

**CARACTERIZACION DE LOS FENÓMENOS
ELECTROSTÁTICOS DESDE UNA PERSPECTIVA DE
CAMPOS**

ANDREA ESTEFANÍA ULLOA CATAÑO

DAVID ALEXANDER PAQUE BURGOS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FISICA

Bogotá, agosto de 2014

**CARACTERIZACION DE LOS FENÓMENOS
ELECTROSTÁTICOS DESDE UNA PERSPECTIVA DE
CAMPOS**

ANDREA ESTEFANÍA ULLOA CATAÑO

DAVID ALEXANDER PAQUE BURGOS

Monografía de grado presentada para optar el título de licenciado/a en física

Asesor:

JUAN CARLOS CASTILLO AYALA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FISICA

Bogotá, agosto de 2014

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	CARACTERIZACIÓN DE LOS FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS DESDE UNA PERSPECTIVA DE CAMPOS
Autor(es)	Ulloa Cataño, Andrea Estefanía; Paque Burgos, David Alexander
Director	Castillo, Juan Carlos
Publicación	Bogotá, Universidad pedagógica Nacional, 2014. 47p.
Unidad Patrocinante	Departamento de física, Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Inducción, Conducción, Campos, Diferencia de potencial, medios continuos, tensor de stress.

2. Descripción
<p>En la enseñanza del electromagnetismo, particularmente en los temas relacionados con la electrostática, las propuestas y textos tradicionales, fundamentan la explicación de los fenómenos electromagnéticos desde una perspectiva de acción a distancia; esta perspectiva es bastante útil para caracterizar la fuerza entre cuerpos electrificados, especialmente si éstos se consideran partículas, pero presenta dificultades para la explicación de fenómenos tales como la electrificación por inducción y por conducción, y resulta muy inadecuada para dar cuenta de los fenómenos electrodinámicos como las ondas electromagnéticas.</p> <p>Es por esto que se planteó como alternativa una ruta teórica que permitiera la caracterización de los fenómenos electrostáticos, poniendo como eje central la perspectiva de campos propuesta por Maxwell y Faraday.</p>

3. Fuentes
<p>AYALA, M., & al, M. e. (2003). La Relación Mecánica –electromagnetismo y la Mecánica de los medios elásticos. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá: CIUP.</p>

CASTILLO, J. C. (s.f.). De los fenómenos mecánicos al mecanicismo. Bogotá.

FARADAY, M. (1955). Experimental researches in electricity. Chicago: Great books, enciclopedia britanica inc.

GARCIA, E. G. (1999). Construcción del fenómeno eléctrico, perspectiva de campos, elementos para una ruta pedagógica. Bogota.

GRAMAJO, M. C. (1993). Concepto de carga eléctrica y concepción clásica de campos, las propuestas de Faraday y Maxwell. Bogotá.

Hertz, H. (1990). Las Ondas Electromagnéticas. Selección de las Untersuchungen. (G. D. Bellaterra, Ed., & G. D. Bellaterra, Trad.) Barelona.

MAXWELL, J. C. (1954.). A treatise on electricity and magnetism Vol. I. New York: Dover Publications Inc.

RODRIGUEZ BONILLA, A. (2012). Importancia del desplazamiento eléctrico en la comprensión del fenómeno eléctrico. Bogotá.

RODRIGUEZ, O. D. (1994). La interacción entre sistemas electrificados y el tensor Stress de Maxwell. Bogotá.

RUEDA, C. G. (2012). Caracterización del medio en fenómenos electrostáticos desde la perspectiva de campos. Bogotá.

4. Contenidos

1. Contextualización de la problemática.

El estudio de los fenómenos electromagnéticos cobra una especial importancia: en primer lugar porque el electromagnetismo es considerado como una de las teorías base de la física clásica. En segundo lugar, teniendo en cuenta la escasa experiencia que aporta la cotidianidad (chispas, corrientazos, prender y apagar aparatos eléctricos, entre otros.) sobre los fenómenos electromagnéticos resulta relevante en la formación de maestros de física la estructuración de una fenomenología en torno a la cual configurar problemáticas que permitan caracterizar los diferentes rasgos del fenómeno electromagnético, para aportar así al planteamiento de propuestas para la enseñanza del electromagnetismo en los diferentes niveles. En el trabajo que se desarrollará a continuación solo se tendrá en cuenta una propiedad que tienen los cuerpos y los fenómenos asociados para que estos adquieran dicha propiedad: la electrificación.

2. Sobre los fenómenos electrostáticos, la carga y el potencial.

Se realizó un estudio acerca de las experiencias descritas por Maxwell y Faraday acerca de los fenómenos electrostáticos: fricción, conducción e inducción. Se establecen conceptos asociados a esta fenomenología como son el potencial y la cantidad de electrificación, a partir de estos conceptos se estudia y analiza las superficies equipotenciales en conductores cerrados.

3. Caracterización del medio.

Se introduce el concepto de campo eléctrico a partir de los conceptos estudiados en capítulos anteriores, con ello se busca una manera de caracterizar el medio en donde se presentan los fenómenos eléctricos por medio de una magnitud tensorial conocida en la mecánica de los medios continuos como el tensor de Stress. Posteriormente se llega a establecer el teorema de Thompson.

5. Metodología

La investigación está basada en el estudio de los referentes teóricos, y en las diferentes propuestas realizadas por autores involucrados en el campo del electromagnetismo, para poder llegar a un análisis reflexivo acerca de cómo se concibe las diversas caracterizaciones de los fenómenos electrostáticos como la inducción y la conducción.

De este modo el objetivo de la recontextualización de las teorías pretende enseñar tales conocimientos de manera significativa en contenidos diferentes a los que se elaboran normalmente, cosa que no significa encontrar el significado en un texto como si se encontrara inmerso en él, ni de revelar lo que el autor pensaba acerca de fenómenos y problemáticas particulares en torno a las cuales fueron elaborados.

Se trata de establecer una ruta específica y concreta para la comprensión de conceptos a través de los escritos analizados con el fin de construir estructuraciones particulares de los fenómenos electrostáticos (inducción y conducción), hasta llegar por la misma ruta a conceptos mucho más avanzados y elaborados como lo significa la electrodinámica.

ANALISIS DE EXPERIENCIAS: en primer lugar se estudiará cada una de las experiencias desarrolladas por Maxwell y Faraday en torno a los fenómenos de electrificación, estas nos dará cuenta de cómo interpretar el fenómeno eléctrico, y de esta manera poder llegar a una

construcción de un modelo donde permita describir el sistema tomando como referencia el espacio en donde se desarrollan estos fenómenos.

ANÁLISIS REFERENTES TEÓRICOS: para fundamentar el estudio de esta investigación también es necesario hacer una recopilación teórica de otros autores que propongan principalmente el estudio de los medios continuos para poder entender y dar cuenta el estado del medio que influye en la correcta caracterización de los fenómenos eléctricos desde la perspectiva de campos.

6. Conclusiones

En la enseñanza del electromagnetismo es de vital importancia tener en cuenta la distinción que se hace entre las dos perspectivas, la de acción a distancia y la de campos a la hora de abordar los fenómenos electromagnéticos, ya que se puede encaminar estos cursos introductorios estudiando y analizando las dos perspectivas mencionadas teniendo en cuenta las diferencias y para qué es adecuado utilizar cada una. Para la explicación de fenómenos tales como la electrificación por inducción y por conducción, como se resaltó en este trabajo, la perspectiva de acción a distancia resulta inadecuada, ya que no es posible explicar las particularidades de estos fenómenos a través del concepto de fuerza Coulombiana, la idea de acción a distancia resulta totalmente incompatible.

El estado de electrificación es un criterio que se puede estudiar y analizar alterando el espacio de un cuerpo electrificado por medio de uno o más conductores. Este grado de electrificación es conocido como potencial eléctrico, esta variable de estado nos permite entender cómo se encuentra el sistema respecto a otro y establecer la diferencia de potenciales. La cantidad de electrificación se estudia como una variable dinámica, ya que es considerada como la acción necesaria para llevar un sistema de un estado a otro. Esta magnitud no está ligada en cuanto a la configuración del sistema pues siempre permanece constante.

En algunas teorías físicas, la perspectiva de campos es la herramienta para caracterizar los sistemas físicos que se estudian, por ende es adecuado que los estudiantes de física posean conocimientos sobre esta perspectiva desde cursos introductorios al electromagnetismo y así abordar las diferentes temáticas que se ven en los cursos de física posteriores.

Para Maxwell el fenómeno de inducción es el más importante de todos los estudiados por Faraday y por él mismo porque nos da cuenta de la configuración que adopta todo el medio y de cómo se puede analizar, sin necesidad de contacto directo entre ellos. Retomando las ideas de Faraday, realiza una reconstrucción y caracterización de estos fenómenos en conductores cerrados desde

la física de los medios continuos y logra establecer herramientas que permiten fundamentar toda su teoría y desarrollarla en el plan del tratado.

La función energía de campo nos permite describir el sistema en términos del campo eléctrico, también nos proporciona mediante el teorema de Thomson información sobre donde se encuentra ubicada esta magnitud, ya sea en la superficie o en el volumen del conductor mediante una igualdad, haciendo una analogía a la ley de Gauss. Teniendo en cuenta que para Maxwell el medio donde ocurren los fenómenos electrostáticos se comporta como un medio elástico, donde las líneas de fuerza son las tensiones y perpendicular a ellas están las presiones; esto se caracteriza por medio de una magnitud tensorial que define el modo de estar del sistema, para nuestro caso el sistema se caracterizó por medio del tensor de stress electrostático.

Por medio de esta monografía se llegó a establecer una ruta teórica para la enseñanza del electromagnetismo en cursos introductorios de física, donde se establecieron criterios partiendo de análisis de experiencias propuestas por Maxwell y Faraday que llevaron a la construcción de una teoría de campos que dieran cuenta de un estado de electrificación pensando en el medio como agente protagonista de la acción y así poder construir herramientas que permitieran la caracterización de esta perspectiva como el tensor electrostático y el teorema de Thomson.

Elaborado por:	Andrea Ulloa Cataño y David Paque Burgos
Revisado por:	Juan Carlos Castillo

Fecha de elaboración del Resumen:	01	09	2014
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

1. Contextualización de la problemática.

1.1. Perspectiva de acción a distancia.

1.2. Perspectiva de campos.

1.3. Problemática y metodología.

2. Sobre los fenómenos electrostáticos, la carga y el potencial.

2.1. Electrificación por fricción.

2.2. Electrificación por inducción.

2.2.1. Experimento propuesto de Maxwell.

2.2.2. Grado de electrificación.

2.2.3. Superficies equipotenciales.

2.3. Electrificación por conducción.

2.3.1. Cantidad de electrificación.

2.4. Superposición de estados de electrificación por inducción.

2.5. Superposición de estados de electrificación por conducción.

3. Caracterización del medio.

3.1. Campo eléctrico.

3.2. Caracterización del medio a partir del stress.

3.2.1. Función energía de campo y Tensor electrostático.

3.3. Teorema de Thompson.

4. Conclusiones.

5. Anexos.

6. Bibliografía.

1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

En la enseñanza del electromagnetismo, particularmente en los temas relacionados con la electrostática, las propuestas y textos tradicionales, fundamentan la explicación de los fenómenos electromagnéticos desde una perspectiva de acción a distancia; esta perspectiva es bastante útil para caracterizar la fuerza entre cuerpos electrificados, especialmente si éstos se consideran como partículas (HERTZ, 1990), pero presenta dificultades para la explicación de fenómenos tales como la electrificación por inducción y por conducción, y resulta muy inadecuada para dar cuenta de los fenómenos electrodinámicos como las ondas electromagnéticas (HERTZ), ya que este tipo de ondas es la superposición de dos campos, uno magnético y otro eléctrico, oscilando. También es frecuente notar en algunos libros de texto de física, que los autores no hacen una adecuada distinción entre los aspectos conceptuales de estas dos perspectivas, lo que posteriormente puede generar una serie de conflictos y confusiones al momento de entrar a estudiar con más detalle los fenómenos electromagnéticos. Para poder tener mayor claridad para la enseñanza de estos fenómenos es necesario recurrir al análisis desde otra representación, basándose en la perspectiva de campos resulta bastante útil la explicación de los fenómenos electrostáticos, sin asumir que los cuerpos son partículas y también es posible llegar a una explicación de los fenómenos electrodinámicos (AYALA & al, 2003).

El estudio de los fenómenos electromagnéticos cobra una especial importancia: en primer lugar porque el electromagnetismo es considerado como una de las teorías base de la física clásica. En segundo lugar, teniendo en cuenta la escasa experiencia que aporta la cotidianidad (chispas, corrientazos, prender y apagar aparatos eléctricos, entre otros.) sobre los fenómenos

electromagnéticos resulta relevante en la formación de maestros de física la estructuración de una fenomenología en torno a la cual configurar problemáticas que permitan caracterizar los diferentes rasgos del fenómeno electromagnético, para aportar así al planteamiento de propuestas para la enseñanza del electromagnetismo en los diferentes niveles. En el trabajo que se desarrollará a continuación solo se tendrá en cuenta una propiedad que tienen los cuerpos y los fenómenos asociados para que estos adquieran dicha propiedad: la electrificación.

Esta característica que tienen los cuerpos de estar electrificados se puede adquirir mediante dos formas o para decirlo de una manera más adecuada, hay dos fenómenos que pueden otorgarla: electrificación por inducción y electrificación por conducción.

A partir desde nuestra experiencia sensible con respecto a los fenómenos eléctricos y magnéticos, que esta reducida únicamente a chispas y corrientazos, no nos brinda la información necesaria para poder caracterizarlos, es por esto que para plantear un buen trabajo de análisis y conceptualización, tenemos recurrir a las herramientas que nos proporciona la mecánica.

En la mecánica encontramos dos perspectivas que nos permiten analizar y caracterizar los fenómenos electromagnéticos. La perspectiva de acción a distancia la cual nos habla de acciones atribuidas a las partículas considerando los sistemas físicos como estas y la perspectiva de campos considerando el medio como fuente de acciones.

1.1. Perspectiva de acción a distancia

La perspectiva de acción a distancia principalmente es una mecánica desde lo discreto, es decir, los cuerpos o las partículas son los gestantes de la acción y se considera el espacio como un ente

independiente de estos. Por lo cual si consideramos un fenómeno físico desde esta perspectiva lo que realmente miramos es el comportamiento específico de las partículas, y de acciones dadas por estas y entre estas.

Cuando hablamos de los fenómenos de electrificación (electrificación por inducción y conducción) la perspectiva de acción a distancia no nos proporciona la información necesaria sobre el estado del sistema. La caracterización que se podría hacer con la perspectiva de acción a distancia, sería tratando el sistema como partículas y así entrar a analizar las fuerzas eléctricas entre ellos, esta clase de interacción se puede estructurar mediante la ley de Coulomb.

Coulomb mostró mediante unos experimentos que la fuerza entre cuerpos cargados, cuyas magnitudes son pequeñas comparadas con la distancia entre ellos, varía inversamente al cuadrado a la distancia, dicha fuerza se evidencia en los fenómenos de atracción o repulsión de cuerpos electrificados, de tal manera que la fuerza eléctrica coulombiana adopta la siguiente forma:

$$F_e \propto \frac{ee'}{r^2}$$

Donde e y e' son la cantidad de electrificación que posee cada cuerpo electrificado.

También es necesario aclarar que no hay forma de saber el estado de electrificación de un solo cuerpo, a no ser que este interactúe con otro y hay que tener en cuenta que en esta fenomenología de acción a distancia hablamos de sistemas de partículas. Es por esto que no se puede hablar de cargas puntuales en el espacio, porque fenomenológicamente, estas no se pueden definir.

1.2. Perspectiva de campos

Desde la perspectiva de campos ya no se considera a los cuerpos como los principales actores de la acción sino que se habla de una mecánica de lo continuo, en donde el cuerpo y el espacio interactúan simultáneamente y se introduce el concepto de *medio*, que se puede definir como el conjunto entre cuerpo y espacio; donde el objeto de estudio ya no serán los cuerpos sino todo el sistema involucrado en el fenómeno.

Cuando se habla de perspectiva de campos el estudio parece encaminarse de una mejor forma, ya que se tiene al espacio como un principal protagonista de los fenómenos electrostáticos y actor de la interacción entre cuerpos electrificados, entonces, se habla de acciones locales o acciones atribuidas al medio y no a las partículas. Esta nueva concepción de analizar las clases de electrificación proporciona un mejor entendimiento de lo que sucede en el sistema, y caracterizarlo de una mejor manera. También es importante tener en cuenta el desarrollo de esta perspectiva ayudará más adelante a entender fenómenos complejos como las ondas hertzianas o electromagnéticas.

Las consideraciones necesarias para llegar a establecer una física basada en una teoría donde el campo es fuente de las acciones e interacciones entre los cuerpos, se le atribuye al Michael Faraday.

Partiendo de la perspectiva de campos se establece la caracterización de lo eléctrico desde la fenomenología y a partir de la idea de estado de electrificación se construye la función potencial como la variable de estado de electrificación. Alrededor de la caracterización de la acción eléctrica se construye la función campo eléctrico, siendo el potencial y el campo funciones que caracterizan el espacio en relación con lo eléctrico. Tomando como base estas funciones y su comportamiento

espacial se define la carga eléctrica¹. Posteriormente se hace una caracterización eléctrica del medio a través de propiedades como capacidad eléctrica y capacidad inductiva específica, y se avanza en la explicación de fenómenos tales como la polarización eléctrica de los dieléctricos y el desplazamiento eléctrico.

Basándose en el comportamiento magnético las corrientes eléctricas y la inducción electromagnética se construye el concepto de campo electromagnético. Los cambios de estado en el campo son abordados estableciendo relaciones entre las componentes eléctrica y magnética del campo, ejemplo de estas relaciones son dos de las ecuaciones de Maxwell². A partir de estas relaciones se construye la onda electromagnética, como concepto fundamental con el cual es posible dar cuenta de la manera como varían los campos. En síntesis, la visión de campos es una imagen de los fenómenos electromagnéticos acorde con las ecuaciones de Maxwell, que son presentadas en los textos como los axiomas fundamentales del electromagnetismo y es por eso que tomamos de base esta perspectiva para caracterizar los fenómenos electrostáticos.

1.3. Problemática y metodología

Teniendo en cuenta la problemática que se plantea en cuanto a la enseñanza del electromagnetismo en cursos introductorios, en el siguiente trabajo de investigación se propone a desarrollar una ruta teórica para hacer la debida distinción entre las dos teorías con las cuales se analizan y caracterizan

¹ Ley de Gauss

² $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_q + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

los fenómenos electrostáticos Acción a distancia y perspectiva de campos, y de acuerdo a esto posibilitar la comprensión de la electrostática.

Para empezar a encaminar esta ruta teórica es necesario tener en cuenta como primera medida hacer un análisis de los fenómenos electrostáticos y consideraciones físicas, de los mismos, que conducen a la estructuración de la explicación desde la perspectiva de campos, tomando como referente la obra de Maxwell y Faraday.

Posteriormente se dispondrá a estudiar lo relacionado a la organización de la experiencia sensible, la cual permite de alguna manera constituir los fenómenos electrostáticos y conceptos asociados. Teniendo en cuenta los estudios realizados sobre electrostática de Maxwell y Faraday, se buscará construir elementos para la configuración de problemáticas a ser abordadas en los cursos introductorios de electromagnetismo.

Finalmente se propone caracterizar la naturaleza de la acción eléctrica en cada parte del medio, utilizando como herramienta el teorema de Thomson, el cual establece una forma de analizar los cuerpos electrificados en un espacio encerrado y hacer una reflexión acerca de su utilización para la comprensión de fenómenos electrostáticos como la inducción y conducción.

La investigación se basó en el estudio de los referentes teóricos, y en las diferentes propuestas realizadas por autores involucrados en el campo del electromagnetismo, para poder llegar a un análisis reflexivo acerca de cómo se concibe las diversas caracterizaciones de los fenómenos electrostáticos como la inducción y la conducción.

De este modo el objetivo que finalmente se busca es enseñar tales conocimientos y contenidos de manera diferente a los que se elaboran normalmente, se trata de establecer una ruta específica para la comprensión de conceptos a través de los escritos analizados, con el fin de construir estructuras

particulares de los fenómenos electrostáticos (inducción y conducción), hasta llegar por la misma ruta a conceptos mucho más avanzados y elaborados como lo significa la electrodinámica.

2. SOBRE LOS FENOMENOS ELCTROSTATICOS, LA CARGA Y EL POTENCIAL

Basados en las experiencias descritas en el plan del tratado de electricidad y magnetismo por Maxwell sobre los fenómenos electrostáticos³, se establecerán nociones acerca del comportamiento de los fenómenos electrostáticos, encaminando el desarrollo de la ruta teórica, tomando como eje central la perspectiva de campos.

En la presentación que hace Maxwell es posible observar que hace especial énfasis en la descripción de los fenómenos eléctricos, sin entrar a hacer especulaciones sobre la naturaleza de la causa de las acciones que pueden ser evidenciadas. Por otra parte, muestra algunos rasgos del fenómeno eléctrico que en las presentaciones tradicionales no se ponen de manifiesto, cabe resaltar que los aspectos en los que Maxwell hace énfasis están en estrecha relación con la perspectiva de análisis desde la cual aborda el fenómeno eléctrico, la perspectiva de campos.

A continuación se realizará la descripción y análisis de las experiencias planteadas por Maxwell en su tratado de electricidad y magnetismo.

2.1. Electrificación por fricción.

El primer experimento que propone Maxwell, es friccionar un trozo de vidrio con un trozo de resina y dejar las caras friccionadas juntas, al hacer esto, se puede observar que no ocurre nada que

³ MAXWELL, James Clerk., *A treatise on electricity and magnetism Vol. I.* Dover Publications Inc., New York, 1954.

nos dé cuenta de algún fenómeno eléctrico. Al separar los cuerpos friccionados, podemos notar que se atraen entre sí.

De aquí se puede establecer algunas precisiones. Para que se pueda evidenciar un fenómeno eléctrico, entre dos cuerpos friccionados es necesario una separación entre ellos, desde esta consideración se empieza a tomar en cuenta al medio entre los cuerpos como un agente importante en los sistemas electrostáticos, ya que sin un espacio separador entre ellos, los fenómenos eléctricos no tendrían ningún valor. También podemos afirmar que es necesario contar con un sistema formado por dos o más cuerpos electrificados; ya que no es posible establecer si hay electrificación de un cuerpo, de no ser que este entre en interacción con otro cuerpo.

Seguidamente Maxwell propone friccionar un segundo trozo de vidrio con otro segundo trozo de resina y ponerlos a interactuar con los primeros dos trozos (resina y vidrio) previamente electrificados por fricción y de aquí se puede evidenciar tres resultados importantes:

1. Cada trozo de vidrio se atrae con cada trozo de resina.
2. Los trozos de vidrio se repelen entre sí.
3. Los trozos de resina se repelen entre sí.

Lo que se podría llegar a establecer de estos tres resultados obtenidos es que hay dos fenómenos que se observan: atracción y repulsión. La atracción se manifiesta entre materiales diferentes (resina y vidrio) mientras que la repulsión se puede evidenciar en la interacción de materiales iguales, entre vidrio con vidrio y resina con resina.

A partir de lo que se evidencia en esta primera experiencia, Maxwell denomina a estos fenómenos de atracción y repulsión, como *fenómenos eléctricos*, y a los cuerpos los cataloga como *cuerpos electrificados*. Maxwell afirma que las propiedades eléctricas (no sabemos todavía cuales

específicamente) del vidrio son iguales entre sí, pero opuestas a la de la resina, debido a que el vidrio atrae a lo que la resina repele, y repele lo que el vidrio atrae.

Al haber solo dos fenómenos (atracción y repulsión), también es posible afirmar que existen solo dos tipos de *electrificación*, y que conjuntamente una es opuesta a la otra. Según Maxwell:

“Es la práctica establecida de los hombres de ciencia llamar a la electrificación vítrea positiva y a la resinosa negativa. Las propiedades exactamente opuestas de las dos clases de electrificación nos justifica el indicarlas con signos opuestos, pero la aplicación del signo (+) a una clase más que a la otra debe ser considerada como un asunto de convención arbitraria, de la misma manera que es una convención en los diagramas matemáticos designar las distancias positivas hacia la mano derecha.”

(MAXWELL, 1954)

Entonces se establece también que la propiedad eléctrica que adquiere el vidrio al frotarlo con la resina es positiva, y la de la resina por ser opuesta a esta es negativa. Cabe resaltar que esto es debido a una convención que siempre se ha tenido en cuenta desde que se estudia los fenómenos eléctricos y no por interés propio.

Vidrio (+)

Resina (-)

Desde este punto también se puede entrar a pensar que no hay una tercera propiedad eléctrica de los cuerpos, ya que cualquier otro cuerpo que adquiriera una propiedad de electrificación sea el cuerpo que sea, tiene la opción de repelar o atraer el vidrio o la resina, dependiendo el fenómeno, es decir, no se presenta un tercer fenómeno entre cuerpos electrificados que nos den cuenta de una tercera propiedad.

2.2. Electrificación por inducción.

Se han planteado aspectos de gran importancia para el inicio del estudio de los fenómenos electrostáticos, para poder entender el planteamiento de Maxwell en cuanto al desarrollo de la perspectiva de campos, es necesario tener en cuenta un fenómeno eléctrico en particular: la inducción.

La inducción es la pieza clave para el desarrollo de la teoría que explica los fenómenos eléctricos según Maxwell. Las experiencias que se llevaron a cabo para la elaboración de una teoría que explicase los fenómenos electrostáticos desde una teoría de campos, se hicieron sobre conductores huecos cerrados y con la ayuda de los electroscopios. En estas experiencias se pudo evidenciar, como el fenómeno de inducción está presente como un agente que determina el estado del sistema; también permite llegar a introducir nuevas concepciones como los son el grado de electrificación y la cantidad de electrificación, que después con la estructuración y edificación de la teoría se conocerán respectivamente como potencial eléctrico y carga.

Maxwell toma como punto de partida la inducción para encaminar sus investigaciones, y asume la electrificación por inducción como el fenómeno más importante para la perspectiva de campos.

2.2.1. Experimento propuesto de Maxwell

Maxwell propone tomar un recipiente metálico abierto con tapa. En la tapa, introducir un hilo de seda, de tal manera que al cerrar el recipiente no toque las paredes de este. Seguidamente se suspende un trozo de vidrio, previamente electrificado por fricción como se hizo en el experimento anterior, y se introduce en el recipiente metálico (el cual no posee ningún tipo de electrificación), sin que toque ninguna de las paredes. (MAXWELL, 1954)

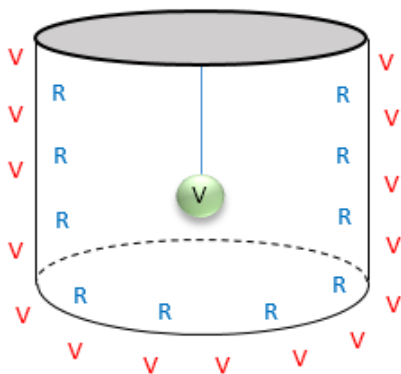


Figura 1

De aquí se puede percibir que el recipiente metálico queda vítreamente electrificado en el exterior, y se puede notar también que la electrificación es la misma en cualquier punto del recipiente. Cuando el trozo de vidrio es sacado del recipiente metálico este mantiene su estado de electrificación inicial y el recipiente pierde la propiedad de electrificación que el vidrio le había proporcionado.

Con respecto a la experiencia anterior se pueden precisar algunos aspectos importantes:

El trozo de vidrio electrificado otorga al recipiente un estado de electrificación, el exterior de este presenta la misma electrificación que el vidrio, pero en el interior se presenta otra clase contraria a la del vidrio y de la misma clase que la de la resina (figura1). Al retirar el trozo de vidrio del recipiente sin tocarlo se puede evidenciar que tanto el vidrio como el recipiente vuelven a su estado inicial, esto quiere decir que con solo la presencia del vidrio en el interior de recipiente, genera en este un tipo de electrificación que se adquiere sin necesidad de contacto directo.

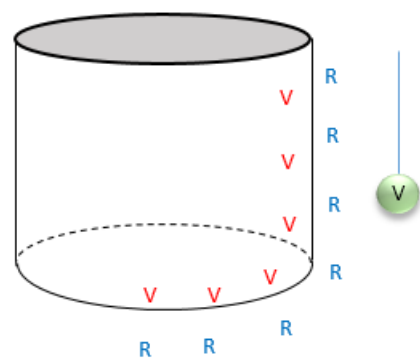


Figura 2

Hay que tener en cuenta también que si colocamos el trozo de vidrio en alguna sección del exterior del recipiente, esta sección adquiere el estado de electrificación del vidrio, dejando así las otras

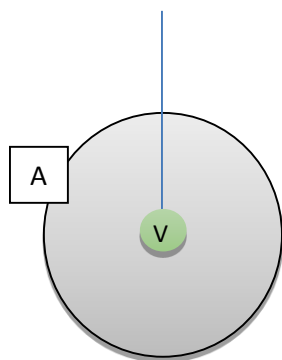
secciones que no tienen contacto aparente con el vidrio, con un estado de electrificación contrario (figura 2).

En esta experiencia observamos que los cuerpos pueden adquirir estados de electrificación sin tener contacto; como si solo la presencia de un objeto previamente electrificado bastara para cambiar el estado del otro cuerpo.

Este punto nos lleva pensar nuevamente que el medio toma un papel relevante para el fenómeno de electrificación, ya que no es necesario tener contacto directo entre dos cuerpos para producir electrificación. A diferencia de la perspectiva de acción a distancia donde los cuerpos son las principales fuentes de fuerzas centrales instantáneas entre ellos, vemos que en este experimento, se podría comenzar a evidenciar algún tipo de configuración en el medio para que ocurran estas fenomenologías. Desde la perspectiva de campos, la acción no es instantánea sino que requiere tiempo, y no debe darse necesariamente a lo largo de las rectas que unen los cuerpos.

Este tipo de electrificación se llama *electrificación por inducción* y es necesario tener en cuenta que se presenta en materiales que permitan la conducción de electrificación a través de ellos. Porque si se toma otro recipiente que no permitiera la transmisión de la electrificación como el plástico o la madera, no se podría presentar este fenómeno.

2.2.2. Grado de electrificación.



Si procedemos a realizar otro experimento donde se tiene un recipiente metálico conductor A totalmente cerrado, que se dispone a ser electrificado por inducción mediante un cuerpo vítreamente electrificado por fricción como se muestra en la figura 3. Se toma un conductor eléctrico esférico, para facilitar las explicaciones de la configuración del mismo.

Figura 3

Teniendo en cuenta las experiencias ya descritas se entiende que el exterior de este recipiente queda vítreamente (positivamente) electrificado y su interior resinosamente (negativamente). Se pueden establecer una serie de criterios inicialmente, el recipiente se encuentra con cantidad de electrificación determinada que depende del cuerpo electrificado introducido, pero el estado de electrificación tiene una dependencia en cuanto a la configuración del recipiente conductor, es decir, en este caso depende del tamaño que este tenga.

Por lo tanto estaríamos diciendo que el conductor cerrado, que encierra el cuerpo electrificado, nos da cuenta directamente del estado de electrificación, al cual asociaremos como el *potencial eléctrico* en esa superficie. Entonces en este caso el cuerpo electrificado vítreamente, está encerrado en un potencial (conductor cerrado), al que denominaremos como V_a .

De modo que si tuviéramos dos conductores encerrados con la misma configuración del conductor A y el mismo estado de electrificación, decimos que tienen el mismo potencial eléctrico.

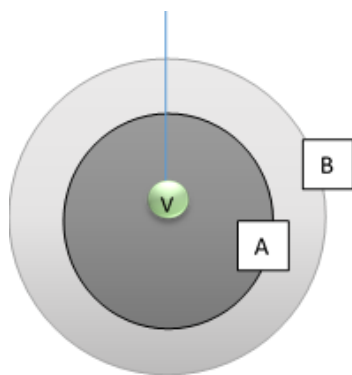


Figura 4: experimento con dos conductores encerrados

De este experimento podemos comenzar a distinguir los diferentes estados de electrificación y para esto es necesario establecer otra configuración que nos dé cuenta de un potencial eléctrico diferente al de V_a . Retomando nuestro experimento, ahora procedemos a introducir el recipiente A, en un recipiente B conductor no electrificado de mayor tamaño como se muestra en la figura 4.

Al introducir (sin tocarlo) el recipiente A previamente electrificado en el recipiente B, se evidencia que B también adquiere electrificación por inducción, debido al cuerpo vítreamente electrificado que se encuentra en el interior de A, esto quiere decir que los dos recipientes se encuentran electrificados. Teniendo en cuenta la diferencia de tamaños de los recipientes A y B se establece que el recipiente A debido a que su tamaño y posición es diferente que el de B, se encuentre en un estado de electrificación diferente al de B, pero el sistema se encuentra con la misma cantidad de electrificación, como si el recipiente A no se hubiera introducido en el recipiente B.

Con esto podemos decir que la cantidad de electrificación generada por el cuerpo electrificado, se mantiene constante independientemente en que tantos recipientes se encuentren encerrada. Esta conservación de la cantidad de electrificación se debe a que la electrificación se distribuye de manera diferente en cada recipiente teniendo así en cada uno de ellos un estado de electrificación diferente.

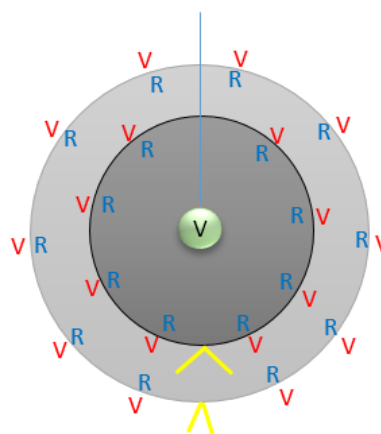


Figura 5: configuración de dos conductores encerrados

Por lo tanto de este experimento se puede deducir que al introducir el conductor B, se genera otro potencial eléctrico diferente V_B , de tal manera que si midiéramos su intensidad con un indicador⁴, nos mostraría que se encuentra en un potencial de menor intensidad (figura 5).

También podemos establecer la configuración en cuanto a cómo se distribuye la electrificación en los conductores y encontramos que se genera una polarización en el medio encerrado, de tal manera que si por dentro del conductor esta resinosamente (negativo) electrificado, por fuera de este va a quedar vítreamente (positivamente) electrificado.

2.2.3. Superficies equipotenciales

Por lo tanto si retomamos el experimento anterior y encerramos nuestro cuerpo electrificado en N conductores cerrados se producirán también N potenciales eléctricos, cada vez con menor intensidad, de tal manera que mientras más conductores encierran el cuerpo, el potencial de estas superficies va a tender a cero. Cada una de estas superficies que encierran el cuerpo electrificado está asociada directamente con el concepto de *superficies equipotenciales*, donde cada una de estas nos evidencia los diferentes potenciales de cada conductor que encierra el cuerpo electrificado, y cada una de ellas poseen el mismo potencial en cualquier punto de la superficie donde se mida.

Por lo cual podemos entrar a conceptualizar acerca de los que significa *potencial a tierra*, ya que si seguimos esta lógica de conductores infinitos, el planeta tierra nos representará un gran conductor, de esta manera si tomamos en cuenta la distancia que existe entre el conductor que se está estudiando y la tierra; en la tierra (como conductor al infinito) su potencial tendería a cero. Es

⁴ Un indicador de potencial, se entiende como una tira metálica de dos patas, que dependiendo la intensidad de este se abre en proporción al estado de electrificación. Se conoce más comúnmente como electroscopio.

por eso que si tomamos un cuerpo electrificado (sin encerrarlo), se tomaría en cuenta la diferencia de potencial que se genera entre el cuerpo y el potencial tierra, y no un potencial establecido por el cuerpo, como en algunas ocasiones se suele decir.

De esta manera se establece que lo que toma sentido en este orden de ideas, es hablar de una diferencia de potencial entre conductores electrificados y no puntualizar acerca del potencial ejercido por los cuerpos cargados.

Estos grados de o potenciales van estrechamente relacionados con la configuración del espacio que produce la presencia de los diferentes conductores que encierran el cuerpo electrificado, pero para llegar a esta premisa, fue necesario alterar el medio exterior al conductor, es decir, si no se hubiera encerrado nuevamente el conductor dentro de otro, no hubiéramos podido evidenciar los dos potenciales V_a y V_B .

2.3. Electrificación por conducción.

Se toma un recipiente del mismo modo que en el experimento anterior, igualmente electrificado vítreamente por inducción (suspendiendo un cuerpo vítreamente electrificado en su interior). En el exterior de este se coloca otro cuerpo metálico suspendido sin electrificar, también por hilo de seda. Se toma un pedazo de alambre metálico, y se pone en contacto con el recipiente y el cuerpo metálico del exterior.

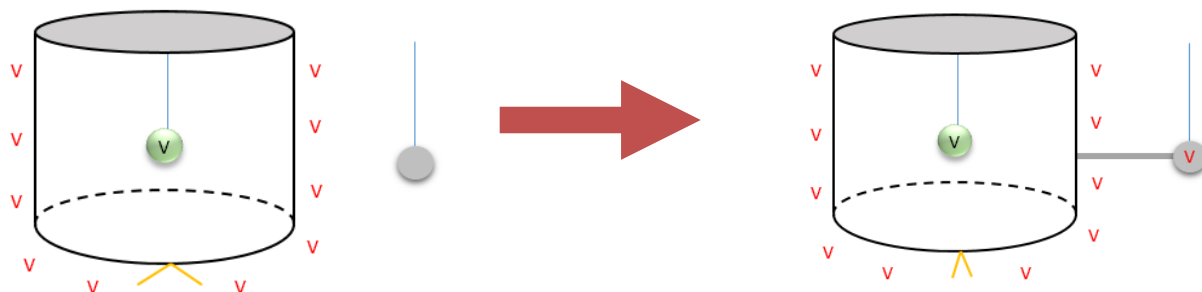


Figura 6: cambio de cantidad de electrificación

Se puede observar que el segundo cuerpo metálico, adquirió electrificación vítrea igual que el cuerpo del interior del recipiente; pero la electrificación del recipiente disminuyó en cuanto a cantidad, esto se evidencia por medio de un electroscopio que se le conecta al recipiente y mientras más abiertas estén las láminas de oro del electroscopio, se entiende que tiene más cantidad de electrificación que si estuvieran un poco más cerradas.

En la *figura 6* se puede observar que la cantidad de electrificación se representa con unas placas de oro, que depende de la abertura que ellas despliegan, representa la cantidad de electrificación que el cuerpo tiene. Entre más abiertas se encuentren, más cantidad de electrificación va a tener el cuerpo.

De este experimento se evidencia que otra forma de electrificar un cuerpo es por medio de contacto directo, y este tipo de electrificación se denomina: *electrificación por conducción*. Además podemos resaltar que el cuerpo que le está otorgando la electrificación al cuerpo suspendido en el exterior, es el recipiente, ya que el electroscopio está marcando es la electrificación inducida al recipiente y no la del cuerpo vítreamente electrificado suspendido en el interior.

2.3.1. Cantidad de electrificación

Se puede comenzar a intuir acerca del conductor que encierra al cuerpo electrificado, de cómo es el comportamiento de este, ya que si encerramos completamente un cuerpo electrificado en un conductor, este recipiente va a quedar completamente electrificado por inducción, tanto en su interior como en su exterior, y se crea una cierta configuración en todo el sistema. De tal manera que si midiéramos con un electroscopio, cualquier punto del conductor electrificado por inducción, tendría la misma cantidad de electrificación en todos los puntos del exterior, incluso si moviéramos el cuerpo electrificado por dentro del conductor, la medición por fuera del conductor sigue siendo la misma para cada punto de la superficie exterior de este.

De esta manera se establece un concepto muy importante para el estudio de estos fenómenos electrostáticos y su cantidad de electrificación, al cual se le denomina *carga*. Esta cantidad física está estrechamente ligada con el estado de un sistema, ya que para cambiar de un potencial a otro es necesaria una acción.

La carga como cantidad física evidencia la forma de estar de un determinado sistema, ya que para poder llegar a estar en cierto estado de electrificación (potencial) fue necesario ejercer una acción física que es la que está determinada directamente como la carga del sistema. De tal manera que desde esta perspectiva la carga deja de tomar propiedades materiales con existencia objetiva y pasa a ser una causa del cambio de estado, y esa causa se evidencia con la cantidad de electrificación.

(AYALA & al, 2003)

Esto nos lleva a pensar que la perspectiva de acción a distancia no nos permite modelar un sistema electrostático, porque si la fuerza eléctrica según esta perspectiva⁵ depende de la distancia entre los cuerpos, en este caso pierde validez, porque al mover el cuerpo en el interior del conductor, estaríamos afectando la distancia entre los cuerpos pero como tal la intensidad de la electrificación en el exterior no se ve afectada.

Faraday también plantea que la acción inductiva es igual en cantidad y poder a la acción debida a la conducción y que por tanto las dos no se diferencian en su principio de acción.

“Si C es meramente suspendida en A, ella actúa sobre él (recipiente) por inducción desarrollando electricidad de su propia clase sobre el exterior de A, pero si C toca a A su electricidad es entonces comunicada a él, y la electricidad que está positivamente en el exterior de A puede ser considerada como aquella que estaba originalmente en el portador C. Como este cambio, sin embargo, no produce ningún efecto en las hojas del electrómetro esto prueba que la electricidad inducida por C y la electricidad en C son precisamente iguales en cantidad y poder.” (FARADAY, 1955)

La electrificación inducida es para Faraday un estado de electrificación genuino: los efectos producidos por la acción inductiva no se diferencian de aquellos debidos a la electrificación por fricción o conducción. Contrasta esta postura con la planteada por los textos según la cual un cuerpo está realmente electrificado cuando si carga neta es diferente de cero. No es posible diferenciarla de las otras formas de producción de electrificación.

La inducción eléctrica –según Faraday- es una acción que se ejerce en y a través del medio existente entre los cuerpos; y es esta acción lo que está a la base de cualquier efecto de carácter

⁵ En el caso eléctrico la perspectiva de acción a distancia se asocia a la ley de Coulomb, donde se modela la fuerza entre dos cargas eléctricas interactuando entre sí y en donde se considera a los cuerpos como entes de las acciones. Charles-Augustin de Coulomb (1785). $F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$

eléctrico. En contraste, en los textos la inducción se suele presentar como la acción que ejerce el cuerpo inductor sobre otro distante de manera directa. (GARCIA, 1999)

Del experimento se desprende que la inducción es previa a la conducción. Para que se presente conducción al tocar el recipiente metálico con el objeto electrificado ya existía previamente un estado inductivo lo que significa que la conducción es un estado derivado de la inducción.

Si se propone como ejemplo otro experimento en donde se encierra un conductor A electrificado dentro de otro conductor B y se conectan entre sí. (Figura 7).

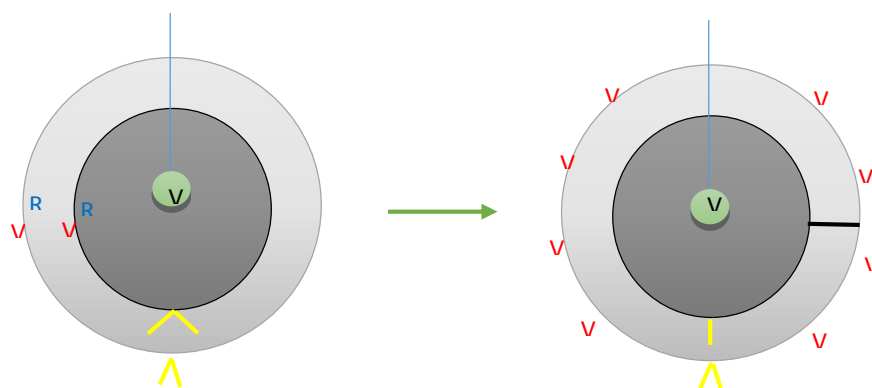


Figura 7: Configuración al conectar los conductores

Al conectar los dos conductores A y B, lo que se evidencia principalmente es que la electrificación en el interior del conductor B y en el exterior de A se anulan, ya que al colocar el indicador de potencial en el conductor A, no nos marca ningún tipo de electrificación; mientras que el exterior del conductor B, el estado de electrificación permanece igual que al comienzo.

Esto se debe a que inicialmente se tenía una diferencia de potencial entre el exterior del conductor A y el interior del conductor B, ya que ambos conductores contaban con un estado de electrificación diferente que era el que marcaba el electroscopio, al conectar ambos conductores el desequilibrio que existía allí entre potenciales se rompe y se produce un equilibrio y por lo tanto el electroscopio deja de marcar en esta zona específica, pero se evidencia que al exterior del conductor B, todavía marca una electrificación, pero esta se debe a la diferencia de potencial marcada entre el conductor B y el conductor a tierra.

2.4. Superposición de estados de electrificación por Inducción

Teniendo en cuenta el desarrollo del experimento de electrificación por inducción, se procede a insertar en el recipiente conductor totalmente sellado un trozo de resina de igual tamaño al de vidrio previamente electrificado con el trozo de vidrio que se encuentra en el interior del recipiente (figura 8).

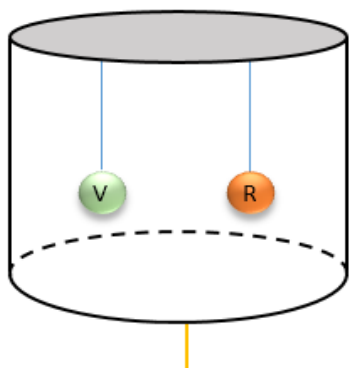


Figura 8

Se puede evidenciar que el estado de electrificación que había adquirido el recipiente previamente con el vidrio, desaparece al introducir el trozo de resina junto con este, esto se demuestra por medio del electroscopio el cual no marca ninguna clase de electrificación en el exterior del recipiente.

Por lo cual se podría inferir que la resina posee una clase de electrificación igual en cantidad, pero opuesta a la del vidrio.

El estado de electrificación en el interior del recipiente con respecto a la cantidad de cuerpos electrificados que ese encuentre en su interior cumple con el principio de superposición, ya que:

$$-R + V = 0$$

$$V = R$$

De este experimento se puede afirmar que existen dos tipos de electrificación y que son opuestas entre sí, pero en este caso se tiene una propiedad adicional que es la *cantidad de electrificación* ya que al tener dos objetos electrificados, uno vítrea y otro resinosamente, se anula la electrificación, solo si es la misma cantidad de los dos objetos electrificados pero de diferente tipo (positiva y negativa).

La electrificación nula que se evidencia en el electroscopio, es la del recipiente conductor, ya que los cuerpos en el interior de este continúan electrificados (porque no se han puesto en contacto como en el experimento 3). Entonces en este caso, lo que se ve afectado es la configuración del conductor en el exterior debido a dos cuerpos electrificados de forma opuesta (uno positivamente y otro negativamente), y es por eso que se presenta la electrificación cero en el exterior del conductor. Es por esto que este fenómeno se presenta es por la configuración que adquiere el medio bajo estas condiciones.

2.5. Superposición de estados de electrificación por Conducción

Se tiene un recipiente A como el del experimento de electrificación por inducción, electrificado vítreamente por inducción, y un recipiente B electrificado resinosamente por inducción, seguidamente se ponen en contacto mediante un alambre (figura 9).

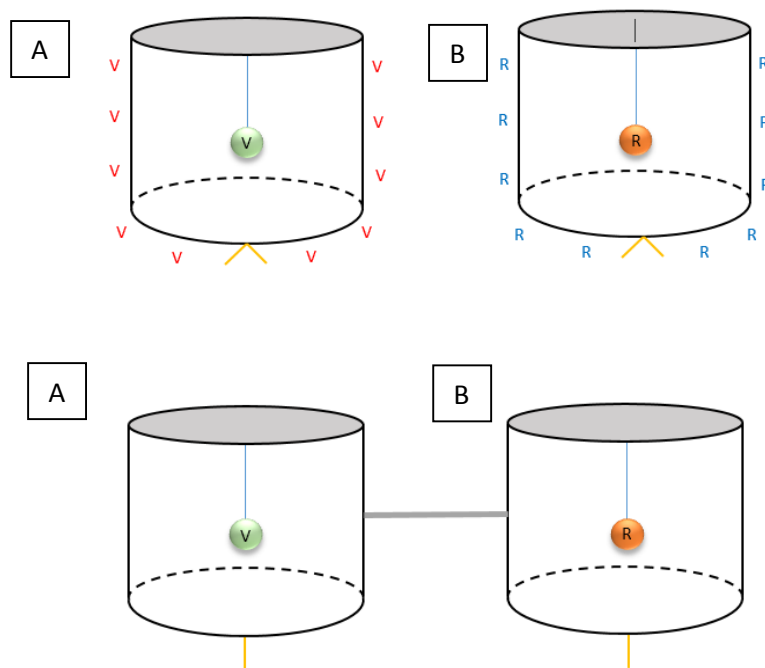


Figura 9

Al poner los recipientes A y B en contacto se puede evidenciar por medio del electroscopio que se anula la electrificación exterior de los dos recipientes, debido a la superposición de estados.

Seguidamente se sacan los dos trozos de los recipientes A y B, y también se retira el alambre que había entre ellos. Se puede evidenciar que el recipiente A cambia su electrificación exterior a resinosa, y el recipiente B a vítrea (figura 10).

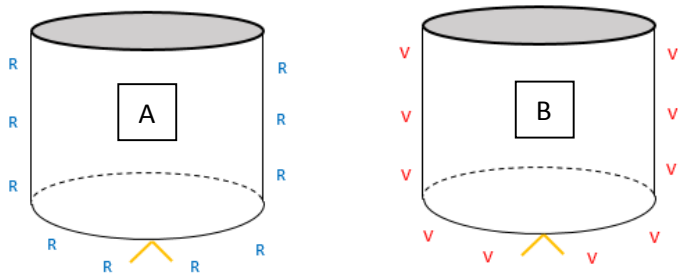


Figura 10

De esta experiencia se observa una forma de electrificación que se compone de dos partes básicamente. En la primera parte se tiene electrificación por inducción mediante cada uno de los trozos de

vidrio y resina introducidos en cada recipiente respectivamente. En la segunda parte los dos

recipientes se colocan en contacto por medio de un alambre metálico, en esta ocasión como los dos recipientes tienen la misma cantidad de electrificación, pero de signo opuesto se evidencia una anulación en la electrificación de los recipientes en el exterior, así como se observó en el experimento anterior.

Pero se evidencia un resultado diferente al retirar los cuerpos y el alambre; cambia el tipo de electrificación entre los cuerpos, el recipiente que estaba resinosamente electrificado queda vítreamente y viceversa con el otro recipiente. Se puede concluir que esto se debe al alambre conductor que conectaba los dos recipientes, ya que al contactar los dos estados de electrificación diferentes, se produce una superposición de estados en el exterior y por esta razón el electroscopio marca un estado de electrificación nulo en el exterior, como se pudo evidenciar en el experimento anterior.

El hecho de que no se mostrara ningún tipo de electrificación en el exterior, no quiere decir que los cuerpos hubieran dejado de presentar propiedades eléctricas, sino que hubo un cambio de configuración en el interior de ellos. Después de retirar el alambre conductor que unía a los dos recipientes y los cuerpos electrificados; se produjo un cambio de estado de electrificación entre los dos recipientes y esto quiere decir primero que se encontró una forma de cargar los conductores sin necesidad de contacto (por inducción) y segundo una forma de invertir la polaridad de los dos recipientes.

Ahora para saber con qué cantidad de electrificación quedaron los recipientes, se toma un tercer recipiente C más grande que los anteriores, y en este se introducen el recipiente A con el trozo de vidrio y se encontrará que el recipiente C, no evidencia ningún tipo de electrificación (figura 11).

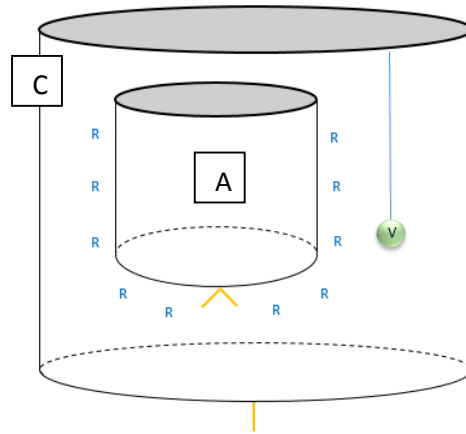


Figura 11

Por lo tanto se muestra que la electrificación del recipiente A es exactamente igual y opuesta a la del trozo de vidrio. Y de manera igual se puede demostrar con el trozo de resina y el recipiente B.

3. CARACTERIZACION DEL MEDIO

Hasta el momento se entienden dos propiedades claras de la electrificación que son el grado y la cantidad de electrificación, las cuales van estrechamente ligadas y nos dan cuenta del estado de electrificación de los cuerpos, a partir de estas propiedades de los cuerpos electrificados, se ha podido aclarar conceptos como Potencial, carga y superficies equipotenciales.

El fenómeno de electrificación de un cuerpo no es dependiente del cuerpo electrificado, sino que este fenómeno hace referencia a todo el medio que está implícito. Electrificar un cuerpo es, por lo tanto, afectar el estado del cuerpo así mismo, como el estado del medio. Tal estado produce un stress mecánico en el medio que se manifiesta a través de fuerzas mecánicas.

En un medio dieléctrico, durante el tiempo en que tal cambio de estado se da, se dice que hay flujo de electricidad, a través de cualquier sección normal a la dirección de

la intensidad electromotriz en el medio (que incluye ahora el cuerpo en cuestión) producido por una fuerza electromotriz. La cantidad de electricidad que fluye por unidad de área en un punto del medio es una medida del cambio que se experimenta en dicho punto. (GRAMAJO, 1993)

De esta manera, el estado de electrificación en cualquier lugar del medio dieléctrico va a ser equivalente a la cantidad de electricidad que fluye por unidad de área, cuando el cambio se presenta desde un estado de no electrificación hasta llegar a uno de electrificación diferente de cero.

A continuación se procederá a hacer la construcción de otros conceptos importantes como son el campo eléctrico, y a partir de este es donde toma más importancia la teoría de campos para los fenómenos electrostáticos.

3.1. Campo eléctrico.

Para Maxwell el campo eléctrico está relacionado con la vecindad de los cuerpos que se encuentran electrificados. Esta vecindad se podría denotar como una porción del espacio, la cual puede estar llena de aire, vacío o estar ocupada con algún otro cuerpo. (MAXWELL, 1954)

Teniendo en cuenta esta definición que da Maxwell en su plan del tratado, podríamos como él lo menciona ocupar una de esas vecindades del cuerpo electrificado, con otro cuerpo ya sea que este se encuentre o no, también electrificado. La consecuencia que se genera por la presencia de este en un campo eléctrico, será la perturbación o alteración de las dos vecindades respectivamente o dicho de una mejor manera hay una alteración en el espacio que ocupan estos dos cuerpos.

A partir de la anterior afirmación, se puede establecer relaciones entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico, ya que estos dos criterios nos sirven como herramienta para caracterizar el campo, con ello se podría ejecutar el cálculo del potencial a partir del campo eléctrico y viceversa.

De acuerdo con los análisis descritos en el capítulo anterior, se pone de manifiesto que la superficie del conductor en donde se encuentra encerrada la carga, actúa como una superficie equipotencial, en la cual el campo eléctrico generado por el cuerpo electrificado en el interior del conductor es perpendicular a la superficie de este. Si conocemos algunos puntos del campo eléctrico y que el potencial es una función escalar (describe un punto), podemos desarrollar la expresión anterior en términos de sus componentes, ejecutando el producto escalar, del campo eléctrico y el desplazamiento, así obtenemos:

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Si queremos expresar el campo eléctrico en términos del potencial y el desplazamiento se obtiene:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

La expresión anterior es conocida como el gradiente de potencial el cual establece, que el potencial es la dirección de mayor variación del campo eléctrico, si tomamos el caso en particular en donde V es igual a cero, también el campo eléctrico es cero, y se evidencia que este campo es perpendicular a la superficie equipotencial, en este caso el conductor cerrado.

A partir de la anterior definición se pueden establecer una serie de condiciones que permitan conceptualizar de una manera más precisa sobre las superficies equipotenciales y las configuraciones que se pueden encontrar.

3.2. Ecuación de Poisson y Laplace.

En primera medida relacionaremos la ecuación de Maxwell relacionadas con el campo eléctrico y su configuración:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación establece que la divergencia del campo eléctrico es igual a la densidad volumétrica de carga sobre la permitividad del vacío, dicho a grosso modo esta es un forma más de la ley de Gauss.

De acuerdo con la expresión vectorial de la primera ley de Maxwell y la expresión para la intensidad del campo eléctrico en términos del potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V)$$

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

De esta manera se obtiene una expresión que relaciona la densidad de carga con el potencial eléctrico, la bien conocida ecuación de Poisson; ahora bien si tuviéramos el hipotético caso en el que cual hay zonas en donde la densidad de carga es nula, se obtiene la ecuación de Laplace.

$$\bar{\nabla}^2 V = 0$$

La ecuación de Poisson es una expresión muy importante en el desarrollo de la teoría de los fenómenos eléctricos, si esta ecuación se satisface sobre cualquier función y si en la superficie del conductor esta función tiene un valor específico para determinar el valor del potencial de dicho conductor, entonces esta función constituye un valor real para el potencial de todo el sistema en cada punto que lo conforma.

El desarrollo anterior tiene como intencionalidad encaminar de una manera adecuada los criterios que más adelante se pondrán de manifiesto a partir de un teorema en particular y que Maxwell desarrolla en el plan del tratado, para definir la distribución de energía de campo.

Maxwell realiza todo el formalismo de su teoría electromagnética, tomando como punto de partida el hecho de que el medio es un agente importante para que estos fenómenos existan. Las acciones a distancia se pueden usar como una herramienta para identificar las leyes de acción del sistema, pero a la hora de abordar la causalidad del porqué de estas acciones, este enfoque de acción a distancia no es sensato.

Para ello se tendría que tener en cuenta el papel del medio como agente local y las acciones se dan por y a través de él, para que esto suceda el medio debe estar en una disposición específica o dicho de una mejor forma, en un estado de stress, existen tensiones a lo largo de las líneas de fuerza y presiones perpendiculares a estas tensiones. Una de las herramientas necesarias para entender cómo se manifiestan estas acciones en el medio y que nos permiten encontrar variables para

relacionar el medio con las acciones, es la mecánica de los medios continuos, la cual se caracteriza por estudiar las acciones sobre cuerpos extensos, sin considerar que estas actúan en puntos específicos como lo haría un análisis de corte Newtoniano.

3.3. Caracterización del medio a partir del stress

Maxwell planteo en su plan de tratado y magnetismo que el medio entre los sistemas con cuerpos electrificados tenían que encontrarse en un estado de *Stress*, además que si la acción eléctrica se da por y a través del medio, este comportamiento se podría asemejar a un estado de stress mecánico, donde existan tensiones a lo largo de las líneas de fuerza y presiones perpendiculares a estas líneas.

Teniendo en cuenta el enfoque de estudio de la Mecánica de los medios continuos, en donde las acciones se ejecutan sobre los cuerpos, hay que hacer una serie de consideraciones con las cuales surgen criterios para un mejor análisis desde la perspectiva de campos.

Estas acciones que actúan sobre los cuerpos se conocen con el nombre de esfuerzo y es necesario pensar que se dan en pares, también es preciso considerar que estas acciones actúan sobre planos o superficies.

El esfuerzo se caracteriza por obedecer una clasificación específica ya que los medios no siempre se encuentran en la misma disposición, en ocasiones hablamos de esfuerzos compresivos (presión), esfuerzos extensivos (Tensión) y esfuerzos tangenciales (cizallas). Esta clasificación va estrechamente ligada a los planos en donde se aplican estas acciones, con este análisis emerge la relación que existe entre el esfuerzo y el estado determinado del sistema.

Estos esfuerzos se pueden distinguir y medir teniendo en cuenta el par en la que se presenta la acción, y así poder establecer una relación de orden numérico. Las tensiones se distinguen por el efecto que genera la aplicación en su respectivo par.

En relación con lo anterior y tomando en cuenta al esfuerzo como una variable de estado, se dice que los medios están en un estado de stress específico, relacionado con los esfuerzos que existan en el medio. Estos esfuerzos son medidos en términos de fuerza sobre área, sabiendo que se dan en pares y que actúan sobre planos. Hay que tener en cuenta que si analizamos la disposición de un cuerpo, o dicho de una mejor manera, la forma de estar de ese cuerpo, nos encontramos con dos conceptos que se encuentran correlacionados y es preciso hacer una distinción entre ellos: esfuerzo y fuerza.

Para Faraday el medio está compuesto por una serie de líneas de fuerza que se extienden por todo el espacio y estas líneas son un agente importante para la interacción entre los cuerpos. Sobre estas líneas de fuerza se encuentran perpendiculares a ellas tensiones y presiones, con lo cual podríamos inferir que si pudiéramos medir un punto cualesquiera del medio, tendríamos como resultado valores diferentes para cada punto. Entonces se establece que cada punto tiene una disposición o una forma de estar que lo caracteriza.

Por medio de Stress se puede caracterizar un sistema a través del medio en donde encontramos los fenómenos, para ello se hace uso de variables dinámicas las cuales nos definan por medio de una variable de estado como se encuentra el sistema. Las presiones, las tensiones entran a ser parte de una característica que es el esfuerzo, y por medio de este definimos al Stress como variable de estado. Habiendo planteado estas consideraciones Maxwell utiliza como herramienta la caracterización que es realizada a los cuerpos sólidos por medio de su estado de stress, para

interpretar y describir cómo se comporta el medio en donde se encuentran los sistemas electrificados, asignándole características mecánicas a este.

Para *Rodríguez Omar*, la caracterización del medio a partir del stress implica caracterizar los esfuerzos a partir de tensiones y presiones en todos los puntos del medio. Lo que implica que el medio se ve sometido a diferentes stress en todos y cada uno de sus puntos. Pero esta implicación también denota que al pasar de un punto a otro del medio, va a generar un cambio también en cuanto a las presiones y tensiones, como tales esfuerzos en cada punto varían en todas las direcciones la caracterización de cada uno de ellos requiere la consideración de una superficie infinitesimal que pase por el punto mismo. (RODRIGUEZ, 1994)

Así, con lo anterior queda definido el esfuerzo como la magnitud que da cuenta del estado de stress, el esfuerzo es entonces una magnitud tensorial que puede representarse por la siguiente matriz.

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde la diagonal de la matriz depende de los esfuerzos aplicados perpendicularmente a cada plano, es decir corresponde a las tensiones y presiones. Las otras componentes tensoriales son correspondientes a los esfuerzos de cizallas. Hay que tener en cuenta que el primer subíndice se refiere al plano y el segundo se refiere a la dirección del esfuerzo.

3.4. Función energía de campo y Tensor electrostático.

Queda claro que el stress representa el estado en que se encuentra nuestro sistema que involucra todo el medio estudiado, en nuestro caso el sistema electrostático, mientras que el esfuerzo es una

magnitud que se puede definir en cada punto con relación a un plano. Partiendo de esto, la forma de caracterizar un sistema electrostático a partir de los esfuerzos que ejercen las diferentes fuerzas y campos producidos en un sistema de estos, se hace mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell o también llamado *tensor electrostático*.

Los cuerpos desde esta perspectiva son asumidos como porciones del mismo medio que pueden ser diferenciadas, como características específicas de este, de tal manera que toda fuerza eléctrica surge del stress de un medio y en este sentido puede ser pensada en términos de la acción mutua entre partes vecinas del medio.

La naturaleza de este stress, es como Faraday apunta, una tensión a lo largo de las líneas de fuerza combinada con una presión igual en todas las direcciones perpendiculares a estas líneas. De la hipótesis que la acción eléctrica no es una acción directa entre los cuerpos a distancia, pero es ejercida a través del medio entre los cuerpos, hemos deducido que este medio debe estar en un estado de stress. También hemos averiguado el carácter del esfuerzo, y comparado éste con el esfuerzo que ocurre en los cuerpos sólidos. (MAXWELL, 1954)

De acuerdo con la teoría de los medios elásticos, la fuerza total que actúa sobre un volumen dado puede considerarse transmitida a través de la superficie S que limita dicho volumen y formulada en términos de una magnitud tensorial T , denominada tensor de esfuerzos o de tensiones.

A partir de lo mencionado anteriormente se procede a estudiar el fenómeno del Stress para hablar de la energía de campo en función de este. A través del campo eléctrico se pueden establecer relaciones entre la energía electrostática en función del campo, teniendo en cuenta el estudio de los medios continuos y considerando al medio como un cuerpo elástico de la siguiente manera:

El stress para un cuerpo elástico está dado por la expresión:

$$s = YD$$

Donde Y es el módulo de Young y D es la deformación que experimenta el cuerpo que está dada por:

$$D = \frac{\Delta x}{l_0}$$

Entonces

$$s = Y \frac{\Delta x}{l_0}$$

La energía potencial elástica de un cuerpo elástico viene dada por:

$$u = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

Reemplazando

$$u = \frac{1}{2} k \frac{s^2 l_0^2}{Y^2}$$

Donde k es $\frac{Y}{l_0}$, finalizando obtenemos:

$$u = \frac{1}{2} \frac{Y}{l_0} \frac{s^2 l_0^2}{Y^2}$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{l_0 s^2}{Y}$$

Tomando $\frac{l_0}{Y}$ como una constante tenemos

$$u = \frac{1}{2} \eta s^2$$

La expresión anterior es la energía que se le asocia a los medios continuos cuando se produce una deformación en este, es por eso que Maxwell asocia esta expresión también con el medio en donde se observa los fenómenos electrostáticos, tomando estos como un medio continuo, principalmente el de inducción. Es decir, que cuando se crea una configuración en un sistema electrostático se considera al medio como un cuerpo elástico y se produce una deformación en todo el espacio de la vecindad del cuerpo electrificado, al generarse esto también podemos hablar de la energía que produce esta deformación la cual se denomina *energía de campo* y se obtiene la siguiente expresión:

$$u = \frac{1}{2} \int \rho v. dv'$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2. dv'$$

Con la expresión anterior se pueden identificar varios aspectos en los cuales se pueden evidenciar como una teoría de campos es apropiada para entender cómo se caracteriza el medio entre sistemas electrificados:

- Es notorio como la expresión anterior se encuentra en términos de variables y constantes, que están estrechamente relacionadas con propiedades y formas de estar del medio.⁶
- Se podría establecer el valor de la fuerza electrostática en un elemento de volumen, en función del campo en la superficie de dicho elemento.
- Se consideran los campos como fuentes directas de la acción, esto equivale a considerar los campos como medios transmisores de la tensión.

⁶ ϵ_0 permisividad del vacío y E campo eléctrico

- La intencionalidad de Maxwell atribuyendo a los campos como fuentes directas de la acción, fue resaltar la idea del éter en contraposición a la acción a distancia.

El tensor electrostático de Maxwell es un tensor de esfuerzos, el cual es simétrico, y da cuenta de cada una de las disposiciones que el medio adopta, teniendo un sistema electrostático como lo es el volumen de un conductor cerrado electrificado por inducción. A continuación se mostrara la forma de este tensor, su deducción se deja para que el lector la consulte en el ANEXO 1.

$$\tilde{T} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \end{bmatrix}$$

Como se puede observar este es un tensor simétrico por lo cual se puede diagonalizar y esto se comprueba fácilmente tomando un de los ejes de coordenadas en la dirección del campo eléctrico. Por lo tanto si tomamos $\vec{E} = E\hat{x}$, y por tener $E_x = E_y = 0$ se puede expresar este tensor de la siguiente manera:

$$\tilde{T} = \frac{\varepsilon_0}{2} \begin{bmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{bmatrix}$$

3.4 Teorema de Thompson.

Obtenida la función energía de campo propuesta por Maxwell, se puede llegar a establecer una expresión para encontrar la energía del sistema que para nuestro caso es un conductor cerrado hueco, electrificado por inducción. Tal como lo expresa Maxwell en su plan del tratado:

“En el teorema de Thomson la energía total del sistema se expresa en la forma de la integral de cierta cantidad extendida sobre todo el espacio entre los cuerpos electrificados, y también en la forma de una integral extendida sobre las superficies electrificadas solamente. La igualdad de estas dos expresiones puede así ser interpretada físicamente. Podemos concebir la relación física entre los cuerpos electrificados ya sea como el resultado del medio que interviene, o como el resultado de una acción directa a distancia entre los cuerpos electrificados. Si adoptamos la última concepción podemos determinar la ley de acción pero no podemos avanzar más en la especulación sobre su causa.” (MAXWELL, 1954)

Partiendo de lo dicho por Maxwell en su plan del tratado, se puede inferir que la cantidad extendida sobre la superficie del conductor se relaciona con el campo eléctrico, y al haber una relación entre este y la energía de campo, la cual se mencionó anteriormente, podemos llegar a inferir la forma que adoptaría el teorema de Thompson donde lo que se tendrá en cuenta es la función energía de campo. Obteniendo así la distribución en el volumen de energía del conductor electrificado, tomando la siguiente forma.

$$\frac{\epsilon}{2} \int E^2 \cdot dv$$

De esta forma se quiere mostrar que la energía de campo de un conductor cerrado hueco electrificado está distribuida en el volumen encerrado por este. Esto va acorde a la perspectiva de campos planteada, ya que en esta expresión lo que toma sentido es la distribución de energía en el

volumen que hay entre el cuerpo electrificado y el conductor que lo encierra ya que el protagonista de la acción eléctrica en este caso va a ser el medio.

Se puede evidenciar que a partir de una teoría de campos se puede llegar a caracterizar un sistema físico, en este caso el fenómeno eléctrico de inducción, al cual se le ha otorgado cualidades mecánicas al medio (tensiones, presiones y cizallas), las cuales nos describen el modo de estar de un sistema, como se comporta y que variables intervienen en ese comportamiento.

Hay que tener en cuenta que estas dos perspectivas (acción a distancia y campos) son necesarias en el momento de introducir a los estudiantes en los diversos cursos de electromagnetismo, esta ruta teórica es una propuesta que surge de la necesidad que se tiene de explicar algunos fenómenos físicos como las ondas electromagnéticas, las cuales no pueden ser abordadas desde una perspectiva de acción a distancia.

El desarrollo de criterios por parte del docente, es un punto fundamental en la enseñanza de la física, por eso la importancia de diseñar y establecer parámetros en el momento de construir el plan de estudio para una asignatura.

4. Conclusiones

En la enseñanza del electromagnetismo es de vital importancia tener en cuenta la distinción que se hace entre las dos perspectivas, la de acción a distancia y la de campos a la hora de abordar los fenómenos electromagnéticos, ya que se puede encaminar estos cursos introductorios estudiando y analizando las dos perspectivas mencionadas teniendo en cuenta las diferencias y para qué es adecuado utilizar cada una. Para la explicación de fenómenos tales como la electrificación por inducción y por conducción, como se resaltó en este trabajo, la perspectiva de acción a distancia resulta inadecuada, ya que no es posible explicar las particularidades de estos fenómenos a través del concepto de fuerza Coulombiana, la idea de acción a distancia resulta totalmente incompatible.

El estado de electrificación es un criterio que se puede estudiar y analizar alterando el espacio de un cuerpo electrificado por medio de uno o más conductores. Este grado de electrificación es conocido como potencial eléctrico, esta variable de estado nos permite entender cómo se encuentra el sistema respecto a otro y establecer la diferencia de potenciales. La cantidad de electrificación se estudia como una variable dinámica, ya que es considerada como la acción necesaria para llevar un sistema de un estado a otro. Esta magnitud no está ligada en cuanto a la configuración del sistema pues siempre permanece constante.

En algunas teorías físicas, la perspectiva de campos es la herramienta para caracterizar los sistemas físicos que se estudian, por ende es adecuado que los estudiantes de física posean conocimientos sobre esta perspectiva desde cursos introductorios al electromagnetismo y así abordar las diferentes temáticas que se ven en los cursos de física posteriores.

Para Maxwell el fenómeno de inducción es el más importante de todos los estudiados por Faraday y por él mismo porque nos da cuenta de la configuración que adopta todo el medio y de cómo se

puede analizar, sin necesidad de contacto directo entre ellos. Retomando las ideas de Faraday, realiza una reconstrucción y caracterización de estos fenómenos en conductores cerrados desde la física de los medios continuos y logra establecer herramientas que permiten fundamentar toda su teoría y desarrollarla en el plan del tratado.

La función energía de campo nos permite describir el sistema en términos del campo eléctrico, también nos proporciona mediante el teorema de Thomson información sobre donde se encuentra ubicada esta magnitud, ya sea en la superficie o en el volumen del conductor mediante una igualdad, haciendo una analogía a la ley de Gauss. Teniendo en cuenta que para Maxwell el medio donde ocurren los fenómenos electrostáticos se comporta como un medio elástico, donde las líneas de fuerza son las tensiones y perpendicular a ellas están las presiones; esto se caracteriza por medio de una magnitud tensorial que define el modo de estar del sistema, para nuestro caso el sistema se caracterizó por medio del tensor de stress electrostático.

Por medio de esta monografía se llegó a establecer una ruta teórica para la enseñanza del electromagnetismo en cursos introductorios de física, donde se establecieron criterios partiendo de análisis de experiencias propuestas por Maxwell y Faraday que llevaron a la construcción de una teoría de campos que dieran cuenta de un estado de electrificación pensando en el medio como agente protagonista de la acción y así poder construir herramientas que permitieran la caracterización de esta perspectiva como el tensor electrostático y el teorema de Thomson.

5. Anexos

Deducción del tensor electrostático de Maxwell

Como se menciona en la teoría de los medios elásticos, la fuerza que actúa sobre un volumen dado, puede considerarse transmitida a través de la superficie que limita dicho volumen. Y esta fuerza puede ser formulada en términos del tensor de esfuerzos. Por ende la fuerza que expresada en el siguiente termino.

$$\vec{F} = \int \tilde{T} d\vec{s} = \int \vec{f} d\vec{s}$$

Donde \vec{f} es la fuerza por unidad de área que actúa sobre la superficie que limita el volumen.

$$\vec{f} = \tilde{T} \hat{n}$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el tensor se obtiene:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \tilde{T}$$

$$\vec{F} = \int_v \nabla \cdot \tilde{T} dv = \int_v \vec{f} dv$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{T} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}, \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2}, \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \right] \end{aligned}$$

Utilizando el convenio de sumación:

$$f_\alpha = \frac{\partial T_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta}$$

El tensor correspondiente a una fuerza volumetrica, \vec{f} no es el único pues siempre se le puede añadir otro de divergencia nula sin afectar su valor.

Se aplicara todo esto a la electrostática siendo un caso limitado para ciertas limitaciones de carga.

Teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica en un determinado elemento de volumen es $\vec{f} = \rho \cdot \vec{E}$, con la divergencia de un tensor se obtiene:

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot \vec{E} = \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} \vec{E}$$

$$f_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} D_\beta E_\alpha - D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Aplicando la propiedad de un campo electrostático $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}$$

$$D_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = D_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} = \varepsilon_0 E_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \delta_{\beta\alpha} \frac{\partial E^2}{\partial x_\alpha}$$

Finalmente se obtiene el tensor en forma matricial

$$\tilde{T} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \end{bmatrix}$$

Se puede diagonalizar tomando $\vec{E} = E\hat{x}$, y por tener $E_x = E_y = 0$ se puede expresar este tensor de la siguiente manera:

$$\tilde{T} = \frac{\epsilon_0}{2} \begin{bmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{bmatrix}$$

Con los valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

6. Bibliografía

- AYALA, M., & al, M. e. (2003). *La Relación Mecánica –electromagnetismo y la Mecánica de los medios elásticos*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá: CIUP.
- BERKSON, W. (1985). *Las teorías de los campos de fuerza desde Faraday hasta Einstein*. Alianza editorial.
- CASTILLO, J. C. (2004). *el concepto de corriente y la perspectiva dinámica*. Bogotá: Unversidad Pedagógica Nacional.
- CASTILLO, J. C. (2006). De los fenómenos mecánicos al mecanisismo.
- FARADAY, M. (1955). *Experimental researches in electricity*. Chicago: Great books, enciclopedia britanica inc.
- GARCIA, E. G. (1999). *Construcción del fenómeno eléctrico, perspectiva de campos, elementos para una ruta pedagógica*. Bogota.
- GRAMAJO, M. C. (1993). *Concepto de carga eléctrica y concepción clásica de campos, las propuestas de Faraday y Maxwell*. Bogotá.
- GRIFFITHS, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. prentice-hall.
- HERTZ, H. (1990). *Las Ondas Electromagnéticas. Selección de las Untersuchungen*. (G. D. Bellaterra, Ed., & G. D. Bellaterra, Trad.) Barelona.
- MAXWELL, J. C. (1954). *A treatise on electricity and magnetism Vol. I*. New York.: Dover Publications Inc.
- MAXWELL, J. C. (1954.). *A treatise on electricity and magnetism Vol. I*. New York: Dover Publications Inc.
- RODRIGUEZ BONILLA, A. (2012). *Importancia del desplazamiento eléctrico en la comprensión del fenómeno eléctrico*. Bogotá.
- RODRIGUEZ, O. D. (1994). *La interacción entre sistemas electrificados y el tensor Stress de Maxwell*. Bogotá.
- RUEDA, C. G. (2012). *Caracterización del medio en fenómenos electrostáticos desde la perspectiva de campos*. Bogotá.