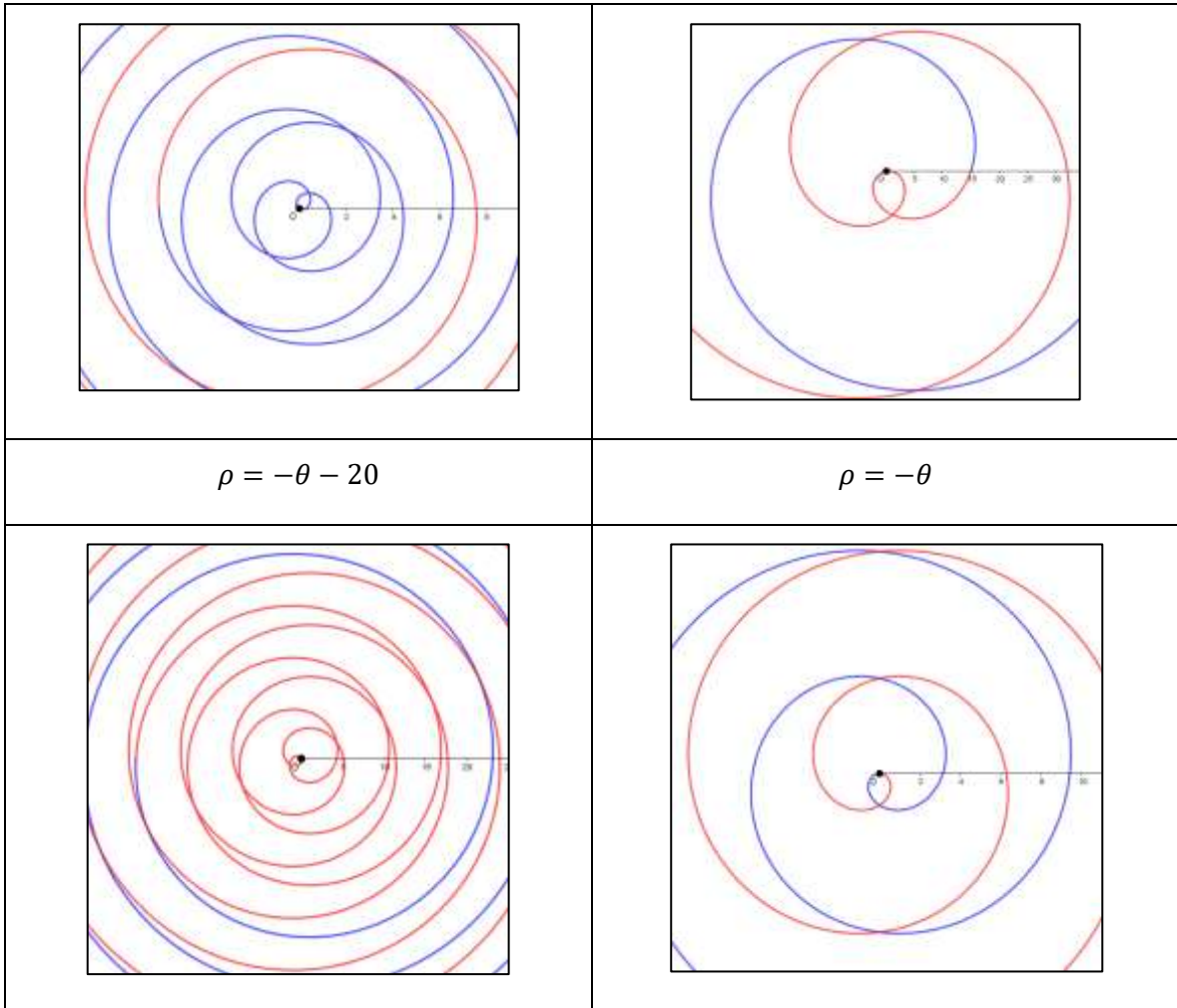
Características de la espiral de primer grado

Ramas de la espiral

En los ejemplos abordados en la sección anterior se han estudiado funciones de primer grado limitando su análisis al subconjunto del dominio de los reales no negativos; esto permitió analizar de mejor forma las propiedades enunciadas. Sin embargo, si se definen tales funciones sobre todos los reales, es posible distinguir dos ramas de la espiral. Puntualmente, llamaremos **la rama positiva de la espiral al conjunto de puntos (ρ, θ) de la curva tales que $\theta \in (0, \infty)$** , y **la rama negativa de la espiral al conjunto de puntos (ρ, θ) de la curva tales que $\theta \in (-\infty, 0)$** y al punto que separa las ramas lo llamaremos **origen de la espiral**. En la *Tabla 12* se tiene la representación de varias funciones de primer orden en donde la rama positiva aparece de color azul y la rama negativa de color rojo. Teniendo en cuenta lo anterior, cabe destacar que el **origen de la espiral** es colineal al **eje polar**, lo cual, aunque puede parecer trivial no deja de ser importante, pues este punto se obtiene, en la función, para el valor $\theta = 0$, y naturalmente pertenece a la recta que contiene al eje polar.

Tabla 13 Espirales de primer grado

$\rho = \theta$	$\rho = 3\theta + 2$
	
$\rho = 3\theta - 2$	$\rho = -\theta + 5$
	
$\rho = \frac{\theta}{2} - 6$	$\rho = 5\theta + 15$



Por otro lado, dada una función de primer grado $f(\theta) = a\theta + b$, se sabe que el origen de la espiral tiene una distancia lineal b del polo y que su amplitud $|a|2\pi$ representa la distancia lineal entre dos cortes consecutivos de la espiral y cualquier rayo con origen el polo, en particular el eje polar. Con esto se obtiene que el siguiente punto de intersección de la rama positiva de la espiral y el eje polar está a una distancia $2a\pi$ del origen de la espiral en el sentido del rayo \overrightarrow{OB} . Es decir, la espiral finaliza su primera vuelta, partiendo del *origen de la espiral*, en $F(b + 2a\pi, 2\pi)$. (ver Figura 21) y que en general la rama positiva de la función interseca al eje polar en los puntos de la forma $(b + 2ak\pi, 2k\pi)$ con k natural.

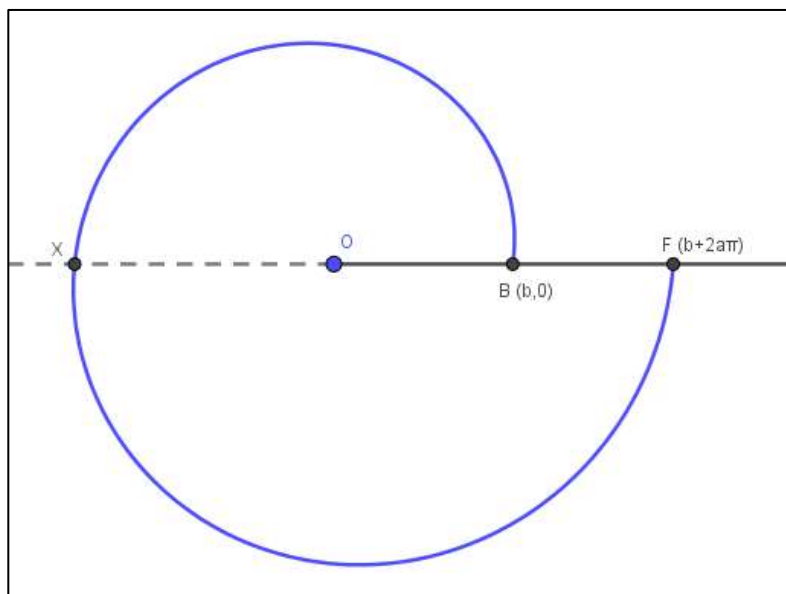


figura 20: Cortes espiral grado uno con el eje polar

Ahora si analizamos la espiral de la Figura 21 partiendo de su origen B hacia el final de su primera vuelta en F , es claro que existe otro corte con la recta que contiene al eje polar, a saber, el punto X . Este punto se encuentra a mitad del recorrido de la espiral. Es decir que las coordenadas del punto X se pueden determinar fácilmente adicionando a b (la distancia del polo a el origen de la espiral) la mitad de lo que dista el origen de la espiral con el final de la espiral (en su primera vuelta), es decir $a\pi$. Por lo tanto, se obtiene la coordenada $X(a\pi + b, \pi)$. Ahora, se sabe que el punto X tiene como dista $b + a\pi$ del polo O pero se puede observar gráficamente el punto X naturalmente está ubicado en el rayo opuesto al eje polar, es decir que su distancia lineal se le puede asignar también $-b - a\pi$.

Por lo tanto, ya resulta fácil determinar todos los cortes que tiene la espiral con el eje polar (y su proyección en el rayo opuesto). Ya que cada par de cortes consecutivos se encuentran a distancia $2a\pi$. En el sentido del eje polar, partiendo del origen de la espiral B

con distancia lineal b . Y en el sentido opuesto al eje polar, partiendo de X con distancia lineal $-b - a\pi$.

Cabe aclarar que los cortes que se obtienen partiendo de B tienen distancias angulares de la forma $(2k)\pi$. Mientras que los cortes que se obtienen partiendo de X tienen distancias angulares de la forma $(2k + 1)\pi$. Esto para todo k entero.

Ejemplo: sea la función $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$.

Se sabe que el origen de la espiral está en el punto $B(5\pi, 0)$, y que también tiene corte (en la proyección del eje polar) en $X(7\pi, \pi)$. Y que a partir de estos puntos B y X los siguientes cortes están cada 4π unidades. En la siguiente tabla se determinan algunos cortes consecutivos partiendo de B y X respectivamente.

Tabla 14 cortes de la función $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$ con el eje polar.

$B(5\pi, 0)$	$(9\pi, 2\pi)$	$(13\pi, 4\pi)$	$(17\pi, 6\pi)$	$(21\pi, 8\pi)$	$(25\pi, 10\pi)$
$X(7\pi, \pi)$	$(11\pi, 3\pi)$	$(15\pi, 5\pi)$	$(19\pi, 7\pi)$	$(23\pi, 9\pi)$	$(27\pi, 11\pi)$

De esta forma se observa que los puntos de corte de la rama positiva de la función $\rho = 2\theta + 5\pi$, se convierten en herramientas para esbozar su gráfica. En cada una de las siguientes figuras se indica la ventana de visualización de acuerdo con el intervalo del dominio.

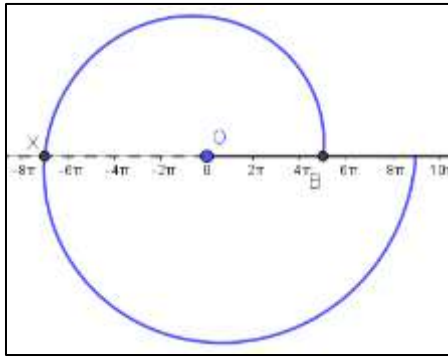


Figura 21 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in [0, 2\pi]$

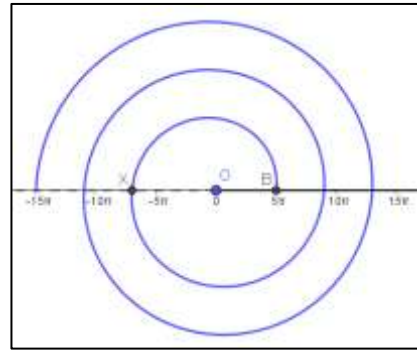


Figura 22 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in [0, 5\pi]$

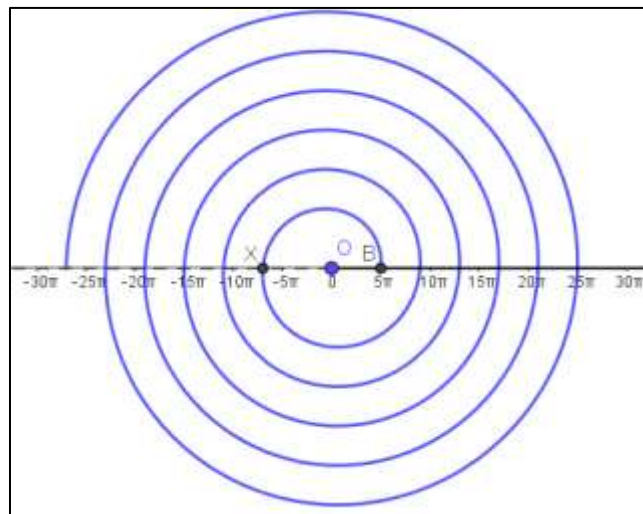


Figura 23 $f(\theta) = 2\theta + 5\pi$, con $\theta \in [0, 11\pi]$

Ahora, con la información que se conoce de la espiral de grado uno, se puede generalizar los puntos de corte del con el eje polar o el rayo opuesto y así poder bosquejar y analizar la curva en cualquier intervalo de su dominio.

Dado que para una función de primer grado de la forma $\rho = a\theta + b$ se sabe que el origen está en $B(b, 0)$ y que a partir de este punto se pueden determinar todos los demás cortes con el eje polar, se obtiene la siguiente información respecto a la distancia lineal de cada corte.

Tabla 15 Cortes de la espiral en dirección al eje polar.

Punto de corte	B	F_1	F_2	F_3
Distancia lineal	b	$b + 2a\pi$	$b + 4a\pi$	$b + 6a\pi$

Tabla 16 Cortes de la espiral en dirección opuesta al eje polar.

Punto de corte	B	X_1	X_2	X_3
Distancia lineal	b	$-b - a\pi$	$-b - 3a\pi$	$-b - 5a\pi$

Dada la naturaleza de la espiral y su construcción, en la *rama positiva* que se está analizando, los puntos de corte, partiendo del origen con el eje polar, se encuentran a lo largo de la espiral en el siguiente orden: $B, X_1, F_1, X_2, F_2, X_3, F_3$ y así sucesivamente. Para esta nueva sucesión, denotaremos los cortes con el eje polar como C_k , donde k representa la posición del punto en la sucesión o también se puede entender como el k -ésimo corte de la espiral con el eje polar.

Ya que el punto $B(b, 0)$ corresponde justamente con el origen de la espiral, en la notación de cortes C_k , este será denotado como C_0 . Por lo tanto, con base en la sucesión de cortes obtenida, se puede determinar que el k -ésimo corte de la espiral C_k con el eje polar tiene distancia lineal $(-1)^k(b + ka\pi)$, para todo k natural.

Ahora, podemos analizar lo correspondiente a la rama negativa. Es decir, determinar en qué puntos la rama negativa corta a la recta que contiene al eje polar. Para ello tenemos en cuenta que para esta rama $\theta \in (-\infty, 0)$, y que, partiendo del origen de la espiral, el punto $(b, 0)$, pero siguiendo la trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj, tenemos

que, al realizar la primera vuelta de la espiral, en la *rama negativa*, esta finaliza en el punto $E(b - 2a\pi, -2\pi)$.

A partir de ahora, todo el razonamiento es análogo a lo realizado en la *rama positiva* de la espiral, pues en la *rama negativa*, también debe existir un corte entre la espiral y el eje polar. Tal corte debe estar en el rayo opuesto a \overrightarrow{BE} , es decir en sentido al eje polar, y se debe encontrar a mitad del recorrido angular, es decir en el ángulo $\theta = -\pi$ y a su vez conservar una proporcionalidad en la distancia lineal de acuerdo con el recorrido realizado. Por lo tanto, tal corte se encuentra en el punto Y cuya distancia lineal es $-b + a\pi$.

Con lo anterior se pueden obtener todos los puntos de corte de la espiral con la recta que contiene al eje polar partiendo del origen de la espiral $B(b, 0)$. En el sentido opuesto al eje polar, es decir sobre el \overrightarrow{BE} se tienen puntos de distancia lineal $b - 2a\pi, b - 4a\pi, b - 6a\pi, b - 8a\pi$ y así sucesivamente. En el sentido al eje polar, es decir sobre el \overrightarrow{BY} , se tienen que puntos de corte tienen distancia lineal $-b + a\pi, -b + 3a\pi, -b + 5a\pi, -b + 7a\pi$ y así sucesivamente.

Para ejemplificar este resultado, se tomará como ejemplo la misma función presentada para los cortes de la rama positiva: $\rho = 2\theta + 5\pi$.

En esta función se obtienen los siguientes puntos de corte en la rama negativa:

$$C_0(5\pi, 0), C_{-1}(3\pi, -\pi), C_{-2}(-\pi, -2\pi), C_{-3}(-\pi, -3\pi), C_{-4}(-3\pi, -4\pi), C_{-5}(-5\pi, -5\pi),$$

$$C_{-6}(-7\pi, -6\pi), C_{-7}(-9\pi, -7\pi), C_{-8}(-11\pi, -8\pi)$$

Se puede verificar tales resultados graficando la función con una ventana de visualización para $\theta \in (-8\pi, 0]$:

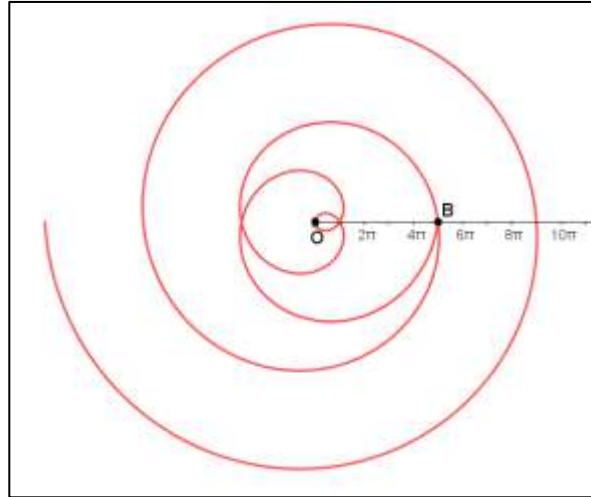


Figura 24 rama negativa función $\rho = 2\theta + 5\pi$.

Es decir que, para la *rama negativa*, se obtiene un resultado análogo a la *rama positiva*. Y así se puede generalizar una expresión para determinar todos los cortes de la espiral de grado uno. Por lo tanto, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema cortes espiral grado uno

Dada una función de primer grado de la forma $\rho = a\theta + b$, su grafica corta a la recta que contiene al eje polar en infinitos puntos. El k -esimo corte C_k de la espiral con el eje polar tiene distancia lineal $(-1)^k(b + k\pi)$, para todo k entero.

La demostración del teorema enunciado se encuentra implícita en los razonamientos realizados anteriormente.

Intersección con la espiral

Como se pudo evidenciar anteriormente, se han estudiado las intersecciones de la espiral de primer grado con la recta que contiene al eje polar considerando las dos ramas, llegando a gráficas como la que se muestra en la Figura 26.

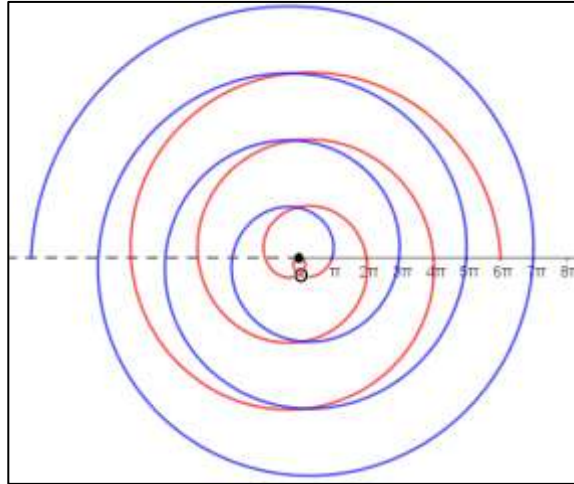


Figura 25 Ejemplo grafica función $\rho = \theta + \pi$.

Como se puede ver, este tipo de espirales presentan, aparte de las infinitas intersecciones con la recta que contiene al eje polar, algunas intersecciones consigo misma. Estas intersecciones serán denominadas **nudos** de la espiral.

Definición: nudo de la espiral

Decimos que un punto de una función f es un nudo si y solo si los puntos de coordenadas diferentes $(f(\theta_1), \theta_1)$ y $(f(\theta_2), \theta_2)$ son puntos de **coordenadas equivalentes**⁸.

Para determinar los nudos que tiene una espiral de primer grado empezaremos por determinar el nudo más cercano al polo. Como ya se mencionó anteriormente, las funciones de grado uno, siempre pasan por el polo. Así que al ser este un punto característico de todas las espirales de grado uno (sin importar su amplitud u origen), resulta un punto de partida apropiado para determinar los nudos de estas funciones.

⁸ En la primera parte del capítulo ya se ha definido **coordenadas equivalentes**.

Para comenzar el análisis, se determinan los nudos de la función $f(\theta) = \theta$ cuya gráfica aparece en la Figura 23.

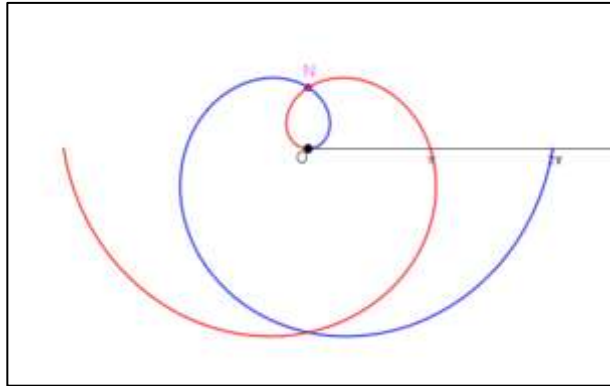


Figura 26 Gráfica función $\rho = \theta$, con $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$

Como se puede observar, gráficamente, el nudo más cercano al polo es el punto N . Se puede afirmar que N es un nudo ya que en la gráfica se observa que N pertenece a la rama negativa de la espiral y a su vez pertenece a la rama positiva. Y como los intervalos donde están definidas cada una de las ramas son disyuntos, naturalmente existen dos coordenadas diferentes que son equivalentes.

El **Teorema Punto – infinitas coordenadas** indica que si un punto tiene coordenada de la forma (ρ, θ) , entonces también tiene infinitas coordenadas equivalentes de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$ o de la forma $(-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$ para todo k entero. Ya que se está abordando una función (en este caso de grado 1) entonces si el punto de coordenada (ρ, θ) pertenece a la función, entonces es imposible que cualquier punto de la forma $(\rho, \theta + 2k\pi)$ también pertenezca a la función. Esto se obtiene automáticamente de la **definición de función de primer grado**.

Es decir que el nudo N que se está determinando en la función $\rho = \theta$ tiene coordenadas equivalentes de la forma (ρ_1, θ_1) y $(-\rho_1, \theta_1 + (2k + 1)\pi)$, para algún k entero.

Por otro lado, se puede determinar el o los valores del ángulo θ_1 en el intervalo $[0, 2\pi]$ para los cuales hay nudos empleando las expresiones de la función que satisfacen las parejas ordenadas.

$$\rho_1 = \theta_1$$

$$-\rho_1 = \theta_1 + (2k + 1)\pi$$

Sustituyendo la expresión de ρ_1 de la primera igualdad en la segunda se obtiene

$$-\theta_1 = \theta_1 + (2k + 1)\pi$$

$$-2\theta_1 = (2k + 1)\pi$$

$$\theta_1 = -\frac{(2k + 1)\pi}{2}$$

Sin pérdida de generalidad, suponiendo θ_1 positivo, los únicos valores k para los cuales θ_1 pertenece al intervalo dado son $k = -1$ o $k = -2$. Entonces se tienen dos opciones $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ o $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ respectivamente.

Así, el punto N puede tener como coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Gráficamente se puede determinar que la coordenada que satisface el nudo N , el cual se estaba determinando, es $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Y esta coordenada pertenece a la rama positiva. Luego la coordenada equivalente en la rama negativa es $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

A pesar de que se obtuvo otro valor angular que corresponde a un nudo en la espiral, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, vale la pena recordar que el nudo que se pretendía encontrar es el más cercano al polo. Por lo tanto, se afirmó inmediatamente que el nudo N se encuentra en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pero el siguiente valor encontrado no será descartado, pues efectivamente se tiene otro nudo en el punto $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ cuya coordenada equivalente en la función es $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$.

Como se muestra a continuación:

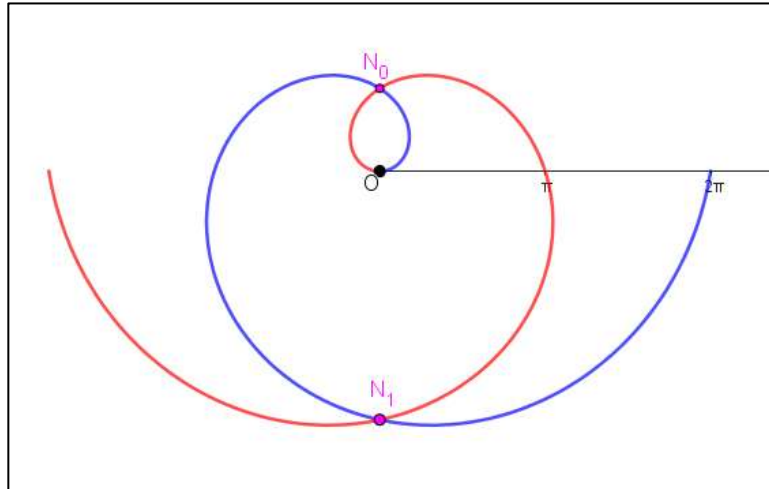


Figura 27 Nudos en la función $\rho=\theta$ con $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$.

A partir de estos nudos se pueden determinar todos los demás nudos que existen en la espiral. Pues todos estos nudos se encuentran sobre la misma recta, y cada par de puntos consecutivos que sean nudos de la espiral conservan una distancia determinada por la amplitud de la espiral.

Realizando un razonamiento análogo, podemos determinar las coordenadas de los nudos para una espiral cuya función sea de la forma $\rho = a\theta + b$, pues se debe cumplir que

$$\rho_1 = a\theta_1 + b$$

$$-\rho_1 = a(\theta_1 + (2k + 1)\pi) + b$$

Sustituyendo el valor de ρ_1 de la primera igualdad en la segunda, se obtiene

$$-(a\theta_1 + b) = a(\theta_1 + (2k + 1)\pi) + b$$

$$-a\theta_1 - b = a\theta_1 + a(2k + 1)\pi + b$$

$$-2a\theta_1 = a(2k + 1)\pi + 2b$$

$$\theta_1 = -\frac{(2k + 1)\pi}{2} - \frac{b}{a}$$

Ahora, θ_1 es un valor en función de b , a y algún k entero. En particular para $k = -1$ se obtiene que los nudos en la espiral de primer grado son colineales a la recta $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}$.

Por lo tanto, para una función de grado uno $\rho = a\theta + b$, existe un nudo en $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}$ y se encuentra a distancia $\rho = \frac{a\pi}{2}$ del polo. Con esta coordenada resulta fácil, dadas las características de la espiral, determinar muchos más nudos.

Dado que no se pudo determinar con exactitud el primer nudo sobre la rama positiva de la espiral, se tomará como punto de referencia el nudo encontrado anteriormente: $\left(\frac{a\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$. Este será denotado como N_0 . A partir de este punto se sabe que, sobre el $\overrightarrow{ON_0}$, existen infinitos puntos de la espiral que intersecan tal rayo. Adicionalmente como el punto $N_0 \left(\frac{a\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$ es un nudo, quiere decir que existe otra coordenada equivalente que satisface la función y esta es $\left(-\frac{a\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$. Luego, para $N_0 \left(\frac{a\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$ se tienen todos los puntos de la forma $\left(\frac{a\pi}{2} + 2ka\pi, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} + 2k\pi\right)$, con k entero, que pertenecen a la espiral y al $\overrightarrow{ON_0}$. A su vez, para $N_0 \left(\frac{a\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$ se tiene que todos los puntos de la forma $\left(\frac{a\pi}{2} + 2ka\pi, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} + 2k\pi\right)$, con k entero, también pertenecen a la espiral y al rayo. Es decir que tales puntos también son nudos de la espiral por definición.

Antes de llegar a la generalización de los nudos, se puede observar que los nudos se han determinado con expresiones y regularidades análogas a las vistas al estudiar los cortes de la espiral con la recta que contiene el eje polar. La diferencia, aparte del ángulo del rayo que determina los puntos, es la distancia lineal del punto inicial. Para los cortes con el eje polar el punto de partida es el origen de la espiral $B^1(b, 0)$ y para los nudos de la espiral el punto de partida es el nudo más cercano al polo $N_0\left(\frac{a\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$.

Así, se tiene que los nudos de la espiral se encuentran en las coordenadas de la forma $\left((-1)^k\left(\frac{a\pi}{2} + ka\pi\right), \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$, para todo k entero. Estos puntos generan una sucesión cuyo primer elemento es el nudo más cercano al polo. Así, se presenta el siguiente teorema.

Teorema nudos espiral de primer grado.

Dada una función de primer grado de la forma $\rho = a\theta + b$, la espiral de primer grado tiene nudos en los puntos de la forma $N_k\left((-1)^k\left(\frac{a\pi}{2} + ka\pi\right), \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{b}{a}\right)$ para todo k entero.

Funciones Polinómicas de Segundo Grado

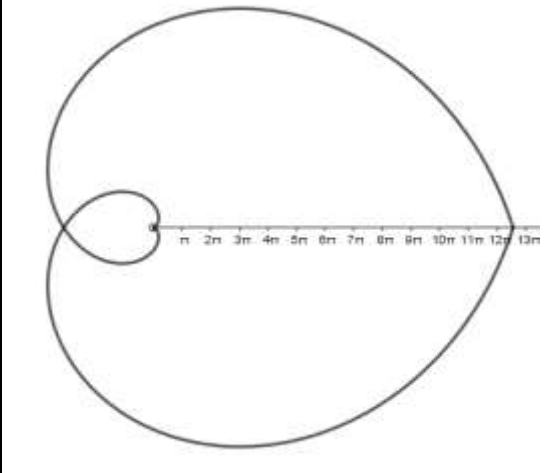
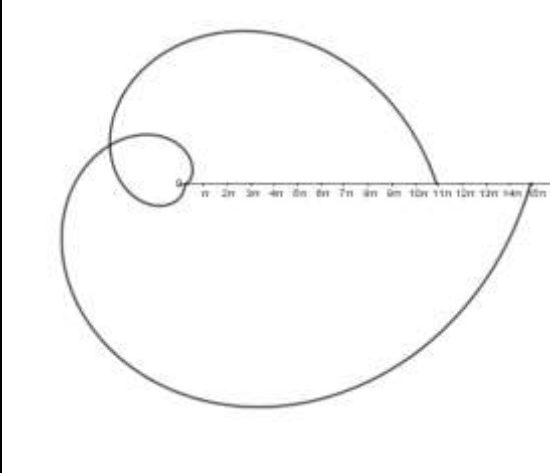
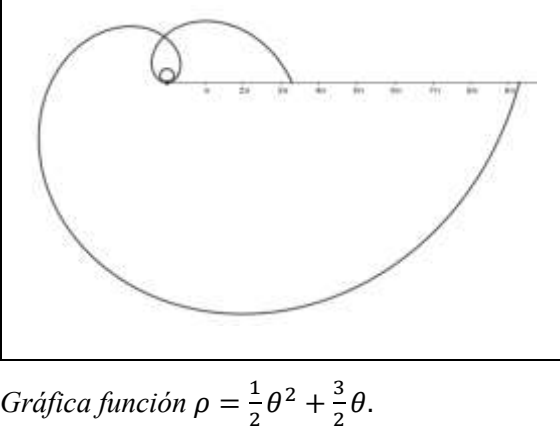
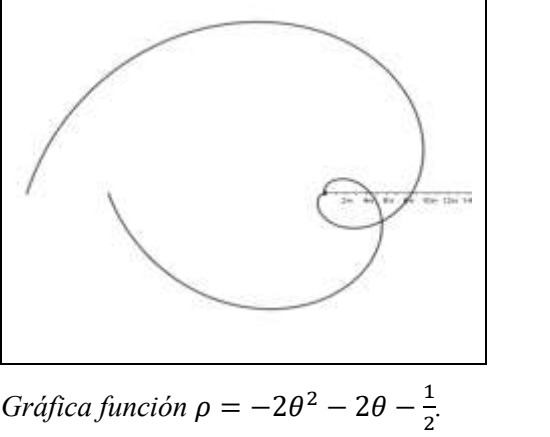
Las funciones de segundo grado son aquellas funciones polinómicas tal que la variable independiente de mayor grado es θ^2 , es decir son aquellas funciones de la forma $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$, con $a \neq 0$. Es interesante observar que, a partir del recorrido histórico realizado, no se han encontrado curvas que correspondan a funciones de segundo grado.

Hay que tener en cuenta que a pesar de usar las mismas letras para los coeficientes de las funciones de segundo grado y las de primer grado, no debe confundirse su significado.

De manera similar al razonamiento realizado para funciones de primer grado, nos interesa determinar qué significado tienen los coeficientes de una ecuación de segundo grado, es decir qué relación hay entre estos coeficientes y algunas propiedades (algebraicas o geométricas) de la función. $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$.

Para iniciar el estudio de funciones polinómicas de segundo orden, se presentan algunas funciones y sus respectivas graficas con una ventana de observación para valores de θ que se encuentren entre -2π y 2π .

Tabla 17 Espirales de segundo grado.

	
<p>Gráfica función $\rho = \theta^2$.</p>	<p>Gráfica función $\rho = \theta^2 + \theta + 1$.</p>
	
<p>Gráfica función $\rho = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{2}\theta$.</p>	<p>Gráfica función $\rho = -2\theta^2 - 2\theta - \frac{1}{2}$.</p>

Las primeras observaciones que se pueden hacer sobre las funciones de grado dos son:

- Las gráficas resultan ser espirales notoriamente diferentes a las de grado uno.
- Al ser una función cuadrática, la espiral “se abre” con mayor rapidez. Esto significa que, con poco aumento angular, la distancia lineal aumenta bastante.
- Las gráficas, aparentemente, no comparten invariantes entre si respecto a sus características. Es decir que de acuerdo con los valores que se le asignen a a , b y c la espiral de segundo grado tendrá una forma en particular.
- La espiral de segundo grado no siempre contiene al polo. A simple vista existen diferentes situaciones para cualquier espiral: puede no pasar por el polo, puede pasar por el polo más de una vez e incluso parece que puede acercarse al polo y llegar a él sin atravesarlo.

Estas son las primeras afirmaciones a las que se puede llegar con solo observar algunos ejemplos de gráficas de funciones de segundo grado como las presentadas anteriormente. A continuación, se abordarán algunas de estas características.

Ramas de la espiral

Dada una función de segundo grado, se puede hacer distinción entre los puntos de esta que pertenecen al intervalo positivo del dominio de la función y los que pertenecen al intervalo negativo del dominio de la función. Es decir que al igual que en la función de primer grado, las funciones de segundo grado se pueden analizar a partir de sus ramas *positiva* y *negativa*. Así, vale la pena introducir y formalizar las siguientes definiciones que generalizan

algunos términos usados en la sección anterior para funciones polinómicas de cualquier grado:

Definición origen de la espiral

Dada una función polinómica de cualquier grado, el origen de la espiral es el punto para el cual la distancia angular es 0. Es decir, tal punto tiene coordenadas $(\rho(0), 0)$.

Definición rama de la espiral

Dada una función polinómica y su representación gráfica en un sistema de coordenadas polares decimos que:

- la **rama positiva de la espiral** son todos los puntos de la espiral para los cuales $\theta \in (0, \infty)$.
- la **rama negativa de la espiral** son todos los puntos de la espiral para los cuales $\theta \in (-\infty, 0)$.

Dadas las definiciones anteriores, se puede avanzar a uno de los primeros aspectos de las funciones polinómicas de segundo grado.

Cortes con el eje polar

De manera análoga a lo que se analizó para las funciones de primer grado, las funciones de segundo grado, por su naturaleza, intersecan a la recta que contiene al eje polar en infinitos puntos. El primero de ellos, y el cual facilita la identificación de estos puntos de

corte es el origen⁹ de la espiral, que para una función de segundo grado de la forma $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ está dado por el punto $B^2(c, 0)$.

A diferencia de la espiral de primer grado, para una función de segundo grado los pares de puntos consecutivos de corte de la espiral con la recta que contiene el eje polar no tienen la misma distancia. Sin embargo, es natural que exista una regularidad ya que estos puntos están definidos a partir de una función. Así, para una función de segundo grado, los puntos de corte de la rama positiva con la recta que contiene el eje polar, en orden y partiendo del *origen de la espiral*, son puntos cuya distancia lineal está dada por:

Tabla 18 Cortes función de segundo grado

Punto de corte	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
Distancia lineal	0	$-(a\pi^2 + b\pi + c)$	$4a\pi^2 + 2b\pi + c$	$-(9a\pi^2 + 3b\pi + c)$	$16a\pi^2 + 4b\pi + c$

o de forma general, la distancia lineal de cada corte C_k es de la forma $(-1)^k(ak^2\pi^2 + bk\pi + c)$, para todo k natural.

De forma similar, si C_{-k} representan el k – *esimo* corte de la rama negativa de la espiral con la recta que contiene el eje polar, partiendo del *origen de la espiral*, se tiene que a los puntos C_{-k} les corresponde una distancia lineal de la forma $(-1)^k(ak^2\pi^2 - bk\pi + c)$, para todo k natural.

Ajustando algebraicamente las expresiones obtenidas para los cortes de la espiral con la recta que contiene el eje polar se tiene el siguiente teorema:

⁹ Para indicar que un punto es el origen de la espiral se mantendrá la letra B para nombrar tal punto. Esta letra estará acompañada de un super índice el cual indica el grado de la espiral que tiene tal punto como origen. Si el origen de la espiral no presenta un super índice, se asume que es el origen de una espiral de primer grado.

Teorema cortes espiral grado dos

Dada una función de segundo grado de la forma $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$, la distancia lineal del k -ésimo corte C_k de la espiral con la recta que contiene el eje polar es de la forma $(-1)^k(ak^2\pi^2 + bk\pi + c)$, para todo k entero.

La demostración del teorema enunciado se encuentra implícita en los razonamientos realizados anteriormente.

Ejemplo: para la función $\rho = -\theta^2 - 4\theta + 3$ se tiene que los puntos en los que la espiral interseca a la recta que contiene al eje polar (con una aproximación de dos decimales) son:

- La rama positiva:

$$C_1(19.44, \pi), C_2(-61.61, 2\pi), C_3(123.53, 3\pi), \dots$$

- La rama negativa:

$$C_{-1}(-5.70, -\pi), C_{-2}(-11.35, -2\pi), C_{-3}(48.13, -3\pi), C_{-4}(-104.65, -4\pi), \dots$$

- El origen de la espiral:

$$C_0(3, 0)$$

Esta información, permite obtener algunos puntos de la espiral que ayudan a bosquejar la gráfica de la función. En la Figura 29 se presenta la espiral correspondiente con una ventana de visualización para los valores del dominio $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.

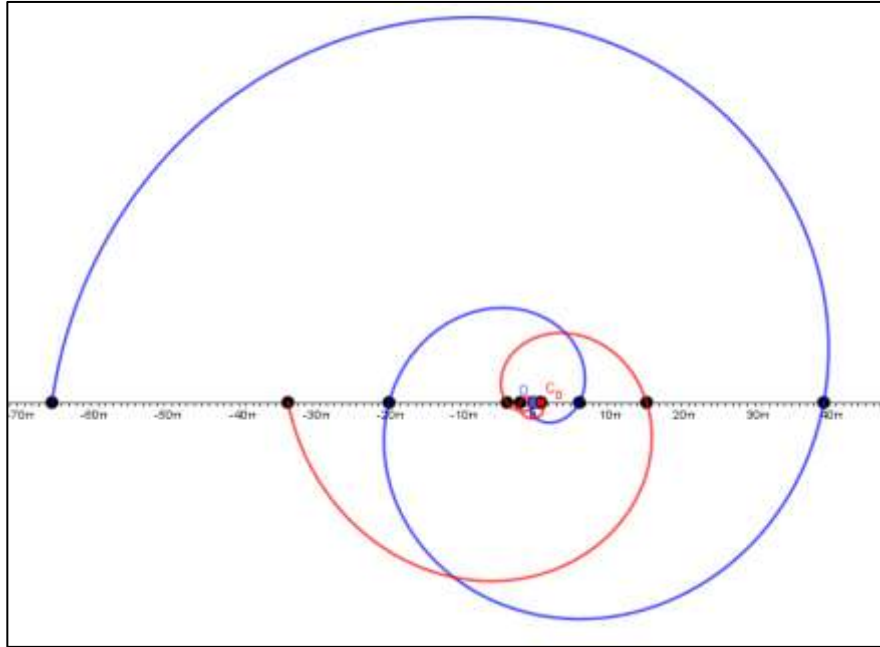


Figura 28 Gráfica función $\rho = -\theta^2 - 4\theta + 3$

Observando la gráfica anterior, se identifica un comportamiento interesante en cercanías al polo, y si se realiza un acercamiento a la gráfica generada en GeoGebra (Figura 30), parece que pasara por el polo más de una vez, lo que significa que esta función tiene un **nudo** en el polo. Pero ¿es esto posible?

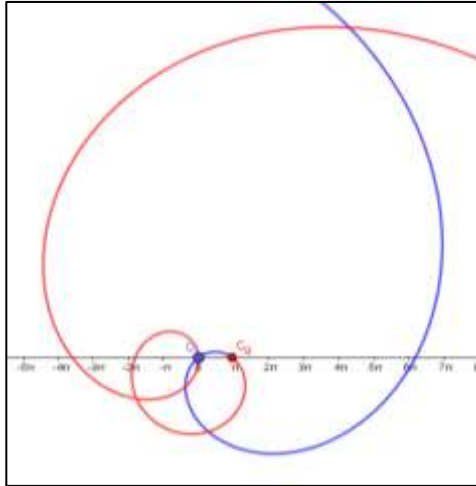
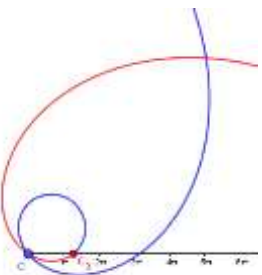
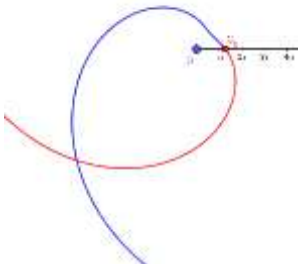
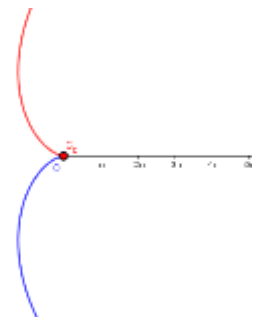


Figura 29 Espiral $\rho = -\theta^2 - 4\theta + 3$ alrededor del polo.

La función de segundo grado y el polo

Para determinar si una función de segundo grado tiene un nudo en el polo, como en el ejemplo anterior, basta con analizar algebraicamente que significa que la curva pase por el polo. Pues como se puede ver en los siguientes ejemplos (Tabla 17), esto no sucede en todos los casos:

Tabla 19 funciones de segundo grado alrededor del polo

 <p>$\rho = -3\theta^2 + 5\theta + 4$</p>	 <p>$\rho = 2\theta^2 - 3\theta + 4$</p>	 <p>$\rho = -7\theta^2$</p>
---	--	---

Al analizar las funciones cuadráticas se identifica que alrededor del polo las gráficas se comportan de alguna de las siguientes formas:

- La espiral tiene un nudo en el polo.
- La espiral no contiene al polo.
- La espiral contiene al polo, pero no tiene nudo en tal punto.

Esto puede verse al examinar la expresión algebraica de la función. Puntualmente,

la función $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ contiene al polo (genere o no un nudo) si existe algún θ real para el cual $f(\theta) = 0$, en otras palabras, si existe alguna distancia angular θ cuya imagen (distancia lineal) es cero. Algebraicamente esto conduce a la ecuación cuadrática:

$$a\theta^2 + b\theta + c = 0$$

que es equivalente a

$$\theta^2 + \frac{b}{a}\theta + \frac{c}{a} = 0$$

Y al completar el cuadrado se llega a

$$\left(\theta + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

De donde

$$\theta = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O de forma equivalente

$$\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es una expresión que puede resultar familiar a cualquier lector. Sin embargo, es importante recordar que se está trabajando en un sistema de coordenadas polares y no cartesianas. Así, la expresión obtenida no determina los cortes con el eje (lo que si ocurre en un sistema cartesiano), sino las distancias angulares para las cuales la espiral de segundo grado coincide con el polo (en el sistema de coordenadas polares).

Ahora, si se analiza el discriminante, es decir el número real $b^2 - 4ac$ se cumple una y solo una de las opciones por ley de tricotomía:

- $b^2 - 4ac < 0$
- $b^2 - 4ac = 0$
- $b^2 - 4ac > 0$

De acuerdo con la opción que satisfaga el discriminante se determina el comportamiento de la espiral alrededor del polo:

Caso 1:

Si $b^2 - 4ac < 0$ quiere decir que el valor de θ es un número complejo, pero dado que θ corresponde a la distancia angular de cada punto de la espira y se está trabajando con base en funciones de variable real en el sistema de coordenadas polares, entonces tal discriminante implica que no existe valor real para θ tal que $f(\theta) = 0$. Es decir, el polo no pertenece a la espiral.

Caso 2:

Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces se obtiene un único valor que satisface la ecuación cuadrática: $\theta = -\frac{b}{2a}$. Es decir que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$ y no existe otro valor para el cual se obtenga la misma distancia lineal. Por lo tanto, el polo pertenece a la espiral, pero no hay nudo en este punto.

Caso 3:

Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real y por lo tanto se obtienen dos valores posibles para θ . $\theta_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\theta_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Esto implica que existen dos valores diferentes para θ tal que $f(\theta) = 0$. Es decir que las coordenadas $(0, \theta_1)$ y $(0, \theta_2)$ pertenecen a la espiral (satisfacen la función) y son coordenadas equivalentes para el polo. Por lo tanto, la espiral tiene un nudo en el polo.

De esta forma se enunciar el siguiente teorema.

Teorema función de segundo grado – polo

Dada una función de segundo grado de la forma $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$:

- i) Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la espiral no contiene al polo.
- ii) Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces existe un único punto para el cual la espiral contiene al polo.
- iii) Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la espiral tiene un nudo en el polo.

Por ejemplo, si consideramos la función $\rho = 30\theta^2$ se sabe que:

1. La función tiene origen en el polo.

2. Se pueden obtener los cortes con la recta que contiene al eje polar eje polar. Para la rama positiva se tiene corte en $C_1(-30\pi^2, \pi)$ y para la rama negativa se tiene corte en $C_{-1}(-30\pi^2, -\pi)$. Por definición los cortes C_1 y C_{-1} tienen *coordenadas equivalentes*, lo que implica que en C_1 (o bien C_{-1}) la espiral tiene un nudo.
3. Por lo anterior y dada la regularidad que se tiene de los cortes de la espiral con el eje polar todos los puntos C_i y C_{-i} poseen coordenadas equivalentes, para todo i entero. Es decir que todos los cortes de la espiral con la recta que contiene al eje polar son nudos.
4. La espiral solo pasa por el polo una única vez, pues $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$. En este caso, tal punto resulta ser el origen de la espiral $B^2(0,0)$.

A continuación, se presenta una pequeña sección de la espiral alrededor del polo.

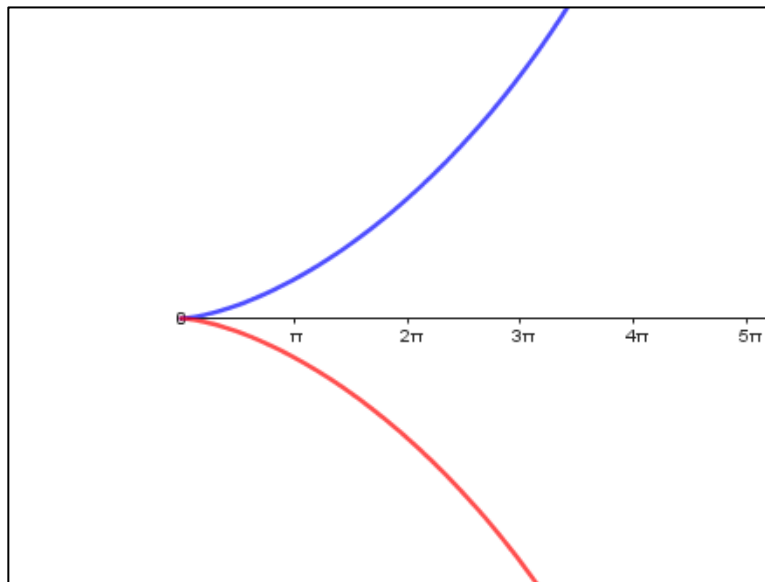


Figura 30 espiral $\rho = 30\theta^2$ alrededor del polo.

Como ya se había determinado, la espiral pasa por el polo una única vez. Para este caso, el origen de la espiral coincide con el polo. Al observar la gráfica, si partimos del origen

y recorreremos la espiral sobre la rama negativa esta se construye en el sentido de las manecillas del reloj. Mientras que, si partimos del origen y recorreremos la espiral sobre la rama positiva, esta se construye en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Lo que lleva a pensar que cada espiral de segundo orden se puede clasificar en dos subconjuntos, tal que a partir de un punto específico la espiral en un subconjunto del dominio se construye con una orientación (ej.: en el sentido de las manecillas del reloj) y en el otro subconjunto con una orientación opuesta.

Forma canónica de una función de segundo grado

Las funciones estudiadas hasta el momento (de primer y segundo grado) han sido abordadas a partir de su representación algebraica general, ¿abordarlas desde su forma canónica ofrece alguna información adicional sobre la curva?

Se realizará el paso de la función f de segundo grado en su forma de general $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ a su forma canónica con la intención de reconocer alguna otra característica de las espirales de segundo grado. Para ello se considera la ecuación general dada

$$f(\theta) = \rho = a\theta^2 + b\theta + c$$

Dividiendo toda la expresión entre el término principal

$$\frac{\rho}{a} = \theta^2 + \frac{b}{a}\theta + \frac{c}{a}$$

Completando el cuadrado

$$\frac{\rho}{a} = \theta^2 + \frac{b}{a}\theta + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Agrupando y factorizando

$$\frac{\rho}{a} = \left(\theta + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Despejando y factorizando nuevamente

$$\frac{\rho}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \left(\theta + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\frac{1}{a} \left(\rho - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right) = \left(\theta - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

Dado que en el sistema cartesiano la ecuación canónica de segundo grado ofrece información relevante de su gráfica, por ejemplo, el vértice de la parábola. ¿En el sistema polar, la expresión canónica de grado dos da alguna información importante de la curva?

Para poder responder esta pregunta, lo primero que toca responder es si la coordenada $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ pertenece o no a la espiral. Dada la ecuación canónica $\frac{1}{a} \left(\rho - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right) = \left(\theta - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$, es evidente que la coordenada de interés satisface la expresión.

Y ahora, ya que se ha verificado que el punto $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ pertenece a la espiral de segundo grado, la pregunta que surge es: ¿tal punto posee alguna característica especial sobre la espiral?

Analicemos el punto con coordenadas $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$. Dado que $c - \frac{b^2}{4a}$ es un número real, por ley de tricotomía, se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

Caso 1:

Si $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ entonces $b^2 - 4ac = 0$. Así, por el **teorema función de segundo grado – polo**, el punto $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ es el único punto de intersección de la espiral con el polo.

Caso 2:

Si $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ entonces

$$-c + \frac{b^2}{4a} < 0$$

O de forma equivalente

$$\frac{b^2}{4a} - c < 0$$

es decir

$$b^2 - 4ac < 0$$

Así, por el **teorema espiral de segundo grado – polo** se puede afirmar que no existe número real θ_0 para el cual el punto $(0, \theta_0)$ pertenezca a la espiral. Es decir, la espiral **no** pasa por el polo.

Caso 3:

Si $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ entonces

$$-c + \frac{b^2}{4a} > 0$$

de donde

$$\frac{b^2}{4a} - c > 0$$

o

$$b^2 - 4ac > 0$$

Por lo tanto, análogo a los casos anteriores, se puede concluir que la espiral tiene un nudo en el polo.

Para continuar me enfocaré en el último caso (*caso 3*), pues el *caso 1* ya indica que el punto de interés resulta ser el polo. Y el *caso 2*, donde la espiral no pasa por el polo, será abordado más adelante.

Para determinar que característica tiene el punto $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ con respecto al nudo y en general con las espirales de grado 2, es necesario realizar un trabajo algebraico previo. Para lo cual, suponga se tiene una espiral de segundo grado $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ y tal espiral tiene un nudo en el polo. Es decir, se pueden determinar los valores de θ tal que $f(\theta) = 0$ con la expresión obtenida anteriormente.

$$\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es decir que el nudo de la espiral se encuentra en las coordenadas $\left(0, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ y $\left(0, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$.

Sin pérdida de generalidad suponga que $a > 0$. Como $b^2 - 4ac > 0$, entonces el real $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es un número positivo.

Considerando el punto que se está analizando $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, tal punto posee una distancia angular $\theta = -\frac{b}{2a}$.

Ahora, sea α un número real positivo cualquiera. Por la propiedad del buen orden de los números reales se tiene que

$-\frac{b}{2a} > -\frac{b}{2a} - \alpha$	$-\frac{b}{2a} < -\frac{b}{2a} + \alpha$
--	--

Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$-\frac{b}{2a} - \alpha < -\frac{b}{2a} < -\frac{b}{2a} + \alpha$$

Dado que a se supone un real positivo cualquiera, entonces la desigualdad se cumple para $\alpha = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Sustituyendo ese valor α en la desigualdad anterior se obtiene

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < -\frac{b}{2a} < -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En la última expresión se tiene que los extremos de la desigualdad son justamente las distancias angulares del nudo de la espiral en el polo. Y el término que se encuentra en medio es la distancia angular del punto que se está analizando $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$. Es decir que tal punto pertenece al intervalo del dominio $\left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$ y adicionalmente, por definición de la distancia polar, es **punto medio** de las coordenadas que generan el nudo. Lo

cual lleva a proponer la siguiente definición para caracterizar de mejor manera el punto que se está estudiando y a su vez las características de la espiral de segundo grado.

Definición lazo

Dada una espiral y un nudo en ella de coordenadas equivalente (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) , un **lazo de la espiral** es el subconjunto de todos los puntos (ρ, θ) en la espiral para los cuales se cumple que $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Note que la definición de **lazo** no está limitada a funciones de grado dos, sino a espirales cualesquiera. Es decir que se extiende a funciones de grado uno, donde ya se estudiaron los nudos que se pueden obtener en tales funciones, por lo tanto, si se quiere se pueden analizar los lazos que allí se encuentran. Y por supuesto, también se puede extender a funciones polinómicas de grados mayor a 2, si tal objeto resulta de interés cuando se aborden estas funciones.

Nudos de la espiral

El punto que se encontró $\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ de la función de grado dos ha resultado de gran utilidad para interpretar la espiral y su comportamiento alrededor del polo. Este punto, a pesar de no recibir nombre hasta el momento ha demostrado una serie de características que pueden resultar familiares a lo que sucede con el vértice de una función cuadrática estudiada en un sistema de coordenadas rectangulares. Pues la coordenada de este punto tiene una expresión algebraica equivalente al vértice de una parábola en el sistema cartesiano. También comparte la propiedad de ser punto medio de las soluciones (cuando existen) de la ecuación $a\theta^2 + b\theta + c = 0$. En el sistema cartesiano estos puntos se conocen como los cortes con el eje x , en el sistema de coordenadas polares se conocen cortes con el polo.

Por todo lo anterior, resultaría oportuno nombrarlo de tal manera que resulte familiar lo que significa este punto para la función de grado dos. Así surge la siguiente definición

Definición vértice polar

Dada una función de segundo grado de la forma $f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ el **vértice polar** es el punto de la espiral $V_p \left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$.

Por ejemplo, para el caso en el que $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ resulta que el **vértice polar** coincide con el polo y para el *caso 2* en el que la espiral no interseca al polo, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, también se tiene un **vértice polar**, pero este no resulta ser el polo ni estar en un lazo determinado por el polo.

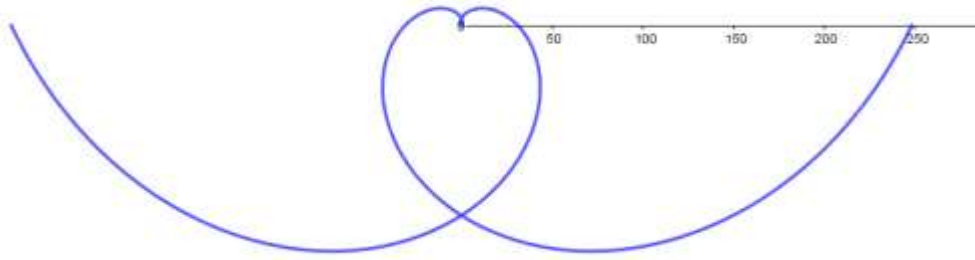
Funciones Polinómicas de Tercer Grado

Las funciones polinómicas de tercer grado son aquellas en las que la mayor potencia de la variable independiente es 3, es decir son funciones de la forma $f(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$, con $a \neq 0$.

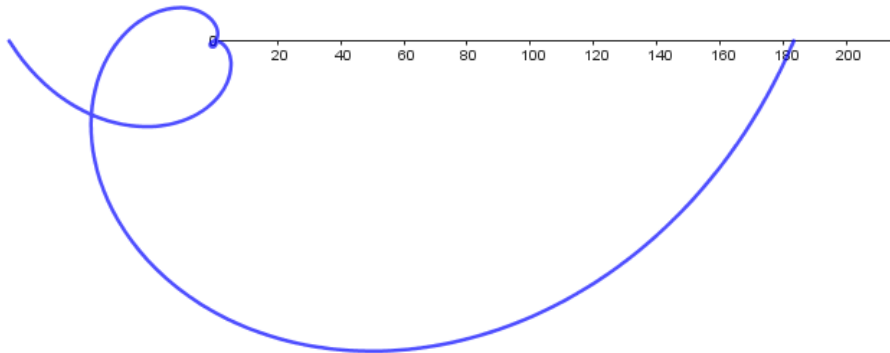
De manera similar al razonamiento realizado para funciones de primer y segundo grado, en este caso, nos interesa determinar qué significado tienen los coeficientes de una ecuación de tercer grado, es decir qué relación hay entre estos coeficientes y algunas propiedades (algebraicas o geométricas) de la función.

Es oportuno iniciar el estudio de funciones polinómicas de tercer orden de forma análoga a los dos casos anteriores. Por lo cual se presentan algunas funciones con su representación gráfica y sus respectivas expresiones algebraicas. Consideremos las funciones cúbicas representadas en la ventana de observación dada por los valores de θ que se encuentren entre -2π y 2π (*Tabla 18*).

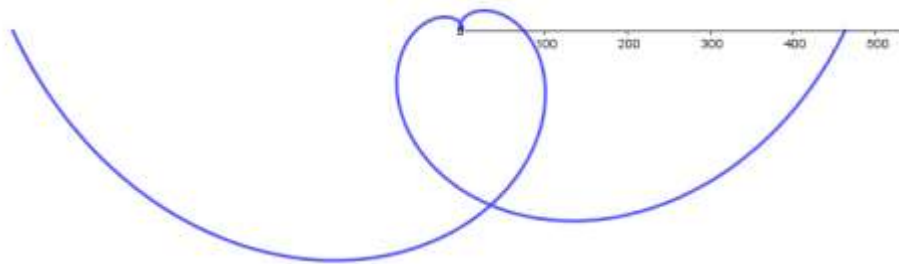
Tabla 20 Ejemplos de funciones de tercer grado



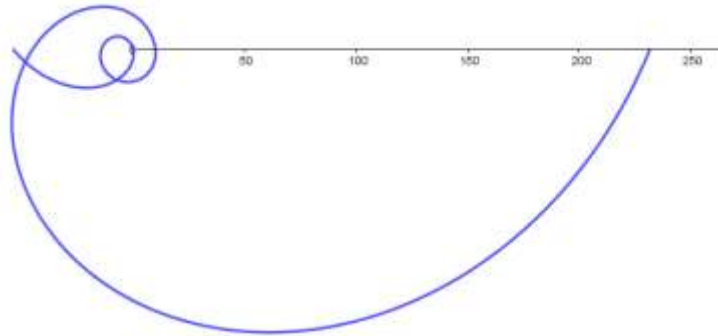
Gráfica función $\rho = \theta^3$.



Gráfica función $\rho = \frac{1}{2}\theta^3 + \frac{3}{2}\theta^2$.



Gráfica función $\rho = 2\theta^3 - \theta^2 + \theta$.



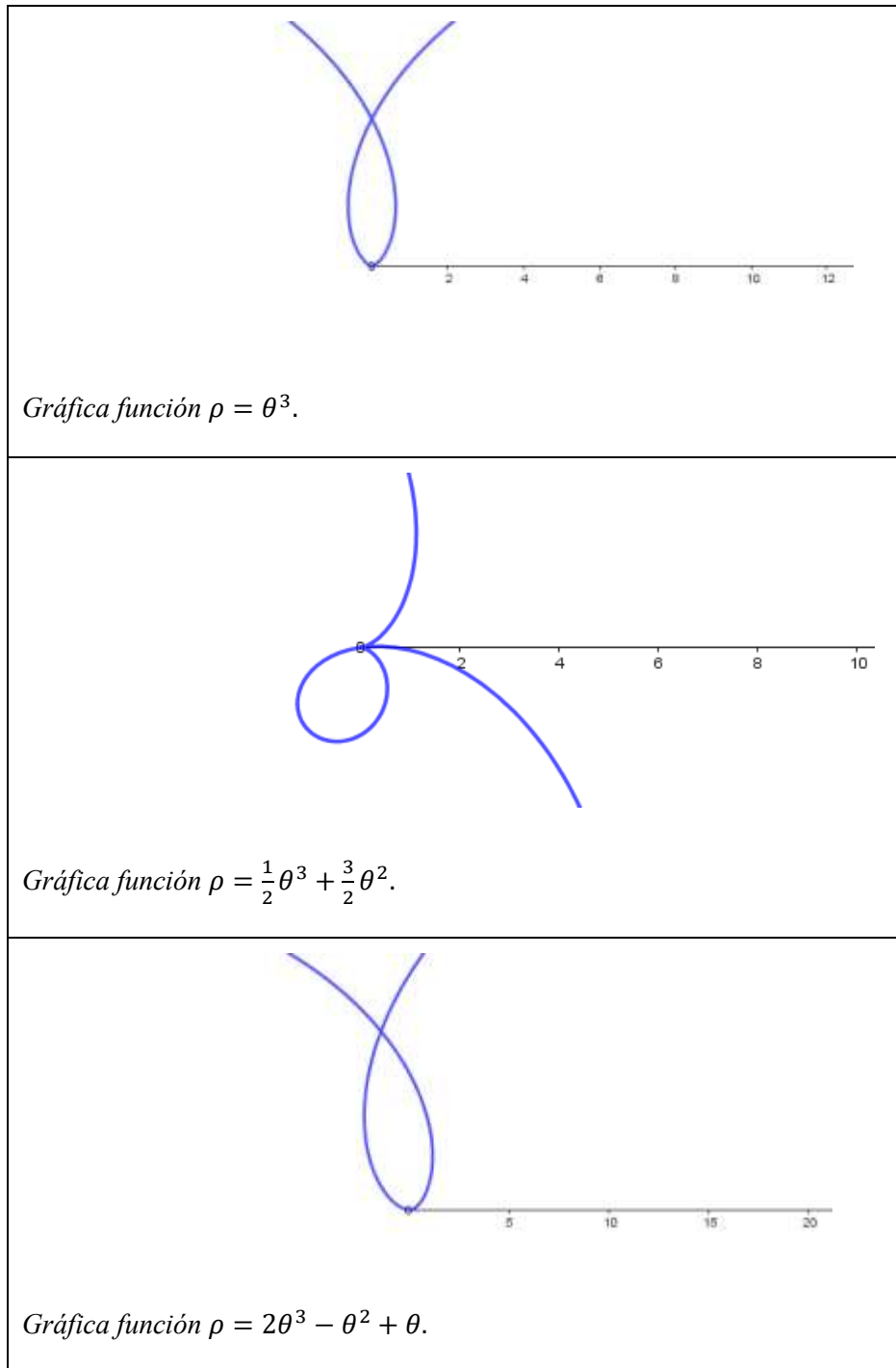
Gráfica función $\rho = \frac{3}{5}\theta^3 + 2\theta^2 - \theta + 10$.

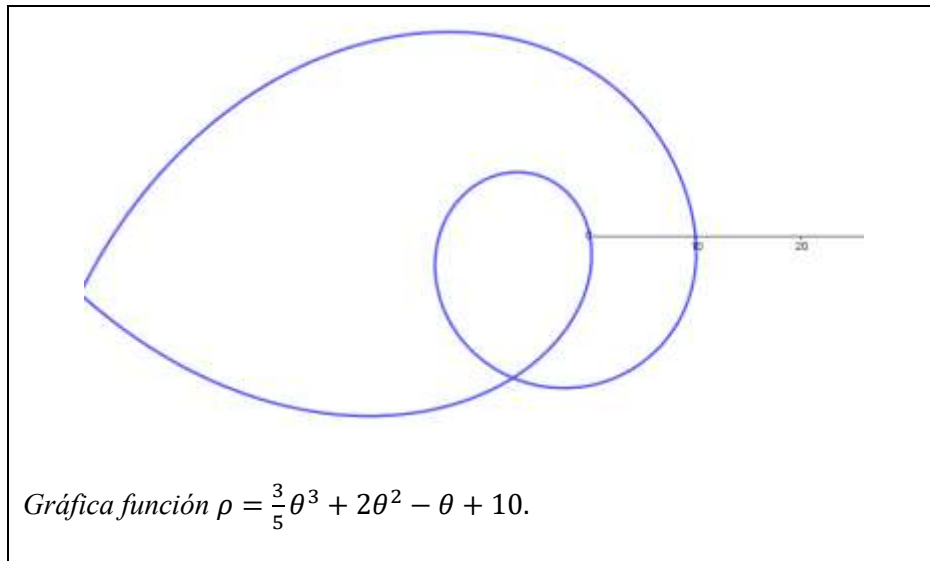
Las primeras observaciones que se pueden hacer sobre las funciones de grado tres son:

- Las gráficas resultan ser espirales notoriamente diferentes a las de grado uno y dos.
- Al ser una función cúbica, la espiral “se abre” con mayor rapidez que en los casos anteriores. Esto significa que, con poco aumento angular, la distancia lineal aumenta mucho más que en las funciones de primer y segundo orden.
- Las gráficas, aparentemente, no comparten invariantes respecto a sus características. Es decir que de acuerdo con los valores que se le asignen a a , b , c y d la espiral de tercer grado puede cambiar su comportamiento.
- La espiral de tercer grado, aparentemente, siempre contiene al polo. A simple vista la espiral de grado tres siempre pasa por el polo y en algunos casos más de una vez.

Con el fin de verificar si la última observación mencionada es válida para este tipo de funciones se presentan los ejemplos anteriores realizando un acercamiento al rededor del polo.

Tabla 21 Ejemplos de funciones de tercer grado alrededor del polo.





A continuación, se abordarán algunas de estas características con mayor detalle.

Cortes Con El Eje Polar

En la sección anterior (funciones polinómicas de segundo grado) se definieron formalmente algunos objetos importantes para el estudio de las espirales, como lo son el origen, las ramas y los cortes con la recta que contiene al eje polar; así como su notación. Por lo cual es importante recordar que estos objetos se extienden a todas las funciones polinómicas, en particular a las de tercer grado.

Las funciones de tercer grado, por su naturaleza, intersecan a la recta que contiene al eje polar en infinitos puntos. El primero de ellos, y el cual facilita la identificación de estos puntos de corte es el origen de la espiral, que para una función de tercer grado de la forma $f(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$ está dado, por definición, por el punto $B^3(d, 0)$.

En una función de tercer grado los pares de puntos consecutivos de corte de la espiral con la recta que contiene el eje polar no tienen la misma distancia. Sin embargo, existe una regularidad ya que estos puntos están dados a partir de una expresión algebraica. Así, para una función de tercer grado, los puntos de corte de la rama positiva con la recta que contiene

el eje polar en orden, partiendo del *origen de la espiral*, corresponden a las siguientes coordenadas:

$$C_0(d, 0)$$

$$C_1(-(a\pi^3 + b\pi^2 + c\pi + d), 0)$$

$$C_2(8a\pi^3 + 4b\pi^2 + 2c\pi + d, 0)$$

$$C_3(-(27a\pi^3 + 9b\pi^2 + 3c\pi + d), 0)$$

$$C_4(64a\pi^3 + 16b\pi^2 + 4c\pi + d, 0)$$

$$C_5(-(125a\pi^3 + 25b\pi^2 + 5c\pi + d), 0)$$

...

Generalizando la sucesión de cortes se tiene que la distancia lineal del k -ésimo corte C_k de la rama positiva de la espiral con la recta que contiene al eje polar es de la forma $(-1)^k(ak^3\pi^3 + bk^2\pi^2 + ck\pi + d)$, para todo k natural.

De forma similar, si C_{-k} representan el k -ésimo corte de la rama negativa de la espiral con la recta que contiene el eje polar, partiendo del *origen de la espiral*, se tiene que la distancia lineal es de la forma $(-1)^{-k}(-ak^3\pi^3 + bk^2\pi^2 - ck\pi + d)$, para todo k natural. Sin embargo, la componente de la distancia lineal de estos puntos se puede reescribir como $(-1)^{(-k)}(a(-k)^3\pi^3 + b(-k)^2\pi^2 + c(-k)\pi + d)$.

Con lo anterior se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema Cortes Espiral Grado Tres

Dada una función de tercer grado de la forma $f(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$, el k -ésimo corte C_k de la espiral con la recta que contiene el eje polar tiene distancia lineal de la forma $(-1)^k(ak^3\pi^3 + bk^2\pi^2 + ck\pi + d)$, para todo k entero.

La demostración del **teorema cortes espiral grado tres** se encuentra implícita en los razonamientos realizados anteriormente.

Ejemplo: para la función $\rho = \frac{1}{5}\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$ se tiene que los puntos en los que la espiral interseca a la recta que contiene al eje polar (con una aproximación de dos decimales) son:

- El origen de la espiral:

$$C_0(-10, 0)$$

- En la rama positiva:

$$C_1(43.72, \pi), C_2(-138.93, 2\pi), C_3(258.42, 3\pi), \dots$$

- En la rama negativa:

$$C_{-1}(74.97, -\pi), C_{-2}(-275.85, -2\pi), C_{-3}(649.84, -3\pi), C_{-4}(-1234.15, -4\pi), \dots$$

Con esta información, se puede bosquejar la gráfica de la función $\rho = \frac{1}{5}\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$, indicando los cortes y construyendo la rama que los contiene partiendo del origen. Considerando una ventana de visualización para $\theta \in [-8\pi, 8\pi]$ y acercando la vista alrededor del polo se tiene la siguiente representación, donde la rama positiva está representada en color azul y la negativa en color rojo.

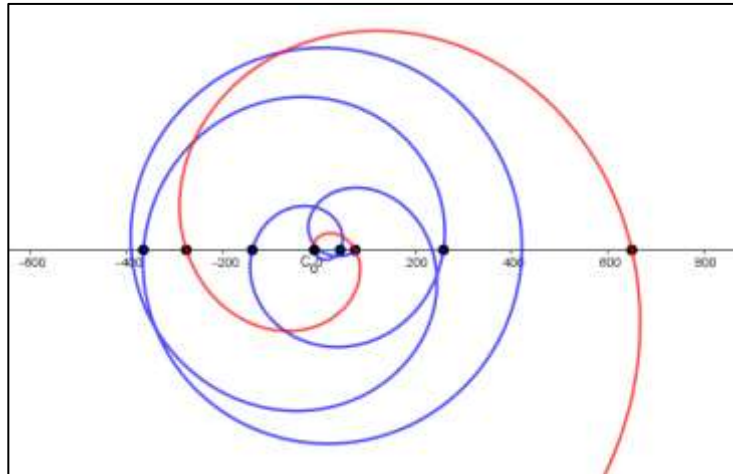


Figura 31 Gráfica función $\rho = \frac{1}{5}\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$

Observando la gráfica anterior y realizando un acercamiento a la gráfica (Figura 33) se puede observar que esta pasa por el polo.

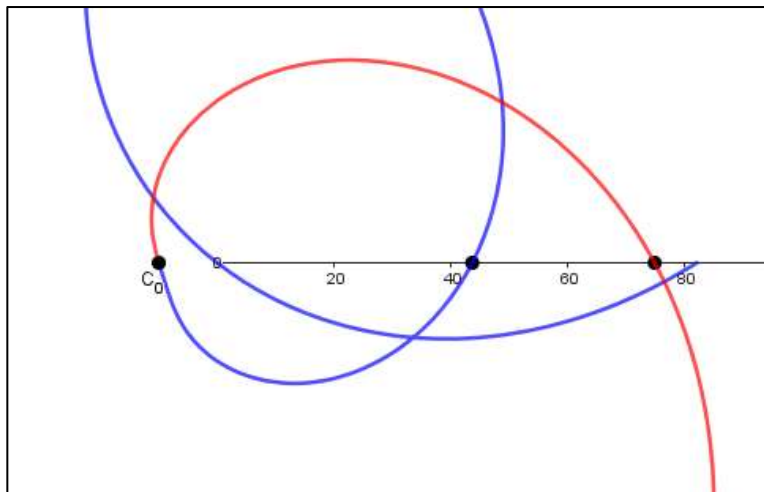


Figura 32 función $\rho = \frac{1}{5}\theta^3 - 5\theta^2 + 3\theta - 10$ alrededor del polo

Este no es un comportamiento propio de esta función, de hecho, se tiene para todas las funciones de grado tres.

La Función de Tercer Grado y el Polo

Analizando de forma general la expresión algebraica de una función de grado tres, $f(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$, se sabe que la gráfica de tal función contiene al polo si existe algún valor real de θ para el cual $f(\theta) = 0$. Esto conduce a la ecuación cúbica con coeficientes reales:

$$a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = 0$$

y por el teorema fundamental del álgebra, tal ecuación tiene al menos una solución real, lo cual garantiza que la función pasa por el polo.

En ese orden, cualquier ecuación cúbica se puede resolver algebraicamente a través del método de Cardano. Puntualmente, para la ecuación $a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = 0$ se pueden determinar el número de soluciones reales a partir del discriminante dado por la expresión: $(-27a^2)(18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2)$. Siendo a, b, c, d reales y $a \neq 0$ el primer factor siempre es negativo, por lo cual vale la pena enfocarse en el signo del segundo factor. Por la ley de la tricotomía se tiene que:

- Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 > 0$ (discriminante negativo) entonces la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.
- Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 0$ (discriminante igual a cero) entonces la ecuación tiene una y solo una de las siguientes opciones: posee una solución de multiplicidad 3 o posee una solución simple y una solución de multiplicidad 2.
- Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 < 0$ (discriminante es positivo) entonces la ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas.

De acuerdo con la opción que satisfaga el discriminante de la ecuación cúbica se determina el comportamiento de la espiral de tercer grado alrededor del polo. Por lo cual se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema Función De Tercer Grado – Polo

Dada una función de tercer grado de la forma $f(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$:

- i) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 > 0$ entonces la espiral determina dos lazos alrededor del polo.
- ii) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 0$ la espiral pasa una única vez por el polo o genera un lazo y un pico en el polo.
- iii) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 27a^2d^2 < 0$ entonces la espiral pasa una única vez por el polo.

Demostración

Ya que el teorema anterior presenta tres resultados se realiza la demostración correspondiente para cada uno de ellos:

- i) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 > 0$ implica que el discriminante es negativo, por lo tanto, se obtienen tres resultados reales distintos para la ecuación cúbica correspondiente a la función dada, θ_1, θ_2 y θ_3 tal que $f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_3) = 0$. Ahora, sin pérdida de generalidad, suponga que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ entonces, por definición de lazo, la gráfica de la función de grado tres genera un lazo en el intervalo del dominio (θ_1, θ_2) y a su vez genera otro lazo en el intervalo (θ_2, θ_3) . Dado que los dos intervalos son conjuntos disyuntos, esto implica que los lazos son diferentes. Por lo

tanto, la espiral correspondiente a la función de grado tres, genera dos lazos alrededor del polo.

- ii) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 0$ implica que el discriminante es igual a cero, entonces la ecuación tiene una y solo una de las siguientes opciones: posee una solución de multiplicidad 3 o posee una solución simple y una solución de multiplicidad 2.

Caso 1: Una solución de multiplicidad 3.

Si la solución de la ecuación cúbica, correspondiente a la función, tiene una solución de multiplicidad tres, entonces las soluciones θ_1, θ_2 y θ_3 son iguales. Lo que implica que solo existe un valor θ en el dominio de la función tal que $f(\theta) = 0$. O lo que es lo mismo, solo existe una pareja ordenada en la función que corresponda al polo. Por lo tanto, la espiral correspondiente a la función de grado tres, pasa una única vez por el polo.

Caso 2: Una solución simple y una solución de multiplicidad 2.

Para el caso de la solución de multiplicidad 2, sean θ_1 y θ_2 iguales, se tiene que la espiral genera un pico en $f(\theta_1) = 0$. Sin embargo, al existir otra solución simple $\theta_3 \neq \theta_1$ implica que existe un valor tal que $f(\theta_3) = 0$ por lo tanto, la espiral de tercer grado genera un lazo para los valores del dominio en el intervalo (θ_1, θ_3) suponiendo que $\theta_1 < \theta_3$.

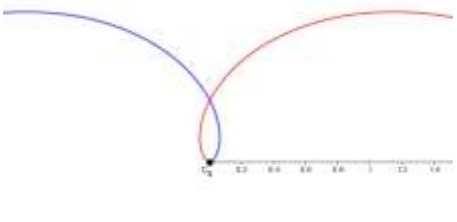
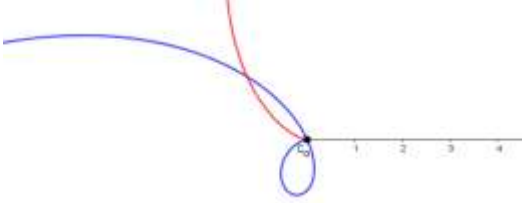
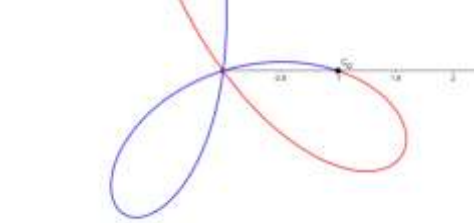
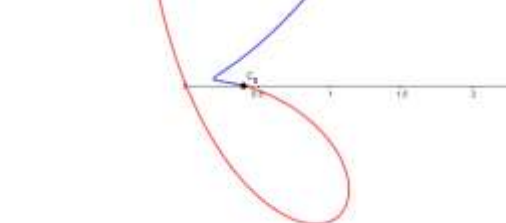
- iii) Si $18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 27a^2d^2 < 0$ es decir el discriminante es positivo, entonces la ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas. Dado que las funciones abordadas en este trabajo son de variable

real, implica que existe un único valor real θ_1 para el cual $f(\theta_1) = 0$. Es decir que la espiral tiene un único punto que corresponde al polo.

■ QED

A continuación, se presentan algunos ejemplos de funciones cúbicas para observar el resultado del teorema anterior.

Tabla 22. Funciones de tercer grado y el polo

Función	Discriminante	Gráfica
$f(\theta) = \frac{1}{10}\theta^3$	Igual a cero	
$f(\theta) = \theta^3 - 2\theta^2$	Igual a cero	
$f(\theta) = \frac{5}{2}\theta^3 - 2\theta^2 - 3\theta + 1$	Menor que cero	
$f(\theta) = 3a\theta^3 + 2\theta^2 - \frac{3}{2}\theta + \frac{2}{5}$	Mayor que cero	

De los ejemplos presentados anteriormente se puede evidenciar que el discriminante que más puede llamar la atención es cuando es igual a cero. Pues para esta opción no se tiene un comportamiento único para la espiral sino dos:

1. La espiral pasa una única vez por el polo. Es decir que la ecuación cúbica tiene una solución real de multiplicidad tres.
2. La espiral genera un pico y un nudo en el polo. Es decir que la ecuación cúbica tiene una solución real simple (la que genera el nudo) y una solución real de multiplicidad dos (la que genera el pico).

Para verificar cual es el comportamiento de la gráfica de la función de tercer orden dada, basta resolver la expresión que da solución a la ecuación cúbica correspondiente.

Aunque podemos continuar analizando algunas características sobre funciones polinómicas de grados superiores, para los objetivos del presente trabajo es suficiente con el estudio de las funciones polinómicas realizado. Es importante observar que hay algunos comportamientos que siempre pueden analizarse en funciones polinómicas, por ejemplo, puntos de corte o el comportamiento de la gráfica alrededor del polo. Para el primer objeto se ha evidenciado que su comportamiento viene dado por una sucesión de acuerdo con la función dada. Y para el segundo objeto se requiere analizar las soluciones reales de la ecuación cuando la función es igual a cero.

Es importante resaltar que el estudio de funciones en el sistema de coordenadas polares no se limita a las presentadas anteriormente, pues vale la pena analizar el comportamiento e invariantes que puedan presentar otro tipo de funciones, por ejemplo, racionales, radicales o trascendentales.

CAPÍTULO IV: ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Algunos de los conceptos del análisis real que son estudiados y empleados para analizar tanto el comportamiento global como local de funciones de variable real son los de integral y derivada, los cuales a su vez se asocian con las nociones de acumulación y variación. Sin embargo, y siguiendo una formulación moderna de tales conceptos, partiremos de abordar el concepto de límite estableciendo su significado en relación con el sistema de coordenadas polar.

Sección 1: Límites

Intuitivamente, reconocemos que el concepto de límite está asociado a determinar el comportamiento de las imágenes de una función para valores del dominio θ que estén “cerca” a un valor real a . Por ejemplo, considere la función: $f(\theta) = \theta^2 + \theta - 2$ con dominio real y observemos su comportamiento alrededor de $a = 2$.

Es claro que el rayo determinado por el ángulo $\theta = 2$ interseca a la gráfica de la función f en infinitos puntos (esto ya se demostró en el apartado de funciones polinómicas), pero que su imagen por medio de la función es $f(2) = 4$. Además, al encontrar la imagen por f para valores cercanos a θ tenemos

Tabla 23 Valores de $f(\theta) = \theta^2 + \theta - 2$ para θ alrededor de 2

θ	1	1,5	1,7	1,8	1,9	1,99
$f(\theta)$	0	1,75	2,59	3,04	3,51	3,950
θ	3	2,5	2,3	2,2	2,1	2,01
$f(\theta)$	10	6,75	5,59	5,04	4,51	4,050

Intuitivamente, de esta tabla se observa que a medida que θ se aproxima a 2 (por ambos lados) la función f se aproxima a 4.

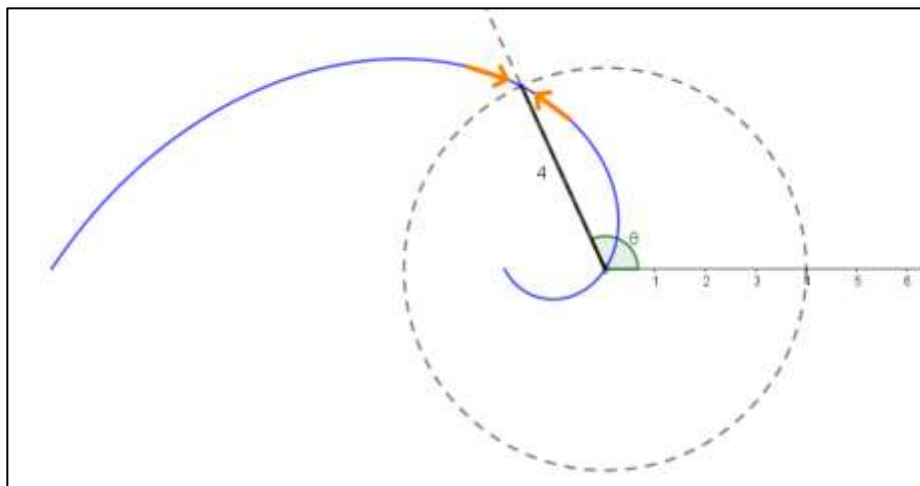


Figura 33 Gráfica de $f(\theta) = \theta^2 + \theta - 2$ con $\theta \in [0, \pi]$

Gráficamente se puede interpretar este acercamiento de θ a 2 y $f(\theta)$ a 4 considerando valores de θ en un intervalo $(\theta - \delta, \theta + \delta)$ y sus respectivas imágenes para cualquier valor δ positivo. Ver Figuras 39 a 41.

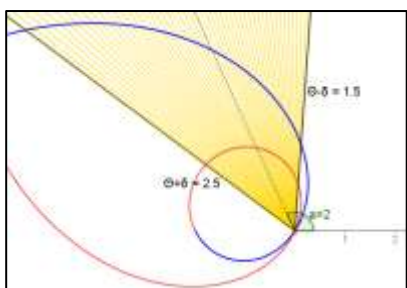


Figura 34 intervalo para $\delta = 0.5$

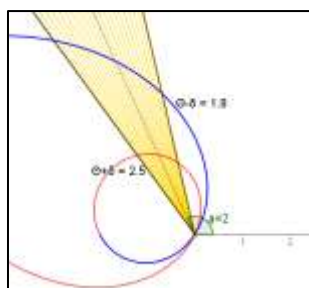


Figura 35 intervalo para $\delta = 0.2$

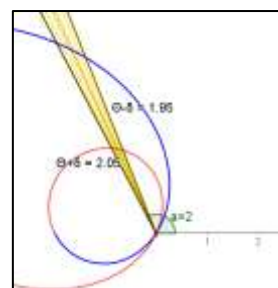


Figura 36 intervalo para $\delta = 0.05$

A partir de la sección angular se obtiene un conjunto de imágenes de f acotadas por algún intervalo $(f(\theta_0), f(\theta_1))$. En este caso en particular, dado que la función f alrededor

de $\theta = 2$ es creciente, se tiene que todas las imágenes de f hacen parte del intervalo $(f(\theta - \delta), f(\theta + \delta))$. Gráficamente esto se puede observar en las Figuras 42 a 44.

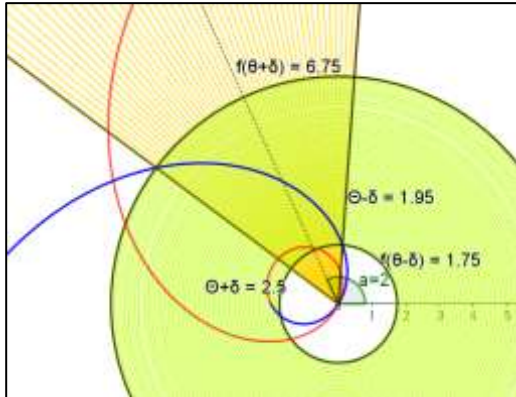


Figura 37 $(f(\theta - \delta), f(\theta + \delta))$ para $\delta = 0.5$

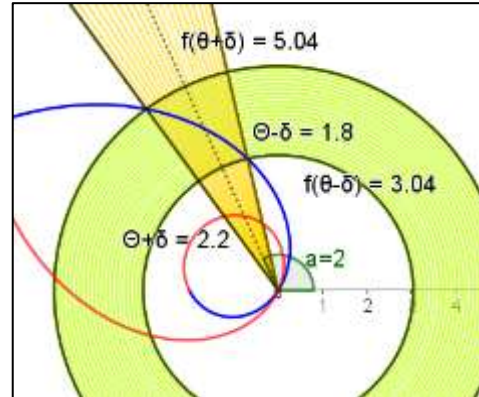


Figura 38 $(f(\theta - \delta), f(\theta + \delta))$ para $\delta = 0.2$

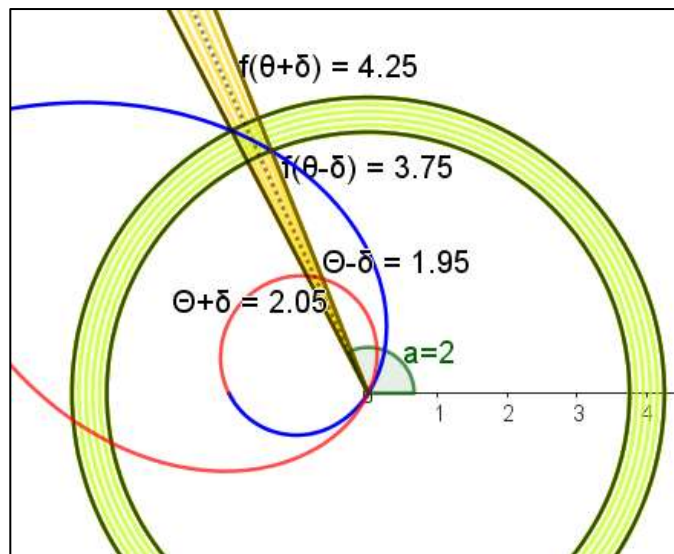


Figura 39 $(f(\theta - \delta), f(\theta + \delta))$ para $\delta = 0.05$

Es claro que para cada valor de δ que se considere se obtendrá una cota diferente para los valores $f(\theta)$ de la función. Así, gráficamente, cuanto más pequeño sea el sector angular alrededor de θ más delgado será el anillo determinado por las imágenes $f(\theta)$.

Con lo anterior se puede concluir que si la función f tiende a algún valor L cuando θ tiende a algún valor a entonces todas las imágenes de $f(\theta)$ están acotadas por el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para algún ε positivo. Adicionalmente, es claro que sin importar el valor de ε que se considere, siempre se puede obtener un valor δ que genere un sector angular para el cual todos los valores de $\theta \in (a - \delta, a + \delta)$ generan imágenes $f(\theta) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Por lo tanto, si lo que se desea es mostrar formalmente que el límite de una función f es L cuando θ tiende a un valor específico a , entonces debemos recurrir a la definición formal de límite que se tiene en análisis real. Tal definición no depende del sistema de representación gráfico. Sin embargo, es importante tener en cuenta que en el sistema de coordenadas polares se hace referencia a una aproximación **angular** en θ y una aproximación **lineal** en $f(\theta)$.

Para dar la definición formal de límite, adaptada al sistema de coordenadas polares, se tomará la definición dada por James Stewart en su libro *Calculo de una variable Transcendentes tempranas*. Cabe aclarar que se puede trabajar con cualquier otra definición formal de límite como las presentadas por Apóstol, Spivak, entre otros. Las diferencias principales que se pueden encontrar en los referentes mencionados es el lenguaje empleado más no en el significado de límite.

Definición Límite

Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a , excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el límite de $f(\theta)$ cuando θ tiende a a es L , y lo expresamos como

$$\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) = L$$

sí para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |\theta - a| < \delta$ entonces $|f(\theta) - L| < \varepsilon$.

Esta definición puede ser interpretada a partir de la definición de distancia propuesta en el presente trabajo. Se tiene que la expresión $|\theta - a|$ representa la distancia angular que hay del ángulo θ al ángulo a y $|f(\theta) - L|$ representa la distancia lineal de $f(\theta)$ a L .

Así, la expresión $\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) = L$ significa que la distancia lineal entre $f(\theta)$ y L puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando la distancia angular de θ a a suficientemente pequeña (diferente de 0).

Cálculo de Límites

En la sección anterior observamos tanto el significado geométrico y algebraico del límite de una función $f(\theta)$ cuando θ tiende a a , como su definición formal en un sistema de coordenadas polar. Ahora, partiendo de tal definición, se pueden demostrar algunas propiedades que se emplean en el cálculo de límites. Particularmente, tenemos:

Teorema: Sea c un número real y f y g dos funciones tales que $\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta)$ y $\lim_{\theta \rightarrow a} g(\theta)$ existen. Entonces:

- Límite de la suma:

$$\lim_{\theta \rightarrow a} [f(\theta) + g(\theta)] = \lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) + \lim_{\theta \rightarrow a} g(\theta)$$

- Límite del producto por una constante

$$\lim_{\theta \rightarrow a} [cf(\theta)] = c \lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta)$$

- Límite del producto

$$\lim_{\theta \rightarrow a} [(f(\theta))(g(\theta))] = \left(\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) \right) \left(\lim_{\theta \rightarrow a} g(\theta) \right)$$

- Límite de un cociente: Si $\lim_{\theta \rightarrow a} g(\theta) \neq 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow a} \left[\frac{f(\theta)}{g(\theta)} \right] = \frac{\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta)}{\lim_{\theta \rightarrow a} g(\theta)}$$

Sección 2: Continuidad

Otro de los conceptos claves que surge en el estudio de funciones reales es la **continuidad**. Intuitivamente, en el caso de las funciones en coordenadas polares, se puede afirmar que una función $\rho = f(\theta)$ es continua en algún valor $\theta = a$ de su dominio si su grafica no tiene saltos, huecos o interrupciones. Formalmente se tiene la siguiente definición:

Definición Función Continua

Dada una función real f se dice que esta es continua en $\theta = a$, sí y solo si

$$\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) = f(a)$$

Esta definición, aunque muy compacta, requiere implícitamente, por la definición de límite, de tres condiciones:

1. La función debe estar definida en $\theta = a$. Es decir a pertenece al dominio de la función y su imagen es $f(a)$.
2. El límite de la función f cuando θ tiende a a debe existir. Por lo tanto, al remitirse a la definición formal de límite debe existir ε y δ positivos tales que si $|\theta - a| < \delta$ entonces $|f(\theta) - L| < \varepsilon$.
3. El límite de la función cuando θ tiende a a es la imagen de la función en ese punto. lo que algebraicamente se denota como $\lim_{\theta \rightarrow a} f(\theta) = f(a)$.

En el presente trabajo no se pretende realizar un estudio riguroso de las implicaciones de la continuidad en el análisis de funciones reales; simplemente emplearemos tal propiedad cuando sea pertinente para la construcción del documento. Por lo pronto, podemos observar que las funciones polinómicas, que han sido abordadas con algo de detalle anteriormente, son continuas en cada valor de su dominio, pues estas funciones cumplen con las tres condiciones que satisfacen la definición de continuidad. Todas las funciones estudiadas anteriormente (constante, primer orden, segundo orden y tercer orden) están definidas para en todos los valores de \mathbb{R} , el límite en cada punto de su dominio existe y para cada caso, el límite de la función en un valor a es igual a la imagen de la función $f(a)$.

Hasta el momento se han estudiado algunos objetos del análisis real y se ha resaltado la importancia de estos objetos: lo esencial de definir un sistema de coordenadas para puntos en el plano, una métrica en este, las funciones de variable real (particularmente polinómicas) y determinar límites o continuidad en estas. A partir de lo anterior da paso a los dos conceptos fundamentales del cálculo: la derivada y la integral.

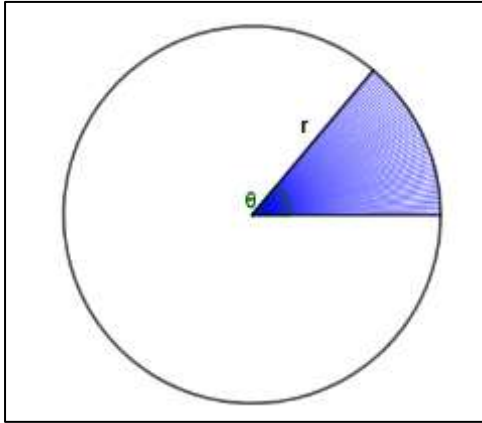
Sección 3: Integral

Uno de los grandes problemas en la historia de las matemáticas que dio origen a la rama denominada *cálculo integral* es el de hallar el área de una región delimitada por una curva con ciertas condiciones. Por ejemplo, calcular el área de una circunferencia abordado por Antifonte de Atenas y posteriormente desarrollado por Eudoxo de Cnido o también el cálculo del área de una región en un plano determinada por una parábola y un segmento de recta abordado por matemáticos como Arquímedes de Siracusa y posteriormente por Roberbal, Fermat, Wallis, entre otros.

A manera de ejemplo, y sin reconstruir ni la historia asociada o la teoría subyacente, a continuación, abordaremos el cálculo del área de una región delimitada por una curva en un plano empleando un sistema de coordenadas polar.

El Área Delimitada por una Curva

En primer lugar, es importante observar que en un sistema de coordenadas polares la región que puede describirse con mayor facilidad es un sector circular ya que el sistema está definido por naturaleza a partir de ángulos y distancias lineales, también conocidas como radios. Además, el área de tal sector está dado por la expresión presentada en la Figura 45. Tal fórmula permite determinar el área de una región determinada en función de la distancia lineal y angular, por lo cual lo hace ideal para abordar el cálculo del área de ciertas regiones en el plano, dependiendo de la forma en que se describe la curva que delimita la región.



$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Figura 40 área sector circular

Suponga que se quiere determinar el área A_R de una región R del plano polar el cual está delimitado por una función $\rho = f(\theta)$ y dos rayos que corresponden a $\theta = a$ y $\theta = b$ como se ve en la Figura 46. Adicionalmente, suponga que f es continua particularmente en (a, b) .

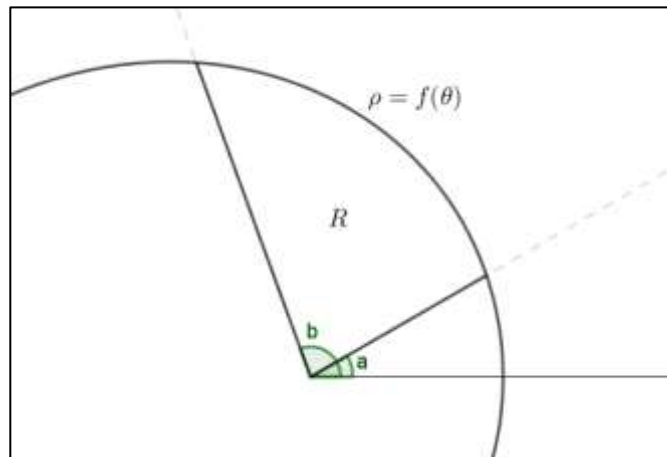


Figura 41: región R de $f(\theta)$

Similar al método de Eudoxo es posible aproximar el área de la región R acotándola superior e inferiormente. Sin pérdida de generalidad, suponga que la función f es creciente en el intervalo $[a, b]$. Entonces se tiene que el área del sector circular de radio $f(a)$ es menor

que A_R y a su vez A_R es menor que el área del sector circular de radio $f(b)$ (Figura 47).

Algebraicamente

$$\frac{1}{2}(f(a))^2|b-a| < A_R < \frac{1}{2}(f(b))^2|b-a|$$

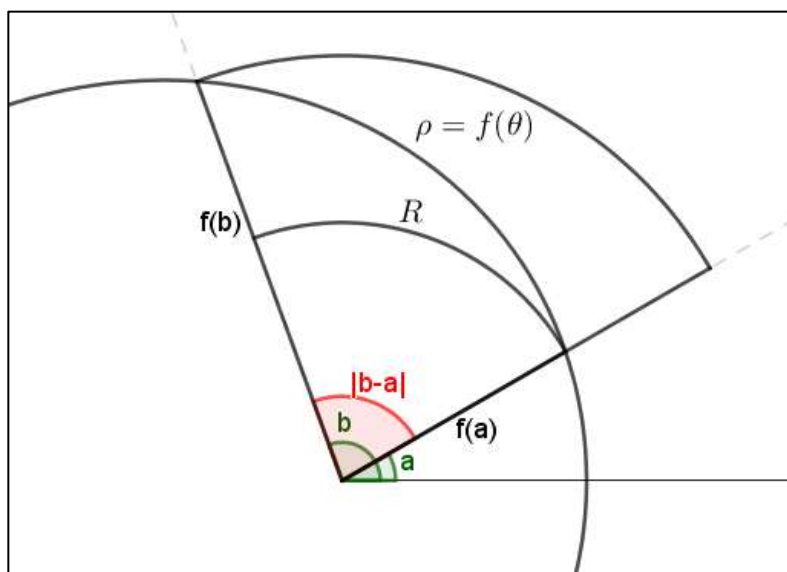


Figura 42 área superior e inferior de R

Para mejorar la aproximación del cálculo del área de la región R se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ tal que $1 \leq i \leq n$ y $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta$ para todo i . Entonces es posible dividir la región R en n subregiones A_i determinadas por los rayos $\theta = \theta_i$ de tal manera que el área de cada una de estas subregiones se aproxima al área de la sección circular determinada por el ángulo central θ_i y el radio $f(\theta_i)$ (ver Figura 48). Así se tiene la siguiente expresión para cada una de las subregiones A_i

$$A_i \approx \frac{1}{2}(f(\theta_i))^2 \Delta\theta$$

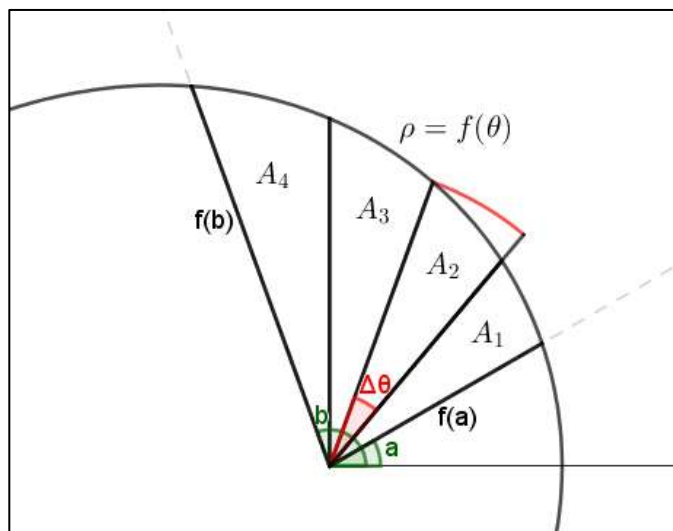


Figura 43 subdivisiones región R

Con esta aproximación para cada una de las subregiones A_i es posible dar una mejor aproximación a el área A_R de la región R al sumar las áreas de las subregiones, es decir

$$A_R \approx A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{(n-1)}$$

O lo que es equivalente a

$$A_R \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$A_R \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f(\theta_i))^2 \Delta\theta$$

Es claro que hasta el momento ya se tiene una muy buena aproximación del área de la región R y que está es mucho mejor cuantas más subregiones se tengan. Es decir que la sumatoria del área de las subregiones tiende a ser igual a el área de la región R siempre y cuando n tienda a ser grande. Esto es:

$$A_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f(\theta_i))^2 \Delta\theta$$

El método empleado para determinar el área de la región R se da través de sumas de Riemann a partir de secciones circulares. Entonces, por definición, el área de la región R corresponde a la integral definida de la función $\rho = \frac{1}{2}(f(\theta))^2$ en el intervalo $[a, b]$.

$$A_R = \int_a^b \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta$$

Ejemplo

A continuación, se presentan un ejemplo para realizar el cálculo de áreas delimitadas por curvas definidas en el plano polar a partir del cálculo integral.

1. Suponga que se quiere determinar el área de una circunferencia de radio 5. Sin pérdida de generalidad esta curva se puede centrar en el polo, lo cual corresponde a la función $\rho = 5$.

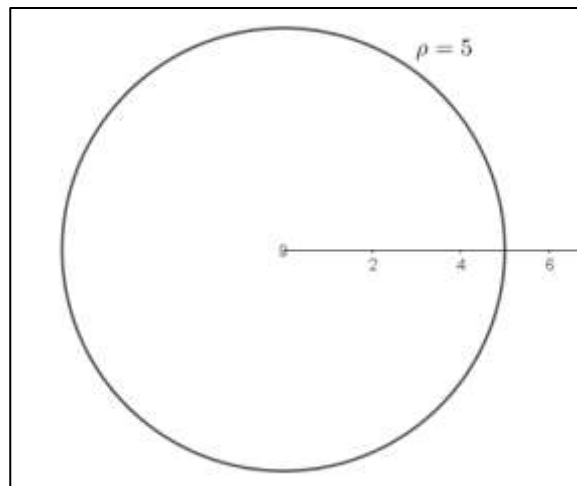


Figura 44 función $f(\theta) = 5$

Ahora para determinar el área que se quiere es suficiente delimitar la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$ de su dominio. Y empleando la integral definida se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (5)^2 d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) (25) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left(\frac{25}{2}\right) [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{25}{2}\right) (2\pi) \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

A pesar de que existe una fórmula para determinar el área de una circunferencia, desde el punto de vista del análisis real, esta curva puede ser vista como una función en el sistema de coordenadas polar. Además, en este sistema se observa facilidad para determinar el área que encierra esta curva en comparación, por ejemplo, al proceso que tendría que realizarse en un sistema cartesiano.

Para reconocer la diferencia entre los procesos que se realizan con esta curva en el sistema polar en comparación al sistema cartesiano, cabe recordar que la circunferencia en el sistema cartesiano no corresponde a una función y se requiere realizar ciertas restricciones y considerar propiedades de la circunferencia como simetrías para poder determinar el área a partir de integrales. Adicionalmente la función a integrar en el sistema cartesiano es mucho más compleja que en el sistema de coordenadas polares. Pues en coordenadas polares se obtiene una

función constante mientras que en el sistema cartesiano se obtiene una función radical.

Sección 4: Derivada

En análisis real la derivada de una función se estudia a partir de una razón de cambio y en particular de una razón de cambio instantánea en una curva. Por lo cual, en esta sección, se pretende analizar noción de derivada, sus significados en el sistema de coordenadas polares y si es posible dar una definición formal de la misma.

Razón de Cambio

Una de las primeras características que se puede estudiar en una curva consiste en determinar cómo cambia la curva de un punto a otro y en determinar si este cambio tiene alguna propiedad, para luego tratar de entender cómo describir el cambio instantáneo en un punto.

Para empezar, si tomamos como ejemplo una función polinómica de grado 1 $f(\theta) = 5\theta + 3$, podemos, por ejemplo, tomar dos puntos $(3,0)$ y $(18,3)$ y observar que la razón entre la diferencia de las imágenes y la diferencia de los ángulos corresponde al coeficiente de amplitud de la función, y en general para cualquier par de puntos se tiene la misma razón. Es decir que en una función de grado uno la razón entre la diferencia de las imágenes respecto a la diferencia de las preimágenes de cualquier par de puntos es constante.

Ahora, para abordar otro tipo de funciones polinómicas, es necesario considerar qué significa la razón de cambio en una función en coordenadas polares. Así que dada una función f y dos puntos $P(f(\theta_1), \theta_1)$ y $Q(f(\theta_2), \theta_2)$, como se muestra en la Figura 50, se puede

determinar una razón de cambio entre P y Q como el cociente entre la diferencia de las distancias lineales y la diferencia de las distancias angulares los puntos dados.

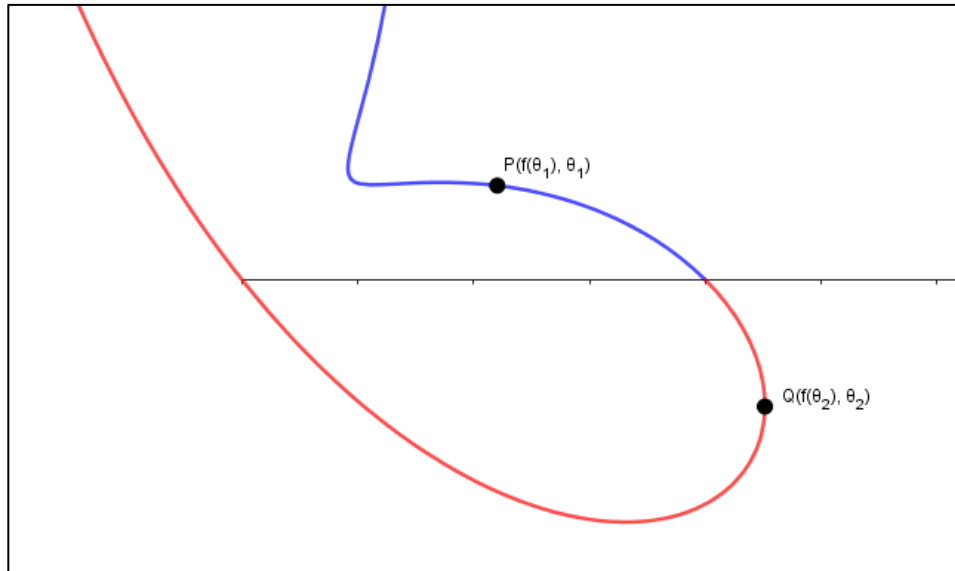


Figura 45 razón de cambio entre dos puntos

Con lo dicho anteriormente se tiene que la razón de cambio entre los puntos P y Q corresponde a la expresión

$$\frac{f(\theta_1) - f(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}$$

y esta expresión corresponde al coeficiente de amplitud de una espiral de primer orden que contiene a los puntos P y Q . Resultado que se obtiene gracias a los teoremas *dos puntos coeficiente de amplitud* y *dos puntos – espiral* desarrollados en la sección 3: Funciones en coordenadas polares.

El coeficiente de amplitud de una función de primer grado es un valor constante y esta constante se relaciona directamente con el comportamiento de la espiral de primer orden

entre los puntos P y Q . A continuación, se presentan dos casos respecto a la relación de la razón de cambio entre los puntos dados y la función f .

Caso 1. f creciente.

Suponga que f es una función creciente. Luego para los puntos $P(f(\theta_1), \theta_1)$ y $Q(f(\theta_2), \theta_2)$, se tiene que si $\theta_1 > \theta_2$ entonces $f(\theta_1) > f(\theta_2)$. Entonces $\theta_1 - \theta_2 > 0$ y $f(\theta_1) - f(\theta_2) > 0$. Por lo tanto, la razón de cambio entre los puntos P y Q es positiva.

$$a = \frac{f(\theta_1) - f(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} > 0$$

Caso 2. f decreciente.

Suponga que f es una función decreciente. Luego para los puntos $P(f(\theta_1), \theta_1)$ y $Q(f(\theta_2), \theta_2)$, se tiene que si $\theta_1 > \theta_2$ entonces $f(\theta_1) < f(\theta_2)$. Entonces $\theta_1 - \theta_2 > 0$ y $f(\theta_1) - f(\theta_2) < 0$. Por lo tanto, la razón de cambio entre los puntos P y Q es negativa.

$$a = \frac{f(\theta_1) - f(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} < 0$$

Con lo cual, en términos generales, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema razón de cambio – función

Dada una función f definida en un intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ con P y Q en el intervalo,

- i. Si la razón de cambio entre P y Q es positiva, entonces la espiral de primer grado que contiene a los puntos es creciente.
- ii. Si la razón de cambio entre P y Q es negativa, entonces la espiral de primer grado que contiene a los puntos es decreciente.

La demostración de este teorema se encuentra implícita en las definiciones dadas anteriormente sobre funciones crecientes y funciones decrecientes.

Razón de Cambio Instantánea

Con el teorema enunciado anteriormente razón de cambio – función se puede determinar el comportamiento de la espiral de primer orden que contiene a dos puntos dados a partir de la razón de cambio entre dichos puntos. Aun así, esto no define el comportamiento de la función.

Por ejemplo, considere la función $f(\theta) = \theta^2$. Sea $P(2,4)$ y $Q(-1,1)$ por el teorema razón de cambio – función se tiene que la razón de cambio entre P y Q es positiva. Es decir que la espiral de primer orden que contiene a los puntos P y Q es creciente. Sin embargo, con este resultado no se puede asegurar que la función f sea creciente. Pues es claro que la función $f(\theta) = \theta^2$ es decreciente si $\theta < 0$ y creciente si $\theta > 0$ (esto por definición de función creciente y función decreciente).

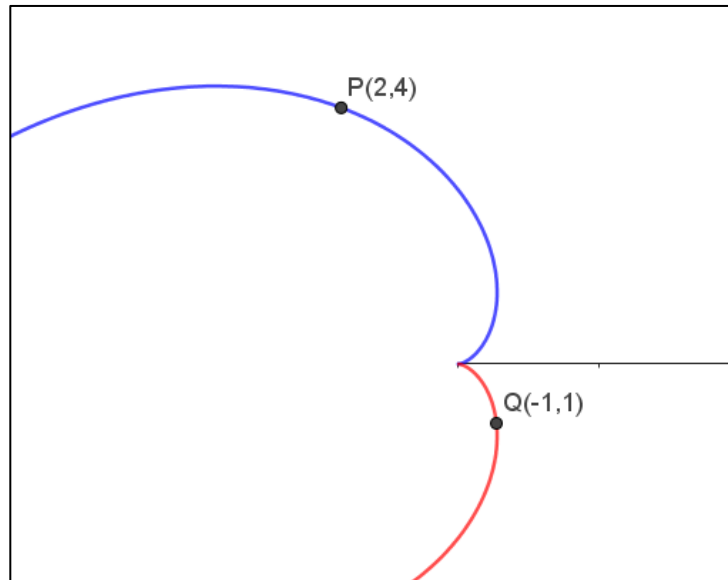


Figura 46 función $f(\theta) = \theta^2$

Entonces para hacer uso del teorema anterior y poder determinar el comportamiento de la función f localmente, es necesario dejar fijo un punto, por ejemplo P y trasladar el punto Q sobre la curva tan cerca de P como sea posible.

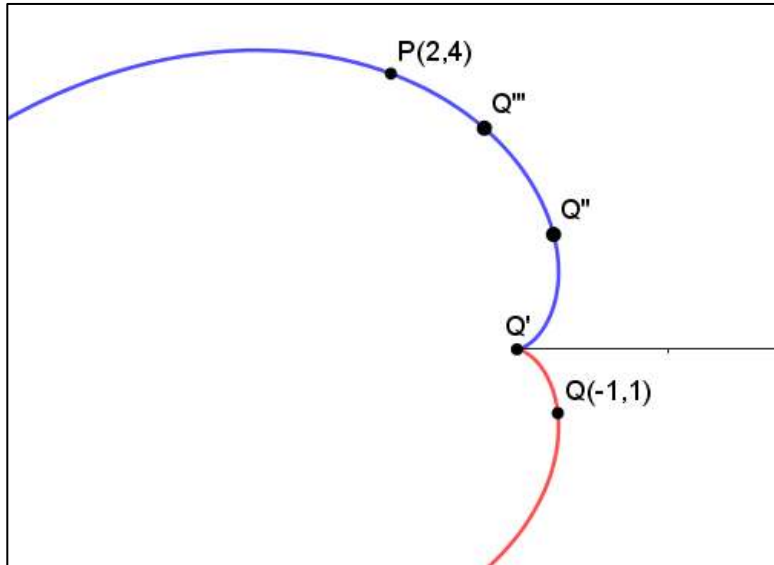


Figura 47 traslación del punto Q en $f(\theta) = \theta^2$

Entonces para determinar el comportamiento local de la función en el punto P basta con considerar acercarse angularmente Q tanto como sea posible a P . En términos generales si los puntos dados corresponden a las coordenadas $P(f(\theta_1), \theta_1)$ y $Q(f(\theta_2), \theta_2)$, entonces se requiere hacer que θ_2 tienda a θ_1 . Con lo cual, el coeficiente de amplitud de la espiral de primer orden determinada por los puntos P y Q estaría dado por la expresión

$$a = \lim_{\theta_2 \rightarrow \theta_1} \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}$$

Sea $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ entonces cuando θ_2 tienda a θ_1 se tiene que $\Delta\theta$ tiende a cero. Con lo cual se puede reescribir la expresión anterior como sigue

$$a = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{\Delta\theta}$$

Ahora, para dejar toda la expresión en función de un solo punto (el punto que se ha fijado), en este caso $P(f(\theta_1), \theta_1)$, se puede despejar θ_2 en $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ y sustituir en la expresión anterior. Con lo cual se llega a

$$a = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta_1 + \Delta\theta) - f(\theta_1)}{\Delta\theta}$$

Y con esta expresión se puede determinar el comportamiento de la función f a partir del coeficiente de amplitud alrededor de un punto fijo. Tal expresión corresponde a la razón de cambio instantánea de una función en un punto fijo P , lo que en análisis real se conoce como derivada.

Con lo cual se puede enunciar la definición formal de derivada en el sistema de coordenadas polares y un teorema con relación al comportamiento local de una función.

Definición derivada

Dada una función $\rho = f(\theta)$ continua en $P(f(\theta)_1, \theta_1)$, la derivada de f en el punto P o razón de cambio instantánea en P está dada por la expresión

$$a = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta_1 + \Delta\theta) - f(\theta_1)}{\Delta\theta}$$

Siempre que el límite exista.

Teorema razón de cambio instantánea – función

Dada una función f derivable en $P(f(\theta_1), \theta_1)$

- i. Si la derivada de la función en P es positiva, entonces f es creciente en P .
- ii. Si la derivada de la función en P es negativa, entonces f es decreciente en P .

Derivada de una Función

Con el resultado anterior se puede determinar el comportamiento local de una función f alrededor de un punto fijo P . Pero para identificar el comportamiento de la función en todo su dominio resultaría muy tedioso calcular punto a punto la derivada.

Así que para determinar la derivada de una función en todo su dominio y no únicamente en un punto, basta con asignar valores variables al punto y no valores fijos.

Dada una función $\rho = f(\theta)$ los puntos de la espiral que corresponden a la función son de la forma $P(f(\theta), \theta)$ así que la derivada para cada uno de esos puntos está dada por

$$a = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

Sin embargo, a medida que cambia el valor de θ a lo largo del dominio de f se puede obtener valores diferentes para su derivada. Es decir que a no es un valor constante, sino variable en función de θ . Lo cual se resume en la siguiente definición.

Definición derivada de una función

Dada una función $\rho = f(\theta)$ la derivada de la función es una expresión en función de θ y se denota como $f'(\theta)$. Tal derivada está dada por la expresión

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan algunas conclusiones que surgieron durante el desarrollo de este trabajo organizadas en tres categorías, las cuales son: el tratamiento de las coordenadas polares, el alcance de los objetivos propuestos y las contribuciones de este trabajo a la formación matemática y docente del autor.

Respecto al Tratamiento de Algunos Conceptos del Cálculo a Partir de un Sistema de Coordenadas Polares

Se mantiene el cuestionamiento del porqué históricamente no se desarrolló en un primer momento el sistema coordenado polar y por qué aún después de tantos años no es usual que se realicen estudios partiendo de sistemas coordenados alternativos al sistema cartesiano en análisis real. Teniendo en cuenta que en el ejercicio del desarrollo histórico matemático que se pudo verificar en el capítulo I, en el estudio de las curvas, de fondo siempre ha estado el sistema coordenado polar.

De igual manera cabe destacar el llamado de atención que presenta este trabajo desde su barrido histórico y su análisis matemático a recordar que siempre hay más matemáticas por cuestionar y descubrir, ya que diferentes sistemas de representación pueden generar nuevos significados para objetos ya conocidos. En otras palabras, es el acto de objetar lo establecido lo que termina permitiendo que nuevas formas de estudio sean halladas, y la oposición radical al cuestionamiento puede terminar irrumpiendo el desarrollo histórico de las matemáticas. Un ejemplo de esto se puede ver en el estudio de las curvas mecánicas (en este trabajo llamadas curvas cinemáticas), las cuales podían servir de herramienta para la solución de problemas clásicos de las matemáticas, sin embargo, no fueron aceptadas por ir en contra del sistema establecido y conocido.

Acerca de los Aportes Matemáticos y Didácticos a la Formación Como Profesor de Matemáticas

Aunque este trabajo no tenía como finalidad un enfoque didáctico o pedagógico, se reconoce que en el ejercicio de resignificar objetos matemáticos se terminan descubriendo nuevas formas de abordar los objetos y nuevas conexiones entre las representaciones, lo que puede convertirse en herramientas para modificar o innovar en el marco de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, el desarrollo de este trabajo puede servir como insumo para abordar conceptos de la geometría y del cálculo desde una perspectiva histórica y crítica, lo que podría brindar a los futuros educadores en formación o docentes una herramienta para abordar objetos del análisis real desde una propuesta didáctica diferente partiendo desde las mismas matemáticas.

De igual manera, se reconoce que este trabajo resultó retador al generar la necesidad de desarrollar una nueva propuesta teórica, a la luz de reevaluar habilidades y abordar conceptos como continuidad, sucesiones aritméticas y geométricas, aplicación y análisis de lugares geométricos bajo una métrica establecida y algunos conceptos fundamentales de límites, integral y derivadas. lo cual permitió profundizar en aquello que, durante el desarrollo de los cursos usuales, por diferentes razones no se logra abordar.

Acerca del Alcance del Objetivo General

Si bien se logró realizar un estudio de algunos objetos del análisis real desde un sistema de coordenadas polares, obteniendo un nuevo panorama que en algunos casos permitió resignificar tales objetos y construir una línea teoría para su estudio, el desarrollo de este trabajo deja la puerta abierta a continuar en el estudio de manera más profunda de otros objetos. Teniendo en cuenta esto se recomienda tomar todo lo abordado en el desarrollo

de este trabajo y ahondar en el estudio de otro tipo de objetos, e incluso en la comparación de los significados que estos adquieren en un sistema polar respecto a un sistema cartesiano.

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. M. (1967). *Calculus* (Vol. 1–2). John Wiley & Sons.
- Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis*. Addison-Wesley.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). Wiley.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. (2011). *Historia de las matemáticas*. Wiley.
- Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics an introduction* (7.^a ed.). McGraw-Hill.
- Cajori, F (1919). *A history of mathematics*
- Castro, I., & Pérez, J. (sf). *Didáctica Arquimediana*.
- De Andres, L. (sf). *De las trisectrices, la cicloide y otras curvas*.
- Heath, T. L. (1956). *A history of Greek mathematics* (Vols. I–II). Dover Publications.
- Heath, T. L. (1956). *The works of Archimedes*. Dover Publications.
- Hernández, V. (1998). *Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato*. SUMA (28), 31-36.
- Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Pearson.
- Larson, R., & Edwards, B. *Cálculo I de una variable* (9.^a ed).
- Lupo, L. (2001). *Sistema de coordenadas polares aspectos teóricos*.
- Marsden, J., & Tromba, A. (1996). *Vector calculus* (4th ed.). W. H. Freeman.
- Martin, A. & Martin, R. (2005) *Principio de Arquímedes, espiral de Arquímedes*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas*. MEN.
- Molina, A. (2008). *El método de investigación de Arquímedes de Siracusa: Intuición, Mecánica y Exhaución*. Revista de filosofía (58). 23-40.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Protter, M. H., & Morrey, C. B. (1991). *Análisis matemático*. Addison-Wesley.
- Rodríguez, Y., & Sarmiento, B. (sf). *Cuadratura del círculo con la cuadratriz de Dinóstrato*. Universidad Pedagógica Nacional.

- Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Simmons, G. F. (1992). *Precalculus mathematics in a nutshell: Geometry, algebra, trigonometry*. Wipf & Stock.
- Spivak, M. (1970). *Cálculo infinitesimal* (2.^a ed.).
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7^a ed.). México.
Cengage Learning Editores.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de una variable y multivariable* (8.^a ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2010). *Thomas' calculus* (12th ed.). Pearson.
- Vicario, M. (2007). *Coordenadas polares. Un acercamiento epistemológico y didáctico*.
Universidad Autónoma de Guerrero.

Anexo A: Algunas Recomendaciones Para Estudiar Coordenadas Polares En GeoGebra

Actualmente para explorar características o propiedades de algunos objetos en matemáticas resulta de gran utilidad el uso de software de geometría dinámica. En el presente trabajo se han realizado las exploraciones correspondientes en **GeoGebra Classic 5**. Sin embargo, esta herramienta (al igual que muchas otras) está configurada de forma predeterminada para un estudio de representaciones en el plano empleando un sistema de coordenadas cartesianas. Dado que para efectos del presente trabajo se requiere una exploración en un sistema de coordenadas polares, es necesario configurar el software para el nuevo sistema.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta a continuación algunas recomendaciones como un breve instructivo para configurar GeoGebra en coordenadas polares con el fin que el lector pueda reconstruir, verificar y hacer un seguimiento de las construcciones presentadas de forma dinámica.

Al ingresar a **GeoGebra Classic 5** (Figura A1), de forma predeterminada, el usuario puede observar en la parte superior las **Herramientas** de geometría para realizar las construcciones, al costado izquierdo la **Vista Algebraica** donde se presentan las expresiones algebraicas de los objetos que se construyen, en la parte inferior la barra de **Entrada** en la cual se pueden escribir las expresiones que quieren explorar y en la parte principal de la ventana **la Vista Gráfica** donde se tiene un plano en coordenadas cartesianas.

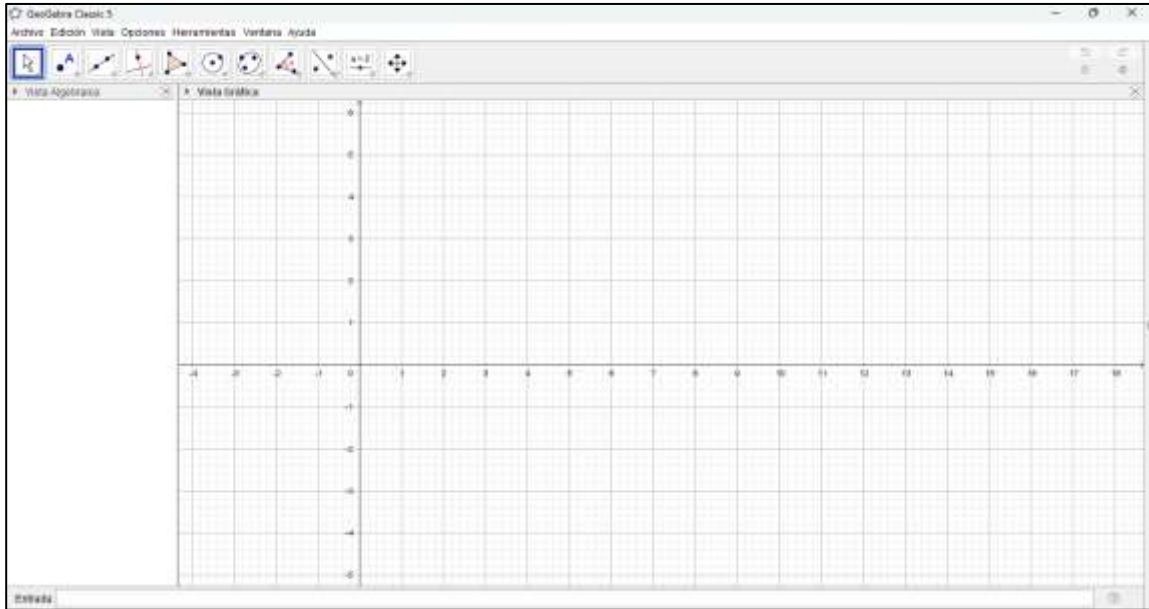


Figura A 1 ventana predeterminada de GeoGebra

Un sistema de coordenadas polares para el plano

Ahora, para tener en la vista gráfica un plano en coordenadas polares siga los siguientes pasos:

1. Ingrese a **Opciones**, en la parte superior de la ventana, y seleccione la opción **Avanzado**.

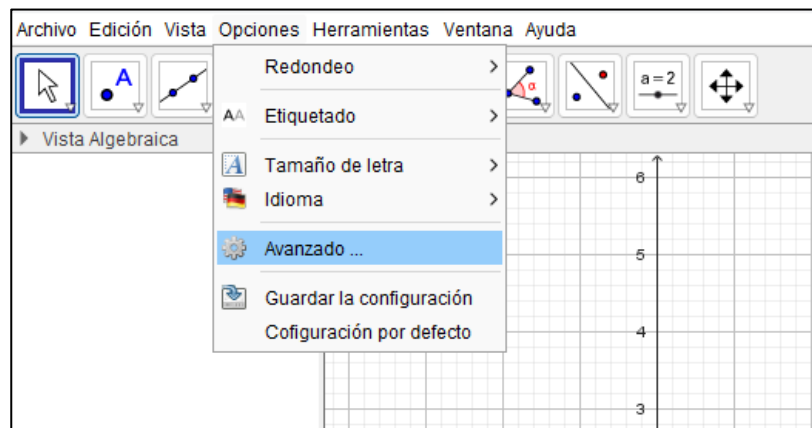


Figura A 2 menú opciones GeoGebra

2. Aparecerá en la parte derecha una nueva sección donde se pueden realizar diferentes configuraciones. Seleccione la opción **Preferencias – Vista Gráfica**.

Esta opción tiene como icono una circunferencia y un triángulo superpuestos

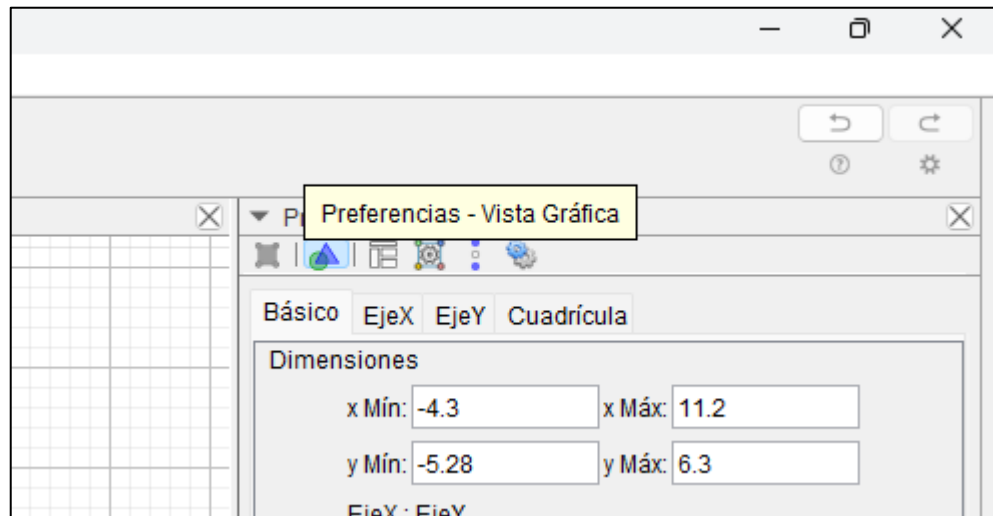


Figura A 3 preferencias – vista grafica GeoGebra

3. En la sección de **Cuadrícula** puede indicar que no sea visible la cuadrícula o en el menú desplegable de **Tipo de cuadrícula** puede seleccionar la opción que pone **Polar**.

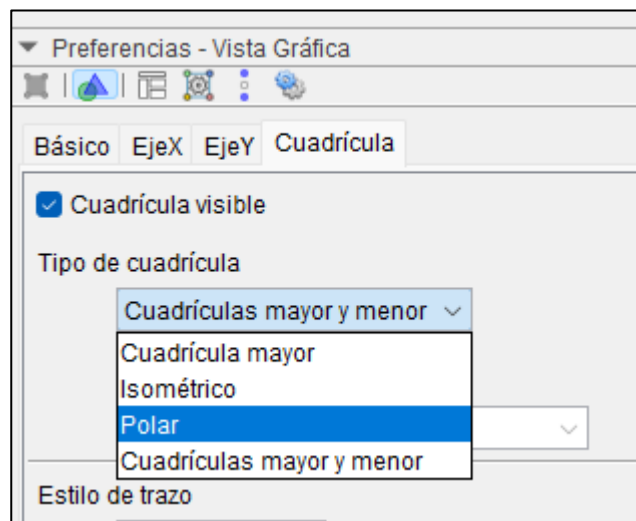


Figura A 4 configuración cuadrícula GeoGebra

4. En la sección **Eje Y** deseleccione la primera opción que pone **Eje-y**.

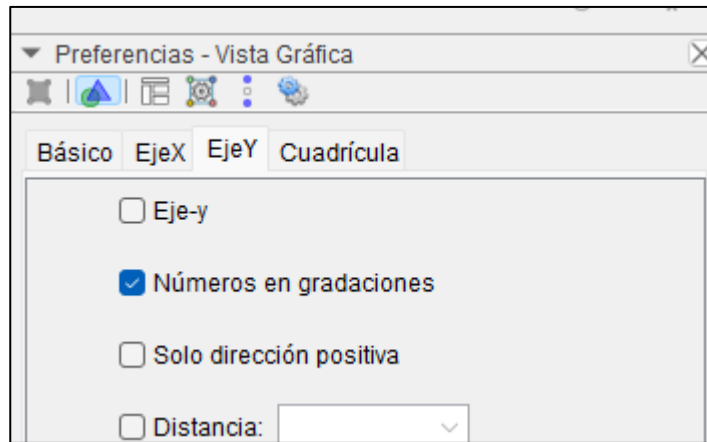


Figura A 5 configuración Eje Y GeoGebra

5. En la sección **Eje X** seleccione la opción **Solo dirección positiva**.

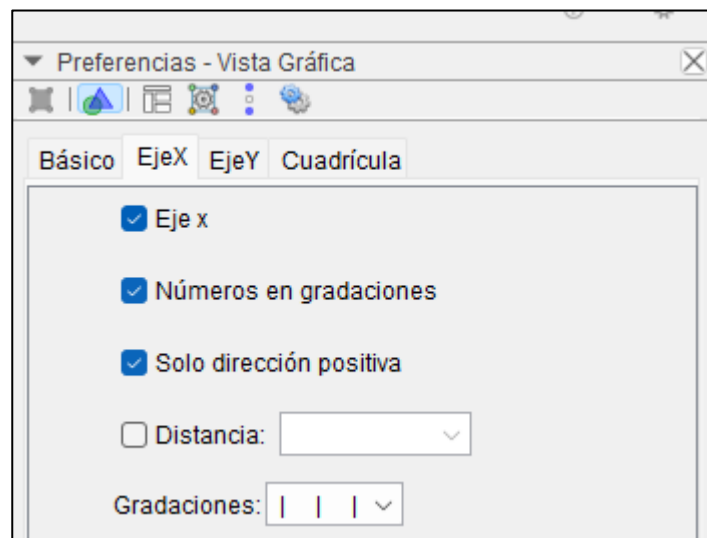


Figura A 6 configuración Eje X GeoGebra

6. Para ubicar el punto que será el polo, en la sección de **Entrada** se escribe la coordenada (0,0).

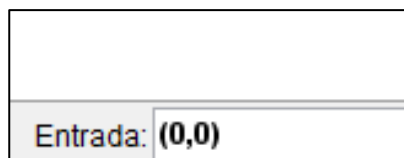


Figura A 7 entrada del Polo al plano en GeoGebra

7. Este punto aparecerá en la **Ventana Gráfica** nombrado punto **A**. al seleccionar este punto, en las **preferencias** (al costado derecho) puede cambiar el nombre a **O** y adicionalmente debe seleccionar la opción **Objeto fijo**.

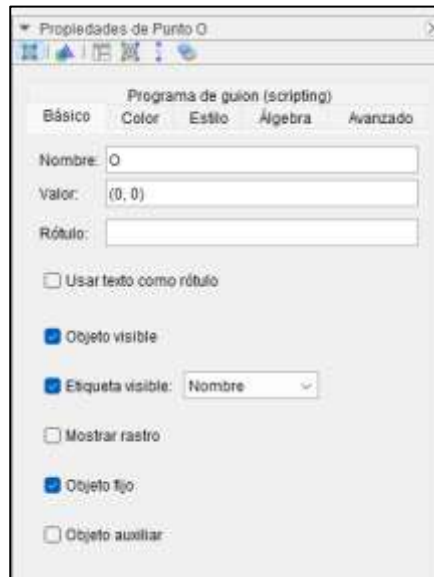


Figura A 8 configuración del Polo GeoGebra

Finalmente puede cerrar las preferencias y observar que en la vista grafica ya tiene un plano cuyo sistema de referencias es para coordenadas polares.

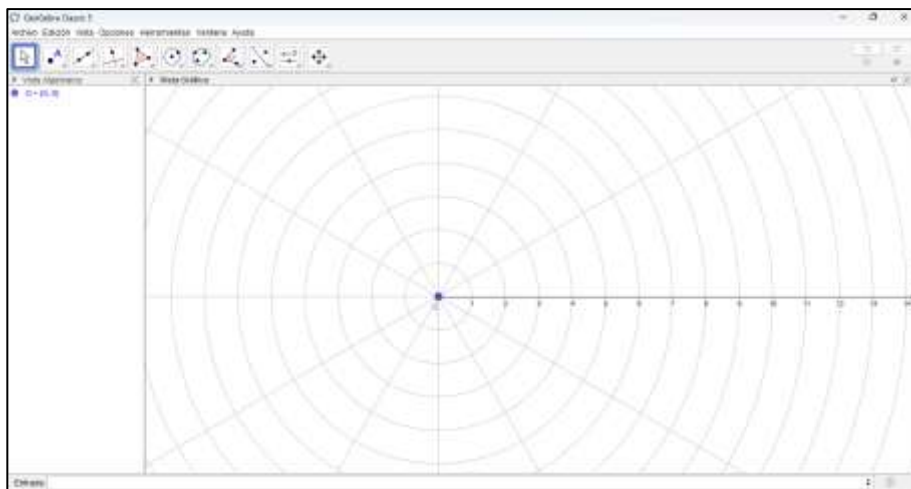


Figura A 9 plano polar GeoGebra

Declaración de funciones en el sistema polar

Ahora, para definir o construir funciones en un sistema de coordenadas polar, siga los siguientes pasos.

1. En la sección de **Entrada** escriba la función polar $\rho = f(\theta)$ que desea escribir manteniendo el nombre de las variables. θ para variable independiente y ρ para variable dependiente. Estas letras griegas las encuentra a la derecha de la barra de **Entrada**.

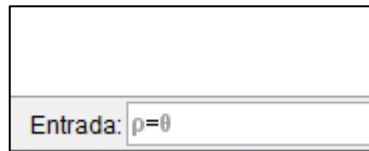


Figura A 10 entrada función $\rho = f(\theta)$

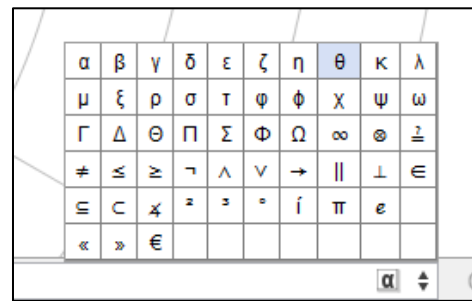


Figura A 11 alfabeto griego para entradas en GeoGebra

2. En la vista grafica aparecerá la función ρ parametrizada y con un intervalo, en radianes, para el parámetro θ la cual corresponde a la variable independiente. Es decir que tal intervalo es el intervalo del dominio para el cual GeoGebra grafica la función $\rho = f(\theta)$.

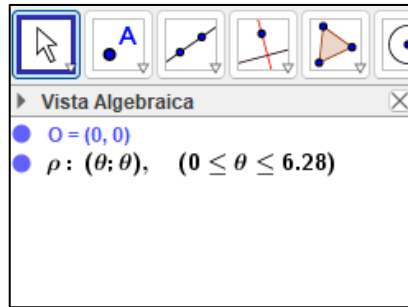


Figura A 12 vista algebraica de la función $\rho = f(\theta)$

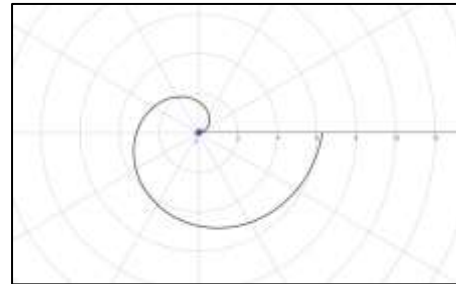


Figura A 13 vista gráfica de la función $\rho = f(\theta)$

3. Para poder estudiar las funciones en diferentes intervalos de su dominio ingrese nuevamente a **Opciones > Avanzado** seleccione en la **vista algebraica** la función ρ y asegúrese de que en la ventana de configuraciones se encuentre en **propiedades de la curva ρ** .

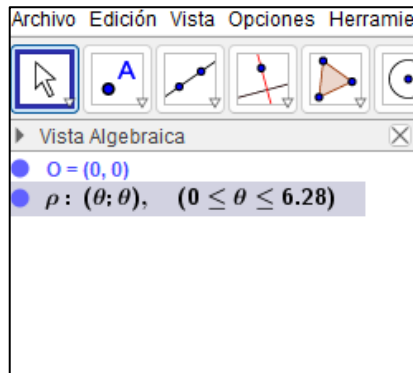


Figura A 14 selección de la función $\rho = f(\theta)$ en vista algebraica

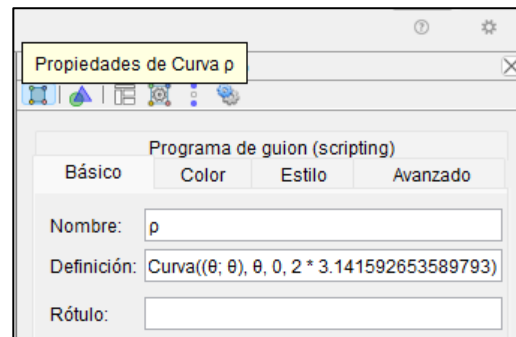


Figura A 15 propiedades de la función $\rho = f(\theta)$

4. En la **Definición** de la función seleccionada se presentan las características de la curva en el siguiente orden: la expresión, el parámetro, el valor inicial y el valor final. Por lo que modificar el valor inicial y el valor final presentara una nueva grafica para el intervalo dado.

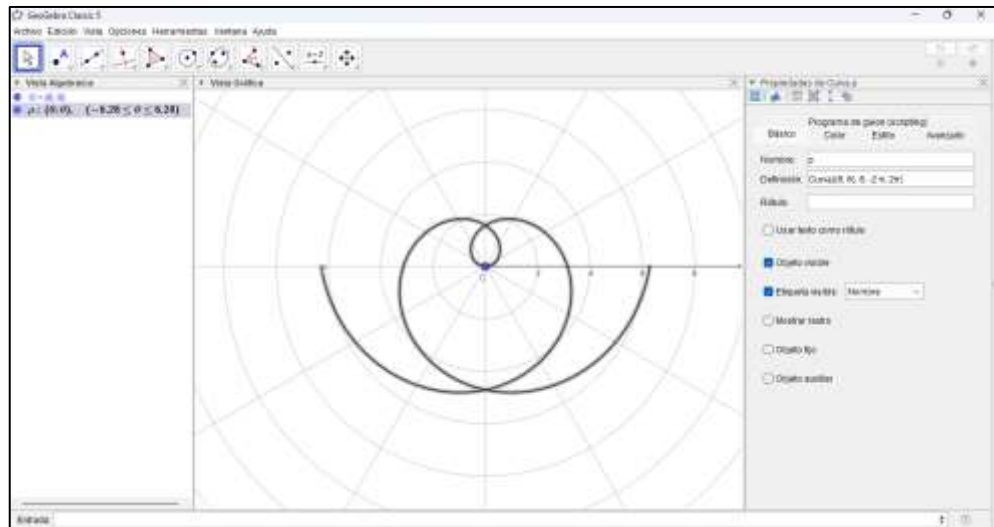


Figura A 16 función $\rho=\theta$ en GeoGebra

Nota: en GeoGebra puede cambiar la letra griega ρ por la letra r y esto no afecta la representación de la función dada. También puede cambiar el número 3.1415926535 ... por la letra griega π para facilitar la escritura de los intervalos que desee estudiar.