INCIDENCIA DE LAS DIFERENTES CONCEPCIONES DEL PASO AL LÍMITE EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y SU IMPORTANCIA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Jonathan David Bernal Gamboa
Karen Tatiana Quitian Ariza

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2020

INCIDENCIA DE LAS DIFERENTES CONCEPCIONES DEL PASO AL LÍMITE EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y SU IMPORTANCIA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Licenciado(a) en Matemáticas

Jonathan David Bernal Gamboa
Código: 2016240009
C.C.: 1024536502
Karen Tatiana Quitian Ariza
Código: 2016240066
C.C.: 1233500315

Director:
Orlando Aya Corredor

FIRMA DIRECTOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2020

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"INCIDENCIA DE LAS DIFERENTES CONCEPCIONES DEL PASO AL LÍMITE EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y SU IMPORTANCIA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS"**, elaborado por los estudiantes **JONATHAN DAVID BERNAL GAMBOA**, identificado con el Código 2016240009 y Cédula 1024536502 y **KAREN TATIANA QUITIAN ARIZA**, identificada con el Código 2016240066 y Cédula 1233500315, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y seis** (**46**) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los diez (10) días del mes de febrero de 2021.

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR
Director del Trabajo de grado

Mg. ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ
Jurado del Trabajo de grado

Mg. CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA
Jurado del Trabajo de grado

Dedico este gran paso en mi vida a mi madre, mi segundo padre Genaro y en especial a mi hermano Alejo de quien espero ser su motivación para lograr todo lo que se proponga.

Jonathan Bernal

Dedico este logro a Dios y a mis papás, Araceli Ariza y Cesar Quitian quienes me han apoyado en cada decisión y han estado para darme ánimo en todo momento, pero sobre todo por ser mi mayor ejemplo de carácter, tenacidad y amor.

Tatiana Quitian

Agradecimientos

A todos los maestros y amigos de la Universidad Pedagógica Nacional que han hecho parte de nuestro proceso de formación, tanto a nivel académico como personal para cumplir con nuestra labor como profesores de matemáticas.

Agradecemos a nuestras familias, por su apoyo incondicional, por ser quienes soportaron largas horas de nuestra ausencia para hacer posible este proyecto y que, sin importar, siempre nos reconfortaron con sus palabras y muestras de afecto.

Por último, agradecemos especialmente a nuestro querido profesor y director Orlando Aya por su acompañamiento incondicional, compromiso y por brindarnos sus conocimientos para la construcción de este documento.

Resumen

Este trabajo de grado tuvo como propósito reconocer la importancia del desarrollo del paso al límite dentro de las demás ramas de las matemáticas, teniendo en cuenta la consideración del límite como base del cálculo. Además, dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del límite en la formación académica se evidencia un proceso centrado en el cálculo algorítmico, por un lado, y por otro, centrado en lo que se entiende como definición formal. Teniendo en cuenta esta disposición en la enseñanza se resaltó la importancia del reconocimiento de los obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite identificados por Sierpinska y Cornu a partir de los cuales se realizó una comparación entre los obstáculos que surgieron en el trabajo de diversos matemáticos con los obstáculos epistemológicos reconocidos por estos autores, con el fin de que el profesor de matemáticas logre establecer estrategias que contribuyan a la superación de dichos obstáculos a partir del conocimiento histórico-matemático del límite.

Palabras claves: Obstáculos epistemológicos, Paso al límite, Historia de las matemáticas, conocimiento del profesor de matemáticas.

Abstract

The purpose of this degree work was to recognize the importance of the development of the passage to the limit within the other branches of mathematics, taking into account the consideration of the limit as the basis of calculus. In addition, within the process of teaching and learning of the limit in academic training, a process focused on algorithmic calculus, on the one hand, and on the other hand, focused on what is understood as formal definition. Taking into account this disposition in teaching, the importance of recognizing the epistemological obstacles related to the notion of limit identified by Sierpinska and Cornu was highlighted, from which a comparison was made between the obstacles that arose in the work of various mathematicians with the epistemological obstacles recognized by these authors, so that the mathematics teacher can establish strategies that contribute to overcoming these obstacles from the historical-mathematical knowledge of the limit.

Key words: Epistemological obstacles, Passage to the limit, History of mathematics, mathematics teacher's knowledge.

Contenido

Introducción 1

Justificación 3

Objetivos 5

General 5

Específicos 5

1. Marco de referencia didáctico 6

1.1. Comprensión en matemáticas por Anna Sierpinska 6

1.2. Comprensión como imagen y definición conceptuales en matemáticas por Tall y Vinner 7

1.3. Noción de obstáculo 9

1.4. Infinito actual e infinito potencial 12

1.4.1. Infinito potencial 12

1.4.2. Infinito actual 13

1.5. Conclusiones parciales 13

2. Desarrollo histórico del paso al límite 14

2.1. Concepción geométrica 14

2.1.1. Los inconmensurables y el método de exhaución de Eudoxo 14

2.1.2. Arquímedes, superficie del segmento parabólico y el arenario 21

2.1.3. Aproximación finita según Kepler y Cavalieri 28

2.1.4. Conclusiones parciales de la Concepción Geométrica 31

2.2. Concepción de Newton y Leibniz 33

2.2.1. Teorema del binomio y método de las fluxiones de Newton 33

2.2.2. Cálculo infinitesimal de Leibniz 37

2.3. Concepción Algebraica 43

2.3.1. Concepción Algebraica finitista – Fermat 43
2.3.2. La época de Euler 51
2.4. Concepción Aritmética 55
2.4.1. Las paradojas de Zenón 55
2.4.2. Wallis y la transición de la Concepción Geométrica a la Aritmética 58
2.4.3. Teoría de límites – D'Alembert 61
2.4.4. Cantidad variable – Cauchy 62
2.5. Concepción Analítica 66
2.5.1. Construcción de los números reales - Cantor 66
2.5.2. Construcción de los números reales – Dedekind 70
2.5.3. Definición formal y precisa - Weierstrass 73
3. Importancia del conocimiento histórico sobre los conceptos relativos al límite 75
4. Conclusiones 90
5. Bibliografía 92
6. Anexos 94
anexo a: demostración de la identidad trigonométrica 94
anexo b: interfaz actividad 1 95
anexo c: interfaz actividad 2 96
anexo d: interfaz actividad 3 97

Índice de Figuras

Figura 1: Distinción del conocimiento (construcción propia) 7
Figura 2: Secuencia Pitagórica, Castro y Pérez (2007) 15
Figura 3: Segmentos conmensurables 16
Figura 4: Diagonal del cuadrado 16
Figura 5: Construcción indefinida de números naturales 17
Figura 6: Cuadrado inscrito 20
Figura 7: Exhaución del círculo 21
Figura 8: Área de segmento parabólico, Sandoval y Rodríguez (2016) 22
Figura 9: Área barrida por el radio vector 29
Figura 10: Volumen del cono y la pirámide de altura h (Castro & Pérez, 2007) 30
Figura 11: Segmento de círculo 34
Figura 12: Área de triángulo rectángulo isósceles 39
Figura 13: Triángulo característico 40
Figura 14: Segmento base y altura 44
Figura 15: Rectángulo a maximizar 44
Figura 16: Método para hallar la tangente de Fermat 46
Figura 17: Proposición I.11 Apolonio 47
Figura 18: Método para hallar el área bajo la curva de Fermat 49
Figura 19: Diagrama de movimiento de la paradoja del estadio 58
Figura 20: Comparación de indivisibles 59
Figura 21: Propiedad de la cortadura 71
Figura 22: Infinitos racionales c entre α y β con $\beta < \alpha$ 72
Figura 23: Infinitos racionales c entre α y β con $\beta > \alpha$ 72
Figura 24: Interfaz método de exhaución 77
Figura 25: Convergencia del área de los polígonos 78
Figura 26: Área del polígono inscrito 80
Figura 27: Área del polígono circunscrito 81
Figura 28: Aproximación al área del círculo por polinomios 84
Figura 29: Aproximación por Riemann 86
Figura 30: Convergencia Wallis y Newton 88

Índice de tablas

Tabla 1: órdenes y periodos de los números 26
Tabla 2: Número correspondiente de granos de arena 28
Tabla 3: Medidas de espacio y tiempo de la carrera de Aquiles y la tortuga 56
Tabla 4: Áreas obtenidas para $n = 0, 1, 2, \ldots$ 34
Tabla 5: Expresiones del polinomio de Newton 35
Tabla 6: Diferencias de una sucesión según Leibniz 38
Tabla 7: Simbología de Leibniz 38
Tabla 8: Construcción del método de Wallis 87

Introducción

El presente documento tiene como propósito realizar un estudio sobre las diferentes concepciones del paso al límite y sus implicaciones en la formación inicial de profesores de matemáticas, para realizar esto, en un primer lugar se plantea una justificación, en la que se exponen los argumentos que motivaron al desarrollo de este trabajo de grado, así como los objetivos que se espera alcanzar con lo expuesto. En los capítulos posteriores se presenta el desarrollo de un marco de referencia didáctico e histórico en relación con el paso al límite, luego de esto, se presenta a modo de ejemplificación una propuesta para abordar el paso al límite en la escuela y, por último, las conclusiones a las que se llegó con el desarrollo del presente trabajo.

Dentro de lo que se consideró como marco de referencia didáctico, y que es presentado en el capítulo 1, se abordaron conceptos como comprensión, imagen conceptual y evocada, desde el punto de vista de autores como Sierpinska, Tall y Vinner. Por otra parte, se enuncian los obstáculos relativos a la noción de límite, desde las perspectivas de Sierpinska y Cornu. Adicionalmente se realiza una distinción entre el infinito actual y el infinito potencial dado que serán conceptos que se retomarán en capítulos posteriores y es de esencial importancia tener claridad sobre estos.

Dentro del segundo capítulo se presentará el desarrollo histórico donde se abarcan la concepción geométrica, de Newton y Leibniz, algebraica, aritmética y por último la concepción analítica. Cada una de estas con el respectivo estudio de los aportes matemáticos más representativos en la construcción de la noción de límite, esta clasificación se realizó con base en el esquema propuesto por Medina (2001) en el que se presenta un rastreo sobre las diferentes concepciones del paso al límite y sus principales exponentes en cada caso.

En relación con el tercer capítulo, se busca argumentar la importancia del conocimiento histórico sobre los conceptos relativos al límite. Para esto se tiene en cuenta algunos aspectos del desarrollo histórico previamente realizado y a partir de ello se plantea una secuencia de actividades que ejemplifiquen el uso implícito de la historia en una propuesta de clase, con la cual se pretende introducir la noción de límite tomando como objeto matemático el cálculo del área de un círculo.

En el cuarto, y último capítulo de este documento, se presentan las conclusiones teniendo en cuenta que en ellas se recogen las conclusiones parciales que se desarrollan a lo largo de cada apartado.

En éstas se incluye el análisis del planteamiento de la posible secuencia de actividades propuestas para el aula.

Justificación

Dentro de las matemáticas y de la educación matemática se considera importante el estudio de las diversas concepciones del paso al límite. Hablando inicialmente de los obstáculos epistemológicos, Sierpinska (citada en Neira et al., 2012), propone una lista de cinco obstáculos epistemológicos, a saber: *horror al infinito*, obstáculos ligados al concepto de función, obstáculos geométricos, obstáculos lógicos y obstáculos de símbolo. Tall (citado en Neira et al., 2012) afirma que "es el concepto de límite el que significa un paso a un plano más avanzado de pensamiento matemático y es el jalonador de procesos de desarrollo del pensamiento" (p. 26). Así desde otras posturas, ha surgido la necesidad de profundizar en el concepto de límite, y en general de los procesos del paso al límite; además se resalta su importancia en las demás ramas de las matemáticas; como por ejemplo en el cálculo, donde este resulta fundamental tanto en el desarrollo histórico de la disciplina como para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Actualmente, en la enseñanza del límite de una función, que es prácticamente el único contexto escolar en que se aborda el paso al límite, se presentan dos extremos. El primero, es que se cae en un proceso de cálculo algorítmico que no permite visualizar conceptos de importancia como el de entorno o vecindad. El segundo, da más importancia al saber formal desde la definición, denominada *definición formal* (o definición del concepto en términos de Tall), pero dejando de lado los obstáculos epistemológicos que conllevan la construcción del concepto, lo cual no va en dirección de la comprensión, sino en función de la reproducción de fórmulas, propiedades de los límites, y procesos algorítmicos de evaluación, dejando de lado el aprendizaje significativo.

Como aseguran Tall y Vinner (1981) la definición del concepto no garantiza su comprensión ya que puede existir una distancia infinita entre la definición del concepto y la imagen conceptual que se ha formado en la mente del individuo. De acuerdo con esto, Sierpinska (1994) se refiere a la comprensión como un proceso que reúne tanto el *conocimiento científico* como el *conocimiento común*. Basándose en la teoría de los obstáculos epistemológicos, esto cobra sentido relevante para los propósitos de nuestro trabajo cuando Cornu (1983) argumenta que el estudio de la historia de la noción de límite ha permitido identificar los principales obstáculos en su desarrollo y la manera en que se han podido superar. Si bien el contexto matemático ha evolucionado y los problemas en el desarrollo de esta noción no son los mismos, existen ciertas semejanzas entre los procesos de aprendizaje por parte de los estudiantes y la manera en que surge este concepto a nivel histórico.

Por lo tanto, se considera importante dejar en evidencia los problemas y obstáculos que se dieron a través de la historia y hacer un contraste con los obstáculos epistemológicos definidos por Sierpinska y Cornu, reconociendo así la historia como un ente importante para el desarrollo de la comprensión sobre la noción de límite.

Objetivos

General

Fundamentar la importancia que tiene el conocimiento del desarrollo histórico del paso al límite en la formación inicial de profesores de matemáticas

Específicos

I. Analizar el desarrollo histórico del paso al límite resaltando los focos específicos que están relacionados con la construcción de algunos conceptos matemáticos.

II. Reconocer la importancia de contar con argumentos teóricos, de carácter disciplinar, al momento de realizar actividades de enseñanza en las que esté inmersa la noción del paso al límite.

III. Identificar los problemas matemáticos más relevantes que den sentido al proceso del paso al límite, así como los obstáculos epistemológicos que se presentan en sus diferentes concepciones.

1. Marco De Referencia Didáctico

Para este capítulo abordaremos las diferentes concepciones sobre la comprensión, tomando como referencia a Sierpinska (1994) y Tall y Vinner (1981). Además, se presentarán las diferentes clasificaciones de los obstáculos epistemológicos relativos a noción de límite y por último se establecerá la diferencia entre el infinito actual y el infinito potencial.

1.1. Comprensión en Matemáticas por Anna Sierpinska

Sierpinska (1994) resalta la diferencia entre continuidad funcional y la continuidad estructural. Dentro de la continuidad funcional se establece una distinción entre los procesos de comprensión y los procesos de adquisición de conocimiento, teniendo en cuenta que no pueden separase por completo puesto que se complementan entre sí. En este sentido, se dice que, en dicha continuidad funcional, priman los procesos de comprensión puesto que implican la identificación, discriminación, generalización y síntesis de los conceptos. En cuanto a la continuidad estructural, se entiende como el desarrollo de la matemática a través de la historia, en la cual algo en la cognición se mantiene *esencialmente igual*.

Por otra parte, podemos establecer una diferencia entre la continuidad y discontinuidad del conocimiento, tomando principalmente las perspectivas de Bachelard y Cackowski (citados por Sierpinska, 1994). Bacherlard desde su posición del enfoque de discontinuidad; establece una distinción entre el conocimiento común y el conocimiento científico. Desde el conocimiento común, se distinguen las opiniones sociales catalogadas como irrefutables o *paradigmas socialmente aceptados*, por lo que representan un obstáculo a la hora de adquirir el conocimiento científico o riguroso de las matemáticas, puesto que el desarrollo histórico de dicho conocimiento científico se caracteriza por los hallazgos sólidos que se hicieron con base en las diferentes formas de pensar.

Cakowski (citado por Sierpinska, 1994) basa su modelo en dos puntos, refiriéndose a la estrecha relación entre el conocimiento científico y el conocimiento cotidiano, pues resalta que son imprescindibles uno del otro para el adecuado desarrollo de la comprensión. En este sentido, hace referencia a dos aspectos que no pueden ser desligados uno del otro, la formalización completa o rigurosidad matemática y el aprendizaje empírico, puesto que estos dos integran la visión

predominante del mundo con el sistema cognitivo, por lo tanto, se debe llevar un balance entre ellos, en la Figura 1 se muestra una síntesis de lo mencionado.

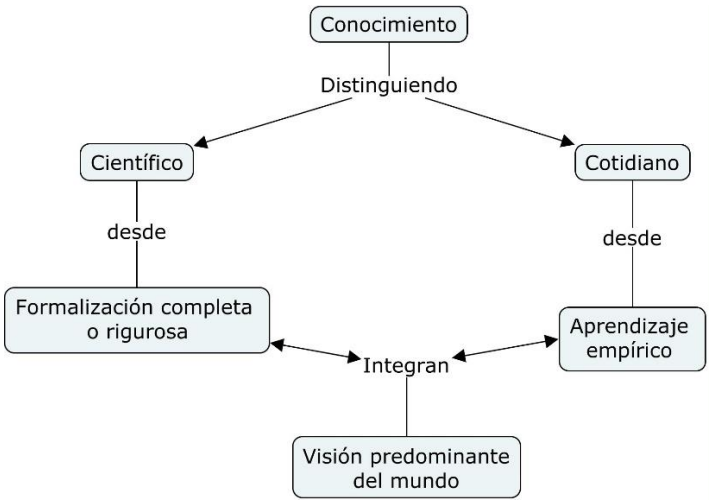


Figura 1: Distinción del conocimiento (construcción propia)

Por otra parte, resalta que el pensamiento humano es oscilante ya que su nivel de formalización depende de su nivel de desarrollo cognitivo, por tanto, cuando se habla de un cambio de nivel, se pueden presentar brechas conceptuales entre lo que se conoce de manera empírica y lo que se está aprendiendo de manera formal.

En este sentido Sierpinska se refiere al marco epistémico como los aprendizajes que tiene cada persona, independientemente de si son de carácter formal o empírico. Y resalta que a medida que un individuo adquiere conocimiento formal que le genere brechas con el conocimiento empírico, deberá existir una ruptura en sus esquemas mentales que le permitan adquirir nuevo conocimiento y que de esta manera este se pueda configurar dentro de su propio marco epistémico.

1.2. Comprensión Como Imagen y Definición Conceptuales en Matemáticas por Tall y Vinner

Tall y Vinner (1981), hacen énfasis en lo que ellos llaman *imagen conceptual*, que es la estructura cognitiva total asociada con un concepto, esta incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados que las personas tienen en su mente en relación con un concepto, un objeto o un proceso. Esta se constituye a través de los años y las experiencias, cambiando a medida que el individuo se encuentra con nuevos estímulos y madura. Todos los atributos mentales

asociados con un concepto ya sean conscientes o inconscientes, deben incluirse en la imagen del concepto.

A medida que se desarrolla la imagen conceptual, no es necesario que sea coherente en todo momento. La información sensorial estimula unas vías neuronales e inhibe otras. De esta forma diferentes estímulos pueden activar diferentes partes de la imagen conceptual, desarrollándolas de una manera que no necesita ser un todo coherente. A la porción de la imagen conceptual que se activa en un momento determinado Vinner la denomina *imagen conceptual evocada*. Así se puede concluir que en diferentes momentos se pueden evocar imágenes aparentemente conflictivas y que no necesariamente constituyen un todo coherente. Solo cuando se evocan simultáneamente aspectos conflictivos, debe haber una sensación real de confusión, lo cual debe ser aprovechado para generar desequilibrios conceptuales que permitan reacomodar la imagen conceptual.

De otra parte, está la *definición de un concepto* que es una forma generalmente redactada en palabras y que es utilizada para especificar ese concepto. Puede ser aprendido por un individuo de manera memorizada o con significado si esta la relaciona en un mayor grado con el concepto en conjunto. Es decir, no necesariamente la definición de un concepto está relacionada con la imagen conceptual que tiene el estudiante, es más, este cuando usa las palabras para dar la explicación de su imagen conceptual evocada, construye una definición personal del concepto que puede diferir de la definición del concepto formal (aceptada por una comunidad matemática y científica en general).

Por otro lado, un maestro puede dar la definición formal de un concepto y luego trabajar todo el tiempo con ejemplos que sólo evocan la parte procedimental del concepto, esto puede generar la imagen del concepto restringida, en un principio el estudiante puede sentirse satisfecho con esta imagen conceptual, ya que podría resultar práctico, pero cuando se enfrente a un problema que requiera del uso adecuado de la definición formal, en un contexto más amplio, encontrará dificultades para resolverlos ya que la imagen conceptual evocada no será de utilidad y podría estar supremamente restringida.

Cuando una parte del concepto de imagen o definición de concepto puede entrar en conflicto con otra parte del concepto imagen o definición, se dirá que este es un posible factor de conflicto. Un tipo de factor de conflicto es cuando la imagen del concepto está en desacuerdo con la definición

formal del concepto en sí. Estos factores pueden dificultar seriamente el aprendizaje de una teoría formal. Los estudiantes que tienen un posible factor de conflicto y están muy seguros de estas nociones, pueden considerar que la teoría formal es inoperante e innecesaria, o podría ocurrir que múltiples imágenes conceptuales conflictivas puedan coexistir sin generar aparentemente conflicto, es decir, seguir siendo funcionalmente operativas.

Muchos estudiantes tienen grandes dificultades para manipular las definiciones de límite y continuidad. Entonces se encuentran en una situación en la que pueden tener una imagen mental fuerte, pero la imagen de definición del concepto es débil. Entienden que las declaraciones globales de los teoremas son obvias, pero no pueden seguir formalmente las pruebas.

En niveles más avanzados, resulta mucho más difícil visualizar los conceptos como imágenes mentales y nunca pueden estar seguros de las intuiciones sugeridas por su imagen conceptual, que ahora puede ser una mezcla de imágenes conceptuales fuertes que tienen conflictos potenciales con la definición del concepto. La dificultad de formar una imagen conceptual adecuada, y los efectos coercitivos de una imagen inapropiada que tenga conflictos potenciales, pueden dificultar seriamente el desarrollo de la teoría formal en la mente del estudiante individual.

1.3. Noción de Obstáculo:

La noción de obstáculo se entiende como un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce errores, por esta razón se concibe como un conocimiento y no como una falta de él ni como una equivocación. Los obstáculos pueden inferirse a partir de los errores en las prácticas y la dificultad experimentada por los que participan en ellas (Neira et al., 2012)

Dentro de la clasificación de los obstáculos en general, se encuentran los siguientes, propuestos por Bruno D'Amore (2006):

- **Obstáculos de naturaleza ontogenética:** Se debe tener en cuenta la edad de cada individuo, "pues se hallan ligados al desarrollo de su inteligencia, sentidos y percepción" (D'Amore, 2006, p. 223), para así mismo determinar la pertinencia del objeto matemático a tratar, ya que este obstáculo se presenta a medida que el individuo crece y adquiere nuevos conocimientos.

- **Obstáculos de naturaleza didáctica:** Se trata de la transposición didáctica que realiza el maestro sobre algún objeto matemático, la cual considera pertinente, sin embargo, puede que este método que se escoge no sea eficiente para todos los estudiantes y no se puede garantizar el óptimo aprendizaje de todo el grupo o que eventualmente pueda causar una imagen conceptual funcional pero restringida o que incluso distorsione el objeto matemático.
- **Obstáculos de naturaleza epistemológica:** Para este caso se hace referencia a los objetos matemáticos según su desarrollo histórico, ya que entre estos se encuentran principalmente discrepancias en diversas definiciones de un mismo concepto a lo largo de la historia, lo que se conoce como "naturaleza misma del argumento" (D'Amore, 2006, p. 225).

Particularmente en la clasificación de estos obstáculos, nos centraremos en los de naturaleza epistemológica. Con respecto a lo anterior, Lizarralde & Ramírez (2016) citando a Cornu ubican los obstáculos históricos dentro de los epistemológicos, con respecto a la noción de límite y los clasifican de la siguiente manera:

- **El límite, noción metafísica:** Es caracterizado como uno de los principales obstáculos en el aprendizaje actual de los estudiantes, puesto algunos no consideran el límite como parte de las matemáticas, debido a que este concepto conlleva a una nueva forma de pensar las matemáticas más allá del cálculo y las deducciones; esto implica el paso del álgebra al análisis. Los estudiantes lo experimentan cuando se encuentran con el cálculo de un límite que no se puede resolver por un método algebraico.
- **La noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande:** Estas nociones constituyen obstáculos como "¿Será que existe un número más grandes que otros? ¿Existe un estado intermediario entre lo que es nulo y lo que no?" (Cornu, 1983, p.238) En este sentido se hace referencia a las cantidades evanescentes de Newton, lo cual ha significado una gran dificultad al hacer tender una cantidad a cero.
- **¿El límite puede ser alcanzado?** En muchas ocasiones se marca una distinción entre la tendencia a un número y ser igual. Es decir, en el estudio realizado por Tall y Vinner (1981), se encontró que los estudiantes en su mayoría consideran $0,\overline{9} \neq 1$, lo cual es evidencia de que esta dificultad persiste.

- **La transposición numérica** Debido a que la noción de limite aparece en principio en la geometría con las magnitudes diversas, se dificultó el paso al límite, y con esto los cálculos sobre los límites. Para poder resolver estas dificultades se debió hacer uso de transposición numérica de estos objetos independientemente de su naturaleza. Un ejemplo claro es la dificultad que tuvieron los griegos al llevar el límite sobre las magnitudes y no sobre los números, lo cual a partir de la geometría analítica de Descartes resultó ser más sencillo de trabajar.

Por otra parte, Sierpinska reconoce los siguientes obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- **Horror al infinito:** Se hace una agrupación de los obstáculos ligados a lo infinitamente grande o pequeño, rechazando la posibilidad de establecer el límite a magnitudes infinitas. Este obstáculo consiste en "asociar el paso al límite de un movimiento físico, con una aproximación" (Neira et al., 2012, p.24).
- **Obstáculos ligados al concepto de función:** A pesar de consolidarse el concepto de función como foco principal para la formulación de límite entendiéndose como concepto independiente de la intuición, uno de sus problemas principales está en la continuidad en relación con la restricción a una sucesión de valores y particularmente la no distinción de la noción de límite entre las cotas superior e inferior.
- **Obstáculos geométricos:** Este obstáculo se manifiesta cuando se difiere entre la magnitud variable y la magnitud constante a la que hace referencia el límite. Por ejemplo, cuando se busca hallar el área de un círculo y se calcula a partir de polígonos inscritos, cuya cantidad de lados tiende a ser infinita, o pensar en la circunferencia como un polígono regular de infinitos lados que no tiene *lados* (para referirse a segmentos de recta).
- **Obstáculos lógicos:** "ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden" (Neira et al., 2012, p. 25). Este se evidencia fuertemente en la definición formal de límite con elementos lógicos como *el para todo, existe, tal que* y los problemas relacionados con la existencia y la unicidad.
- **Obstáculos de símbolo:** Se refiere al rechazo de introducir un símbolo analítico que represente el paso al límite.

De acuerdo con la clasificación descrita anteriormente, podemos establecer relaciones entre los obstáculos geométricos y de símbolo que menciona Sierpinska y el obstáculo de transposición numérica propuesto por Cornu. Dado que estos obstáculos se refieren a la dificultad entre la relación de los distintos sistemas de representación desde los cuales se plantea el paso al límite.

Por otra parte, se evidencia como aspecto en común el Horror al infinito con la noción de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande además del obstáculo en el cual se pregunta si el límite puede ser alcanzado, puesto que para ambos casos se niega la correspondencia entre una magnitud infinita y su aproximación en el paso al límite.

De acuerdo con Bruno D'Amore (2017) el obstáculo epistemológico no está vinculado únicamente a los factores conceptuales sino a factores sociales, en los cuales la historia pura de las matemáticas entra en contacto con la historia de las prácticas humanas.

Se reconoce la cultura como algo más allá de un obstáculo para el conocimiento, la cultura es de la misma naturaleza del conocimiento y está presente en todo lo referente al aspecto cognitivo. Se habla del reconocimiento entre el aspecto cultural y el aspecto cognitivo para no caer en posturas ingenuas, en las que se considere una separación entre estos dos, "para descubrir las verdades eternas en las cuales se supone que la matemática está constituida, se requiere de un ser humano [...] que necesariamente vive y respira en un contexto cultural" (D'Amore, 2017, p. 173)

1.4. Infinito Actual e Infinito Potencial

Se considera a lo largo de la historia, el infinito como "lo que no se deja recorrer y carece de límite" (Castro & Pérez, 2007, p. 16) a partir de esto, se distinguen dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. El primero fue aceptado por los matemáticos hasta el siglo XVII antes de que Georg Cantor introdujera el infinito actual como un objeto matemático, más allá de entenderlo como un objeto metafísico, a continuación, se describen brevemente estos conceptos.

1.4.1. Infinito Potencial

La idea de infinito potencial aparece a partir de la construcción progresiva de sucesiones de elementos, que nunca se enfrentan al infinito en su totalidad. Por su parte Castro y Pérez (2007) lo definen como una construcción a lo largo del tiempo. Este hecho lo podemos ejemplificar como

mencionan Franco y Ochoviet (2006) haciendo alusión al relato de Vasconcelos en su novela *Rosinha mi canoa* quien muestra una idea del infinito potencial: "Si un palomo, cada mil años, llegase a la tierra y se llevara un granito de arena a la vez, cuando se gastara la arena del mundo entero la eternidad aún estaría comenzando" (p. 509).

1.4.2. Infinito Actual

Una noción de lo que representa el infinito actual se puede ilustrar en un fragmento del texto de Borges *El Aleph*, citado por Franco y Ochoviet (2006): "Aclaró que un Aleph es uno de los puntos en el espacio que contiene todos los puntos." (p. 510)

De esta manera podemos deducir que el infinito actual hace referencia al infinito en su totalidad, siendo este ajeno al orden de sus elementos. En este sentido se resalta la importancia del trabajo de Georg Cantor, quien considera al infinito como *algo ya consumado* siendo el primero en aceptar el infinito actual como un objeto matemático.

1.5. Conclusiones Parciales

La imagen conceptual, la podemos asociar al conocimiento común, teniendo en cuenta que ambas hacen referencia al conocimiento que se desarrolla de manera intuitiva, desde la experiencia, desde lo observado y/o las propiedades deducidas de manera empírica. Específicamente, cuando nos refiramos a alguno de estos conceptos más adelante, tomaremos el propuesto por Tall y Vinner.

En el momento en que se comienza a establecer un concepto, pero desde un punto de vista formal o riguroso, con una imagen conceptual previa, se generan brechas conceptuales, por ende, si no hay una ruptura en los esquemas mentales del individuo, pueden surgir obstáculos que son de carácter epistemológico.

Particularmente, cuando hablamos de la noción de limite que desarrollan los estudiantes en su paso por la escuela, estos se ven enfrentados a distintas dificultades debido a que existen conflictos que surgen entre las imágenes conceptuales evocadas sobre esta noción, adquiridas muchas de ellas desde su cotidianidad, y su definición formal. Es decir, lo que un estudiante entiende por límite no siempre coincide con lo que está aceptado por una comunidad científica.

Con respecto a lo anterior de manera natural surgen las siguientes inquietudes; ¿Esa imagen conceptual que tiene un estudiante del límite, puede relacionarse con la imagen mental que tuvieron algunos matemáticos a lo largo de la historia? ¿los obstáculos presentados por los estudiantes tendrían relación con los obstáculos históricos? Estos interrogantes serán foco de análisis en este trabajo.

2. Desarrollo Histórico del paso al Límite

En este capítulo se pretende realizar un desarrollo histórico sobre el paso al límite, desde las diferentes concepciones consideradas por Medina (2001): la geométrica, las de Newton y Leibniz, la concepción algebraica y aritmética, hasta llegar a la concepción analítica de Weierstrass. Con el fin de identificar dentro de estas concepciones la incidencia del paso al límite en la construcción de conceptos matemáticos y a su vez, los problemas matemáticos que contribuyeron a configurar el paso al límite como un proceso matemático. Dentro de dichos problemas, se resalta cuáles han sido los posibles obstáculos epistemológicos o culturales que más incidencia tuvieron durante estas épocas, así mismo de ser posible, identificar cómo lograron superar estos obstáculos. Teniendo en cuenta la postura de Medina (2001), desde la cual expone que dichas concepciones no son disyuntas entre sí.

2.1. Concepción Geométrica

Los principales aportes a la noción de límite se dieron desde la geometría con Eudoxo y Arquímedes, quienes a partir del método de exhaución logran determinar magnitudes tan grandes y pequeñas como se desee. Por último, se describen los aportes que realizan Kepler y Cavalieri desde lo que ellos denominan como infinitesimal e indivisibles respectivamente.

2.1.1. Los Inconmensurables y El Método de Exhaución de Eudoxo

En la escuela pitagórica es donde inicialmente se desarrolla con cierto rigor el infinito potencial, cuando se refiere a secuencias de la forma:

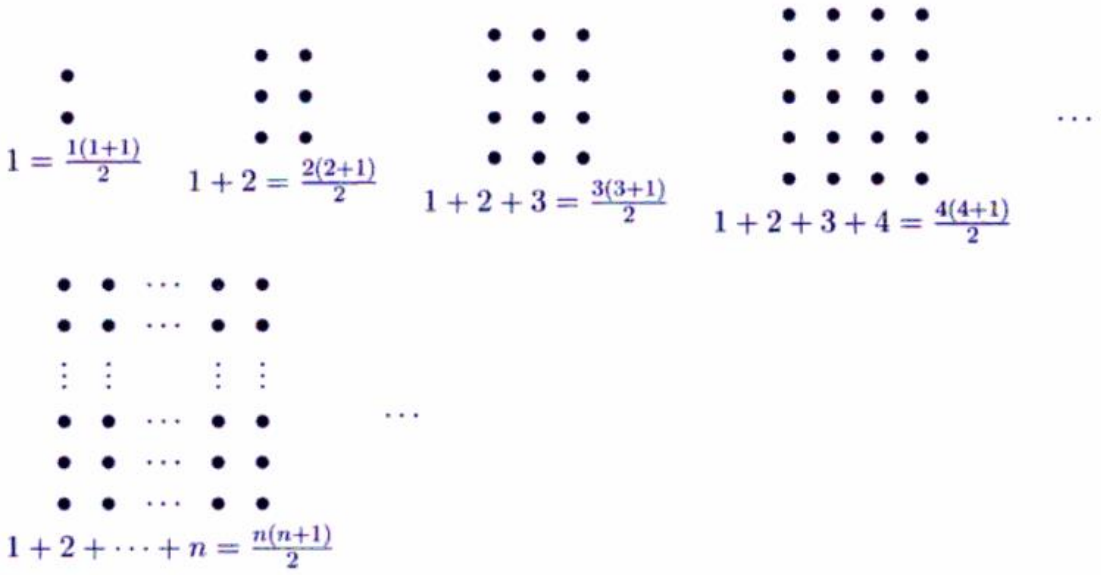


Figura 2: Secuencia Pitagórica, Castro y Pérez (2007)

Según Castro y Pérez (2007) esta secuencia muestra la manera pitagórica de entender la relación

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En donde sus características principales están dadas por un inicio y una regla establecida para pasar de un estado dado, al siguiente, y de este al siguiente y así sucesivamente.

La definición 13 del libro 1 de los elementos de Euclides se presenta el límite como el extremo de algo, además la definición 14 plantea que una figura es aquello que está contenido en cualquier límite o límites. Desde estas definiciones se establece el límite como algo que se puede alcanzar.

Sin embargo, para los griegos el tratamiento del infinito se consideraba como un problema debido a que estaba estrechamente relacionado, más allá de los procedimientos matemáticos que involucraban, con sus concepciones ideológicas. De hecho, es en la escuela pitagórica que surge el problema de los inconmensurables, a partir de la demostración del teorema *la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables*.

A continuación, se presenta una estructura general de la demostración de este teorema en el lenguaje de las traducciones contemporáneas, el lector podrá revisar los detalles de esta demostración en Castro y Pérez (2007):

Se dice que dos segmentos a y b son conmensurables, si existe un tercero x tal que $a = nx$ y $b = mx$ para algún $n, m \in \mathbb{Z}^+$

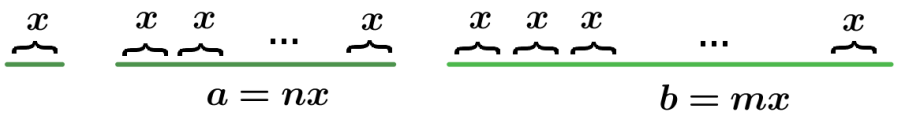


Figura 3: Segmentos conmensurables

Supongamos que la diagonal del cuadrado y su lado son conmensurables, entonces existe una magnitud x en común entre la diagonal y el lado del cuadrado $\boxdot ABCD$, así:

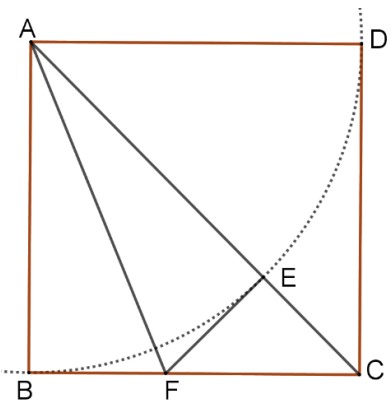


Figura 4: Diagonal del cuadrado

Teniendo en cuenta que:

$\overline{AE} \cong \overline{AB}$ y $m\angle FBA = m\angle FEA = 90°$.

Existen m, $n \in \mathbb{N}$ tales que $AB = mx$ y $AC = nx$, dado que se asume que son magnitudes conmensurables (guardan proporción), de ahí que

$$EC = (n - m)x$$

Se tiene que $\triangle ABF \cong \triangle AEF$ por criterio ALL para triángulos rectángulos, luego $\overline{BF} \cong \overline{FE}$. Por otra parte, $\triangle CEF \sim \triangle CBA$ por criterio AAA, entonces $\overline{EC} \cong \overline{FE}$ dado que $\triangle CBA$ es isósceles. De donde se tiene que $\overline{BF} \cong \overline{EC}$ y, por lo tanto:

$$FC = BC - BF = mx - (n - m)x = (2m - n)x$$

Sea $n_2 = (2m - n)$ y $m_2 = n - m$.

De ahí que $0 < n_2 < n$.

Constrúyase el cuadrado de lado $EC = m_2 x$ y diagonal

$$FC = n_2 x$$

Si se procede de manera similar a como se hizo con el cuadrado $\boxdot ABCD$, es posible construir el cuadrado $\boxdot HIJC$ sobre la diagonal $\overline{FC}$ del cuadrado $\boxdot FECG$, tal que $HC = m_3 x$ y

$IC = n_3 x$ con $m_3, n_3 \in \mathbb{N}$ y además $0 < n_3 < n_2$.

Este proceso puede ser realizado de forma indefinida y particularmente, generar números naturales tales que

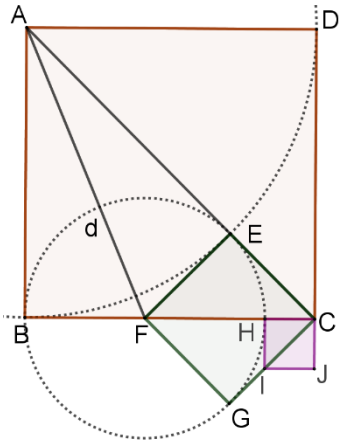


Figura 5: Construcción indefinida de números naturales

$$n > n_2 > n_3 > \cdots > n_k > \cdots$$

Lo cual lleva a una contradicción, dado que toda sucesión decreciente de números naturales tiene un elemento mínimo (Castro & Pérez, 2007).

Por lo tanto, se deduce la existencia de números que son inconmensurables, razón por la cual la escuela pitagórica decide esconder el hallazgo y trabajar únicamente con razones conmensurables. Este descubrimiento traería como consecuencia el derrumbe de toda la teoría pitagórica, refutando su principal creencia de que los números podían medirlo todo. Aun así, la demostración fue publicada por Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras, lo que causó al parecer, que fuera arrojado al mar por divulgar su resultado fuera de la escuela.

A partir de esto, Eudoxo de Cnido sostiene que no es necesario suponer la existencia de magnitudes infinitamente pequeñas, por el contrario, considera que se puede *conseguir una magnitud tan pequeña como se quiera*, partiendo de su definición de razones iguales, citada por Castro y Pérez (2007) (Definición 5 del libro V de los Elementos de Euclides):

> Se dice que la primera de cuatro cantidades tiene la misma razón respecto de la segunda como tiene de la tercera respecto de la cuarta, cuando, siempre que consideremos equimúltiples (iguales múltiplos) de la primera y la tercera, y cualquier otro tipo de equimúltiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual a, o menor

que el múltiplo de la segunda cuando el múltiplo de la tercera es mayor, igual, o menor que el múltiplo de la cuarta (p.7).

Castro y Pérez (2007) lo escriben en la actual simbología como sigue:

Dadas dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son iguales, si dados dos enteros m y n cualesquiera, entonces:

I) $ma > nb$ cuando $mc > nd$
II) $ma < nb$ cuando $mc < nd$
III) $ma = nb$ cuando $mc = nd$

Gracias a esta definición de razones iguales, se puede establecer correctamente la demostración de la proposición 1 del libro VI de los Elementos de Euclides *Los triángulos (y los paralelogramos) que tienen la misma altura son entre sí como sus bases*. Puesto que dichas demostraciones hechas por los pitagóricos al ser basadas en la conmensurabilidad de dos segmentos pierden toda validez pues son una condición innecesaria.

Nótese que en Eudoxo es indistinguible la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas, puesto que como afirman (Rodríguez & Sandoval, 2016) la definición de Eudoxo aplica para ambas. Por ello Eudoxo, sin distinguir entre magnitudes conmensurables o inconmensurables, formula el lema (Definición 4 del libro V de Elementos de Euclides) "dadas dos magnitudes en las que existe una razón, se puede encontrar un múltiplo de una de ellas que exceda a la otra" (Collette, 1973, p. 98) el cual es conocido como *axioma de Eudoxo-Arquímedes* o *axioma de continuidad* ya que es Arquímedes quien considera esta definición como postulado. Según Lizarralde y Ramírez (2016) si bien gracias a este axioma se establecen magnitudes *tan grandes o pequeñas como se quiera*, estas excluían los números infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

Por otra parte, a Eudoxo se le atribuye la creación del método de exhaución, el cual fue usado principalmente para el cálculo de áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de sólidos. De esta manera puede establecerse una relación con el paso al límite cuando se considera la magnitud del área o volumen. Por ejemplo, para una figura curvilínea se puede considerar que el área *A* es "el

límite de las áreas de los polígonos $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots\}$" (Rodríguez & Sandoval, 2016, p. 12) Para esto se busca un polígono cuya diferencia con el área A sea *tan pequeña como se quiera*.

"Se dice que dada una cantidad infinitamente pequeña c, se debe encontrar un polígono p_n de tal manera que la diferencia $a(A) - a(p_n)$ sea menor que c, para un n suficientemente grande." (Rodríguez & Sandoval, 2016, p.13)

Para encontrar el p_n se utiliza el *principio de Eudoxo* el cual da inicio al método de exhaución y es demostrado por Euclides como la proposición 1 del libro X de *Los Elementos (*Rodríguez & Sandoval, 2016*)*:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. (p.13)

Dadas dos magnitudes, R_0 y una cantidad infinitamente pequeña c. Si $\{R_1, R_2, R_3, \dots\}$ es una magnitud de tal forma que:

$$R_1 < \frac{1}{2}R_0, \qquad R_2 < \frac{1}{2}R_1, \qquad R_3 < \frac{1}{2}R_2 \dots$$

Entonces, se puede encontrar un n en los naturales tal que $R_n < c$.

Aplicando el axioma de Eudoxo-Arquímedes, podemos encontrar un entero positivo N tal que $(N+1)c > R_0$

De ahí que se obtenga la desigualdad: $R_1 < \frac{1}{2}R_0 < \frac{1}{2}(N+1)c < Nc$

De manera análoga, se tiene: $R_2 < \frac{1}{2}R_1 < \frac{1}{2}Nc < (N-1)c$

Así sucesivamente hasta encontrar la desigualdad deseada: $R_n < c$

De ahí que podamos afirmar, que siempre hay un número más pequeño que uno infinitamente pequeño dado.

De acuerdo con Rodríguez & Sandoval (2016) Eudoxo demuestra de manera rigurosa, los siguientes teoremas enunciados por Hipócrates y Demócrito descritos en los Elementos de Euclides, haciendo uso de lo que hoy se conoce como *principio de Eudoxo*:

- Proposición 2 (libro XII): Los círculos están entre sí en la razón de los cuadrados de sus diámetros.
- Proposición 7 (libro XII): Los prismas de base triangular se dividen en tres pirámides iguales entre sí, que tienen bases triangulares.
- Proposición 10 (libro XII): Todo cono es la tercera parte del cilindro, que tiene la misma base e igual altura.

A partir de estas proposiciones se obtiene el *lema de exhaución del círculo* expresado de manera simbólica por Rodríguez & Sandoval (2016) como sigue:

> Dado un círculo C y una cantidad infinitamente pequeña e, se puede encontrar un polígono regular P inscrito en e de tal modo que, si al área del círculo $a(C)$, $a < \varepsilon$ le restamos el área del polígono inscrito $a(P)$, esta diferencia debe ser menor que e (p. 15).

Si observamos el cuadrado inscrito en el círculo, se dice que la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo, dado que el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito, que a su vez es mayor que el círculo.

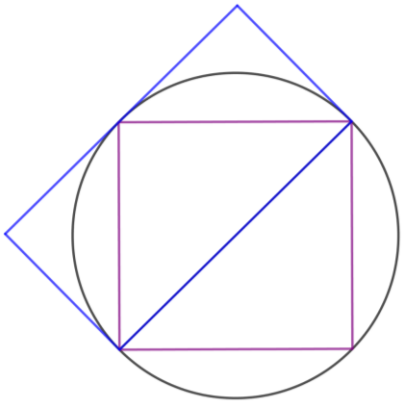


Figura 6: Cuadrado inscrito

Ahora, sobre cada lado del cuadrado se construye un triángulo isósceles, bisecando el arco cuya cuerda es el lado del cuadrado y de ahí se obtiene un octágono regular inscrito en el círculo:

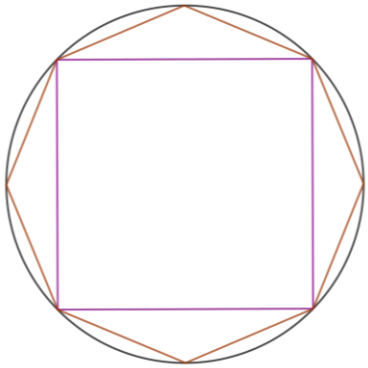


Figura 7: Exhaución del círculo

De ahí que la diferencia entre los sectores circulares (determinados por cada lado del cuadrado y el círculo) y sus respectivos triángulos isósceles, por los cuales se determinan los lados del octágono, es menor a la mitad de cada sector circular. Si se repite nuevamente la bisección en cada lado del octágono regular, se obtiene por cada proceso un polígono regular inscrito en el círculo, cuyos números de lados es el doble que el número de lados del precedente.

2.1.2. Arquímedes, Superficie del Segmento Parabólico y El Arenario

Según los historiadores Demócrito de Abdera (460-360 a.C.) es de quien se sabe que tiene la idea más antigua de lo infinitamente pequeño, al punto que su escuela es conocida como *los atomistas* que está asociada a la manera de entender las circunferencias y los círculos. Es decir, Demócrito es quien sugirió por primera vez, que las circunferencias y los círculos, son polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños.

Las ideas de Demócrito fueron alabadas por algunos filósofos y rechazada por otros. Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), en la carta a Eratóstenes atribuye a Demócrito el cálculo de la pirámide; y en este sentido, se puede afirmar que este ya tenía la idea del volumen de un sólido como la suma de planos paralelos infinitamente delgados.

Estás ideas las retomó Arquímedes, para argumentar teoremas. Uno de los más relevantes es el cálculo de la longitud de una circunferencia, que está basado en el método de exhaución de Eudoxo. Otro aporte importante de Arquímedes basados en las ideas de Demócrito y Eudoxo es el cálculo del área de un segmento parabólico, que se traduce a la proposición 24 de *El Método*, “El área del segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que del segmento” (Rodríguez y Sandoval, 2016, p. 15). En Rodríguez

y Sandoval (2016) reproducen una demostración que se asemeja al lenguaje en la época. Para esta demostración Arquímedes utiliza las proposiciones 1, 3, 19, 21 y 23, que se encuentran en el libro de crónicas de Euclides.

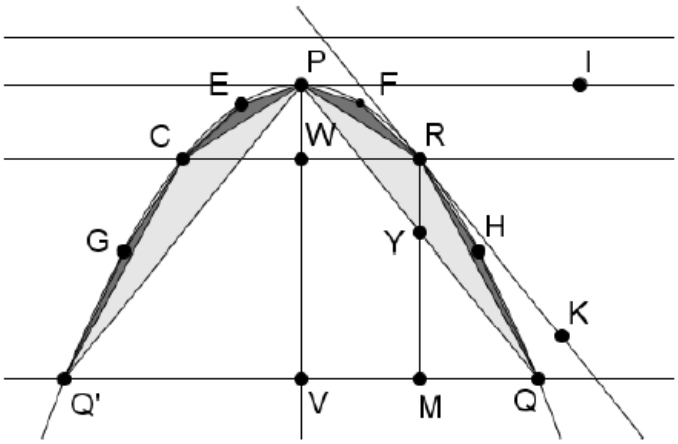


Figura 8: Área de segmento parabólico, Sandoval y Rodríguez (2016)

Se puede afirmar que el área del triángulo PRQ es la octava parte del área del triángulo PQQ', esto mismo se puede afirmar con el triángulo PCQ' y PQQ'. Luego la suma de las áreas de los triángulos PRQ y PCQ' son la cuarta parte del triángulo PQQ'.

$$\frac{PQQ'}{8} = \frac{PRQ}{1}\frac{PQQ'}{8} = \frac{PCQ'}{1}$$

$$\frac{PQQ'}{4} = \frac{PRQ}{1} + \frac{PCQ'}{1}$$

$$\frac{FRP}{1} = \frac{PQQ'}{8^2}$$

$$FRP + HRQ + EPC + GCQ' = \frac{PQQ'}{4^2}$$

De este modo el proceso se repite con todos los triángulos que van surgiendo de forma infinita[1], por lo que se encuentra la siguiente suma:

[1] Se hace la aclaración de que Arquímedes cuando hablaba de infinito, se refería al infinito potencial.

$$PQQ' + \frac{1}{4}PQQ' + \frac{1}{4^2}PQQ' + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}PQQ'$$

"Dado que Aquímedes no contaba con las herramienta actuales del cálculo para hallar el resultado de tal suma, recurre a la proposición 23 y obtiene lo siguiente" (Sandoval & Rodriguez, 2016)

$$PQQ' + \frac{1}{4}PQQ' + \frac{1}{4^2}PQQ' + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}PQQ' + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}PQQ' = \frac{4}{3}PQQ'$$

Luego por reducción al absurdo se llega a demostrar que dada la superficie S del segmento parabólico es igual a $\frac{4}{3}PQQ'$, descartando los casos en que $S < \frac{4}{3}PQQ'$ y $S > \frac{4}{3}PQQ'$. Para una la demostración detallada se puede recurrir a (Rodriguez & Sadoval, 2016).

El Arenario. Otro acercamiento que tuvo arquímedes a la noción de infinito, es en su obra *El Arenario,* en donde demostró que algunas cantidades aunque parecieran infinitas, resultaban ser finitas. Arquímedes asegura que muchos pensadores de su época, tenían la convicción de que la cantidad de granos de arena en la tierra era infinita. Por medio de deducciones matemáticas, él demuestra no solo que la cantidad de granos de arena en la tierra es finita, si no que al rellenar el universo con granos de arena, está cantidad también sería finita. Aunque Arquímedes siempre se refirió al infinito potencial, en esta obra hizo un acercamiento al infinito actual, mostrando que las cantidades contables son finitas aunque sean muy grandes.

A continuación se reproducirá las partes más relevantes de la demostración mencionada anteriormente. El lector puede observar los detalles de esta demostración en "El Arenario" (s.f.)

Primero Arquímedes parte de cuatro supuestos:

I) Perimétro de la tierra no es mayor a 3000.000 estadios[2].
II) El diámetro de la tierra es mayor al de la luna, y el diámetro del sol es mayor al de la tierra.
III) El diámetro del sol no es mayor a 30 veces el diámetro de la luna.

[2] Un estadio equivale a 201,168 metros aproximadamente. Era una unidad de longitud griega, que tenía como patrón la longitud del estadio de Olimpia.

IV) Diametro del sol es mayor que un lado del chiligono[3].

Para abreviar se hará la asignación de la siguientes variables

$P_t = perímetro\ de\ la\ tierra$ $\quad$ $d_t = diámetro\ de\ la\ tierra$

$d_l = diámetro\ de\ la\ luna$ $\quad$ $d_s = diámetro\ del\ sol$

$l_{ch} = lado\ del\ chiliágono$ $\quad$ $P_{ch} = perímetro\ del\ chilíagono$

$d_u = diámetro\ del\ universo$

Por hipótesis se tiene que

$$d_s \leq 30d_t$$

y además

$$d_t > d_l$$

luego,

$$d_s < 30d_t$$

por otro lado se tiene que

$$d_s > l_{ch}$$

de modo que

$$P_{ch} < 1.000d_s < 30.000d_t$$

Pero el perimétro de un polígono regular con más de seis lados inscritos en un circulo es mayor que el hexágono regular inscrito, y por lo tanto mayor que tres veces el diámetro[4]. Luego

$$P_{ch} > 3d_u$$

De esto se deduce que

$$d_u < 10.000d_t$$

[3] Polígono regular de 1000 lados inscrito en la circunferencia máxima del universo

[4] Los griegos tenían este tipo de cálculos fruto de los intentos para aproximar π

Pero se tiene de hipótesis que

$$P_t \leq 3.000.000\ estadios$$

por lo tanto

$$d_t < 1.000.000\ estadios$$

de donde

$$d_u < 1.000.000.000\ estadios$$

Órdenes y Periodos de Números. Arquímedes se las ingenió para establecer una simbología para los números muy grandes y así poder continuar con su demostración, de esto resulta la siguiente tabla:

Primer Periodo	
Primer orden	1 a 10^8
Segundo orden	10^8 a 10^{16}
Tercer orden	10^{16} a 10^{24}
(10^8) ésimo orden	$10^{8(10^8-1)}$ a 10^{8*10^8} (llamaremos P)
Segundo periodo	
Primer orden	$P * 1$ a $P * 10^8$
Segundo orden	$P * 10^8$ a $P * 10^{16}$
(10^8) ésimo orden	$P * 10^{8(10^8-1)}$ a $P * 10^{8*10^8}$
(10^8) ésimo Periodo	
Primer orden	$P^{10^8-1} * 1$ a $P^{10^8-1} * 10^8$

Segundo orden	$P^{10^8-1} * 10^8$ a $P^{10^8-1} * 10^{16}$
(10^8) ésimo orden	$P^{10^8-1} * 10^{8(10^8-1)}$ a $P^{10^8-1} * 10^{8*10^8}$ (es decir P^{10^8})

Tabla 1: órdenes y periodos de los números

Aplicación al Número de Arena. Por suposición, el diámetro, d_A, de la semilla de adormidera[5] es $d_A \leq \frac{1}{40}$ el ancho del dedo; y como las esferas están una con otra en la razón triplicada de sus diámetros, es decir el volumen de la esfera se aproxima a cubo de su diámetro, se tiene

$$\begin{aligned}(esfera\ de\ un\ diámetro\ del\ ancho\ de\ un\ dedo) &\leq 64.000\ semillas\ de\ adormidera \\ &\leq 640.000.000\ granos\ de\ arena \\ &= 6\ unidades\ de\ segundo\ orden + 40.000.000\ unidades\ de\ primer\ orden \\ &< 10\ unidades\ de\ segundo\ orden\ de\ números\end{aligned}$$

Ahora se va a incrementar gradualmente el diámetro de la esfera multiplicándolo por 100 cada vez. Recordando que la esfera es de este modo multiplicada por 100^3, al número de granos de arena que estarían contenidos en una esfera con cada diámetro sucesivo, como sigue:

Diámetro de la esfera	Número correspondiente de granos de arena
100 dedos	$< 1.000.000$ $\times 10\ unidades\ de\ segundo\ orden$ $< (término\ 7º\ de\ la\ serie)$ $\times (término\ 10º\ de\ la\ serie)$ $< término\ 16\ º\ de\ la\ serie\ (o\ sea\ 10^{15})$ $< 10^7\ unidades\ de\ segundo\ orden$

[5] Semilla de adormidera o amapola tiene un diámetro aproximado de 0,5 mm.

10.000 dedos	$< 1.000.000 \times (\text{último número})$ $< (\text{término } 7º \text{ de la serie})$ $\times (\text{término } 16º \text{ de la serie})$ $< \text{término } 22 º \text{ de la serie } (o \text{ sea } 10^{21})$ $< 10^5 \text{ unidades de tercer orden}$
1 estadio (<10.000 dedos)	$< 100.000 \text{ unidades de tercer orden}$
100 estadios	$< 1.000.000 \times (\text{último número})$ $< (\text{término } 7º \text{ de la serie})$ $\times (\text{término } 22º \text{ de la serie})$ $< \text{término } 28 º \text{ de la serie } (o \text{ sea } 10^{27})$ $< 10^3 \text{ unidades de cuarto orden}$
10.000 estadios	$< 1.000.000 \times (\text{último número})$ $< (\text{término } 7º \text{ de la serie})$ $\times (\text{término } 28º \text{ de la serie})$ $< \text{término } 34 º \text{ de la serie } (o \text{ sea } 10^{33})$ $< 10 \text{ unidades de quinto orden}$
1.000.000 estadios	$< (\text{término } 7º \text{ de la serie})$ $\times (\text{término} 34º \text{ de la serie})$ $< \text{término } 40 º \text{ de la serie } (o \text{ sea } 10^{39})$ $< 10^7 \text{ unidades de quinto orden}$
100.000.000 estadios	$< (\text{término } 7º \text{ de la serie})$ $\times (\text{término} 40º \text{ de la serie})$ $< \text{término } 46 º \text{ de la serie } (o \text{ sea } 10^{45})$ $< 10^5 \text{ unidades de sexto orden}$

10.000.000.000 estadios	$< (término\ 7º\ de\ la\ serie)$ $\times (término\ 46º\ de\ la\ serie)$ $< término\ 52\ º\ de\ la\ serie\ (o\ sea\ 10^{51})$ $< 10^3\ unidades\ de\ septimo\ orden$

Tabla 2: Número correspondiente de granos de arena

Pero, por una proposición anterior el diámetro del Universo es menor a 10.000.000.000 estadios, luego, el número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño del universo es menor que 1.000 unidades del séptimo orden de números (10^{51})

De este modo Arquímedes demuestra que el número de granos de arena contenidas en una esfera del tamaño del universo[6], aunque muy grande, es finito. Esto da una muestra de la noción de infinito de Arquímedes.

2.1.3. Aproximación Finita según Kepler y Cavalieri

Nicolás Copérnico (1473-1543) en el renacimiento europeo, desarrolló sus tratados sobre el movimiento planetario, donde sostiene que la tierra se mueve alrededor del sol; tratado del cual intentó posponer su publicación dada la imposibilidad de separar el aspecto filosófico de la época, con lo religioso. Dichos tratados fueron considerados como herejías por la inquisición Romana, aproximadamente 80 años después de su publicación.

Johann Kepler (1571-1630) nombrado matemático de su cristianísima majestad, y bajo su orden desarrolló teorías asociadas al movimiento planetario, basado en el pensamiento copernicano, sin embargo, tuvo que abandonar la escuela debido a persecuciones religiosas. Compartió varias de sus teorías con su contemporáneo Galileo (1564-1642) quien, al ver su teoría basado en las ideas copernicanas, decide inicialmente no ayudarlo a realizar sus investigaciones. Sin embargo, posterior a realizar varias críticas a científicos de su época, decide retomar la idea que le presentó Kepler y realiza nuevamente estudios astronómicos centrados en las ideas copernicanas, y de ellos deriva su *Diálogo sobre los dos sistemas del mundo* por el cual es sometido ante el tribunal de la

[6] Los griegos consideraban el Universo como una esfera con la distancia de la tierra al sol como radio.

inquisición en 1633, donde se ve obligado a retractarse públicamente de sus doctrinas relativas al movimiento de la tierra.

Dentro de los principales aportes de Kepler a las matemáticas, se encuentra la introducción de la concepción infinitesimal de la curva, la cual es necesaria para poder demostrar lo que hoy se conoce como segunda ley del movimiento planetario, en la cual se plantea que: "la recta que une el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales." (Collette, 1973, p. 310)

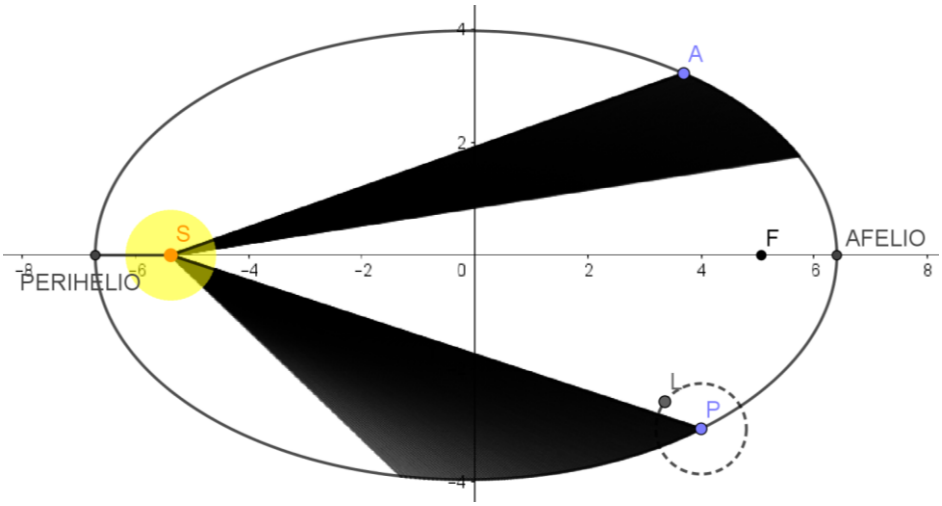


Figura 9: Área barrida por el radio vector

"Un planeta *P* describe una elipse y la recta *PS* barre áreas *A* y *B* iguales, en tiempos iguales." (Collette, 1973, p. 310) Dichas áreas son constituidas por triángulos infinitamente pequeños compartiendo uno de sus vértices, el sol, y los otros dos, situados sobre la órbita a distancias infinitamente pequeñas a medida que son "ocupados" por el movimiento del planeta. De esta manera Kepler también describe el área de la elipse, haciendo uso de la concepción infinitesimal de la curva y en su libro *Nova stereometria doliorum* determina el volumen de algunos sólidos que se generan al hacer girar una curva alrededor de una recta. De esta manera según Collette (1973) Kepler añade 90 sólidos más a los que había estudiado Arquímedes.

Según Lizarralde y Ramírez (2016) se considera a Kepler como uno de los primeros matemáticos en abandonar el esquema de prueba formal propuesta por Arquímedes, dado su poco interés hacia las pruebas, introduciendo así *el uso libre de los conceptos infinitesimales*.

Por su parte, Galileo en una de sus discusiones sobre el infinito, lo infinitesimal y la naturaleza del continuo, introduce el infinito actual como algo terminado y finalmente concluye que el infinito y la indivisibilidad, son incomprensibles para el hombre. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) uno de los mejores alumnos de Galileo, retoma estas ideas sobre la indivisibilidad y los infinitesimales al publicar en 1635 el *Tratado de los indivisible* y en él su método de los indivisibles, a partir del cual se establece una técnica geométrica para el cálculo de las cuadraturas; el cual se puede ilustrar con el llamado *Teorema de Cavalieri*:

> Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que se obtienen por planos paralelos a las bases y a igual distancia de éstas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están también en la misma razón. (Collette, 1973, p. 314)

Considera los *indivisibles* como una expresión para referirse a los elementos que constituyen las figuras. Tomando el ejemplo que proponen Castro y Pérez (2007) sobre la forma en que Cavalieri calculaba el volumen de un cono circular de radio r y altura h, comparado con una pirámide cuadrada P de altura h y su base es un cuadrado de lado 1.

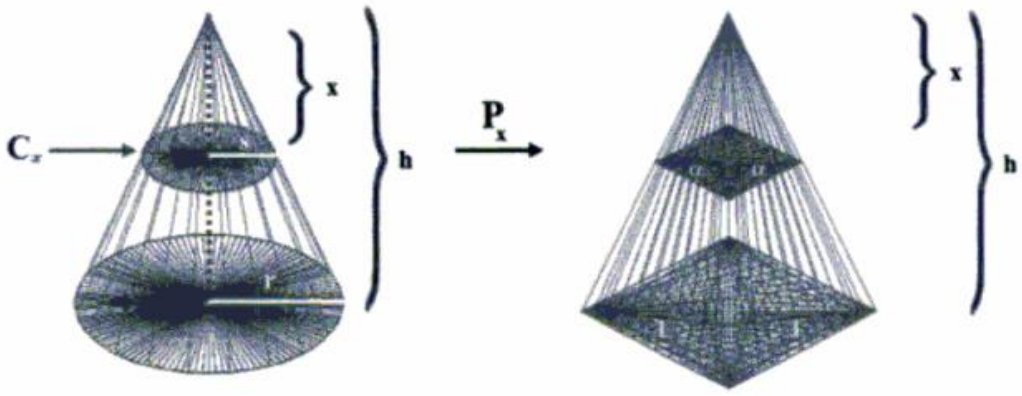


Figura 10: Volumen del cono y la pirámide de altura h (Castro & Pérez, 2007)

Conociendo el volumen de la pirámide de base cuadrada $V(P) = \frac{h}{3}$. Si C_x es la sección comprendida por un plano paralelo a la base del cono a una distancia x del vértice y P_x es la sección comprendida por un plano paralelo a la base de la pirámide a una distancia x del vértice; de ahí que el área de C_x, es $A(C_x) = \pi s^2$ siendo s el radio de la respectiva sección. Así mismo, se tiene que $A(p_x) = \alpha^2$ sabiendo que α es un lado de la sección paralela a la base de la pirámide.

Por semejanza de triángulos se tiene en el cono que $\frac{x}{s} = \frac{h}{r}$ y en la pirámide $\frac{x}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$, de ahí que $s = \frac{xr}{h}$ y $\alpha = \frac{x}{h}$ por tanto se tendría:

$$A(C_x) = \pi\left(\frac{xr}{h}\right)^2 \text{ y } A(P_x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Luego $\frac{A(C_x)}{A(P_x)} = \pi r^2$. Aplicando el teorema de Cavalieri tendríamos que $\frac{V(C)}{V(P)} = \pi r^2$, finalmente tenemos:

$$V(C) = V(P)\pi r^2 = \left(\frac{h}{3}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Por otra parte, Cavalieri, utilizando el método de los indivisibles calcula el área bajo la curva $y = x^n$ entre $x = 0$ y $x = b$, demostrando que su valor es $\frac{b^{n+1}}{n+1}$. Sin embargo, en 1649 se prohíbe que en las escuelas religiosas se enseñara la *geometría por medio de los indivisibles* dado que los *padres revisores*, encargados de aprobar lo que se debía enseñar, emitieron una censura en su contra, pues el atomismo era considerado como contrario al dogma de la transubstanciación[7]. Como afirman Castro y Pérez (2007) fue un hecho lamentable para el desarrollo de la matemática, ya que posteriormente este método sirvió como base para aplicaciones de la integral y la cuadratura de áreas de regiones delimitadas por curvas.

2.1.4. Conclusiones Parciales de la Concepción Geométrica

Como afirman Lizarralde & Ramírez (2016) la búsqueda de alternativas que no se confrontaran a los inconmensurables, provocó una crisis de la cual surge el *horror al infinito*. Para este momento no se considera la existencia del infinito actual, por el contrario, Eudoxo busca rechazar esta idea al construir números *tan grandes y pequeños como se quiera* llevando a la idea de lo que llamamos el infinito potencial. Aunque los griegos no aceptaban el infinito actual en sus cálculos, asociaban las magnitudes tan grandes que no podían imaginar, como parte del infinito, sin embargo, Arquímedes en el *Arenario*, al exponer la idea de números tan grandes como se quiera, demuestra

[7] Afirma la conversión del pan y el vino en el cuerpo y la sangre de Cristo en el momento de la consagración durante la Eucaristía.

que siguen siendo finitas. De ahí que solo fuera aceptable lo que se podía construir o deducir por medio de reiterados procesos o por un número finito de pasos así ese número fuera muy grande.

Desde Aristóteles no se consideraba apropiado el uso de números para estudiar los fenómenos naturales y estos en cambio debían ser estudiados a partir de los objetos geométricos dado que se consideraban más cercanos. Aunque los pitagóricos hicieron uso de los números en la geometría, en lo posible sus deducciones trataban de ser puramente lógicas, esto dificultó el desarrollo de la geometría pues no generaron las herramientas necesarias para hacer la asociación entre lo geométrico y lo numérico; únicamente se consideraba como válido lo que pudiera resolverse por medio de construcciones geométricas, como se refleja en el libro de los elementos de Euclides, donde se observa un nivel de complejidad alto en las demostraciones de los teoremas, en especial cuando hablaban de los números tan grandes o pequeños como quisieran dado que no tenían una representación de estos. Lo anterior está relacionado con el obstáculo de transposición numérica, propuesto por Cornu.

Por otra parte, si miramos desde una perspectiva sociocultural, los pitagóricos no aceptaban la existencia de los segmentos inconmensurables, lo cual limitó a muchos otros pensadores de la época por el temor de tener un destino parecido al de Hipaso de Metaponto. Una situación similar se dio con matemáticos como Kepler y Galileo, que se vieron limitados en la realización y publicación de sus teorías, puesto que iba en vías contrarias a las establecidas por la religión. Si bien, contaban con herramientas de investigación, temían a ser catalogados como herejes por propagar ideas que no fuesen aceptadas por la Inquisición.

Además de esto, cuando Eudoxo calcula el área de figuras curvilíneas, a partir del denominado método de exhaución, el cual posteriormente es retomado por Arquímedes, vemos que se relaciona estrechamente con el cálculo actual de áreas por medio de integración; de ahí que podamos afirmar que se encuentra uno de los primeros acercamientos a la noción de límite visto de manera geométrica. El paso del método de exhaución a la integral se ve restringido por la concepción que se tenía del infinito potencial y la divergencia de las sucesiones y series, además del desconocimiento del concepto de función. Una alternativa a dicha restricción surge gracias a Kepler y Cavalieri con el surgimiento de los infinitesimales e indivisibles para realizar cálculos sobre áreas y volúmenes de sólidos.

2.2. Concepción de Newton y Leibniz

Newton y Leibniz fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal y elaboraron un método general que se aplica a muchos de estos. Este permitió estudiar diversos problemas de geometría y física, que posteriormente constituiría las bases para el Cálculo diferencial e integral. Particularmente se tratará a modo de introducción un ejercicio que sirvió a Newton para deducir el teorema del binomio y con él, su método de las fluxiones. Por otra parte, se mostrará un desarrollo sobre el cálculo de Leibniz y su principio de continuidad en metafísica.

2.2.1. Teorema del Binomio y Método de las Fluxiones de Newton

Isaac Newton (1642-1727), hacia el año 1664 aborda el teorema del binomio, a partir de los trabajos de Wallis y el cálculo de fluxiones. Sin embargo, durante los años 1665 – 1666 a causa de una epidemia de peste bubónica es retirado a la granja familiar, dado su delicado estado de salud, en este periodo de tiempo descubre la ley del inverso del cuadrado, de la gravitación, desarrolla el cálculo de fluxiones y generaliza el teorema del binomio; sin embargo, estos descubrimientos los mantiene para su propio estudio.

En 1669, después de haber retomado sus estudios, es nombrado *fellow*[8] del Trinity College. A su vez, comparte su manuscrito *Analysisper aequationes numero terminorum infinitos*, en el cual introduce su denominado método general, a partir del cual posteriormente se desarrollará su cálculo diferencial e integral. Hasta el año 1687 Newton vuelve a realizar una publicación con sus célebres *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Dentro de su tercer libro se encuentra como anexo la teoría de las fluxiones, que, si bien aportó gran renombre, resulta difícil de comprender, según Collette (1985) Newton quiso que fuera así a fin de evitar críticas por sus textos.

En el año 1676 Newton presenta uno de sus trabajos a Leibniz donde explica la manera en que descubrió la serie binomial, partiendo de series infinitas obtenidas al evaluar el área limitada entre las curvas de $x = 0$ a $x = x$ cuya ecuación fuera $(1 - x^2)^n$ con $x = 1, 2, 3, \ldots$ (ver tabla 3)

[8] Miembro académico de la universidad

n	$(1-x^2)^n$	$\int_0^x (1-x^2)^n\,dx$
0	1	x
1	$1-x^2$	$x-\frac{x^3}{3}$
2	$1-2x^2+x^4$	$x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$
3	$1-3x^2+3x^4-x^6$	$x-\frac{3x^3}{3}+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$
⋮	⋮	⋮

Tabla 3: Áreas obtenidas para $n = 0, 1, 2, \ldots$

De los resultados anteriores permiten demostrar que el primer término siempre sería x mientras que los segundos términos serán:

$$\frac{0x^3}{3}, \frac{1x^3}{3}, \frac{2x^3}{3}, \frac{3x^3}{3}, \ldots$$

Luego de esto Newton intenta encontrar un desarrollo en serie para n fraccionario, dado que su interés se centra en hallar el área de un círculo, toma $n = \frac{1}{2}$. De esta manera, al buscar el área limitada entre las curvas $x = 0$ y $x = x$ de la ecuación $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ la cual determina un segmento de círculo, como se muestra en la Figura 11.

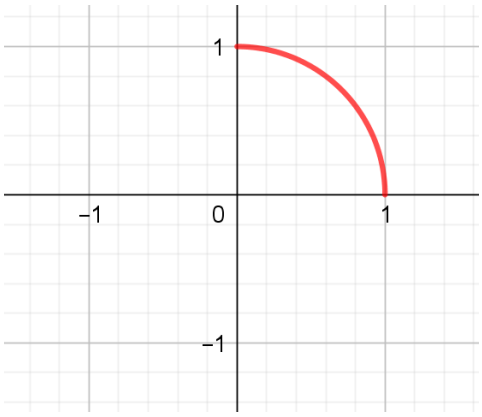


Figura 11: Segmento de círculo

Newton realiza una progresión aritmética en donde busca introducir un término entre x y $x-\frac{x^3}{3}$ de la siguiente manera, tomando:

$$a = x \qquad a + 2d = x - \frac{x^3}{3}$$

donde d es la diferencia.

Luego:

$$d = -\frac{1x^3}{6} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)x^3}{3}$$

Por lo tanto, conociendo los dos primeros términos, se busca un método para obtener los siguientes, se conoce del desarrollo en la tabla 4, lo siguiente:

Polinomio	Término	Expresión
$n = 0$	1	x
$n = 1$	2	$-\frac{x^3}{3}$
$n = 2$	3	$\frac{x^5}{5}$
$n = 3$	4	$-\frac{x^7}{7}$
$n = 4$	5	$\frac{x^9}{9}$
⋮	⋮	⋮

Tabla 4: Expresiones del polinomio de Newton

Ahora se pretende encontrar el coeficiente que acompaña a las expresiones $\frac{x^5}{5}$ y $-\frac{x^7}{7}$, dado que ya se conocen los coeficientes de las dos primeras. Para esto, Newton se utiliza la siguiente secuencia:

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \dots$$

Tomando $m = \frac{1}{2}$ se tiene que los coeficientes son:

$$\frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad -\frac{1}{8} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3} = \frac{1}{16} \; ; \quad \frac{1}{16} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 3\right)}{4} = -\frac{5}{128}$$

De ahí que, el área aproximada del segmento de círculo se pueda obtener tomando únicamente los cuatro primeros términos del polinomio:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7}$$

Se tiene en cuenta que el área calculada corresponde a $\frac{1}{4}$ del área total del círculo, por lo tanto, al multiplicar por 4 esta expresión y evaluarlo entre $x = 0$ y $x = 1$, se obtiene:

$$4\left[x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7}\right]_0^1 \approx \pi$$

Sin embargo, se tiene en cuenta que el error (que hoy notamos como O_9) es de:

$$O_9 = \left[-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \right]_0^1$$

A partir de este desarrollo, Newton encuentra una generalización del binomio y formula su teorema de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \cdots$$

Donde $P + PQ$ representa el binomio, P es el primer término, Q el término que resulta cuando se divide por el primero, $\frac{m}{n}$ es el exponente, $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, etc. Cabe aclarar que hay algunos cambios en relación con la notación original utilizada por Newton.

A partir del teorema del binomio Newton publica su método de las fluxiones, en el que determina el cambio instantáneo de una variable con respecto a otra, tomando intervalos de tiempo muy pequeños o con un incremento infinitesimal de x, lo cual denomina *el momento de* x, así mismo llama oy al *momento de* y. Se toma una curva cuya área se expresa $A = ax^m$, sea $A + oy$ el crecimiento del área cuando x varía o. De ahí Newton deduce que $A + oy = a(x + o)^m$. Desarrollando el segundo término en serie binomial infinita con m fraccionario, toma de esta serie el área $A = ax^m$, finalmente dividiendo cada término obtenido por o y suprimiendo o *desapareciendo* los términos que contienen a o obtiene:

$$y = max^{m-1}$$

De acuerdo con Lizarralde y Ramírez (2016) a partir de lo anterior Newton sustenta el concepto de *términos evanescentes* el cual utiliza para referirse a las cantidades fluentes, cantidades que aumentan indefinidamente y a las fluxiones como las velocidades con que las fluentes aumentan, las simboliza como x y $\dot{x}$ respectivamente.

Luego de esto Newton se refiere al *momento de la fluente* como la cantidad infinitamente pequeña que varía la fluente x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño o.

La primera publicación sobre su cálculo diferencial e integral que Newton realiza, la hace de manera indirecta en *Philosophiae naturalis principia mathematica*, de 1687 donde enuncia el método de las primeras y últimas razones de las cantidades y lo utiliza para demostrar el siguiente lema, citado en Collette (1985):

> Las cantidades o razones de cantidades que tienden constantemente a la igualdad en un tiempo finito y que, antes del final de ese tiempo se aproximan más la una a la otra que cualquier diferencia dada, son al final iguales (p. 114).

En cuanto a la noción de límite, en el método de las fluxiones Newton utiliza el concepto de infinitesimal haciendo que el intervalo de tiempo sea cada vez más pequeño hasta el punto en que tiende a desaparecer, argumentos que no son acogidos de la mejor manera por matemáticos contemporáneos y en particular por George Berkeley. Por otra parte, se puede evidenciar el interés hacia la convergencia particularmente en las series. Aunque Newton no lo desarrolla de manera explícita dentro de sus publicaciones, para el descubrimiento de su teorema del binomio construye una serie que converge al valor de π.

2.2.2. Cálculo Infinitesimal de Leibniz

Collette (1985) resalta algunas notas de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en su ensayo *De arte combinatoria* de 1666, según dice "La idea central de su combinatoria se basa esencialmente en la relación entre el todo y las partes" (p. 121). Así Leibniz realiza combinaciones de elementos con el propósito de encontrar fórmulas diferentes. En especial, se concentra en las sucesiones de los números naturales, con ellas busca relaciones entre los elementos y las diferencias dos a dos.

Para dar una idea, obsérvese la sucesión de números naturales $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Si calculamos las diferencias entre dos términos consecutivos, es decir, un término menos el anterior, resulta la sucesión $1, 1, 1, 1, 1, ...$, si se realiza esta misma acción una segunda vez todas las diferencias son nulas. Leibniz encuentra ciertas propiedades de las sucesiones de números. Por ejemplo, encuentra que la suma de las diferencias es igual a la diferencia entre los términos último y primero de la sucesión. Collette (1985) expone un ejemplo particular:

En la sucesión $3, 7, 11, 16, 21, 30$, se puede observar las diferencias en la tabla 5.

Sucesión	Primeras diferencias		Segundas diferencias		Terceras diferencias		Cuartas diferencias	
3	4		0		-1		2	
7	4		1		1		3	
11	5		0		4			
16	5		4					
21	9							
30								
	$30-3=27$	$4+4+5+5+9=27$	$9-4=5$	$0+1+0+4=5$	$4-0=4$	$(-1)+1+4=4$	$4-(-1)=5$	$2+3=5$
	Diferencia entre el último y primer término de la sucesión anterior	Suma de las diferencias	Diferencia entre el último y primer término de la sucesión anterior	Suma de las diferencias	Diferencia entre el último y primer término de la sucesión anterior	Suma de las diferencias	Diferencia entre el último y primer término de la sucesión anterior	Suma de las diferencias

Tabla 5: Diferencias de una sucesión según Leibniz

Como se observa la diferencia entre los términos último y primero es $30-3=27$. Si el primer término de la sucesión es 0, la suma de las primeras diferencias es el último término de la sucesión.

Otra conclusión importante de Leibniz es que si en una sucesión de términos $a_1, a_2, \ldots$, los términos disminuyen progresivamente hasta cero, es posible utilizar este *cálculo de diferencias* para efectuar la suma de estas series infinitas.

Leibniz mostró estar preocupado por inventar una simbología adecuada en medio del desarrollo del *cálculo de diferencias* y de las propiedades de las sucesiones de los números. En Collette (1985) se exponen algunos símbolos inventados por Leibniz con base en las sucesiones de números, de este modo:

Objeto matemático	Símbolo asignado por Leibniz
El orden de los términos de una sucesión	x
El valor de cada uno de los términos de la sucesión	y
La diferencia entre el orden de los términos de una sucesión	dx o a
La primera diferencia de los términos de una sucesión	dy o l
El operador suma	$omn.$

Tabla 6: Simbología de Leibniz

Por medio del *cálculo de diferencias* relaciona el área de un triángulo rectángulo isósceles con las sumas de las primeras diferencias de una sucesión, asegurando que el área de dicho rectángulo es $omn.yl = \frac{y^2}{2}$.

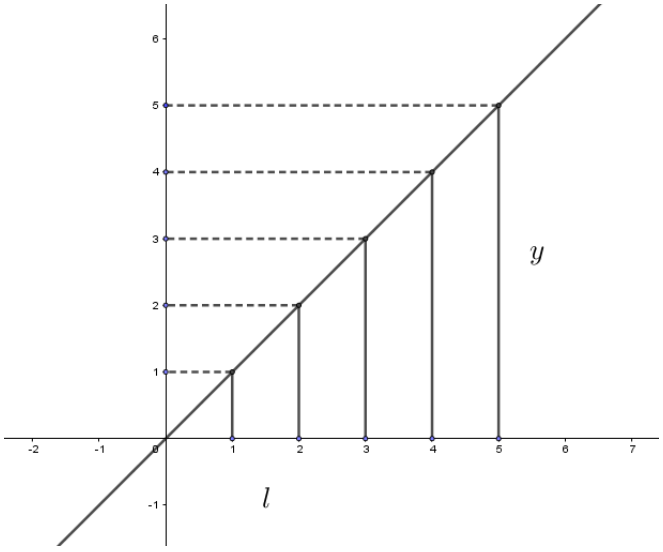


Figura 12: Área de triángulo rectángulo isósceles

En la figura 12 se puede observar que si $l = 1$ y $y = 5$, entonces $omn.yl = y^2 = 25$. Desde este resultado Leibniz pasa de lo discreto a lo continuo, debido a que $omn.yl = \frac{y^2}{2}$ sí y solo si, el valor de l es infinitamente pequeño. En una nota manuscrita del 29 de octubre de 1675 que expone Collette (1985):

$$omn.yl = \overline{omn.\overline{omn.l}\ \frac{l}{a}}$$

Luego remplaza la primera parte de la igualdad por $\frac{y^2}{2}$, y escribe

$$\frac{y^2}{2} = \overline{omn.\overline{omn.l}\ \frac{l}{a}}$$

lo que equivale, en la notación moderna a

$$\frac{y^2}{2} = \int \left\{ \int dy \right\} \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx}$$

Leibniz basado en las ideas de Pascal y Barrow, considera una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. La curva relaciona una sucesión de número con su orden y, en este sentido relaciona dx y dy con la curva (ver Figura 13).

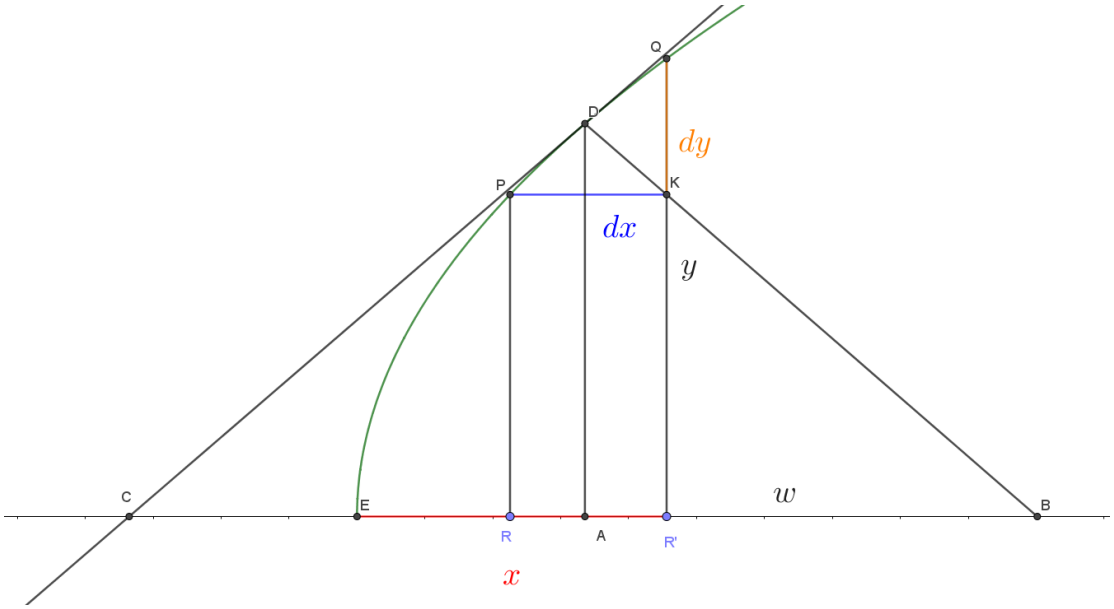


Figura 13: Triángulo característico

La relación entre las diferencias se observa en el llamado *triángulo característico* (ver figura 13) que se compone por los lados dx, dy y el arco PQ. Pascal había observado la siguiente relación por semejanza de triángulos:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{PQ}{RR'} = \frac{PQ}{PK}$$

Para un intervalo RR' pequeño. Leibniz concluye que $\frac{dy}{dx} = \frac{DA}{CA}$. Lo que Pascal omitió fue la determinación de la tangente mediante la diferencia de QR dividida por la diferencia CR. DB es la normal a la tangente, la subnormal w es AB. Por semejanza de los triángulos PQK y DAB, así que Leibniz concluye que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{AB}{AD} = \frac{w}{y} \qquad (1)$$

De otra parte, de la propiedad de la subnormal se tiene la siguiente igualdad:

$$w = by \qquad (2)$$

donde b es una constante de proporcionalidad

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{by}{y}$$

luego,

$$\int dy = \int b \ dx$$

Resolviendo se tiene que,

$$y = bx + c$$

la cual es la ecuación de la recta tangente. De aquí Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando $\frac{dy}{dx}$, donde dy y dx son diferencias (Collette, 1985). Él evidencia que la tangente de una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Principio de Continuidad en Metafísica. En Vargas (2009) se hace referencia al ensayo titulado *Los fundamentos metafísicos de las matemáticas* escrito por Leibniz en 1675, donde se muestra que las matemáticas están adheridas a tres principios fundamentales de la naturaleza que son: el espacio, tiempo y el movimiento. Estos tres principios tienen un alto grado de isomorfismo. En ese sentido, el concepto de cantidad puede ser entendido en términos espaciales, de tiempo y por supuesto de movimiento. Siguiendo esta idea Leibniz expone que el principio de continuidad es una idea que va más allá de las matemáticas, es decir, diferencia entre cantidad y cualidad; la primera hace referencia a la magnitud, ya sea espacial, temporal o de posición, es decir al dominio de las matemáticas, pero la cualidad es algo mucho más general, esta hace referencia a los atributos fundamentales de un individuo o una especie. Al observar la variación de las cualidades, se encuentra una gradualidad progresiva a la cual se le pueden aplicar ciertas medidas matemáticas, como lo son las relaciones todo-parte, mayor qué, menor qué, igual que. En este sentido Vargas (2009) afirma que Leibniz dice "Una ecuación es un caso particular de una inecuación, el reposo es un caso particular del movimiento y las curvas son un caso particular de las líneas rectas. Debemos interpretar los infinitesimales como el esfuerzo que hacemos por convertir una serie infinita, es decir, una inecuación en una ecuación […]" (p. 116).

Por último, Leibniz sintetiza la noción que tiene de continuidad en la siguiente frase "La continuidad está presente en el tiempo tanto como en el proceso de la naturaleza debido a que ese proceso nunca tiene lugar por saltos repentinos" (Vargas, 2009, p. 115).

2.2.3. Conclusiones Parciales de la Concepción de Newton y Leibniz

Cuando Sierpinska habla de la continuidad estructural, menciona la importancia del aprendizaje a nivel histórico, esto se puede rescatar dentro de una expresión de Newton: "si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes" (Collette, 1985, p. 104). De esta manera, a partir de lo que se ha desarrollado previamente, tanto Newton como Leibniz reconocen la importancia del estudio de concepciones previas relacionadas con los trabajos que cada uno abordaba, dado que podían establecer similitudes e incluso encontrar errores en declaraciones realizadas por sus antepasados.

Si bien hubo una disputa entre Newton y Leibniz por la creación del cálculo diferencial e integral, sus publicaciones sentaron las bases para el estudio posterior. En cuanto a la noción de límite, Leibniz considera en primera instancia que la continuidad puede ser tomada como parte de las matemáticas ya que está presente en la naturaleza; por su parte, cuando Newton considera la desaparición de las magnitudes infinitamente pequeñas, se puede hacer referencia al obstáculo de límite como noción metafísica, dado que aún para este momento, si bien se tenían imágenes conceptuales evocadas sobre la noción de límite, este aún no se había consolidado como un objeto matemático de manera explícita. Dada la "informalidad" con la que Newton y Leibniz asumen el límite, hubo críticas dentro de la comunidad científica por la falta de claridad en muchas de sus deducciones, esto lleva a que las matemáticas se vean guiadas por la intuición y falta de rigor, lo cual conduce a futuros errores en quienes consideran la noción Leibniziana de límite y continuidad.

En cuanto a la formación inicial de profesores de matemáticas, se puede resaltar la importancia de los aportes de Leibniz y Newton dentro de la noción de límite, puesto que se relaciona con las primeras imágenes conceptuales evocadas acerca de lo que se entiende por límite. De acuerdo con el estudio realizado por Cornu (1983), los estudiantes utilizan expresiones como: *al nivel microscópico, en el fin, valor aproximado*, entre otras. En este sentido, se debe tener claridad sobre cómo se superó a nivel histórico el obstáculo relacionado con lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, para que los estudiantes afronten esta dificultad y empiecen a generar una

noción de límite más relacionada con los infinitesimales o en lo que Newton llama las cantidades evanescentes. Cabe resaltar que el desarrollo del cálculo por parte de Leibniz y Newton contribuye a superar este obstáculo; de acuerdo con esto, el docente de matemáticas en un primer momento puede adaptar los estudios de la cuadratura de las curvas para aproximar el valor de su área en un intervalo y la determinación de la tangente de una curva en un punto, para así brindar nociones del límite en los estudiantes, y a su vez generar la necesidad de abordar el tratamiento de este concepto.

2.3. Concepción Algebraica

Dentro de la concepción algebraica se hablará de matemáticos como Fermat, Euler y Lagrange quienes fueron los encargados de dar continuidad a la formalización del cálculo, apoyándose en los métodos introducidos previamente por Leibniz y Newton. Se mostrará parte del desarrollo de métodos de Fermat como el de máximos y mínimos, el de aproximación de la recta tangente a una curva y las integraciones; por otra parte, se estudiará la manera en que Euler consideraba la formalización del cálculo sin la necesidad de recurrir a concepciones geométricas y algunos ejemplos sobre la manera de aplicar los diferenciales de Leibniz. Por último, se hablará de Lagrange y su método de máximos y mínimos, y la importancia que da a los polinomios de Taylor para describir funciones.

2.3.1. Concepción Algebraica Finitista – Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) fue uno de los matemáticos más destacados del siglo XVII, desarrolló el primer método general para la determinación de máximos y mínimos, con esto demostró una manera de hallar la tangente de una curva en un punto dado, todo usando nociones de límites, como lo es la comparación de dos expresiones, en las que sus diferencias son muy pequeñas. A continuación, se mostrará estos dos métodos junto con el método de Fermat para hallar el área bajo una curva usando potencias de un número entre 0 y 1, lo cual resulta tener una relación directa con las cantidades infinitamente pequeñas.

Método Para Hallar Máximos y Mínimos. Fermat sin conocimiento de la noción de límite desarrolló un método para hallar máximos y mínimos, publicado en su obra *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, esta fue escrita entre los años 1629 y 1637. Según Ayerbe Toledano (2017), el método de Fermat se basa en la idea de que la variación de las cantidades en

un entorno de un extremo se hace imperceptible, lo cual da la idea de un incremento infinitesimal, no es de sorprender que matemáticos como Laplace, aseguraran que Fermat es el verdadero descubridor del cálculo diferencial.

A continuación, se ilustrará el método de Fermat, para hallar máximos y mínimos mediante un ejemplo expuesto por Ayerbe Toledano (2017):

Sean todos los rectángulos de perímetro $2B$ ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con mayor área entre estos?

Se considerará el segmento de longitud B, este se divide en dos partes, una de longitud A y por ende, la otra de longitud $B - A$.

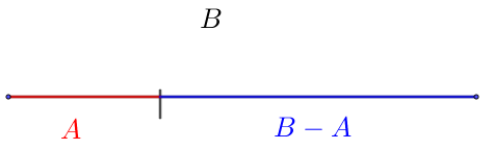


Figura 14: Segmento base y altura

Luego el rectángulo que debemos maximizar tiene las siguientes dimensiones:

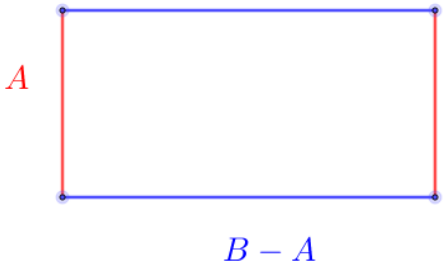


Figura 15: Rectángulo a maximizar

Es decir que la expresión que se va a maximizar será $A(B - A)$

Al usar el método de Fermat, se debe sustituir de la expresión inicial la incógnita A, por $A + E$, donde E es un valor insignificante, luego la expresión queda de este modo:

$$(A + E)(B - A - E)$$

Luego se adigualan[9] las dos expresiones

[9] Se refiere a la expresión "tan aproximadamente iguales como sea posible"

$$A(B-A) \sim (A+E)(B-A-E)$$

se opera y se eliminan los términos comunes a ambos lados

$$EB - 2AE - E^2 \sim 0$$

Se eliminan los incrementos que sean se segundo grado, debido a que estos están a un más cercanos a ser a cero y luego se factoriza.

$$E(B-2A) \sim 0$$

Finalmente, se divide por E y se iguala

$$B - 2A = 0$$

la resolución de la ecuación es $A = {}^{B}/_{2}$

es decir que el rectángulo con mayor área es el cuadrado de lado ${}^{B}/_{2}$.

Si se observa este procedimiento con detenimiento, resulta ser equivalente a resolver la siguiente ecuación en la notación moderna:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0$$

Donde $f(A) = A(B-A)$

A pesar de la brevedad y la aparente falta de fundamento con que Fermat describió este método en su obra, se despertó interés de la comunidad científica pero también se generaron bastantes críticas ya que al parecer en algún punto pareciera que supone que $E = 0$ y luego divide entre E, lo cual no es consistente. No es claro si Fermat estaba eliminando los incrementos de segundo grado en adelante como se muestra en la explicación, o si realmente estaba suponiendo que $E = 0$ para luego dividirlo, lo cierto es que nunca lo dejó lo suficientemente claro, y esto generó escepticismo frente a sus métodos.

Método Para Hallar la Recta Tangente a una Curva. Este método fue publicado por Fermat en su obra *Methodus*, como una aplicación en si del procedimiento para hallar máximos y

mínimos. Para observar esto se trabajará concretamente hallando la sub-tangente de una parábola, lo presentado es tomado de (Ayerbe Toledano, 2017).

Se considera la parábola BDF y luego se trazará la tangente en el punto B, como se muestra en la figura 16.

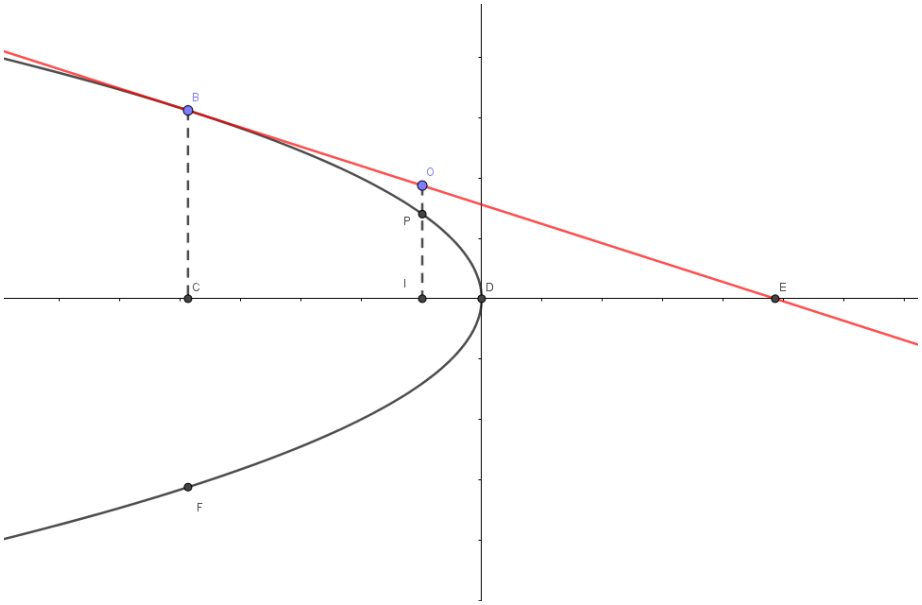


Figura 16: Método para hallar la tangente de Fermat

Sea O un punto cualquiera de la tangente diferente de B, y este por medio de un segmento perpendicular al eje x, determina los puntos P y I, como se observa en la Figura 16.

Se dirá que d es la distancia CD, a será la distancia de la subtangente CE, y e será la distancia CI.

En la proposición I.11 Apolonio se observa que:

> La parábola es una sección cónica tal que el diámetro DM de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo axial, diferente a la base del triángulo, y el lado recto de la parábola DJ, es proporcional a la ordenada BC, como ésta es proporcional a la abscisa CD (Ayerbe Toledano, 2017, p. 73)

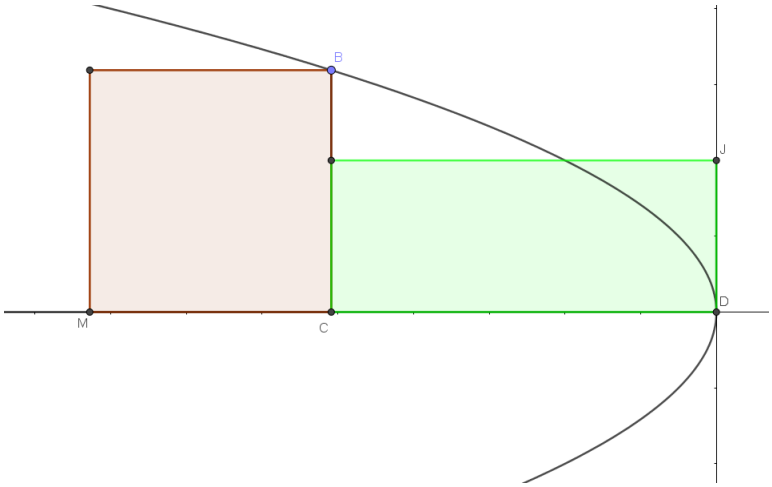


Figura 17: Proposición I.11 Apolonio

escrito de otra forma:

$$BC^2 = CD \cdot DJ$$

De esto se deduce que:

$$\frac{BC^2}{CD} = DJ$$

y

$$\frac{PI^2}{ID} = DJ$$

luego,

$$\frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{ID}$$

Este mismo resultado se puede obtener usando la fórmula de la parábola, de la siguiente manera.

Sea $y^2 = 4px$ la ecuación de la parábola, entonces $\frac{y^2}{x} = 4p$

luego,

$$\frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{ID} \Leftrightarrow \frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID}$$

Continuando con el problema se considera lo siguiente:

como $OI > PI$, entonces

$$\frac{BC^2}{OI^2} < \frac{CD}{ID}$$

Por otro lado, por semejanza de triángulos se tiene $\frac{BC}{CE} = \frac{IO}{IE}$, luego $BC = \frac{IO}{IE} CE$

remplazando se obtiene,

$$\frac{CD}{ID} > \frac{\frac{OI^2}{IE^2} CE^2}{OI^2}$$

y en consecuencia,

$$\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2} \Leftrightarrow \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

$$\Leftrightarrow d(a-e)^2 > a^2(d-e)$$

$$\Leftrightarrow da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - ea^2$$

Ahora se adigualan las partes de la desigualdad y se eliminan los términos comunes, tal cual como se hace en el método para hallar los máximos y mínimos.

$$de^2 - 2dae \sim -ea^2$$

Dividiendo en e resulta,

$$de - 2da \sim -a^2$$

y haciendo $e = 0$ e igualando resulta,

$$2d = a$$

de lo cual Fermat dice (Ayerbe Toledano, 2017; Linés Escardó, 1991):

"Hemos probado de esta forma que CE es el doble de CD, lo que es conforme con la verdad [En resultado era conocido, pues había sido obtenido por Apolonio]" (p. 74)

Al adigualar dos partes de una desigualdad, dividir por e y luego hacer e=0, Fermat está usando, de nuevo, procedimientos que sin el conocimiento de la noción de límite no es posible justificar de manera correcta. En consecuencia, Fermat nunca realizó una demostración satisfactoria de estos métodos. Aunque funcionaban, hubo un permanente escepticismo por parte de la comunidad científica.

Las integraciones de Fermat. Fermat desarrolló un método bastante eficiente para hallar el área bajo las curvas de la forma $y = x^n$. Se supondrá que se quiere hallar el área bajo la curva comprendida entre $x = 0$ a $x = a$, tomando como subintervalos los puntos de abscisas a, aE, aE^2, aE^3, …, donde E es un número menor a 1.

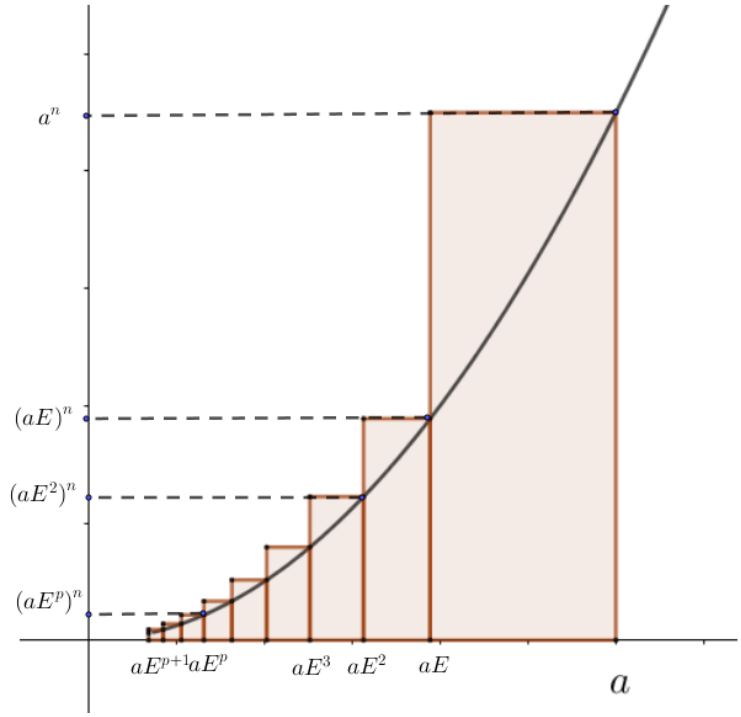


Figura 18: Método para hallar el área bajo la curva de Fermat

Para aproximar el área bajo la curva desde el originen hasta el punto $x = a$, se sumarán las áreas de cada rectángulo, tomado el extremo derecho, determinado por la base $(aE^p - aE^{p+1})$ y de altura $(aE^p)^n$. De lo cual resulta la siguiente progresión aritmética:

$$a^n(a - aE) + (aE)^n(aE - aE^2) + (aE^2)^n(aE^2 - aE^3) + \cdots$$

luego, se entiende que, de la serie geométrica,

$$r = \frac{(aE)^n(aE - aE^2)}{a^n(a - aE)} = E^{n+1}$$

Como $r = E^{n+1}$, y se tiene por hipótesis que E es un número entre 0 y 1, se obtiene que es una serie geométrica cuya suma finita es:

$$s_n = \frac{a^n(a - aE)}{1 - E^{n+1}}$$

es decir,

$$s_n = \frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}}$$

Si suponemos que

$$S = 1 + E + E^2 + \cdots + E^n$$

entonces

$$ES = E + E^2 + \cdots + E^{n+1}$$

luego,

$$S - ES = 1 - E^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - E^{n+1}}{1 - E}$$

es decir,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 + E + E^2 + \cdots + E^n} = \frac{1 - E}{1 - E^{n+1}}$$

con lo cual se deduce la siguiente igualdad:

$$\frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + \cdots + E^n}$$

A medida que se hacen lo rectángulos más estrechos, es decir E tiende a 1, la suma de las áreas de estos rectángulos va siendo cada vez más próximo al área bajo la curva. Es decir que haciendo $E \to 1$ la fórmula anterior tiende en el límite a:

$$S = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Por tanto, esta resulta ser el área bajo la curva $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$.

2.3.2. La Época de Euler

Leonard Euler (1707-1783) publicó su tratado de mecánica basándose por completo en el nuevo análisis utilizando las diferenciales de Leibniz y el teorema del binomio de Newton. Además, se considera como el primer matemático que aborda el concepto de función, definiéndola como sigue: "Una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria de aquella cantidad variable y de números, o sea de cantidades constantes" (Castro y Pérez, 2007, p. 120) Para Euler el cálculo debía basarse en teorías formales que no requieren propiamente de concepciones geométricas y dividió las curvas en continuas, cuando están representadas por una sola ecuación y discontinuas, cuando se desconoce su ecuación.

Euler aceptaba la existencia de números reales infinitamente grandes e infinitamente pequeños, de esta manera se puede expresar una serie como una suma común:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

Donde N es un número natural infinito, de esta manera se acepta la existencia del infinito actual. En la obra *Introducctio in Analysin Infinitorum* introduce el número e de la siguiente manera (Castro y Pérez, 2007):

Como $a^0 = 1$, existe un número ϵ infinitamente pequeño de tal manera que $a^\epsilon = 1 + k\epsilon$. Sea x un número positivo, entonces el número $\frac{x}{\epsilon}$ es un número infinitamente grande, por eso se identifica con un número natural N de valor infinito. Por lo tanto,

$$a^x = a^{N\epsilon} = (a^\epsilon)^N = (1 + k\epsilon)^N$$

Aplicando el teorema del binomio de Newton en,

$$a^x = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N$$

se obtiene:

$$\left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N = 1 + N\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \cdots + \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}\left(\frac{kx}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{kx}{N}\right)^N$$

$$= 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{N-1}{N}\frac{k^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}\ldots\frac{N-n+1}{N}\left(\frac{k^n}{n!}x^n\right) + \cdots + \left(\frac{k^N}{N!}x^N\right)$$

Pero como N es un natural infinito, entonces $\frac{1}{N}$ es infinitamente pequeño y aplicando la regla de L'Hopital

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \cdots = \frac{N-n+1}{N} = \cdots$$

sustituyendo, se tiene:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}k + \frac{x^2}{2!}k^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}k^n + \cdots + \left(\frac{k^N}{N!}x^N\right)$$

Además a^x y $1 + \frac{x}{1!}k + \frac{x^2}{2!}k^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}k^n + \cdots$ son cantidades reales, y

$$\frac{k^N}{N!}x^N = \frac{(kx)^N}{N!} = \frac{kx \cdot kx \cdot kx \cdot kx \cdots kx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots N} = 0$$

Puesto que el último término $\frac{kx}{N}$ es infinitamente pequeño, por tanto:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}k + \frac{x^2}{2!}k^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}k^n + \cdots$$

tomando $x = 1$ se define el valor de e como el valor de a para el cual $k = 1$, de la siguiente manera:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

y reemplazando en $a^x = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N$, se obtiene:

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

Pero se sabe que el número *N* es infinitamente grande. Por lo tanto, en notación actual, se puede interpretar como:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Así,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Además a^x puede reescribirse nuevamente, tomando $k = 1$, con $a = e$, como:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

A continuación, se muestra un ejemplo de la forma en que Euler calculaba las diferenciales de Leibniz (Castro y Pérez, 2007):

Sea $y = f(x)$, se define su diferencial como $dy = f(x + dx) - f(x)$ y dx es la diferencial de x, además $(dx)^k$ es infinitamente pequeño con relación a dx, para cualquier $k > 1$, y por lo tanto se asume, cualquier potencia superior a la primera, como igual a 0.

1. Si $f(x) = x^n$

   Aplicando la definición de diferencial dy,

   $$dy = (x + dx)^n - x^n$$

   Haciendo uso del teorema del binomio de Newton,

   $$dy = x^n + nx^{n-1}dx + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(dx)^k\right) - x^n$$

como se asume que las cantidades $(dx)^k = 0$ cuando $k > 1$,

$$dy = nx^{n-1}dx$$

2. Si $f(x) = e^x$

Tomando el diferencial dy,

$$dy = e^{x+dx} - e^x$$

$$dy = e^x(e^{dx} - 1)$$

Sustituyendo $e^{dx} = 1 + dx + \frac{dx^2}{2!} + \cdots + \frac{dx^n}{n!} + \cdots$

$$dy = e^x\left(1 + \left(dx + \frac{dx^2}{2!} + \cdots + \frac{dx^n}{n!} + \cdots\right) - 1\right)$$

Nuevamente asumiendo como 0 las cantidades $(dx)^k$ cuando $k > 1$,

$$dy = e^x dx$$

Para Euler, el cálculo diferencial se basaba en el estudio de la razón entre los incrementos infinitamente pequeños, por esta razón cuando se tomaba dicho incremento como cero, se interpreta como el límite finalmente alcanzado, de lo contrario, sólo se puede hablar de aproximaciones consecutivas hacia cierto límite.

2.3.3. Conclusiones Parciales de la Concepción Algebraica

En este apartado se logra observar cómo desde el álgebra se hace un esfuerzo inmenso por formalizar varios conceptos del cálculo, en este proceso se ven involucrados aspectos relevantes de la noción de límite. Fermat por un lado en su método para hallar máximos y mínimos, encuentra bastantes dificultades debido a la falta de formalización en sus procesos, y esto se debe a que este método requiere del concepto de límite, el cual para aquella época no se había adherido formalmente a las matemáticas. Esta dificultad se puede relacionar con el obstáculo nombrado por Cornu como *El límite, noción metafísica* debido a que la falta de este concepto en las matemáticas de la época impidió que Fermat argumentara correctamente la validez de sus métodos.

Por su parte Euler da un punto de vista de la formalización del cálculo desligándola de cualquier concepción geométrica y asumiendo a su vez como válido el método de los diferenciales de Leibniz, pero contrario al pensamiento de Leibniz sobre el infinito, Euler lo asume como un objeto matemático en sí mismo y de esta manera se evidencia la inmersión del infinito actual en el cálculo, donde él representa como N a un número infinitamente grande. Desde el razonamiento de Euler, podemos relacionar el obstáculo epistemológico que menciona Cornu en Lizarralde & Ramírez (2016) *el límite puede ser alcanzado* dado que Euler hace una distinción entre los incrementos infinitamente pequeños y aquellos cuyo incremento se toma como cero, asumiendo que solo en este último caso, es posible alcanzar el límite.

Conocer algunas de las dificultades que enfrentaron matemáticos como Fermat y Euler, permite al docente de matemáticas identificar y argumentar sobre la importancia del límite en el proceso de formalización del cálculo, es decir, cómo este permite justificar la relación entre una función y su derivada, y, la relación entre la función y su integral desde diferentes perspectivas, así como la importancia de los incrementos infinitamente pequeños.

2.4. Concepción aritmética

Este apartado comprende la transición de los conceptos geométricos a los numéricos, comenzando por las paradojas de Zenón, en las cuales se expone la continuidad del espacio-tiempo como una paradoja debido al desconocimiento de las series convergentes. Seguido de esto, se mostrará un ejemplo del método de John Wallis para calcular el área bajo una curva y el surgimiento del problema de calcular la integral $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\ dx$. Por otra parte, se presentará el planteamiento de la teoría de límites por D'Alembert quien se encuentra en desacuerdo con algunas afirmaciones hechas por Newton. Finalmente, se mostrarán algunos aportes de Cauchy al cálculo, afirmando que su base debía ser la idea de límite.

2.4.1. Las Paradojas de Zenón

Zenón de Elea (490 a.C. - 425 a.C.), discípulo de Parménides, se enfrentó a un problema de gran controversia entre los pensadores de Grecia, la relación que existe entre lo discreto y lo continuo. Todo objeto discreto se representa por los números enteros y la razón conmensurable resulta ser la relación entre las longitudes discretas. Con la aparición de las longitudes inconmensurables, la

comunidad de pensadores se radicalizó en dos fracciones; los que tomaban las longitudes como un objeto discreto y los que las consideraban un ente continuo.

Esta división planteó dos concepciones contrarias sobre el espacio y tiempo. Una, que el espacio y tiempo definían un movimiento continuo, es decir, son indefinidamente divisibles; y la otra, estaba relacionado con lo discreto, en donde se observaba el espacio y el tiempo formados por pequeños intervalos indivisibles. Zenón, en contra de ambas posiciones, toma como punto de partida la siguiente hipótesis como se menciona en Castro & Pérez (2007): El tiempo y el espacio pueden ser cada uno independientemente el uno del otro, finalmente divisibles o infinitamente divisibles; en esto resultan cuatro posibilidades, la cuales configuran las que hoy se conocen como paradojas de Zenón.

Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Suponiendo que el tiempo y el espacio son continuos, es decir, son infinitamente divisibles, Zenón plantea esta paradoja: se realiza una carrera entre Aquiles y una tortuga, a la tortuga se le deja la ventaja de un estadio[10] respecto a Aquiles, este, aunque sea diez veces más rápido que la tortuga, nunca la alcanzará ¿Por qué? Observemos cada intervalo de tiempo en la tabla 3, suponiendo que Aquiles recorre un estadio por minuto.

Tiempo en minutos	Distancia recorrida por Aquiles (estadios)	Distancia recorrida por la tortuga (estadios)	Diferencia entre las distancias
0	0	1	1
1	1	1,1	0,1
1,1	1,1	1,11	0,01
1,11	1,11	1,111	0,001
…	…	…	0,0 … 01

Tabla 7: Medidas de espacio y tiempo de la carrera de Aquiles y la tortuga

[10] Unidad de medida en la antigua Grecia aproximadamente equivalente a 175 m.

Es decir, la diferencia entre la distancia de Aquiles y la tortuga nunca va a ser cero, de lo que se concluye que Aquiles jamás alcanzará a la tortuga. Ahora se sabe que la sucesión de la diferencia entre las distancias es convergente, pero en aquél entonces no existían las herramientas actuales del cálculo. En conclusión, con esta paradoja Zenón pretende establecer que no es posible que el tiempo y el espacio sean infinitamente divisibles.

La Paradoja de la Flecha. Suponiendo que el espacio es finitamente divisible y el tiempo infinitamente divisible, se plantea la siguiente situación: si se lanza una flecha su movimiento ocupará un lugar en el tiempo T, lo que significa que en cada lugar que ocupa la flecha en el espacio se le asigna un tiempo, pero como el tiempo es infinitamente divisible existe un tiempo $T' < T$ tal que no se puede relacionar con una posición específica, es decir, en el tiempo T' la flecha desaparece, lo cual no es posible. Por tanto, se concluye que no puede ocurrir que el tiempo se infinitamente divisible y el espacio sea finitamente divisible. Algunos traducen esta paradoja diciendo que una vez disparada la flecha jamás llegará al blanco.

Paradoja de la Dicotomía. Suponiendo que el espacio es infinitamente divisible y el tiempo finitamente divisible. Análogo al caso anterior si un objeto móvil se desplaza desde una posición inicial A en un tiempo T, como el tiempo es discreto, entonces existirá un tiempo T' siguiente a T en el cual el móvil ocupará un lugar B. Como el espacio es continuo, entonces debe existir una posición C entre A y B, por el cual el móvil tuvo que pasar, pero esto no sucedió porque no hubo tiempo que ocupara ese lugar. Luego, se concluye que no es posible que el tiempo sea finitamente divisible y el espacio infinitamente divisible.

La Paradoja del Estadio. Suponiendo que el espacio y el tiempo son finitamente divisibles, se tiene la siguiente situación: un atleta A y un atleta C parten del mismo punto en la misma dirección, pero en sentidos opuestos, un atleta B se encuentra en el punto inicial de A y C, no ejerce movimiento alguno. El atleta B describe el movimiento de los atletas A y C de la siguiente manera: En un tiempo mínimo T, los atletas han recorrido una distancia mínima D (Se pueden suponer tiempos y distancias mínimas debido a que se tiene de hipótesis que ambos son magnitudes discretas).

Para el atleta A, el B se ha movido una distancia D mínima en el tiempo T mínimo, pero no logra describir el movimiento del atleta C, ya que al parecer recorrió 2 veces la distancia D, en un tiempo mínimo, es decir, existe una distancia D que no tuvo tiempo de ser recorrida (ver Figura 19).

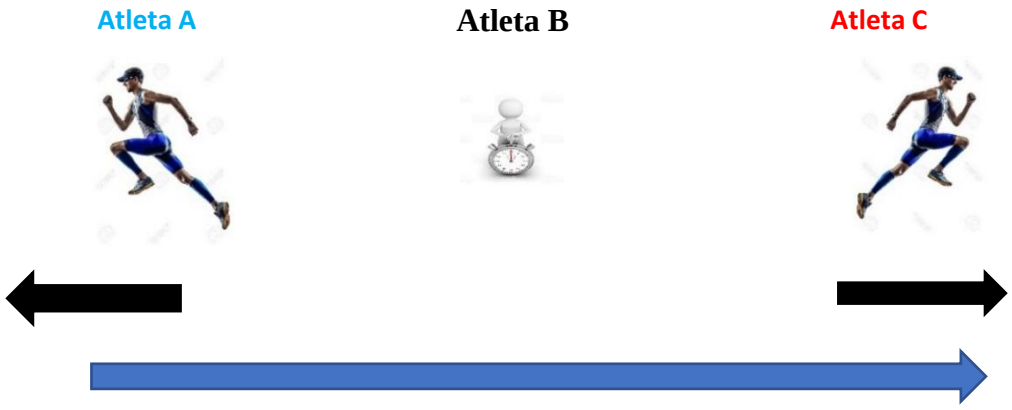


Figura 19: Diagrama de movimiento de la paradoja del estadio

2.4.2. Wallis y la transición de la concepción geométrica a la aritmética

El más importante de los matemáticos ingleses antes de Newton, John Wallis (1616-1703) se encargó de hacer la transición de los conceptos geométricos a los numéricos siempre y cuando esto fuera posible, resalta que "las demostraciones algebraicas eran tan válidas como las deducciones mediante líneas geométricas" (Collette, 1979, p. 83); además, dentro de sus trabajos sugiere que las proposiciones se interpreten, no de manera geométrica, sino como conceptos aritméticos. En su *La Aritmética infinitorum* aritmatizó la geometría de los indivisibles de Cavalieri.

Wallis se basa en el estudio de los indivisibles de Torricelli y afirma que "Las líneas tienen que ser comprendidas con anchura, y lo mismo los planos" (Yuste, 2002, p. 341) de esta manera, se debe rellenar una superficie o un sólido utilizando paralelogramos o paralelepípedos respectivamente, de anchura infinitesimal y uniforme, en una cantidad infinita. El objeto cuya anchura debe ser la mínima posible, es denominado por Wallis como *infinitésimo*. Según Yuste (2002) surgen del cociente entre una magnitud finita y otra infinita. Sin embargo, cabe resaltar que el infinito como ente absoluto no se concibe aún, sin embargo, resulta ser una suposición bastante útil.

En Pérez (s.f.) se propone el siguiente ejemplo sobre el método de Wallis para calcular el área bajo la curva $y = x^k$ para $k = 1,2,3, \ldots$ sobre el segmento $[0, a]$ así como se muestra en la Figura 20:

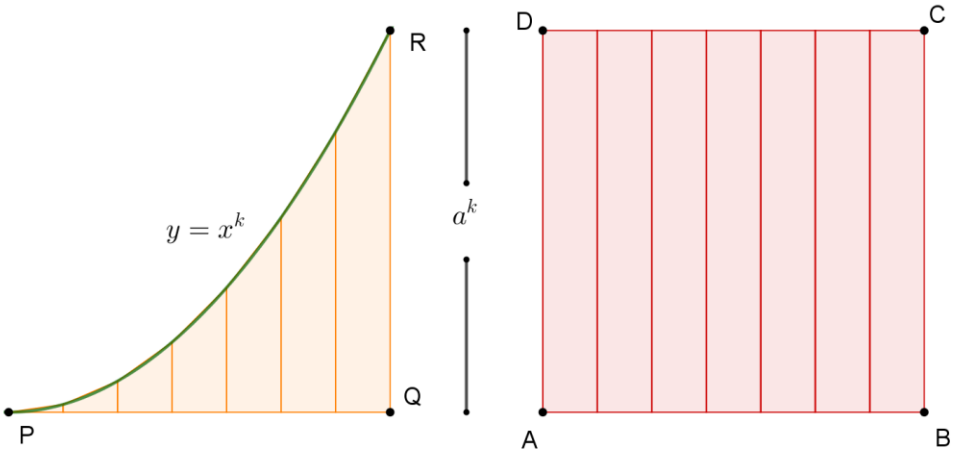


Figura 20: Comparación de indivisibles

Wallis considera que la región determinada por PQR está formada por un número infinito de segmentos verticales paralelos de longitud x^k. Si se divide el segmento $PQ = AB = a$ en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$, donde n es un número infinito, la suma de las infinitas líneas para $y = x^k$ será:

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k \qquad (3)$$

Mientras que el área del rectángulo $ABCD$ estará dada por:

$$a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k \qquad (4)$$

De ahí que la razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es:

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} \qquad (5)$$

A partir de esto, Wallis estudia el valor de la expresión (5) para $n = \infty$[11] luego de haber estudiado valores particulares para $k = 1, 2, 3$ y haciendo sumas para los distintos valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa algunas regularidades, con las cuales afirma que para $n = \infty$ y para $k = 1, 2, ...$, se cumple:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \qquad (6)$$

Además de (5) y (6) se deduce que:

[11] Es Wallis quien por primera vez introduce este símbolo para denotar el infinito.

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ ABCD} = \frac{Área\ PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

dado que el rectángulo $ABCD$ al igual que la región PQR está sobre el segmento $[0, a]$.

Por lo tanto,

$$Área\ PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Si bien este resultado ya era conocido, Wallis decidió extender este razonamiento para todos los exponentes racionales positivos, lo que posteriormente fue retomado por Newton para desarrollar la conocida serie binomial.

En Yuste (2002) proponen un desarrollo en términos actuales definiendo el índice $\sigma(f)$ de una función f mediante la siguiente igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1} \tag{8}$$

Se supone que está bien definido este límite, tomando (4) el índice de la función $f_k(x) = x^k$es $\sigma(f_k) = k$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Teniendo en cuenta que dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo: $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, su correspondiente sucesión de índices forma una progresión aritmética, si bien no se trata de un análisis riguroso, esta interpretación le permite a Wallis establecer una relación análoga con la siguiente progresión (sin demostración):

$$1, \sqrt[q]{x}, \left(\sqrt[q]{x}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}, x$$

De manera que la sucesión de índices forme una progresión aritmética, de donde se observa que debe ser $\sigma\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right) = \frac{p}{q}$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. De esta manera se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + \left(\sqrt[q]{2}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, el cual fue conocido posteriormente como el *método de interpolación de Wallis*. Esto surge a raíz del interés de resolver el siguiente

problema: “Dada una sucesión p_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de p_α cuando α no es un número entero”. (Pérez, s.f., p. 19)

A partir del uso de potencias fraccionarias negativas, Wallis afirma que la siguiente igualdad

$$\int_0^a x^r dx = \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

es válida también para exponentes r no racionales, esta deducción no cuenta con argumentos suficientes, más que las suposiciones hechas por el autor. A partir de esta igualdad, nace el interés de calcular la integral de la función $\sqrt{x - x^2}$ en el intervalo $[0,1]$, es decir:

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\ dx$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}$ cuyo valor es $\frac{\pi}{8}$. Wallis no tiene éxito en este cálculo, dado que quiso obtener el resultado evaluando directamente en la integral, sin embargo, el desarrollo de este trabajo lo llevó a obtener la llamada *fórmula de Wallis:*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

De la cual es posible hacer una aproximación del valor de $\frac{\pi}{2}$ estableciendo una productoria y ofreciendo un valor aproximado de π desde una sucesión infinita. Dado que esta sucesión se va construyendo, se puede evidenciar la noción de Wallis sobre el infinito, desde el punto de vista del infinito potencial.

2.4.3. Teoría de Límites – D’Alembert

Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783), creía que la filosofía del cálculo se encontraba en la idea del límite. En un artículo que escribió para Encyclopédie, según Boyer (1986), D’Alembert afirma “la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación” (p. 567). En contra del pensamiento

de la época, él insistía en que una cantidad es algo o nada, y si es algo, aún no se ha desvanecido, lo que está en oposición a los planteamientos de Newton.

D'Alembert interpreta las nociones de *razones primeras y últimas* como límites. El concepto de límite de D'Alembert por falta de precisión lingüística y de exactitud además de que estaba en un campo exclusivamente filosófico, no fue tomada en cuenta por sus contemporáneos, por lo tanto, los escritores de finales de siglo XVIII siguieron usando las concepciones de Leibniz y de Euler.

2.4.4. Cantidad variable – Cauchy

Augustin Louis Cauchy (París, 21 de agosto de 1789 - Sceaux, Lion, 23 de mayo de 1857), aunque admiraba profundamente a Lagrange, no estuvo de acuerdo con su definición de la derivada en series, debido a que este método no aplicaba para funciones que no pudieran ser expresadas como un polinomio de Taylor, y tampoco funcionaba con las series divergentes. Para Cauchy el *Programa de Lagrange* era un callejón sin salida (Dunham, 2005).

Con el fin de proporcionar una alternativa lógicamente válida, Cauchy afirmó que los principios del cálculo diferencial y sus aplicaciones más importantes pueden desarrollarse fácilmente sin la necesidad de series (Dunham, 2005) él creía que la base sobre la que constituiría el cálculo era la idea de límite. Según Dunham (2005), su definición de este concepto fue el siguiente: cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de ella tan poco como se desee, a este último se le llama el límite de todos los demás.

Cauchy dio el ejemplo del área de un círculo como el límite de las áreas de polígonos regulares inscritos cuando el número de lados aumenta sin límite. Por supuesto, ningún área poligonal iguala a la del círculo. Pero para cualquier tolerancia propuesta, un polígono regular inscrito con aún más lados está más cerca del círculo que la tolerancia estipulada. Las áreas poligonales se acercan, y permanecen cerca, al área del círculo. Ésta es la esencia de la idea de Cauchy.

Cauchy basó la noción de límite en la idea de *cercanía* o proximidad. De este modo introdujo otros conceptos relacionados; por ejemplo: *cantidades infinitamente pequeñas* que las relacionaba con los valores numéricos sucesivos de una variable que disminuyen indefinidamente. Bajo estos parámetros, Cauchy dirigió su atención a la idea de continuidad.

Comenzando con $y = f(x)$, define a i como una cantidad infinitamente pequeña y considera el valor de las funciones cuando x es reemplazado por $x + i$. Esto cambia el valor funcional de y a $y + \Delta y$, una relación que Cauchy expresó como:

$$y + \Delta y = f(x + i) \text{ o } \Delta y = f(x + i) - f(x)$$

Si, para un i infinitamente pequeño, la diferencia $\Delta y = f(x + i) - f(x)$ también era infinitamente pequeña, Cauchy llama a f como una función continua de x. Es decir, según Dunham (2005), él la define del siguiente modo una función es continua para x si, cuando la variable independiente x es aumentada por una cantidad infinitamente pequeña, la variable dependiente y igualmente crece por una cantidad infinitamente pequeña.

En este orden de ideas, se observa que Cauchy ha llamado f continuo en x si

$$\lim_{i \to 0} f(x + i) - f(x) = 0$$

que es equivalente a la definición moderna,

$$\lim_{i \to 0} f(x + i) = f(x)$$

Por otro lado, Cauchy consideró $y = sen(x)$ y usó el hecho de que $\lim_{x \to 0} sen(x) = 0$ así como la identidad trigonométrica $sen(\alpha + \beta) - sen(\alpha) = 2sen(\beta/2) \cdot \cos(\alpha + \beta/2)$ cuya demostración se presenta en el Anexo A.

Con base en esta identidad para un i infinitamente pequeño, observó que:

$$\Delta y = f(x + i) - f(x) = sen(x + i) - sen(x) = 2sen(i/2) \cdot \cos(x + i/2)$$

Como $i/2$ es infinitamente pequeño, también lo es $sen(i/2)$ por lo tanto, también el lado derecho de la ecuación, dado que $\cos(x + i/2)$ está acotado. Según la definición de Cauchy, la función seno es continua en cualquier x.

Luego Cauchy consideró *la función derivada*. Para él, el cociente diferencial estaba definida como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

Donde i es infinitamente pequeño. Tomando la notación de Lagrange, Cauchy denotó la derivada como y' o $f'(x)$ y afirmó que esto era "fácil" de determinar para funciones simples como:

$$y = r \pm x, rx, \frac{r}{x}, x^r, A^r, \log_A x\,, sen(x), \cos(x)\,, arcsen(x), accos(x)$$

Por ejemplo, si se considera:

$y = \log_A x$, el logaritmo con base $A > 1$, que Cauchy denotó por $L(x)$ y comenzó con el cociente diferencial

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i}$$

Para i infintamente pequeño e introduce la variable auxiliar $\alpha = \frac{i}{x}$, que también es infinitamente pequeña. Usando reglas de logaritmos y sustituyendo, Cauchy razonó que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i} = \frac{L\left(\frac{x+i}{x}\right)}{i} = \frac{L\left(\frac{x+\alpha x}{x}\right)}{\alpha x} = \frac{\frac{1}{\alpha}L(1+\alpha)}{x} = \frac{1}{x}L(1+\alpha)^{1/\alpha}$$

Para α infinitamente pequeño, él identificó esta última expresión como $\frac{1}{x}L(e)$. Hoy invocaríamos la continuidad del logaritmo y el hecho de que $\lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$ para justificar este paso. En cualquier caso, Cauchy concluyó de esto que la derivada de $L(x)$ era $\frac{1}{x}L(e)$.

2.4.5. Conclusiones Parciales de la Concepción Aritmética

Con los trabajos de Zenón, Wallis, D'Alemebert y Cauchy, se empieza a pensar en la idea de límite ya sea desde un contexto matemático o filosófico y en cierto modo los terrenos de estos análisis empiezan nuevamente a juntarse. En la paradoja de Aquiles y la tortuga, Zenón pone en evidencia un acercamiento a la noción de límite, relacionado con el infinito, pues se pensaba que una sucesión cualquiera que fuese era divergente. La situación de Aquiles y la tortuga era considerada como una paradoja, debido a que no se tenía conocimiento de la convergencia de algunas sucesiones y series. En este caso en particular la sucesión $\frac{1}{10^0}, \frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$ de la cual, como es sabido converge a 0. Esto generó la dificultad en los cálculos relacionados con la continuidad del tiempo

y el espacio, haciéndolos imprecisos. Lo anterior es una consecuencia del obstáculo definido por Cornu como *el límite puede ser alcanzado*.

Por su parte, Wallis introduce los infinitésimos al asumir la anchura de paralelogramos o paralelepípedos con los que pretende hallar el área bajo la curva $y = x^k$, si bien en este momento no se reconoce el infinito actual en matemáticas, supone un acercamiento a este introduciendo el símbolo ∞ como infinito. Dentro de sus pruebas, que no son del todo formales se rescata la superación de los obstáculos epistemológicos *Horror al infinito*, que aún en esa época era evidente, y *la noción de infinitamente pequeño e infinitamente grande* con la introducción de los infinitésimos.

Cauchy quien no estuvo de acuerdo con los planteamientos de Lagrange, empieza pensar en las ideas de las cantidades *infinitamente pequeñas*, *cercanía*, *tendencia*, etc. Estas ideas ya venían desde Newton y Leibniz, pero Cauchy les empezó a quitar el componente filosófico de este concepto para adentrarlo a las matemáticas, en este orden de ideas se puede observar que Cauchy atacó el obstáculo definido por Cornu (1983), *Infinitamente pequeño y lo infinitamente grande*, mostrando la idea de límite sin hablar de cantidades evanescentes, y mostrando cómo las cantidades infinitamente pequeñas pueden aportar en el desarrollo del cálculo sin hacer uso de las series de Taylor.

Con los elementos mencionados, Cauchy define una función continua, pero más adelante Weierstrass mostrará que ésta definición tiene errores debido a la falta de formalización del concepto de límite de una función, lo que atañe a los obstáculos lógicos y de símbolo, debido a que la falta de formalización puede inducir a errores, en consecuencia no se tienen en cuenta cuantificadores y elementos de la lógica binaria, las cuales pudieron haber ayudado a Cauchy a no caer en errores relacionados con la intuición que no siempre está a la par con las matemáticas.

Por último, D'Alemebert, en contraposición con los planteamientos de Newton, observó que una cantidad es algo o nada, y si es algo, aún no se ha desvanecido, lo que toca de nuevo a la superación del obstáculo *Infinitamente pequeño y lo infinitamente grande*, y trata a las cantidades evanescentes como límites, pero D'Alemebert incurrió en el obstáculo de carácter simbólico, debido a que nunca formalizó esta idea de manera clara, por lo que sus contemporáneos Leibniz y de Euler rechazaron su postura.

2.5. Concepción analítica

En el siguiente apartado se mostrará la construcción formal del concepto de límite de una función, de los procesos asociados al paso al límite, y algunas ideas en la construcción de los números reales que son esenciales para el desarrollo de la definición de límite y del proceso del paso al límite. Esta tarea la emprenden simultáneamente Cantor, Dedekind y Weierstrass.

Cantor y Dedekind presentan la construcción de los números reales, para esto, Cantor hace uso de las sucesiones de Cauchy mientras que Dedekind se basa en cortaduras de conjuntos disyuntos, con esto demuestra todas las propiedades de este conjunto a partir de un conjunto conocido como lo son los números racionales. Por último, Weierstrass por su cuenta presenta una definición formal de límite sin necesidad de recurrir a argumentos geométricos, esto con el fin de descartar el carácter intuitivo de la noción de límite y evitar errores conceptuales en elementos matemáticos que dependen de esta noción

2.5.1. Construcción de Los Números Reales - Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845 - Halle, 6 de enero de 1918), junto con su amigo Dedekind construyeron la base de lo que se conocería como la moderna teoría de conjuntos; en este punto Cantor trabajó bajo la noción del infinito actual, reconociéndolo como un objeto matemático.

Cantor al igual que Dedekind en el esfuerzo de formalizar el cálculo, se vio en la necesidad de realizar una construcción satisfactoria de los números reales. Este lo hizo a partir de sucesiones convergentes, con la precaución de no definir un número real como el límite de una sucesión de reales. De este modo desarrolla su teoría sin presuponer la existencia de los números reales, así que toma como punto de partida los números racionales. De este modo define una sucesión fundamental así:

La sucesión infinita de números racionales $a_1, a_2. a_3, \dots, a_n, \dots$ se llama sucesión fundamental (sucesión de Cauchy) si existe un natural N tal que para cualquier valor positivo racional ε, se cumple que:

$|a_m - a_n| < \varepsilon$, para todo m y todo n mayores que N.

Esta sucesión fundamental tiene la propiedad, según Cantor, de que siempre tiene un límite definido b. Esta era una manera de decir que únicamente a cada una de tales sucesiones $\{a_n\}$ se le asocia un símbolo b. Según Recalde (2004) Cantor fue explícito en usar la palabra *símbolo* para describir el papel de b.

Luego definió las relaciones de equivalencia y de orden entre sucesiones.

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ asociada con a; $\{b_n\}$ asociada con b. Entonces:

i. $a = b$, si para todo número racional $\varepsilon > 0$, existe un número natural N, y tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

ii. $a > b$, si existe un número racional $\varepsilon > 0$ y un número natural N, tal que $a_n - b_n > \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

Cualquier número racional p fácilmente de identifica con la sucesión constante $\{p\}$. Ésta se puede comparar con cualquier sucesión fundamental $\{a_n\}$, con el símbolo al cual tiene asociado b. Se observa que $p = b$, $p < b$ o $p > b$.

El conjunto de estos símbolos conforma el nuevo sistema B, este es dotado de una estructura de cuerpo con las siguientes operaciones:

Proposición suma. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones fundamentales, entonces la suma $\{a_n + b_n\}$ también es una sucesión fundamental.

Demostración:

Como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones fundamentales, se tiene:

Existen dos naturales N_1 y N_2 tal que para cualquier valor positivo racional ε, se cumple que:

$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $m \geq N_1$ y todo $n \geq N_1$ y

$|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $m \geq N_2$ y todo $n \geq N_2$

En consecuencia, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene:

$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| < \varepsilon$, para todo $m \geq N$ y $n \geq N$

Proposición producto. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones fundamentales, entonces el producto $\{a_n \cdot b_n\}$ también es una sucesión fundamental.

Demostración:

Como Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones fundamentales, entonces son acotadas, luego existen dos elementos h_1,$h_2 \in \mathbb{Q}$ tales que

$|a_n| < h_1$ y $|b_n| < h_2$ para todo n

Existen dos naturales N_1 y N_2 tal que para cualquier valor positivo racional ε, se cumple que:

$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2h_2}$, para todo $m \geq N_1$ y todo $n \geq N_1$ y

$|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2h_1}$, para todo $m \geq N_2$ y todo $n \geq N_2$

En consecuencia, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene:

$$|(a_m \cdot b_m) - (a_n \cdot b_n)| = |(a_m - a_n) \cdot b_m + (b_m - b_n) \cdot a_n|$$
$$\leq |a_m - a_n| \cdot |b_m| + |b_m - b_n| \cdot |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2h_2} h_2 + \frac{\varepsilon}{2h_1} h_1$$

Es decir,

$|(a_m \cdot b_m) - (a_n \cdot b_n)| \leq \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$

En Linés (1991) se pueden observar las demostraciones de cuerpo y de la propiedad arquimediana de este conjunto. Para propósitos de la observación del desarrollo del límite, se demostrará el teorema de completitud para las sucesiones fundamentales, el cual es clave para la formalización de la definición de límite de una función real.

Teorema de completitud. Toda sucesión fundamental en B, tiene un límite en B.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión fundamenta en B que no sea constante, es decir, que para todo

$$n \in \mathbb{N}, a_n \neq a_{n+1}$$

Si a_n y a_{n+1} son términos consecutivos, por ser distintos, existe un elemento intermedio perteneciente a $\mathbb{Q}$, que se designará por a^n

$$a_n < a^n < a_{n+1} \ \vee \ a_{n+1} < a^n < a_n$$

La sucesión $\{a^n\}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ es fundamental en $\mathbb{Q}$. En efecto, dado un $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, por ser $\{a_n\}$ una sucesión fundamental en B, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$|a_n - a_m| < \ \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$

Tomando las desigualdades que definen la sucesión $\{a^n\}$, se tiene

$$|a^n - a^m| < |a_{n'} - a_{m'}|$$

Donde n' es n o $n+1$ y m' es m o $m+1$, luego por transitividad

$|a^n - a^m| < \varepsilon$, para todo $m, n \geq N$

Luego de obtener que la sucesión $\{a^n\}$ es fundamental en $\mathbb{Q}$, ahora se finaliza demostrando que $\{a^n\}$ tiene un representante $\alpha \in B$ el cual es el límite de la sucesión $\{a_n\}$. En efecto se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - \alpha| < |a_n - a^n| + |a^n - \alpha|$$

Como $\{a^n\}$ es fundamental en $\mathbb{Q}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = \alpha$ (para detalles de su demostración observe Linés (1991), es decir para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$|a^n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq N_1$

y por ser $\{a_n\}$ fundamental, existe un N_2, tal que es

$|a_n - a^n| < |a_n - a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq N_2$

luego

$$|a_n - a^n| + |a^n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

y por consiguiente,

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$

donde $N = \max\{N_1, N_2\}$

es decir;

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \alpha$$

Con lo anterior Cantor demuestra que el cuerpo conformado por las sucesiones fundamentales es completo, de este modo muestra que el conjunto tiene una estructura isomorfa a los números reales. Si embargo para poder terminar de garantizar esto, Cantor asocia a cada límite de la sucesión un único punto en la recta real, no encuentra problemas al asociar las sucesiones constantes con los números racionales en la recta real, a los demás puntos les asoció las sucesiones de números racionales aproximadas a cada uno. Es decir, la sucesión $\{a_n\}$ se aproxima tanto como se quiera al punto dado.

Cantor expresaba esta relación de la siguiente manera "la distancia del punto a ser determinado al origen o es igual a b, donde b es el número correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$" (Recalde, 2004, p. 59). Dado que cada elemento de la recta tiene un único correspondiente a B, se garantiza la unicidad, pero Cantor nunca logró demostrar la relación inversa, es decir, no logró asociar a cada elemento de B uno punto en la recta, por lo tanto, lo tomó como axioma: "A cada número le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número" (Recalde, 2004, p. 59).

2.5.2. Construcción de Los Números Reales – Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) es considerado junto con Galois como uno de los fundadores del álgebra moderna, fue el primer matemático en construir de manera explícita los números reales a partir de los racionales. Dentro de su trabajo de continuidad y números irracionales, menciona su percepción sobre el cálculo diferencial, "Por primera vez me vi obligado a expresar los elementos del cálculo diferencial y sentí más agudamente que nunca antes la falta de una fundamentación realmente científica de la aritmética" (Dedekind, 1872 en Giraldo & Sánchez, 2013, p. 97)

Dedekind asume una postura frente a la falta de fundamentación del cálculo infinitesimal particularmente en la propuesta de demostración de que toda sucesión monótona y acotada tiene

límite, esto es, convergente, y propone una alternativa frente a la construcción precisa de los números reales, desde lo que denomina el comienzo de aritmetización del análisis. La construcción se basa en la noción de cortadura, la cual define como:

> Dado un número a, el conjunto de los números racionales $(\mathcal{Q})$ se divide en dos clases A_1 y A_2. En la primera de ellas están todos los números a_1 tales que $a_1 < a_2$, y en la segunda todos los a_2 tales que $a_2 > a$. (Dedekind, 1872 en Giraldo & Sánchez, 2013, p. 98)

La idea principal es que todo número racional define una cortadura, pero existen cortaduras dentro del conjunto de los racionales que no están definidas por números racionales. Además de este aporte, Dedekind caracteriza la continuidad a partir del concepto de cortadura (ver Figura 21):

> Si el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales se subdivide en dos clases, $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ tales que cada número α_1 de la clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número α_2 de la clase $\mathfrak{A}_2$, entonces existe un y sólo un número α por el cual esa división está determinada. (Dedekind, 1927, p. 11)

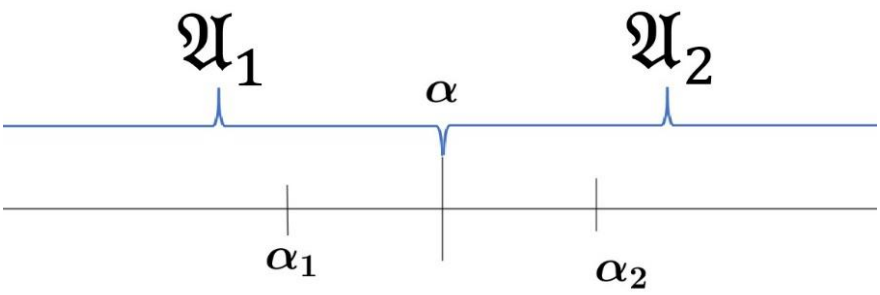


Figura 21: Propiedad de la cortadura

Dedekind (1927) propone la siguiente demostración para esta proposición: Por la cortadura de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}_1$ *y* $\mathfrak{A}_2$ también se genera una cortadura A_1, A_2 en los racionales, en la que A_1 contiene a todos los números racionales de la clase $\mathfrak{A}_1$ y A_2 a todos los demás números racionales de la clase $\mathfrak{A}_2$. Sea α el número que determina esta cortadura, si β es un número diferente de α, entonces hay siempre infinitos números racionales c que están situados entre α y β por la proposición II de los números racionales (Dedekind, 1927, p.4).

Si $\beta < \alpha$, entonces $c < \alpha$ luego c pertenece a la clase A_1 por lo tanto también a la clase $\mathfrak{A}_1$ y a su vez se tendría que $\beta < c$ por lo tanto β pertenece a la clase $\mathfrak{A}_1$, dado que cada número en $\mathfrak{A}_2$ es mayor que cada número c en $\mathfrak{A}_1$ (ver Figura 22).

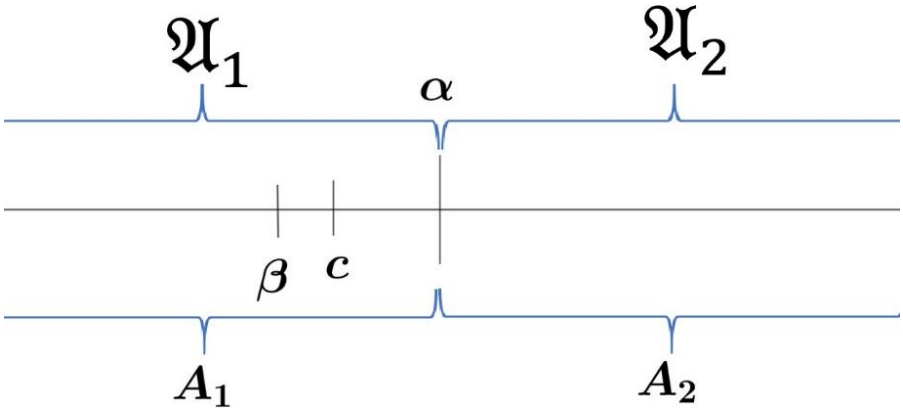


Figura 22: Infinitos racionales c entre α y β con $\beta < \alpha$

Por otro lado, si $\beta > \alpha$, entonces $c > a$, luego c pertenece a la clase A_2 en consecuencia también a la clase $\mathfrak{A}_2$, y como a su vez $\beta > c$, entonces β también pertenece a la misma clase $\mathfrak{A}_2$, porque cada número en $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número c en $\mathfrak{A}_2$.

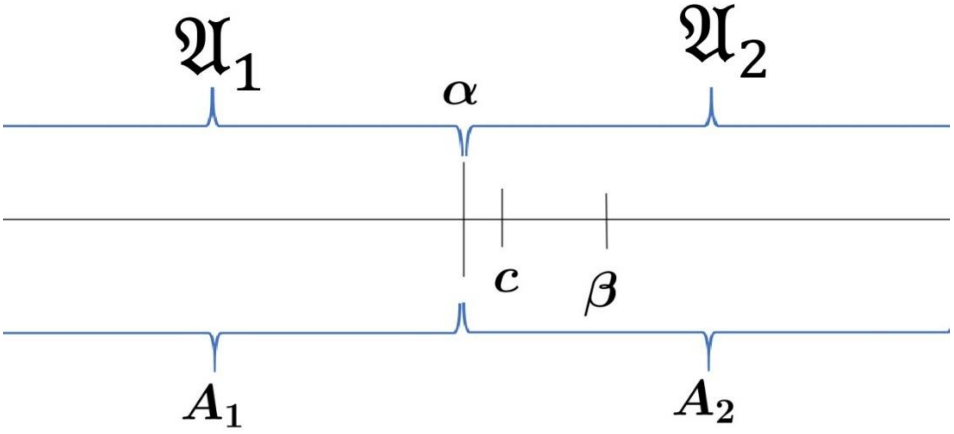


Figura 23: Infinitos racionales c entre α y β con $\beta > \alpha$

Luego, para cada β diferente de α, β pertenece a la clase $\mathfrak{A}_1$ o a la clase $\mathfrak{A}_2$, según sea $\beta < \alpha$ o $\beta > \alpha$; por lo tanto, α es el supremo de $\mathfrak{A}_1$ y α es el ínfimo de $\mathfrak{A}_2$. Dedekind (1927) afirma que α es el único número que determina la división de $\mathfrak{R}$ en dos clases $\mathfrak{A}_1$ *y* $\mathfrak{A}_2$, que es lo que se quería demostrar.

2.5.3. Definición Formal y Precisa - Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) reconocido por sus aportes profundos al análisis riguroso de las matemáticas, presenta una definición formal sobre el límite de una función, de la siguiente manera:

> $\lim_{x\to a} f(x) = L$ sí y solo sí, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De acuerdo con Dunham (2005), se trata de una definición estática y analítica, sin necesidad de recurrir a la intuición geométrica, por lo tanto, es posible utilizarla como base para demostraciones que involucren el límite. Un ejemplo de esto es la continuidad uniforme, definida por Cauchy como continuidad punto por punto:

$$f \text{ es continua en } a \text{ si } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En el lenguaje utilizado por Weierstrass significa que para cada $\varepsilon > 0$, corresponde un $\delta > 0$, de tal manera que

$$0 < |x - a| < \delta$$

luego,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

De esta manera, para un ε fijo y una a dada, es posible encontrar un δ necesario. En este caso δ depende tanto de ε como de a, luego, si se tomara ε como fijo, pero se considera un a diferente, entonces el valor de δ tendría que ajustarse.

Según Dunham (2005), Eduard Heine es quien hace pública esta distinción atribuyéndola a Weierstrass, y define una función f uniformemente continua en su dominio si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de tal manera que x e y son dos puntos cualesquiera en el dominio dentro de δ unidades entre sí, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Lo que significa que un δ sirve para todos, luego, los puntos de esta distancia uniforme tendrán valores funcionales dentro de ε entre sí.

De lo anterior se deduce que una función uniformemente continua, será continua en cada punto individual. Sin embargo, la afirmación contraria es falsa, y un contraejemplo es la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ definida en el intervalo } (0,1)$$

pues si bien es continua en cada punto de $(0,1)$ el criterio de uniformidad de Heine falla. La prueba de esto la presenta Dunham (2005) como sigue:

Dejando $\varepsilon = 1$ y afirmando que no puede haber $\delta > 0$ con la propiedad de que, cuando x e y pertenecen al intervalo $(0,1)$ con $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1$$

Porque, dado cualquier δ propuesto, es posible elegir un número entero $N > max\left\{\frac{1}{\delta}, 1\right\}$ y sea $x = \frac{1}{N+2}$ e $y = \frac{1}{N}$. En este caso, tanto x como y pertenecen a $(0,1)$ y

$$|x - y| = \left|\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N}\right| = \frac{2}{N(N+2)}$$

A su vez,

$$\frac{2}{N(N+2)} < \frac{N+2}{N(N+2)} = \frac{1}{N} < \delta$$

pero,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{N+2}} - \frac{1}{\frac{1}{N}}\right| = 2$$

lo que contradice que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1 = \varepsilon$$

luego, no se cumple el requisito para la continuidad uniforme.

2.5.4. Conclusiones Parciales de La Concepción Analítica

Cantor y Dedekind al realizar sus construcciones de los números reales basados en el conjunto de los números racionales encuentran ideas más claras de la continuidad y de límite, sobre todo en la configuración de la propiedad arquimediana y la propiedad del continuo, debido a que las nociones de supremo e ínfimo están íntimamente relacionadas con la idea de límite. Dedekind, desde su intento de formalización del cálculo, y la introducción de las cortaduras retoma la idea de continuidad e intenta superar el obstáculo ligado al concepto de función desde la determinación del supremo e ínfimo que surge a raíz de la propiedad de la cortadura, pues se hace relevante la noción de límite para comprender estos conceptos. Cantor, por su parte al definir los reales como el límite de una sucesión de Cauchy o sucesión fundamental, hace uso de esta idea y supera el obstáculo *el límite puede ser alcanzado*, ya que hace explícita la relación de equivalencia entre el límite de la sucesión fundamental y el número real que le corresponde. Finalmente, Weierstrass quien está interesado en la formalización del análisis, plantea una definición formal de límite de una función y allí menciona algunas inconsistencias presentadas por Cauchy en relación con la continuidad uniforme, nuevamente, se relaciona con el obstáculo de transposición numérica y el obstáculo ligado al concepto de función, dado que lo que su principal interés fue lograr representar el límite desde un punto de vista analítico sin involucrar el carácter intuitivo de los aspectos geométricos. No obstante, y de manera un tanto paradójica, surgen evidencias explícitas asociadas a la lógica y los cuantificadores empleados en la definición del objeto.

3. Importancia Del Conocimiento Histórico Sobre Los Conceptos Relativos Al Límite

Si bien se realizó un amplio desarrollo sobre el marco histórico relativo a la noción de límite, se procuró, en esencia, profundizar en las técnicas, demostraciones e incluso generalizaciones a partir de la experimentación con casos particulares, dado que estas alternativas a la hora de hacer matemáticas resultan indispensables para el tratamiento que el profesor de matemáticas puede desarrollar en sus clases con los objetos y conceptos que involucran el proceso con el paso al infinito.

Para introducir la historia de las matemáticas en la clase, se requiere ir más allá de las anécdotas históricas, supone la comprensión de elementos del conocimiento matemático de las épocas a considerar. Para lograr esto resulta indispensable el conocimiento matemático que permita abordar

o reacomodar estos temas históricos dada la complejidad en la interpretación, realizando una transposición de este conocimiento, en la que se identifiquen las posibles brechas existentes entre estudios de algunos matemáticos, en relación con la noción de un objeto matemático. Por otro lado, el conocimiento matemático se considera importante a la hora de trazar los objetivos de aprendizaje de lo que se quiere lograr e identificar los elementos que son importantes para alcanzar dichos objetivos, en relación con el objeto matemático.

El conocimiento de la historia como una narración de hechos puede ayudar al profesor a generar interés en el estudiante sobre el estudio de algún concepto en particular; pero conocer la manera en que se procedía y pensaba, matemáticamente hablando, es decir, conocer con rigurosidad los métodos, mejor aún, de fuentes que describan lo más fielmente posible el proceso que llevó a concretar dichos métodos, permite al docente identificar los diferentes obstáculos epistemológicos que los investigadores en Educación Matemática han logrado establecer como los ya mencionados en Cornu (1983) y Sierpinska (1994). Dichos obstáculos, pueden aparecer en las aulas de clase cuando los estudiantes estén trabajando con la noción de límite o con algunos procesos que involucran el paso al infinito. El tratamiento histórico sobre cómo se afrontaron algunos obstáculos o los momentos en que se generaron puede sugerir ideas al docente sobre la manera alterna y óptima de abordar dicha noción o cuando menos comprender que las dificultades en la comprensión de los conceptos no necesariamente están asociadas a simples incomprensiones o falta de actitud de los estudiantes.

A continuación, se ilustra una secuencia de actividades presentada a modo de ejemplificación de lo que aquí se expone. Se pretende que sirva como alternativa para comprender un poco más la idea de límite y del proceso del paso al límite. Para esto, se parte de la pregunta: ¿cómo calcular el área de un círculo?

Lo primero será establecer algunos métodos, por medio de una secuencia de actividades en donde se haga una alusión histórica, desde los cuales sea posible abordar el problema inicial, se tiene en cuenta que dichas actividades se plantean a nivel general, con el fin de ser flexible a cambios según las necesidades del contexto escolar en el que se desarrollen, por ello no se propone para un grado específico o una población puntual.

A continuación, se enunciarán las actividades propuestas.

3.1. Actividad 1: Método de Exhaución Eudoxo – Arquímedes

En la primera propuesta, del método de exhaución de Eudoxo – Arquímedes se presenta en paralelo, la inscripción y circunscripción de un polígono regular de n lados, se tiene en cuenta la distinción entre la propuesta de Eudoxo y lo expuesto en la actividad dado que con la propuesta original la cantidad de lados se duplica y esto hace que la sucesión converja más rápido. Sin embargo, al aumentar el número de lados de a uno puede llegar a ser más provechoso para el estudiante.

Se pretende realizar el análisis entre el área de cada polígono, teniendo en cuenta su número de lados y el área del círculo, si el círculo tiene radio unitario. A continuación, se muestra la interfaz del entorno diseñado en GeoGebra (el enlace de acceso a este recurso se encuentra en el Anexo B), desde el cual se propone que el profesor de matemáticas centre su trabajo en el aula:

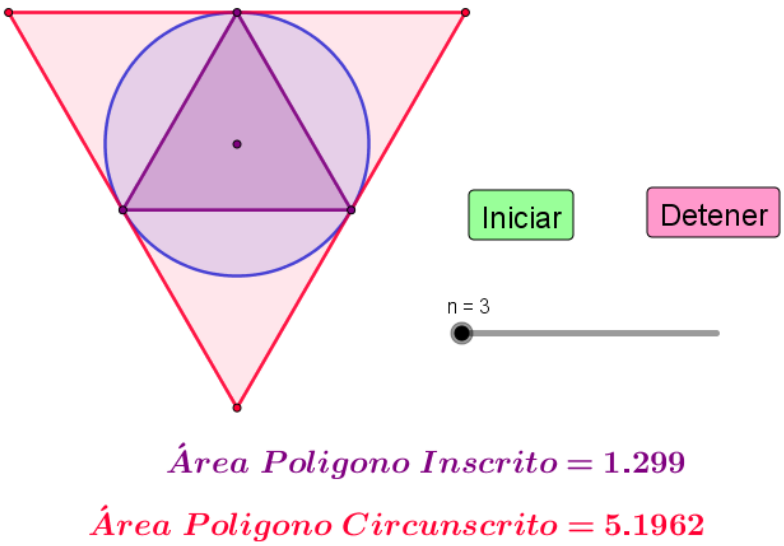


Figura 24: Interfaz método de exhaución

En la interfaz mostrada en la Figura 24 es posible realizar una animación para el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos, a medida que aumenta n, aumenta también el número de lados de dichos polígonos, además en el costado derecho se muestra el área de cada uno de los polígonos. Se considera esencial las posibles preguntas que se prevén plantear a los estudiantes, por ejemplo:

i. ¿Qué sucede con el área del polígono inscrito a medida que n aumenta?

ii. ¿Qué sucede con el área del polígono circunscrito a medida que n aumenta?

iii. ¿Es posible que en algún momento el área del polígono inscrito sea mayor que el área del polígono circunscrito?

iv. ¿Qué relación pueden encontrar entre el área de estos polígonos a medida que n aumenta?

v. ¿Es posible establecer un valor estimado para el área de los polígonos?

Si bien pueden parecer preguntas triviales para el profesor, es importante identificar las perspectivas de los estudiantes y de esta manera poder encaminar la discusión hacia la noción de límite, dado que en la pregunta (iii), si bien no es posible, permite a los estudiantes expresar sus ideas sobre lo que consideran que está sucediendo, llevándolos posiblemente a la conclusión de que sus áreas serán iguales en algún momento o difieren en cantidades indistinguibles al menos, desde lo que el ordenador permite observar.

Luego de plantear esta perspectiva, es posible trabajar desde las sucesiones que se generan partiendo del área tanto del polígono inscrito, como del polígono circunscrito, en este sentido se espera que los estudiantes determinen la convergencia de estas sucesiones, también desde un ambiente virtual que facilite a su vez la visualización del planteamiento propuesto, para este caso, se pondrá la vista simultánea que permita identificar la relación existente entre el área de los polígonos y la sucesión que genera cada uno:

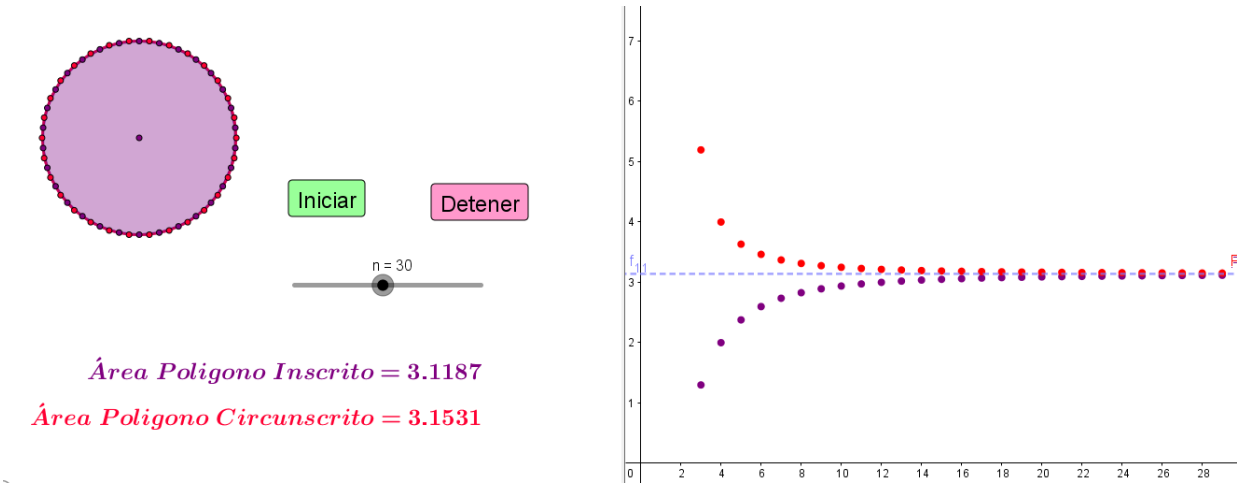


Figura 25: Convergencia del área de los polígonos

Así mismo, cabe el planteamiento de preguntas como:

i. ¿Qué relación existe entre la sucesión de puntos rojos y morados con los polígonos de la gráfica?
ii. ¿Es posible que en algún momento un término n de la sucesión morada sea mayor que un término de la sucesión roja?
iii. ¿Qué comportamiento pueden evidenciar en la sucesión roja, a medida que n aumenta?
iv. ¿Qué comportamiento pueden evidenciar en la sucesión morada, a medida que n aumenta?
v. ¿A qué valor se acercan las sucesiones?

Nuevamente, el planteamiento de estas preguntas supone no sólo identificar lo que podría considerarse como evidente en la gráfica, sino que recoge la comprensión alcanzada por los estudiantes, dado que si bien pueden evocar imágenes conceptuales diversas de acuerdo con la animación propuesta en GeoGebra, la manera de enunciar sus percepciones puede ayudar al maestro a identificar el tipo de comprensión que ha adquirido el estudiante, desde el que se puede diferenciar entre el conocimiento común o si es posible asociarlo al conocimiento científico, en términos de Sierpiska (1994).

Por ejemplo, dentro de los términos del conocimiento común (que sería lo esperado), los estudiantes pueden manifestar que se acerca mucho al valor de π o que es igual a π, si es que han trabajado anteriormente dicho número, o podría conjeturar algún valor aproximado y se puede aprovechar para determinar cuáles son sus conocimientos matemáticos. Por ejemplo, alguien podría conjeturar que se acerca al valor medio dado por las aproximaciones. Si no se ha trabajado con pi, ésta sería una oportunidad para hacerlo e introducir una discusión sobre los números irracionales y las aproximaciones.

Por otro lado, dentro del conocimiento científico se podría utilizar términos como la convergencia de las sucesiones a un valor determinado, en este caso π. Es esencial la intervención del docente, en donde se planteen preguntas que permitan a los estudiantes concluir que cuando la sucesión tiende a infinito su valor será igual a π, ya que, si bien la gráfica está planteada para valores finitos, es posible extender el esquema mental y deducir qué sucedería en el infinito y poder dar una discusión ya sea explícita o implícita con relación al infinito potencial y actual.

Por otra parte, se considera importante, para los fines del presente trabajo, ofrecer una demostración analítica sobre la convergencia establecida; para este caso se evaluará el límite del área de los polígonos inscritos y circunscritos cuando $n \to \infty$.

El área de un polígono regular está dada por:

$$A = \frac{nla}{2}$$

Donde,

$n = lados\ del\ polígono$

$l = longitud\ de\ uno\ de\ sus\ lados$

$a = apotema$

3.1.1. Polígono Inscrito

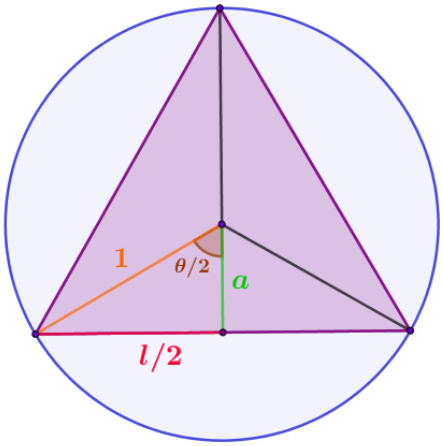


Figura 26: Área del polígono inscrito

Partiendo del triángulo inscrito, se conoce que:

$$l = 2sen(\theta/2)$$

$$a = \cos(\theta/2)$$

Reemplazando estos valores en el área del polígono de n lados se tendría:

$$A = \frac{n\ 2sen(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2}$$

Haciendo uso de una identidad de ángulo doble,

$$A = \frac{n\ sen(\theta)}{2}$$

Particularmente para un polígono de n lados, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, luego,

$$A = \frac{n\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

Evaluando en el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$$

Sea $k = \frac{2\pi}{n}$, cuando $n \to \infty$, $k \to 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = \lim_{k\to 0} \frac{\pi\ sen(k)}{k}$$

Aplicando L'Hopital resultaría,

$$\lim_{k\to 0} \frac{\pi \cos(k)}{1} = \pi$$

Quedando demostrada la convergencia de esta sucesión a π.

3.1.2. Polígono Circunscrito

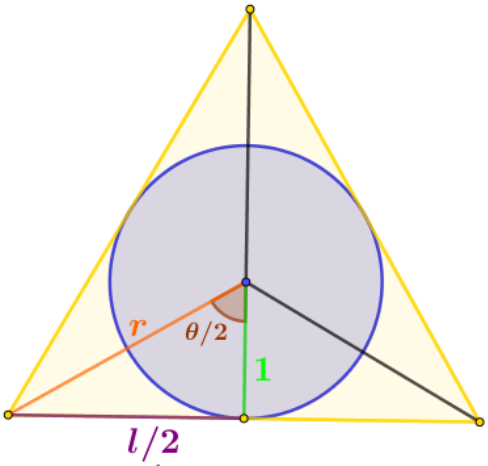


Figura 27: Área del polígono circunscrito

Partiendo ahora del triángulo circunscrito, se conoce que:

$$l = \frac{2Sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{r}$$

$$r = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Reemplazando el valor de r se tendría:

$$l = 2sen(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

Haciendo uso de una identidad de ángulo doble,

$$l = sen(\theta)$$

Reemplazando los valores en el área, se tendría:

$$A = \frac{n\ sen(\theta)}{2}$$

Que es el mismo resultado al que se llegó en el polígono inscrito, por lo tanto, queda demostrada la convergencia de esta sucesión también corresponde a π.

3.2. Actividad 2: Método de Newton y la Aproximación del Área a Partir de los Polinomios de Taylor

El conocimiento histórico del docente le permitirá usar el método de Newton para la aproximación del área de media circunferencia por medio de los polinomios de Taylor, sin la necesidad de que sus estudiantes conozcan la derivada de una función o cómo se calcula el polinomio de Taylor de una función. Ya que dicho método solo requiere de la noción de función. Esto les permitirá a los estudiantes, conociendo el valor del área de media circunferencia, hacer un comparativo del polinomio evaluado en el intervalo $[-1, 1]$ y el área calculada mediante la fórmula $A = \pi r^2$, y así observar cómo el polinomio se acerca cada vez más al valor del área a medida que se le agrega un nuevo término siguiendo la secuencia de sumas.

En una primera parte de la actividad es pertinente que el docente solicite hallar el valor del área de medio círculo de radio 1, por medio de la fórmula $A = \frac{\pi r^2}{2}$. De este modo los estudiantes desde el principio de la actividad conocerán el valor real que aquella área.

El docente puede hacer una actividad de carácter inductivo en el que le presente a los estudiantes el polinomio de aproximación, agregándole cada vez más un nuevo término, buscando que ellos mismos observen alguna regularidad y tengan los elementos necesarios para deducir los siguientes términos, y así a cada anexión de términos, evalúen el polinomio en el intervalo $[-1, 1]$ y hacer su respectiva comparación con el valor de $\frac{\pi}{2}$. Es decir, el docente comenta el método de Newton para hallar el área aproximada de medio círculo consiste en observar la función:

$$h(x) = x + \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)}{1}\right) x^3}{3}$$

Y luego se les solicita a los estudiantes hallar el valor de $h(1) - h(-1)$, ellos deben compararlo con el valor de $\frac{\pi}{2}$, que corresponde al área de medio circulo unitario. De este modo el estudiante evidenciará cómo los valores son similares, pero no son iguales.

Como segunda instancia el profesor propone la misma función anterior, pero adicionando un término conveniente del siguiente modo:

$$h(x) = x + \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)}{1}\right)x^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{8} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}\right)x^5}{5}$$

Igual que en la función anterior se les solicitará a los estudiantes hallar de $h(1) - h(-1)$ y encontrar el error de aproximación, que de manera implícita es una forma de comparar la aproximación del área con su valor real.

Se repetirá el procedimiento anterior, pero con la siguiente función.

$$h(x) = x + \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)}{1}\right)x^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{8} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}\right)x^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{16} \times \frac{\left(\frac{1}{2} - 3\right)}{3}\right)x^7}{7}$$

A partir de este trabajo, el docente hará a siguiente pregunta

¿Cuál sería el valor del siguiente término?

Lo anterior, con el fin de que los estudiantes encuentren una regularidad entre cada término de los polinomios que se aproximan al valor del área. Luego de que los estudiantes hayan encontrado la regularidad y tengan la capacidad de generar un nuevo polinomio, cada vez más aproximado; pasamos de lo analítico a lo geométrico, mostrando el GeoGebra (ver Anexo C), en donde se observa la curva correspondiente a la función y la media circunferencia unitaria, en las cuales se puede evidenciar la aproximación de la función a la circunferencia a medida que aumentan la cantidad de términos.

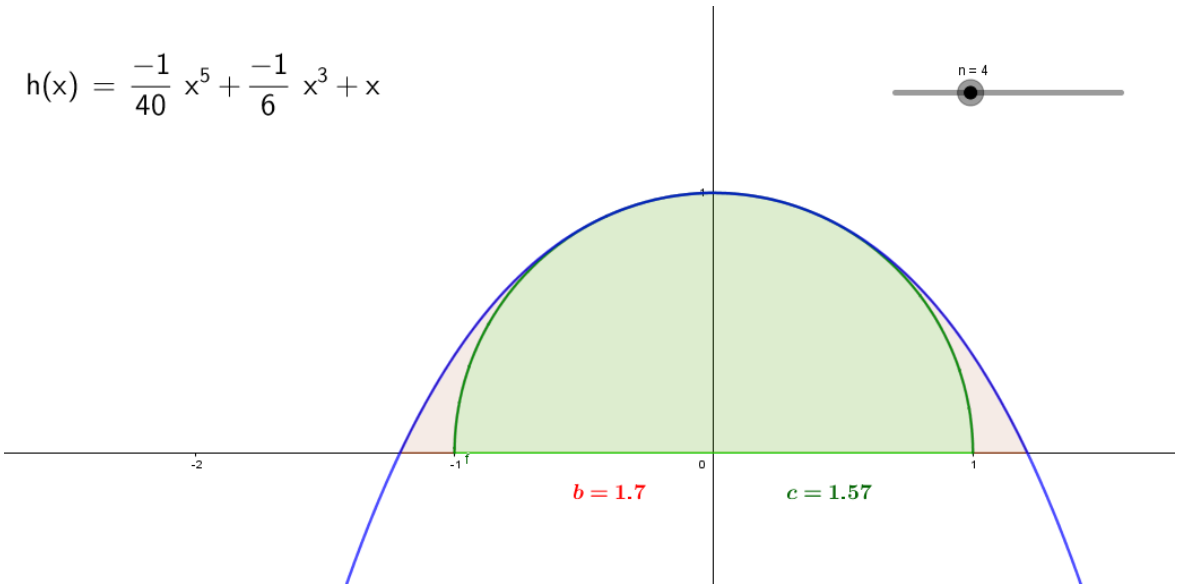


Figura 28: Aproximación al área del círculo por polinomios

Luego de que los estudiantes exploren esta simulación el docente puede hacer preguntas como:

i. ¿Cuál es el color del área que representa el error?
ii. A medida que el polinomio tiene más términos ¿qué pasa con el error?
iii. Cuántos términos debe tener el polinomio para que el error sea cero, es decir para que $h(1) - h(-1) = Área\ de\ media\ circunferencia$

Esta última pregunta es clave para desarrollar las definiciones conceptuales de infinito potencial, las series convergentes y por tanto los límites. Debido a que el infinito potencial según Castro y Pérez (2007) es una construcción sucesiva del infinito, en este caso, los estudiantes por medio de la aproximación por polinomios, al agregar más términos están haciendo de manera implícita una construcción del infinito. Por otro lado, desde esta actividad se está haciendo un acercamiento de la noción de series convergentes desarrollando una definición conceptual (Tall y Vinner, 1981) de esté, al crear la necesidad a los estudiantes de hablar de polinomios con infinitos términos para llegar a un valor esperado.

Por otro lado, se considera importante conocer diversas maneras de justificar el hecho de que el área bajo la curva $\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$ corresponde al área de medio circulo unitario, es decir $A = \frac{\pi}{2}$. Una de ellas, es calculando su integral en el intervalo $[-1, 1]$.

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Para solucionar esta integral se utiliza el método de sustitución trigonométrica, donde:

$$x = sen(y) \qquad \text{y} \qquad dx = \cos(y)\, dy$$

sustituyendo los valores en la integral, se obtiene:

$$\int \sqrt{1 - sen^2(y)} \cdot \cos(y)\, dy = \int \cos^2 y\, dy$$

$$= \int \frac{1 + \cos(2y)}{2} dy = \frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{2}\int \cos(2y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}sen(2y) + c \;= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}sen(y) \cdot \cos(y) + c$$

Luego

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}arcsen(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}\,\Big[_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como se observa el conocimiento profundo de las matemáticas es importante en el docente, puesto que lo dota de argumentos para hacer afirmaciones más allá de lo intuitivo.

Por otro lado, también se debe conocer de manera analítica si el polinomio propuesto realmente se acerca al valor de π, al calcular el límite de la sumatoria de los rectángulos que aproximan el área, desde 0 hasta 1 y multiplicarlo por 4.

Donde

$x_0 = 0$

$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{1}{n}$

$x_2 = \frac{2}{n}$

$\vdots$

$x_i = \frac{i}{n}$

$$A = 4 \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{x_i^2}{2} - \frac{x_i^4}{8}$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^4}{8}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i^2}{2n^2} - \frac{i^4}{8n^4}\right)$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left[n - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{8n^4}\cdot\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}\right]$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{6} - \frac{3}{12n} - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{40} - \frac{15}{240n} - \frac{10}{240n^2} + \frac{1}{240n^4}\right]$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}\right) = \frac{97}{30} \approx \pi$$

Figura 29: Aproximación por Riemann

De manera implícita lo que se está calculando son las sumas de las áreas de los rectángulos que en conjunto se aproximan al área bajo la curva.

3.3.Actividad 3: Método de Wallis Para Hallar el Valor de $\frac{\pi}{2}$

Para el desarrollo de esta actividad, se espera plantear el contraste entre el área de $\frac{1}{2}$ de círculo partiendo del método de Wallis y la propuesta Newton. Así mismo, de manera análoga al planteamiento del método de Newton, se propone a los estudiantes una construcción paso a paso, con la cual sea posible establecer una generalización del método de Wallis, para este desarrollo se aumentarán los factores uno a uno invitando al estudiante a deducir el siguiente factor, comparando su resultado con el valor de $\frac{\pi}{2}$.

A continuación, se exponen los primeros términos, los cuales pueden ser presentados a los estudiantes de la misma manera, alentándolos a hallar el siguiente término a partir del desarrollo de la siguiente tabla:

Cantidad de factores	Término	Valor en decimales	Diferencia aproximada con $\frac{\pi}{2}$
1	$\frac{(2)(2)}{(2-1)(2+1)}$	$1,\overline{333}$	0,237
2	$\frac{(2)(2)}{(2-1)(2+1)}\cdot\frac{(4)(4)}{(4-1)(4+1)}$		
3	$\frac{(2)(2)}{(2-1)(2+1)}\cdot\frac{(4)(4)}{(4-1)(4+1)}\cdot\frac{(6)(6)}{(6-1)(6+1)}$		
4			
5			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

Tabla 8: Construcción del método de Wallis

Luego de que se logre la generalización de los resultados por parte de los estudiantes o con la ayuda del docente, se procede a hacer la siguiente pregunta con el fin de establecer la noción de límite a partir de sucesiones infinitas convergentes.

i. ¿Cuántos factores debe haber para que el valor del producto sea igual a $\frac{\pi}{2}$ y que la diferencia sea cero?
ii. Si n representa la cantidad de factores, ¿qué condición debe tener n para que valor del producto sea igual a $\frac{\pi}{2}$?

Se considera importante resaltar que cuando $n \to \infty$ el valor del producto será $\frac{\pi}{2}$, dado que se hace más evidente el paso al límite, teniendo en cuenta la representación simbólica.

Se sugiere al docente proponer las dos actividades tanto la de Newton como la de Wallis con el fin de hacer un contraste entre la convergencia de ambos métodos ya que es posible identificar la rapidez con que convergen a $\frac{\pi}{2}$, en este sentido se considera pertinente plantear preguntas como:

iii. ¿Es posible determinar el método con el que se aproxime más rápido al valor esperado?
iv. ¿Cuál método considera más "eficaz" al momento de realizar las aproximaciones? ¿Por qué?

Luego de que los estudiantes analicen los resultados obtenidos por cada método, se propone la presentación de una simulación en GeoGebra, con el fin de comparar sus percepciones con lo expuesto en la simulación. En la Figura 30 se muestra la interfaz mencionada (ver Anexo D):

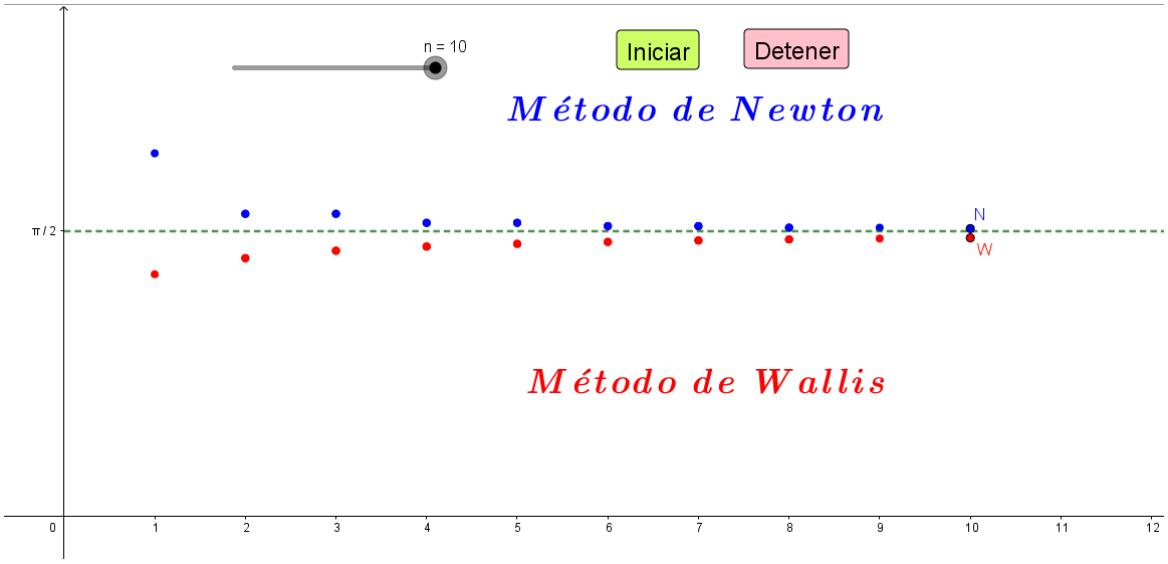


Figura 30: Convergencia Wallis y Newton

Se sugiere plantear nuevamente los interrogantes (iii.) y (iv) con el fin de contrastar sus respuestas.

Finalmente, se considera importante el conocimiento por parte del profesor de matemáticas sobre la demostración del método de Wallis para calcular el valor de $\frac{\pi}{2}$:

En una primera instancia se calculan las raíces de $sen(x) = 0$, la cuales son $x = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$sen(x) = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

Partiendo de esto se puede observar las raíces de $\frac{sen(x)}{x}$

$$\frac{sen(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

Serían las mismas raíces del $sen(x)$ excluyendo a $x = 0$ como una raíz, ya que en el denominador $x \neq 0$.

Luego aplicando diferencia de cuadrados, obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{sen(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

luego

$$\frac{sen(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$ entonces se tiene

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2 - 1}{4n^2}\right)$$

al invertir el cociente se obtiene

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

entonces

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

Cabe resaltar que el objeto central de estas actividades consiste en calcular el área de un círculo o un semicírculo, para esto se hizo uso del aspecto histórico del paso al límite. En la primera actividad el método de exhaución de Eudoxo-Arquímedes, en la segunda actividad se hace uso del método de Newton y en la tercera actividad una comparación entre el método de Newton y el método de Wallis, esto con el fin de afrontar algunos obstáculos que pueden surgir en el estudio del límite. Particularmente en el desarrollo de estas actividades se considera que es posible afrontar el obstáculo denominado como lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

4. Conclusiones

Lo expuesto en este documento expresa la importancia del conocimiento histórico, más allá de una estrategia para captar la atención por parte de los estudiantes, pues fue posible identificar porqué, cómo y cuándo surgen los obstáculos de carácter epistemológico ya que esto es algo que no atañe únicamente a los matemáticos que trabajaron sobre la idea de límite, por el contrario, algunos de estos obstáculos fácilmente pueden llegar a presentarse en la escuela y el profesor puede apoyarse en el estudio histórico para buscar alternativas frente a dichos obstáculos, siempre y cuando este estudio sea desde la historia de matemáticas y no meramente desde anécdotas históricas. En este sentido, se consideró necesario presentar las justificaciones de cada una de las afirmaciones desde las que se construyen los conceptos relacionados con el paso al límite. Pues permite identificar fortalezas y debilidades de las afirmaciones que proponen algunos matemáticos a través de la historia, para ello es indispensable un conocimiento profundo de las matemáticas.

Por tanto, el conocimiento histórico-matemático de la noción de límite visto como una herramienta de enseñanza le brinda al docente insumos para desarrollar la idea de conceptos como, por ejemplo, el infinito potencial y el infinito actual aprovechando las necesidades históricas que se ven reflejadas en el aula y proponiendo problemas que dan solución a éstas.

Dentro del desarrollo histórico de las concepciones de la noción de límite, se puede evidenciar los obstáculos que surgieron y los que se superaron, así el docente al desarrollar actividades bajo un planteamiento del trabajo histórico podrá adelantarse a los hechos, saber cuáles obstáculos se pueden presentar, y así establecer estrategias para que los estudiantes puedan superar dichos obstáculos. Dependiendo de las necesidades de enseñanza y del contexto escolar, el docente tiene una gama de posibilidades el pro al desarrollo de la noción de límite, generando imágenes conceptuales que apoyen a la generación de una definición formal de dicho objeto matemático.

Por último, se resaltó la importancia del conocimiento del profesor de matemáticas sobre el desarrollo histórico del paso al límite, por ejemplo, desde las actividades propuestas basadas en el método de exhaución pues se reconoce una extensión de este método a lo largo de la historia de las matemáticas en búsqueda de soluciones para problemas como el área bajo la curva, cálculo de volúmenes de superficies, entre otros. Además, se resaltó la importancia del paso al límite en el surgimiento del cálculo diferencial e integral, la formalización de conceptos como el de función,

continuidad y su contribución en la construcción de los números reales, este último desde la concepción analítica.

5. Bibliografía

Arquímedes. (1897). *The Sand Reckoner of Archimedes.* (E. Méndez, Trans.) Cambridge University Press.

Ayerbe Toledano, J. (2017). Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes. *Pensamiento matemático, 7*(2), 65-86.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas.* Madrid, España: Alianza Universidad textos.

Castro Chadid, I., & Pérez Alcázar , J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito El infinito en matemáticas.* Bogotá.

Collette, J. (1973). *Historia de las mátemáticas I.*

Collette, J. (1985). *Historia de las Matemáticas II.*

Cornu, B. (1983). Quelques Obstacles á l'Apprentissage de la Notion de limite. *Recherches en didactique des methématiques , 21*(5), 236-268.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Italia: Editorial Magisterio, Universidad de Bologna.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. (2007). Ostáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia: Collectión "Cuadernos del seminario en educación".

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números irracionales. (J. Bares, & J. Climent, Trans.)

Dunham, W. (2005). *The Calculus Galery .* New Jersey: Princeton University Press.

Franco, G., & Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito, el infinito actual y el infinito potencial. *Comité Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 509- 513.

Giraldo , L., & Sánchez, C. (2013). Richard Dedekind y la arquitectura del conjunto aritmético. *Revista Brasileira de História da Matemática, 13*(27), 77-109.

Linés Escardó, E. (1991). *Principios de Análisis matemático.* Editorial Reverté.

Lizarralde Rodríguez, N., & Ramírez Bernal, J. (2016). *Aproximación a la relación entre la filogénesis y ontogénesis de la idea de límite.* Bogotá D.C.: Trabajo de grado de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional.

Medina , A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné Episteme y Didaxis: TED, 9*.

Neira Sanabria, G. I., Rojas Garzón, P. J., Romero Cruz, J. H., Lurduy Ortegón, J. O., & Guacaneme, E. (2012). *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático.* Énfasis.

Pérez González , J. (n.d.). *Orígenes del cálculo: Historia de las matemáticas.* Universidad de Granada.

Recalde, L. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 12*(1).

Rodríguez Guzmán, A., & Sandoval Galindo, C. (2016). *La historia como una herramienta didáctica para la enseñanza del concepto de integral.* Trabajo de grado de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics* (Vol. 2). Psychology Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981, May). Concept image and concept definition in mathemathics with particular reference to limits and continuity. *12*(2), 151-169.

Vargas, C. (2009). El papel del principio de continuidad de Leibniz en el desarrollo del cálculo infinitesimal. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, 47*(120-121), 113-118.

Yuste, P. (2002). Modelos algebraicos de Wallis para componer sólidos de dimensión infinita y volumen determinado. *ENDOXA: Series filosóficas*(16), 333- 362.

6. Anexos

Anexo A: Demostración de la identidad trigonométrica

$$2sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)$$

$$=2sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\cos(\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-sen(\alpha)\cdot sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$=2sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos(\alpha)-2sen\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2}\cdot sen(\alpha)$$

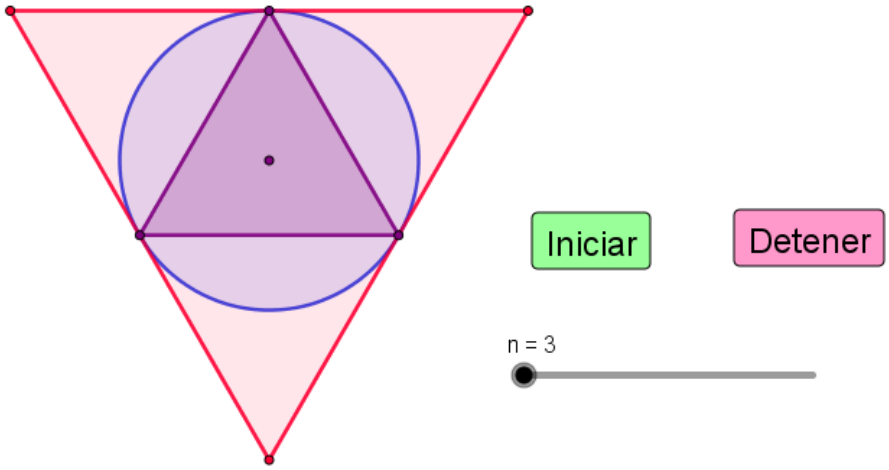
$$=sen(\beta)\cdot\cos(\alpha)-(1-\cos(\beta))\cdot sen(\alpha)$$

$$=sen(\beta)\cdot\cos(\alpha)-sen(\alpha)+sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$

$$=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+sen(\beta)\cdot\cos(\alpha)-sen(\alpha)$$

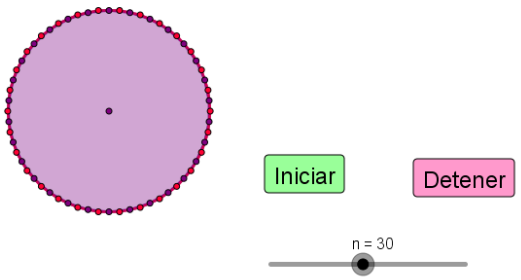
$$=sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha)$$

Anexo B: Interfaz actividad 1



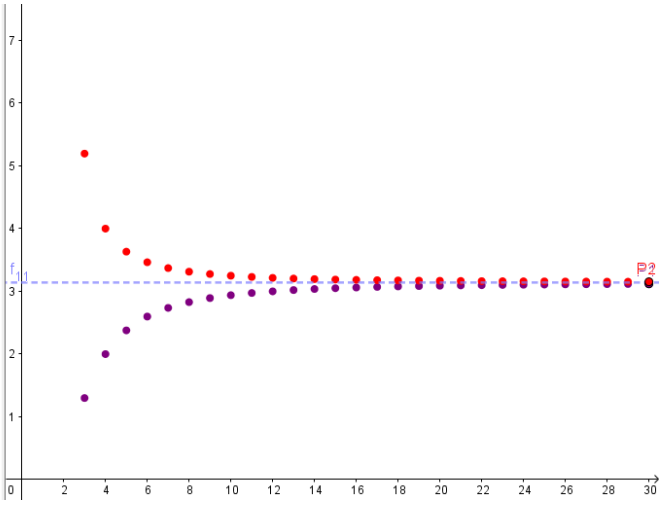
$$Área\ Poligono\ Inscrito = 1.299$$

$$Área\ Poligono\ Circunscrito = 5.1962$$



$$Área\ Poligono\ Inscrito = 3.1187$$

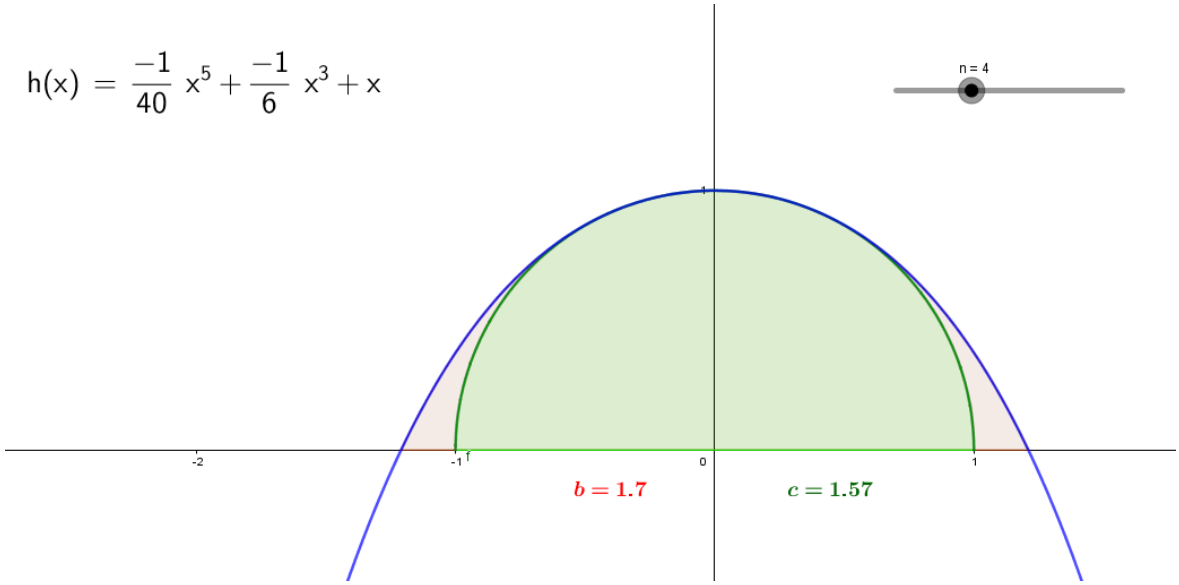
$$Área\ Poligono\ Circunscrito = 3.1531$$



Enlace de acceso al recurso:

https://www.geogebra.org/m/uvgzwef6

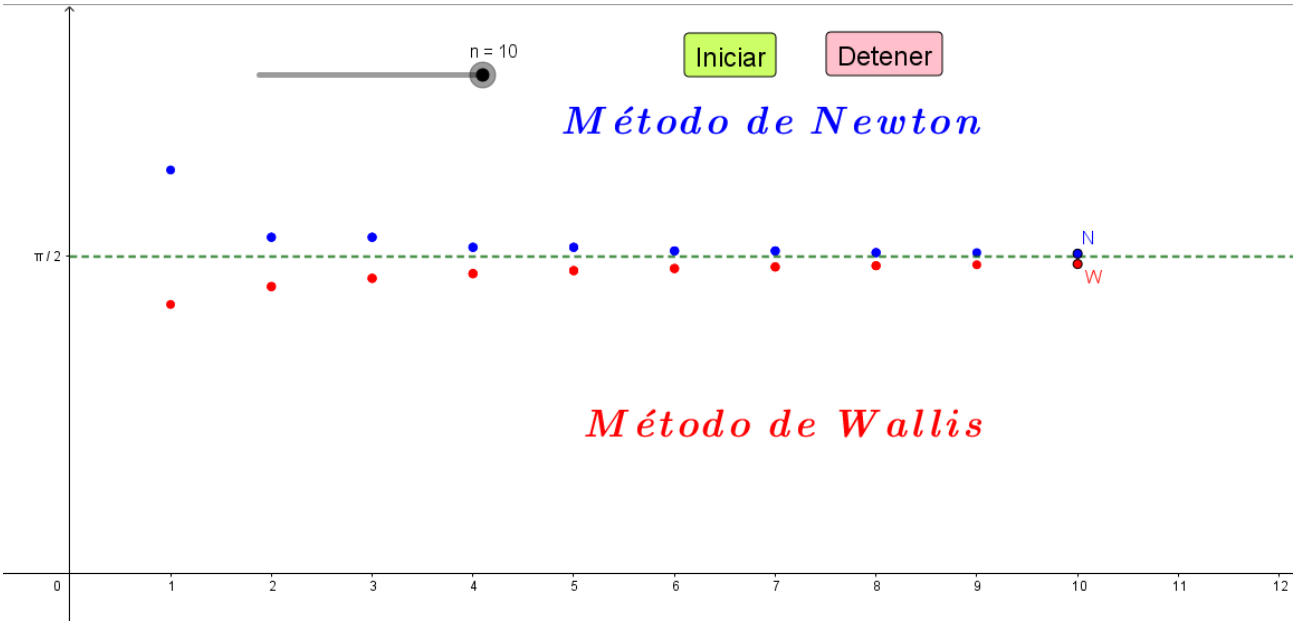
Anexo C: Interfaz actividad 2



Enlace de acceso al recurso:

https://www.geogebra.org/m/rpydfjkr

Anexo D: Interfaz actividad 3



Enlace de acceso al recurso:

https://www.geogebra.org/m/wqttqxr7