



ESTUDIO DE ESTADOS CUÁNTICOS APLICADOS A LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA: EL CASO DEL QUBIT TOPOLOGICO

Por:
Daniel Ricardo Rojas Sánchez

*Documento entregado como requisito para optar
por el título de:*

Licenciado en Física

Asesora:
Sandra Bibiana Ávila Torres

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Física
Bogotá D.C, Colombia
2025

Dedicatoria

Este trabajo va dedicado a las personas más importantes en mi vida.

A mi madre Aura Milena Sánchez Soto, por ser una mujer luchadora que me mostró que se puede salir adelante dando lo mejor de ti día tras día cuando las cosas salen del corazón.

A mi padre Jorge Ricardo Rojas Goyeneche, por enseñarme a creer en mis capacidades, desde montar bicicleta, jugar tenis, conducir, hasta hacer posible este trabajo.

A mi hermano Jorge David Rojas Sánchez, porque desde el día en que llegaste a mi vida he sido muy feliz; espero un día puedas leer esto y darte cuenta de que cuando te propones algo las metas se cumplen.

A mis abuelos y segundos padres Jorge Eliécer Rojas Sánchez y Aura María Goyeneche Reyes, quienes a través de su esfuerzo y amor nos enseñaron el valor de la familia y qué es darlo todo por las personas que amas.

A mi tía Aura Marcela Rojas Goyeneche, quien ha sido como mi hermana mayor, por ser tan auténtica y mostrarme que no hace falta encajar para ser alguien; puedes decidir tu propio camino.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi familia por el apoyo incondicional que me han dado no solo durante mi carrera, sino en cada momento de mi vida hasta ahora. A ustedes les doy infinitas gracias por todo el esfuerzo que han realizado para permitirme llegar tan lejos. Este logro no significaría nada sin ustedes y espero seguir haciéndolos sentir orgullosos de la persona que me han ayudado a ser.

Agradezco haber podido coincidir con personas tan increíbles a quienes puedo llamar mis amigos: a Cristian David Lombana, Brayan Alexander Castro, Yersson Steven's Rincón y Andrés Mateo Meneses. Gracias por tantos momentos dentro y fuera de las aulas que hemos podido compartir, cada ejercicio, cada discusión, cada charla, cada brindis. Nos hemos apoyado tanto en los buenos momentos como en los regulares y esos recuerdos siempre los llevaré conmigo. **¡Por todos los buenos momentos y los que están por venir!**

A mis maestros Yesid Javier Cruz y Edwin José Vargas, gracias por, en diferentes etapas de mi vida, hacer que me enamore de la física; forjaron en mí esa pasión por aprender. Sobre todo, quiero agradecer a mi maestra y asesora Sandra Bibiana Ávila, por confiar en mí para realizar este trabajo, por ser, además de una excelente profesora, un ejemplo a seguir tanto en lo profesional como en lo humano. Gracias por emprender la travesía que fue esta investigación conmigo.

Quiero agradecer de manera especial a Alejandra Riaño por su apoyo incondicional a lo largo de todo este proceso, por motivarme a continuar y lidiarme en los días que no quería escribir más; por no permitir que me rindiera. Sin ella quizás este trabajo no hubiera sido posible.

Finalmente doy gracias a la Universidad Pedagógica Nacional por darme la oportunidad de ser parte de su comunidad, permitirme representar la institución a nivel nacional e internacional, por las personas que conocí, los amigos que hice, los lugares a donde pude viajar y los maravillosos profesores que tuve.

Índice general

Introducción	v
Problema de investigación	VI
Objetivos	XI
Antecedentes	XI
Metodología	XII
1. Fundamentos de la Computación Cuántica	1
1.1. Surgimiento de la computación	1
1.1.1. Paso hacia la computación cuántica	4
1.2. Nociones de Mecánica Cuántica	7
1.3. ¿Qué es un bit?	11
1.4. ¿Qué es un qubit?	13
1.4.1. Construcción física de qubits	15
1.4.2. El qubit Superconductor	17
2. Anyones y el Efecto Hall cuántico	23
2.1. Topología y Física	23
2.2. Efecto Hall	26
2.2.1. Modelado del efecto Hall	27
2.2.2. Tensor de resistividad y conductividad	29
2.3. Efecto Hall Cuántico	32
2.3.1. Modelado del efecto Hall cuántico	33
2.3.2. Análisis de la conductividad	36
2.4. Geometría y topología del sistema cuántico	39
2.5. Excitaciones de carga fraccionaria y anyones	46
3. Potencial computacional de los Anyones	57
3.1. Anyones y sus propiedades	57
3.2. Computación cuántica por anyones	61
3.2.1. Modelo de anyones Ising	63
3.3. Dos enfoques de qubit en computación cuántica	66
3.3.1. Frontera experimental: el caso del “Majorana 1”	68
3.3.2. Impacto en la investigación en Física	71
3.4. Desafíos para la enseñanza de la Computación Cuántica	72
Conclusiones	77
Referencias	81

Anexos	85
Anexo A: Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético	85
Anexo B: Experimento Mental de Laughlin	87
Anexo C: Fases geométricas: conexión de Berry y curvatura	89

Índice de figuras

1.1. Comparación entre computadoras de tubos de vacío (a) y computadoras con microprocesadores (b).	3
1.2. Ley de Moore. Tomado de: Wikimedia Commons	4
1.3. Medida estadística con un divisor de haz. Adaptada de: Kaye y cols. (2007)	7
1.4. Configuración con 2 divisores de haz. Adaptada de: Kaye y cols. (2007)	8
1.5. Medición con 2 divisores de haz. Tomado de: Kaye y cols. (2007)	10
1.6. Representación de un bit clásico. Tomado de: Dür y Heusler (2013)	12
1.7. Partes de un disco duro magnético. Tomado de: Wikimedia Commons	13
1.8. Estado del qubit en la esfera de Bloch. Tomado de: Quiñones (2012).	15
1.9. Representación gráfica de la filtración en los qubits. Adaptada de: Dür y Heusler (2013)	16
1.10. Diferencia de la resistencia en función de la temperatura entre un metal convencional y un metal superconductor. Tomado de: Mientras En Físicas (2019)	17
1.11. Imagen de una unión Josephson, mostrando las dos capas superconductoras una sobre otra. Tomado de: Roth y cols. (2021)	19
1.12. Imagen de un SQUID. Adaptada de: Roth y cols. (2021)	19
1.13. Diagrama de circuito de la caja de pares de Cooper. Tomado de: Roth y cols. (2021)	20
1.14. Foto del qubit transmon. Adaptada de: Roth y cols. (2021)	21
2.1. Esquema del experimento del Efecto Hall clásico. Tomado de: Uzcategui y cols. (2020)	28
2.2. La línea discontinua representa el comportamiento clásico de la resistencia Hall, mientras que las mesetas hacen evidente una cuantización en esta cantidad. Tomado de: Pachos (2012)	32
2.3. Esquema lateral del transistor MOSFET. Tomado de: Uzcategui y cols. (2020)	33
2.4. Estructura de la energía para una partícula cargada en una película fina, llamado niveles de Landau. Tomado de: Pachos (2012)	36
2.5. Los electrones (puntos negros) debido las bajas temperaturas y el principio de exclusión de Pauli no tienen más estados cuánticos que ocupar en los niveles de Landau. Elaboración propia.	38
2.6. Configuración de una lamina 2D usada en el experimento del efecto Hall cuántico (a), Deformando suavemente la lamina en dirección x se forma un cilindro (b), También se puede deforma la lamina pero en dirección y hasta obtener otro cilindro (c). Tomado de: Pachos (2012)	40

2.7.	Representación visual de la cinta Hall plegada con un campo magnético normal a su superficie. Adaptada de: Pachos (2012)	41
2.8.	Representación visual del espacio de flujos, pasando de la idea de espacio plano (a), a un espacio curvo (b). Elaboración Propia	42
2.9.	$\hat{\rho}_{xx}$ y $\hat{\rho}_{xy}$ en función del campo magnético B medido para diferentes temperaturas de una muestra de $GaAs$, comparando en la parte superior con el factor de llenado de los niveles de Landau. Tomado de: Tsui y cols. (1982).	48
2.10.	Inserción de un cuanto de flujo magnético como perturbación del estado fundamental de Laughlin, que produce un campo eléctrico circular y una corriente en dirección radial. Tomado de: Girvin (2002)	53
3.1.	Esquema representativo del proceso de fusión. Dos partículas se fusionan para dar otra (izquierda). De manera inversa, una partícula se puede separar en sus constituyentes (derecha). Tomado de: Preskill (2004).	60
3.2.	Esquema representativo de la computación cuántica por anyones. Parejas de anyones se crean del “vacío” y el trenzado de sus líneas de mundo corresponde a transformaciones no triviales de su estado, al final se obtienen resultados e_i de este proceso. Tomado de: Pachos (2012).	62
3.3.	Representación gráfica de los 2 canales de fusión posibles para el caso de 4 anyones Ising. Elaboración propia.	64
A.1.	Disposición cilíndrica de una cinta Hall que es atravesada por un flujo magnético, conectada a 2 reservorios de carga. Tomado de: Pachos (2012)	87
A.2.	Transporte paralelo de un vector tangente en la superficie de una esfera. Elaboración propia.	90

Introducción

La mecánica cuántica como una de las ramas esenciales de la física moderna, ha generado un impacto significativo en el último siglo. En el ámbito científico, revolucionó nuestra comprensión al describir el comportamiento de la materia y la energía a escalas atómicas y subatómicas. En el ámbito social, sus aplicaciones permitieron el avance y desarrollo tecnológico que fue crucial para el origen de la era de la información y el mundo interconectado que hoy conocemos.

La búsqueda constante de mayor eficiencia con un menor gasto energético ha impulsado el desarrollo tecnológico a un camino en donde la miniaturización de los chips se topó con una barrera, el punto donde los efectos cuánticos se hacen presentes y afectan su funcionamiento. Por tanto, surgió la necesidad de realizar investigaciones encaminadas en el estudio de fenómenos físicos para el desarrollo de nuevas tecnologías que consiguieran aprovechar los efectos cuánticos para mejorar la capacidad de procesamiento y almacenamiento de información.

Es en esta vía de desarrollo donde se han logrado avances prometedores como en el caso de los circuitos superconductores, y particularmente el campo de interés de este trabajo, la computación cuántica; parte de la física aplicada en el cual existe un particular interés por las mayores empresas de tecnología a nivel mundial, como lo son Google, IBM, Intel y Microsoft, que son algunas de las compañías que compiten por la “supremacía cuántica”.

Este panorama de rápido avance tecnológico, plantea una importancia crucial de introducir estas temáticas en la educación, y muy especialmente en la formación de licenciados en física. Si la computación cuántica representa una reinención fundamental del procesamiento de la información, y se proyecta como una tecnología disruptiva en múltiples campos, es competente que los futuros licenciados en física no solo comprendan sus fundamentos, sino que también desarrollen competencias para contextualizar estos avances y abordarlos pedagógicamente.

Para desarrollar este análisis, el presente trabajo se estructura de la siguiente manera: el capítulo 1 establece los fundamentos, revisando el surgimiento histórico de la computación cuántica, introduciendo las nociones esenciales de mecánica cuántica y definiendo los conceptos de bit y qubit, incluyendo una descripción del qubit superconductor tipo transmon. El capítulo 2 profundiza en la física que sustenta al qubit topológico, explorando la conexión entre topología y física, el efecto Hall cuántico (entero y fraccionario) y el fenómeno emergente de los anyones como cuasipartículas. Finalmente, el capítulo 3 analiza el potencial computacional de los anyones, describe el modelo de qubit topológico basado en anyones de Ising, compara ambos enfoques de qubit (superconductor y topológico) y discute tanto el impacto de estas tecnologías en la investigación como sus implicaciones para la enseñanza de la física.

Problema de Investigación

En el contexto contemporáneo de un mundo globalizado, interconectado y dependiente de la informática, donde el progreso tecnológico y la investigación en física aplicada van cambiando aceleradamente la forma en que la información se procesa, se ha impulsado el desarrollo de dispositivos cada vez más complejos a partir de principios físicos y teorías que nacieron en la segunda mitad del siglo XX, entonces, surge la cuestión de cómo articular la ciencia, la tecnología y su funcionamiento para que sean accesibles a un público más amplio, en este sentido los docentes de ciencias y particularmente los licenciados en física juegan un rol esencial.

En el caso colombiano, con el fin de que el país pueda estar a la par del desarrollo científico internacional, surgió la necesidad de incluir el estudio de la mecánica cuántica en los planes curriculares de las instituciones universitarias, progreso que se logró después de la aceptación de las teorías modernas por parte de la Academia Colombiana de Ciencias a raíz de un artículo publicado por Darío Roza en 1923. Sin embargo, aunque el plan de estudios de los programas de Licenciatura en Física en Colombia dedica un espacio al estudio formal de la mecánica cuántica, los currículos dejan de lado las explicaciones alrededor de la física moderna que permitieron los avances a nivel tecnológico y a nivel social ([Martinez-Chavanz, 2005](#)), centrándose en la formulación teórica.

Esta situación plantea que existe una desconexión entre el conocimiento teórico abordado en las aulas en la educación superior (principalmente hablando de los programas de Licenciatura en Física, por tanto, pregrado) y

los desarrollos tecnológicos que afectan directamente las dinámicas sociales, como la forma de comunicarnos o de hacer uso de la información digital. Al hacer una revisión inicial de la forma en que se enseña mecánica cuántica en los niveles de formación de secundaria y media, se encuentra que, en algunos países como Italia, Alemania, Estados Unidos, Países Bajos, Francia y otros más, se han impulsado iniciativas de proyectos educativos para llevar al aula la enseñanza-aprendizaje de la física cuántica (García, 2023).

Sin embargo, en Colombia no existe una normativa que especifique la incorporación de la enseñanza de la mecánica cuántica en la educación secundaria y media, esto se puede constatar a partir de los “Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales” expedidos por el Ministerio de Educación Nacional. En este sentido, la educación en física para el ciclo de educación secundaria y media sigue enfocado exclusivamente en el abordaje de la física clásica y sus problemáticas, que son anteriores al siglo XX y, por tanto, previos a la física moderna.

Esta situación plantea una brecha en la educación en física y particularmente en la formación de Licenciados en Física, no solo por la necesidad de comprender los aspectos teóricos de la física cuántica para los futuros profesores, sino en cómo se estructura la enseñanza de esta rama de la física —principalmente en educación media— dejando de lado los análisis de carácter histórico de las problemáticas científicas.

Dicha brecha resulta especialmente preocupante al considerar el papel que desempeña la física cuántica en el mundo globalizado e interconectado que se nos presenta hoy en día. No cabe duda de que es una de las teorías más exitosas en la ciencia moderna, teniendo en cuenta que ha generado investigaciones, aplicaciones y descubrimientos que han transformado las dinámicas de la sociedad humana y desde aquí se han concebido directa o indirectamente diferentes premios Nobel en Física¹, lo que hace a esta rama del conocimiento un importante campo interdisciplinario de investigación (García, 2023). Un ejemplo para resaltar se da particularmente en el campo de las “tecnologías cuánticas” directamente relacionado con la computación cuántica, una tecnología con el potencial de transformar diversos campos del conocimiento.

A raíz del surgimiento de la computación cuántica, en el panorama internacional, se ha generado un interés por la formación de profesionales en este campo, que no viene únicamente de los programas de Física o Licencia-

¹Algunos premios Nobel destacados son: investigaciones en semiconductores y desarrollo del transistor (1956), el desarrollo de la teoría de la superconductividad (1972), el descubrimiento de la magnetorresistencia gigante (2007), entre otros más.

tura en Física. Tal es el caso de la Ingeniería Informática, impulsado por estudios como “*Propuestas sobre la enseñanza de la informática cuántica*” de [Pérez-Castillo y cols. \(2020\)](#) donde proponen cambios en los planes curriculares de Ingeniería Informática para favorecer la adaptación de los estudios universitarios a los nuevos horizontes profesionales, que empresas como IBM en los últimos cinco años ya ha empezado a solicitar, específicamente con ofertas laborales para perfiles de trabajo en “*Quantum Error Correction Researcher*”, “*Quantum Complexity Theorist*”, entre otros más ([Pérez-Castillo y cols., 2020](#)).

Adicionalmente (y en el contexto colombiano), en los programas de Matemáticas también se ha evidenciado el interés por el estudio de la computación cuántica, dando como resultado investigaciones como “*A categorical approach to topological quantum computing*”, un trabajo de pregrado del departamento de matemáticas de la Universidad de los Andes.

Las aplicaciones de la computación cuántica no solo permean el entorno de la investigación académica, sino que también se están considerando aplicaciones de este tipo de tecnologías emergentes en el campo de la educación. Más allá de la enseñanza de la computación cuántica en los diferentes niveles educativos, se está pensando en la posibilidad aprovechar el potencial de esta tecnología para transformar el campo de la enseñanza personalizada.

La propuesta de “*Pedagogía Cuántica*” consiste en el uso de la computación cuántica, específicamente de algoritmos cuánticos, como una potencial vía de desarrollo de sistemas de aprendizaje adaptativo. El potencial computacional de la computación cuántica brinda una oportunidad de mejorar la eficiencia y eficacia de este tipo de sistemas ([Cevallos, 2024](#)).

Con base en lo anterior, las tecnologías emergentes como la computación cuántica se espera que desempeñen un papel protagónico en la escena internacional en los próximos años. En este sentido, al revisar el estado de la enseñanza de la mecánica cuántica en los ciclos de educación secundaria-media y educación superior (pregrado) en el caso colombiano en contraste con las medidas adelantadas en el panorama internacional, sería valioso que los planes curriculares se adapten para incluir temáticas relacionadas con la computación cuántica a los programas de formación de licenciados en Física.

Es importante resaltar que si bien la investigación de [Pérez-Castillo y cols. \(2020\)](#) evidencia una falta de asignaturas específicas para la formación de profesionales en diferentes planes curriculares, esta situación se puede entender mediante la rápida evolución que ha tenido la tecnología, y que el desarrollo de software y hardware para computación cuántica es un campo

que cuenta con apenas 30 años de recorrido, muy poco tiempo en contraste con otras tecnologías, siendo un factor que explica la falta de inclusión de estas temáticas en el currículo. Sin embargo, la adaptación no deja de ser un desafío importante sobre el cual los programas académicos deben seguir trabajando.

Estudios sugieren que el proceso de alfabetización científica y democratización del conocimiento científico se puede ver favorecido si se promueven investigaciones enfocadas en la formación de profesores alrededor de la física cuántica y su enseñanza; que tengan la potencial capacidad de generar la inclusión de este tipo de temáticas en el currículo educativo en los diferentes niveles de formación académica, haciendo que el reto más significativo se encuentre en la formación de los licenciados en física en el uso y fundamentos teórico-prácticos de las tecnologías como la computación cuántica.

Los docentes son una pieza fundamental en la formación de una ciudadanía crítica que cuente con herramientas para comprender, contextualizar y filtrar la información en el contexto sociocultural en el que se encuentran inmersos, destacando aún más la importante necesidad de promover una formación de licenciados en física cada vez de mayor calidad, ya que en materia del nuevo paradigma computacional y su potencial impacto sociocultural, son los futuros profesores en física quienes por su formación disciplinar, deberían encontrarse más capacitados para abordar las temáticas que surjan respecto a las tecnologías cuánticas, y quienes tienen la capacidad de desarrollar el conocimiento científico en el aula desde una perspectiva que tenga en cuenta los avances científicos y tecnológicos contemporáneos.

En esta vía, desde el departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), mediante el PEP (Proyecto Educativo del Programa), se consolida un programa curricular con el potencial de aportar a la educación en Física a nivel Latinoamérica, considerando como uno de los elementos contextuales sobre los ámbitos de interacción del licenciado en física “las nuevas dinámicas culturales de carácter global altamente significativas en relación con la educación” ([Universidad Pedagógica Nacional, 2024](#)), dentro de las cuales se hace mención al desarrollo de las ciencias computacionales y el uso de las tecnologías de la información.

Adicionalmente, el PEP menciona que el Programa de Licenciatura en Física (PLF) aspira a “generar una cultura educativa y de convivencia siendo una de sus bases el desarrollo de la ciencia y la tecnología y la revolución de la información” ([Universidad Pedagógica Nacional, 2024](#)), esto con el fin de que todos sus estudiantes tengan una formación integral.

Por ende, el programa de Licenciatura en Física de la UPN se encuentra alineado, desde su consolidación y pretensiones, en abordar una formación de licenciados que articule la ciencia, la tecnología y la sociedad, con el fin de que sus egresados puedan afrontar los retos que surgen de las relaciones entre la cultura científica – tecnología y la sociedad colombiana.

En virtud de lo expuesto, frente a este panorama y la necesidad de fortalecer la formación de futuros licenciados en física frente a los retos tecnológicos del avance computacional, este trabajo se proyecta como un referente bibliográfico que pueda ser retomado para abordar a nivel de pregrado el estudio de la computación cuántica, dando un paso más allá de lo que físicamente se entiende por “bit” y “qubit”, desde el estudio abstracto de “0” y “1”. Para ello, se plantea un estudio de los estados cuánticos que codifican la información, contrastando dos implementaciones significativas: el qubit superconductor, como ejemplo de una tecnología con avances y desafíos conocidos en la actualidad, y el qubit topológico, una propuesta de actualidad que se investiga activamente por su potencial de ofrecer una computación cuántica más robusta, y que ya está generando impacto mediático, como lo fue el anuncio del chip “Majorana 1” por parte de Microsoft el 19 de febrero de 2025, que tiene de base esta tecnología. Se profundiza principalmente en la física detrás del planteamiento de un qubit topológico, particularmente en cómo las cuasipartículas como los anyones no abelianos podrían sustentar este tipo de qubits. Este caso ejemplifica la creciente abstracción matemática que la física moderna demanda, tal como anticipó [Dirac \(1931\)](#), y evidencia el tipo de desafío conceptual que la formación de los licenciados en física debe abordar.

Por tanto, con el fin de contribuir a la formación de licenciados y acercar a los estudiantes de Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional al estudio de la computación cuántica desde la perspectiva de los intereses de investigación en el campo, se plantea la siguiente pregunta problema:

¿Cómo puede presentarse la evolución y descripción del concepto de qubit en la computación cuántica aplicada, a partir de la comparación entre los qubit superconductor y topológico, de manera que se articule la comprensión de los fundamentos físicos con las implicaciones tecnológicas contemporáneas?

Objetivos

Objetivo General

Analizar el concepto de qubit en computación cuántica aplicada, resaltando los fundamentos físicos en los casos del qubit superconductor y qubit topológico, como articulación entre la física y las tecnologías contemporáneas para la formación de licenciados en física.

Objetivos Específicos

1. Contextualizar históricamente el surgimiento de la computación cuántica y los fundamentos físicos que sustentan el concepto de qubit.
2. Describir las características físicas para la construcción del qubit superconductor y el qubit topológico, presentando los alcances y limitaciones actuales de estas tecnologías.
3. Comparar los fundamentos del qubit superconductor y qubit topológico, como material para analizar el impacto de esta tecnología en la investigación en física, así como sus implicaciones pedagógicas y los desafíos formativos para los licenciados en física.

Antecedentes

Dado el carácter emergente de la computación cuántica y su enseñanza, no se han identificado antecedentes que aborden de manera directa el enfoque propuesto en este trabajo. No obstante, se han revisado diversos estudios y propuestas que abordan temáticas relacionadas, las cuales permiten enmarcar el presente trabajo dentro de una línea de investigación en consolidación. A continuación, se describen algunos trabajos relevantes que ofrecen perspectivas útiles desde distintos enfoques:

1. Volpe Costa, Universidad de los Andes (2021) – *A Categorical Approach to Topological Quantum Computing*. Esta tesis de pregrado explora la relación entre la computación cuántica topológica y la teoría de categorías, abordando el formalismo de los anyones y sus interacciones.
2. Serrano y Pérez, Universidad de Castilla-La Mancha (2020) – *Propuestas para la enseñanza de la informática cuántica*. Este artículo

analiza la necesidad de adaptar los planes curriculares de ingeniería informática para responder a la demanda de perfiles profesionales en computación cuántica. Aporta al presente trabajo desde la dimensión estructural y curricular, permitiendo reflexionar sobre cómo introducir la temática en el contexto universitario.

Metodología

La presente investigación se enmarca en una metodología cualitativa, basada en el análisis documental y la revisión bibliográfica. Este enfoque se seleccionó por ser el más pertinente para alcanzar el objetivo general del trabajo. Dado que la temática se sitúa alrededor de la física teórica, otro tipo de estudio se encontraría fuera del alcance de este proyecto. Por tanto, la investigación se centró en el análisis, la interpretación y la síntesis de fuentes documentales existentes para construir un argumento coherente y con profundidad conceptual.

Capítulo 1

Fundamentos de la Computación Cuántica

Este capítulo introduce las motivaciones para la computación cuántica, partiendo de una revisión histórica de la computación clásica (desde la máquina de Turing hasta los límites de la Ley de Moore). Posteriormente, se establecen los conceptos básicos de la mecánica cuántica relevantes para la computación cuántica, como la superposición, para definir el qubit como unidad fundamental. Finalmente, se describe el qubit transmon, un candidato actual basado en la superconductividad, detallando sus ventajas y limitaciones.

1.1. Surgimiento de la computación

La historia de la computación moderna tiene sus raíces en el año de 1936, cuando un joven Alan Turing publica un artículo titulado “*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*”, artículo que pretendía abordar uno de los problemas derivado del estudio de los fundamentos de la matemática postulado en 1928 por David Hilbert como el “*problema de la decisión*”. ¿Las matemáticas son decidibles? Que lo sean, de manera simplificada, significa que sería posible determinar si un enunciado lógico o matemático es verdadero o falso, a partir de un procedimiento o algoritmo que se realice en un número finito de pasos, lo que permitiría centrar la atención en los “problemas buenos”¹. Hilbert pensaba que la respuesta a esta pregunta era afirmativa, sin embargo, Turing mostraría que estaba equivocado (Turing y cols., 1936).

Turing presenta entonces lo que hoy se conoce como **máquina de Tu-**

¹Los “problemas buenos” pueden entenderse como enunciados lógicos o matemáticos para los cuales si existe un proceso o algoritmo que permite determinar su veracidad en un tiempo finito. Básicamente los problemas decidibles (Whitty, 2017).

ring, un modelo abstracto que simula el funcionamiento de un algoritmo² de manera formal. Este dispositivo consta de una cinta infinita, un cabezal que lee y escribe símbolos en la cinta, y un conjunto de reglas que dictan las operaciones que la máquina puede realizar. Esta máquina puede representar cualquier proceso computacional, lo que significa que es capaz de simular cualquier algoritmo ejecutable por una computadora (Jiménez, 2021). Sin embargo, lo más importante es que Turing demostró que no existe un procedimiento general que permita determinar la veracidad o falsedad de todos los enunciados matemáticos posibles. Con esto, resolvió el problema de la decisión negativamente, mostrando que hay problemas que no pueden ser decididos de forma automática por ningún algoritmo o máquina, incluidos los sistemas lógicos más formales (Turing y cols., 1936).

El artículo de Turing tuvo un impacto significativo, ya que estableció los fundamentos teóricos de la computabilidad y los límites de la computación, además de inspirar el desarrollo posterior de lo que conocemos como computadoras universales; máquinas que son programables y capaces de realizar una amplia variedad de actividades, por muy diferentes que estas puedan parecer entre sí. Este hecho resulta importante dado que previo a la década de los 40 se tenían máquinas que eran capaces únicamente de realizar tareas muy específicas para las cuales habían sido desarrolladas.

Es entonces, cuando en el periodo posterior a la segunda guerra mundial, se genera un fuerte interés por el desarrollo computacional a nivel científico y civil. Durante los siguientes 30 años, hasta los 70's se realizaron diversos avances en el campo de la computación (avances que se resaltarán posteriormente), consiguiendo producir el paso de los ordenadores gigantes, dispuestos en sótanos completos, contruidos a partir de tubos de vacío (véase la figura 1.1 (a)), a la era de los microprocesadores con computadoras de tamaños mucho menores y mayor rendimiento (véase la figura 1.1 (b)).

En 1971 se lanza al mercado el primer microprocesador por parte de *Intel*, bautizado como el *Intel 4004*, una unidad de procesamiento central (CPU) de 4 bits (unidades básicas de información), que permitió dotar de “inteligencia” a las máquinas. Un ejemplo de los primeros desarrollos con este microprocesador fue la calculadora de *Busicom*, producida por una empresa japonesa que se asoció con *Intel* para el desarrollo de calculadoras electrónicas programables. Esta calculadora podía realizar operaciones de aritmética básica, adicionalmente podría calcular raíces cuadradas, almacenar y recuperar números guardados en memoria. Sus principales limita-

²Algoritmo entendido como la sucesión de pasos para realizar algún proceso.



(a) Computadora Z4. Tomado de: [Wikimedia Commons](#).



(b) Computadora personal Altair 8800. Tomado de: [Altair 8800 Microcomputer](#) (s.f.).

Figura 1.1: Comparación entre computadoras de tubos de vacío (a) y computadoras con microprocesadores (b).

ciones eran la poca memoria que tenía, de apenas unos 640 bytes de RAM, una corta cadena de instrucciones que no le permitía hacer cálculos complejos y que no contaba con pantalla para mostrar los resultados, estos se imprimían en tiras de papel. (*BusiCom 141-PF*, s.f.).

Con el auge de los microprocesadores se comenzó a investigar para producir nuevas versiones que consiguieran una capacidad de cálculo superior, dando como resultado en 1974 el *Intel 8080*, el CPU de la primera computadora personal en incluir un microprocesador, el **Altair 8800**, producido por **MITS** una empresa pequeña que producía kits electrónicos destinado a aficionados, siendo un éxito en ventas. Podía ejecutar sistemas operativos básicos, que permitieron el desarrollo de software para computadoras personales y la ejecución de programas de cálculo más avanzados comparado con la calculadora de Busicom. Sin embargo, era muy lento, su interfaz de usuario no era intuitiva y ya que venía en un kit electrónico muchos errores del sistema se daban por fallos en el montaje del equipo final (*Altair 8800 Microcomputer*, s.f.).

A partir de este momento inicia una carrera por aumentar la capacidad de procesamiento y almacenamiento de información, es decir, de trabajar y manipular cada vez más rápido cadenas de datos más grades, así como conseguir almacenar cada vez más información. Esto llevó a nuevas investigaciones en el campo de los materiales para desarrollar nuevos dispositivos que cumplieran con las expectativas del mercado.

1.1.1. Paso hacia la computación cuántica

La mecánica cuántica (MC) como una de las teorías más influyentes en el siglo XX, fue partícipe de una amplia variedad de desarrollos a mediados de ese siglo; uno de los más relevantes para el presente trabajo es que permitió la comprensión del flujo electrónico en los materiales, lo que llevó al desarrollo del transistor en 1948. La invención del transistor fue uno de los pasos claves para la transición de los ordenadores de tubos de vacío al desarrollo de los microprocesadores, ya que permitió iniciar el proceso de miniaturización de los componentes, proceso que también influyó en la eficiencia y capacidad de cómputo de los ordenadores.

Esta tendencia en el aumento de la capacidad de cómputo fue principalmente generada por la miniaturización de los chips, permitiendo que cada vez fuera posible incluir más transistores en un tamaño de CPU también cada vez más reducido. En 1975, este proceso fue analizado por Gordon Moore, uno de los cofundadores de *Intel* quien propuso lo que se conoce como la **Ley de Moore**, una ley empírica que establece que la cantidad de transistores en los microprocesadores se duplicaría cada 2 años, como se observa en la figura 1.2; inicialmente se pensó que esto se cumpliría únicamente durante 2 décadas, sin embargo, se puede establecer el cumplimiento de esta ley hasta mediados de 2010.

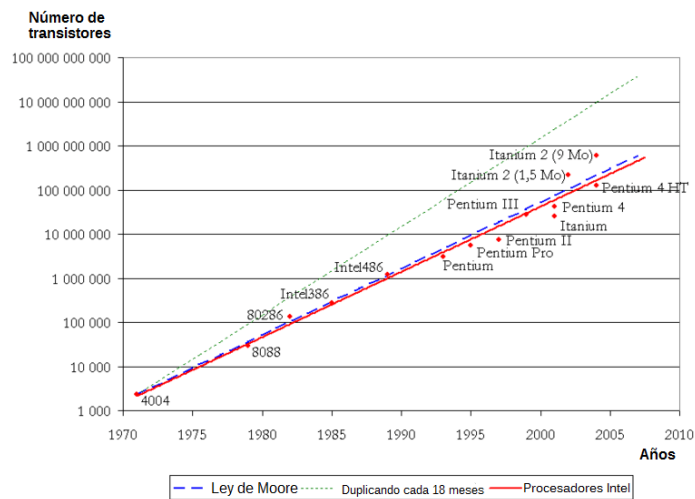


Figura 1.2: Ley de Moore. Tomado de: [Wikimedia Commons](#)

Si bien el aumento de la capacidad de cómputo de los microprocesadores se había estado llevando a cabo a partir de lo establecido por la ley de Moore, el camino de la miniaturización de los chips como vía para el progreso computacional presentaba diversos inconvenientes. El permitir que los componentes estuvieran más juntos en los procesadores resulta beneficioso

puesto que las señales tienen que recorrer menos espacio para ser procesadas, sin embargo, más temprano que tarde se llegaría a los dominios de la MC, donde además del problema práctico de la disipación de calor de los mecanismos físicos, los fenómenos cuánticos como el *efecto túnel* afectarían el funcionamiento de los chips como los conocemos (Jiménez, 2021).

Por tanto, fue necesario buscar una alternativa que, llegado el momento, permitiera seguir obteniendo avances en la capacidad de cómputo de los ordenadores. Paul Benioff, físico estadounidense, fue pionero al plantear una alternativa a la miniaturización de los chips entre 1980 y 1982, cuando publicó un artículo titulado “*The Computer as a Physical System: A Microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian Model of Computers as Represented by Turing Machines*”, en este introduce **las máquinas de Turing cuánticas**, donde a partir de la definición de Hamiltonianos que describieran la evolución de los elementos que componen los ordenadores se buscaba obtener un comportamiento semejante a una máquina de Turing. Durante esos mismos años, Richard Feynman en una conferencia que pronunció en el Instituto de Tecnología de California, titulada “*Simulating Physics with Computers*”, reconoció que los “computadores cuánticos” serían más eficientes que los convencionales en simular los sistemas físicos, ideas claramente propuestas dado que para Feynman la naturaleza era de carácter mecanocuántico, llevándolo a reflexiones sobre cómo se podría simular la probabilidad (Feynman, 1982), aunque fue hasta 1989 cuando se describió el primer circuito lógico-cuántico por parte de David Deutsch (Jiménez, 2021).

Una motivación adicional para el cambio de paradigma computacional fue el desafío que planteaba la tesis de Church-Turing en el desarrollo de la *teoría de la complejidad*. Esta teoría estudia la cantidad de recursos que requiere una computadora para ejecutar un algoritmo, particularmente en tiempo de cálculo y almacenamiento en memoria. La cantidad de recursos utilizados en un cálculo computacional se miden en función de la longitud de los datos de entrada, es decir, la cantidad de bits que se van a procesar. Es importante resaltar que la cantidad de recursos utilizados depende de la arquitectura física de la computadora en la que se ejecuta el algoritmo.

Por ejemplo, supongamos que la computadora 1 puede ejecutar un cierto algoritmo en un tiempo dado según la función $2n^2 + 3$ (donde n es la cantidad de bits de entrada), sin embargo, la computadora 2 ejecuta el mismo algoritmo en un tiempo determinado por la función $4n^3 + n + 7$. Como depende de la arquitectura la expresión del tiempo ejecución, se requiere una medida más gruesa de la complejidad del algoritmo por lo que

se analiza solo el término de mayor orden en las expresiones que cuantifican los requisitos de recursos. Para el ejemplo anterior, diremos que la computadora 1 ejecuta el algoritmo en un tiempo $O(n^2)$ y la computadora 2 en $O(n^3)$. Aquí, $O(f(n))$ denota el límite superior de recursos para la ejecución del algoritmo, es decir, el tope de recurso necesario en función de los bits de entrada, y denotamos con $\Omega(f(n))$ los límites inferiores, es decir el mínimo de recurso necesario para ejecutar el algoritmo. Convencionalmente se establece en ciencias de la computación que si una computadora puede ejecutar un algoritmo en tiempo **polinómico** entonces se considera que dicho algoritmo se ejecuta de manera eficiente respecto al recurso que consume, sea tiempo de ejecución o espacio en memoria. Por tanto, las computadoras de nuestro ejemplo serian ambas eficientes³.

La tesis de Church-Turing establece que cualquier problema computacional puede resolverse en cualquier computadora, si y solo si es posible resolver dicho problema en una máquina de Turing, sin embargo, ya no se trata únicamente de ejecutar los algoritmos, se requiere también que estos algoritmos sean *eficientes*, por tanto, que pudieran ser incluidos en la clase **P**, de problemas resolubles en tiempo polinómico respecto al tamaño de su cadena de entrada, o, en un conjunto considerablemente más amplio, llamado la clase **NP**, siendo estos los algoritmos no deterministas resolubles en tiempo polinómico. Esta descripción conforma la forma fuerte de la tesis de Church-Turing, agregando el requerimiento de la eficiencia; tesis que parecía no ser cumplida por las máquinas clásicas y deterministas de Turing, en comparación con algoritmos probabilísticos descubiertos en la década de los 70's (Jiménez, 2021).

Los algoritmos de la clase **NP** están relacionados con el mundo no determinista (asociado a la MC), ya que permiten subrutinas simultaneas, es decir, un procesamiento paralelo de las entradas y no restringido al procesamiento secuencial de la clase **P**.⁴

Para dar cuenta de las complicaciones que traía consigo la tesis fuerte de Church-Turing, Deutsch amplio la tesis afirmando que cada sistema físico podía ser perfectamente simulado por un “modelo de computación realista”⁵.

³Si bien ambas se consideran eficientes, es evidente que una es más eficiente que la otra.

⁴Es conocido que $P \subseteq NP$, sin embargo, el problema de que estas 2 clases coincidan sigue abierto. Por esto el problema $P = NP$ hace parte de la lista de los siete *problemas del milenio* definidos en el año 2000 por el *Clay Mathematics Institute*, premiados con un millón de dólares.

⁵Cuando se habla de modelo de computación realista nos referimos a que el modelo es consistente con las leyes de la física.

1.2. Nociones de Mecánica Cuántica

Para poder comprender un poco mejor cómo los principios físicos se aplican en los sistemas computacionales, es importante presentar algunos de los principios de la mecánica cuántica, la cual históricamente surge a principios del siglo XX, donde se requería de una formulación que diera cuenta de ciertos fenómenos que no se podían explicar desde la mecánica clásica y por tanto debía alejarse del camino marcado por las teorías clásicas de la física. Esta necesidad surgió principalmente de la evidencia experimental.

Las fuerzas descritas en teorías como la electrodinámica clásica no eran suficientes para justificar la estabilidad de los átomos. Desde una perspectiva filosófica, la teoría clásica presenta algunos inconvenientes, ya que la idea de que la materia está constituida por un gran número de pequeñas partes, que estaban gobernadas por las leyes estadísticas que describen su comportamiento, no consideraba la estructura y estabilidad de los constituyentes. Adicionalmente, si lo “grande” y “pequeño” es relativo no es posible explicar uno en función del otro (Dirac, 1967).

Se parte de que “todo acto de observación va acompañado de una alteración del objeto/cuerpo observado” (Dirac, 1967, p.17), por tanto, para dar un carácter absoluto al tamaño, consideramos entonces los cuerpos como “grandes” cuando la alteración sobre él en la observación se puede considerar despreciable, y “pequeño” cuando esta alteración no es despreciable.

Para formalizar las ideas posteriores es necesario realizar una revisión conceptual y del formalismo matemático de la MC. Considere un montaje experimental que consiste en una fuente de fotones (estrictamente monocromática), un espejo semitransparente que cumple la función de divisor del haz y un par de detectores. El montaje está dispuesto como se observa en la figura 1.3.

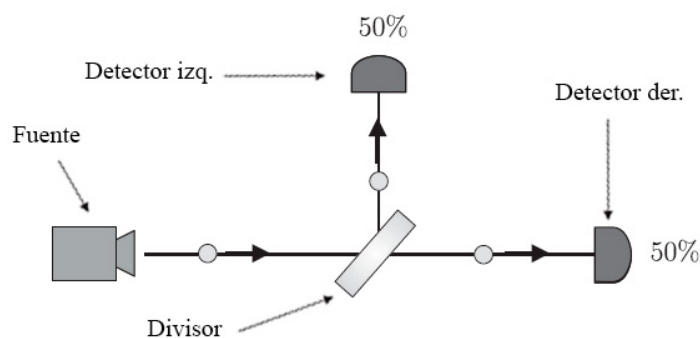


Figura 1.3: Medida estadística con un divisor de haz. Adaptada de: Kaye y cols. (2007)

Si se envían fotones individuales desde la fuente hasta el divisor, se detectará a los diferentes fotones llegar la mitad de las veces a cada uno de los detectores. Este comportamiento se puede explicar pensando en el divisor como un lanzador de monedas, en el cual según sea el resultado del lanzamiento (cara o cruz) el fotón llega a un detector u otro. Ahora vamos a agregar otro divisor y un par de espejos que reflejan los fotones por completo (observe la figura 1.4)

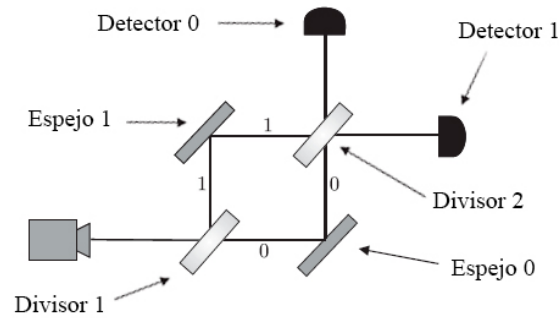


Figura 1.4: Configuración con 2 divisores de haz. Adaptada de: [Kaye y cols. \(2007\)](#)

Para introducir el tratamiento matemático, se diferenciarán los caminos como 0 en la derecha y 1 arriba. Es importante resaltar que la longitud de los caminos es la misma, sea que los fotones vayan por el camino ‘0’ y se reflejen en el espejo 0 o que vayan por el camino ‘1’ y se reflejen en el espejo 1 hasta que lleguen al divisor 2, por lo que los fotones llegan al mismo tiempo independientemente del camino que tomen. A partir de la figura 1.4 se puede considerar que el fotón en el experimento es un sistema de 2 **estados**, siendo que la presencia de un fotón en el camino de la derecha representa un ‘0’ y la presencia del fotón en el camino de la izquierda representa un ‘1’. Entonces se puede representar cada uno de estos 2 estados diferenciados como un vector columna

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Si se piensa en el montaje sin el divisor 1, se puede considerar que los fotones individuales parten del estado $|0\rangle$ ya que todos seguirían el camino de la derecha. Por tanto, y como mencionamos anteriormente, el divisor 1 está realizando una alteración no despreciable en el comportamiento de los fotones consiguiendo cambiar o no, con cierta probabilidad, el camino que toman o su **estado**. Esta interacción fotón-divisor matemáticamente se representa como una matriz, a la cual se le denomina **operador**, el cual realiza una transformación sobre los vectores de estado, que representan el

camino que siguen los fotones. En el experimento particular (figura 1.3) la matriz que representa el comportamiento del fotón una vez pasa a través de un divisor es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Luego para un fotón que parte del estado $|0\rangle$ se multiplica a la izquierda por la matriz 1.2 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Este estado se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Nótese que el estado general del sistema se puede expresar como una combinación lineal de los vectores que se definieron anteriormente como los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ asociados a los caminos que puede tomar el fotón, y que ahora estos vectores de estado están acompañados por unos coeficientes complejos. Esta suma particular de estados se conoce como **superposición de estados** (más adelante se definirán estos conceptos de manera más rigurosa).

El estado del camino que toma el fotón se puede describir de manera general por el vector

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Donde α_0 y α_1 son los coeficientes complejos que se les llama peso del estado base o amplitud de probabilidad (Dirac, 1967). Si se mide físicamente el camino en que se encuentra el fotón con los detectores, se encontraría el fotón en el camino ‘0’ con una probabilidad de $|\alpha_0|^2$, y en el camino ‘1’ con una probabilidad $|\alpha_1|^2$. Entonces, como siempre se debería poder medir el fotón en uno de los dos caminos en particular, dado que se cumple que $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$.

Aplicando lo anterior al estado resultante de multiplicar el operador con el estado inicial $|0\rangle$, se obtiene que se debería medir el fotón en el camino ‘0’ con una probabilidad $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, y en el camino ‘1’ con una probabilidad $|\frac{i}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, esto resulta consistente con lo visto en la figura 1.3.

Ahora volviendo al caso del montaje en la figura 1.4, donde se tiene un segundo divisor, para conocer qué camino va a tomar el fotón se multiplica nuevamente el operador que representa al divisor (1.2), por el estado del fotón al pasar por el divisor 1 (1.4)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Calculando las probabilidades antes de medir el fotón luego del divisor 2, se encontrará que el fotón será detectado en el detector 1 con una probabilidad $|i|^2 = 1$. Esto se ve representado en la siguiente figura

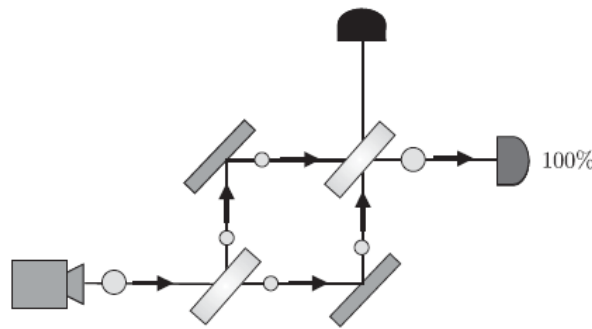


Figura 1.5: Medición con 2 divisores de haz. Tomado de: [Kaye y cols. \(2007\)](#)

Este resultado de la figura 1.5 es solo explicable mediante el formalismo y las ideas de la MC, siendo diferente a lo esperado mediante la intuición, ya que volviendo al comportamiento del experimento con un único divisor, donde se pensaba este objeto como un lanzador de monedas aleatorio, se podría pensar que con el segundo divisor ocurriría lo mismo, dando por resultado que en cada detector nuevamente obtendríamos la mitad de los fotones totales lanzados por la fuente, sin embargo, considerando la superposición de estados y las interacciones fotón-divisor como se desarrolló anteriormente, las probabilidades de obtener un resultado u otro se modifican fuera de lo que se podría esperar con un lanzador de monedas aleatorio ([Kaye y cols., 2007](#)).

Hasta ahora se ha mencionado los conceptos de **estado** y **superposición** sin profundizar realmente en ellos, sin embargo, a partir del experimento descrito anteriormente podemos establecer lo que estos significan. Sea un sistema pequeño —menciona Dirac— compuesto de partículas con propiedades específicas que interactúan de acuerdo con unas leyes dadas, existirán diversos movimientos posibles de dichas partículas que son compatibles con las leyes que lo rigen. Cada uno de esos movimientos recibe el nombre de **estado** ([Dirac, 1967](#)); en el caso del experimento descrito, los

estados del sistema se encuentran relacionados a las propiedades particulares y distinguibles que caracterizan al fotón, su energía⁶ y el camino que toma al interactuar con el divisor, ya sea izquierda o derecha, lo que nos permite establecer los 2 estados diferenciados e independientes con los que se trabajó anteriormente.

Para hablar de la **superposición de estados**, es importante resaltar que físicamente estamos impedidos para conocer las variables observables de un sistema cuántico con total precisión, esto quiere decir que hay un límite natural (no dependiente de nuestros instrumentos o habilidades) para conocer la naturaleza, reflejándose esto en nuestra descripción matemática ya que lo que nos permite conocer son las probabilidades de que un evento ocurra, mas no la certeza –en este caso– de detectar el fotón en un camino particular. Por tanto, la **superposición de estados** es un proceso en el cual se describe un nuevo estado a partir de la combinación lineal de otros, es decir, representa un estado general del sistema mediante la suma de estados bien definidos e inalterados con propiedades que se aproximan en mayor o menor medida a los estados base según sean sus “pesos” o amplitudes de probabilidad (Dirac, 1967). En nuestro caso y recordando la ecuación 1.4, este estado general del fotón luego de interactuar con el divisor representa una superposición para el fotón en ambos caminos (‘0’ y ‘1’), y solo será posible conocer un resultado concreto al medir este estado con los detectores.

Este marco conceptual permitirá abordar y analizar la base de la computación (los bits) y posteriormente su vínculo con los conceptos abordados de la MC.

1.3. ¿Qué es un bit?

Como se mencionó en la sección 1.1, el bit es la unidad básica de información en computación clásica. Es representado a partir de sistemas que tienen una propiedad característica que permite establecer dos estados bien diferenciados, denotados como ‘0’ y ‘1’⁷. Existen varios sistemas capaces de representar un bit, por ejemplo: un interruptor en un circuito eléctrico que puede estar encendido o apagado, o la posición de un objeto en un par de estantes teniendo 2 posiciones específicas, como se muestra en la figura 1.6. Es importante notar que solo se considera una única propiedad

⁶Por esta razón se menciona que la fuente del experimento debe ser estrictamente monocromática, para garantizar que cada fotón enviado tenga la misma energía

⁷En sí mismos, los bits se consideran como objetos abstractos, y en la realidad lo que tenemos son sistemas que se comportan como estos objetos.

característica del sistema para representar a los bits, todas las demás características se fijan para garantizar que no afectan la propiedad con la que se caracteriza el bit o directamente no se tienen en cuenta (Dür y Heusler, 2013).

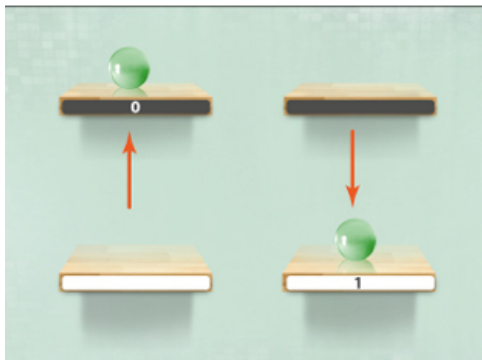


Figura 1.6: Representación de un bit clásico. Tomado de: Dür y Heusler (2013)

El estado de los bits se puede manipular mediante el uso de puertas lógicas. Por ejemplo, para el caso de un solo bit como en la figura 1.6, la puerta **NOT** invierte el valor del bit, pasando del estado ‘0’ a ‘1’, lo que sería equivalente en la figura a cambiar la pelota de estante.

Es importante resaltar que existen dos tipos de bits con los que se trabaja en computación clásica, los bits de procesamiento y los bits de almacenamiento. La diferencia entre estos tipos de bits son los principios físicos detrás de su implementación. Los bits de procesamiento son señales que los dispositivos pueden procesar mediante una cadena de transistores que se comportan —de manera abstracta— como las puertas lógicas que permiten manipular los valores de los bits de entrada, por ejemplo, considere un sistema de un cable por el cual se puede medir dos valores de voltaje. Cuando el voltaje es 0 el estado del bit de procesamiento es ‘0’ y cuando se mida un valor positivo de voltaje, digamos $+5mV$, entonces el estado del bit será ‘1’ (Kaye y cols., 2007).

Cuando se habla de bits de almacenamiento, aunque existen diversas tecnologías que permiten almacenar información, se abordará el ejemplo más sencillo, los discos duros magnéticos. Estos dispositivos constan de discos magnéticos que pueden girar a gran velocidad y una serie de cabezales que pueden leer y escribir información en dichos discos; estos cabezales pueden medir la orientación del dominio magnético en las diferentes regiones sobre los discos magnéticos, así como modificarlo; dependiendo de la orientación del dominio magnético esto se interpreta en términos de ‘0’ o ‘1’.

Nótese que, si bien mediante el funcionamiento de los discos duros magnéticos se puede establecer un sistema binario (con 2 estados), la ma-

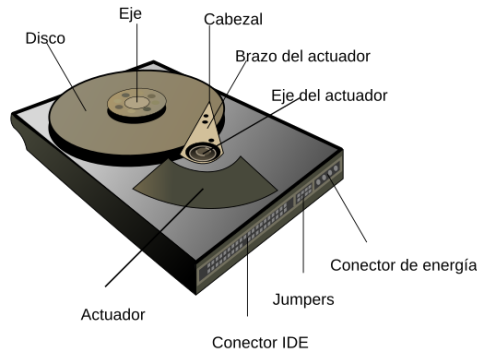


Figura 1.7: Partes de un disco duro magnético. Tomado de: [Wikimedia Commons](#)

nera en cómo se trabaja con los bits de almacenamiento es completamente diferente a los bits de procesamiento, por eso el disco duro tiene que transformar la lectura de los dominios magnéticos del disco en señales –de voltaje– que la CPU puede recibir e interpretar. Por esta razón y encaminado a los intereses de este trabajo, se centrará particularmente en el apartado de procesamiento.

1.4. ¿Qué es un qubit?

Los qubits son la unidad básica de información en computación cuántica y generalizan a los bits para el caso cuántico. Físicamente entonces, son interesantes principalmente los sistemas individuales de 2 niveles ya que estos nuevos “bits” se rigen también por la característica de tener 2 estados que se llamarán ‘0’ y ‘1’ respectivamente, para ser análogos al caso clásico, sin embargo, a este juego binario se le agrega el hecho de que estos estados pueden estar en una superposición; característica fundamental que diferencia qubits de bits. Un ejemplo de un sistema de este tipo es el experimento descrito en la sección 1.2 con la fuente de fotones y los divisores de haz, específicamente se dice que, un fotón que puede ser detectado en uno de dos posibles caminos –de manera abstracta– puede codificar un qubit.

De manera intencional se nombraron los caminos que puede tomar el fotón en el experimento como $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para relacionar el sistema con la notación propia de la teoría de la computación. El estado del sistema se describe como

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Adicionalmente los coeficientes complejos o amplitudes de probabilidad α_0 y α_1 se pueden descomponer como el producto $e^{i\phi}|\alpha|$, donde $|\alpha|$ es

un número real no negativo correspondiente a la magnitud del número complejo α , y $e^{i\phi} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ tiene norma 1. El valor ϕ se conoce como la “fase”, y $e^{i\phi}$ como el “factor de fase” (Kaye y cols., 2007).

Un aspecto importante sobre los vectores de estado es que los estados descritos por el vector $e^{i\phi} |\psi\rangle$ son equivalentes al estado descrito por el vector $|\psi\rangle$, es decir las rotaciones del vector de estado no cambian el estado que describen, en otras palabras, no tiene un significado físico relevante. Por tanto, se cumple que

$$\psi = |0\rangle + |1\rangle \equiv e^{i\phi_0} |0\rangle + e^{i\phi_1} |1\rangle \quad (1.8)$$

Se dice entonces que el sistema tiene una fase global que se considera irrelevante por el argumento mencionado anteriormente, sin embargo, el factor de fase relativo entre dos estados en superposición es físicamente relevante ya que la fase relativa está relacionada con cómo los estados en superposición interactúan y puede afectar directamente el resultado de una medición. Luego, el estado descrito por la superposición

$$\psi = |0\rangle + |1\rangle$$

es físicamente diferente del estado descrito por la siguiente superposición, donde φ es la fase relativa descrita como $\varphi = \phi_1 - \phi_0$

$$\psi = |0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle$$

A partir de las relaciones de fase descritas anteriormente, se puede entonces desarrollar la expresión del estado del sistema (ecuación 1.7) expresando las amplitudes de probabilidad en términos del factor de fase

$$|\psi\rangle = |\alpha_0| e^{i\phi_0} |0\rangle + |\alpha_1| e^{i\phi_1} |1\rangle \quad (1.9)$$

factorizando $e^{i\phi_0}$ se tiene

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_0} (|\alpha_0| |0\rangle + |\alpha_1| e^{i\phi_1 - \phi_0} |1\rangle) \quad (1.10)$$

Si consideramos ϕ_0 como la fase de referencia del sistema y la fijamos en un valor de 0 podemos expresar el estado en términos únicamente de la fase relativa

$$|\psi\rangle = |\alpha_0| |0\rangle + |\alpha_1| e^{i\varphi} |1\rangle \quad (1.11)$$

Estableciendo que las amplitudes cumplen la condición de normalización ($|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$) se puede hacer el símil con la identidad trigonométrica

pitagórica ($\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$) y expresar las norma de las amplitudes en términos de senos y cosenos

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (1.12)$$

Este vector de estado suele representarse como un punto en la superficie de una esfera tridimensional, conocida como esfera de Bloch (véase la figura 1.8). Donde dos parámetros reales son suficientes para describir matemáticamente el estado de un qubit, además, es importante resaltar que dada la deducción anterior esta esfera tiene radio 1.

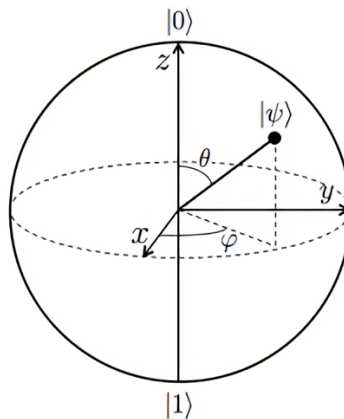


Figura 1.8: Estado del qubit en la esfera de Bloch. Tomado de: [Quiñones \(2012\)](#).

Esta representación permite ver gráficamente todos los estados de superposición posibles para los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como todos los puntos que pertenecen a la superficie de la esfera.

1.4.1. Construcción física de qubits

Recuerde que en sí mismos tanto los bits como los qubits son objetos abstractos, y lo que se tiene físicamente son sistemas que se aproximan lo máximo al comportamiento teórico de estos objetos. Para el caso de los qubits, se requieren unas ciertas condiciones para que el sistema pueda ser considerado como tal:

1. Dos estados bien diferenciados: Se ha destacado anteriormente que los sistemas de interés son sistemas de dos niveles para trabajar con el juego binario de las computadoras, sin embargo, es importante resaltar que se debe garantizar que el sistema esté restringido al par de estados que se establezcan como $|0\rangle$ y $|1\rangle$, es decir, el sistema no debe tener **filtración**.

2. Posible de manipular: El sistema debe ser susceptible de manipulación, es decir, de cambiar el estado del qubit a conveniencia manteniendo sus propiedades cuánticas.
3. Posible de medir: Se debe poder colapsar la superposición del qubit para conocer su estado, lo que en computación se interpreta como obtener un resultado de la operación o algoritmo.

Estas 3 condiciones establecen las características que un qubit debe tener para ser funcional, y además plantean algunas dificultades técnicas en su implementación. Una de las más importantes es garantizar la **coherencia** del sistema, es decir, garantizar que el sistema conserve sus propiedades cuánticas (la superposición de estados del qubit), manteniéndose únicamente en los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Cuando el sistema dispuesto como qubit toma un estado distinto a $|0\rangle$ y $|1\rangle$ se dice que el sistema presenta **decoherencia**, lo que implica que se pierda la superposición y por tanto se pierda la información con la que se está trabajando en el qubit. La decoherencia se puede entender gráficamente con el ejemplo de la esfera y los estantes de la figura 1.6, si por alguna razón la esfera se cayera de algún estante y llegara al piso, estaría en una posición diferente a las que definen el qubit, por tanto, se tendría un valor distinto de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (véase la figura 1.9), por lo que una máquina no sería capaz de interpretar ese valor y se rompería la cadena de proceso del algoritmo, por eso se dice que la decoherencia genera pérdida de información y es tan importante que no se genere filtración en los qubits, siendo uno de los principales retos en la construcción de qubits funcionales.

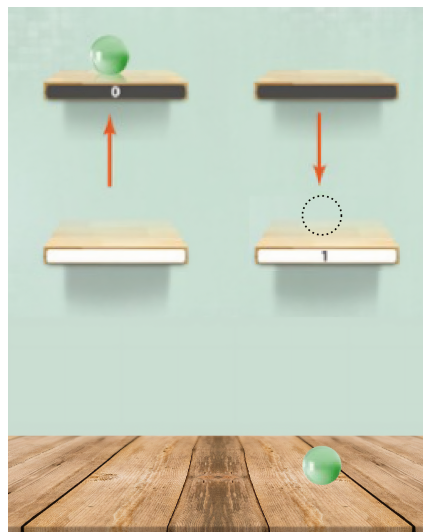


Figura 1.9: Representación gráfica de la filtración en los qubits.

Adaptada de: [Dür y Heusler \(2013\)](#)

1.4.2. El qubit Superconductor

Existen diversas alternativas como plataforma de hardware para implementar el procesamiento de información cuántica, una de ellas es la arquitectura basada en circuitos superconductores. Estos sistemas, también llamados dispositivos de electrodinámica cuántica de circuito (QED por sus siglas en inglés), utilizan la dinámica de los campos electromagnéticos en circuitos superconductores para procesar la información.

Como descripción general, la superconductividad es un fenómeno cuántico en el cual ciertos metales con una estructura cristalina de alta simetría presentan una resistencia eléctrica casi nula cuando se alcanza una temperatura crítica (obsérvese la figura 1.10), para el caso del aluminio (Al), este se vuelve superconductor cuando alcanza una temperatura de $1,2K$ ⁸. A estas temperaturas cercanas al cero absoluto, los electrones en el material se mueven de forma muy particular, la cual por varios años generó investigaciones relacionadas; la explicación, de forma simplificada, lleva a que estas partículas se mueven con una proximidad que fuera del estado superconductor no es posible, generando que dos electrones de conducción se encuentren más próximos de lo normal en el material y se mantengan con espines apareados, formando lo que se conoce como **pares de Cooper**, siendo estos los portadores de carga de la corriente superconductor en el sistema. Estos pares de Cooper son muy resistentes a perturbaciones causadas por eventos de dispersión, permitiendo que el estado cuántico general que describe el par de Cooper sea muy estable (Roth y cols., 2021).

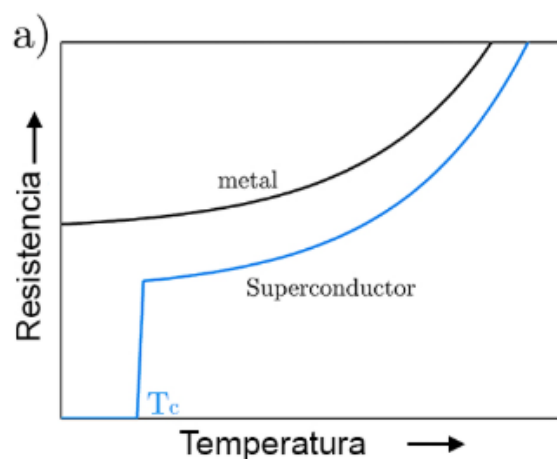


Figura 1.10: Diferencia de la resistencia en función de la temperatura entre un metal convencional y un metal superconductor. Tomado de: [Mientras En Físicas \(2019\)](#)

⁸La temperatura a la que operan los qubits superconductores es aún más baja, de unos $10mK$, buscando reducir al máximo cualquier influencia de carácter térmico que pueda afectar la estabilidad del sistema.

Generalmente, los efectos cuánticos solo son observables a nivel microscópico debido a la fragilidad de los estados cuánticos individuales. Para observar comportamiento cuántico a nivel macroscópico se requiere un alto grado de coherencia entre los sistemas cuánticos individuales, y particularmente gracias a los pares de Cooper, los circuitos superconductores son una prometedora forma de lograrlo.

El qubit transmon (abreviatura de *transmission-line shunted plasma oscillation qubit*) consta de un par de uniones Josephson en paralelo (SQUID), un condensador y una caja de pares de Cooper. Este tipo de circuito especial se pueden entender como un análogo cuántico de los circuitos LC, pero con un par de diferencias claves que se mencionarán más adelante.

Para aclarar un poco el funcionamiento de estos qubits, las uniones Josephson son dispositivos formados por dos superconductores separados por una fina barrera aislante (obsérvese la figura 1.11), los más utilizados son un “sandwich” de tipo $Al/AlO_x/Al$. Estas uniones son claves en los circuitos superconductores porque permiten el paso de pares de Cooper sin resistencia, a través del efecto túnel, y actúan como un tipo de “inductor” no lineal en el circuito QED.

Se hace la relación con los circuitos LC debido a que, estos circuitos se caracterizan por ser sistemas que presentan una periodicidad, esto debido a que se tiene una carga eléctrica que oscila. Si se lleva esto al caso cuántico, un oscilador cuántico oscila, pero con unas frecuencias muy específicas, asociadas a los niveles de energía del oscilador. Un detalle importante es que el gap de energía ΔE para los diferentes estados del oscilador cuántico se encuentran equiespaciados —la energía necesaria para pasar de un nivel de energía a otro es el mismo—, esto en el contexto de la computación cuántica es un problema, ya que al estar todos los estados “a la misma distancia” no es posible garantizar si se está trabajando sobre el par de estados que se elijan como qubit, por lo que es posible que el sistema presente filtración.

Aquí es donde la unión Josephson juega un papel importante, al caracterizar en esencia un inductor no lineal, donde los niveles de energía en un circuito LC con este tipo de “inductancia” cambian respecto al caso descrito anteriormente, haciendo que el gap de energía entre los diferentes estados ya no sea el mismo. Se dice entonces que los niveles ya no están equiespaciados entre sí, permitiendo elegir dos niveles de energía contiguos que sean diferentes entre sí para establecer los estados del qubit minimizando la posibilidad de filtración.

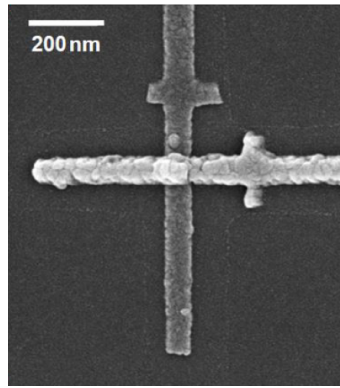


Figura 1.11: Imagen de una unión Josephson, mostrando las dos capas superconductoras una sobre otra. Tomado de: [Roth y cols. \(2021\)](#)

Continuando con la descripción del qubit superconductor, el SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) es una disposición compuesta por dos uniones Josephson conectadas en paralelo (ver figura 1.12). Esta configuración permite, además del paso de los pares de Cooper, tener un mayor control sobre las propiedades del circuito, ya que propiedades asociadas a las uniones Josephson se pueden ajustar aplicando un campo magnético sobre el SQUID.

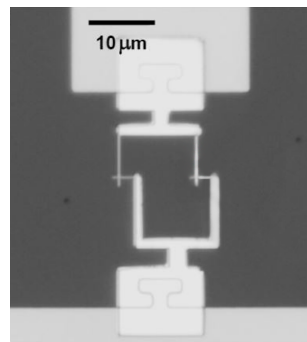


Figura 1.12: Imagen de un SQUID. Adaptada de: [Roth y cols. \(2021\)](#)

Por último, la caja de pares de Cooper (ver figura 1.13) describe una pequeña región superconductora, denominada isla, que está separada de un reservorio (otro bloque superconductor más grande) mediante la unión Josephson. Esta isla puede contener un número discreto de pares de Cooper, y debido a su tamaño reducido, añadir o retirar incluso un solo par de Cooper afecta significativamente su energía. Esta sensibilidad da origen a la energía de carga del sistema, que depende del número de pares presentes en la isla.

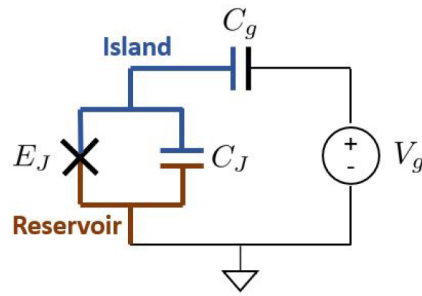


Figura 1.13: Diagrama de circuito de la caja de pares de Cooper.
Tomado de: [Roth y cols. \(2021\)](#)

A partir de estos elementos se tiene el qubit superconductor de tipo transmon. En la figura 1.14 se puede observar la forma real que tienen este tipo de dispositivos. Como se mencionó anteriormente, la caja de pares de Cooper permite separar dos regiones y hacer que sea bastante sensible a los cambios de carga, esta diferencia es lo que permite establecer los dos estados que codifican el qubit superconductor. Se parte del estado en donde el sistema está en equilibrio, en el estado de menor energía (o estado fundamental) del circuito, que se considera el estado $|0\rangle$, cuando se introduce un pulso al circuito con el dispositivo electromagnético se consigue excitar el circuito de forma que uno de los pares de Cooper pasa del reservorio a la isla, esto genera una transición del estado fundamental al primer estado excitado del circuito el cual se considera el estado $|1\rangle$ del qubit. La superposición ocurre en el número de pares de Cooper que hay en la isla, dado que existe una probabilidad de que un par de Cooper pase a través del SQUID o no, puede que la carga en la isla cambie o no. Esto se denota matemáticamente de la siguiente manera

$$|\psi\rangle = \alpha |n\rangle + \beta |n+1\rangle \quad (1.13)$$

Siendo n la cantidad de pares de Cooper que hay en la isla. Ya que se requiere de una estabilidad robusta para que las propiedades cuánticas se manifiesten de manera macroscópica, una pequeña fluctuación en las propiedades del circuito podría alterar el gap de energía entre el estado fundamental y el primer estado de excitación del circuito, por ello, y como el transmon es en esencia un circuito LC cuántico, este problema se puede solucionar agregando un condensador que sea muy grande, de modo que permita que el circuito oscile muy poco, haciéndolo más estable. Este condensador es el elemento en forma de cruz presente en la figura 1.14.

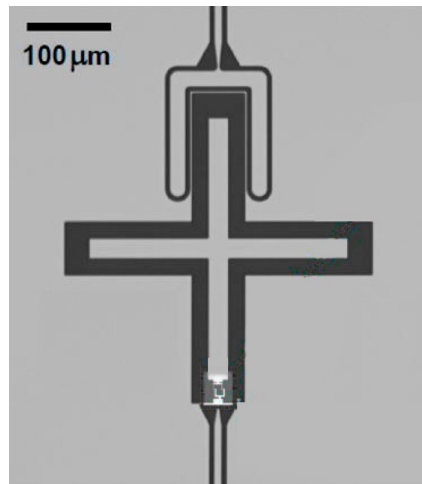


Figura 1.14: Foto del qubit transmon. Adaptada de: [Roth y cols. \(2021\)](#)

A pesar del éxito de diseños como el qubit transmon, estos aún enfrentan limitaciones importantes frente al ruido del entorno y la pérdida de coherencia cuántica, factores que restringen su escalabilidad en arquitecturas cuánticas más complejas.

Es así como la computación ha evolucionado en formas que no se pensaron en sus inicios. En este capítulo se presentó brevemente este recorrido, que permite hablar de las propuestas actuales en el diseño de dispositivos para el procesamiento de información a partir de principios cuánticos. Aunque es de destacar que la cuántica ya se implementaba en las propuestas de computación clásica, la diferencia radica en la forma en que se concibe el bit respecto al qubit, además de la necesidad de enfrentar las limitaciones que se tienen para continuar mejorando la escalabilidad de los dispositivos de procesamiento de información en un tamaño reducido y sin pérdida de información, beneficiándose de los principios de la mecánica cuántica.

En este proceso, el qubit transmon logra posicionarse como candidato prometedor para la nueva era de la computación, sin embargo, dadas las limitaciones que exhibe, se han concebido propuestas alternativas a este tipo de qubit buscando solventar las dificultades que este presenta. En respuesta a estas dificultades, en 2003 el físico Alexei Kitaev propuso una nueva aproximación basada en la topología, en la que la información cuántica se codifica de manera no local, haciéndola más resistente a errores. Esta propuesta dio origen al concepto de qubit topológico, que se ha convertido en un referente clave en la búsqueda de una computación cuántica más estable. Para entender esta transición y el papel que juega la topología en este nuevo enfoque, es necesario revisar cómo esta área matemática ha ido tomando protagonismo en el desarrollo de la física cuántica.

Capítulo 2

Anyones y el Efecto Hall cuántico

Este capítulo aborda la evolución del efecto Hall clásico al cuántico, resaltando cómo la topología explica la precisión y estabilidad de este último mediante el número de Chern y el gauge de Landau. Se cierra con una introducción a los anyones, a partir del efecto Hall cuántico fraccionario, mostrando cómo surgen estas cuasipartículas con estadística intermedia entre fermiones y bosones.

2.1. Topología y Física

El comienzo del estudio de la topología puede remontarse al uso de la teoría de grafos por parte de Euler para investigar el problema de los puentes de Königsberg (1736), sin embargo, esta área de las matemáticas no se toma en cuenta ampliamente en física hasta los trabajos de Poincaré en mecánica celeste, mapeo de superficies, y otros más, que hoy se consideran parte de la topología. Aspectos de la topología se han visto presentes en la física desde el siglo XIX, con la formulación de la ley de Gauss y Ampere, que se pueden considerar actualmente de naturaleza topológica, ya que involucran integrales sobre superficies que permanecen invariantes bajo deformaciones continuas (Simon, 2018).

A pesar de las apariciones de la topología en mecánica clásica y electrodinámica, no fue sino hasta el establecimiento de la física moderna en el siglo XX, con teorías como la relatividad y la mecánica cuántica, que la topología comenzó a adquirir un papel central en la física teórica. La consolidación de esta relación se dio especialmente a partir de tres trabajos destacables: el primero es el análisis de Dirac sobre la compatibilidad de la existencia de los monopolos magnéticos con el marco conceptual de la MC (1931), en su artículo titulado “*Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*” Dirac pretendía atacar el problema de la predicción de niveles

de energía negativos que tenía su teoría publicada en 1930, ya que esta no era capaz de esclarecer por qué parecía haber una distinción entre electrones y protones —cada una tendría su propia antipartícula—. Para ello, se propuso intentar encontrar, desde una perspectiva teórica, la razón de la existencia de una carga eléctrica más pequeña, ya que experimentalmente se conocía su existencia y su valor era esta aproximadamente dado por:

$$\hbar c/e^2 = 137$$

Dirac establece que “El cambio en la fase de una función de onda al rodear cualquier curva cerrada debe ser el mismo para todas las funciones de onda” (Dirac, 1967), por lo que considerando un análogo de la ley de Gauss para el caso magnético, es decir la existencia de monopolos magnéticos, se presenta una no integrabilidad en la fase de la función de onda, por tanto, la evolución de la fase no está determinada solo por el punto de inicio y final de la curva, sino también por como se recorre dicha curva. De este modo, la consistencia de la MC requeriría según el artículo de Dirac que el producto de la carga eléctrica (e) y la carga magnética (g) estuviera cuantizado según la siguiente relación:

$$g = n \frac{\hbar c}{2e}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

esta condición de cuantización se considera el primer ejemplo en física de “cuantización topológica”; entendiéndose por cuantización topológica cuando una magnitud física solo puede tomar valores discretos debido a la estructura geométrica y topológica global del espacio. Aplicar esta concepción a la teoría de Dirac, quiere decir que la condición entre carga eléctrica y magnética no surge de un análisis local del campo electromagnético, sino de la necesidad de que la función de onda que describe una partícula en el espacio sea unívoca bajo la influencia del campo magnético, por tanto, al recorrer trayectorias cerradas en el espacio, el sistema cuántico debe ser coherente, y esto depende de la estructura misma del espacio y no de medidas locales (Morandi, 1992).

El segundo trabajo fue el descubrimiento del efecto Aharonov–Bohm (1959), un fenómeno cuántico en el que la fase de la función de onda para una partícula cargada cambia al moverse en una trayectoria cerrada aun en regiones donde no hay presencia de un campo magnético. Este cambio de fase se mostró que viene dado en relación con el potencial vectorial A , de este modo, aunque donde se mueva la partícula el campo magnético es nulo, las propiedades físicas del sistema siguen estando influenciadas por

el potencial vectorial.

Este efecto plantea un conflicto en lo que se pensaba eran las entidades primarias, los campos. En mecánica clásica, los potenciales tenían un rol secundario ya que eran considerados simples herramientas matemáticas para describir los campos, quienes sí contaban con un significado físico directo. Sin embargo, en MC, la ecuación de Schrödinger (el equivalente a las ecuaciones de movimiento en mecánica clásica) requiere la inclusión de los potenciales para describir las interacciones electromagnéticas; bajo estas consideraciones se supondría entonces que las entidades fundamentales serían los potenciales y los campos serían secundarios, ya que se derivan de estos (Aharonov y Bohm, 1959).

Por último, el descubrimiento del efecto Hall cuántico en 1980 llevó a una enorme expansión del papel de la topología en física del estado sólido y la materia condensada (Simon, 2018). En este fenómeno, se encontró que la conductividad transversal en un semiconductor -cuyos electrones están fuertemente restringidos a moverse en dos dimensiones-, sometido a bajas temperaturas y campos magnéticos intensos se cuantiza en múltiplos enteros de e^2/h , con una precisión de 10^{-7} que no se ve afectada por las impurezas del material. Poco tiempo después, en 1982, se observó una versión aún más sorprendente: el efecto Hall cuántico fraccionario. En este caso, la conductividad transversal se expresa en valores fraccionarios ($\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$) de e^2/h . A estas excitaciones fraccionarias se les conoce con el nombre de “anyones”, término que fue acuñado por el físico estadounidense Frank Wilczek durante la década de los 80’s, tiempo en el que surgió el interés por los sistemas de partículas moviéndose en 2 dimensiones (\mathbb{R}^2) (Morandi, 1992).

Este tipo de sistemas resultaron ser mucho más que una curiosidad teórica; investigaciones publicadas entre el 2000 y 2003, como “Topological quantum computation” (Freedman et al., 2001) y “Fault-tolerant quantum computation by anyons” (Kitaev, 2003), resaltan características que posicionan a los anyones como candidatos prometedores para implementar qubits en modelos de computación cuántica topológica que sean resistentes a errores. Teniendo esto en cuenta, es necesario para las pretensiones del presente trabajo hacer una revisión del efecto Hall clásico y cuántico.

2.2. Efecto Hall

El efecto Hall fue descubierto en 1879 por Edwin Hall, su trabajo se vio principalmente motivado por una idea expuesta en el trabajo de Maxwell “Tratado de Electricidad y Magnetismo”(1873). Hall resalta particularmente el fragmento en que Maxwell afirma que:

Si la corriente misma es libre de elegir algún camino a través de un conductor sólido fijo o una red de alambres, entonces, cuando se hace actuar una fuerza magnética constante sobre el sistema, la trayectoria de la corriente a través de los conductores no se altera permanentemente, sino que luego de que ciertos fenómenos transitorios, llamados corrientes inducidas, se han apagado, se tendrá que la distribución de la corriente es la misma que si no estuviera bajo la acción de la fuerza magnética.

Maxwell (1873, como se citó en (Uzcategui y cols., 2020))

Esta afirmación lleva a pensar que sólo las fuerzas electromotrices influyen las corrientes eléctricas. Hall se propuso trabajar en evaluar experimentalmente la propuesta de Maxwell. Utilizó un montaje experimental refinado; luego de varias pruebas, encontró que la mejor disposición se encontraba con una delgada lámina de oro montada sobre una placa de vidrio. Esta lámina conductora se posicionaba entre los polos de un electroimán, de manera que las líneas de fuerza del campo magnético incidieran perpendicularmente sobre la superficie de la lámina, y por ende, perpendicularmente a la dirección de la corriente eléctrica que se hacía circular a través de ella. Las condiciones experimentales cruciales para la observación del efecto incluían la aplicación de un campo magnético intenso (entre 1,5 y 2 Teslas) y la medición de la diferencia de potencial mediante un galvanómetro. Las puntas de prueba de este instrumento se colocaban en puntos directamente opuestos en los bordes laterales de la lámina de oro, es decir, transversalmente al flujo de la corriente principal, para detectar cualquier voltaje generado por la interacción entre la corriente y el campo magnético. Hall tuvo éxito en detectar una deflexión de la aguja del galvanómetro, como efecto de la acción del imán. Esta deflexión era lo suficientemente grande como para no atribuirle directamente a la acción del campo sobre la aguja. Esta deflexión era permanente y el efecto se invertía cuando se invertía el campo, pero no se invertía al intercambiar las puntas del galvanómetro (Uzcategui y cols., 2020).

Hall menciona en su artículo:

Se puede hablar de la acción del imán como estableciendo en la lámina de oro una nueva fuerza electromotriz a ángulos rectos de la fuerza primaria electromotriz. Esta nueva fuerza electromotriz no puede, en condiciones ordinarias, manifestarse por sí misma, si el circuito en el cual ella trabaja estuviera incompleto.

(*Hall, 1879*).

De esta manera, Hall remarca el hecho de que para que se produzca el efecto es necesario que en el circuito haya presente una corriente eléctrica, si por alguna razón no hay un transporte de carga en el circuito, el efecto no puede ocurrir, mostrando entonces que el efecto observado es consecuencia de la interacción entre la corriente eléctrica y el campo magnético externo y demostrando que los campos magnéticos, además de las fuerzas electromotrices, también pueden influenciar el comportamiento de la corriente al interior de un material.

2.2.1. Modelado del efecto Hall

El efecto Hall, desde una perspectiva microscópica y moderna, se manifiesta a medida que los portadores de carga —electrones en este caso— responden a la influencia de un campo magnético en condiciones particulares. Cuando una corriente (I) fluye a través de una muestra conductora de longitud (L), ancho (a) y espesor (d), la cual es atravesada por un campo magnético \vec{B} perpendicular a la superficie de la muestra, los electrones son desviados hacia uno de los bordes de la muestra debido a la acción de la fuerza de Lorentz¹.

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

Debido a la acción del campo magnético sobre las cargas en movimiento, se genera una acumulación de portadores de carga a un costado de la muestra, como se observa en la figura 2.1, originando un campo eléctrico conocido como **campo Hall** (siendo la carga acumulada la fuente del campo). La carga continúa acumulándose, hasta que se alcanza el equilibrio entre la fuerza magnética y la fuerza eléctrica repulsiva producida por el campo Hall (Uzcategui y cols., 2020). En este punto, igualando a cero la fuerza de Lorentz (2.1) se tiene que:

¹Es importante resaltar que términos como electrones y fuerza de Lorentz, son términos utilizados en la explicación moderna del efecto Hall, ya que el electrón se descubrió 18 años después del artículo de Hall en 1897, y la fuerza de Lorentz fue desarrollada hasta 1892.

$$e\vec{E} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

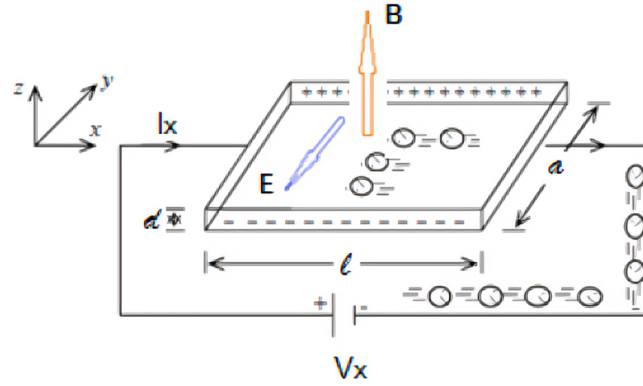


Figura 2.1: Esquema del experimento del Efecto Hall clásico.
Tomado de: [Uzcategui y cols. \(2020\)](#)

Según el sistema de referencia de la figura 2.1 se establecen las direcciones de los vectores, considerando el movimiento de los electrones (círculos negros en la figura):

$$\vec{v} = -v_x \hat{i} \quad ; \quad \vec{E} = -E_y \hat{j} \quad ; \quad \vec{B} = B \hat{k} \quad (2.3)$$

Luego, sustituyendo en la ecuación 2.2

$$eE_y \hat{j} = e(v_x \hat{i} \times B \hat{k})$$

Operando se llega a

$$eE_y \hat{j} = ev_x B \hat{j}$$

Se puede trabajar la expresión anterior de forma escalar ya que las fuerzas actúan en la misma dirección. Multiplicando por la densidad lineal de portadores de carga (n)

$$neE_y = nev_x B$$

El movimiento de un número (n) de electrones hacia la parte inferior de la lamina conductora, como se observa en la figura 2.1, se puede interpretar como una densidad lineal de corriente hacia la parte superior (recordando que la corriente se entienden como el movimiento de las cargas positivas en un conductor), a partir de esta consideración, matemáticamente la densidad lineal de corriente se expresa como $J = nev$, siendo v la velocidad

media de las cargas bajo la influencia del campo eléctrico inducido transversalmente en el material y ya que la fuerza transversal magnética origina el campo Hall (E_y), se genera por tanto un voltaje hall (V_H) asociado, siendo $V_H = E_y a$. Multiplicando por la longitud transversal (a) y sustituyendo la densidad lineal de corriente para obtener:

$$\begin{aligned} neE_y a &= JBa \\ neV_H &= JBa \\ neV_H &= IB \end{aligned} \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta que la resistencia se define como V/I y despejando de la ecuación 2.4 se encuentran la ecuación para la **resistencia Hall**:

$$R_H = \frac{B}{ne} \tag{2.5}$$

En esta ecuación se puede notar que la resistencia Hall es una magnitud escalar que no depende de las dimensiones geométricas de la muestra, únicamente depende de la intensidad del campo magnético aplicado y de las propiedades del material (la densidad de carga y la carga particular de los portadores). Es importante resaltar que esta resistencia hall es la resistencia del material en la dirección transversal, es decir, en la dirección en la que aparece el voltaje Hall, por tanto, si bien es útil para analizar situaciones simples donde la corriente fluye en una dirección bien definida, el movimiento de carga en la muestra conductora no se da en una única dirección y por tanto se requiere un formalismo más general para describir de manera más completa el fenómeno.

2.2.2. Tensor de resistividad y conductividad

La relación entre la densidad de corriente \vec{J} y el campo eléctrico \vec{E} viene dada por

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \tag{2.6}$$

Siendo ρ la resistividad del material. Descrito de la manera anterior la resistividad es un escalar ya que no se está considerando ninguna influencia externa sobre la corriente, sin embargo, en un sistema influenciado por un campo magnético externo (como en el experimento del efecto hall) se rompe la isotropía de la resistividad. Debido a la acción del campo magnético, esta cantidad ya no es la misma en todas direcciones y por tanto una magnitud escalar no es suficiente para describir el fenómeno. De esta manera la

relación entre el campo eléctrico y la densidad de corriente para un sistema de dos dimensiones se expresa en términos del **tensor de resistividad** $\hat{\rho}$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

ya que en el efecto hall a la lámina llega una corriente I_x y por la condición del equilibrio de fuerzas para la fuerza de Lorentz, se puede considerar $J_y = 0$, esto permite simplificar 2.7 de la siguiente manera

$$E_x = \rho_{xx} J_x$$

$$E_y = \rho_{yx} J_x$$

A partir de la ecuación 2.1 para el caso en equilibrio se puede deducir que $E_y = v_x B$ y la densidad de corriente J_x está relacionada con la velocidad de deriva de los electrones por $J_x = nev_x$. Despejando y relacionando estas expresiones se obtiene

$$E_y = \left(\frac{J_x}{ne} \right) B \quad (2.8)$$

$$E_y = \left(\frac{B}{ne} \right) J_x \quad (2.9)$$

Comparando con las componentes del tensor de resistividad podemos deducir que $\rho_{yx} = \frac{B}{ne}$, es decir, que la resistencia hall forma parte de las componentes del tensor de resistividad, y como se mencionó anteriormente, es una de las componentes transversales.

Existe otra forma de relacionar la densidad de corriente \vec{J} con el campo eléctrico \vec{E} , y es mediante la conductividad eléctrica σ .

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.10)$$

Nuevamente, sin influencia externa la conductividad es una magnitud escalar, pero en el contexto del efecto hall, bajo la acción del campo magnético externo la conductividad también se expresa como un tensor, el **tensor de conductividad** $\hat{\sigma}$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Para trabajar con estos tensores, existen un par de relaciones las cuales ayudan a determinar las componentes particulares de cada uno. La primera es recordar que existe una relación entre conductividad y resistividad bien

conocida en el caso clásico, donde ($\sigma = \frac{1}{\rho}$) siendo una magnitud el inverso de la otra. Luego los tensores de conductividad y resistividad también la cumplen

$$\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1} \quad (2.12)$$

permitiendo deducir las componentes de un tensor conociendo las del otro. La segunda es mediante la relación de Onsager, esta relación permite reducir el número de parámetros independientes en sistemas de transporte cercanos al equilibrio estableciendo que la matriz de coeficientes de transporte es simétrica².

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (2.13)$$

En este caso las matrices de transporte son los tensores de conductividad y resistividad, sin embargo, es importante resaltar que en el caso del efecto Hall ocurre es una ruptura de simetría, ya que el campo magnético rompe con la isotropía de los escalares de conductividad y resistividad, además, como se mencionó en la sección anterior, Hall midió experimentalmente que se invierte el valor del voltaje transversal bajo inversiones del campo magnético. Teniendo en cuenta esto y la relación de Onsager, las componentes del tensor de conductividad cumplen

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \quad ; \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \quad (2.14)$$

El tensor de conductividad se expresa entonces de la siguiente manera

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}$$

Siendo simétrica la diagonal, brindando información sobre la conductividad longitudinal, y antisimétrica las componentes fuera de la diagonal, brindando información sobre la conductividad transversal, dependiente del campo magnético. Todas las condiciones anteriores permiten reducir de 4 a 2 las componentes que son necesarias de calcular para estos tensores.

La descripción del tensor de resistividad y conductividad proporciona un marco robusto para comprender el transporte de carga en superficies conductoras bajo la influencia de campos magnéticos. Este formalismo es fundamental en el estudio de sistemas con propiedades conductoras más complejas, siendo un ejemplo clave y donde su uso es indispensable para la descripción del efecto Hall cuántico.

²Onsager ganó el Premio Nobel de Química en 1968 por su trabajo en sistemas termodinámicos, de los cuales derivó esta relación.

2.3. Efecto Hall Cuántico

Un siglo después del descubrimiento del efecto Hall, en 1980, el físico alemán Klaus Von Klitzing descubre el efecto Hall cuántico mientras trabajaba en el transistor de efecto de campo metal-óxido semiconductor (MOSFET por sus siglas en inglés), en el laboratorio de alto campo magnético en Grenoble, Francia. Von Klitzing encontró que la resistencia Hall R_H no variaba de forma lineal respecto al campo magnético, en su lugar presentaba unas mesetas en múltiplos enteros de la cantidad h/e^2 , como se observa en la siguiente figura³.

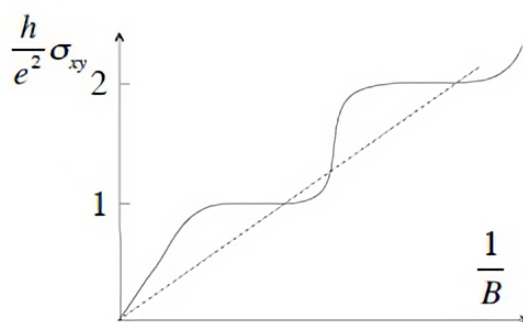


Figura 2.2: La línea discontinua representa el comportamiento clásico de la resistencia Hall, mientras que las mesetas hacen evidente una cuantización en esta cantidad.

Tomado de: Pachos (2012)

El aspecto novedoso de la investigación de Von Klitzing radica en que estaba interesado en caracterizar el transporte electrónico en los transistores buscando mejorar la movilidad electrónica en esos dispositivos. Su estudio fue realizado sobre capas finas de compuestos de silicio (Si). Las condiciones experimentales eran especiales, ya que cambió las láminas de oro por transistores tipo MOSFET, pasó de temperaturas de nitrógeno líquido (aproximadamente $77K$) a temperaturas de helio líquido (aproximadamente $4K$) y aumentó la intensidad del campo magnético pasando de $0,5T$ a $5T$ (Uzategui y cols., 2020).

El transistor tipo MOSFET está compuesto por una puerta metálica, un óxido de silicio (SiO_2) como aislante y silicio (Si) con un dopaje⁴ tipo-p no tan fuerte. Cuando se aplica en el transistor una tensión de puerta

³Si bien el resultado original a partir del descubrimiento de Von Klitzing está en términos de la resistencia, desde el modelo matemático es más natural abordar el concepto de conductividad, y ya que estas magnitudes están relacionadas, se trabaja principalmente alrededor de la conductividad.

⁴El dopaje es un proceso donde se introducen intencionadamente impurezas en otros materiales puros para alterar sus propiedades conductivas. Hay de dos tipos, el tipo-p (positivo) significa dopar el material con átomos que tienen un electrón de valencia menos. El tipo-n (negativo) es lo contrario, dopar el material con átomos con un electrón de valencia extra.

positiva, los electrones son atraídos hacia la superficie de separación entre el aislante y el semiconductor tipo-p (observe la figura 2.3)

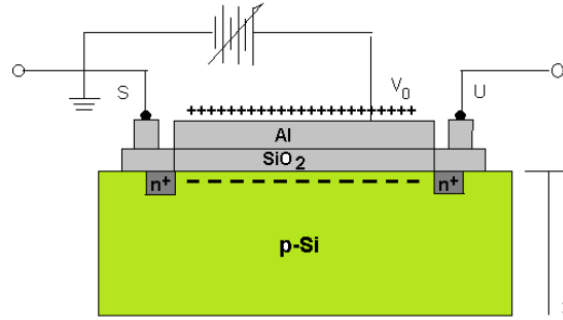


Figura 2.3: Esquema lateral del transistor MOSFET.
Tomado de: [Uzcategui y cols. \(2020\)](#)

Al incrementar la tensión de modo que el fondo de la banda de conducción se aproxime y traspase el nivel de energía de Fermi, aparece una región próxima a la superficie donde se mejora la conductividad. Esta capa es la región de la línea discontinua en la figura 2.3 y se conoce como la capa de inversión, ya que debido a la acumulación de electrones en la zona cercana al SiO_2 , el semiconductor pasa de tener comportamiento tipo-p a tipo-n en dicha región. Adicionalmente como el movimiento de los electrones está restringido a la zona próxima a la separación, se considera que se comporta como un gas cuasi-bidimensional, consideración que permite modelar el sistema como electrones moviéndose en 2 dimensiones ([Uzcategui y cols., 2020](#)).

2.3.1. Modelado del efecto Hall cuántico

Para analizar el comportamiento de los electrones en el efecto Hall cuántico se va a considerar un electrón confinado en el plano xy (debido al comportamiento del sistema como un gas cuasi-bidimensional), que está sometido a un campo magnético uniforme tal que $\vec{B} = B\hat{z}$. Se busca resolver entonces la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, dado que ningún potencial o campo depende explícitamente del tiempo. Para incorporar la interacción del electrón con el campo magnético en el Hamiltoniano, se utiliza el principio de acoplamiento mínimo, modificando el operador momento $\hat{\mathbf{p}}$ para que este incluya el potencial vectorial \vec{A}

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - q\vec{A} \quad (2.15)$$

El Hamiltoniano entonces toma la siguiente forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\mathbf{p}} - q\vec{A} \right)^2 \quad (2.16)$$

Ya que se cumple que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, no hay una sola forma matemática para \vec{A} , ya que diferentes potenciales dan como resultado el mismo campo físico, por lo que podemos elegir una forma del potencial vectorial que permita simplificar los cálculos sin afectar la física del sistema. En este caso es conveniente elegir el **gauge de Landau**. Con este gauge, \vec{A} se define como:

$$\vec{A} = (0, Bx, 0) \quad (2.17)$$

Sustituyendo en el Hamiltoniano se obtiene:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eBx)^2 \right] \quad (2.18)$$

recordando que $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$ y $\hat{p}_y = -i\hbar\partial_y$.

Ya que el potencial vectorial no depende explícitamente de y , el sistema es invariante bajo traslaciones en dicha dirección, esto sugiere una solución del tipo:

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \phi(x) \quad (2.19)$$

donde k_y es un número de onda constante asociado al momento en y . Luego se sustituye la solución propuesta en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\hat{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2m_e} \left[-\hbar^2\partial_x^2 + (\hbar k_y + eBx)^2 \right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (2.21)$$

En este punto es importante considerar la frecuencia ciclotrónica (ω_c) que depende del campo, definida como:

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (2.22)$$

Esta frecuencia se incluye en el Hamiltoniano ya que se busca describir la energía cinética del electrón debida a su interacción con el campo magnético, adicionalmente esta descripción tiene que ser consistente con el electromagnetismo clásico, donde una partícula cargada en un campo magnético describe una trayectoria circular, cuya frecuencia de rotación es

precisamente la frecuencia del ciclotrón. Incluyendo ω_c en la expresión del Hamiltoniano (2.21) se obtiene

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m_e \omega_c^2 \left(x + \frac{\hbar k_y}{eB} \right)^2 \right] \phi(x) = E \phi(x) \quad (2.23)$$

Esta última ecuación es la ecuación diferencial para un oscilador armónico cuántico en una dimensión, que se encuentra desplazado una distancia x_0 que se define como:

$$x_0 = -\frac{\hbar k_y}{eB} \quad (2.24)$$

dejando el Hamiltoniano como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m_e \omega_c^2 (x - x_0)^2 \right] \phi(x) = E \phi(x) \quad (2.25)$$

La solución es la del oscilador armónico cuántico, siendo la energía del sistema

$$E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

A partir de la ecuación anterior es posible determinar la brecha para dos niveles de energía consecutivos, considerando los niveles E_n (ecuación 2.26) y E_{n+1} , que se expresa como sigue:

$$E_{n+1} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

Entonces la diferencia de energía entre estos niveles viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{n+1} - E_n \\ \Delta E &= \hbar \omega_c = \hbar \frac{eB}{m_e} \end{aligned} \quad (2.27)$$

El resultado anterior muestra entonces que los niveles de energía del sistema se encuentran equiespaciados con una brecha igual a $\hbar \omega_c$, del mismo modo se puede notar que el espaciado de los niveles de energía, por la frecuencia del ciclotrón, está relacionada con la intensidad del campo magnético. Por tanto, de esta forma se evidencia cómo el campo cuantiza la energía de los electrones haciendo que cuanto mayor sea la intensidad del campo magnético ($B \uparrow$), mayor será la brecha ($\Delta E \uparrow$) entre dos niveles de energía consecutivos del sistema.

Por otro lado, al introducir condiciones de contorno para la muestra en la dirección y , considerando un ancho L_y y teniendo en cuenta la condición periódica de $\psi(x, y)$ en esta dirección, la función de onda debe cumplir lo siguiente:

$$\psi(x, y + L_y) = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad k_y = \frac{2\pi m}{L_y}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.28)$$

Cada uno de los niveles de energía en 2.26 definen los diferentes **niveles de Landau**, y ya que la energía no depende de k_y , cada nivel de Landau se encuentra degenerado en relación con k_y . Esto se ilustra en la figura 2.4, las líneas representan los estados posibles para un electrón en la película fina; existe un número finito de estados disponibles dado que k_y se encuentra restringido por el tamaño de la muestra, estos son los valores extremos en la figura y el “espaciado” entre estos valores es el que se dedujo antes en la ecuación 2.28.

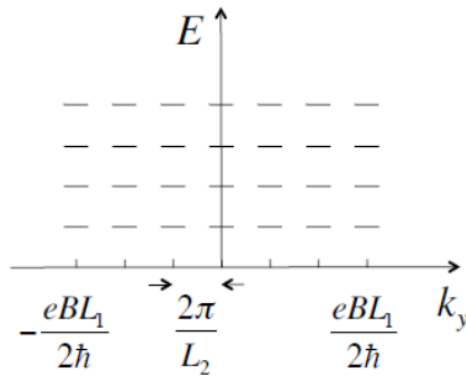


Figura 2.4: Estructura de la energía para una partícula cargada en una película fina, llamado niveles de Landau. Tomado de: Pachos (2012)

2.3.2. Análisis de la conductividad

Se considera entonces la fuerza total sobre el electrón, a partir del modelo de Drude

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m_e^* \vec{v}}{\tau_0} \quad (2.29)$$

El último término hace referencia al rozamiento efectivo de los electrones por colisiones en el material, relacionando la masa efectiva del electrón (m_e^*) y el tiempo medio entre colisiones (τ_0). Cuando se alcanza la condición de equilibrio ($d\vec{v}/dt = 0$)

$$-e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{m_e^* \vec{v}}{\tau_0}$$

y estableciendo los vectores \vec{E} , \vec{B} y \vec{v} como

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0) \quad ; \quad \vec{v} = (v_x, v_y, 0) \quad ; \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = -\frac{e\tau_0}{m_e^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_c\tau_0 \\ \omega_c\tau_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Recordando, la densidad de corriente está relacionada con la velocidad media a la que se desplaza la carga bajo la influencia de un campo eléctrico mediante $\vec{J} = -n_e e \vec{v}$, luego:

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_c\tau_0 \\ \omega_c\tau_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Por definición, $\vec{J} = \hat{\sigma} \vec{E}$, y comparando con la ecuación anterior el tensor de conductividad es

$$\hat{\sigma} = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_c\tau_0 \\ \omega_c\tau_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

cuyas componentes $\hat{\sigma}_{xx}$ y $\hat{\sigma}_{xy}$ son

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \quad ; \quad \hat{\sigma}_{xy} = \frac{n_e e^2 \tau_0}{m_e^*} \frac{\omega_c\tau_0}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \quad (2.33)$$

A partir de la solución del Hamiltoniano con el gauge de Landau, la densidad de electrones en el material (n_e) se puede expresar en múltiplos del número máximo de estados disponibles (N_{k_y}) por unidad de área, que se pueden acomodar en los niveles de Landau, donde (ν) representa la cantidad de niveles de Landau completamente llenos.

$$n_e = \nu \frac{N_{k_y}}{L_x L_y} = \nu \frac{eB}{h} \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.34)$$

Finalmente sustituyendo en la conductividad transversal y longitudinal el resultado de la ecuación (2.34) se obtiene:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \nu \frac{e^3 B \tau_0}{h m_e^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \quad ; \quad \hat{\sigma}_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} \left(1 - \frac{1}{1 + (\omega_c\tau_0)^2} \right) \quad (2.35)$$

En este punto, es necesario hacer una consideración física sobre el modelo, para que el tratamiento a partir del modelo de Drude sea compatible con la evidencia experimental descrita por Von Klitzing. Cuando los electrones se mueven por la red cristalina de la muestra conductora tienen un tiempo medio entre colisiones con los iones e impurezas de la red descrito por τ_0 , estas colisiones generan una dispersión de los electrones, que cambian de estado cuántico en el proceso.

Cuando los finitos estados disponibles en un cierto nivel de Landau se llenan, los electrones pasan a un nivel de energía superior siempre y cuando la energía de Fermi para el sistema sea mayor que la de dicho nivel. Sin embargo, debido a las condiciones de alto campo magnético y temperaturas cercanas al cero absoluto, la brecha entre los niveles de Landau crece (como se mostró en la ecuación 2.27) y adicionalmente los electrones solo pueden adquirir energía por las interacciones electromagnéticas, de este modo, hay un momento donde se produce una brecha entre la energía de Fermi y el siguiente nivel de Landau con estados disponibles, haciendo que sea imposible para los electrones saltar al siguiente nivel de energía. Observe la figura 2.5, allí se ilustra como los electrones están impedidos de ocupar otros estados cuánticos dentro del material.

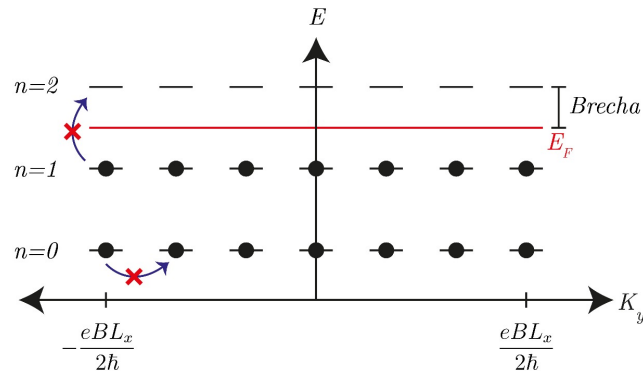


Figura 2.5: Los electrones (puntos negros) debido a las bajas temperaturas y al principio de exclusión de Pauli no tienen más estados cuánticos que ocupar en los niveles de Landau. Elaboración propia.

Al no haber estados disponibles en los niveles llenos y dada la imposibilidad de ir a un nivel de energía superior, los electrones acomodados en los niveles de energía no restringidos apantallan las impurezas y los iones de la red, haciendo que ya no sea posible para otros electrones colisionar con dichos iones e impurezas. De este modo, el tiempo medio entre colisiones crece conforme el nivel de Landau se llena, matemáticamente, se dice que tiende a infinito ($\tau_0 \rightarrow \infty$); con esta consideración, las componentes de $\hat{\sigma}$

se vuelven

$$\hat{\sigma}_{xx} = 0 \quad ; \quad \hat{\sigma}_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} \quad (2.36)$$

Se observa entonces que, la conductividad transversal $\hat{\sigma}_{xy}$ se encuentra cuantizada, mientras que la conductividad longitudinal $\hat{\sigma}_{xx}$ se anula. El modelo para electrones moviéndose en 2 dimensiones, a partir de los niveles de Landau, permite predecir la conductividad cuantizada medida experimentalmente por Von Klitzing, (que se muestra en la figura 2.2), sin embargo, este resultado plantea un par de incógnitas alrededor de este efecto que se abordaran a continuación.

2.4. Geometría y topología del sistema cuántico

En el resultado de la cuantización de la conductividad para un sistema de electrones en 2 dimensiones (ecuación 2.36), las impurezas juegan un papel clave dada la consideración alrededor de los niveles de Landau y el tiempo medio entre colisiones τ_0 . Sin embargo, la conductividad Hall cuantizada presenta dos problemas en su comprensión; el primero es que su valor está determinado por constantes universales, un resultado que deja de lado la cantidad de impurezas y cómo estas están distribuidas en la muestra conductora, ya que sin considerar estos factores explícitamente, $\hat{\sigma}_{xy}$ es predecible a partir del modelo matemático. El segundo es su increíble -e incomprensible- precisión experimental alcanzando el orden de una parte en diez millones (10^{-7}) (Wilczek, 1990), lo que corresponde con una incertidumbre relativa extremadamente baja. Todo esto lleva a pensar que la cuantización de la conductividad es independiente de los detalles específicos del material, por tanto, es natural pensar que a partir de un análisis microscópico de las impurezas no es posible explicar por qué la conductividad toma valores cuantizados tan precisos, sugiriendo que este comportamiento del sistema podría estar influenciado por propiedades globales asociadas al mismo.

Con el fin de abordar las incógnitas planteadas, se hará una extensión del experimento mental de Laughlin (consulte el anexo B) que permitirá obtener una explicación al problema de la conductividad. Se parte entonces, en este experimento, de la configuración del sistema para el efecto Hall cuántico con una lámina 2D, como se muestra en la figura (2.6a). Si se cambian las condiciones de contorno de esta muestra rectangular, deformando la lámina de manera suave hasta plegar 2 de sus extremos, se puede obtener

un cilindro —horizontal plegando en dirección x o vertical plegando en dirección y — (observe la figura 2.6). Bajo este cambio geométrico y siempre que no se altere el gap de energía entre los diferentes niveles de Landau, propiedades del sistema como la conductividad no se espera que cambien (Pachos, 2012).

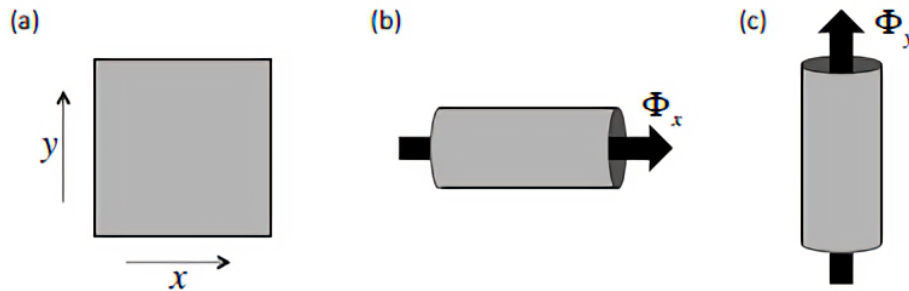


Figura 2.6: Configuración de una lamina 2D usada en el experimento del efecto Hall cuántico (a), Deformando suavemente la lamina en dirección x se forma un cilindro (b), También se puede deforma la lamina pero en dirección y hasta obtener otro cilindro (c). Tomado de: Pachos (2012)

Dada la definición del campo magnético en términos del potencial vectorial, se puede considerar un potencial vectorial cuyo campo magnético asociado esté confinado al interior de cada cilindro de la figura 2.6 y sea este campo nulo en la superficie de los mismos. Al atravesar la sección circular de cada cilindro entonces se tiene un flujo magnético externo al sistema (Φ) a través de los cilindros —dependiendo de la configuración del cilindro se denotan como Φ_x, Φ_y respectivamente—. Cambios en este flujo corresponden a una transformación gauge debido a que se elige una forma para el potencial vectorial (\vec{A}) que permita describir un campo magnético conveniente para el sistema de cilindros, por esta razón se conoce a estos flujos como “**flujos ficticios**”. La variación del flujo ficticio induce un campo eléctrico en la superficie del cilindro dada la ley de inducción de Faraday. Si adicionalmente consideramos que existe un segundo campo magnético que sea normal a la superficie del cilindro, se tendría entonces que el efecto Hall cuántico se produce en la superficie del cilindro (observe la figura 2.7)] —en adelante nos referiremos a la superficie del cilindro como **cinta de Hall**—.

Las variaciones del flujo ficticio se realizan en múltiplos del cuanto de flujo magnético, ya que esto garantiza que la transformación gauge no altere el sistema (consulte el anexo A)

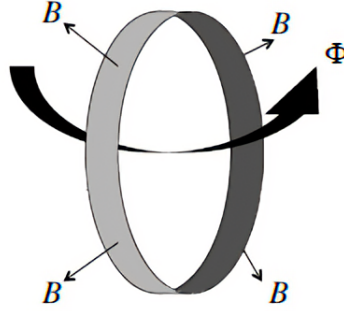


Figura 2.7: Representación visual de la cinta Hall plegada con un campo magnético normal a su superficie. Adaptada de: Pachos (2012)

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \quad (2.37)$$

En esta situación —con el cambio geométrico— se produce una transferencia de carga de un extremo al otro de la cinta tal que

$$Q = \sigma_{xy} \frac{h}{e} \rightarrow Q = \nu e \quad (2.38)$$

La ecuación anterior muestra que la conductividad está relacionada con el transporte promedio de carga en la cinta, en múltiplos de la carga del electrón⁵. Para analizar el comportamiento de la conductividad, es necesario evaluar el valor esperado del operador corriente $\hat{\mathbf{J}}$, debido a que tanto la corriente como el campo eléctrico inducido están relacionados a partir de la conductividad, y por tanto esta corriente dependería de las variaciones en los parámetros del sistema -los flujos ficticios que inducen el campo eléctrico-.

El Hamiltoniano que describe el sistema se encuentra parametrizado respecto a estos flujos tal que

$$\hat{H} = \hat{H}(\Phi_x, \Phi_y) \quad (2.39)$$

Físicamente no se podría pensar en los flujos ficticios actuando en simultaneo sobre el sistema, sin embargo, desde el punto de vista matemático si se puede hacer que el Hamiltoniano este parametrizado respecto a ambos flujos simultáneamente, ya que ambos flujos si forman parte del espacio de parámetros, representando las configuraciones posibles del sistema, y al final ambos flujos hacen referencia al mismo fenómeno físico.

⁵Para detalles adicionales sobre la configuración del sistema y las ecuaciones presentadas consulte el anexo B.

Este Hamiltoniano es periódico respecto a ambos flujos (Φ_x, Φ_y) con un periodo igual al cuanto de flujo magnético Φ_0 , ya que las variaciones del flujo en múltiplos de esta cantidad dejan el sistema -por tanto \hat{H} - en su estado inicial, salvo por una transformación gauge (una fase). Matemáticamente, hacer que el Hamiltoniano tenga condiciones periódicas respecto a ambos flujos significa en si mismo que el espacio sobre el que está definido \hat{H} tenga dicha periodicidad, condición que brinda información sobre la geometría de este espacio matemático. En un principio podría pensarse el espacio de parámetros como un plano semejante a los pares coordenados (x, y) , como se observa en la figura 2.8a, siendo un eje el flujo Φ_x y el otro Φ_y , las condiciones periódicas implican que si se varía el flujo en una cantidad específica (Φ_0) este vuelve al punto en el que empezó, de manera intuitiva si se pudiera caminar a lo largo de la dirección de cada eje, quiere decir que avanzando en línea recta se llegaría en algún momento al punto de partida. Este comportamiento sugiere entonces que el espacio de parámetros no es un espacio plano, sino un espacio curvo, y por la periodicidad introducida en el Hamiltoniano ($\Sigma = [0, \Phi_0] \times [0, \Phi_0]$)⁶, la geometría del espacio de parámetros correspondería con la de un toroide, como se observa en la figura 2.8b.

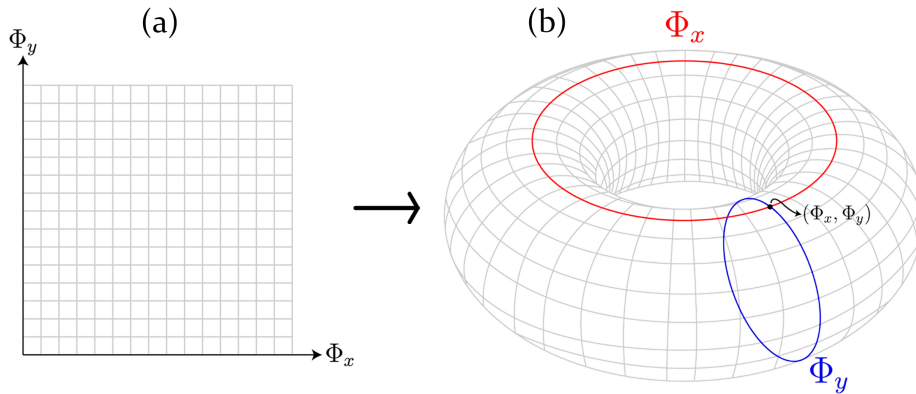


Figura 2.8: Representación visual del espacio de flujos, pasando de la idea de espacio plano (a), a un espacio curvo (b). Elaboración Propia

Como se dijo anteriormente, variar estos flujos ficticios induce corrientes en la cinta de Hall, luego los operadores de corriente se definen como

$$\hat{\mathbf{J}}_x = c \frac{\partial \hat{H}}{\partial \Phi_x} \quad ; \quad \hat{\mathbf{J}}_y = c \frac{\partial \hat{H}}{\partial \Phi_y} \quad (2.40)$$

⁶La variación periódica de cada parámetro en el intervalo $[0, \Phi_0]$ es topológicamente equivalente a una circunferencia S^1 ; por tanto, el espacio ($\Sigma = [0, \Phi_0] \times [0, \Phi_0]$) se identifica con el toroide bidimensional $T^2 = S^1 \times S^1$.

El sistema debe partir de un estado fundamental $|\psi(\Phi_x, \Phi_y)\rangle$ que tiene una energía asociada E_0 , la cual no cambia al variar los parámetros⁷. Considerar el aumento del valor del flujo Φ_x en una cantidad Φ_0 , y del flujo Φ_y en Φ_0 , significa que el sistema va a recorrer lentamente el espacio de parámetros (podría denominarse el **espacio de flujos**). Por la invarianza gauge, el estado final de los electrones deber ser el mismo que el inicial, salvo por una fase, y dada la geometría curva del espacio de parámetros esta fase es de carácter geométrico.

$$|\psi(\Phi_x + \Phi_0, \Phi_y + \Phi_0)\rangle = e^{i\gamma} |\psi(\Phi_x, \Phi_y)\rangle \quad (2.41)$$

Para determinar la fase geométrica se realiza un tratamiento matemático utilizando la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, solo para la variación respecto de Φ_x

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = i\hbar\partial_t \Phi_x |\partial_{\Phi_x} \psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (2.42)$$

Multiplicando por $\langle \partial_{\Phi_y} \psi |$

$$i\hbar \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_t \Phi_x |\partial_{\Phi_x} \psi\rangle = \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} |\psi\rangle \quad (2.43)$$

Calculando el complejo conjugado de la ecuación anterior y sumándola con ella misma se obtiene⁸

$$i\hbar\partial_t \Phi_x [\langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_{\Phi_x} \psi\rangle - \langle \partial_{\Phi_x} \psi | \partial_{\Phi_y} \psi\rangle] = \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} |\psi\rangle + \langle \psi | \hat{H} | \partial_{\Phi_y} \psi\rangle$$

$$-\hbar\partial_t \Phi_x 2 \text{Im}(\langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_{\Phi_x} \psi\rangle) = \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} |\psi\rangle + \langle \psi | \hat{H} | \partial_{\Phi_y} \psi\rangle \quad (2.44)$$

Es importante recordar que el operador Hamiltoniano debe ser hermítico ($\hat{H} = \hat{H}^\dagger$), ya que cuando se cumple esta propiedad matemáticamente se obtienen valores de energía reales, de no ser así, los valores propios de energía del sistema podrían ser números complejos, lo que no tendría interpretación física y por tanto no serían observables físicos. Teniendo en cuenta esto aplicamos

$$\partial_{\Phi_y} \langle \psi | \hat{H} |\psi\rangle = \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} |\psi\rangle + \langle \psi | \partial_{\Phi_y} \hat{H} |\psi\rangle + \langle \psi | \hat{H} | \partial_{\Phi_y} \psi\rangle \quad (2.45)$$

⁷Esto se debe a que se consideran movimientos adiabáticos sobre la cinta, es decir, movimientos en los que se mantenga el nivel de energía de los electrones en todo momento.

⁸Recuerde la propiedad que para todo número complejo z se cumple que $z - z^* = 2i\text{Im}(z)$ siendo "Im" la notación que indica la parte imaginaria del número complejo.

Como se mencionó anteriormente, debido al movimiento adiabático la energía no cambia al variar los parámetros del sistema, luego la derivada del valor esperado de la energía debe ser igual a cero ($\partial_{\Phi_y} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = 0$), ya que la energía del estado inicial no depende de los flujos. Sustituyendo y reorganizando se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \partial_{\Phi_y} \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \partial_{\Phi_y} \psi \rangle \\ &- \langle \psi | \partial_{\Phi_y} \hat{H} | \psi \rangle = \langle \partial_{\Phi_y} \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \partial_{\Phi_y} \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

Relacionando la ecuación 2.46 con la ecuación 2.44 se obtiene

$$\hbar \partial_t \Phi_x 2 \text{Im}(\langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_{\Phi_x} \psi \rangle) = \langle \psi | \partial_{\Phi_y} \hat{H} | \psi \rangle \quad (2.47)$$

Explícitamente se tiene una expresión para el valor esperado del operador corriente $\hat{\mathbf{J}}_y$

$$\langle \psi | \hat{\mathbf{J}}_y | \psi \rangle = c \hbar \partial_t \Phi_x 2 \text{Im}(\langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_{\Phi_x} \psi \rangle) \quad (2.48)$$

Nótese que en la ecuación anterior se tiene una derivada temporal del flujo magnético, esto implica que esta expresión está relacionada con la FEM que se induce en la cinta de Hall, por lo que se puede relacionar con la conductividad transversal $\hat{\sigma}_{xy}$ que se busca estudiar (en el anexo B se presenta de forma explícita la deducción de la relación entre densidad de corriente y la variación del flujo magnético: $J(t) = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{c} \frac{d\Phi}{dt}$), luego

$$\hat{\sigma}_{xy}(\Phi_x, \Phi_y) = c^2 \hbar 2 \text{Im}(\langle \partial_{\Phi_y} \psi | \partial_{\Phi_x} \psi \rangle) \quad (2.49)$$

Como el estado fundamental está recorriendo el espacio de parámetros, que es un espacio curvo, se requiere de un elemento matemático que permita relacionar cómo varia la fase del estado fundamental en los diferentes puntos de dicho espacio, por tanto, se introduce la conexión de Berry, que se expresa como un campo vectorial que actúa a modo de un “potencial vectorial magnético” efectivo en el espacio de parámetros, esto a partir de las variaciones del estado fundamental del sistema respecto a cada flujo ficticio (en el anexo C se presenta la relación entre la conexión de Berry y la fase geométrica de forma intuitiva.):

$$\mathcal{A}_{\Phi_x} = i \langle \psi | \partial_{\Phi_x} \psi \rangle \quad ; \quad \mathcal{A}_{\Phi_y} = i \langle \psi | \partial_{\Phi_y} \psi \rangle \quad (2.50)$$

Luego, mediante la conexión se puede calcular el campo de Berry para el caso dos dimensional (un espacio de dos parámetros). Este campo cuantifica la curvatura del espacio de parámetros

$$\mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} = \partial_{\Phi_x}\mathcal{A}_{\Phi_y} - \partial_{\Phi_y}\mathcal{A}_{\Phi_x} \quad (2.51)$$

Calculando el campo se tiene

$$\begin{aligned} \partial_{\Phi_x} (i\langle\psi|\partial_{\Phi_y}\psi\rangle) - \partial_{\Phi_y} (i\langle\psi|\partial_{\Phi_x}\psi\rangle) &= i [\langle\partial_{\Phi_x}\psi|\partial_{\Phi_y}\psi\rangle - \langle\partial_{\Phi_y}\psi|\partial_{\Phi_x}\psi\rangle] \\ \mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} &= i [2i \operatorname{Im}(\langle\partial_{\Phi_x}\psi|\partial_{\Phi_y}\psi\rangle)] \\ \mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} &= -2\operatorname{Im}(\langle\partial_{\Phi_x}\psi|\partial_{\Phi_y}\psi\rangle) \end{aligned} \quad (2.52)$$

sustituyendo 2.52 en 2.49 se obtiene

$$\sigma_{xy}(\Phi_x, \Phi_y) = c^2\hbar\mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} \quad (2.53)$$

De esta manera se observa que la conductividad en función de los flujos ficticios está relacionada con la curvatura del espacio de parámetros. Para obtener la conductividad total del sistema, se integra la ecuación anterior respecto a los flujos.

$$\int_0^{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} \sigma_{xy}(\Phi_x, \Phi_y) d\Phi_x d\Phi_y = \int_0^{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} c^2\hbar\mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} d\Phi_x d\Phi_y$$

Del lado izquierdo se espera recuperar la expresión de la conductividad de Von Klitzing, tal que

$$\nu \frac{e^2}{h} = \frac{c^2\hbar}{\Phi_0^2} \int_0^{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} \mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} d\Phi_x d\Phi_y$$

Expandiendo y operando se llega a

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} \mathcal{F}_{\Phi_x\Phi_y} d\Phi_x d\Phi_y \quad (2.54)$$

La ecuación 2.54 representa lo que en topología se conoce como el **número de Chern**, un invariante topológico que cuantifica el número de “vueltas” que dan sobre sí mismas las estructuras matemáticas definidas sobre una variedad al ser transportadas por ese espacio. En este contexto, cuantifica la cantidad de “vueltas” que da sobre sí misma la fase del estado fundamental $|\psi(\Phi_x, \Phi_y)\rangle$ al recorrer el espacio de parámetros. Este espacio es el toroide de flujos mostrado en la Figura 2.8. Formalmente se dice que el número de Chern cuantifica entonces el **enrollamiento total** de la fase del estado cuántico, y esta cantidad depende de la geometría global del espacio de parámetros, específicamente de la curvatura de Berry y, por ende, de cómo se definen las estructuras matemáticas en dicho espacio mediante la conexión de Berry.

Del cálculo anterior, la ecuación 2.54 establece la relación entre el factor ν de llenado de los niveles de Landau y la geometría del espacio de parámetros. En esencia, cuando un nivel de Landau se encuentra lleno, el número de Chern toma el valor 1, representando que el estado del sistema dio una vuelta sobre sí mismo. Si hay dos niveles de Landau llenos ($\nu = 2$) el número de Chern toma el valor de 2. De este modo cada nivel de Landau lleno corresponde con una vuelta de la fase del estado cuántico al espacio de parámetros y equivale a +1 en el número de Chern. Luego ν solo puede tomar números enteros (\mathbb{Z}^+) ya que el sistema vuelve a su estado inicial después de una vuelta completa al espacio de parámetros; no hay forma de dar solo media vuelta y volver al estado inicial. Dicha característica encaja perfectamente con el efecto Hall cuántico, ya que las mesetas de la conductividad/resistencia solo aparecen en ocupaciones enteras de los niveles de Landau, mostrando la naturaleza topológica del llenado de los niveles de energía que es consecuencia de las condiciones de periodicidad del sistema.

Esto explica por qué la conductividad/resistencia Hall aparece en “escalones” perfectamente definidos y no varía de forma suave con los parámetros del sistema (recuerde la figura 2.2), principalmente debido a que se tendría que alterar la estructura geométrica del espacio de parámetros en su totalidad, por ejemplo: rompiendo con la periodicidad de los parámetros (Φ_x, Φ_y) para poder alterar el comportamiento esperado del efecto Hall cuántico.

Por tanto, la topología permite entender por qué la conductividad cuantizada ($\hat{\sigma}_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$) no depende de los detalles microscópicos del material, sino que está ligada a la estructura global de los niveles de energía del sistema, de esta manera las impurezas en la red cristalina no afectan el resultado; además, la robustez del factor de llenado al ser un invariante topológico explica por qué el valor experimental presenta una incertidumbre relativa extremadamente baja, brindándole al sistema una “protección topológica” frente a perturbaciones locales. Se puede considerar entonces que la cuantización de la conductividad Hall es una manifestación macroscópica de las propiedades topológicas del sistema y no una casualidad experimental.

2.5. Excitaciones de carga fraccionaria y anyones

El caso del Efecto Hall cuántico entero (EHCE) supuso un descubrimiento impresionante que le concedió el premio Nobel de Física en 1985 a Klaus Von Klitzing, y a partir de su abordaje se encuentra un caso de

“matrimonio perfecto” entre teoría y experimento. El mayor fruto destacable de este fenómeno es su aplicación en el campo de la metrología, ya que a partir de la constante de Von Klitzing (ecuación 2.55) se tiene una definición extremadamente precisa de la resistencia, además esta misma constante es utilizada para calcular con precisión la constante de estructura fina electromagnética (Klitzing y cols., 1980).

$$R_K = \frac{h}{e^2} \approx 25812,807\Omega \quad (2.55)$$

Aunque mediante la topología de bandas (de los niveles de energía de Landau) era posible explicar el fenómeno del EHCE, dos años después del descubrimiento de Von Klitzing, en 1982, los físicos Horst Stormer y Daniel Tsui estaban interesados en estudiar el magnetotransporte de electrones en materiales bidimensionales, principalmente motivados a investigar los límites del efecto descubierto por Von Klitzing, y si las interacciones entre electrones influirían en el resultado obtenido. Para poder observar los efectos de la interacción coulombiana entre electrones en sus experimentos, reemplazaron la interfaz de $Si - SiO_2$, con la que Von Klitzing había trabajado, ya que tenía muchos defectos internos y las colisiones de los electrones con los iones e impurezas de la red apantallaban la influencia de las interacciones electron-electron. Optaron por láminas de arseniuro de galio ($GaAs$) y una aleación de este compuesto con aluminio ($AlGaAs$), principalmente porque con la ayuda del físico Arthur Gossard (experto en el cultivo de semiconductores de alta pureza) consiguieron muestras con una alta movilidad electrónica; condición que favorecía el estudio que Stormer y Tsui pretendían hacer (Tsui y cols., 1982).

Stormer y Tsui realizaron su experimento en un límite cuántico extremo, buscando someter la muestra de $GaAs$ a condiciones mucho más intensas que Von Klitzing, incluso llevando sus equipos a lo que para la época era lo máximo disponible. Consiguieron una intensidad de campo magnético de hasta $15 T$ y lograron enfriar la muestra hasta un mínimo de $0,48 K$. En sus resultados compararon el comportamiento de la resistencia longitudinal ($\hat{\rho}_{xx}$), con la resistencia transversal ($\hat{\rho}_{xy}$) para diferentes temperaturas, aumentando progresivamente la intensidad del campo magnético. Allí se encontraron que para temperaturas inferiores a $1 K$, ($\hat{\rho}_{xy}$) presentaba una meseta cuando el factor de llenado de los niveles de energía era $\nu = 1/3$ (observe la parte superior de la figura 2.9), adicionalmente, donde se produjo la meseta se aprecia una caída de ($\hat{\rho}_{xx}$) que se acentúa conforme disminuye la temperatura (observe la parte inferior de la figura 2.9).

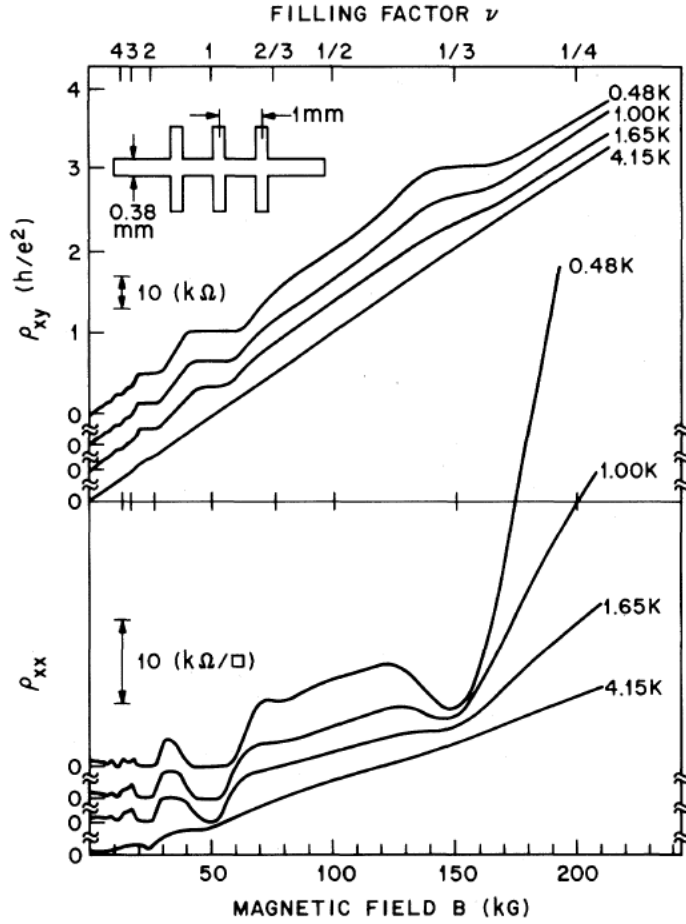


Figura 2.9: $\hat{\rho}_{xx}$ y $\hat{\rho}_{xy}$ en función del campo magnético B medido para diferentes temperaturas de una muestra de $GaAs$, comparando en la parte superior con el factor de llenado de los niveles de Landau. Tomado de: Tsui y cols. (1982).

La resistencia Hall cuantizada se aproximaba bastante a $3h/e^2$ a medida que disminuye la temperatura para el caso de $\nu = 1/3$, pero lejos de la meseta la resistencia transversal ($\hat{\rho}_{xy}$) se mantenía esencialmente independiente de la temperatura. El comportamiento anteriormente descrito se asemeja bastante a lo que se esperaría del efecto Hall cuántico entero.

Este descubrimiento planteaba una incógnita. Anteriormente se mostró que el formalismo de la topología de bandas a través del número de Chern (2.54) solo puede tomar valores enteros \mathbb{Z}^+ , esto significa en esencia (bajo el argumento de Laughlin) que la conductividad/resistencia solo debería cuantizarse cuando los niveles de Landau se encuentran completamente llenos, y no es posible para los electrones “saltar” a un nivel de energía más alto. Sin embargo, en condiciones extremas, este comportamiento aparece aun cuando el nivel más bajo de energía de Landau esta parcialmente lleno, sugiriendo (a la luz de las observaciones de Stormer y Tsui) que en $\nu = 1/3$ existe una brecha en la energía de Fermi (E_F) cuando el nivel de Landau

esta parcialmente lleno, del mismo modo que ocurre en el caso entero, y asumiendo que el argumento de Laughlin sigue siendo válido, eso llevaría a pensar en cuasipartículas de carga fraccionaria $e/3$ (Tsui y cols., 1982) (recuerde el anexo B donde se demuestra que existe una transferencia de carga en la cinta Hall proporcional al factor ν).

Stormer y Tsui mencionan en su artículo los siguiente:

El hecho de que el fenómeno siempre ocurre en $\nu = 1/3$ y que es más llamativo en muestras con mayor movilidad electrónica sugiere la formación de un nuevo estado electrónico como un sólido de Wigner, con simetría de cristal triangular. Y el comportamiento de $\hat{\rho}_{xx} - \hat{\rho}_{xy}$ puede atribuirse al transporte de un estado fundamental colectivo.

(Tsui y cols., 1982)

Estas observaciones marcaron el descubrimiento del **Efecto Hall cuántico fraccionario** (EHCF). La ecuación ($\hat{\sigma}_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$) para la cuantización de la conductividad/resistencia seguía siendo válida, pero con valores $\nu = 1/3$ como se observa en la figura 2.9. Posteriormente se encontraron otras mesetas con valores $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ (Uzcategui y cols., 2020). Aunque Stormer y Tsui no consiguieron explicar de manera contundente sus observaciones, dejaron la incógnita sobre la razón detrás de los factores de llenado fraccionarios.

Recapitulando, el nuevo comportamiento del sistema entonces debería estar mediado por condiciones que no se tuvieron en cuenta para el modelo del caso entero. En primer lugar, para este caso fraccionario deberían ser importantes las interacciones electrón-electrón que puedan ocurrir en el interior del material, favorecidas por la alta intensidad del campo magnético al que son sometidos (observe la comparación del Cuadro 2.1), luego dado que el llenado de los niveles de Landau (ν) es fraccionario, este fenómeno ocurrirá entonces cuando se tiene una mayor cantidad de estados cuánticos disponibles que electrones en el material, en el nivel de menor energía; condición que haría posible que el menor nivel de energía se encuentre parcialmente lleno.

Caso ν entero		Caso ν fraccionario
$B = 5 \text{ T}$	\longrightarrow	$B = 15 \text{ T}$
$T = 1,65 \text{ K}$	\longrightarrow	$T = 0,48 \text{ K}$

Cuadro 2.1: Comparativa de las condiciones experimentales para el caso entero y fraccionario. Elaboración propia.

Para poder describir la dinámica de este sistema sería necesario entonces hacer uso del Hamiltoniano de interacción, este Hamiltoniano se construye a partir de la suma de dos contribuciones, el Hamiltoniano para el caso de partículas individuales (como el trabajado en la sección 2.3.1) y ahora otro Hamiltoniano que describa la interacción de tipo eléctrico que ocurra entre los electrones.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (2.56)$$

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}}_i - e\mathbf{A}_i)^2 + V(\vec{r}_j)}_{\text{Dinámica de la partícula}} + \underbrace{\sum_{j < k} \frac{e^2}{|r_j - r_k|}}_{\text{Interacción Coulombiana}} \quad (2.57)$$

En la ecuación anterior $V(\vec{r}_j)$ representa el potencial generado por los iones de la red. La solución exacta de los niveles de energía del Hamiltoniano 2.57 no era posible obtenerla de forma analítica dada su complejidad, y solo se contaba con soluciones numéricas para un pequeño número de electrones.

El siguiente avance crucial en la teoría del EHCF fue la función de onda variacional propuesta por Robert Laughlin en 1983. Laughlin partió de la solución del Hamiltoniano para un solo electrón en un campo magnético haciendo uso del gauge simétrico ($\vec{A} = \frac{1}{2}B[x\hat{y} - y\hat{x}]$); luego la función de onda para un electrón en el nivel más bajo de energía de Landau en esta solución es:

$$|m\rangle = (2^{m+1}\pi m!)^{-1/2} z^m \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right) \quad (2.58)$$

donde $z = x + iy$, es la posición de la partícula usando coordenadas complejas y m el valor propio del momento angular del electrón en unidades de Planck. Luego $|m\rangle$ es un estado propio del operador de momento angular (\hat{L}) y dada la elección del gauge simétrico (cuya simetría es rotacional), el Hamiltoniano se vuelve invariante bajo rotaciones, haciendo que en este caso $|m\rangle$ también sea un estado propio del Hamiltoniano ($[\hat{H}, \hat{L}] = 0$). La invarianza bajo rotaciones implica que, el momento angular se conserva en el sistema y por tanto es una buena cantidad cuántica para caracterizar el estado de las partículas. Luego, Laughlin propone una función compuesta de estados para los electrones que cumpliera con esta condición, la cual pudiera describir una órbita con momento angular m alrededor del centro de masa de 2 electrones (Laughlin, 1983):

$$\psi = (z_1 - z_2)^m (z_1 + z_2)^n \exp \left(-\frac{1}{4} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right)$$

Del patrón de estas funciones compuestas, Laughlin propone que la función de onda para el caso de N cuerpos se puede escribir como un producto de las funciones de Jastrow

$$\psi = \underbrace{\prod_{i < j}^N f(z_i - z_j)}_{\text{funciones de Jastrow}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right) \quad (2.59)$$

Sin embargo, para obtener la forma general para N cuerpos se requiere realizar varias consideraciones sobre 2.59, de manera que pueda describir el fenómeno sin la necesidad de solucionar directamente el Hamiltoniano para muchos cuerpos:

1. Se requiere que $f(z)$ sea una función polinomial en z , esto debido a que la función de onda para un solo electrón en el nivel de energía más bajo de Landau 2.58 depende de potencias z^m .
2. La función de onda debe ser antisimétrica, ya que se debe cumplir con las condiciones de la estadística fermiónica y el principio de exclusión de Pauli, por tanto, al intercambiar dos partículas, la función de onda debe cambiar de signo.

$$\psi(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_N) = -\psi(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_N) \quad (2.60)$$

3. Para garantizar que la función de onda describe estados en solo el nivel de energía más bajo de Landau se requiere que $\prod_{j < k} f(z_j - z_k)$ sea un polinomio homogéneo de grado M , siendo M el momento angular total del sistema. Esto quiere decir que, todos los polinomios tengan el mismo grado, y el producto de dichos polinomios debe dar cuenta del momento angular total del sistema (porque para el caso de un solo electrón el momento angular está relacionado como una potencia de z).

Con todos estos ingredientes juntos se obtiene la **función de onda variacional de Laughlin** para el efecto Hall cuántico fraccionario

$$\psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right) \quad (2.61)$$

Esta función describe un estado electrónico altamente correlacionado, esto se debe al factor $(z_i - z_j)^m$ en la forma de estas funciones, ya que en primer lugar: se tienen en cuenta las posiciones relativas entre todos los electrones del material. En segundo lugar, ese mismo factor garantiza una repulsión fuerte entre electrones ya que cuando $z_i \rightarrow z_j$ entonces $\psi \rightarrow 0$, por lo que la probabilidad de encontrar dos electrones cerca se reduce drásticamente. Laughlin conocía de sobra las apreciaciones hechas por Stormer y Tsui sobre la formación de un estado colectivo y un posible sólido de Wigner, por lo que su elección para la forma de las funciones de Jastrow $(z_i - z_j)^m$ garantiza que los electrones tiendan a alejarse entre sí, y cuanto más grande sea m más fuertemente se repelen.

Esta característica minimiza la energía de la interacción coulombiana y favorece que los electrones se organicen como si de una red cristalina se tratara. Sin embargo, hay una apreciación importante que hacer. Un sólido de Wigner es un estado en el que se forma una estructura cristalina en donde los electrones se encuentran completamente localizados, en posiciones fijas, por el contrario, en el caso del EHCF, en el estado colectivo que describe la función de onda de Laughlin, los electrones no se encuentran en posiciones fijas, sus posiciones están indeterminadas, luego, este estado fundamental de baja energía se comporta cualitativamente como un fluido cuántico incompresible (Wilczek, 1990).

Cuando se habla de “comprimir” o “expandir” en este contexto, se refiere a cambiar la densidad de electrones que se tiene en la muestra conductora. Si se aumenta la densidad (se agregan electrones), hay que juntar todos los electrones para que puedan “convivir” en el tamaño de la muestra, esto lleva al sistema a un estado de mayor energía (ya que aumenta la energía de la repulsión eléctrica). Si se disminuye la densidad (se quitan electrones), los electrones tienen más espacio entre ellos y apenas interactuarían, lo que rompería la esencia del fenómeno que se está describiendo. Por esta razón, el estado fundamental es incompresible; no responde de manera suave a los cambios de densidad, ya que está ligado a una ocupación concreta (discreta) de los niveles de Landau $\nu = 1/m$ con $m = 3$ en el caso observado por Stormer y Tsui (Laughlin, 1983).

Para estudiar cómo responde el sistema a una perturbación aplicada sobre el estado fundamental, Laughlin propone (nuevamente como en el caso del EHCE) una especie de experimento mental. El campo magnético total que atraviesa la muestra conductora debe ser un múltiplo del cuanto de flujo magnético Φ_0 , de cierta manera, el hecho de que se produzca el estado colectivo del fluido de Laughlin es gracias a la respuesta de los

electrones en un material bidimensional al flujo magnético que atraviesa la muestra conductora, luego, una forma muy ingeniosa de introducir una perturbación en el estado fundamental 2.61 (y de hecho la perturbación más pequeña posible) es introducir un cuanto de flujo magnético en una región localizada del fluido z_0 . Laughlin dice en su artículo “Genero las excitaciones elementales de ψ_m perforando el fluido en z_0 con un solenoide infinitamente delgado y pasando a través de él un cuanto de flujo Φ_0 adiabáticamente” (Laughlin, 1983). La forma en la que esta perturbación transforma el estado fundamental es la siguiente

$$\psi_m^{+z_0} = \left[\prod_i (z_i - z_0) \right] \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right) \quad (2.62)$$

El factor $(z_i - z_0)$ introduce un “hueco” en el fluido ya que la función de onda se anula cuando un electrón se acerca a z_0 . Del mismo modo que para el caso entero, insertar un cuanto de flujo magnético a través del hueco formado en z_0 , induce un campo eléctrico circular (observe la figura 2.10) que genera una corriente en la dirección radial al punto donde se inserta el flujo.

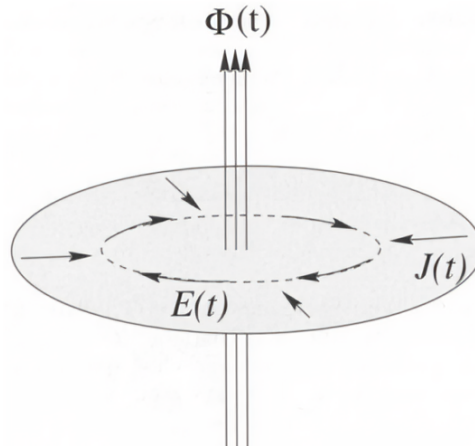


Figura 2.10: Inserción de un cuanto de flujo magnético como perturbación del estado fundamental de Laughlin, que produce un campo eléctrico circular y una corriente en dirección radial. Tomado de: Girvin (2002)

Si se calcula la integral de la densidad de corriente mientras el flujo crece se tiene que

$$Q = \int J(t) dt = \hat{\sigma}_{xy} \Phi_0 \quad (2.63)$$

Y como mencionaron Stormer y Tsui, la ecuación ($\hat{\sigma}_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$) sigue siendo válida para la conductividad solo que ahora ν toma valores fraccionarios. Luego, sustituyendo en la ecuación anterior

$$Q = \hat{\sigma}_{xy} \Phi_0 = \nu \cdot \frac{e^2}{h} \cdot \frac{h}{e}$$

$$Q = \nu \cdot e$$

La carga que se desplaza debido a la perturbación del estado fundamental de la función de onda de Laughlin es

$$e^* = \frac{e}{m}$$

Por tanto, la carga que se desplaza para el caso observado por Stormer y Tsui es $e/3$.

En resumen, el estado fundamental de Laughlin no puede responder de manera suave a cualquier intento de alterar su densidad, ya que por las condiciones en las que este estado colectivo aparece, hace que esté ligado a una ocupación concreta del nivel de energía más bajo de Landau y a un factor de llenado específico ($\nu = 1/m$). Al introducir una perturbación en el líquido, mediante una variación en el flujo magnético, el sistema se reorganiza colectivamente, y esta reorganización da lugar a una excitación que se manifiesta como una entidad con carga fraccionaria, $e^* = e/m$.

Es importante resaltar que la carga fraccionaria no implica que el electrón “se rompa” o “se divida”, más bien, es un **fenómeno emergente** del comportamiento colectivo de un gran número de electrones fuertemente interactuantes en un campo magnético extremo. Esta **cuasipartícula** de carga fraccionaria es una entidad que surge producto de la perturbación de un fluido cuántico altamente correlacionado, y actúa como el portador de carga del sistema.

Horts Stormer, Daniel Tsui y Robert Laughlin recibieron el premio Nobel de Física en 1998, por el descubrimiento y explicación de este “nuevo estado de la materia” con excitaciones de carga fraccionaria.

El descubrimiento de las excitaciones de carga fraccionaria despertó el interés por estudiar este nuevo “tipo de materia” cuántica. Al estudiar las propiedades fundamentales de estas cuasipartículas, se reveló que bajo el intercambio de posiciones su comportamiento se aleja de lo que se esperaría de bosones (partículas que pueden ocupar el mismo estado cuántico y cuya función de onda es simétrica al intercambio) o de fermiones (partículas que obedecen el principio de exclusión de Pauli y cuya función de onda es

antisimétrica al intercambio). A diferencia de la fase de 0 o π radianes (un signo de $+1$ o -1) que se adquiere al intercambiar bosones o fermiones respectivamente, estas excitaciones fraccionarias en dos dimensiones pueden adquirir una fase de cierto modo intermedia (Arovas y cols., 1984).

Tras el hallazgo del estado $1/3$, experimentos posteriores revelaron la existencia de una amplia variedad de otros estados fraccionarios en el efecto Hall cuántico (algunos ya predichos por Stormer y Tsui), asociados a distintos factores de llenado $\nu = p/q$ (donde $p, q \in \mathbb{Z}$). Cada uno de estos estados da lugar a sus propias excitaciones con cargas fraccionarias y propiedades estadísticas aún más diversas, expandiendo el panorama de los posibles portadores de carga y sus interacciones.

Fue el físico teórico Frank Wilczek quien, reconociendo la naturaleza fundamentalmente nueva de estas excitaciones, acuñó el término “anyones” en su artículo de 1982 titulado “*Quantum mechanics of fractional spin particles*”. Esta denominación, derivada de la palabra “any” (del inglés: *cualquier*), refleja -según Wilczek- precisamente su característica distintiva: la capacidad de manifestar cualquier estadística de intercambio intermedia entre la estadística bosónica y fermiónica, un fenómeno posible únicamente en sistemas bidimensionales, bajo las condiciones experimentales descritas. Por tanto, se definen los anyones de la siguiente manera:

Definición 2.1 *Se entiende por **anyon** a toda “partícula” que, al ser intercambiada con otra idéntica en un sistema bidimensional, da lugar a una transformación del estado cuántico que no se reduce simplemente a una simetría bosónica o fermiónica, sino que puede adquirir una fase arbitraria (Wilczek, 1982).*

Con base en todo lo anterior, el análisis progresivo del efecto Hall muestra cómo la topología se vuelve una herramienta explicativa poderosa que cobra cada vez mayor relevancia a medida que aumenta la complejidad del fenómeno. Al mejorar las condiciones experimentales y la tecnología se dio paso al efecto Hall cuántico entero, destacando principalmente su asombrosa precisión experimental que solo puede comprenderse en su totalidad al identificar la cuantización de la conductividad con un invariante topológico: el número de Chern. Posteriormente, la llegada del efecto Hall cuántico fraccionario marcó un punto en el cual era necesario reconocer y abordar el sistema físico como un todo. Aquí, la topología permite describir el nuevo estado de la materia cuántica, modelado por Laughlin, así como sus excitaciones emergentes: cuasipartículas de carga fraccionaria.

Por lo tanto, este recorrido revela que la descripción de los fenómenos físicos (en este caso particular, del estado sólido y la materia condensada) mediante la topología ha supuesto un éxito a nivel teórico para aumentar la comprensión sobre los fenómenos, colocando a la topología no solo como un formalismo matemático potente y útil para los modelos físicos, sino que incluso forma parte de la estructura base de los fenómenos físicos cuanto más se profundiza en física fundamental.

Hasta ahora se hizo una revisión de la aparición de cuasipartículas (anyones), para entender su naturaleza como fenómeno emergente. Sin embargo, para abordar el potencial que tienen los anyones de promover una computación cuántica más robusta, es necesario hacer una revisión de las propiedades generales de los **modelos anyónicos**, que, desde un modelo concreto, permita plantear la base de la computación cuántica, un qubit.

Capítulo 3

Potencial computacional de los Anyones

Este capítulo explora los fundamentos teóricos del qubit topológico, basado en las propiedades del modelo de anyones Ising. Se introducirán sus reglas de fusión y su espacio de Hilbert, para entender cómo se puede codificar información cuántica de manera robusta. Esta descripción servirá como base para una comparación directa con los qubits superconductores, la tecnología dominante actualmente, contrastando sus fundamentos teóricos y los retos tecnológicos de ambos enfoques.

3.1. Anyones y sus propiedades

Para estudiar el potencial computacional de los anyones es necesario hacer una revisión de sus propiedades, esto permitirá identificar el espacio de Hilbert en el cual la información pueda ser codificada tolerante a errores debidos a interacciones con el medio. Para este fin, es importante resaltar que los anyones aparecen físicamente como cuasipartículas en sistemas con propiedades topológicas, esto es relevante ya que se pueden describir las propiedades de los anyones de cierta manera “ajena” a la física subyacente de un sistema concreto, es decir, se puede “olvidar” que estos anyones son producto de las interacciones electrónicas en el contexto del EHCF y tratarlas como si fueran “partículas fundamentales”. Adicionalmente, ya que esta es una revisión de una propuesta teórica, y lo que es importante de describir son los estados cuánticos que pueden codificar un potencial “qubit de anyones”, es necesario considerar que se tiene absoluto control sobre el sistema, en términos de preparación del estado inicial e identificación del estado final.

Tipos de partículas

Inicialmente para describir las propiedades de los anyones es importante resaltar que existen diversos modelos anyónicos, cada modelo tiene un factor de llenado ν que determina las propiedades estadísticas de sus partículas y por tanto del modelo en sí. Sin embargo, de manera general cuando se trabaja en un sistema concreto se puede establecer el modelo de anyones que se está estudiando, ya que el comportamiento de estas cuasipartículas se puede distinguir a partir de observables físicos, como se mostró anteriormente mediante la carga eléctrica -en adelante se usaran las palabras “partícula”, “anyon” y “cuasipartícula” en un sentido intercambiable, aunque anteriormente se vio que en el sentido estricto del concepto los anyones son cuasipartículas-.

Teniendo entonces un conjunto de partículas

$$1, a, b, c, \dots, \quad (3.1)$$

en el contexto de los modelos de anyones el 1 corresponde al vacío, mientras que a, b, c, \dots corresponden a una serie finita de diferentes cuasipartículas, que pueden ser anyones (excitaciones de un estado colectivo como en el EHCF) con propiedades estadísticas variadas, o fermiones de Majorana, un tipo de cuasipartícula que cumple con la estadística fermiónica. El modelo más simple de anyones es el que tiene solo una partícula además del vacío $\{1, a\}$. Cada partícula, por ejemplo a , requiere de tener su propia antipartícula \bar{a} , de forma que se puedan crear par partícula-antipartícula a partir del vacío ([Preskill, 2004](#)).

Reglas de fusión de anyones

Cuando se habla de reglas de fusión para los anyones se hace referencia a determinar cuál es el comportamiento colectivo de un par de anyones al estar juntos. De manera simple, se puede pensar como si se pusieran dos anyones en una caja y se analizara cuál sería el comportamiento estadístico de la caja. De manera general las reglas de fusión se escriben como

$$a \times b = N_{ab}^c c + N_{ab}^d d + \dots \quad (3.2)$$

La fusión de dos anyones se denota mediante (\times) , y estas reglas listan las posibles partículas de salida (c, d) mediante el símbolo $+$. La notación en este “producto” es conmutativa en el sentido de que no importa el orden de a y b en la fusión, sus posibles salidas no cambian

$$a \times b = b \times a$$

Cuando dos anyones (a, b) se fusionan, los coeficientes de fusión N_{ab}^c determinan si un resultado específico es posible o no. Estos coeficientes toman números enteros positivos ($N_{ab}^c \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow 0, 1, 2, \dots$). Si $N_{ab}^c = 0$, entonces la partícula c no se puede obtener de la fusión de (a, b) , por el contrario, si $N_{ab}^c = 1$, entonces la partícula c sí se puede obtener de la fusión de (a, b) . Los casos en que el coeficiente es mayor a 1 ($N_{ab}^c > 1$) quiere decir que hay mas de una “forma” de obtener el estado de la partícula c , estas “formas” están relacionadas con las simetrías internas en los modelos anyónicos, sin embargo, para la descripción que se hará posteriormente de un modelo específico de anyones es suficiente limitar los coeficientes a los casos 0 y 1 para ilustrar la posibilidad de establecer un qubit de anyones.

Según el tipo de anyones que se busque describir, es posible que la fusión de dos anyones tenga como resultado una única partícula, lo que se conoce como un “único canal de fusión”, este sería el caso de los anyones abelianos

$$a \times b = c \quad ; \quad N_{ab}^c = 1 \quad (3.3)$$

Se dice entonces que su espacio de fusión es unidimensional (porque solo tiene un canal de fusión posible). A diferencia de este caso, si se describen anyones no abelianos, estos siempre tendrán múltiples canales de fusión, haciendo que su espacio de fusión sea de dimensión mayor (en el sentido de la cantidad de partículas que son posibles producto de la fusión)

$$\sum_c N_{ab}^c > 1 \quad (3.4)$$

Espacio de Hilbert para los anyones

La posibilidad de obtener una partícula c mediante la fusión de a y b , según su coeficiente de fusión N_{ab}^c se puede interpretar como el estado base de un espacio de Hilbert V_{ab}^c . Este espacio de Hilbert para los anyones no es convencional, V_{ab}^c se conoce como el **espacio de fusión** y los estados que pertenecen a dicho espacio son los **estados de fusión**.

Los estados base de espacio de fusión se pueden denotar como

$$|ab; c, \mu\rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, N_{ab}^c \quad (3.5)$$

De manera gráfica se pueden entender estos estados base como se observa en la figura 3.1, donde el proceso de fusión de dos anyones a y b se representa

mediante las flechas que llegan al círculo, y mediante un proceso μ se obtiene otra partícula c representado por la flecha que sale del círculo, siendo esta el producto de la fusión. El espacio V_{ab}^c tiene su dual V_c^{ab} , de forma que la partícula resultante c , mediante el proceso μ se puede “dividir” en sus constituyentes a y b .

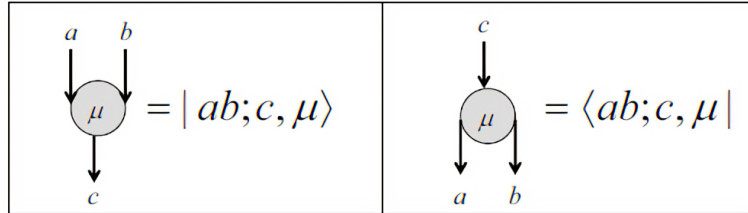


Figura 3.1: Esquema representativo del proceso de fusión. Dos partículas se fusionan para dar otra (izquierda). De manera inversa, una partícula se puede separar en sus constituyentes (derecha). Tomado de: [Preskill \(2004\)](#).

La dimensión del espacio de fusión ($V_{ab}^c \equiv \mathcal{M}$) para el caso de anyones abelianos es un espacio trivial

$$\dim(\mathcal{M}_{abeliano}) = 1$$

Para el caso no abeliano se tiene un espacio de mayor dimensionalidad, esto porque los anyones no abelianos tienen múltiples canales de fusión entre dos partículas. Por lo que el espacio para n anyones relacionados por un proceso de fusión es

$$\dim(\mathcal{M}_{(n)}) = \sum_c N_{ab}^c \geq 2 \quad (3.6)$$

Esta distinción entre anyones abelianos y no abelianos resulta de vital importancia. En el caso abeliano, el canal de fusión es determinista, ya que solo existe un comportamiento global para la fusión de dos anyones de modo que no hay incertidumbre en el resultado, por el contrario, en el caso no abeliano, la posibilidad de obtener diferentes resultados de la fusión abre el camino para que haya una superposición de las posibles partículas de salida.

Específicamente, si se tiene un modelo anyónico cuyo espacio de Hilbert es de dimensión 2 (es decir, un modelo no abeliano) se podría pensar un sistema de dos niveles bien definidos en superposición, debido a que hasta medir el resultado de la fusión, el estado se encuentra indeterminado, es decir, antes de la medición solo se puede conocer la probabilidad de que la fusión termine en un resultado concreto. Pensando en términos del qubit

superconductor, su espacio de Hilbert precisamente tendría dimensión 2, ya que consigue la superposición entre 2 estados bien definidos; una condición necesaria para la existencia de un qubit.

De esta manera, determinar la dimensionalidad del espacio de Hilbert de los modelos anyónicos se hace relevante, y son precisamente los anyones no abelianos los que resultan interesantes, computacionalmente hablando, por la potencial capacidad que tienen de codificar un qubit, como se mostrará más adelante.

3.2. Computación cuántica por anyones

Una vez definidos los elementos básicos de los modelos anyónicos a grandes rasgos, es necesario analizar cómo sería posible realizar computación cuántica con base en estos modelos.

A nivel general, la computación cuántica se puede entender bajo el modelo de circuito, es decir, para hacer computación cuántica se requiere la **“inicialización” del sistema físico** en un estado cuántico bien determinado -coloquialmente “encender” la computadora cuántica-, aplicar **puertas lógicas cuánticas** para cambiar el estado lógico de los qubits a conveniencia, y finalmente **medir** el estado final para obtener un resultado.

Para cumplir con estas exigencias, desde los modelos anyónicos, es necesario entonces partir de un arreglo de anyones que se preparan en un estado de fusión bien definido (con unas reglas y patrón concreto de fusión), **inicializando** el sistema. Las operaciones lógicas se representan mediante el trenzado de las líneas de mundo de los anyones, observe la figura 3.2, las líneas sólidas representan las líneas de mundo de los anyones; esta línea se puede interpretar de cierta manera como el camino que siguen las partículas al moverse espacio-temporalmente en dos dimensiones. El intercambiar partículas mediante el trenzado aparentemente no debería cambiar el sistema, ya que es como si solo se alteraran las posiciones relativas entre partículas, sin embargo, para los modelos de anyones no abelianos, el trenzado de sus líneas de mundo sí realiza una transformación sobre el estado final, siendo otra razón para que los modelos no abelianos sean principalmente el foco de atención para la computación cuántica por anyones (Preskill, 2004). Esto representa una diferencia fundamental con los qubits superconductores, ya que las operaciones lógicas se realizan aplicando pulsos de microondas externos sobre el circuito físico que representa al Transmon.

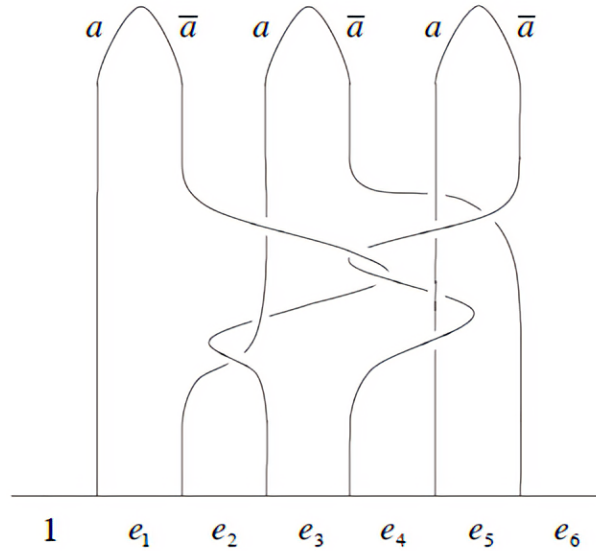


Figura 3.2: Esquema representativo de la computación cuántica por anyones. Parejas de anyones se crean del “vacío” y el trenzado de sus líneas de mundo corresponde a transformaciones no triviales de su estado, al final se obtienen resultados e_i de este proceso. Tomado de: Pachos (2012).

Por último, luego realizar las operaciones con los anyones (trenzar las líneas de mundo a conveniencia), se mide la carga de la partícula resultante, que en la figura 3.2 sería detectar las partículas resultantes del proceso de fusión e_i . El acto de medir la carga anyónica resuelve la indeterminación de las fusiones no abelianas discutidas previamente. Antes de la fusión final, el sistema se encuentra en una superposición de los posibles canales de fusión intermedios entre los anyones, por ende, cuando se mide el resultado, se proyecta el estado cuántico de la fusión sobre una base definida (una partícula concreta), interpretándola como el resultado del cómputo. Esta perspectiva de computación cuántica por anyones se contrasta con el paradigma actual de estados individuales en el siguiente cuadro.

Computación cuántica		Manipulación anyónica
Inicialización del estado	→	Crear y organizar anyones
Puertas cuánticas	→	Trenzar anyones
Medición del estado	→	Detectar carga anyónica

Cuadro 3.1: Comparación entre computación cuántica convencional y computación cuántica anyónica. Adaptado de: Pachos (2012).

Esta nueva forma de realizar computación cuántica es en esencia completamente diferente en sus bases a las propuestas ya en producción como los qubits superconductores, representando un paradigma diferente del sopor-

te físico de la información. Se pasa de manipular estados de energía locales (como los niveles de energía del qubit transmon) a manipular propiedades globales asociadas a un conjunto de partículas como un todo, siendo así un salto conceptual que cambia la relación entre hardware cuántico y el procesamiento de la información.

3.2.1. Modelo de anyones Ising

Para ilustrar cómo dichas características se aplican a un caso concreto para la computación cuántica, se revisa el modelo de anyones Ising, un modelo de anyones no abelianos que cuenta con un gran potencial de ser realizable a nivel experimental y es área activa de investigación en el campo de muestras de EHCF (Ma y cols., 2024). Cuando se dice que es un modelo no abeliano, es en el sentido estricto de sus reglas de fusión, ya que estas permiten más de una partícula producto de un proceso de fusión de dos anyones. Adicionalmente este modelo corresponde al comportamiento de estas cuasipartículas para el caso de $\nu = 5/2$, que se conoce como el modelo de Moore - Read (Nayak y cols., 2008).

Los tipos de partículas para el modelo Ising corresponden al vacío, 1, el anyon no abeliano, σ , y un fermión, ψ . Este modelo particular tiene las siguientes reglas de fusión:

$$\sigma \times \sigma = 1 + \psi \quad ; \quad \sigma \times \psi = \sigma \quad ; \quad \psi \times \psi = 1 \quad (3.7)$$

La fusión para el caso del vacío es trivial con el resto de partículas, de tal forma que

$$\sigma \times 1 = \sigma \quad ; \quad \psi \times 1 = \psi$$

La primera regla de fusión de 3.7 significa que si se juntan dos anyones σ , podrían aniquilarse, es decir, σ es su propia antipartícula, o podrían dar lugar al fermión de Majorana ψ . Por tanto, la fusión de dos anyones tiene como posible resultado dos estados, $|\sigma, \sigma \rightarrow 1\rangle$ y $|\sigma, \sigma \rightarrow \psi\rangle$. La segunda regla indica que, al fusionarse un fermión con un anyon, esta fusión no altera la carga anyónica del anyon, por lo que sigue siendo fraccionaria y el resultado es por tanto otro anyon σ . La tercera regla significa que la fusión de dos fermiones ψ se aniquilan para dar lugar al vacío 1.

Si se tiene ahora un sistema de 4 anyones Ising, para calcular la dimensión de su espacio de fusión se requiere fijar el producto final de la fusión de todos los anyones, es decir, exigir un resultado concreto para la fusión de los 4 anyones de tal forma que la dimensión del espacio brinde información

sobre cuantos canales de fusión permiten el resultado exigido. Considere que el resultado final de la fusión debe ser el vacío 1.

$$\sigma_1 \times \sigma_2 \times \sigma_3 \times \sigma_4 \rightarrow 1$$

Luego, se busca determinar

$$\dim(V_{\sigma\sigma\sigma\sigma}^1)$$

Para el modelo Ising se tiene que:

$$\sigma \times \sigma = 1 + \psi \quad \Rightarrow \quad N_{\sigma\sigma}^1 = 1, \quad N_{\sigma\sigma}^\psi = 1, \quad N_{\sigma\sigma}^\sigma = 0$$

A partir de los coeficientes de fusión (N_{ab}^c) se puede calcular la dimensión del espacio de Hilbert como sigue:

$$\dim(V_{\sigma\sigma\sigma\sigma}^1) = \sum_x N_{\sigma\sigma}^x \cdot N_{\sigma\sigma}^x \cdot N_{xx}^1$$

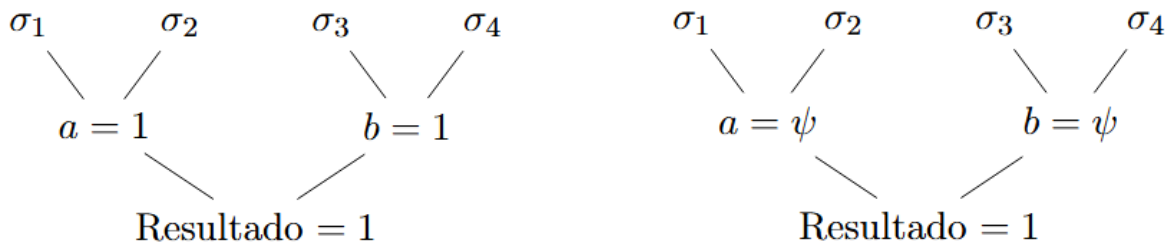
Sustituyendo los valores correspondientes:

$$x = 1 \Rightarrow N_{\sigma\sigma}^1 = 1, \quad N_{11}^1 = 1 \Rightarrow \text{contribución: } 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$x = \psi \Rightarrow N_{\sigma\sigma}^\psi = 1, \quad N_{\psi\psi}^1 = 1 \Rightarrow \text{contribución: } 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \dim(V_{\sigma\sigma\sigma\sigma}^1) = 1 + 1 = 2$$

Por tanto, existen dos canales de fusión posibles para los cuatro anyones σ que terminan en el vacío. Estos canales de fusión se pueden entender gráficamente mediante el siguiente diagrama de árbol



(a) Canal #1, vacío como resultado intermedio de la fusión de las parejas.

(b) canal #2, fermiones como resultado intermedio de la fusión de las parejas.

Figura 3.3: Representación gráfica de los 2 canales de fusión posibles para el caso de 4 anyones Ising. Elaboración propia.

Estos canales se pueden interpretar como un sistema de dos niveles, y por tanto, se pueden usar para codificar un “qubit de anyones”.

- El estado $|0\rangle$ corresponde a una secuencia de fusiones donde el resultado intermedio entre dos pares de σ es 1 y luego su fusión final da 1.

$$|0\rangle \equiv (\sigma_1 \times \sigma_2 \rightarrow 1), (\sigma_3 \times \sigma_4 \rightarrow 1) \quad (3.8)$$

- El estado $|1\rangle$ corresponde a una secuencia donde la fusión intermedia da lugar a ψ , y posteriormente se obtiene 1 en la fusión total.

$$|1\rangle \equiv (\sigma_1 \times \sigma_2 \rightarrow \psi), (\sigma_3 \times \sigma_4 \rightarrow \psi) \quad (3.9)$$

Luego, la clave de la superposición de los estados lógicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ radica en la misma naturaleza de los anyones no abelianos. El hecho de que la fusión de dos anyones no tenga un único resultado posible, hace que, hasta el momento antes de realizar una medición de la carga anyónica del sistema, el estado de la fusión intermedio de dos anyones se encuentre indeterminado. Es precisamente esa indeterminación del resultado el recurso que se puede explotar computacionalmente, permitiendo entonces establecer una superposición entre los canales de fusión del tipo

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (3.10)$$

La definición de los estados lógicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ mediante 3.8 y 3.9, aparenta ser una forma rebuscada de definir un sistema de dos niveles que cuente con una superposición para establecer un qubit, sin embargo, esa forma tan particular de definir los estados base del “qubit de anyones” le proporciona características especiales:

1. Ambos estados se definen por el resultado conjunto de las fusiones intermedias, y no por el estado individual de alguna partícula. Esto implica que la información del qubit está codificada de manera **no local**, es decir, ningún par de anyones contiene, por sí solo, la información completa del estado, sino que depende del patrón global de fusión de todo el conjunto de anyones. En otras palabras, la información no está codificada “en” los anyones individuales, sino “entre” ellos, a partir de sus interacciones según el patrón de fusión.
2. Los estados están protegidos contra errores locales. Esto significa que, los errores que afectan a una sola partícula (por ejemplo, una perturbación ambiental que actúe sobre un único anyon σ) no pueden cambiar los estados lógicos ($|0\rangle$ y $|1\rangle$) del qubit, ya que no tienen acceso a la información global del sistema.

Por tanto, bajo estas características especiales, este tipo de qubit codifica en propiedades **globales** del sistema la información, y estas propiedades están determinadas por la **estructura de fusión** entre los anyones. En lugar de depender del estado local de una partícula, el “qubit de anyones” se define a partir de en un **espacio de Hilbert degenerado**, donde dicha degeneración viene dada por la posibilidad de tener diferentes *canales de fusión* compatibles con un mismo resultado global de fusión para un conjunto de $4n$ anyones no abelianos, bajo las reglas del modelo Ising.

En consecuencia, las operaciones que alteran el estado lógico del qubit sólo puede lograrse modificando de forma coherente y global el patrón de fusión o la trayectoria (trenzado) de los anyones, lo que impide que perturbaciones locales puedan alterar el estado. Es precisamente esta **robustez frente a errores locales**, junto con la **naturaleza no local de la codificación de la información**, lo que justifica que este tipo de “qubit de anyones” reciba el nombre de **qubit topológico**. Esta es, seguramente, la ventaja teórica más significativa frente a los qubits superconductores, los cuales, al codificar la información en estados de energía locales de un circuito eléctrico, son inherentemente vulnerables a perturbaciones que se puedan producir en el entorno y/o manipulación del qubit, como fluctuaciones electromagnéticas que alteren los niveles de energía del circuito superconductor (es decir la calibración de SQUID).

3.3. Dos enfoques de qubit en computación cuántica

El desarrollo de tecnologías para la computación cuántica ha derivado en múltiples propuestas físicas para la implementación de qubits, siendo el rey indiscutible actualmente los *qubits superconductores* de tipo transmon, sin embargo, aún se encuentran lejos de ser perfectos, y es en pro de solucionar las dificultades de los modelos actuales en donde propuestas como los *qubits topológicos* tiene un papel importante y un lugar en el ámbito de la investigación académica.

Qubit Superconductor

El qubit transmon se implementa mediante circuitos superconductores en los que se emplean uniones Josephson para establecer niveles de energía bien definidos con los que forman un sistema de dos niveles (esto se desarrolló en la sección 1.4.2). Este sistema tiene una serie de virtudes entre las cuales se destaca su rápida manipulación, ya que las operaciones me-

diante las puertas cuánticas pueden implementarse en escalas de tiempo de nanosegundos, adicionalmente su arquitectura permite un proceso de fabricación relativamente cómodo, ya que se asemeja a tecnologías ya utilizadas, como por ejemplo el desarrollo de microprocesadores; es así que se tiene un excelente control sobre las operaciones que se realizan con los qubits y se favorece en enorme medida la escalabilidad de este tipo de sistemas, es decir, la posibilidad de agregar cada vez más qubits, ya que los circuitos superconductores son compatibles con diversas tecnologías de circuitos integrados que ya existen.

A pesar de todas sus virtudes, el qubit de tipo transmon resulta ser muy susceptible a las perturbaciones del entorno, esto debido a que una fluctuación electromagnética o defectos en el material durante el proceso de fabricación de los superconductores puede alterar la estabilidad de los qubits y adicionalmente la información que se obtiene de ellos (Clarke y Wilhelm, 2008). Por otro lado, si bien su escalabilidad en términos de fabricación es una ventaja en la que lidera, el problema radica en la dificultad que plantea mantener un sistema con tantos qubits en superposición al mismo tiempo, lo que hace que la estabilidad de las operaciones sea cada vez más difícil conforme el proceso computacional se hace más complejo.

Qubit Topológico

Los qubits topológicos resultan, por otro lado, ser una propuesta teórica que busca aprovechar las propiedades exóticas de sistemas físicos como los anyones para generar un sistema de dos niveles, que por muy enrevesado y rebuscado que pueda parecer, plantea una alternativa a los modelos actuales al basarse en grados de libertad no locales permitiendo que la información se pueda codificar de una manera inherentemente protegida a errores que provengan de perturbaciones externas (no deseadas) sobre el sistema. Los estados lógicos de este qubit, desde su concepción, presentarían una enorme estabilidad al no depender de estados individuales de partículas (polarización o espín) o de un circuito (modos de vibración del qubit transmon), sino que permiten asociar la información al sistema completo, considerándolo como un todo, a partir de los patrones de fusión de los anyones.

Es importante resaltar que si bien ambos enfoques de qubit cuentan con un tiempo de investigación similar (alrededor de 20 años), la tecnología de los qubits transmon se encuentra mucho más madura, ya que el panorama para la idea de qubit topológico enfrenta dificultades en términos de

generación y manipulación controlada de anyones no abelianos (Lutchyn y cols., 2018). Sin embargo, se han logrado avances prometedores en la consolidación de un dispositivo físico que pueda ser potencialmente un qubit topológico, esta propuesta de qubit es principalmente desarrollada por Microsoft, y fruto de sus investigaciones se anunció el chip “Majorana 1”.

3.3.1. Frontera experimental: el caso del “Majorana 1”

El equipo de Microsoft Azure Quantum publicó el 19 de febrero de 2025 en la revista científica “Nature” un artículo titulado “*Interferometric single-shot parity measurement in InAs–Al hybrid devices*”, la investigación presentada en dicho trabajo se centra en un modelo de computación cuántica topológica basada sólo en mediciones¹. En este enfoque, principalmente, se simplifican las operaciones al proceso fundamental de fusión de anyones no abelianos, como se mostró anteriormente con el caso del modelo Ising, no obstante, en el contexto de la investigación de Microsoft, tomando como base un superconductor topológico², la fusión de los anyones se traduce en la determinación de la paridad de fermiones compartida por un par de **Modos cero de Majorana** (MZM).

Estos MZM son un tipo de anyon no abeliano que es su propia anti-partícula, dado que su carga eléctrica es neutra, sin embargo, dos MZM se comportan globalmente como un fermión de Dirac (por ejemplo como un electrón) de modo que cuando se habla de paridad se refiere a determinar si la cantidad de fermiones de Dirac en el superconductor topológico es par (0, 2, 4, ...) o impar (1, 3, 5, ...) a partir de las parejas de MZM. La paridad entonces permite constituir un sistema de dos niveles, el cual se puede interpretar como un qubit, por ejemplo: paridad par $|0\rangle$ y paridad impar $|1\rangle$, siendo la medición de la paridad la que permite leer el estado del qubit y procesar la información.

El dispositivo desarrollado está compuesto por un nanocable superconductor de arseniuro de indio (*InAs*) recubierto por una fina capa de aluminio (*Al*), que cuenta con unas puertas de control y un sistema de puntos cuánticos. Los puntos se encuentran acoplados al nanocable para crear un circuito interferométrico, se le llama así porque básicamente las mediciones se realizan con base en la interacción entre el nanocable y el punto cuántico.

¹Si el lector gusta profundizar en este modelo se recomienda el artículo “Measurement-Only Topological Quantum Computation” que puede encontrar en [Physical Review Journals](#).

²Un superconductor topológico es un material que además de tener resistencia eléctrica prácticamente nula, se pueden generar en su superficie o bordes estados cuánticos como los anyones del EHC.

Las puertas de control son en esencia electrodos que permiten controlar la densidad de electrones en diferentes secciones del nanocable, esto resulta de vital importancia ya que como se mostró en la sección 2.5, la aparición de anyones está relacionada con una ocupación concreta de los niveles de energía de Landau, es decir, depende de una densidad de electrones en el material muy específica, y dado que los MZM son un tipo de anyones, es indispensable poder **controlar** la densidad electrónica con alta precisión para favorecer la aparición de estas cuasipartículas. Por otro lado, los puntos cuánticos (QD) son dispositivos creados a partir de un nanocrystal semiconductor; son tan pequeños que pueden confinar electrones individuales en las tres dimensiones, permitiendo manipular y medir estados electrónicos con una gran precisión³.

A grandes rasgos, el dispositivo funciona relacionando la medición de la capacitancia cuántica (C_Q) con el estado de paridad de los MZM. La capacitancia cuántica mide la densidad de estados disponibles en un nivel de energía específico, informando indirectamente sobre la energía necesaria para añadir un portador de carga al material.

Una analogía intuitiva es pensar en buscar rentar en un piso de apartamentos: si C_Q es alta, significa que hay muchos “apartamentos” (estados cuánticos) disponibles, por lo que el “esfuerzo” por conseguir uno (la energía necesaria para agregar un electrón) es bajo. Por el contrario, si C_Q es pequeña, significa que apenas hay “apartamentos” (estados cuánticos) disponibles, y por lo tanto, el “esfuerzo” por conseguir rentar uno (la energía necesaria para agregar electrones) es mucho mayor.

Ya que el resultado de un cómputo viene determinado por la paridad de los MZM, de esta manera, la capacitancia cuántica es una magnitud ideal para determinar el estado de paridad de las cuasipartículas por el siguiente motivo: en esencia, si el resultado es par o impar quiere decir que en cada caso habrá una cantidad diferente de fermiones de Dirac en el nanocable, y dado que C_Q varía según los estados cuánticos disponibles, analizando los picos de C_Q del conjunto nanocable-QD es posible determinar el estado de paridad de los MZM. Aquí, el punto cuántico actúa como una especie de “sensor”, si hay un estado disponible en el nanocable, el electrón confinado en el QD podría pasar (mediante el efecto túnel) y ocupar dicho estado (situación de C_Q alta) por el contrario, si no hay estados disponibles el electrón no puede pasar (situación de C_Q baja).

Con base en todo lo anterior, el equipo de Microsoft Azure Quantum

³El descubrimiento y síntesis de puntos cuánticos le valió el premio Nobel de química en 2023 a Mounqi G. Bawendi, Louis E. Brus and Alekséi Yekimov. [Nobel Price in Chemistry 2023](#).

desarrolló un dispositivo que tiene la potencial capacidad de usarse como qubit. Dentro de los resultados destacables de su investigación se encuentran los siguientes aspectos:

- **Medición de un solo disparo:** El dispositivo desarrollado tiene la capacidad de determinar el estado de paridad de los MZM a partir de una única medición.
- **Precisión de la medida:** El tiempo que toma medir el estado de paridad es de $3,4 \mu$ segundos, mientras que el tiempo en que el estado de paridad puede ser perturbado es de 1 milisegundo. Esto garantiza que durante el proceso de medición el estado no cambie, consiguiendo que la medida tenga un error porcentual del 1 %.

A partir de las pruebas realizadas por el equipo de investigadores, los avances en la realización de una computadora cuántica con protocolo de codificación topológica pareciera empezar a ver luz al final del túnel luego de 2 décadas de arduo trabajo, sin embargo, el dispositivo está lejos de ser perfecto. Su principal limitación es que no es posible (aun) garantizar de forma contundente la formación de los modos cero de Majorana en el nanocable superconductor, ya que debido a su propio diseño, en la interfase entre el aluminio (superconductor) y el arseniuro de indio (semiconductor) se pueden formar otro tipo de estados cuánticos diferentes a los MZM, conocidos como **estados ligados de Andreev**⁴, que durante el proceso de medición de la capacitancia cuántica pueden producir efectos similares a los MZM, por lo que la interpretación de las medidas se encontraría sesgada de ser el caso ([M. A. Quantum y cols., 2025](#)).

A consideración del autor del presente documento, esta es la dificultad más grande para la computación cuántica topológica, ya que sólo demostrando la robustez topológica del sistema y descartando los “falsos positivos” es que este paradigma de la computación cuántica sería realizable.

El caso del Majorana 1 resulta entonces en un dispositivo con un potencial prometedor a futuro, desarrollado teniendo en cuenta todas las condiciones que son necesarias para que un sistema de cuasipartículas pueda generarse. Las proyecciones de investigación en el campo de la computación cuántica topológica para los próximos años requieren entonces realizar experimentos que permitan demostrar de forma concluyente la formación de modos cero de Majorana, y adicionalmente, investigar cómo sería posible

⁴Estados cuánticos que surgen del proceso de reflexión de Andreev en la interfase entre un conductor normal (N) y un superconductor (S).

integrar el proceso de medición desarrollado por Microsoft Azure Quantum en un sistema capaz de realizar operaciones lógicas. El camino sigue siendo largo, pero el desarrollo de este dispositivo marca un avance real en la realización de una computadora cuántica topológica, haciendo que el posible qubit topológico de Microsoft ya cumpla con dos de las condiciones necesarias discutidas en la sección 1.4.1; dos niveles bien diferenciados y ser posible de medir.

3.3.2. Impacto en la investigación en Física

La existencia de estos dos enfoques para construir un qubit más que una competencia puramente tecnológica, ha trascendido su objetivo computacional y resultado en un motor que impulsa diversas fronteras de la física.

El desarrollo e investigación alrededor del qubit superconductor ha supuesto un auge en la física del estado sólido, el campo de los circuitos cuánticos y la óptica cuántica de microondas. La necesidad tecnológica de mejorar la coherencia ha impulsado avances significativos en Ciencia de Materiales, mejorar los procesos de nanofabricación y el estudio de defectos a nivel atómico. Su principal impacto en la física, más allá de las computadoras cuánticas, fue la consolidación de un campo de estudio nuevo: la **Electrodinámica cuántica de circuito** (Circuit QED) (Blais y cols., 2021). Los sistemas cQED han permitido explorar el acoplamiento ultra-fuerte para estudiar la interacción luz-materia, impulsando a nuevos horizontes la óptica cuántica.

Otros avances en materia de corrección de errores cuánticos, en sistemas con arquitectura de qubit superconductor, han hecho posible estudiar sistemas de muchos cuerpos de elevada complejidad, mostrando la capacidad de estabilizar y manipular estados de entrelazamiento a gran escala en condiciones favorables (G. A. Quantum y Collaborators, 2023), un desafío que resulta importante para la física estadística cuántica.

De este modo, los esfuerzos por madurar la tecnología de los qubits superconductores son un claro ejemplo de cómo las aplicaciones tecnológicas, como la computación cuántica, empujan también la investigación académica para elevar la comprensión que se tiene de la física fundamental.

En contraste, el qubit topológico emerge directamente de una física teórica bastante abstracta, específicamente del estudio de fases topológicas de la materia y el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. La búsqueda experimental de anyones no abelianos y la demostración de sus propiedades de trenzado es hoy una de las áreas de investigación activas que ha gene-

rado un auge de la física de la materia condensada, impulsando avances extraordinarios en la Ciencia de Materiales que han llevado a la síntesis de heteroestructuras⁵ de una pureza nunca antes alcanzada, así como el descubrimiento de nuevas fases topológicas de la materia de las cuales se han derivado los superconductores y los aislantes topológicos (Das Sarma, 2023).

La confirmación contundente y concluyente de la estadística no abeliana resultaría en un descubrimiento para la física fundamental extremadamente importante, validando una tercera familia de estadística más allá de los bosones y fermiones. Es prudente destacar que la evidencia de MZMs se ha encontrado en varias polémicas por “falsos positivos” que mantienen a la comunidad científica escéptica, sin embargo, se han trabajado nuevas técnicas que han enriquecido el campo (Frolov y cols., 2023), de forma que se pueda conseguir la deseada validación experimental.

En este caso, es la investigación con el fin de comprender mejor la física fundamental la que abre la puerta a una tecnología completamente nueva, mostrando una articulación inversa que resulta complementaria e igualmente poderosa entre ciencia y tecnología.

3.4. Desafíos para la enseñanza de la Computación Cuántica

La dicotomía entre el qubit superconductor y el topológico, a partir del presente trabajo, se considera que ofrece un valioso caso de estudio que tiene el potencial de contribuir a la formación de licenciados en física, pues ilustra la evolución de la complejidad del estudio de la física fundamental y su relación con el desarrollo tecnológico, generando una base de conocimiento que favorezca una postura crítica e informada frente a la ciencia, la tecnología y la sociedad, en el contexto de una revolución que se está gestando alrededor de las tecnologías cuánticas en el siglo XXI.

Este potencial formativo enfrenta, sin embargo, el desafío de la “brecha” identificada en la introducción de este trabajo: una desconexión entre los currículos tradicionales y las demandas de la nueva industria cuántica. El análisis de ambos paradigmas de qubit (superconductor y topológico) requiere fomentar competencias interdisciplinarias (materia condensada, teoría de circuitos y matemáticas avanzadas) que le exigen a los licenciados en física gestionar un “salto conceptual”.

⁵Es un dispositivo híbrido compuesto por dos materiales con propiedades cuánticas fundamentalmente diferentes, como un semiconductor y un superconductor.

La creciente abstracción es inherente a la evolución y progreso de los modelos físicos, por tanto, la manera de abordar dicha abstracción representa un desafío en el ámbito formativo. Como señaló Dirac, “el progreso constante de la Física requiere para su formulación teórica una matemática que se vuelva continuamente más avanzada” y, en ese sentido, “los desarrollos físicos modernos han requerido una matemática que continuamente cambia sus cimientos y se vuelve más abstracta” (Dirac, 1931). Frente a este reto, la investigación en didáctica de la Física se ha enfocado en cómo enseñar la computación cuántica de forma efectiva, favoreciendo el desarrollo de recursos, propuestas y herramientas que permitan a los futuros licenciados en física orientar su práctica pedagógica hacia el abordaje de conceptos y sistemas propios de la investigación en computación cuántica, con el fin de lograr una articulación de la ciencia y la tecnología.

Enfoques como el “Picturalismo Cuántico” (Quantum Picturalism) buscan atacar la desconexión entre la notación gráfica (diagramas de circuito) y el formalismo algebraico (notación bra-ket) al momento de enseñar computación cuántica, ya que en la mayoría de ocasiones no es intuitiva la relación entre el gráfico y los cálculos. Este problema es abordado proponiendo un lenguaje unificado donde el diagrama también es el medio que permite realizar los cálculos. De esta manera, se consigue un enfoque que es conceptualmente intuitivo sin dejar de ser riguroso. Se destaca que si bien desarrollar la capacidad de abstracción matemática es importante, en etapas tempranas del proceso formativo resulta más beneficioso priorizar la comprensión conceptual que las herramientas matemáticas (Dündar-Coecke y cols., 2023). Así, el “Picturalismo Cuántico” es un enfoque con el potencial de llevar la física cuántica y la computación a la formación universitaria e incluso a la secundaria.

De forma complementaria, ya existen propuestas didácticas aplicadas para llevar la computación cuántica al bachillerato, como el proyecto pedagógico desarrollado y probado en un colegio de Bogotá-Colombia por Salas Galindo (2022). Este trabajo se destaca por su enfoque constructivista, materializado en un libro y un “kit” con actividades experienciales diseñadas para comprender los conceptos relacionados con la computación. Por ejemplo, utiliza un juego de cartas llamado “Bitjack” para afianzar el sistema binario y montajes ópticos prácticos con un láser para representar la superposición y el colapso del estado cuántico. Esto demuestra la viabilidad de enseñar los fundamentos de la computación cuántica de forma tangible e interactiva.

No obstante, el éxito en la implementación de soluciones pedagógicas como las anteriormente descritas, depende de un reto más significativo: la formación de los Licenciados en Física. Los docentes son la pieza fundamental que permite contextualizar la información y desarrollar el conocimiento científico desde una perspectiva contemporánea e interdisciplinaria, actuando como articuladores de este conocimiento en la sociedad. La evidencia reciente es clara: es fundamental invertir en la capacitación docente.

Proyectos como “The Quantum for All Project” han establecido modelos de desarrollo profesional con el fin de capacitar docentes en el área de “Ciencia de la información cuántica” (QIS por sus siglas en inglés). Este estudio propone un programa intensivo de dos semanas: en la primera se realizan 4 días intensivos para la revisión y aprendizaje del contenido QIS integrado con STEM (“entender”); la segunda semana, los docentes aplican inmediatamente lo aprendido planificando y enseñando a un grupo de estudiantes durante otros cuatro días (“practicar”). Los autores y participantes resaltan que es precisamente esta aplicación inmediata —el tener que enseñar “pronto” lo recién aprendido— lo que favorece la retención del conocimiento y resulta altamente efectivo para construir la confianza del docente ([Matsler y Lopez, 2023](#)). De hecho, estudios posteriores que evaluaron cuantitativamente el impacto de este modelo confirman la efectividad del componente inicial: el taller intensivo de cuatro días produce aumentos estadísticamente significativos tanto en el conocimiento del contenido QIS de los maestros como en su confianza autorreportada al respecto ([Lopez y Matsler, 2024](#)). Por tanto, este enfoque para la formación del profesorado destaca la importancia de abordar el contenido no solo como una revisión teórica sino con el propósito de ser enseñado, y adicionalmente impulsar su aplicación.

En última instancia, cerrar la brecha entre la academia y la industria requiere una estrategia doble: la adopción de herramientas pedagógicas, tanto conceptuales como aplicadas, que permitan abordar y gestionar la creciente abstracción que la física moderna demanda. Y, principalmente, de manera prioritaria, un esfuerzo decidido en repensar y transformar el enfoque de la formación docente hacia la computación cuántica, adoptando modelos basados en la aplicación práctica que han demostrado ser efectivos para mejorar significativamente tanto el conocimiento del contenido como la confianza del profesorado, de forma que los licenciados en física se encuentren capacitados para implementar las nuevas herramientas didácticas.

Con base en todo lo anterior, el estudio del caso realizado en el presente trabajo como una aproximación introductoria a la computación cuántica muestra que propuestas como el qubit superconductor serían viables de abordar en cursos de física a nivel universitario, al no requerir elementos matemáticos ni conceptuales ajenos, en muchos casos, a la física ya abordada en programas de pregrado. En el contexto del programa de Licenciatura en Física de la UPN, dedicar un curso independiente al estudio de la computación cuántica es posible ya que el programa cuenta con un curso dedicado a la física del estado sólido, en el cual se pueden abordar conceptos que luego se ponen en contexto con el estudio del qubit superconductor; sería necesario en investigaciones posteriores determinar si un curso de computación cuántica debería contar necesariamente con otro curso obligatorio como prerrequisito.

Por otro lado, abordar casos más complejos en la frontera de la investigación académica, como el qubit topológico, se considera que requiere el desarrollo de estrategias completamente enfocadas en la enseñanza de la computación cuántica. Esto debido a que las investigaciones mencionadas previamente se centran en un nivel muy introductorio o se consideraron para esta investigación como potencialmente extrapolables al contexto de la computación cuántica. Dichos estudios se realizaron en el marco de contenidos distintos, como la enseñanza de la mecánica cuántica, que si bien se encuentra relacionada, constituye un área del conocimiento que no necesariamente comparte los mismos desafíos pedagógicos que la enseñanza de la computación cuántica.

Conclusiones

El recorrido de la computación, como se analizó al inicio de este trabajo, ha estado marcado por la definición de sus propios límites; desde los teóricos, como el problema de la decisión abordado por Turing, hasta los físicos, como el inminente fin de la Ley de Moore. Este estancamiento, donde fenómenos como el efecto túnel se vuelven un obstáculo, junto a la incapacidad de simular la propia naturaleza —como señaló Feynman—, evidenció la necesidad de una alternativa. En este contexto, la computación cuántica se presenta como, no solo un nuevo desarrollo tecnológico, sino el paso natural para el progreso computacional, más que una continuación, es una reinención fundamental del procesamiento de la información. Con la transición del bit al qubit un mundo de posibilidades, pero sobre todo de retos, se nos presenta ahora en el mundo. La computación cuántica ha tenido grandes progresos en los últimos 20 años, como el desarrollo del qubit transmon, sin embargo, avances tan prometedores también han dejado al descubierto importantes desafíos en materia de estabilidad y escalabilidad, importantes de resolver para alcanzar una computación cuántica que sea totalmente disruptiva y el cambio de paradigma computacional que promete ser.

El análisis de fenómenos físicos como el efecto Hall y sus variantes muestra cómo el estudio de la física se ha vuelto cada vez más complejo. A medida que la investigación avanza y profundiza, la abstracción necesaria para abordar y comprender el mundo que nos rodea supone una barrera. A pesar de ello, estas nuevas teorías resaltan como nunca antes una relación notablemente profunda entre la física y las matemáticas, casi innegable, que permite describir fenómenos que gradualmente se alejan de la intuición. El efecto Hall Cuántico Fraccionario es un fenómeno que se destaca intrínsecamente por su carácter colectivo, donde si bien sus condiciones parecen muy específicas y “artificiosas” como para ser interesantes fuera del ambiente de la física fundamental, su estudio y comprensión son aplicables no solo al campo de la computación, sino a otros amplios campos de investigación en física aplicada, abriendo la posibilidad de desarrollar nuevas

tecnologías que sean parte del motor de la segunda revolución cuántica.

La búsqueda de alternativas en el campo de la computación cuántica ha permitido encontrar en los sistemas de efecto Hall Cuántico Fraccionario y en los anyones, un potencial candidato a qubit que, de ser plausible, trazaría un camino importante hacia una computación cuántica robusta. Aunque la descripción de qubit topológico, a priori, resulta bastante prometedora y revolucionaria, hablando de protección topológica y concibiendo la codificación de información de manera más compleja que un simple sistema de dos niveles, es una propuesta que tiene un camino arduo por delante, ya que se enfrenta a propuestas que también están encaminadas a tomar ventaja de las condiciones cuánticas para la codificación y que además se encuentran en un estado de desarrollo más avanzado, teniendo en cuenta que ya se han creado prototipos funcionales, algo que aún es un área de investigación activa respecto a los anyones.

Este estudio pretende resaltar una de las facetas más profundas de la física moderna: la manifestación de conceptos matemáticos abstractos, como la topología, en fenómenos físicos medibles y con un potencial tecnológico revolucionario. La transición del efecto Hall Clásico al Cuántico, y de este al Fraccionario, no es solo una historia de refinamiento experimental, sino de descubrimiento de nuevos fenómenos, que con modelos cada vez más precisos, han permitido estudiar con mayor profundidad nuevos estados de la materia con propiedades increíbles. La propuesta del qubit topológico, nacido de estas investigaciones, representa un camino de interés por el progreso tecnológico y científico. Si bien el camino hacia la construcción de una computadora cuántica a gran escala está lleno de desafíos, sobre todo en el caso topológico, la solidez de sus fundamentos teóricos la posicionan como una de las tecnologías más prometedoras en los próximos años, y se espera que cumpla la promesa de una nueva era de la información. En este contexto, este trabajo se consolida como un referente que muestra una forma de conectar la física con su aplicación, resaltando que algo tan sencillo como una unidad de información puede tomar múltiples formas para crearse físicamente, procesarse y adaptarse a la tecnología emergente, lo cual consolida aún más la concepción de que la física es una actividad en constante cambio y que a su vez va modificando y moldeando la forma en que se relacionan la ciencia, la tecnología y la sociedad.

Finalmente, el contraste entre el qubit superconductor y qubit topológico trasciende sus fines computacionales; sirve como un espejo de la propia evolución de la Física, que plantea nuevos horizontes y desafíos tanto a nivel de investigación académica como en el campo educativo. La abstracción requerida para abordar modelos como el del qubit topológico evidencia la tensión existente entre la investigación de frontera y las prácticas formativas actuales. Mediante este trabajo se constata que, si bien emergen propuestas pedagógicas innovadoras, su implementación efectiva recae innegablemente en la figura del licenciado en física. Por ello, la transformación de la formación docente para la enseñanza de la computación cuántica requiere el desarrollo de estrategias que ataquen cuatro aspectos clave: **primero**, gestionar la abstracción matemática, integrando herramientas visuales que sirvan de puente entre la intuición geométrica y el formalismo matemático; **segundo**, fomentar la interdisciplinariedad, relacionando explícitamente los fundamentos físicos con la ingeniería de dispositivos; **tercero**, favorecer la apropiación epistemológica del conocimiento, apostando por el dominio de los principios físicos que sustentan la tecnología y no solo su uso instrumental; y **cuarto**, la confianza del docente en la temática, vincular el aprendizaje teórico con una experiencia de enseñanza práctica. Esta necesidad de capacitar a los futuros profesores se enmarca, a su vez, en el reto más amplio —señalado en la problemática inicial de este estudio— de impulsar una transformación curricular, ya que es mediante ese proceso que se puede alcanzar una articulación genuina de la física contemporánea, sus tecnologías emergentes y la educación científica de la sociedad.

Referencias

- Aharonov, Y., y Bohm, D. (1959). Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical review*, 115(3), 485.
- Altair 8800 microcomputer*. (s.f.). Descargado de https://www.si.edu/object/altair-8800-microcomputer:nmah_1325625
- Arovas, D., Schrieffer, J. R., y Wilczek, F. (1984). Fractional statistics and the quantum hall effect. *Physical review letters*, 53(7), 722.
- Avron, J. E., Osadchy, D., y Seiler, R. (2003). A topological look at the quantum hall effect. *Physics today*, 56(8), 38–42.
- Berry, M. V. (1984). Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society A*, 392(1802), 45–57. doi: 10.1098/rspa.1984.0023
- Blais, A., Grimsmo, A. L., Girvin, S. M., y Wallraff, A. (2021, May). Circuit quantum electrodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 93, 025005. doi: 10.1103/RevModPhys.93.025005
- Bracken, P. (2024). Topology and the quantum hall effects. En *Recent topics on topology* (cap. 4). Rijeka: IntechOpen. doi: 10.5772/intechopen.1007560
- Busicom 141-pf*. (s.f.). Descargado de http://www.vintagecalculators.com/html/busicom_141-pf.html
- Cevallos, P. A. E. (2024). Pedagogía cuántica: aplicaciones de computación cuántica en educación personalizada. *Revista Científica Kosmos*, 3(2), 170–186.
- Clarke, J., y Wilhelm, F. (2008). Superconducting quantum bits. *Nature*, 453, 1031–1042. doi: 10.1038/nature07128
- Das Sarma, S. (2023). In search of topological quantum computing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 120, e2304992120. doi: 10.1073/pnas.2304992120
- Dirac, P. A. M. (1931). Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 133(821), 60–72.
- Dirac, P. A. M. (1967). Principios de mecánica cuántica. *Barcelona: Editorial Ariel*.
- Dündar-Coecke, S., Yeh, L., Puca, C., Pfaendler, S. M.-L., Waseem, M. H., Cervoni, T., ... Coecke, B. (2023). Quantum picturalism: Learning quantum theory in high school. En *2023 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)* (Vol. 3, pp. 21–32).

- Dür, W., y Heusler, S. (2013). What we can learn about quantum physics from a single qubit. *arXiv preprint arXiv:1312.1463*.
- Feynman, R. P. (1982). "simulating physics with computers." *International Journal of Theoretical Physics*(467-488).
- Frolov, S. M., Manousakis, E., y Das Sarma, S. (2023, May). The search for majorana zero modes in topological superconductors. *Nature Reviews Physics*, 5, 268–281. doi: 10.1038/s42254-023-00569-w
- García, A. C. (2023). Formación de profesores para la enseñanza de la física cuántica en la secundaria: necesidad de la democratización del conocimiento científico. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias: Góndola, Ens Aprend Cienc*, 18(2), 260–274.
- Girvin, S. M. (2002). The quantum hall effect: novel excitations and broken symmetries. En *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. topological aspects of low dimensional systems: Session lxxix. 7–31 july 1998* (pp. 53–175). Springer.
- Hall, E. H. (1879). On a new action of the magnet on electric currents. *American Journal of Mathematics*, 2(3), 287–292.
- Jiménez, C. R. (2021). Sobre la computacion cuantica.
- Kaye, P., Laflamme, R., y Mosca, M. (2007). *An introduction to quantum computing*. OUP Oxford.
- Klitzing, K. v., Dorda, G., y Pepper, M. (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical review letters*, 45(6), 494.
- Laughlin, R. B. (1981). Quantized hall conductivity in two dimensions. *Physical Review B*, 23(10), 5632.
- Laughlin, R. B. (1983). Anomalous quantum hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Physical Review Letters*, 50(18), 1395.
- Lopez, R., y Matsler, K. J. (2024). Impact of professional development on teacher understanding of quantum information science.
- Lutchyn, R., Bakkers, E., Kouwenhoven, L., Marcus, C., Ortno, E., y Oreg, Y. (2018). Majorana zero modes in superconductor–semiconductor heterostructures. *Nat Rev Mater*, 3, 52–68. doi: 10.1038/s41578-018-0003-1
- Ma, K. K., Peterson, M. R., Scarola, V., y Yang, K. (2024). Fractional quantum hall effect at the filling factor $\nu = 5/2$. En *Encyclopedia of condensed matter physics* (p. 324–365). Elsevier. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-323-90800-9.00135-9> doi: 10.1016/b978-0-323-90800-9.00135-9
- Martinez-Chavanz, R. (2005). La recepción de la física moderna en colombia. *Saber y Tiempo*(18), 41–69.
- Matsler, K., y Lopez, R. (2023). The quantum for all project: Teacher professional development model. *EDULEARN23 Proceedings*, 3337–3345.

- Mientras En Físicas. (2019, 13 de abril). *Mi primer artículo científico*. Descargado de <https://mientrasenfisicas.wordpress.com/2019/04/07/mi-primer-articulo-cientifico/>
- Morandi, G. (1992). *The role of topology in classical and quantum physics*. Springer. doi: 10.1007/978-3-540-46688-8
- Nayak, C., Simon, S. H., Stern, A., Freedman, M., y Das Sarma, S. (2008, Sep). Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80, 1083–1159. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1083> doi: 10.1103/RevModPhys.80.1083
- Pachos, J. K. (2012). *Introduction to topological quantum computation*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511792908
- Pérez-Castillo, R., Serrano, M. Á., y Piattini, M. (2020). Propuestas sobre la enseñanza de la informática cuántica.
- Preskill, J. (2004). Lecture notes for physics 219: Quantum computation.
- Quantum, G. A., y Collaborators. (2023, Feb). Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit. *Nature*, 614, 676–681. doi: 10.1038/s41586-022-05434-1
- Quantum, M. A., Aghaee, M., Alcaraz Ramirez, A., Alam, Z., Ali, R., Andrzejczuk, M., ... others (2025). Interferometric single-shot parity measurement in inas-al hybrid devices. *Nature*, 638(8051), 651–655.
- Quiñones, D. (2012). *Síntesis de circuitos cuánticos* (Tesis Doctoral). doi: 10.13140/RG.2.2.10878.38722
- Roth, T. E., Ma, R., y Chew, W. C. (2021). An introduction to the transmon qubit for electromagnetic engineers. *arXiv preprint arXiv:2106.11352*.
- Salas Galindo, J. (2022). *Proyecto pedagógico para el aprendizaje de la computación cuántica a nivel de bachillerato*. Descargado de <https://hdl.handle.net/1992/58107>
- Simon, D. S. (2018). Topology and physics: a historical overview. *Tying Light in Knots: Applying Topology to Optics*.
- Tsui, D. C., Stormer, H. L., y Gossard, A. C. (1982). Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Physical Review Letters*, 48(22), 1559.
- Turing, A. M., y cols. (1936). On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *J. of Math*, 58(345-363), 5.
- Universidad Pedagógica Nacional. (2024, Noviembre). *Proyecto educativo del programa licenciatura en física* (Inf. Téc.). Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física.
- Uzcategui, M. A. V., Nieto, G. G., Barrios, J. R. B., Sosa, H. E. L., y Daboín, F. (2020). El efecto de hall en tres tiempos (clásico, cuántico entero y cuántico fraccionario) desde un contexto histórico-experimental. *Latin-American Journal of Physics Education*, 14(3), 8.

Whitty, R. (2017). *Decidability and the entscheidungsproblem*.

Wilczek, F. (1982). Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Physical review letters*, 49(14), 957.

Wilczek, F. (1990). *Fractional statistics and anyon superconductivity*. WORLD SCIENTIFIC. Descargado de <https://doi.org/10.1142/0961> doi: 10.1142/0961

Anexos

Anexo A: Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético

Un campo magnético se puede describir a partir de un potencial vectorial $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ de tal manera que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A.1})$$

Es posible ajustar el potencial vectorial mediante una función escalar (w) sin que el campo magnético que describe dicho potencial se vea alterado por este cambio

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla w) = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A.2})$$

La invarianza del campo magnético bajo diferentes elecciones de w se conoce como invarianza gauge, y \vec{A} también es conocido como **campo gauge**. Si se considera una partícula cargada en una posición $\vec{r} = (x, y, z)$ que se mueve a lo largo de una trayectoria cerrada en presencia de un campo magnético, el Hamiltoniano no relativista que describe el sistema está dado por la descripción del acople mínimo

$$H^A = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - i\frac{q}{c\hbar} \vec{A} \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

Los estados propios $\psi(r)$ del Hamiltoniano con $\vec{A} = 0$ serán estados propios de H^A con la misma energía, dados por

$$\psi^A(r) = \exp \left(i\frac{q}{c\hbar} \int_{r_0}^r \vec{A}(r') \cdot dr' \right) \psi(r) \quad (\text{A.4})$$

Siendo r_0 un punto de referencia y la integral es a lo largo del camino cerrado que une r_0 y r . Si la partícula se mueve de manera adiabática en la trayectoria cerrada (C) y solo se tiene en cuenta la interacción entre la carga y el campo magnético, la función de onda adquiere una fase luego de recorrer la curva

$$\varphi = \frac{q}{c\hbar} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando el teorema de Stokes, la fase se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{c\hbar} \int \int_{S(C)} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{c\hbar} \int \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \varphi &= \frac{q}{c\hbar} \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Esta fase es un invariante gauge ya que siempre y cuando la descripción del potencial vectorial \vec{A} que se elija represente al campo físico \vec{B} , dicha fase dinámica será la misma. Si en la ecuación anterior, el flujo magnético Φ coincide con el valor del cuanto de flujo magnético ($\Phi_0 = hc/e$), para el caso de un electrón influenciado por un campo magnético, el sistema adquiere una fase $\varphi = 2\pi$, dejándolo inalterado. En este sentido la fase adquirida solo depende de la geometría de la curva (C), y adicionalmente es invariante bajo deformaciones del área (S) que determina el valor del flujo Φ .

Anexo B: Experimento Mental de Laughlin

¹Considerando una cinta de Hall dispuesta en forma de cilindro como se observa en la figura A.1, cuando un flujo magnético atraviesa el cilindro se produce un campo eléctrico sobre la cinta, el cual se encuentra descrito por la ley de inducción de Faraday

$$\oint E \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

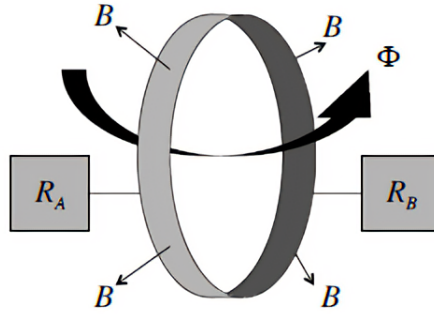


Figura A.1: Disposición cilíndrica de una cinta Hall que es atravesada por un flujo magnético, conectada a 2 reservorios de carga. Tomado de: Pachos (2012)

La línea cerrada en la que se genera la FEM sobre la cinta es la circunferencia del cilindro

$$E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

$$E(t) = -\frac{1}{2\pi R c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Al producirse un campo eléctrico en la cinta en dirección de la circunferencia del cilindro, ya que se piensa que existe un campo magnético normal a la cinta, sobre esta se produce el efecto Hall cuántico. En el efecto Hall, la densidad lineal de corriente no nula se da en la dirección transversal, siendo:

$$j(t) = \hat{\sigma}_{xy} E(t) \quad (\text{A.10})$$

para determinar la corriente total que se produce en la superficie de la cinta, se calcula la integral de la densidad de corriente a lo largo de la extensión de la cinta:

¹Este desarrollo y análisis se hacen con base al ejercicio 2.3 propuesto en el libro de (Pachos, 2012) y con base en lo planteado en el artículo original de Laughlin (Laughlin, 1981)

$$J(t) = \int j(t)dl = j(t) \cdot 2\pi R = \hat{\sigma}_{xy}E(t) \cdot 2\pi R \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo el $E(t)$ se obtiene

$$J(t) = -\frac{\hat{\sigma}_{xy}}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{A.12})$$

De esta manera la corriente que circula está relacionada con la conductividad y las variaciones del flujo magnético que se ha “introducido” al interior de la cinta. Esta corriente está asociada a un movimiento de carga sobre la cinta que se puede calcular de la siguiente manera

$$Q = \int J(t)dt = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{c} \int \frac{d\Phi}{dt} dt$$

$$Q = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{c} \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{c} \Delta\Phi$$

Si consideramos la variación más pequeña posible para el flujo magnético, es decir, variar en un cuanto de flujo magnético ($\Phi_0 = hc/e$), la carga que se moviliza sobre la cinta sería

$$Q = \hat{\sigma}_{xy} \frac{h}{e} \quad (\text{A.13})$$

Teniendo en cuenta el resultado para la conductividad transversal en el efecto Hall cuántico (demostrada en: 2.3.1) la carga que se transfiere entre los reservorios R_A y R_B queda expresada como

$$Q = \left(\nu \frac{e^2}{h} \right) \frac{h}{e} \quad \rightarrow \quad Q = \nu e \quad (\text{A.14})$$

De este resultado se puede concluir que la cuantización de la conductividad Hall está relacionada con una transferencia de carga a lo largo de la dirección transversal de la cinta de Hall, y precisamente este transporte de carga está determinado por dicha cuantización, permitiendo el movimiento de carga en múltiplos enteros de la carga del electrón.

Anexo C: Fases geométricas: conexión de Berry y curvatura

Considere un Hamiltoniano $H(\mathbf{R})$ que depende de un conjunto de parámetros externos $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ y sea $\psi_n(\mathbf{R})$ un estado propio de dicho Hamiltoniano (en el contexto del problema abordado en la sección 2.4 estos parámetros externos \mathbf{R} corresponden a los flujos ficticios (Φ_x, Φ_y) que se introducen en los cilindros de Laughlin). Si el sistema evoluciona de manera adiabática, es decir, manteniendo su mismo estado cuántico (n), durante el proceso, además de la fase dinámica, la función de onda adquiere una fase adicional de carácter puramente geométrico (Berry, 1984), que se conoce con el nombre de **fase de Berry**, definida como:

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle \psi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (\text{A.15})$$

Donde el operador $\nabla_{\mathbf{R}}$ son las derivadas parciales respecto a cada parámetro de \mathbf{R} tal que:

$$\nabla_{\mathbf{R}} = \left(\frac{\partial}{\partial R_1}, \frac{\partial}{\partial R_2}, \dots \right) \quad (\text{A.16})$$

La integral se evalúa a lo largo de una trayectoria cerrada C en el espacio de parámetros. Esta fase es independiente del tiempo, si el camino C es corto la fase adquirida será pequeña, si el camino por el contrario es largo, la fase será mayor, de forma que solo depende exclusivamente de la geometría del camino recorrido. La expresión anterior, tiene una cierta similitud con la descripción de la fase dinámica para una partícula cargada influenciada por un campo magnético externo (como se mostró en el anexo A). Luego es posible definir un “potencial” asociado a la fase de Berry, análogo al potencial vectorial en electromagnetismo, tal que:

$$\mathcal{A} = i \langle \psi_n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{R}) \rangle \quad (\text{A.17})$$

La aparición de \mathcal{A} no es un simple artificio algebraico. La función de onda $|\psi_n(\mathbf{R})\rangle$ está definida sobre un espacio de parámetros \mathcal{M} , y en cada punto \mathbf{R} del espacio de parámetros se asocia una dirección (una fase) a los estados propios del Hamiltoniano en el espacio de Hilbert. Variar los parámetros hace (matemáticamente hablando) que el sistema recorra el espacio de parámetros, sin embargo, ese movimiento —dada la fase geométrica— genera cambios en la fase asociada a los estados cuánticos, por tanto es importante conocer cómo mover los estados por el espacio

de parámetros de manera que se pueda relacionar su fase asociada en los diferentes puntos de dicho espacio. Esto se puede entender de manera más simple haciendo un análogo con el problema del transporte paralelo en superficies curvas. Observe la figura A.2, allí se tiene un vector tangente con una cierta dirección sobre una esfera en la posición 1, cuando se traslada el vector sobre la superficie de la esfera de tal manera que siempre sea tangente a la superficie, siguiendo una trayectoria cerrada, es decir, que el punto de partida es el mismo punto final del recorrido (como el ilustrado en la figura A.2 siguiendo el camino desde 1 hasta 7), dicho vector llega al punto inicial con una dirección diferente a la que tenía cuando partió.

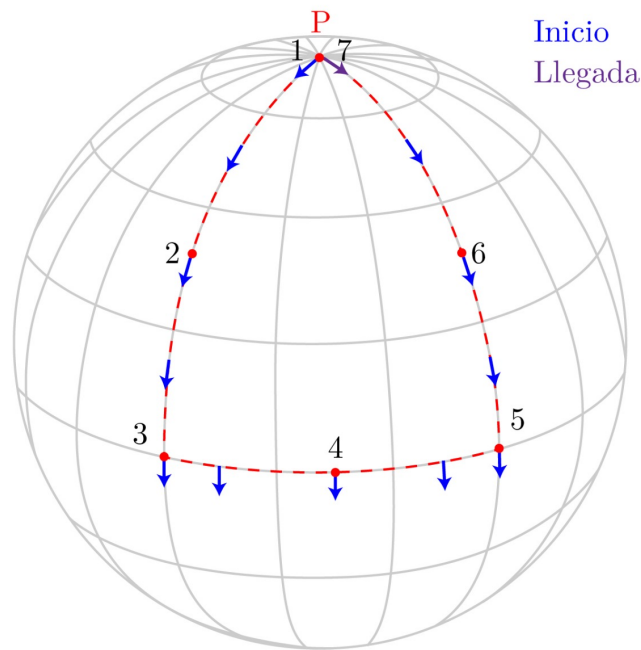


Figura A.2: Transporte paralelo de un vector tangente en la superficie de una esfera.
Elaboración propia.

Llevando este ejemplo al caso de la fase de Berry, el vector sobre la esfera juega el papel de los estados cuánticos $|\psi_n(\mathbf{R})\rangle$, al variar los parámetros \mathbf{R} estos estados recorren el espacio de parámetros (en el caso de la figura A.2 el espacio de parámetros sería la esfera y los parámetros serían los ángulos (θ, φ) , en la sección 2.4 sería el toroide de flujos (Φ_x, Φ_y)), cuando el estado cuántico llega al punto del que partió (recorriendo una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros) el estado adquiere un factor de fase $e^{i\gamma_n}$ que representa el cambio de “dirección” análogo al vector de la figura A.2, de esta manera la fase de Berry $\gamma_n(C)$ permite medir la diferencia de fase que hay entre el estado inicial y final al llegar al punto de partida y el “potencial” \mathcal{A} indica la manera en que se realiza el transporte de los

estados en las diferentes direcciones del espacio de parámetros \mathcal{M} . Por esta razón al “potencial” \mathcal{A} se le conoce con el nombre de **conexión de Berry** ya que este establece como transportar elementos entre 2 puntos del espacio de parámetros; como **conectar** estos puntos.

Nuevamente, y similar al caso electromagnético, del mismo modo que el potencial vectorial \vec{A} permite definir un campo magnético mediante $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, aplicando el teorema de Stokes generalizado en la ecuación A.15 se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \oint_C \mathcal{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} \\ \oint_C \mathcal{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} &= \int \int_S (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) d\mathbf{R}^\mu d\mathbf{R}^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

en el integrando a partir del teorema de Stokes se puede reconocer una expresión análoga a un campo, este campo se conoce como **campo de Berry** y se define como:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (\text{A.19})$$

Luego la fase geométrica

$$\gamma_n = \int \int_S \mathcal{F}_{\mu\nu} d\mathbf{R}^\mu d\mathbf{R}^\nu$$

El campo de Berry es un tensor que mide la “torsión” que experimenta la fase de los estados cuánticos al recorrer una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros, de allí que se pueda relacionar la fase geométrica directamente con este campo. Este campo también es conocido como **curvatura de Berry** ya que sus componentes brindan información de la geometría asociada al espacio de parámetros, y es debido al transporte de los estados cuánticos sobre una variedad curva que se adquiere una fase debida exclusivamente a la geometría del espacio de parámetros (por eso la integral esta definida sobre la superficie de este espacio matemático).

La importancia principal de este formalismo, y su abordaje en este trabajo, es que la fase geométrica que se acumula cuando se recorre todo el espacio de parámetros no puede adquirir un valor arbitrario. La curvatura de Berry se puede relacionar con estructuras más ricas en su interpretación de varios fenómenos físicos, como lo es el número de Chern, el cual permite entender la robustez en la cuantización de la conductividad Hall.