



DIVISIÓN ENTRE NÚMEROS FRACCIONARIOS CON EL MURO DE FRACCIONES Y EL NUMICON: TAREAS PROFESIONALES

Autora

Adela Concepción Benítez Domínguez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D.C.

2024



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores



MAESTRÍA EN
DOCENCIA DE LA
MATEMÁTICA

DIVISIÓN ENTRE NÚMEROS FRACCIONARIOS CON EL MURO DE FRACCIONES Y EL NUMICON: TAREAS PROFESIONALES

Autora

Adela Concepción Benítez Domínguez

Asesora

Lyda Constanza Mora Mendieta

Mg. en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Bogotá, D.C.

2024

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por permitirme llegar a la meta, por darme la fortaleza en mis días de desesperanzas y por los momentos inolvidables vividos en este proceso de formación profesional.

A mi esposo e hijos, por apoyarme siempre incondicionalmente para cumplir con mis proyectos y sueños. A mi madre y hermanos por sus oraciones para que no me falte salud y perseverancia durante todo este trayecto transitado.

A mi asesora, Mg. Lyda Constanza Mora Mendieta, por la paciencia y por ser un apoyo emocional en mis momentos de flaqueza. Por confiar en mí a pesar de las circunstancias.

A todos los profesores y compañeros, por la sapiencia compartida en cada seminario, por los momentos de regaños, risas, tristezas y alegrías, por darme ánimo a seguir a pesar de las dificultades. Especialmente, a mis compañeros Cynthia y Francisco, por acompañarme y apoyarme en mis momentos de desesperanzas y por su colaboración para la producción de los vídeos.

A Becas Carlos Antonio López-BECAL. Paraguay por otorgarme el usufructo de la beca y poder cursar esta maestría en post de la educación paraguaya.

A mis supervisores y directores de cada una de las instituciones de las que formo parte por el apoyo brindado desde que supieron mi interés por este sueño.

A mis estudiantes, amigos y a las personas en general que siempre estuvieron pendiente de mi proceso de formación, por sus palabras de aliento y congratulaciones por cada etapa culminada en este lapso de la maestría.

¡Muchas gracias!

Dedicatoria

A mis ángeles del cielo Clara María (hija) y Rodolfo (hermano).

A mis hijos Aimara Luján, Tatiana Ailén y Benny Amir.

A mi esposo Ino.

A mi madre Mercedes y hermanos Luis Alberto y Liz Carolina.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Inquietud pedagógica	4
1.2. Antecedentes	9
1.2.1. Interpretación de la división entre números fraccionarios por parte de profesores de matemáticas.....	10
1.2.2. Tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas	12
1.2.3. Uso de los materiales manipulables	16
1.3. Objetivos	20
1.3.1. Objetivo general	20
1.3.2. Objetivos específicos	20
2. Marco de referencia	21
2.1. Desde las matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas	22
2.1.1. Números racionales y números fraccionarios	22
2.1.2. Representaciones de los números fraccionarios.....	29
2.1.3. Fracciones	31
2.1.4. Materiales manipulables: Muro de Fracciones y Numicon	39
2.1.5. División entre números fraccionarios	46
2.2. Desde la Formación de Profesores de Matemáticas.....	56
2.2.1. Mirar profesionalmente la enseñanza	57
2.2.2. Tareas para la formación de profesores de matemáticas.....	58
2.3. El sistema educativo paraguayo	64

2.3.1. Estructura del sistema educativo paraguay	64
2.3.2. Las matemáticas en el tercer ciclo de la educación escolar básica	67
2.3.3. Las matemáticas en el profesorado de matemáticas de tercer ciclo	69
3. Metodología	76
3.1. Descripción de la metodología	76
3.2. Fases de desarrollo del trabajo de grado	76
3.2.1. Fase 1: Constitución de los referentes	77
3.2.2. Fase 2: Diseño del formato	79
3.2.3. Fase 3 Determinación de la metodología de implementación de las tareas	80
3.2.4. Fase 4: Diseño y selección de recursos para las tareas	80
3.2.5. Fase 5. Diseño de las tareas	81
4. Resultados	84
4.1. Tareas profesionales sobre la división de números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon	84
4.1.1. Tarea 1. Exploración del Numicon y del Muro de fracciones	85
4.1.2. Tarea 2. Representación de fracciones con el Numicon y con el Muro de fracciones	95
4.1.3. Tarea 3. Fracciones equivalentes con el Numicon y con el Muro de fracciones	103
4.1.4. Tarea 4. División con el Numicon y con el Muro de fracciones (partitiva y cuotitiva)	110
Anexo 4D	119
Conclusiones	120
5.1. Conclusiones relacionadas con los objetivos	120
5.2. Conclusiones relacionadas con el diseño de las tareas	124
5.3. Relacionadas con la experiencia de la autora	126

5.4. Recomendaciones y perspectivas futuras.....	127
Referencias.....	129

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 <i>Puntaje promedio matemáticas</i>	5
Figura 2 <i>Representación egipcia de las fracciones</i>	23
Figura 3 <i>Representación de los números racionales y sus equivalencias</i>	27
Figura 4 <i>Representación de los números fraccionarios</i>	30
Figura 5 <i>Medida de longitudes con un segmento unidad AB</i>	35
Figura 6 <i>Diagrama de Freudenthal o el Muro de fracciones</i>	40
Figura 7 <i>Placas de Numicon de Herbinière-Lebert</i>	42
Figura 8 <i>Evolución del Numicon</i>	43
Figura 9 <i>Numicon y sus elementos</i>	44
Figura 10 <i>Forma ordenada del Numicon actual</i>	45
Figura 11 <i>Representación de la interpretación de la división partitiva</i>	47
Figura 12 <i>Representación de la interpretación de la división cuotitiva</i>	48
Figura 13 <i>Representación de la división con el Muro de fracciones</i>	53
Figura 14 <i>Representación de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente por medio de Numicon</i>	54
Figura 15 <i>Representación de la división en el Numicon</i>	55
Figura 16 <i>Algoritmo de la división con el Numicon según Motrel (2022)</i>	56
Figura 17 <i>Esquema de un itinerario de tarea</i>	63
Figura 18 <i>Eslabones del currículo paraguayo</i>	66
Figura 19 <i>Malla curricular de la nueva formación docente del profesorado</i>	73
Figura 20 <i>Programa del Taller de Resolución de Problemas.</i>	75

Índice de tablas

Tabla 1 <i>Resultados obtenidos en las pruebas SNEPE, 2015</i>	6
Tabla 2 <i>Interpretaciones de los significados de la fracción</i>	37
Tabla 3 <i>Interpretaciones seleccionadas de la división entre fracciones</i>	50
Tabla 4 <i>Evolución del algoritmo de la división entre números fraccionarios</i>	51
Tabla 6 <i>Constitución de los referentes</i>	78
Tabla 7 <i>Estructura propuesta para la tarea</i>	79

Introducción

Este trabajo se enmarca bajo la modalidad de formación docente continúa financiado por el programa Becal- Paraguay a través de un convenio entre el gobierno paraguayo y la Universidad Pedagógica Nacional, con el propósito de obtener el título de Maestría en Docencia de la Matemática. Este trabajo parte de la preocupación por los bajos resultados obtenidos por los estudiantes paraguayos en evaluaciones internacionales y nacionales en el área de Matemática, específicamente, en lo que corresponde a operaciones que involucran números racionales.

Durante la experiencia formativa que se consolida en este documento, se evidenció que las investigaciones consultadas reportan la dificultad que presentan tanto los estudiantes como los profesores y futuros profesores, para comprender el concepto de número racional (número fraccionario y fracción) y particularmente lo que respecta a la conceptualización de la operación de división con fracciones (v. g. Li y Kulm, 2008; Liñan et al., 2014). Esto indica que existe una necesidad de formación en los profesores en ejercicio alrededor de la división entre números fraccionarios, por lo que el diseño de tareas profesionales para profesores alrededor de este objeto matemático resulta pertinente, en el camino de contribuir a la mejora de su enseñanza.

De acuerdo con lo anterior, el presente trabajo expone cuatro tareas profesionales para la formación de profesores en ejercicio, orientadas a la comprensión de dos de las interpretaciones del significado de la división entre números fraccionarios: cuotitiva y partitiva. Estas tareas incorporan el uso de dos materiales manipulativos: el Muro de fracciones y el Numicon, los cuales son recomendados por algunos trabajos de investigación o intervención educativa como favorecedores de procesos de pensamiento matemático (De la Cruz, 2024). El uso de estos recursos pretende que los profesores puedan mediar el aprendizaje de las fracciones de manera dinámica y que aporte a la comprensión de las interpretaciones ya mencionadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, este escrito se estructura en cinco capítulos. El primero aborda los preliminares en donde se establece el contexto en el que se enmarca el estudio. Se inicia con la identificación de la inquietud pedagógica que motivó el trabajo, la cual se centra en el interés de mejorar la enseñanza de los números fraccionarios. Luego, se exponen los antecedentes relevantes que han abordado la enseñanza de los números fraccionarios, estos antecedentes ofrecen un panorama sobre algunas investigaciones relacionadas con la división de números fraccionarios en la formación de profesores, las tareas profesionales y el uso de materiales Numicon y Muro de fracciones. El capítulo concluye con la formulación de los objetivos generales y específicos del trabajo.

En el segundo capítulo se abordan tanto los conceptos matemáticos como los elementos didácticos relacionados con números fraccionarios. Además, se exponen el Muro de fracciones y el Numicon como materiales didácticos con los que se pueden representar números fraccionarios y la división entre estos. Asimismo, en este capítulo, se expone la competencia «mirar profesionalmente», en el marco de la formación de profesores de matemáticas y su vínculo con tareas profesionales. Finalmente, en este capítulo, se presenta una descripción del currículo paraguayo para ubicar al lector sobre las disposiciones educativas paraguayas, en particular, situadas alrededor de la formación de profesores (de matemáticas) y de la enseñanza de las matemáticas de los números fraccionarios particularmente en los niños de Paraguay del tercer ciclo.

En el tercer capítulo se describe la metodología adoptada en este trabajo de grado, centrada en una aproximación al diseño de tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas. A lo largo de este apartado, se detallan cómo se diseñaron las tareas basadas en el uso del Muro de fracciones y el Numicon, considerando asuntos de tipo matemáticos y

didácticos.

Las cuatro tareas profesionales dirigidas a profesores en ejercicio se presentan en el capítulo 4. Cada tarea se describe señalando los objetivos que se buscan alcanzar. La primera tarea pretende acercar a los profesores al conocimiento de los materiales didácticos Numicon y Muro de fracciones; la segunda tarea busca que los profesores en ejercicio representen fracciones propias e impropias; la tercera tarea enfatiza en la representación de fracciones equivalentes; y finalmente, la cuarta tarea considera la división entre números fraccionarios a partir de dos significados: división partitiva y división cuotitiva utilizando los materiales didácticos antes referidos.

En el último capítulo, se reportan conclusiones relacionadas con el objetivo general del trabajo, con el diseño de las tareas y con las experiencias de la autora en el proceso de construcción del trabajo. También se proporcionan recomendaciones para futuros trabajos en esta línea.

1. Preliminares

En este primer capítulo se presenta la inquietud pedagógica que motiva la elaboración de este trabajo, seguido de los antecedentes relacionados con el tema de interés que ocupa a la autora, y los objetivos que se propone lograr con la propuesta del trabajo.

1.1. Inquietud pedagógica

La decisión de elaborar este trabajo de grado se basa en tres elementos fundamentales, el primero son los bajos resultados obtenidos por los estudiantes paraguayos en evaluaciones internacionales y nacionales en el área de Matemáticas. El segundo motivo abarca las cuestiones didácticas y profesionales asociadas a una percepción sobre un modelo tradicional comúnmente utilizado para la enseñanza de las matemáticas que, quizás, se logre mejorar con una formación continua a los profesores y con la invitación al uso de materiales didácticos. El tercer motivo es una experiencia personal que gira alrededor de la enseñanza de la división entre números fraccionarios en el contexto familiar.

La primera cuestión que motiva la ejecución del trabajo son los bajos resultados obtenidos por los estudiantes paraguayos en el área de Matemáticas en las pruebas internacionales. Según Terrones (2023) el reporte del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes -PISA- ubica a Paraguay en el penúltimo lugar (puesto 80 de 81 países participantes). La evaluación realizada a unos 81 000 estudiantes paraguayos de 15 años (que representa el 72% de la población total) tuvo como resultado un bajo puntaje (338 de 600 puntos), como se puede observar en la Figura 1.

Figura 1

Puntaje promedio matemáticas



Nota. Tomado de Terrones (2023, p. 2).

También, se encontró que solo el 15% de los alumnos lograron alcanzar por lo menos el nivel 2 de las competencias en el área de matemáticas en comparación con el promedio de 69% que presenta la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Terrones (2023) muestra el informe final PISA (2023) y menciona que los estudiantes paraguayos (85%) mínimamente “pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación simple (por ejemplo, comparar la distancia total entre dos rutas alternativas o convertir precios a una moneda diferente)” (párr. 7) y casi ningún estudiante (9%) logró el nivel 5 o 6 correspondiente a la modelación matemática de situaciones complejas y a la selección, comparación y evaluación de estrategias para resolver problemas.

Con respecto a las pruebas nacionales si se consideran los resultados de la penúltima prueba SNEPE (Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo) llevada a cabo en 2015 y, particularmente los correspondientes al 6.º (segundo ciclo) y 9.º grado (tercer ciclo) del departamento de Caazapá, lugar donde labora la autora de este trabajo, se encuentra que tan solo el 8% de los estudiantes de grado 6.º obtuvieron un nivel superior de 3 o más en el eje temático números racionales; y que para 9º este porcentaje fue menor, 5%. (Ver Tabla 1).

Tabla 1

Resultados obtenidos en las pruebas SNEPE, 2015

	Eje temático	Porcentaje			
		1	2	3	4-5
6°	NÚMEROS RACIONALES, que involucra a los números racionales positivos hasta los décimos y fracciones.	84	8	5	3
9°	NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES, que involucra operaciones básicas con números enteros, racionales positivos y negativos, en notación decimal y fraccionaria.	92	3	1	4
Calificaciones:		 1	 2	 3	 4-5

Nota. 1 es el nivel más bajo; 4-5, los más altos. Tomado de Ministerio de Educación y Ciencia MEC (2018, p. 12).

Al revisar los resultados en detalle, se encuentra que el puntaje máximo logrado fue de 478, lo que significa que no se alcanzó el promedio requerido (550 de 1 000 puntos) para lograr la calificación mínima de 2. Con estos resultados evaluativos se observa claramente la situación desfavorable para los estudiantes en el área de matemáticas y específicamente en el eje temático que interesa en este trabajo de grado, pues, el 84% de los estudiantes paraguayos de Caazapá se ubican en nivel 1 en relación con su conocimiento sobre los números racionales y solo el 8% supera el nivel 1 cuando a operaciones con números racionales se refiere.

Si bien estos resultados corresponden a la evaluación del conocimiento de los estudiantes, una de las formas en las que se pueden incidir en mejorar los desempeños de los estudiantes, tiene que ver con los procesos de enseñanza. Es claro que llevar a cabo una buena enseñanza no es garantía de un buen proceso de aprendizaje; pero es posible que mejorando la enseñanza sí se favorezcan los desempeños de los estudiantes, por lo que cabe intentar canalizar la formación de los niños a través de la formación de los profesores.

La segunda razón, que configura la inquietud pedagógica, la constituye las cuestiones didácticas y profesionales. En observaciones informales realizadas a las clases de los profesores del tercer ciclo del área de Matemáticas en cumplimiento de su función como directora, la autora

ha percibido dificultades que se presentan los maestros para enseñar y generar comprensiones por los alumnos al abordar contenidos referentes a los números racionales y en especial la división entre números fraccionarios. Los maestros utilizan preferentemente métodos tradicionales para la enseñanza de este contenido matemático utilizando la pizarra, la torta fraccionada o la recta numérica. Cuando presentan situaciones problemáticas, las resuelven mecánicamente y los estudiantes copian o siguen el procedimiento.

Considerando esta segunda razón se siente el compromiso que conlleva dirigir una institución ubicada en la zona rural del departamento de Caazapá y el interés por contribuir en el mejoramiento de la formación continua de los profesores, así como proponerles el uso de materiales didácticos¹ que aporten a la enseñanza de la división entre números fraccionarios y con ello, al aprendizaje de los estudiantes. A continuación, se hace alusión a la formación continua de los profesores para afianzar saberes en su esquema de contenido y proponer el uso de los materiales didácticos para mejorar los aprendizajes de sus estudiantes.

Según Piaget (1948, citado por Miranda y Gómez-Blancarte, 2018), la enseñanza constituye un espacio en el que el maestro puede crear problemas que resultan útiles para los estudiantes. Por «útiles», Piaget hace referencia a los problemas que promueven tanto la iniciativa como la investigación en los alumnos. Así, el maestro no es únicamente un presentador de situaciones problemáticas, sino que debe inducir a los estudiantes a redescubrir el significado de los conceptos y a contextualizarlos a su realidad.

Desde la teoría tecnológica del aprendizaje, Horner, Bellamy y Colvin (1984, citado por Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020) “consideran que, si un comportamiento no se da o no se logra, es debido a que no se han entregado los estímulos suficientes o adecuados. En este sentido,

¹ Para efecto de este trabajo se considera como sinónimos materiales didácticos, materiales manipulables y materiales manipulativos

asumimos que ciertas acciones del profesor son claves para que el estudiante generalice” (p.208), lo cual permite, además, que analice, experimente y conjeture para llegar a la comprensión de los problemas presentados.

De otro lado, para Zelada (2015), los materiales didácticos constituyen una herramienta de ayuda para el tratamiento de diversos objetos matemáticos, posibilitando un aprendizaje significativo para esta ciencia. El uso adecuado de los materiales didácticos facilita la adquisición de saberes, la identificación de los procedimientos para resolver problemas relacionados con los números fraccionarios, como lo plantea Minedu (2015, citado por Vigilio, 2015), quien menciona que la utilización de materiales manipulables como regletas, ábacos u otros materiales durante las clases de matemática posibilita a los estudiantes relacionar conceptos, introducir nuevos conocimientos, corregir errores, comprobar o descubrir propiedades del objeto matemático, por lo que sería aconsejable utilizarlos en la enseñanza de las matemáticas.

A partir de lo anterior cabe destacar el papel de los materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas, asunto que es de la experiencia de la autora, no se utilizan tanto en el aula, por lo cual valdría la pena que los profesores conocieran distintos materiales que les pueda aportar al aprendizaje más significativo de los estudiantes, en particular con los números racionales, que fue lo que se mencionó en la primera razón.

El tercer elemento que constituye la inquietud pedagógica de este trabajo es de tipo personal, y tiene que ver con una experiencia de la autora en el rol de madre, cuando su hija se encontraba preparándose en el curso probatorio de ingreso a la universidad. En el programa de Matemáticas uno de los ejes temáticos lo constituye los números fraccionarios y los diferentes problemas planteados aplicando las operaciones. En uno de los problemas referente a división

entre números fraccionarios, la niña no pudo continuar. Esto le generó mucha dificultad. A pesar de varias explicaciones, la niña no logró comprenderlo. Luego de presentarse en su evaluación, la niña comentó que hubo tres problemas sobre este eje temático, por lo que no lo pudo resolverlos y los dejó en blanco.

Estas razones llevan a reflexionar sobre la importancia que tiene la formación (continua) de los profesores, en la formación de sus estudiantes y por ello es fundamental el fortalecimiento de los conocimientos que poseen los profesores respecto al significado de las operaciones y con ello enfoquen sus enseñanzas con, por ejemplo, materiales didácticos que aporten a la interpretación de los problemas. Así el interés por llevar a cabo este trabajo de grado es contribuir en el mejoramiento del desempeño de los profesores del Colegio Nacional de Santa Teresita de Caazapá.

1.2. Antecedentes

Para el desarrollo de este trabajo de profundización se revisaron artículos de investigaciones y tesis de pregrado y posgrado. Dicha revisión se hizo a través de buscadores como Google Académico, Dialnet, Redalyc y Funes; además, de repositorios de universidades como la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad Javeriana y la Universidad de los Andes, entre otros. Las palabras claves que sirvieron como buscadores en los distintos repositorios fueron: división entre números fraccionarios, tareas profesionales y uso del Muro de fracciones y el Numicon.

Del total de documentos revisados se seleccionaron once investigaciones que corresponden al propósito de este documento, las cuales fueron agrupadas en tres categorías. La primera categoría aborda los trabajos sobre la interpretación de la división entre números fraccionarios por parte de profesores de matemáticas; la segunda expone las investigaciones que

refieren a tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas y, la última, los trabajos aluden al uso de los materiales manipulativos Numicon y Muro de fracciones.

1.2.1. Interpretación de la división entre números fraccionarios por parte de profesores de matemáticas

A continuación, se describen los estudios relacionados con la dificultad que presentan los profesores en ejercicio y profesores en formación, al interpretar los significados de la división con fracciones.

El primer documento es de autoría de Li y Kulm (2008) titulado «*Conocimiento y confianza de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la división de fracciones*»². Los autores examinaron el conocimiento y la confianza de los futuros profesores de matemáticas en relación con la división de fracciones e investigaron cómo los futuros docentes perciben su preparación y su conocimiento matemático necesario para enseñar este tema.

Los participantes eran futuros maestros que ya estaban completando un curso de métodos matemáticos en el momento de la investigación. Se utilizaron instrumentos de evaluación específicos para medir tanto las percepciones de los futuros profesores sobre su preparación como su conocimiento matemático sobre la división de fracciones. La metodología incluyó cuestionarios y pruebas de conocimiento conceptual.

Li y Kulm (2008) encontraron una discrepancia significativa entre las percepciones generales de los futuros profesores sobre su preparación y su conocimiento matemático real necesario para enseñar la división de fracciones de manera conceptual, “de hecho que la división de fracciones se relaciona con dos conceptos difíciles (fracción y división), su combinación lo

² El documento de Li y Kulm, ha sido traducido al español, por la autora de este trabajo. Las citas a las que se hace alusión refieren a dicha traducción.

hace más difícil aún tanto para los estudiantes como para los profesores” (Li y Kulm, 2008, p. 841). En conclusión, los autores propusieron que este contenido requiere desarrollar una comprensión más profunda y sólida en los futuros profesores a fin de acrecentar la confianza para la enseñanza.

Un segundo trabajo consultado relacionado con las dificultades que presentaban los profesores con la división de números fraccionarios es el de Liñán et al. (2014), quienes en su artículo de investigación titulado «*Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones*» presentaron los resultados obtenidos de un estudio realizado a los estudiantes de programas de formación docente. El objetivo del trabajo era analizar el conocimiento matemático especializado que poseían los futuros maestros en relación con la resolución de problemas que implican la división de fracciones.

En este sentido, “solicitó a los alumnos que, además de resolver la situación planteada sobre la resolución de un problema con división de fracciones, plasmaran las etapas en la resolución de esta y todos los razonamientos que los pudieron llevar a conclusiones finales” (Liñán et al., 2014, p. 51). Con la realización de este trabajo se reveló que muchos estudiantes para maestros presentan dificultades significativas al resolver el problema de división de fracciones. Se identificaron errores comunes como desconocer la correcta interpretación de los resultados logrados al utilizar el algoritmo de división, hasta no ser capaces de implementarlo, como también estudiantes que ni siquiera habían sabido qué hacer para resolver el problema. Tras estos hallazgos, se resaltó la importancia de perfeccionar la educación matemática de los maestros en formación para que sean capaces de enseñar estos conceptos de forma más eficaz.

Un tercer trabajo es el desarrollado por Muñoz-Catalán et al. (2015), titulado «*Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el*

estudio del conocimiento del profesor de matemáticas». Los autores partieron de una situación planteada sobre división de fracciones por un profesor a sus estudiantes de 6.º de primaria. Posteriormente se procedió a examinar el conocimiento especializado que el maestro debe manejar respecto al objeto matemático y destacaron que “es necesario conocer y saber representar en sus distintas formas (modelos continuos o discretos) las fracciones impropias, así como el concepto de división cuotitiva (KoT) y su potencialidad para problematizar la división de fracciones (KMT)” (p. 1812).

En el trabajo de investigación de Muñoz-Catalán et al. (2015) se resaltaron los conocimientos y procedimientos que un profesor de aula debe poseer al plantear problemas sobre división a sus alumnos, estos son: “la definición de la unidad en el concepto de fracción, la división como medida” (p. 1814), lo cual constituye el sustento de la división cuotitiva; la representación de fracciones; la equivalencia de fracciones; el significado del cociente y el resto de una división de fracciones; y la forma gráfica de la solución de operaciones con fracción. El profesor, según los investigadores, también debe tener habilidad para generar actividades que puedan corregir dificultades y lograr el aprendizaje de los estudiantes.

Estas tres investigaciones evidencian que la comprensión de la división entre fracciones es un problema que presentan los profesores en ejercicio y los estudiantes en formación docente.

1.2.2. Tareas profesionales para la formación de profesores de matemáticas

Respecto a la propuesta de las tareas profesionales para profesores en ejercicio o futuros profesores, se puede decir que es un tema de interés de varios investigadores, pues reconocen la importancia de plantear, generar y gestionar tareas para desarrollar la competencia «mirar profesionalmente» en los profesores en ejercicio o futuros profesores. El propósito de las tareas profesionales es proponer escenarios de aprendizaje y en los que los profesores experimenten su

hacer profesional y desarrollen conocimientos (de distintos tipos, no solo matemáticos, sino también didácticos, pedagógicos, entre otros) que impliquen la mejora de la enseñanza y del aprendizaje.

Una primera investigación que responde a dicho interés es la realizada por Llinares et al. (2008) titulada «*Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas*». Los autores se centraron en la importancia del diseño de tareas en la formación de maestros de matemáticas, con el objetivo de desarrollar el conocimiento necesario para realizar diversas actividades profesionales, como la organización del contenido matemático y la interpretación del aprendizaje. Para ello, se implementaron metodologías que incluían el uso de videos y los espacios de interacción derivados de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

A través de la participación de los futuros docentes en estos espacios, se promovió un aprendizaje más profundo y significativo respecto al diseño de entornos de aprendizaje, permitiendo que los estudiantes no solo recibieran información, sino que también construyeran su conocimiento de manera colaborativa. Los resultados evidenciaron que la utilización de herramientas didácticas como los vídeos y la entrada al entorno web facilitó la resolución de problemas contextualizados, favoreciendo el desarrollo de competencias específicas que se traducen en una mejora en la práctica docente. Así, la investigación concluye que la creación de espacios de aprendizaje dinámicos es crucial para la formación de los futuros educadores en matemáticas.

En la misma línea, Llinares (2011), en un artículo titulado «*Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas*», destacó que el diseño de tareas realizado para los programas de formación de maestros está vinculado con el desarrollo de los

conocimientos que son necesarios para ejecutar distintas tareas profesionales, tales como: la organización del contenido matemático a desarrollar, la interpretación del aprendizaje y, la gestión de la enseñanza. En este contexto, la perspectiva de las tareas diseñadas, como las implementadas y analizadas, se situaron en la enseñanza del profesor como en el aprendizaje del futuro profesor, estas tareas fueron extraídas de algunas situaciones de enseñanza – aprendizaje y de problemas matemáticos propuestos como procesos de investigación realizados para estos futuros maestros.

La finalidad de las tareas, según el autor, fue promover el desarrollo de competencias específicas para mejorar el aprendizaje, desarrollar conocimiento y destrezas vinculadas a contextos-problemas concretos; por ello, la importancia de fomentar los espacios para implementar las tareas que posibiliten la resolución de problemas en la práctica docente. Estos espacios promueven un aprendizaje del conocimiento de matemáticas necesario para la enseñanza de las matemáticas, ya que los futuros maestros no solo reciben información, sino que también participan activamente en la construcción de su conocimiento.

Por su parte, Ivars et al. (2018), en su trabajo de investigación titulado «*Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse*», promovieron la participación de veintinueve futuros maestros de primaria en un entorno de aprendizaje en el que tuvieron que interpretar el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de fracción utilizando una trayectoria hipotética de aprendizaje como guía. El objetivo fue examinar la aplicación de un camino hipotético de aprendizaje como orientación para analizar el pensamiento matemático de los alumnos y mejorar el discurso profesional y la capacidad de observación de los futuros maestros.

La metodología consistió en programar seis sesiones de dos horas cada una, en las cuales se realizaban actividades sobre las fracciones y se analizaban videoclips de estudiantes resolviendo actividades con fracciones. Los futuros maestros utilizaron una trayectoria hipotética de aprendizaje del significado parte-todo de las fracciones para interpretar el pensamiento de los estudiantes.

Las actividades presentadas en cada sesión permitieron a los futuros maestros mejorar su capacidad de observación y su habilidad para identificar y utilizar elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes. Así, también se constató que “las trayectorias hipotéticas de aprendizaje pueden ayudar al desarrollo de un discurso profesional más preciso y eficaz en los profesores en formación” (Ivars et al., 2018, p. 14 traducción propia).

Otro trabajo que abordó el diseño de tareas profesionales es el de Fernández (2021), quien presentó su investigación titulada *«Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación»*, en la que expuso el desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente» en futuros profesores de matemáticas en diferentes niveles educativos. Esta competencia, asociada a la capacidad de identificar, interpretar y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas en el análisis de las estrategias matemáticas de los estudiantes, ha sido estudiada por el Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática (GIDIMAT) de la Universidad de Alicante en los niveles de educación infantil, primaria y secundaria.

La investigación se centró en el diseño de entornos de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de esta competencia, caracterizados por ciclos de investigación, práctica reflexiva y el uso de viñetas y trayectorias hipotéticas de aprendizaje. La metodología usada por Fernández (2021) es la Investigación Basada en el Diseño (Design-Based Research), la cual consideró clave

en el proceso de implementación y ajuste de estos entornos, promoviendo así una formación docente basada en la práctica.

Fernández (2021) concluye que el progreso en el discurso profesional y la identificación de conocimientos (Key Developmental Understanding) son indicadores del desarrollo de esta competencia, la cual permite a los futuros docentes una comprensión profunda y aplicada del aprendizaje matemático de sus estudiantes.

Realizando un breve análisis de las investigaciones que presentan los diferentes autores referenciados en atención a la formulación de las tareas profesionales para profesores en ejercicio o futuros profesores, se resaltan propuestas de cómo se debe organizar, gestionar e implementar una tarea profesional. Los autores enfatizan en la importancia de recurrir específicamente a instrumentos como el uso de videos o casos-viñetas, que ayuden a lograr el objetivo de la tarea para desarrollar la competencia docente: mirar profesionalmente.

1.2.3. Uso de los materiales manipulables

En este apartado se reportan algunas investigaciones realizadas respecto al uso de materiales manipulables, para la enseñanza de las fracciones; en particular, el muro de fracciones y el Numicon,

Uno de los estudios significativos en esta área fue realizado por Cermeño y Pacheco (2016) titulado «*Numicon, aprendizaje multisensorial*». Los autores presentaron al Numicon como un enfoque metodológico para un aprendizaje multisensorial, cuyo propósito era demostrar una valoración que se le atribuye al uso del Numicon en la enseñanza de contenidos matemáticos a partir de patrones desarrollando habilidades de predicción y generalización, comprender el orden de los números y por último las operaciones. Manifestaron que los alumnos podían «tocar» los números y aprender matemáticas jugando. El trabajo duró cuatro meses en un aula de

primaria, en la que se utilizaba esta metodología para la enseñanza de las matemáticas (Cermeño y Pacheco, 2016). Los autores destacaron que con el enfoque multisensorial de NUMICON, se logra que los estudiantes fortalezcan sus capacidades matemáticas, adquiriendo así habilidades y destrezas para manejar situaciones matemáticas de la vida diaria. El objetivo del Numicon es que los estudiantes descubran, exploren y validen sus resultados de manera autónoma, es decir, construyan su propio aprendizaje de manera relevante y significativa.

Un segundo trabajo que muestra el interés por recursos didácticos manipulativos es el desarrollado por Salazar (2021). En su tesis doctoral, titulada «*Recursos en el aula de clase para la enseñanza de fracciones en educación general básica media de las instituciones de educación públicas de la ciudad de Latacunga (Ecuador)*», el autor afirmó que el método convencional de instrucción en fracciones genera problemas para los alumnos debido a las diversas interpretaciones que los números pueden generar, lo que crea un cierto desdén hacia las matemáticas. El estudio se realizó en tres fases. En la primera fase, se llevó a cabo una encuesta junto con un cuestionario a un total de 54 profesores; en la segunda fase, se aplicó un cuestionario mediante preguntas tanto abiertas como cerradas a los alumnos del 11.º año; y durante la tercera etapa, se decidió trabajar con dos equipos, uno de ellos empleando recursos educativos y el otro sin estos recursos. Los contenidos fueron los mismos para cada grupo y se pudo constatar que los estudiantes que utilizaron materiales didácticos como el Muro de fracciones o el Puzzle de fracciones comprendieron mejor los conceptos de fracción y las operaciones.

Salazar (2021) llegó a la conclusión de que los materiales didácticos son necesarios para dar sentido en la enseñanza comprensiva, ya que se ha demostrado que el uso de estas herramientas de una manera adecuada incorpora a los alumnos un mayor grado de autonomía y

una mejor capacidad para dar sentido y profundizar los objetos matemáticos como la fracción y las operaciones con fracciones. Por supuesto que también los profesores deben poseer ciertos dominios respecto al material para darle el uso adecuado.

Por su parte, Motrel (2022) en su trabajo de grado titulado «*Numicon como material manipulativo en la enseñanza-aprendizaje de fracciones*», presenta un método didáctico basado en el material manipulativo Numicon para la enseñanza de resolución de problemas sobre fracciones a los alumnos de primaria. La metodología utilizada fue dividida en tres momentos en los que las actividades fueron presentadas en orden de dificultad ascendente; utilizando como método de enseñanza y aprendizaje la elaboración y uso correcto de materiales manipulables como las regletas y las fichas Numicon para entender el concepto de fracción en grados cuarto, quinto y sexto de educación primaria.

En cada sesión se abordó un tema específico usando el Numicon, sobre el concepto de fracciones, sus tipos o las operaciones. Al terminar cada sesión se hacía una evaluación sobre el tema abordado. La autora de la investigación llegó a la conclusión de que el Numicon es un material didáctico que refuerza “la comprensión de las matemáticas y en especial, el concepto de «partes» y «todo» de una fracción” (Motrel, 2022, p. 42), así como la identificación de tipos de fracciones y permite, de forma más atractiva, resolver las diferentes operaciones con fracciones para los alumnos.

Un siguiente estudio es el de De la Cruz (2024), titulado «*Aritmoplano como material didáctico para el aprendizaje de fracciones en estudiantes del VI ciclo de una institución pública, Lima 2023*», cuyo objetivo era evaluar el impacto del uso de materiales manipulativos, entre ellos el Muro de fracciones, en la comprensión de significados de la fracción y sus operaciones. La investigación se llevó a cabo con un enfoque cuantitativo, utilizando un diseño

cuasi experimental con grupos de control y un grupo de aplicación. Los participantes fueron estudiantes de educación secundaria, quienes fueron evaluados antes y después de la intervención.

Los resultados mostraron que los estudiantes que utilizaron el Muro de fracciones lograron un mayor entendimiento de las fracciones y sus operaciones, en comparación con aquellos que siguieron un método de enseñanza tradicional. Se concluyó que los recursos manipulativos pueden facilitar la visualización y el razonamiento en torno a la división de fracciones, promoviendo un aprendizaje más profundo y duradero (De la Cruz, 2024).

Los trabajos de De la Cruz (2024) y Motrel (2022) dieron muestra del trabajo en el aula de matemáticas con el Muro de fracciones y Numicon. Estos autores demostraron la utilidad de su uso en la enseñanza de las fracciones y sobre todo al resolver operaciones como la división entre números fraccionarios, mientras que Cermeño y Pacheco (2016) consideraron que la inclusión del Numicon facilitó la comunicación matemática, identificación de relaciones y la generalización de conceptos.

Con base en lo anterior, se reconoce que las investigaciones sobre la enseñanza de la división entre fracciones y otros temas relacionados a las fracciones evidencian la importancia de implementar metodologías innovadoras y recursos didácticos que faciliten la comprensión de este concepto. La creación de tareas profesionales con trayectorias hipotéticas de aprendizaje y entornos reflexivos permitió a los futuros docentes desarrollar habilidades de observación y análisis sobre su práctica, lo que contribuyó a un discurso profesional que pudo hacer más efectiva su práctica docente. Estas conclusiones resaltan la necesidad de un enfoque pedagógico que integró diversas estrategias y recursos para abordar la enseñanza de las fracciones.

Asimismo, se demostró que el uso de materiales manipulativos, como el Muro de fracciones y el Numicon, no solo mejoró la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, sino que también incrementó su motivación hacia el aprendizaje matemático.

1.3.Objetivos

Lo anteriormente expuesto conlleva a proponer los siguientes objetivos:

1.3.1. *Objetivo general*

Diseñar tareas para la formación de profesores en ejercicio que favorezcan la construcción de significados de la división en el conjunto de los números fraccionarios, representados como fracciones, mediante el uso del Muro de fracciones y el Numicon.

1.3.2. *Objetivos específicos*

- ✓ Profundizar en los conceptos matemáticos y didácticos asociados a los números fraccionarios (números racionales, representaciones de los números fraccionarios e interpretación de las fracciones) y en algunos constructos propios de la formación de profesores de matemáticas («mirar profesionalmente» y «tareas profesionales») a través del estudio de literatura especializada.
- ✓ Establecer relaciones entre el significado de la división entre números fraccionarios, representados por fracciones, y los materiales didácticos Muro de fracciones y Numicon.
- ✓ Construir una secuencia de cuatro tareas profesionales dirigidas a profesores en ejercicio del Colegio Santa Teresita del Departamento de Caazapá-Paraguay, orientadas al significado de la división entre números fraccionarios utilizando el Muro de fracciones y el Numicon, pasando por la exploración del material, la representación de fracciones y de fracciones equivalentes.

2. Marco de referencia

El contenido que se desarrolla en este capítulo está organizado en tres secciones. En la primera sección titulada “*Desde las matemáticas y la didáctica de las matemáticas*”, se precisa qué son los números racionales, sus elementos y términos asociados, así como qué son los números fraccionarios y sus formas de representación (verbal, simbólica, gráfica y manipulable). En la representación simbólica de los números fraccionarios se encuentra la expresión decimal y la expresión fracción, se despliega un apartado especial sobre la fracción por ser tema de interés de este trabajo; también se trata los tipos de fracciones y sus diferentes interpretaciones (parte-todo y medida, como razón, como cociente y como operador).

Asimismo, se aborda la división entre fracciones, por ser el objeto principal de este trabajo de grado, así como los diferentes significados de la división, sus interpretaciones y los algoritmos utilizados para la división entre fracciones. Además, se plantea el uso del Muro de fracciones y el Numicon como medio de representación manipulable para el desarrollo de este contenido.

En la segunda sección, referente de la Formación de profesores de Matemáticas, se describe la competencia «mirar profesionalmente», la idea de tareas profesionales desde la perspectiva de varios investigadores y el itinerario profesional que puede seguir una tarea de este tipo.

En la última sección, con el fin de contextualizar al lector sobre el sistema educativo paraguayo, se hace mención a este, centrando la atención en el currículo de matemáticas del tercer ciclo de la educación escolar básica, que es el nivel en el cual se desempeñan los profesores a quienes se dirigen las tareas propias de este trabajo; así como la descripción del programa de profesorado de matemáticas del tercer ciclo para situar el eje temático referente a la

división de números fraccionarios dentro del programa de formación docente, tema de interés de este trabajo de grado.

Para la construcción de este capítulo se recurrió a fuentes bibliográficas como: Vasco (2021), Luque et al. (2014), Muñoz (2002), Llinares et al. (2008) y Liñán, et al. (2014).

2.1. Desde las matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas

Es común que los docentes utilicen los términos número racional, números fraccionarios y fracción como sinónimos, lo cual constituye un primer error, aunque existan relaciones entre estos conceptos. Los números racionales son el conjunto numérico, podría decirse, macro o global. De este hacen parte los números fraccionarios; es decir, es un subconjunto de los primeros. Mientras que las fracciones son una forma de representar los números racionales o fraccionarios. A continuación, se realiza un breve recorrido histórico del origen de los números racionales y del proceso de construcción del concepto de los números antes mencionados, sus características y las diferencias que existen entre estos.

Posteriormente se describen las representaciones de los números fraccionarios y se detalla la representación de materiales manipulables para exponer las características, elementos y uso del Muro de fracciones y el Numicon para luego adentrarse al conocimiento de las fracciones, sus interpretaciones y la división entre números fraccionarios.

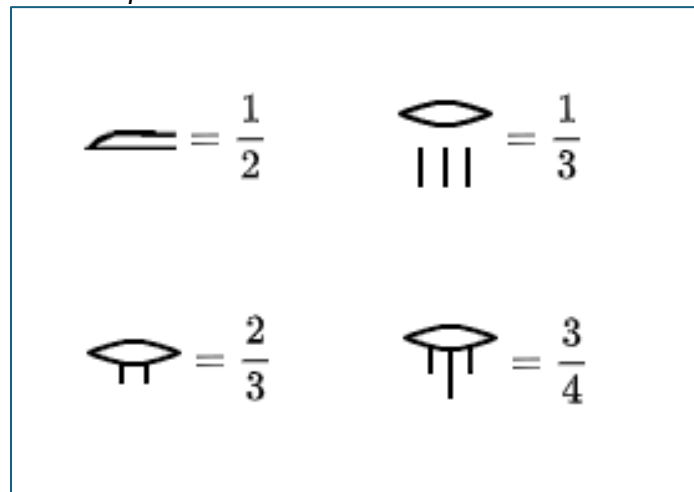
2.1.1. *Números racionales y números fraccionarios*

En las civilizaciones antiguas surgieron los números naturales como respuesta al proceso de contar; luego, con el transcurrir del tiempo, aparece la necesidad de medir, lo que hizo a los números naturales insuficientes, entonces aparecieron los números racionales como una forma de resolver los problemas prácticos de la cotidianidad como la de repartir campos, piezas de carne entre varias personas o un pan entre varios comensales.

Uno de los primeros sistemas de representación de los números racionales lo constituye las fracciones. El primer indicio del uso de los números racionales está dado por los egipcios (5000 a.C. aprox.) que recurrían a las fracciones unitarias para expresar sus acciones de repartos agro-comerciales como: pieza de carne, semillas o granos (Luque et al., 2013).

El Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes que data del año 1700 a. C. aproximadamente es una clara evidencia de que los egipcios recurrían a las fracciones para solucionar problemas de reparto como, por ejemplo, una, dos, seis, siete, ocho o nueve hogazas de pan entre diez hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, y en ocasiones $\frac{2}{3}$ (Mora, 2022). En la figura 2 se puede observar cómo los egipcios hacían uso de los jeroglíficos para escribir las fracciones unitarias, expresaban el numerador con la forma de una boca abierta y como denominador un número natural establecido.

Figura 2
Representación egipcia de las fracciones



Nota. Extraído de https://numeros.xyz/numeros-egipcios/#google_vignette.

Posteriormente, los babilonios (1800 a.C. aprox.) hicieron uso de las fracciones como parte-todo. Luque et al. (2013) menciona que los babilonios representaban situaciones en tablillas para expresar las fracciones sexagesimales. Uno de los problemas escritos en la tablilla

dice: “Yo encontré una piedra. No la pesé. Un séptimo agregué. Un undécimo que agregué. Yo lo pesé. 1 maná. ¿Cuál fue el peso original de la piedra? El peso de la piedra era $\frac{2}{3}$ maná 8 gin 22 $\frac{1}{2}$ se.” (Luque et al., 2013, p. 324). En este problema planteado por los babilonios se interpreta a las fracciones como parte de un todo. Además, problemas como estos se puede encontrar en las tablillas aproximaciones a fracciones como $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{7}$ que eran usadas para realizar las divisiones entre números naturales (Luque et al., 2013). La simbología actual de la fracción se les atribuye a los hindúes, aunque se cree que fueron los árabes quienes introdujeron la raya horizontal.

Entre el siglo XII y XIII, Fibonacci (1180 - 1250) hacía uso del sistema decimal derivado de los numerales hindú-arábigos, aunque extrañamente utilizaba las fracciones unitarias en las transacciones mercantiles y las sexagesimales para los problemas teóricos matemáticos. Mas existen indicios de que mucho antes los chinos ya hacían uso de las fracciones decimales en las transformaciones de monedas y medidas (siglo XIV a. C.), al igual que utilizaban métodos para desarrollar operaciones entre fracciones, similares a los de la actualidad en acción de reparto. Posterior a eso, Simon Stevin (1548 - 1620) introdujo la teoría sobre las fracciones decimales con una explicación sencilla del uso de la notación decimal en las actividades comerciales y financieras. Naphier (1550 – 1617) hacía referencia a los decimales de Stevin y propuso el uso de punto o coma para separar los enteros de los decimales (Luque et al., 2013).

A través del tiempo, desde la aparición de las fracciones en las primeras civilizaciones antes de nuestra era y pasando por la Edad Media, Moderna y Contemporánea, tanto filósofos como matemáticos realizaron diferentes propuestas para definir los números racionales. Luque et al. (2013) mencionan que:

“Weierstrass caracteriza a los números racionales positivos con base en la idea de partes exactas de la unidad y en la de una relación de equivalencia (...)” (p. 309) “Por otro lado, Weierstrass con la idea intuitiva de componer una unidad con n partes n -ésimas exactas de ésta, además de definir una relación de igualdad entre los racionales, presenta una noción incipiente de inversos multiplicativos” (p. 310). En este sentido, “Dedekind, por su parte, supone elaborada la aritmética de los números racionales y señala que forman un cuerpo de números con unas propiedades relacionadas con el orden” (p. 310).

Dedekind pretendía construir la definición de los números reales, pero usando la recta racional y decía que existen unos agujeros que hacen que se produzcan cortaduras que no se llenan y que la mejor manera de cubrir esos agujeros es con el mismo agujero. Cada agujero representa una división del conjunto de los números racionales en dos subconjuntos disjuntos (Archimedes Tube, 2021).

Entonces, con base a la idea de Dedekind se puede decir que la descripción de la cortadura es una partición de $\mathbb{Q}$ en dos subconjuntos A y B , que se construye formando parejas con estos dos subconjuntos.

En relación con lo que dice Dedekind; por ejemplo, si se toma el elemento cero se tiene:

$$0 = (A, B) \text{ tal que,}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq 0\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q}: y > 0\}$$

Cada elemento de A es menor que todo elemento de B . El cero como es un número racional puede formar parte del conjunto A o del conjunto B . Es decir, cualquier número racional puede formar parte de uno u otro subconjunto (A, B) .

Luque et al. (2013) resaltan que:

Dedekind da por sentadas las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, y no expone las propiedades que éstas deben cumplir en el nuevo conjunto, exalta la relación de orden definida para tal conjunto, relacionándola con la propiedad de interestancia de los puntos en una recta, y de manera especial menciona la densidad como una característica relevante. (p. 311).

Según Sfard (1991) toda noción matemática ha pasado por un proceso largo de desarrollo de eventos o situaciones esto sucede en particular con los números racionales que tras un proceso de tres fases se logran consolidar como objeto matemático: la primera fase denominada preconceptual (realizar operaciones sobre números ya conocidos), la operacional (surgen nuevas operaciones prohibidas como la división/medición, pero aceptadas por ser útiles el objeto) y la estructural (el número es definido, visto como objeto matemático).

En el marco del proceso estructural de los números racionales surge la presentación de estos por clases de equivalencia. Muñoz (2002) expresa, en relación con esto, que “un número racional se puede expresar en forma de quebrados, es decir mediante una pareja ordenada de enteros, el primero de los cuales es el numerador y el segundo (no nulo) es el denominador” (p.177). Por ejemplo: $\frac{m}{n}$ o (m, n) con m y $n \in \mathbb{Z}$, con la salvedad que $n \neq 0$.

También, Muñoz (2002) hace mención a que $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ si y sólo si $mq = np$, para formar clases de equivalencia entre las parejas de números enteros. Dicho de otro modo $(m, n) \sim (p, q)$ si y solo si $mq = np$. Ejemplo: $(1, 2) \sim (2, 4) \sim (3, 6) \sim (4, 8) \sim (-2, -4) \dots$

Con esta relación que resulta ser de equivalencia³ se forman las parejas ordenadas equivalentes entre sí que constituyen conjuntos (clases de equivalencia) que corresponden a números racionales, como los siguientes:

$$\frac{1}{2} = [(1, 2)] = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (6, 12), \dots, (-1, -2), (-2, -4), (-3, -6), \dots\}$$

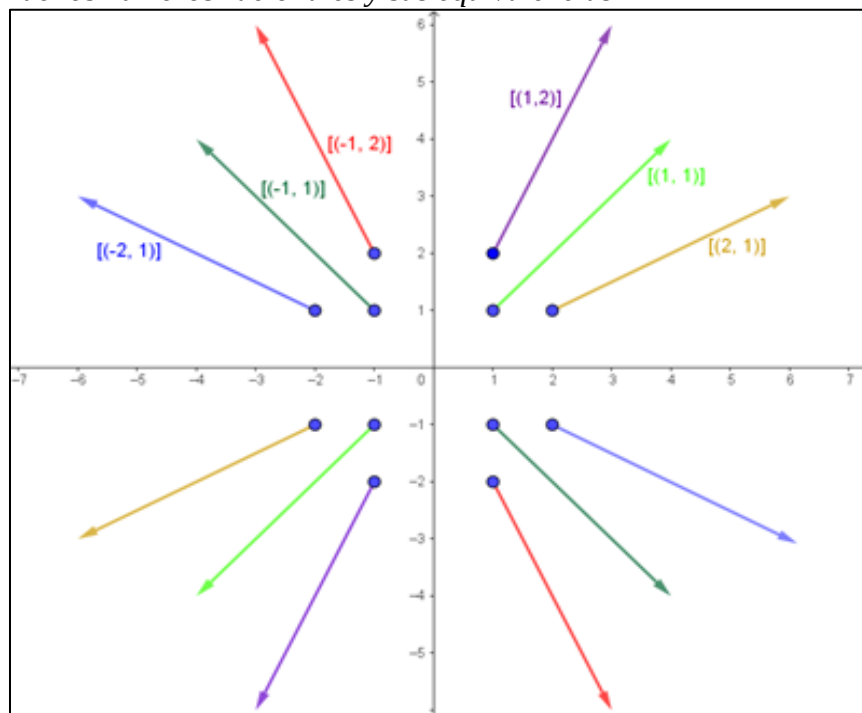
$$\frac{1}{1} = [(1, 1)] = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (-1, -1), (-2, -2), (-4, -4), \dots\}$$

$$\frac{2}{1} = [(2, 1)] = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (-2, -1), (-4, -2), (-6, -3), \dots\}$$

Estas clases de equivalencia pueden ser representadas gráficamente en el plano cartesiano como se ve en la Figura 3.

Figura 3

Representación de los números racionales y sus equivalencias



Nota. Elaboración propia.

³ $\sim$ es una relación de equivalencia porque es reflexiva, es decir para toda pareja ordenada (m, n) , se cumple que $(m, n) \sim (m, n)$; es simétrica, esto es si $(m, n) = (p, q)$ entonces $(p, q) = (m, n)$ y es transitiva, o sea que si $(m, n) = (p, q)$ y $(p, q) = (e, f)$ entonces $(m, n) = (e, f)$.

En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se realiza una partición de acuerdo con la relación creada entre las parejas por la equivalencia entre ellas, formando así el conjunto cociente $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Es decir que:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim.$$

Otra forma de expresar lo anterior lo exponen Luque et al. (2014) explicando que un número racional corresponde a una familia de fracciones equivalentes entre sí; estas familias se representan con paréntesis cuadrados, así: $[(m, n)]$; o sea, el número racional $[(m, n)]$ es la familia de parejas de números enteros que sean equivalentes a la fracción dada $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

Se puede afirmar que los números racionales son infinitas familias de fracciones equivalentes entre sí y a cada una de ellas le corresponden dos semirrectas en el plano cartesiano como se muestra en la figura 3. Es decir, se puede considerar a los números racionales como un mega concepto el cual incluye muchos hilos entrelazados.

Con respecto a los *números fraccionarios*, estos son un subconjunto de los números racionales, se forman con parejas de números naturales tales que la segunda componente el divisor debe ser distinto de 0. Vasco (1991) utiliza la notación $\mathbb{Q}^*$ para referirse a este subconjunto, como números fraccionarios.

Según Vasco (1991), los números fraccionarios son un archipiélago compuesto por varias islas, en la principal se encuentran los operadores o transformadores y las islas independientes conformadas por los fraccionarios como medidores, los fraccionarios como razones y los fraccionarios como cocientes indicados.

Vasco (2021) presenta a los números fraccionarios que andan siempre en parejas con el agrandador por delante y detrás de él va el achicador que le corresponde, lo que denota una

propiedad de orden. Este autor realiza una descripción de las características que presentan los números multiplicativos agrandadores y su inverso, los achicadores.

Según Vasco (1991), el sistema de los números fraccionarios es:

$$\text{Números Fraccionarios} = (\mathbb{Q}^*, \{+, -, \times, ()^{-1}\}, \{>, <\})$$

O sea, el sistema de los *números fraccionarios* está conformado por elementos u objetos, que son los números racionales positivos, las operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y la división) y la relación mayor o menor que entre esos números.

2.1.2. Representaciones de los números fraccionarios

Existen varias formas de representación de los números fraccionarios. Atendiendo a Morcote y Flores (2001), así como a Corredor y Gordillo (2020), se puede decir que hay cuatro tipos de representaciones: las representaciones figurales o gráficas, las representaciones numerales o simbólicas, las representaciones literales y las representaciones manipulables.

La representación figural puede asociarse a tres subtipos de representación; una es la continua superficial, **que** corresponde a utilizar el área de figuras geométricas poligonales o circulares para representar números fraccionarios. Otra es la representación continua lineal, esta es cuando la fracción se representa en la recta numérica y finalmente la representación discreta que se aplica a objetos individuales que no pueden subdividirse.

La representación numeral corresponde a la clásica representación de los números fraccionarios. La más utilizada es la fracción. Los números se expresan de la forma $\frac{a}{b}$ o a/b , con a y b números naturales y b diferente de cero. Otra forma de representación numeral es la porcentual, al expresar un número como parte de 100, se asocia el número fraccionario con porcentajes con el símbolo (%) símbolo después del número; también se encuentra la

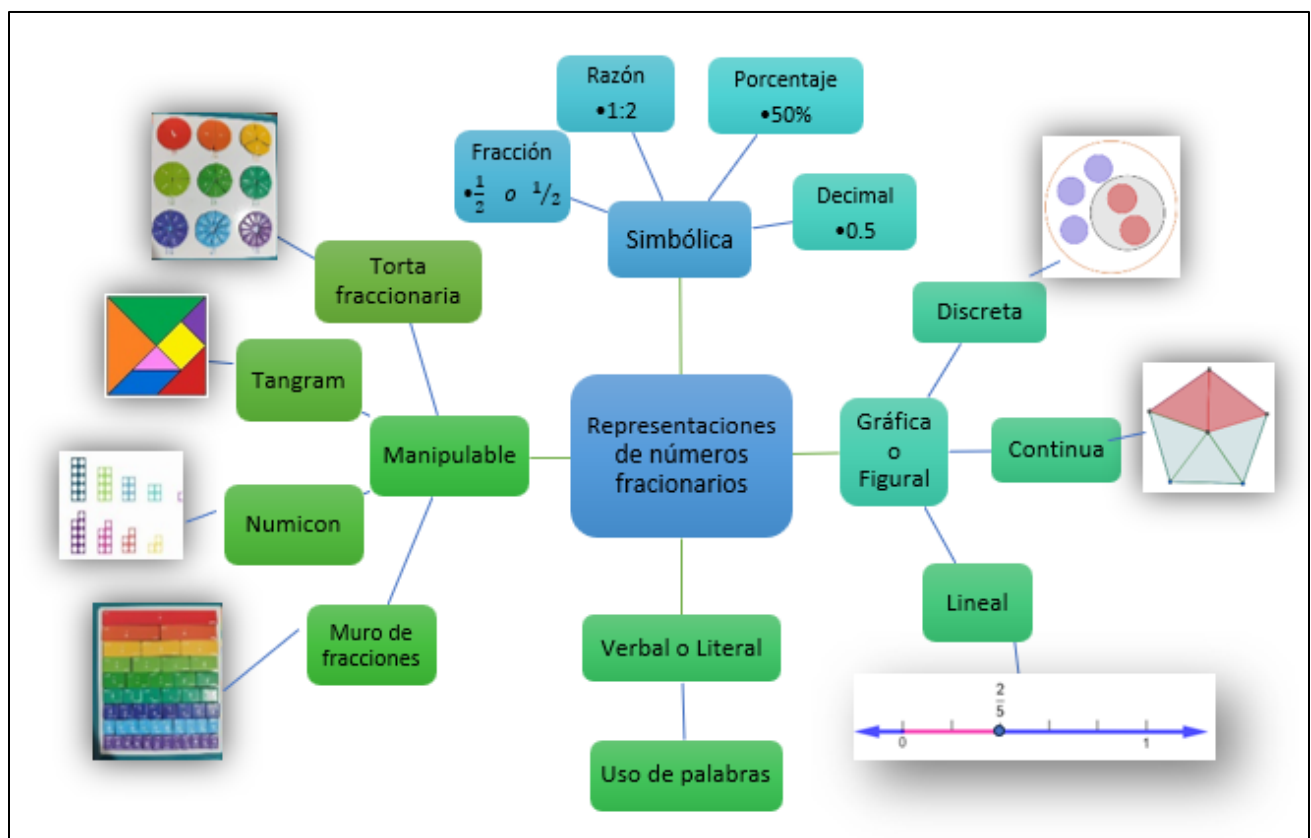
representación como razón y, por último, están las expresiones decimales que se obtienen luego de dividir a entre b .

La *representación literal* es la expresión verbal que permiten escribir y leer las fracciones, ejemplos de esta representación son: tres cuartos, cinco décimos o la razón tres a ocho.

Por último, está la *representación manipulable*, esta corresponde al uso de materiales manipulables para la enseñanza de los números fraccionarios; por ejemplo, la clásica torta de fracciones, las Regletas de Cuisenaire, el Muro de Fracciones y el Numicon.

En la figura 4 se muestra un esquema que resume las representaciones descritas más arriba.

Figura 4
Representación de los números fraccionarios



Nota: Elaboración propia.

Para este trabajo se considerará solo la representación como fracción, la gráfica (continua y discreta) y la manipulable; para esta última se usará el Muro de Fracciones y el Numicon por ser de interés para este trabajo. Ahora, se presenta en detalle, otra de las representaciones de los números fraccionarios, las fracciones; las cuales son de sumo interés en este trabajo.

2.1.3. Fracciones

Las fracciones aparecen cuando el ser humano debe realizar actividades que requieren repartir terrenos, mercancías en sus transacciones o calcular el número de ladrillos para una construcción (Zarco, s.f.); es decir, las fracciones se usan para representar la medida de longitudes, áreas, volúmenes y otros tipos de magnitudes del entorno y cuyo resultado de la medida de esa magnitud no está contenida un número entero de veces a la unidad de medida.

2.1.4.1 Definición y elementos de una fracción

Según el diccionario etimológico (2024), la palabra de fracción deriva del latín «frangere» que significa romper, quebrar; de ahí surge la otra denominación de «quebrados» en relación con los números naturales.

Para Freudenthal (1983) “las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca” (p. 2); es decir, Freudenthal (1983) reafirma que las fracciones son una forma de representación simbólica de los números racionales y que siempre hay nuevas formas de utilizar y explorar las fracciones, lo que las convierte en una herramienta inagotable para el aprendizaje y la enseñanza de los números racionales.

Para Vasco (2021), “(...) las fracciones: son unos letreros o rótulos que vamos a llamar “los uniformes” o “los disfraces” de los monstruos fraccionarios” (p. 28).

La fracción es la expresión de forma $\frac{a}{b}$ o a/b en la que a y b son números naturales y $b \neq 0$ como ya se ha dicho antes. Sus elementos son tres:

- ✓ Numerador: es un número entero que se ubica sobre la parte superior del vínculo.
Representan las partes iguales de las que se toman de la unidad.
- ✓ Denominador: es un número entero que se ubica en la parte inferior o debajo del vínculo. Representan las partes divididas de la unidad.
- ✓ Vínculo: es una línea horizontal u oblicua que separa al numerador y al denominador.

Ejemplo: $\frac{3 \rightarrow \text{numerador}}{5 \rightarrow \text{denominador}} \rightarrow$ vínculo $3 \rightarrow \text{numerador} / 5 \rightarrow \text{denominador}$

2.1.4.2. Tipos de fracciones

A través del tiempo, muchas civilizaciones, por la necesidad de representar a los números fraccionarios, han utilizado diferentes símbolos para expresar a las fracciones. Existen varios tipos de fracciones que se definen de acuerdo con su uso.

Mora (2022) realiza una clasificación de los tipos de fracciones así:

En relación con la unidad se distinguen:

- ✓ **Las fracciones propias:** son aquellas fracciones $\frac{a}{b}$, menores que la unidad, en las que el denominador es mayor que el numerador, es decir que $a < b$. Este tipo de fracciones pueden ser:

- **Fracciones unitaria:** son fracciones en las que el numerador es 1 y el denominador es un entero positivo, distinto de uno. Ejemplos: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$.

- **Fracciones no unitarias:** es una fracción en la que el numerador es menor que el denominador y distinto de uno y el denominador es un entero positivo $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}$.

✓ **Las fracciones impropias:** son aquellas *fracciones mayores* que la unidad $\frac{a}{b}$, cuyo numerador es mayor que el denominador, es decir $a > b$. Ejemplos: $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{27}{13}$. Dentro de este tipo de fracciones están las llamadas fracciones mixtas, en las que se ubica la parte entera de la fracción impropia y la fracción propia restante se pone al lado derecho del número entero. Ejemplos: $1\frac{2}{5}$, $1\frac{2}{9}$, $2\frac{1}{13}$.

En relación con el denominador se tiene:

✓ **Fracción decimal:** cuando el denominador de una fracción es una potencia de 10.

Por ejemplo: $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{13}{1000}$.

✓ **Fracción sexagesimal:** cuando el denominador de una fracción es una potencia de 60. Por ejemplo: $\frac{5}{60}$, $\frac{7}{3600}$.

Comparando dos o más fracciones en relación con el número que representan:

✓ **Fracciones equivalentes:** dos fracciones son equivalentes si ambas forman parte de la misma familia de parejas, es decir si los productos del numerador de una y el denominador de la otra son iguales. Por ejemplo, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

✓ **Fracciones no equivalentes:** llamadas así cuando una fracción es mayor o menor que otra fracción. Por ejemplo: $\frac{3}{4} > \frac{1}{3}$, $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$.

Comparando dos o más fracciones en relación con su denominador:

✓ **Las fracciones homogéneas:** son aquellas fracciones que tienen el mismo denominador. Ejemplo: $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$.

✓ **Las fracciones heterogéneas:** estas fracciones tienen denominadores distintos. Ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ son fracciones heterogéneas.

2.1.4.3 Interpretaciones de las fracciones

Existen varios significados asociados a las fracciones. Según Llinares y Sánchez (1997) la comprensión del concepto de fracción depende del contexto en el que se utilice. A continuación, se presentan las diversas interpretaciones de las fracciones, seguido de las explicaciones correspondientes a cada una.

La fracción y la relación parte- todo y la medida: es la interpretación clásica de las fracciones (Llinares y Sánchez, 1997). En esta interpretación, una fracción representa una parte de un todo dividido en partes iguales. Esto se refiere al tamaño de tales partes, a su área, no necesariamente a su forma. La fracción parte-todo se puede expresar de dos formas:

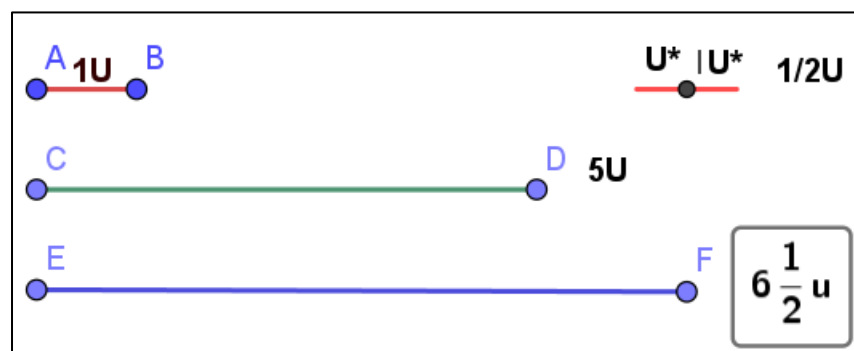
- ✓ Todo continuo: la fracción representa una parte de un todo que no está compuesto por unidades separadas, sino que es una cantidad continua que puede ser dividida en partes iguales. Por ejemplo: se toma una barra de chocolate que representa un todo continuo. Se divide esta barra en 4 partes iguales, cada parte es una fracción del todo y si se toma 3 partes del todo, esto representa $\frac{3}{4}$ del todo.
- ✓ Todo discreto: a partir de una unidad (cada uno de los cuales no se puede dividir) se determina la relación entre un número de partes (elementos) y el total de partes que se ha dividido la unidad. Por ejemplo: de 10 canicas 3 son azules, 4 son blancas y 3 son negras, y se desea saber ¿Qué fracción representa cada color de canicas? Considerando el total de canicas se obtendrá de cada color: $\frac{3}{10}$ son azules, $\frac{4}{10}$ son blancas y $\frac{3}{10}$ son negras.

Con respecto a la medida, es importante resaltar que son las magnitudes las que se parten, para ello es necesario la elección de una unidad arbitraria y otras subdivisiones, seguidamente se presenta un ejemplo particular sobre longitud tal como se observa en la figura 5, se traza el

segmento AB de longitud una unidad; luego se traza otro segmento CD y se procede a utilizar el segmento AB para conocer la medida de este segmento CD, entonces como el segmento AB mide 1u, cabe 5 veces en el segmento CD; por tanto, el segmento CD mide 5u. Si se traza otro segmento EF, y se utiliza nuevamente el segmento AB para conocer la medida del segmento EF, se presenta una situación diferente a la anterior, el segmento AB no está contenido un número entero de veces en el segmento EF; por tanto, se procede a dividir el segmento AB en segmentos más pequeños, y se toma el segmento restante de EF, el que queda después de medirlo con el segmento AB, y compararlo con el segmento AB, se halla que ese trozo cabe 2 veces en AB (para el caso), por lo que mide $\frac{1}{2}$ de AB, ahora el segmento AB mide 1 u, con esta medida de longitud se mide el segmento EF, ahora sí fue posible obtener la medida del segmento EF equivalente a $6 \frac{1}{2}u$. En este caso se recurre como medida de referencia a una unidad para conocer la magnitud de los segmentos.

Figura 5

Medida de longitudes con un segmento unidad AB



Nota. Elaboración propia.

La fracción como cociente: En esta interpretación la fracción se asocia a la operación de dividir un número natural por otro, cuyo resultado puede generarse de dos maneras: de una situación de reparto en la que se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir «a» unidades en «b» partes iguales, o de una situación en la que se busca saber la

medida exacta que le corresponderá a cada individuo u objeto en la distribución de « a » unidades entre « b » (Llinares y Sánchez, 1997).

Llinares y Sánchez (1997) plantean que en esta interpretación de las fracciones como cociente y en las situaciones de división-reparto en las que una cantidad se divide en un número de partes dadas se pueden visualizar las fracciones como el resultado de dividir una cantidad total en partes iguales. Seguidamente, se presenta un ejemplo para cada situación de reparto:

La primera situación proporciona la cantidad y el número de partes en las que se debe repartir y se quiere saber lo que vale cada parte. Ejemplo: se tiene 5 panes que se deben repartir equitativamente entre 3 personas ¿Cuánto de pan corresponde a cada persona? Cada pan se divide en 3 partes iguales, así a cada persona le corresponde $\frac{5}{3}$ de pan.

La segunda situación proporciona la cantidad y lo que corresponde a cada parte y se solicita el número de partes (medida). Por ejemplo: se tiene 5 panes y a cada persona le corresponde $\frac{5}{3}$ de pan ¿A cuántas personas se ha podido dar el pan? La respuesta es: Se ha podido dar esa cantidad de pan a 3 personas.

La fracción como razón: es la relación o comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las comparaciones pueden darse de conjunto-conjunto (todo-todo) aunque también puede darse relación parte-parte. Este significado se usa comúnmente para formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes al relacionar el valor de una fracción con otros valores adicionales, probabilidad y porcentajes. (Llinares y Sánchez, 1997)

Según Morcote y Flores (2001) existe una relación entre a y b (una razón), todo cambio en « a » producirá un cambio en « b ». Algunos de los contextos en los que se presenta este uso de las fracciones están asociados a mezclas y aleaciones, comparación de alturas, entre otras.

Ejemplo: En una biblioteca escolar hay 15 estudiantes y 45 libros. Se desea saber la razón de libros por estudiante. Respuesta: la razón entre el número de libros por estudiante es $\frac{45}{15}$, esto quiere decir que a cada estudiante le corresponden 3 libros porque $\frac{45}{15}$ es equivalente a $\frac{3}{1}$.

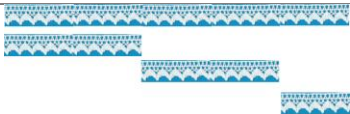
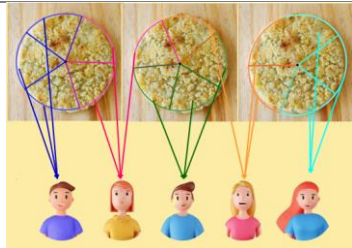
La fracción como operador: en esta interpretación una fracción $\frac{a}{b}$ puede ser vista como una operación que se aplica a una cantidad en la que «n» para obtener una parte proporcional de ella (Llinares y Sánchez, 1997). Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o a la inversa, la fracción es el número que modifica un valor particular «n» multiplicado por «a» y dividiendo por «b», también puede ser primero dividiendo por «b» y luego multiplicando por «a». Depende de que sea más eficiente en el momento de operar. Ejemplo: En una sala hay 28 estudiantes de los cuales $\frac{4}{7}$ son niñas ¿Cuántas niñas hay en la clase? Para resolver este problema se puede proceder dividiendo 28 por 7 y multiplicarlo por 4 generando un resultado de 16 niñas.

Como se ha visto existen diferentes interpretaciones de las fracciones. A continuación, se presenta la tabla 2 con ejemplos de situaciones problemáticas que involucran las fracciones y sus interpretaciones utilizando el contexto de la cultura paraguaya.

Tabla 2

Interpretaciones de los significados de la fracción

Interpretación de las fracciones	Situación	Gráfica
Parte-todo Continuo	José tiene una bandeja de sopa paraguaya y hace algunos cortes como se ve en la imagen de la derecha. ¿Cuál fracción de la sopa representa el trozo que se halla encima de las otras porciones?	 Fuente: Infobae

		La fracción de sopa paraguaya que está sobre las otras porciones es $\frac{1}{12}$ del total.
Discreta	Se tiene 7 <i>chipas</i> , de las cuales 4 están hechas de harina de maíz y 3 son hechas de almidón. ¿Qué fracción representa cada conjunto de <i>chipa</i> del total de acuerdo con su ingrediente?	 Representa las $\frac{3}{7}$ chipas de almidón y $\frac{4}{7}$ chipas de harina de maíz del total de chipas
Medida	Doña Josefa está tejiendo dos listones de <i>encaje ju</i> , uno de 2 m y otro de 5 m. Teniendo en cuenta la medida de dos metros de <i>encaje ju</i> quiere saber cuántas veces más tuvo que tejer para los 5 m del otro <i>encaje ju</i>	 El encaje de 5m es $2\frac{1}{2}$ (dos veces más que 2m y la mitad de 2m) de <i>encaje ju</i>, según la medida arbitraria tomada de 2 m.
Como cociente	Mamá cocina 3 <i>mbeju</i> y en la casa vivimos 5 personas. ¿Cuántos pedazos iguales de <i>mbeju</i> corresponderá a cada uno?	 Cada <i>mbeju</i> será cortado en 5 partes iguales y como se tiene tres <i>mbeju</i>, entonces a cada uno le corresponde $\frac{3}{5}$ (tres quintos) de <i>mbeju</i>.
Como razón	Para hacer el relleno del <i>pastel mandi'ó</i> , Adela utiliza 2 huevos duros por cada 5 <i>pastel mandi'ó</i> . Representa la fracción que relacione el número de huevos por <i>pastel mandi'ó</i> .	 La razón $\frac{2}{5}$ representa la relación de 2 huevos por cada 5 <i>pastel mandi'ó</i>.
Como operador	La abuela Perla ha hecho 15 <i>chipas</i> , de las cuáles $\frac{3}{5}$ de <i>chipas</i> son alargadas y el resto redondas. ¿Cuántas chipas son alargadas?	

Para hallar la cantidad de chipas alargadas se hace $\frac{3}{5} \times 15 = 9$; es decir hay 9 *chipas* alargadas.

Nota. Elaboración propia.

La construcción de estos significados de la fracción es el punto de partida para el afianzamiento de otros saberes relacionados con las fracciones. Lo ideal es que los profesores utilicen situaciones contextuales y procedimientos que logren que sus estudiantes identifiquen a la fracción como una cantidad o como una relación de cociente entre dos cantidades (Gómez et al., 2016).

En este sentido, los materiales manipulables, como el Muro de fracciones y el Numicon, pueden llegar a facilitar una comprensión visual y tangible de los conceptos relacionados a las fracciones. Estos recursos permiten a los estudiantes explorar relaciones numéricas, identificar equivalencias y modelar operaciones matemáticas, como la división entre fracciones, de manera dinámica e interactiva. Así, se busca fortalecer la transición del pensamiento concreto al abstracto, promoviendo un aprendizaje más significativo. Por ello, se exponen, enseguida, estos materiales didácticos.

2.1.4. Materiales manipulables: Muro de Fracciones y Numicon

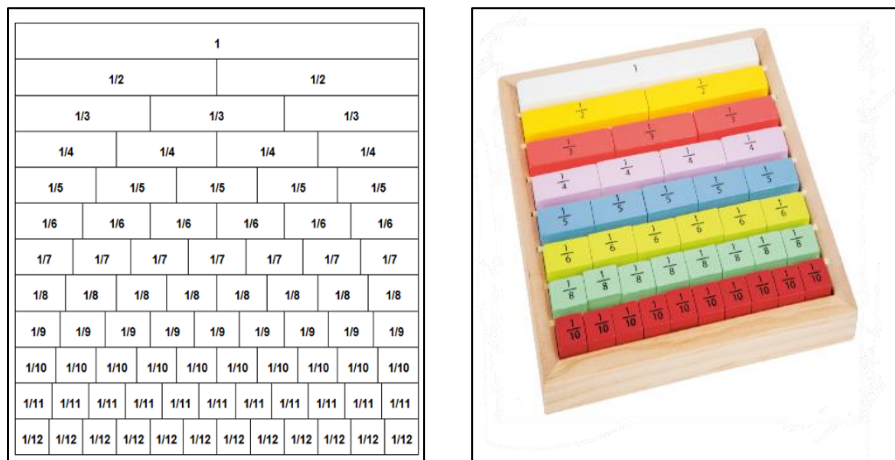
Según Alsina (2012), la manipulación de materiales debe estar presente en todos los niveles educativos para introducir nuevas ideas y promover la visualización del objeto matemático de estudio. Existen diversos materiales manipulables que pueden ser utilizados para la enseñanza de la división entre números fraccionarios, el círculo de fracciones, las varillas o regletas de Cuisenaire, el ábaco fraccionario, el geotablero (también conocido como geoplano), el dominó de fracciones, las tiras de fracciones, también conocida como el Muro de fracciones o Diagrama de Freudenthal, el Numicon, las fichas de lego, entre otros.

2.1.3.1 Muro de Fracciones

El Muro de Fracciones o Diagrama de Freudenthal, también conocido como «*fraction wall*» en inglés, es una herramienta utilizada en la educación matemática para ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones y sus relaciones. No existe evidencia concreta de que Hans Freudenthal (1905-1990) sea el creador del concepto del Muro de Fracciones ni la fecha exacta de la aparición de este material, pero se reconoce a este personaje por haber influido en la construcción del Diagrama de Freudenthal. (Solís, 2008, citado por Huaranga y Laurente, 2011).

El Muro de Fracciones tiene forma de un rectángulo dividido en franjas horizontales, cada una de ellas representa la unidad, la primera franja va completa y las siguientes franjas son divididas en porciones iguales cada una de las cuales representan fracciones unitarias como un medio, un tercio, un cuarto, un quinto, un sexto, un séptimo, un octavo, un noveno, un décimo, un onceavo, un doceavo, como se observa en la figura 6.

Figura 6
Diagrama de Freudenthal o el Muro de fracciones



Nota. Extraído de Huaranga y Laurente (2011, p. 58).

El Muro de fracciones es un material idóneo para abordar fracciones equivalente, comparar fracciones y realizar operaciones (Flores et al., 2011). Fernández (2009) menciona las siguientes ventajas que conlleva el uso del Muro de fracciones durante la enseñanza de los

números fraccionarios: facilita la identificación de fracciones equivalentes, igualdades y desigualdades entre fracciones, el estudiante se familiariza con todas las operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones, resulta fácil su construcción, manejo y es útil para entender las fracciones. En cuanto a las desventajas se puede mencionar la representación de fracciones impropias, así como realizar algunas adiciones y sustracciones.

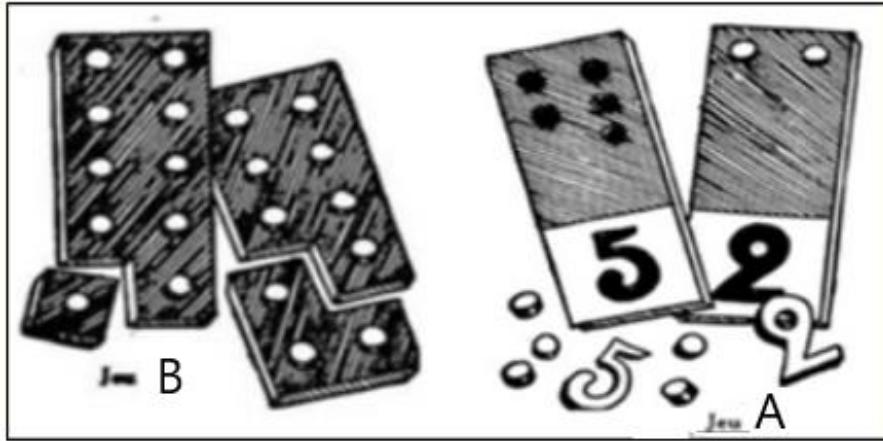
2.1.3.2 Numicon

Según investigaciones realizadas por Jobbé-Duval (2021), este material manipulativo hace su aparición entre los años 1867 y 1893 en su primera versión, denominado Nürnberger Rechenbrett (ábaco de Nuremberger), presentado por el alemán Ernst Troeltsch con el propósito de servir a la construcción del número como relación entre cantidades. Después de la primera guerra mundial, Eugen Koller presenta otra versión mejorada del ábaco de Nürnberger con placas rectangulares perforadas con diez orificios en las que se pueden alojar cilindros de sección bicolor.

En 1923, la profesora Suzanne Herbinière-Lebert (1893-1985) introdujo un material educativo manipulativo con dos versiones de juego, A y B. La versión A consistía en placas perforadas, siendo pionera en el uso de cilindros móviles insertados en placas rectangulares que contenían entre 1 y 10 agujeros. Este recurso se utilizaba para ayudar en la iniciación sensorial al cálculo de operaciones con números naturales, facilitando la comprensión de conceptos matemáticos básicos a través de la manipulación física. La versión B son placas parecidas a las actuales que presentan la forma de acuerdo con los orificios que contienen, A Herbinière-Lebert se la considera inventora de esta particular forma de almohadillas con unidades de base móviles (Jobbé-Duval, 2021). En la figura 7 se puede observar la presentación de ambas versiones de las placas.

Figura 7

Placas de Numicon de Herbinière-Lebert



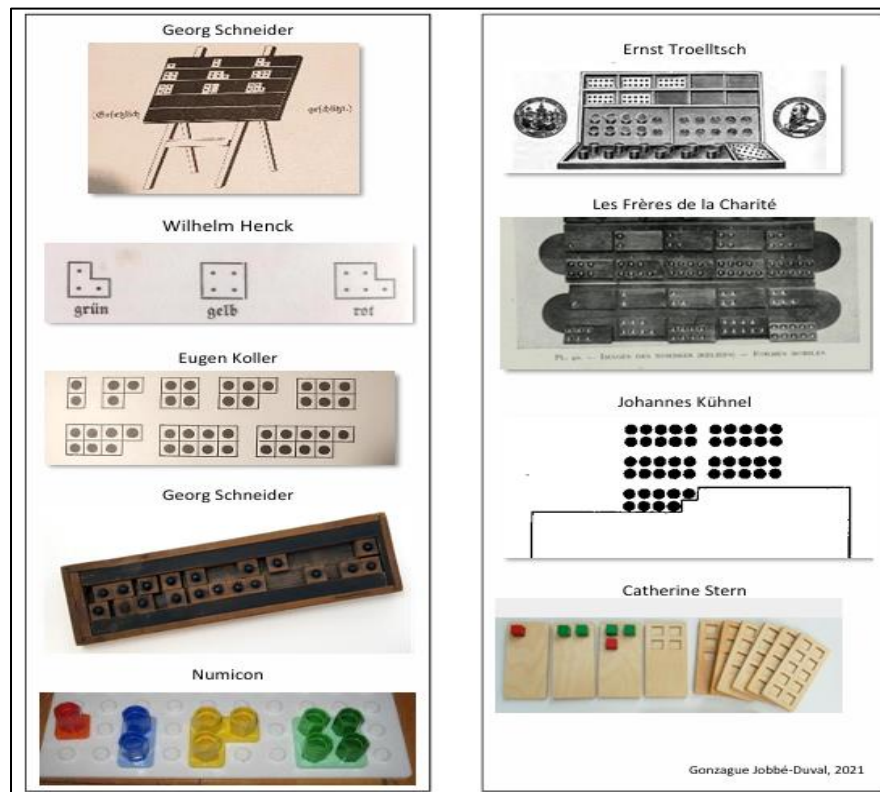
Nota: Extraído de Jobbé-Duval (2021, p. 5).

Catherine Stern, luego de la segunda guerra mundial, presenta en los Estados Unidos sus *Pattern Boards* de estilo similar a las placas de Herbinière-Lebert (pero estrechamente asociados con barras que representan cantidades del 1 al 10). En 1996, los británicos Romey Tacon, Ruth Atkinson y Tony Wing se inspiraron en el trabajo de Catherine Stern (aunque también podría ser en Suzanne Herbinière-Lebert) para crear las formas del Numicon actual. (Jobbé-Duval, 2021)

El Numicon, desde su origen, ha presentado varias modificaciones en su estructura hasta llegar a ser lo que actualmente se utiliza. En la figura 8 se presentan las diferentes modelos de este material didáctico a través del tiempo.

Figura 8

Evolución del Numicon



Nota. Extraído de Jobbé-Duval (2021, p. 10).

Este material manipulativo contiene los siguientes elementos: unas piezas llamadas placas o formas Numicon con orificios circulares que van del 1 al 10, de diferentes colores y formas según el número que representan, unas clavijas que sirven para encajar en los agujeros de las formas Numicon, unas bolsas negras llamadas bolsas sensoriales, las ruletas Numicon que contienen representaciones de números o patrones de las piezas Numicon.

En el centro de la ruleta hay una aguja giratoria que puede apuntar a cualquiera de las secciones., un tablero con 100 cilindros organizados en 10×10 que permiten encajar las formas Numicon y las clavijas. (Díaz-Serrano y Arnal-Palacián, 2020). En la figura 9 se muestra el Numicon con todos sus elementos.

Figura 9

Numicon y sus elementos



Nota: Fotografía del archivo personal de la autora.

El Numicon es un recurso manipulativo utilizado desde el 2015 en Reino Unido, destinado a mejorar la comprensión de los niños acerca de las matemáticas, se fomenta su uso para ayudar a los estudiantes a una mejor comprensión del concepto de número y las relaciones numéricas que se van estableciendo entre ellos, al igual que desarrollar habilidades multisensoriales (Sánchez, 2015).

En la figura 10 se muestra la presentación del Numicon promovido en el Reino Unido, las placas tienen forma rectangular con puntos estructurados en un par de columnas de modo que resulte fácil realizar las operaciones en el Numicon.

Figura 10

Forma ordenada del Numicon actual



Nota. Extraído de Díaz-Serrano y Arnal-Palacián (2020, p. 8).

Según Díaz-Serrano y Arnal-Palacián (2020), entre las actividades que demuestran el éxito del uso del Numicon se encuentran:

- ✓ La identificación y creación de patrones como formas y colores.
- ✓ Permite realizar secuencias de menor a mayor o viceversa.
- ✓ El uso de los agujeros para completar la sucesión de números admite comparaciones unas placas con otras.
- ✓ Estimula el cálculo temprano en niños pequeños a través de las operaciones de adición y sustracciones simples.

Para Sánchez (2015), con ayuda de este material manipulativo los alumnos aprenden más rápido conceptos abstractos que habitualmente les cuesta comprender de acuerdo con su propio ritmo; aumenta la confianza de los estudiantes y el interés por las matemáticas, desarrolla destrezas para el aprendizaje de los estudiantes, fomenta el trabajo en equipo y la habilidad de resolver problemas de manera colectiva.

Con el uso de este material se pretende que el aprendizaje de conceptos abstractos sea de manera rápida y que asienten conocimientos, que los estudiantes sean capaces de resolver las operaciones con números naturales y fraccionarios (Cermeño y Kusnerd, 2016). La principal

desventaja del Numicon es que no se presta para desarrollar muchos de los ejes temáticos del currículo escolar, pues se centra sobre todo en el aprendizaje de los números, operaciones con números y resolución de problemas (Cermeño y Kusnerd, 2016).

Operar con números fraccionarios siempre representa un problema tanto para el profesor como para el estudiante y más aún en la división con fracciones, por ello se recurre a métodos clásicos que solo promueve aprendizajes memorísticos.

2.1.5. División entre números fraccionarios

En el conjunto de los números fraccionarios se pueden definir todas las operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división; sin embargo, para efectos este trabajo en esta sección solo se abordan aspectos relacionados a las interpretaciones que puede llegar a la división entre números fraccionarios, los algoritmos generales utilizados para resolver esta operación y a la vez se explica el procedimiento para resolver la división entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon.

2.1.5.1 Interpretación de la división entre números fraccionarios

En el conjunto de los números fraccionarios la división puede ser interpretada de diversas maneras. Según Contreras (2012), los significados de la división con números fraccionarios son extensiones del significado de la división entre números naturales, como se describe a continuación:

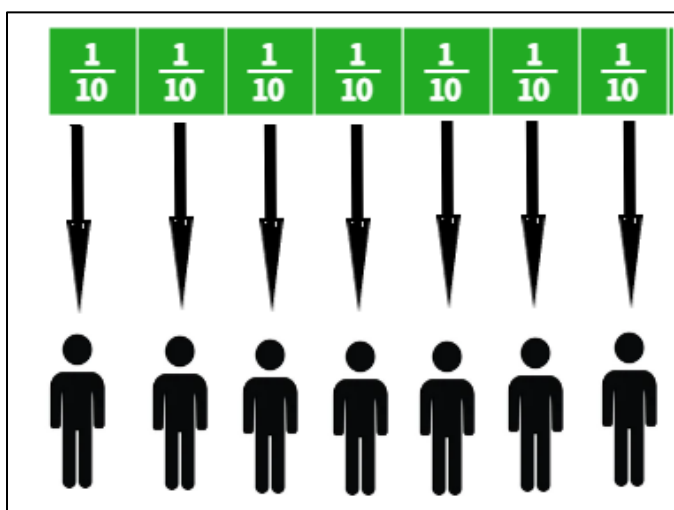
Partitiva: En esta interpretación de la división, el objeto se divide en partes del mismo tamaño, para poder repartir el dividendo en lo que enuncie el divisor, el dividendo puede ser menor al divisor. La división partitiva implica repartir una parte de un todo en partes iguales. Otras características a tener en cuenta en esta interpretación es que el divisor debe ser un número natural y el cociente o resultado es una fracción menor que el dividendo y el divisor. Ejemplo: Se

tiene $\frac{7}{10}$ de *chipa guasu* y se quiere repartir a 7 niños ¿Cuánto le corresponde a cada niño? Para resolver este problema, se hace: $\frac{7}{10} \div 7 = \frac{1}{10}$. También se podría hacer la pregunta: ¿Qué parte de la *chipa guasu* le corresponde a cada niño? La respuesta para ambas preguntas es $\frac{1}{10}$ de *chipa guasu*. (Ver figura 11).

La primera pregunta es de reparto sin especificar el tipo de objeto a dividir y se centra en el cálculo abstracto sin ofrecer contexto adicional. En cambio, la segunda pregunta contextualiza el problema en un objeto específico: la *chipa guasu*, una comida típica. Esto ayuda a que los estudiantes visualicen el reparto de una porción de comida entre varios, lo cual puede facilitar la comprensión de la fracción resultante.

Figura 11

Representación de la interpretación de la división partitiva



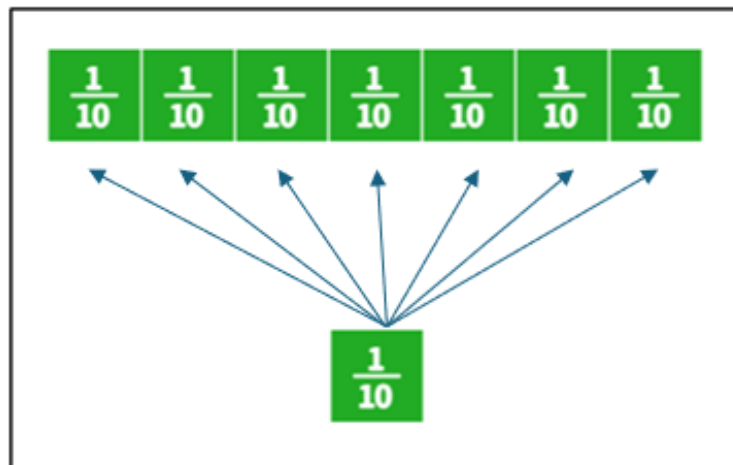
Nota. Elaboración propia.

Cuotitiva o de medida: Esta interpretación se refiere a preguntarse cuántas veces cabe el divisor en el dividendo. El divisor se toma como unidad de medida del dividendo. Las condiciones que deben tener los términos de la división para interpretar la operación como cuotitiva son: el dividendo debe ser mayor que el divisor y puede ser número natural o número

fraccionario, el cociente puede ser un número natural o una fracción. Ejemplo: Se quiere conocer cuántas veces cabe $\frac{1}{10}$ en $\frac{7}{10}$. Lo cual se representa con la división: $\frac{7}{10} \div \frac{1}{10} = 7$, porque $\frac{1}{10}$ cabe 7 veces en $\frac{7}{10}$.

Figura 12

Representación de la interpretación de la división cuotitiva



Nota. Elaboración propia.

Inversión de la multiplicación: Esta interpretación trata de encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra parte, y la medida del producto. En el caso discreto del producto cartesiano se ejemplifica con casos de combinatoria que no se pueden extender a fracciones y en el caso continuo se ejemplifica con problemas de área rectangular. Ejemplo:

Si el área de un rectángulo coloreado mide $\frac{15}{35}$ y la base mide $\frac{5}{7}$, la altura del rectángulo medirá $\frac{15}{35} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{5}$ (Contreras 2012).

Inversión del factor multiplicativo: Esta interpretación consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. Es decir, que se reduce el dividendo según el factor multiplicativo escalar por divisor dado. Ejemplo:

“Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$; y observaremos, que, si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor $\frac{2}{5}$, estaba reducida la operación á hacer dos veces menor el quebrado, lo que se consigue (Teor. 3º) multiplicando su denominador por 2, de manera que $\frac{3}{8}$ sería el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sino por $\frac{2}{5}$, que es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este, debemos hacer aquel cinco veces mayor; lo cual se consigue (Teor. 2º) multiplicando su numerador por 5; de manera que, ejecutándolo, tendré por cociente verdadero $\frac{15}{8} = 1 \frac{7}{8}$ ”(…) (Vallejo, 1813, p.120, citado por Contreras, 2012, p. 84).

Las características que presenta esta interpretación son: se reduce el denominador a lo que indica el divisor, por tanto, el dividendo es mayor que el divisor y el cociente, tanto el dividendo como el cociente pertenecen a la misma especie y el divisor constituye un factor multiplicativo.

Proporción de valor unitario desconocido: Esta interpretación es aplicada cuando existe una correspondencia no unitaria entre dos magnitudes, se busca hallar el valor unitario comprendido entre estas magnitudes. Es decir, se compara una magnitud con otra, corresponde a una proporción y se expresa $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$. Ejemplo:

“ $\frac{3}{7}$ de la torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?” (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212, citado por Contreras, 2012, p. 117).

Proporción de valor unitario conocido: En este caso lo que se quiere conocer es el valor de la cantidad correspondiente a la primera magnitud. Conociendo el dividendo y el cociente se busca el divisor que guarda relación con el dividendo. Es decir, se busca un número que se encuentra con el dividendo en tal proporción como la unidad con el divisor $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$.

Ejemplo:

“Paquetes. Se tiene una cuerda de $42 \frac{1}{2}$ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta $3 \frac{1}{2}$ metros?” (García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 17 citado por Contreras, 2012, p. 118).

Como se ha visto interpretar una división entre números fraccionarios requiere interpretar la operación y reconocer las características que presentan para realizar solo el procedimiento adecuado y responder a una de estas interrogantes: cuántas veces cabe b en a , si el dividendo debe ser mayor o menor con respecto al divisor, entonces los valores del cociente pueden adoptar un número natural o fracción (propia o impropia) entre otras.

En la tabla 3 se presentan estas interpretaciones que se toman para este trabajo, con sus respectivos ejemplos en el conjunto de los números naturales, en los números fraccionarios y conclusiones de cada situación.

Tabla 3

Interpretaciones seleccionadas de la división entre fracciones

Interpretación	Ejemplo en $\mathbb{N}$	Ejemplo con números fraccionarios	Conclusiones
Partitiva Repartir el dividendo entre el divisor de manera equitativa.	Repartir 6 <i>mbeju</i> entre 3 personas de manera equitativa. $6 \div 3 = 2$	Repartir $\frac{1}{2}$ <i>sopa paraguaya</i> entre 2 personas de manera equitativa. $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$	El dividendo puede ser menor que el divisor. El divisor es un número entero. El cociente es una fracción y es menor o igual que el dividendo, pero menor que el divisor. La acción es repartir, distribuir, dividir. (Contreras, 2012)
Cuotitiva Cuántas veces el divisor cabe en el dividendo.	Doña Ana tiene un <i>encaje ju</i> de 4m y quiere colocarlos en un mantel de 8m ¿Cuántos <i>encajes ju</i> de 4 m cabe en 8 m? $8 \div 4 = 2$ Cabe 2 veces.	Doña Ana hizo 7 kg de dulce de guayaba y desea poner en frascos de $\frac{3}{4}$ kg y quiere saber ¿cuántos frascos requiere para empacar los 7kg de dulce?	El dividendo debe ser mayor que el divisor, puede ser una fracción o un número natural. El cociente puede ser una fracción o un número natural. La acción es medir. (Contreras, 2012)

$$7 \div \frac{3}{4} = 9\frac{1}{3}$$

Es decir, 9
frascos y $\frac{1}{3}$ más.

Nota. Elaboración propia.

Cada uno de estos significados presentan características que conducen a la interpretación de la división entre fracciones, entenderlo posibilita la construcción de significados de la división de fracciones.

2.1.5.2 Algoritmos de la división entre números fraccionarios

Muchas veces se piensa que el algoritmo aplicado para solucionar un ejercicio o un problema matemático ha sido siempre el mismo, se tiene una visión estática de los algoritmos. Contreras (2012, citado por Márquez, 2013) hace una investigación bibliográfica sobre la evolución de los algoritmos de la división entre números fraccionarios, como se observa en la Tabla 4.

Tabla 4

Evolución del algoritmo de la división entre números fraccionarios

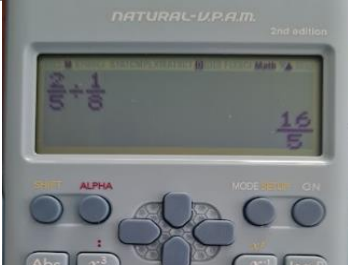
Período	Subperíodo	Algoritmo
Hasta el siglo XVI		Productos cruzados
Los siglos XVII, XVIII y XIX	Siglos XVII y XVIII	Productos cruzados
	Siglo XIX	Invertir y multiplicar
Siglo XX	Siglo XX hasta 1970	Invertir y multiplicar
		Reducción a común denominador
		Método analítico razonado
	1970-1990	Invertir y multiplicar
		Multiplicar por la inversa de la fracción divisor
	Época actual	Productos cruzados
		Invertir y multiplicar
		Conversión de fracciones en decimales
		Uso del protocolo de la calculadora

Nota. Extraído de Márquez (2013, p. 18).

Contreras (2004) realiza una investigación bibliográfica sobre la evolución de la división entre números fraccionarios, de las cuales algunas siguen en vigencia. Gómez et al. (2016) presentan otros algoritmos que fueron incorporando o adaptando procedimientos de resolución en la división entre números fraccionarios. (Ver tabla 5).

Tabla 5

Algoritmo aplicado a la división entre números fraccionarios

Algoritmos	Procedimiento	Ejemplo
1. Reducción de las fracciones a común denominador y división de los numeradores (propuesto por Chuquet 1484-1880).	La fracción se transforma en otras fracciones equivalentes con común denominador para luego reducir la división de fracciones a los numeradores.	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{15} \div \frac{10}{15} = \frac{9}{10}$
2. Inversión de la multiplicación.	Se multiplica el dividendo por el divisor invertido. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$
3. Productos cruzados.	Se aplica la cruz de San Andrés para ello se multiplica los numeradores de las fracciones con los denominadores. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$
4. Uso de la unidad fraccionaria.	Se realiza un análisis aritmético, primero se busca la fracción unitaria del divisor si se tiene una fracción no unitaria y luego se resuelve el problema original conociendo el valor unitario de la fracción.	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{10} \rightarrow \frac{3}{5 \times 2} \text{ y } \frac{3}{3}$ Por tanto, $\rightarrow \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$
5. Conversión de fracciones en decimales.	Se transforma las fracciones en decimales para luego realizar la operación indicada. Este método presenta una dificultad, cuando los decimales no son finitos.	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{10} = 0,6 \div 0,2 = \frac{60}{20} = 3$ $\frac{1}{3} \div \frac{1}{7} = 0,31818 \dots$
6. Uso del protocolo de la calculadora científica	Se puede introducir el valor de las fracciones en la opción $a^{b/c}$ para realizar la operación.	

Nota. Adaptado del trabajo Gómez et al. (2016)

Estos son los algoritmos aplicados para resolver la división entre números fraccionarios, algunos son más frecuentes que otros, por ser más prácticos como ser la inversión de la multiplicación o productos cruzados.

2.1.5.3 División con el Muro de fracciones y con Numicon

Para dividir fracciones utilizando el muro de fracciones, se puede seguir estos pasos:

Paso 1: Identificar las fracciones a dividir: seleccionar las fracciones dividendor y divisor en el Muro. Por ejemplo, si se quiere dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$, localizar ambas fracciones en el Muro.

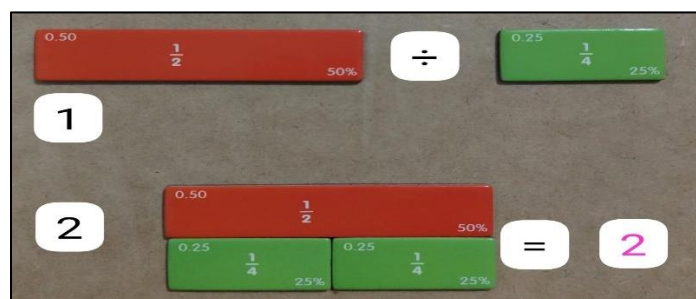
Paso 2: Comparar la tira de la fracción divisor con la tira de la fracción dividendor: observar cuántas veces la fracción del divisor $\left(\frac{1}{4}\right)$ cabe en la fracción dividendor $\left(\frac{1}{2}\right)$. En este caso, $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$.

Paso 3: Registrar la operación y su respuesta. Para el ejemplo, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$, ya que $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$.

En la Figura 133 se observa el procedimiento que se realiza con el material, el paso 1 es identificar las tiras correspondientes al dividendor y al divisor en el Muro de fracciones y luego realizar el paso 2, para hallar cuántas veces cabe esta fracción $\frac{1}{4}$ en la otra fracción.

Figura 13

Representación de la división con el Muro de fracciones

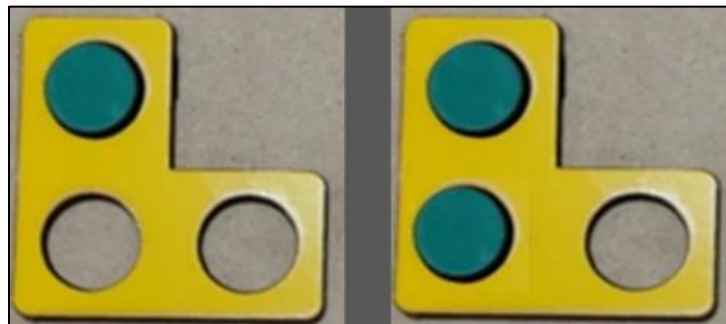


Nota. Elaboración propia.

Para representar una fracción en Numicon se utiliza la forma Numicon con la cantidad de orificios que expresa el denominador de la fracción y con las fichas se tapan los orificios de acuerdo con lo que expresa el numerador. Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ se representa con una forma Numicon con tres orificios y se tapa un hueco, si se tapan dos se representa la fracción $\frac{2}{3}$. Así como muestra la Figura 1414.

Figura 14

Representación de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente por medio de Numicon



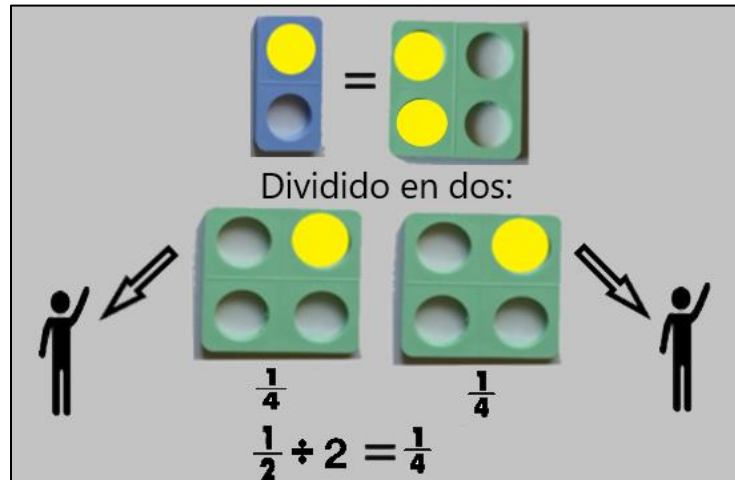
Nota. Elaboración propia.

Se realiza una explicación sobre el procedimiento para resolver una división entre fracciones a través del siguiente ejemplo: se tiene $\frac{1}{2}$ y se desea dividirlo en dos.

Se representa $\frac{1}{2}$ en el Numicon, para ello se toma una forma Numicon con dos huecos y se tapa 1; luego, como hay que repartir $\frac{1}{2}$ en 2 se toma otra forma Numicon equivalente a la primera, es decir $\frac{2}{4}$, una vez representado $\frac{2}{4}$ en el Numicon se procede a repartirlo entre 2 quedando $\frac{1}{4}$ para cada uno. Tal como se observa en la Figura 155.

Figura 15

Representación de la división en el Numicon



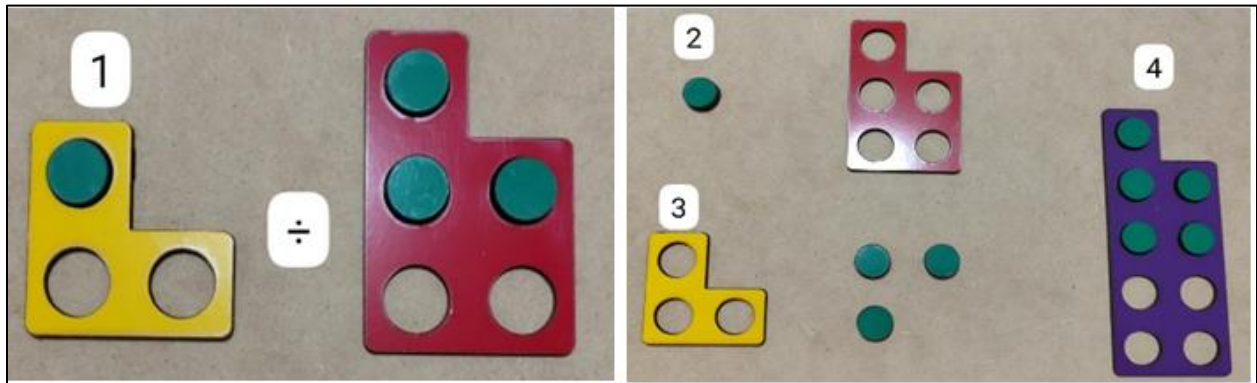
Nota. Elaboración propia.

Otro ejemplo podría ser: Tengo $\frac{1}{3}$ de pan *Kesu* y quiero repartirlo a 3 niños en partes iguales ¿Qué porción le corresponde a cada uno? Se busca la fracción equivalente a $\frac{1}{3}$ se recurre a las formas Numicon y se encuentra que es $\frac{3}{9}$ esto dividido en 3 da como resultado $\frac{1}{9}$ para cada niño.

Motrel (2022) utiliza un procedimiento algorítmico clásico para operar la división entre números fraccionarios con el Numicon. Por ejemplo, dividir $\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$, se representa en las formas Numicon cada fracción, luego se procede a retirar los tapones y separarlos, sin mezclar los de una forma y los de la otra. Seguidamente, se multiplica el número de tapones del primer grupo y los huecos de la segunda forma, el resultado será el numerador final. Por otro lado, debe multiplicarse los tapones de la segunda forma por los huecos de la primera, y el resultado será el denominador final. Realizando este procedimiento se tendrá como resultado un bloque de 9 huecos, de lo que serán tapados 5, es decir, $\frac{5}{9}$. Se observa en la Figura 16 los pasos mencionados para resolver la división en el Numicon.

Figura 16

Algoritmo de la división con el Numicon según Motrel (2022)



Nota. Elaboración propia.

Ambos materiales, el Muro de fracciones y el Numicon pueden resultar útiles en el momento de gestionar la enseñanza de un objeto matemático, es cuestión de planificar y seleccionar los contenidos acordes a cada material.

2.2. Desde la Formación de Profesores de Matemáticas

La formación de profesores de matemáticas se considera importante para tratar de mejorar la calidad de la enseñanza de esta disciplina, los profesores deben comprender no solo los conceptos matemáticos a profundidad sino además como utilizar estrategias didácticas y recursos que faciliten la gestión de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos propuestos en los programas de estudio. Por tanto, los profesores deben trabajar el autoanálisis-reflexivo sobre su propia práctica docente de modo a generar los cambios necesarios en su gestión como profesor que conoce su área.

Se aborda enseguida la competencia mirar profesionalmente; así como las tareas profesionales, ambos constructos relacionados con la formación de profesores.

2.2.1. *Mirar profesionalmente la enseñanza*

Ser profesor de matemáticas implica saber usar un conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. Un conocimiento no utilizado indica ausencia de este conocimiento, por ello la importancia de generar espacios y situaciones en las que se posibilite al profesor o futuro profesor construir aprendizajes mediante la puesta en práctica de sus conocimientos.

Llinares et al. (2020) describen las situaciones en las que se puede construir la competencia «mirar profesionalmente», esto implica que el profesor debe ser capaz de utilizar su conocimiento matemático y didáctico para reflexionar sobre la propia enseñanza y los factores que puedan intervenir en el aprendizaje.

Llinares et al. (2020) destacan que la enseñanza no solo es la acción de enseñar, sino saber utilizar el conocimiento para:

- ✓ Reconocer elementos relevantes en las situaciones de enseñanza o de la producción de los estudiantes, en la que se pone en juego el razonamiento, esto permite conectar las situaciones de enseñanza con el conocimiento teórico, para luego construir un argumento práctico que refleje el desarrollo de la competencia docente.
- ✓ Interpretar los elementos del pensamiento matemático de los estudiantes en sus producciones permite centrar la atención sobre la actividad presentada y sobre las respuestas que reflejan el nivel de comprensión sobre el tema en estudio, crea la oportunidad para que los profesores aprendan a usar el conocimiento.
- ✓ Tomar las decisiones de acción basadas en la interpretación de la práctica de la enseñanza o en la producción de los estudiantes, en este aspecto son importantes los registros de actividades para su análisis con base en alguna información teórica para

ver, de manera consciente, los detalles relevantes para retroalimentar o tomar otras decisiones al respecto. (Llinares, 2020)

Estas son las destrezas de la competencia mirar profesionalmente.

Llinares et al. (2020) enfatizan en la importancia del análisis de las respuestas de los estudiantes por parte de los maestros, para desarrollar la destreza de interpretar el pensamiento matemático.

Algunas de las propuestas que sugieren Llinares et al. (2020), en cuanto a herramientas que ayudan a desarrollar las anteriores destrezas, son:

- ✓ Registros de la práctica: puede ser videos u otros registros de clases reales para analizar y discutir situaciones de enseñanza.
- ✓ Guías de observación: proporciona marcos teóricos que ayudan a los futuros profesores a enfocar su atención en aspectos clave de la enseñanza.
- ✓ Reflexión y discusión: fomentar la reflexión y el diálogo entre los estudiantes para profesor sobre las diferentes situaciones de enseñanza y aprendizaje.

La competencia «mirar profesionalmente» es aprender a usar el conocimiento matemático en cualquier situación planteada, la idea es que el profesor desarrolle destrezas como intervenir, gestionar, dialogar, interactuar, construir, tomar decisiones sobre su el entorno de aprendizaje para la mejora continua de su práctica y así apoyar el aprendizaje efectivo de los estudiantes.

2.2.2. *Tareas para la formación de profesores de matemáticas*

Según Llinares (2011), en los programas de formación de profesores las tareas constituyen los instrumentos utilizados por los formadores de profesores para desarrollar conocimientos y destrezas necesarias para enseñar matemáticas y seguir aprendiendo durante la vida profesional.

Estas tareas deben enfocarse en la promoción de competencias vinculadas a contextos-problemas que sean relevantes para los profesores. Las tareas deben presentar problemas auténticos; es decir, situaciones que los futuros maestros encontrarán en su práctica diaria, como analizar libros de texto, interpretar errores comunes de los estudiantes, planificar lecciones de acuerdo **con el** nivel de los estudiantes, el currículo y los recursos disponibles.

Llinares (2019) concibe la enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas que fomenten habilidades, conocimientos y destrezas en los futuros maestros y aún más en los que se encuentran en servicio, por ello plantea que la formación de profesores de matemáticas debe centrarse en desarrollar competencias docentes específicas que permita interpretar y gestionar eficazmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

2.2.2.1 Tareas profesionales

Las experiencias tales como, analizar producciones de los estudiantes, interpretar la teoría y relacionarla con la práctica, resolver ejercicios, entre otras son adquiridas por los profesores como aprendices de matemáticas durante el desarrollo de las tareas **y** estas influirán en el aprendizaje de los profesores o futuros profesores y en su desenvolvimiento como profesionales. Entonces, podríamos definir las tareas profesionales como el conjunto de actividades diseñadas para gerenciar el desarrollo de competencias docentes en los futuros profesores de matemáticas o en los profesores en servicio. En este sentido, el rol que cumple el formador al diseñar las tareas y puesta en marcha permite desarrollar no solo conceptos matemáticos sino destrezas profesionales que mejorarán su quehacer en el futuro.

Según Llinares (2013), para el desarrollo de los dominios matemáticos planteado por el currículo se requiere de una visión más holística del contenido matemático que se desea enseñar. Entre las propuestas mencionadas por Llinares (2013) respecto a las tareas profesionales, un

maestro debería primero aprender los diferentes procesos de construcción de conceptos de los objetos matemáticos para llevarlos a cabo luego en sus aulas.

Llinares (2013) sugiere trabajar tres aproximaciones complementarias para lograr que los futuros maestros adquieran los conocimientos matemáticos necesarios para su formación profesional, *estas* son:

- ✓ La resolución de problemas: las tareas se deben centrar en la resolución de problemas, de manera que posibiliten reaprender conceptos a partir de la familiaridad que tienen los estudiantes con el objeto matemático para ampliar la comprensión a través de la búsqueda de patrones o identificación de estructuras.
- ✓ Análisis de las producciones de los estudiantes: es otra forma de reaprender contenidos matemáticos por parte del futuro maestro, sobre la base del análisis de las dificultades. “Estas tareas constituyen los contextos para que los futuros maestros puedan aprender a identificar los elementos matemáticos que caracterizan los problemas y que deben ser movilizados para su resolución por los alumnos y trayectorias de aprendizaje de los alumnos”. (Llinares, 2013, p. 10).
- ✓ Integración de diferentes tareas profesionales: como planificar, gestionar la interacción, analizar la producción y valorar la comprensión matemática de los estudiantes puesta de manifiesto en la manera en la que resuelven los problemas.

Con respecto a las tareas profesionales, Aké y López-Mojica (2020) plantean la necesidad de incorporar tareas en la formación de profesores de matemáticas basadas en investigaciones sobre el estudio del contenido matemático y situaciones vinculadas a las prácticas para desarrollar conocimientos y competencias en los profesores. Para implementar la tarea

profesional desde lo formulado por estos investigadores se tiene en cuenta los siguientes elementos:

- ✓ Integración teórica y práctica: diseñar tareas que combinen teoría y práctica, basadas en investigaciones actuales y situaciones reales de enseñanza.
- ✓ Estudio del contenido matemático: asegurarse de que las tareas aborden el contenido matemático de manera profunda, utilizando ejemplos y problemas relevantes.
- ✓ Desarrollo de competencias: enfocar las tareas en el desarrollo de competencias específicas, como la resolución de problemas, el razonamiento matemático y la capacidad de explicar conceptos complejos.
- ✓ Reflexión y retroalimentación: incluir momentos de reflexión y retroalimentación, en el que los futuros profesores puedan analizar su desempeño y recibir comentarios constructivos.
- ✓ Uso de modelos y ejemplos: utilizar modelos de conocimiento para el profesor y ejemplos concretos, para ilustrar cómo se pueden aplicar las tareas en el aula.
- ✓ Evaluación continua: implementar una evaluación continua de las tareas para ajustar y mejorar el proceso de formación según las necesidades y avances de los estudiantes. (Aké y López-Mojica, 2020).

Tanto Llinares (2013) como Aké y López-Mojica (2020) resaltan la importancia de instruir a los futuros profesores desde el punto vista teórico-práctico para cimentar un conocimiento profesional del profesor de matemáticas a través de tareas profesionales.

En conclusión, diseñar tareas profesionales no resulta fácil, requiere de un conocimiento profundo del contenido matemático y tener un dominio del conocimiento didáctico, por ello la importancia de plantear tareas que promuevan en los estudiantes en formación y profesores en

servicio un continuo desarrollo de las destrezas que conducen a la competencia de mirar profesionalmente.

2.2.2.2 Itinerario de formación

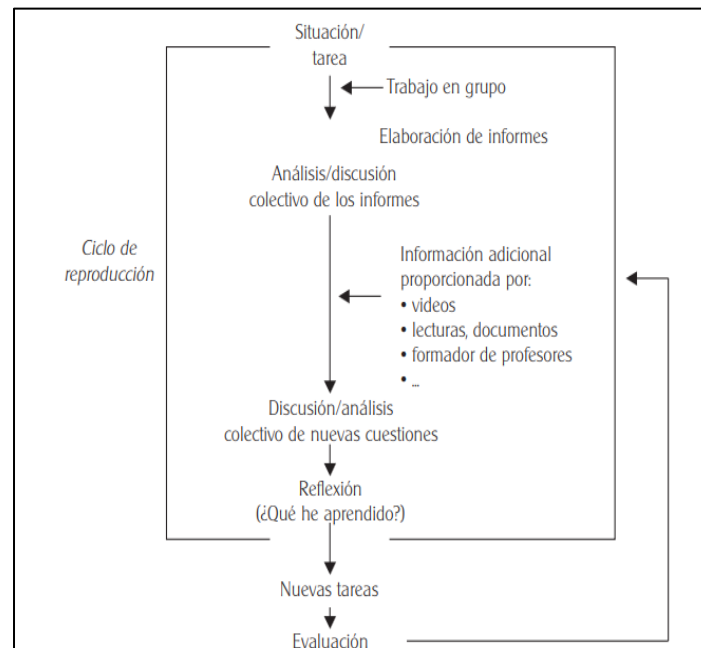
Existen diferentes propuestas que plantean cómo puede llevarse a cabo el proceso de formación de los profesores de matemáticas. García (2005) analiza diferentes enfoques teóricos y propone un modelo para entender y mejorar la formación de futuros profesores de matemáticas.

Los futuros profesores de matemáticas deben desarrollar habilidades pedagógicas claves para ser efectivos en su labor, lo que implica que el aprendizaje en la formación de profesores es un proceso ligado con la naturaleza de construcción del conocimiento desde la propia creencia y la capacidad de modificar o ampliar el conocimiento del profesor a través de la interacción social, individual o grupal, y de la participación en comunidades de práctica.

García (2005) plantea un ciclo de reproducción o itinerario de formación como herramienta para articular y llevar a la práctica las ideas teóricas en la formación de profesores. Como se observa en la Figura 17 el modelo planteado por García (2005), el cual inicia de una situación o tarea que puede ser concebida de distinta manera por parte del estudiante o grupo de estudiantes, seguido de un espacio de reflexión conjunta o presentación de informe respecto a la situación inicial, luego se presenta una información adicional para su análisis en el mismo grupo, se realiza un contraste entre la situación inicial y la información analizada, se lleva nuevamente a discusión o reflexión de la actividad para cerrar con las nuevas propuestas de tarea.

Figura 17

Esquema de un itinerario de tarea



Nota. Extraído de García (2005, p. 162).

García (2005) presenta diversas estrategias para el planteamiento de la situación inicial: resolución de problemas, estudios de caso, entrevistas clínicas, portafolios de evidencias, videos o microenseñanzas. Cada estrategia estimula una habilidad diferente en el profesor; por ejemplo, la resolución de problemas permite un análisis crítico que conlleva al cambio o ampliación de conceptos si es necesario. El planteamiento de situaciones de microenseñanzas permite a los futuros profesores experimentar tareas que son muy importantes en la propia formación, pues el estudiante debe familiarizarse con los contenidos, objetivos, metodologías y seleccionar los recursos pertinentes establecidos en el programa de estudio. (García, 2005).

García (2005) sugiere que una vez presentada la tarea y los procesos de resolución a los grupos de profesores se formulen cuestiones que conlleven al análisis y a la reflexión correspondiente, a través de la elaboración de un informe según el objetivo propuesto. Luego se contrasten las ideas planteadas en cada grupo y con otras fuentes de información para generar un

nuevo análisis para su posterior nuevo informe, ampliando con un aprendizaje propio, así como sobre sus viejas y nuevas concepciones. Durante el proceso quizás surjan tareas complementarias necesarias para lograr el objetivo propuesto, generar conocimiento y recopilar información para la evaluación.

2.3. El sistema educativo paraguayo

En este apartado se describe la estructura del sistema educativo paraguayo a partir de la Ley 1264/1998 General de Educación, la Ley N.º 5749/2017 Carta Orgánica del Ministerio de Educación y Ciencia, el perfil de profesores que estipula el programa de estudio de formación docente en el área de Matemáticas del tercer ciclo de la Educación Escolar Básica y las estrategias metodológicas que se plantean para el desarrollo del conocimiento del futuro maestro. Así mismo, se considera el programa que contempla el tercer ciclo en el área de Matemáticas, sus competencias, capacidades, ejes temáticos y los contenidos referentes a la división entre números fraccionarios.

2.3.1. Estructura del sistema educativo paraguayo

En el Paraguay el derecho a la educación se cimienta en la Constitución Nacional de 1992 en el artículo 73 que establece: “Toda persona tiene derecho a la educación integral y permanente, que como Sistema y proceso se realiza en el contexto de la cultura de la comunidad” (p.27). Con la Reforma Educativa de 1994 se reconoce que el estudiante es un ser que se desarrolla en sociedad, por tanto, se propone el cambio del sistema educativo, involucrando aspectos sociales y culturales.

La estructura del sistema educativo paraguayo está reglamentada por la Carta Orgánica del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2020), La ley 5749/2017 determina que el órgano

rector del sistema educativo nacional en Paraguay es el Ministerio de Educación y Ciencias (p.1), quien tendrá la función de gestionar la política educativa del país.

La Carta Orgánica Ley 5749/2017 y la Ley General de educación 1264/98 establecen que el sistema educativo abarca un régimen general de educación formal, no formal y refleja, así como la educación de régimen especial y otras modalidades de atención educativa que a continuación se citan.

En lo que respecta a la educación formal se distinguen los siguientes niveles:

- ✓ El primer nivel comprende el nivel inicial, el primero, segundo y tercer ciclos de la educación escolar básica.
- ✓ El segundo nivel abarca el nivel medio de la educación media.
- ✓ El tercer nivel comprende la educación superior.

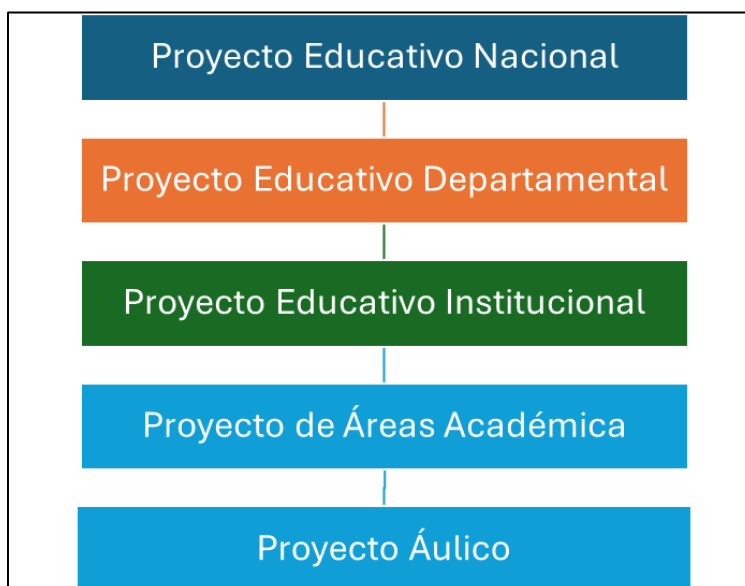
La educación permanente de jóvenes y adultos pertenecen al segundo y tercer nivel, sus programas de estudio son equivalentes a los ciclos y a los cursos del nivel medio, este programa busca la inclusión educativa de todos los habitantes sin distinción. Así también se contempla la educación escolar indígena como una forma de velar por la educación de todos los habitantes del país.

Hay que distinguir la educación formal de la educación no formal. La primera se refiere a la educación que se imparte en instituciones educativas aprobadas por la autoridad oficial competente, en una secuencia regular de ciclos lectivos, estructurada y sistemática que conducen a grados y títulos, mientras que la educación no formal comprende actividades educativas organizadas fuera del sistema formal, como cursos de capacitación, talleres y programas de alfabetización para adultos.

En lo que respecta al régimen especial, esta incluye programas y servicios educativos diseñados para atender a personas con necesidades educativas especiales y, por último, las modalidades de atención educativa que se refiere a cualquier otra forma de educación que no encaje en las categorías anteriores, pero que es reconocida y apoyada por el Ministerio de Educación y Ciencias.

El estado garantiza el acceso a la educación y la culminación de la educación media, vista como parte de la educación básica obligatoria. Según la Ley General de Educación 1264/98 se entiende por educación básica al proceso de crecimiento que toda persona necesita para desenvolverse sin dificultad dentro de una comunidad como miembro activo, que pueda satisfacer sus necesidades y siga teniendo la posibilidad de seguir estudiando, tener un empleo, una autogestión y autonomía. Ahora en lo que respecta al diseño curricular se plantea cinco eslabones de contextualización pedagógica (Figura 18), los que progresivamente irá desarrollándose con mayor grado de particularidad.

Figura 18 *Eslabones del currículo paraguayo*



Nota. Elaboración propia.

Los programas de estudio elaborados a nivel del proyecto educativo nacional contienen los ejes temáticos que se desglosan de las capacidades que se pretende logren los estudiantes y las mismas se concretan mediante el proyecto educativo institucional, proyecto de área académico y más concretamente en el proyecto áulico que está en manos del profesor la toma de decisiones acerca de qué, cómo y cuándo enseñar, por ello se considera un programa abierto.

En síntesis, el currículo contiene una selección consciente y sistemática de los conocimientos, capacidades y valores necesarios, cuya selección organiza los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación para abordar cuestiones como qué, por qué, cuándo y cómo deberían aprender los estudiantes. Este diseño curricular posibilita la inclusión a la educación de todos los habitantes sin distinción de género, raza, ideología, etc.

Así también, el currículo paraguayo permite la elaboración de diversos proyectos enmarcados en la construcción de conocimientos en las diferentes áreas, ajustados a las necesidades y características de cada caso o particularidad. El currículo promueve la participación de todos los miembros de la comunidad en la elaboración del diseño, la ejecución y la evaluación de proyectos ya que aportan importantes elementos para la formación integral del estudiante.

2.3.2. *Las matemáticas en el tercer ciclo de la educación escolar básica*

En la educación formal, las matemáticas se abordan desde sus funciones formativa e instrumental. Desde el punto de vista formativo favorece el desarrollo de habilidades cognitivas y en cuanto a lo instrumental proporciona herramientas aplicables en otras áreas del conocimiento. (MEC, 2014).

El fundamento de la inclusión de las matemáticas en el programa de estudio se debe a que fomenta el pensamiento crítico y ofrece estrategias para resolver problemas complejos,

promoviendo la creatividad a través de la formulación y solución de problemas. Además, se considera que las matemáticas permiten a los estudiantes comprender expresiones matemáticas equivalentes o estrategias alternativas para resolver problemas, comunicar utilizando un lenguaje matemático. (MEC, 2014).

La propuesta del programa de tercer ciclo de la Educación Escolar Básica que abarca a estudiantes de 12 a 15 años de edad, pretende promover el desarrollo de competencias generales al término del ciclo y competencias específicas por cada grado y conforme a los mismos se definen las capacidades que serán orientadas en cada grado. “Las unidades temáticas planteadas son las mismas en los tres grados y cumplen la función de aglutinar las capacidades que se relacionan entre sí, incluyendo además de las específicas, otras consideradas transversales para el área” (MEC, 2014, p.51).

Se destaca la importancia de desarrollar competencias en diversas áreas de las matemáticas, como la comprensión de números y operaciones, el pensamiento espacial a través de actividades de geometría y medición, y el análisis de datos mediante estadísticas y probabilidad. Del mismo modo, se aborda la integración de los números racionales negativos a los números racionales positivos. La adquisición de estas capacidades permitirá al estudiante conocer y comprender procedimientos y propiedades de las operaciones matemáticas en cada conjunto numérico.

Al término del ciclo, el MEC (2014) pretende que el estudiante adquiera esta competencia matemática:

Formula y resuelve situaciones problemáticas que involucren la utilización de:
operaciones matemáticas con números reales y expresiones algebraicas; unidades de medidas; conceptos, principios y elementos de la Geometría plana y del espacio;

procedimientos básicos de la Estadística descriptiva y de la Probabilidad, en variados contextos (p. 53).

En relación con la competencia del 7.º grado asociada a la competencia anterior se tiene:

Comprenda conceptos y procedimientos fundamentales del sistema numérico referidos a: conjuntos de números enteros y racionales; (...) Asimismo, se espera que formule y resuelva situaciones problemáticas que involucren la utilización de algoritmos y propiedades de las operaciones fundamentales con números enteros y racionales, y resuelva situaciones que involucren la utilización de: a) la potenciación y la radicación con números enteros y racionales (...) (MEC, 2014, p. 5).

Revisando las competencias de los tres grados del tercer ciclo, solo se contempla en el séptimo grado el tema de interés para este trabajo de grado: la división con fracciones que se encuentra dentro del eje temático el conjunto de los números racionales. En el desglose de la unidad didáctica se encuentran los contenidos relacionados al tema en estudio, que es la división entre números fraccionarios que serán utilizados para la comprensión de otros contenidos que se desarrollan en los otros grados, por ejemplo, en el octavo, dentro del álgebra, aparece la división entre fracciones al igual que en el noveno grado.

2.3.3. Las matemáticas en el profesorado de matemáticas de tercer ciclo

El Ministerio de Educación y Ciencias considera a la formación docente continua como un proceso sistémico, dinámico, de constante perfeccionamiento del maestro, que desarrolla las competencias necesarias para el desempeño idóneo y comprometido en la educación, que el maestro sea capaz de adaptarse a las demandas del entorno, a fin de reorientar los procesos, las acciones y elevar la calidad de la enseñanza.

El nuevo diseño curricular elaborado para el profesorado del área de matemáticas pretende una transformación educativa, para ello, en el programa de formación docente se han planteado los siguientes objetivos (MEC, 2020):

- ✓ Desarrollo de competencias didácticas: capacitar a los futuros profesores para diseñar y aplicar estrategias de enseñanza efectivas que promuevan el aprendizaje significativo de las matemáticas.
- ✓ Conocimiento profundo del contenido: asegurar que los profesores tengan un dominio sólido de los conceptos matemáticos que van a enseñar, así como de las conexiones entre ellos.
- ✓ Integración de la tecnología: fomentar el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas para mejorar la comprensión y el interés de los estudiantes.
- ✓ Enfoque en la resolución de problemas: desarrollar habilidades para enseñar a los estudiantes a abordar y resolver problemas matemáticos de manera crítica y creativa.
- ✓ Formación en evaluación: preparar a los profesores para evaluar el progreso de los estudiantes de manera justa y efectiva, utilizando una variedad de métodos de evaluación.
- ✓ Desarrollo Profesional Continuo: promover una actitud de aprendizaje continuo y desarrollo profesional entre los profesores, para que se mantengan actualizados con las mejores prácticas y avances en la educación matemática.

Estos objetivos buscan no solo mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas, sino también inspirar a los estudiantes a desarrollar un interés y una comprensión profunda de la materia.

La nueva propuesta del currículum de formación docente es elaborada siguiendo los delineamientos de la UNESCO (2006) citado por el MEC (2020) que afirma la importancia de

las experiencias prácticas y las teorías en la educación dentro de todos los niveles y modalidades desde el inicio del curso hasta el final.

Las características de la nueva formación docente propuesta por el MEC (2020) son:

- ✓ Currículum flexible: las instituciones educativas pueden decidir sobre contenidos, métodos y tiempos de evaluación, adaptándose al contexto y a las demandas de un mundo educativo globalizado.
- ✓ Currículum centrado en el aprendizaje: se enfatiza en la metodología sobre el contenido, concibiendo la idea del principio de isomorfismo (promoviendo metodologías que posteriormente utilicen en sus aulas como educador).
- ✓ Currículum teórico-práctico: plantea una enseñanza activa y autónoma que permita al estudiante - docente reflexionar sobre su propio aprendizaje. Se valora la experiencia personalizada de cada estudiante.
- ✓ Currículum colaborativo: promueve el aprendizaje en equipo, donde los estudiantes trabajan y aprenden juntos durante el desarrollo de actividades innovadoras y resolución de problemas.
- ✓ Currículum enfocado en habilidades para la vida: la propuesta no solo se centra en el conocimiento y las expectativas de los estudiantes, sino también en las emociones, valores, comportamientos e interacciones con los demás.
- ✓ Currículum exploratorio y experimental: fomenta la participación dinámica de los estudiantes para que a través de su experiencia en aula con los niños pueda generar nuevas estrategias y técnicas para enseñanza.

- ✓ Currículum que facilita la articulación educativa: la formación del estudiante crea una transición fluida entre la educación preescolar y la educación superior, asegurando un recorrido educativo continuo. (MEC, 2020).

Y el perfil de salida de un egresado de formación docente en matemática propuesto por el MEC (2020) se describe así:

- ✓ Pedagógica-didáctica: el profesional de matemática debe ser capaz de planificar, desarrollar y evaluar procesos de diseño educativo, adaptando propuestas a diferentes contextos.
- ✓ Innovación e investigación: el educador tenga la capacidad de gestionar y evaluar alternativas para resolver situaciones en entornos educativos y contribuir a mejoras basadas en evidencia.
- ✓ Reflexión sobre la práctica educativa: el profesional de matemática debe comprender la realidad y reflexionar sobre ella para proponer estrategias de mejora basadas en evidencia y compartir con sus pares.
- ✓ Gestión de la información y el cambio: desarrollar habilidades para la selección de información adecuada y oportuna, así como adaptarse a los cambios en diferentes contextos.
- ✓ Desarrollo profesional: trata sobre la importancia de mejorar continuamente las habilidades y conocimientos profesionales como parte de la vida de educador.
- ✓ Perspectiva social: el profesional se desenvuelve en una realidad sociocultural diverso y debe promover el dialogo y una construcción social de valores y principios.
- ✓ Mirada lingüística: como profesor debe tener dominio de ambas lenguas oficiales para la enseñanza de los contenidos y algún dominio en inglés.

- ✓ Perspectiva ecológica: se entra en la importancia de considerar el medio ambiente y la sostenibilidad en todas las actividades. (pp. 29-31).

Con la propuesta de la malla curricular presentada en la Figura 19 se pretende que los estudiantes del curso de profesorado de matemática satisfagan el perfil requerido.

Figura 19

Malla curricular de la nueva formación docente del profesorado

1°	2°	3°	4°	5°	6°
REALIDAD EDUCATIVA PARAGUAYA	EDUCACIÓN, SOCIEDAD Y CULTURA	DESARROLLO HUMANO Y APRENDIZAJE	SUJETOS DE APRENDIZAJE, DIVERSIDAD E INCLUSIÓN	INVESTIGACIÓN EDUCATIVA	MARCO NORMATIVO DE LA EDUCACIÓN
DESARROLLO PERSONAL Y SOCIAL	DESARROLLO PERSONAL Y PROFESIONAL	TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN Y DEL APRENDIZAJE I	CURRÍCULUM, ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN I	TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN Y DEL APRENDIZAJE II	CURRÍCULUM, ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN II
	EDUCACIÓN Y RESPONSABILIDAD AMBIENTAL				
	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL	PRÁCTICA PROFESIONAL
	ÁLGEBRA Y SU DIDÁCTICA I	ÁLGEBRA Y SU DIDÁCTICA II	MATEMÁTICA FINANCIERA Y SU DIDÁCTICA	CÁLCULO DIFERENCIAL Y SU DIDÁCTICA	CÁLCULO INTEGRAL Y SU DIDÁCTICA
	TRIGONOMETRÍA Y SU DIDÁCTICA	DIDÁCTICA DE LA LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS	ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y SU DIDÁCTICA	GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SU DIDÁCTICA	HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
	GEOMETRÍA PLANA Y SU DIDÁCTICA	GEOMETRÍA DEL ESPACIO Y SU DIDÁCTICA	ÁLGEBRA VECTORIAL Y SU DIDÁCTICA	PROBABILIDADES Y SU DIDÁCTICA	TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ESTRATEGIAS PARA LA COMPRENSIÓN EN CASTELLANO Y GUARANÍ	TIC	EXPRESION ORAL (CASTELLANO Y GUARANÍ)	REDACCIÓN CREATIVA (CASTELLANO Y GUARANÍ)	PRODUCCION DE RECURSOS EDUCATIVOS AUDIOVISUALES (CASTELLANO Y GUARANÍ)	REDACCIÓN INSTRUMENTAL (CASTELLANO Y GUARANÍ)
ESTRATEGIAS PARA MEJORAR COMPETENCIAS DE CÁLCULO	TALLER DE INGLÉS I	TALLER DE INGLÉS II	TALLER DE INGLÉS III	TALLER DE INGLÉS IV	TALLER DE INGLÉS V
	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA	OPTATIVA

Nota. Facsímil del Currículum Profesorado del Área de Matemática para el 3° ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media (MEC, 2020, p. 43).

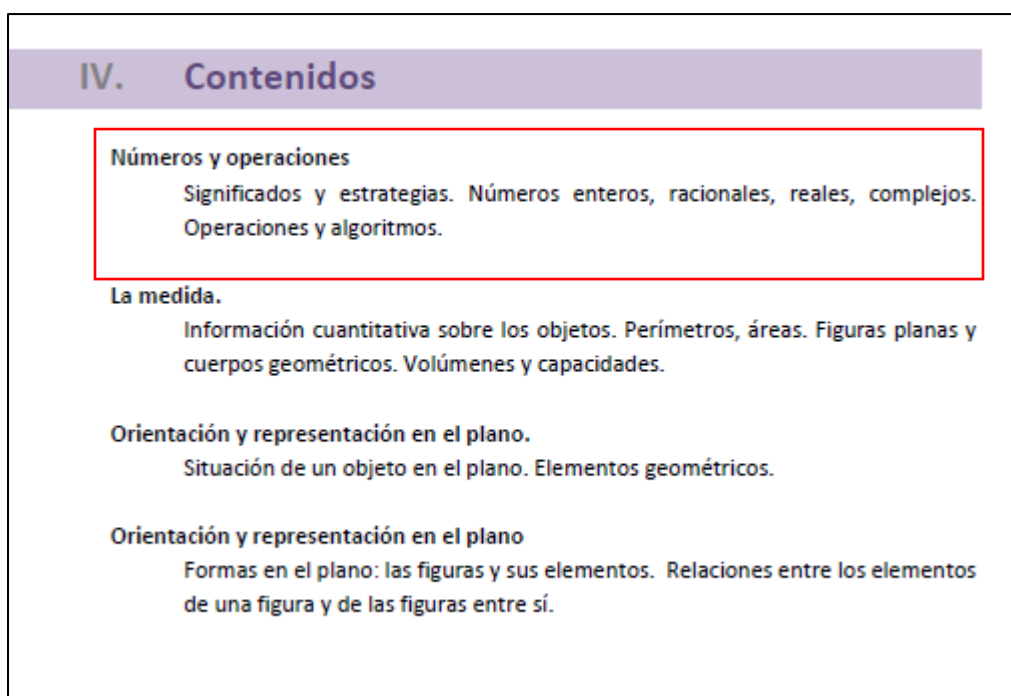
En la malla se observa la distribución de las asignaturas por semestre y cada una de ellas cuenta con sus respectivos programas que se desarrolla mediante diferentes metodologías sugeridas por el plan de formación docente, las mismas, según el MEC (2020), son:

- ✓ Aprendizaje por modelado: los estudiantes puedan aprender no solo el contenido de la disciplina, sino también las metodologías y enfoques que los docentes utilizan para enseñar ese contenido.
- ✓ Aprendizaje basado en proyectos: los estudiantes aprenden a través de la realización de proyectos prácticos y significativos. Emplea los pasos del pensamiento reflexivo y se lleva a la práctica a través de una serie de actividades colectivas y diversificadas.
- ✓ Aprendizaje basado en estudios de casos: favorece la confrontación de la realidad con la teoría. Utiliza situaciones reales o simuladas para que los estudiantes puedan aplicar teorías y conceptos a problemas concretos.
- ✓ Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una metodología que estimula la participación del estudiante y utiliza problemas del mundo real como punto de partida para el aprendizaje, conecta teoría y práctica fomentando el “aprender a aprender”, herramienta indispensable para su carrera profesional.
- ✓ Aprendizaje colaborativo: genera espacios de diálogo y consenso. Los estudiantes comparten experiencias y conocimientos con el fin de lograr una meta común.
- ✓ Aprendizaje-servicio, aprendizaje con un compromiso social, en actividades de extensión: fortalece y educa para la ciudadanía, promueve valores de solidaridad y justicia. Esta metodología plantea la inserción del estudiante a la comunidad como agente dispuesto al servicio. (pp. 65-68).

En relación con el tema de interés de este trabajo, el objeto matemático no aparece en el programa de estudio con el nombre de división entre números fraccionarios, pero se encuentra dentro de la materia denominada Taller de Resolución de Problemas y el contenido Números y operaciones. Como se observa en la malla curricular, a pesar de que en el tercer ciclo los estudiantes deben aprender sobre números enteros y racionales, no hay alguna materia referida a ello de forma explícita. No obstante, al revisar el contenido programático de las asignaturas, se halla que estos objetos matemáticos se abordan en el Taller de Resolución de problemas, ver Figura 20.

Figura 20

Programa del Taller de Resolución de Problemas.



Nota: Facsímil del Currículum Profesorado del Área de Matemática para el 3° ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media (MEC, 2020).

En lo que respecta a la formación continua en Paraguay es ofrecida por los Institutos de Formación Docente y/o Universidades, ya sean de carácter público o privado. Los docentes están obligados a realizar una capacitación anual de 100 horas como mínimo para poder escalafonar.

3. Metodología

En este apartado se describe la metodología utilizada para la elaboración del trabajo y las fases que implicó cada etapa de la puesta en marcha de las actividades, desde la constitución de los referentes, diseño del formato de las tareas, la determinación de la metodología de implementación de las tareas, el diseño y selección de los recursos para las tareas y por último la fase de diseño de las tareas que encamina al logro del objetivo propuesto.

3.1. Descripción de la metodología

El presente trabajo se desarrolló en el marco de una maestría de profundización, cuyo propósito es diseñar tareas que permitan a los profesores en formación continua construir significados de la división entre números fraccionarios, a través del uso de dos materiales didácticos, el Muro de fracciones y el Numicon.

En concreto, las tareas fueron diseñadas de manera que permitan la exploración de los materiales didácticos propuestos realizando representaciones de fracciones y de la división (partitiva y cuotitiva), así como tareas de tipo práctico relacionadas con el rol del profesor para promover una reflexión sobre los procesos de enseñanza de la división entre números fraccionarios.

3.2. Fases de desarrollo del trabajo de grado

Cumplir con el objetivo de este trabajo conllevó el desarrollo de cinco fases. La primera, la constitución de los referentes; la segunda, diseño del formato; la tercera, determinación de la metodología de implementación de las tareas; la cuarta, diseño de herramientas para las tareas y la última fase el diseño de las tareas, las cuales se describen enseguida.

3.2.1. Fase 1: Constitución de los referentes

En esta primera fase, el proceso se centró en la revisión y constitución de los referentes conceptuales que fundamentaron el trabajo de grado referidos a la formación de profesores. Este paso fue importante, ya que proporcionó el marco necesario para sustentar la propuesta de diseño de tareas y su futura implementación en la enseñanza de los números fraccionarios, específicamente la división con fracciones. Se llevó a cabo una revisión bibliográfica de documentos relevantes que abordan conceptos asociados a los números fraccionarios, su representación, la interpretación de las fracciones y la división entre fracciones, así como al uso de materiales manipulativos, como el Muro de fracciones y el Numicon, en particular para dividir con fracciones.

En este sentido, se consultaron investigaciones (ver tabla 6) en las que exploró la división de fracciones. Esta revisión no solo incluyó literatura especializada en Educación Matemática, sino en matemáticas. En esta fase, además, se construyó la base conceptual que guio el diseño de las tareas, lo que permitió identificar conceptos claves que deben ser tenidos en cuenta en la formación continua de profesores.

Este marco de referencia también abarcó el uso de los materiales manipulativos Muro de fracciones y Numicon para representar la división con fracciones y finalmente, se hizo una revisión de los asuntos curriculares propios del contexto educativo paraguayo relacionados con el objetivo de este trabajo.

Tabla 5

Constitución de los referentes

Categorías	Aspectos	Autores
Desde las matemáticas y la didáctica de las matemáticas	✓ Números racionales y números fraccionarios ✓ Representaciones de los números fraccionarios - Fracciones - Definición y elementos de una fracción - Tipos de fracciones - Interpretaciones de las fracciones ✓ Materiales manipulables: Muro de Fracciones y Numicon - Muro de fracciones - Numicon ✓ División entre números fraccionarios - Algoritmos de la división entre números fraccionarios - División con el Muro de fracciones y con Numicon	Luque et al. (2013) Sfard (1991) Muñoz (2002) Vasco (1991) Vasco (2021) Morcote y Flores (2001), Corredor y Gordillo (2020) Alsina (2012) Huaranga y Laurente (2011) Flores et al. (2011) Fernández (2009) Hobbé-Duval (2021) Díaz-Serrano y Arnal-Palacián (2020) Cermeño y Kusnerd (2016) Llinares y Sánchez (1997) Gómez et al. (2016) Contreras (2012) Márquez (2013) Motrel (2022)
Desde la formación de profesores de matemáticas	✓ Mirar profesionalmente la enseñanza ✓ Tareas para la formación de profesores de matemáticas ✓ Tareas profesionales ✓ Itinerario de formación	Llinares et al. (2020) Llinares (2019) Llinares (2011) Llinares (2013) Aké y López-Mojica (2020) García (2005)
Desde el currículo paraguayo	✓ Estructura del sistema educativo paraguayo ✓ Las matemáticas en el tercer ciclo de la educación escolar básica ✓ Las matemáticas en el profesorado de matemáticas de tercer ciclo	Ley 5749/2017 Carta Orgánica del Ministerio de Educación y Ciencias Ley General de educación 1264/98 Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2014) Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2020)

3.2.2. Fase 2: Diseño del formato

Contando con los referentes conceptuales y considerando las tareas profesionales y los itinerarios de formación de García (2005), se decidió elaborar un formato para estructurar el diseño de las tareas, esto se observa en la tabla 6.

Tabla 6

Estructura propuesta para la tarea

Objetivo:
Tiempo:
Materiales:
Descripción de la actividad:
Tarea o situación
Propuesta didáctica
Reflexión y cierre
Anexos

Nota. Adaptado del Itinerario de tarea de García (2005)

La propuesta de la tarea se organiza en un formato estructurado en secciones. La primera, un encabezado; en este se especifica el objetivo, el tiempo estimado y los materiales requeridos. A continuación, se presenta la actividad central, estructurada en torno a una situación o tarea inicial, en consonancia con el punto de partida establecido en el esquema de itinerario de tareas de García (2005). Esta propuesta didáctica integra el trabajo colaborativo y el análisis de información teórica o audiovisual, incorporando el componente del análisis y la discusión colectiva de los informes, propio del itinerario señalado. Finalmente, se concluye con una fase de reflexión y cierre de la tarea, abordando la última sección de la propuesta, que invita a los profesores a reflexionar sobre los aprendizajes logrados y su potencial aplicabilidad en otros contextos.

3.2.3. Fase 3 Determinación de la metodología de implementación de las tareas

Se decidió que las tareas profesionales fueran diseñadas para trabajar la interpretación partitiva y cuotitiva de la división de fracciones.

Además, se determinó que las tareas se implementarían a través de una secuencia de sesiones formativas en la que los profesores en ejercicio podrían interactuar directamente con los materiales manipulativos. Estas sesiones estarían diseñadas para que los profesores exploraran dos de los significados asociados a la división de fracciones, utilizando el Muro de fracciones y el Numicon. Durante las sesiones, se adoptaría una metodología participativa fomentando el trabajo en equipo, la discusión, la reflexión y la construcción colaborativa del conocimiento, siguiendo el itinerario de tareas profesional propuesto por García (2005).

En esta fase también se consideró la temporalización de las tareas, estableciendo el número de sesiones necesarias, la duración de cada una y los objetivos específicos que se abordarían en cada instancia. Se contempló un diseño flexible que permitiría ajustar las tareas en función de las necesidades y dificultades que podrían surgir durante la implementación, asegurando que los docentes en servicio tengan el tiempo y los recursos propuestos: materiales didácticos (Muro de fracciones y Numicon) para desarrollar una comprensión de la representación de fracciones, equivalencias y división de fracciones (cuotitiva y partitiva).

3.2.4. Fase 4: Diseño y selección de recursos para las tareas

La cuarta fase del desarrollo de este trabajo de grado consistió en el diseño y elaboración de los recursos que se utilizarán para implementar las tareas, incluyendo los materiales manipulativos y algunos elementos que se anexaron a estos, como unas tarjetas fraccionarias, videos de apoyo, organización de lecturas complementarias y guías de trabajo. Esta fase fue de gran relevancia, ya que los materiales diseñados serían los mediadores principales entre los

profesores en servicio y los conceptos matemáticos y didácticos que se desean afianzar, por lo que es fundamental que estén alineados con los objetivos del trabajo de grado y que faciliten la construcción de significados de la división con fracciones y la representación de fracciones con los materiales manipulativos.

Para la primera tarea se organizaron documentos con lecturas complementarias sobre los materiales didácticos, el Numicon y el Muro de fracciones. Para la segunda y tercera se hicieron videos acerca de la representación de fracciones propias e impropias, así como para la equivalencia de fracciones, respectivamente. En la cuarta, en cambio, se proporcionan lecturas sobre la interpretación de la división, centrándose en el significado de la división cuotitiva y partitiva.

3.2.5. Fase 5. Diseño de las tareas

Esta fase se hizo el consolidado de cada una de las tareas siguiendo el itinerario de formación planteado por García (2005) a saber: 1. Presentación de una situación 2. Discusión – trabajo en equipo para elaborar un informe de acuerdo con conocimientos previos o creencias. 3. Socialización o plenaria del informe. 4. Información teórica sobre el objeto en estudio. 5. Trabajo en equipo para la reformulación de sus informes y 6. Reflexión final sobre toda la actividad realizada, conclusión para el cierre.

Antes de iniciar con la elaboración de las tareas fue necesario la discusión y el diálogo constante entre la asesora de este trabajo de grado y la autora de este documento, así como una continua retroalimentación sobre el concepto en estudio, las propuestas de tareas y el uso de los materiales propuestos. Así mismo se hizo una búsqueda y selección de producciones de estudiantes paraguayos o de propuestas de enseñanzas en libros de textos sobre división con

fracciones para incorporar en las tareas para los profesores de modo que reflexionen sobre sus prácticas de enseñanza.

Se destaca la importancia de planificar tareas que no solo guíen a los profesores en formación continua hacia la resolución de problemas matemáticos, sino que también promuevan una reflexión sobre los significados y usos de la división de fracciones, utilizando herramientas manipulativas como el Muro de fracciones y el Numicon y sobre sus prácticas de enseñanza

Cada tarea diseñada comienza con la definición precisa de un objetivo claro y específico, orientado a conocer estos materiales didácticos que se utilizarán para el desarrollo de la comprensión particular relacionada con la interpretación de la división partitiva y cuotitiva de fracciones. Para cada una de las tareas se estipula un tiempo total de 120 a 150 minutos y para cada etapa desde 20 a 40 minutos del itinerario propuesto por García (2005).

También se decidió incluir en cada tarea una descripción de la tarea misma. Luego, se propuso la tarea en sí considerando importante que las instrucciones fueron claras y precisas, pero a la vez flexibles, para permitir que los profesores puedan explorar diversas estrategias para resolver los problemas planteados. Las tareas se estructuraron de manera que, además de pedir la solución a un problema, inviten a la reflexión sobre el proceso seguido, la interpretación de los resultados y la conexión con el conocimiento previo, por ejemplo, una tarea podría consistir en la resolución de un problema que implique dividir dos fracciones utilizando el Muro de Fracciones, y luego se podría solicitar a los profesores que expliquen verbalmente o por escrito cómo llegaron a su respuesta y qué significado atribuyen a la operación de división en ese contexto.

Además, cada tarea incluyó una etapa de análisis y discusión, es decir, al finalizar la actividad práctica, se pide a los profesores en ejercicio que compartan sus soluciones y reflexionen comparando sobre las diferentes estrategias utilizadas y que podrían surgir durante la

resolución del problema. Este espacio para la discusión es fundamental, ya que permite a los maestros no solo validar sus respuestas, sino también a considerar otras perspectivas y formas de abordar el mismo problema. En este sentido, el diseño de las tareas buscaría fomentar un aprendizaje colaborativo y reflexivo, en el que los profesores enriquezcan su comprensión del contenido matemático a través del intercambio de ideas y se posibiliten nuevas prácticas de enseñanza.

Por último, es importante señalar que el esquema propuesto por García (2005) contempla la evaluación de la tarea no solo en términos de la respuesta final, sino también del proceso seguido por los profesores. Esto implicó prestar atención a las conexiones entre un proceso y otro de las actividades, así como lograr que los profesores vinculen el uso de los materiales manipulativos con los significados de la división con fracciones.

Finalmente, se optó por ubicar como anexos, en cada tarea, las guías y documentos extras que las conforman, esto para facilitar la consulta en procura e impresión en su implementación.

4. Resultados

En este apartado se presentan los resultados de las cuatro tareas profesionales diseñadas, con sus respectivas guías y documentos anexos. La primera tarea pretende la exploración del Numicon y del Muro de fracciones. Seguidamente, la segunda tarea aborda la representación de fracciones. Luego, la tercera tarea busca la representación de las fracciones equivalentes. Por último, la cuarta tarea corresponde a la división con fracciones (partitiva y cuotitiva). Todas las tareas requieren el manejo del Numicon y del Muro de fracciones.

4.1. Tareas profesionales sobre la división de números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon

Las tareas van dirigidas a los profesores, con el fin de que reflexionen sobre su gestión de enseñanza a partir del análisis de las producciones de los estudiantes, el conocimiento disciplinar y didáctico que poseen, y su relación con los materiales manipulativos propuestos: el Muro de fracciones y el Numicon. Uno de los objetivos principales es contribuir a la mejora del desempeño docente. Para ello, algunas de las tareas se inician con el análisis de las producciones de los estudiantes, con el propósito de identificar sus logros, desarrollos y errores. Este proceso busca fomentar en los profesores una reflexión profunda sobre sus propias concepciones y conocimientos en torno a los significados de la división entre números fraccionarios, considerando que, en muchos casos, estas nociones no están completamente claras.

Por un lado, las tareas destacan el rol del profesor como analista de las producciones estudiantiles, siendo este un elemento central en el diseño de las situaciones iniciales, las cuales se enfocan en el análisis de su práctica docente y en la interpretación del aprendizaje de los estudiantes. Se pretende confrontar al docente con su propio conocimiento matemático sobre la división entre fracciones, particularmente en lo que respecta a su representación como fracción,

buscando que tomen conciencia de que, en muchos casos, su comprensión se limita al algoritmo, sin una comprensión profunda de los significados subyacentes de la operación. Por otro lado, se enfatiza el uso de materiales didácticos como herramientas mediadoras para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Estos recursos no solo permiten una comprensión más visual y tangible de los conceptos, sino que también abren la posibilidad de que los profesores incorporen o repliquen algunas de las tareas propuestas en su propia práctica docente.

Las tareas profesionales diseñadas sobre la división de números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon sigue el itinerario propuesto por García (2005), cada tarea cuenta con un objetivo específico, un tiempo estipulado, materiales a utilizar y las diferentes actividades que abarca la propuesta didáctica.

4.1.1. Tarea 1. Exploración del Numicon y del Muro de fracciones

Objetivo:	Reconocer las características y los beneficios del uso de los materiales manipulativos como el Muro de fracciones y Numicon, para mejorar la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos.
Tiempo:	120 a 150 minutos
Materiales:	Numicon Muro de fracciones y tarjetas fraccionarias Hojas blancas, marcadores, proyector
Descripción de la actividad:	La propuesta de la tarea pretende que los maestros entren en contacto con los materiales manipulativos: Muro de fracciones y Numicon, los exploren, palpen y conozcan sus elementos constitutivos. Inicialmente, se realiza indagaciones sobre las prácticas pedagógicas de los profesores para enseñar Matemáticas, en particular centrando la atención en el uso de materiales o recursos que conocen y utilizan en la enseñanza de las fracciones. Luego se les presenta los dos materiales manipulativos: el Numicon y el Muro de fracciones, comienzan a explorar los elementos constitutivos de ambos recursos y se les provee de la documentación informativa que describe las características del Numicon y Muro de fracciones. Los profesores proceden a la lectura sobre el origen, las características y la utilidad de cada uno de los materiales, identifican cada componente de los materiales con sus respectivos nombres, los describen y diferencian sus elementos. Los profesores realizan un autoanálisis de sus prácticas en el aula, reconocen la importancia de utilizar materiales manipulativos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y mencionan algunos contenidos que podrían desarrollar con los materiales manipulativos expuestos, así ventajas y desventajas de estos. Se comparten los puntos de vista de cada profesor y se llega a una conclusión alrededor de la pertinencia del uso de los materiales en la enseñanza de las matemáticas.

Tarea o situación

Parte 1 (20 minutos)

1. Realiza un autoanálisis de tu quehacer docente durante el desarrollo de las clases y responde a estas preguntas:
 - a. ¿Con qué frecuencias utilizas materiales didácticos en tus clases de matemáticas? Explica.
 - b. ¿Utilizas materiales didácticos para enseñar fracciones? Explica.
 - c. ¿Consideras/considerarías apropiado utilizar algún material para enseñar las fracciones? Justifica tu respuesta.
 - d. Si utilizas materiales didácticos o recursos para enseñar fracciones, explicar cómo lo utilizas, en cuál(es) momento(s), los contenidos particulares que enseñas con este(os) material(es) y si sigues alguna metodología para su uso.

Parte 2 (20 minutos)

Para responder las preguntas que siguen, ten en cuenta los materiales didácticos que hay en la mesa.

- a. ¿Han visto alguna vez estos materiales? ¿Cómo creen que se llaman?
- b. ¿Para qué creen que sirven?
- c. ¿Qué contenidos matemáticos se podrían enseñar con estos materiales? ¿Cómo y en qué grados?
- d. ¿Consideras oportuno el uso de estos materiales en la enseñanza de algún concepto matemático? ¿Por qué?
- e. ¿Cómo describirías ambos materiales?

Propuesta didáctica

Tarea y trabajo en grupos (40 minutos): Se inicia la primera sesión presentando el objetivo y organizando a los profesores en equipos, se entrega la primera parte de la tarea en una guía de trabajo (ver **Anexo A** de esta tarea), la cual deben resolver por escrito en los equipos conformados, para esto se dará un tiempo de 30 minutos. Luego se les entregará la segunda parte de la tarea en otra guía de trabajo (ver **anexo B** de esta tarea), los profesores la leen y completan los enunciados.

Plenaria (30 minutos): La formadora invita a los distintos equipos a socializar las respuestas que dieron en los equipos previos.

Información teórica y trabajo en equipos (40 minutos): Se les pide a los profesores, reunidos en los mismos equipos, que realicen lo siguiente de acuerdo con el documento que se entregue, sobre los materiales Numicon y Muro de fracciones (ver **anexo C** de esta tarea).

1. Lee la información referente a los materiales didácticos denominados: Muro de fracciones y Numicon facilitada por la formadora.
2. Manipulando el material que se halla sobre la mesa, verifica las características de cada material didáctico junto con sus elementos y sus respectivos nombres, de acuerdo con la lectura.
3. Dibuja en hojas o cuadernos las piezas de cada material con sus respectivos nombres.
4. ¿Utilizarías estos materiales en tus clases de matemáticas? Explica.
5. ¿Consideras que con estos materiales se puede enseñar asuntos propios de las fracciones? Explica tu respuesta y en dado caso, cuáles asuntos de las fracciones abordarías con cada uno de ellos.

Reflexión y cierre (20 minutos):

En plenaria, la formadora lidera la socialización de la tarea realizada, para lo cual pide a los profesores que comenten sobre:

1. *La importancia de usar materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas.* La conclusión principal tiene que ver con que los materiales posibilitan una representación física o concreta de ciertos objetos matemáticos, pero que estos por sí solos no lo hacen, se requiere de una selección apropiada de los mismos, de una correcta planificación sobre su uso, y de la gestión en sí misma por parte del profesor hacia sus estudiantes.
 2. *El Numicon y el Muro de fracciones.* La intención fundamental es precisar los elementos constitutivos de cada uno de estos materiales, mencionar algunos de los objetos matemáticos que pueden abordarse con estos, de sus beneficios y algunas desventajas (todo esto según el documento leído). Para esto, la formadora irá ejemplificando con el material directamente. Por ejemplo, si los profesores indican que con el Muro de fracciones se pueden representar fracciones propias, se mostrarán, digamos, las tiras correspondientes a $\frac{1}{2}$ o
-

-
- a $\frac{2}{3}$. Similarmente, si se menciona que una desventaja de este material es la representación de fracciones impropias, se mostrará que en efecto es esta una limitación y que para resolverla se requeriría más de un kit.
3. *Posibilidades de llevar estos materiales didácticos al aula de clase.* Para esto, la formadora expondrá que estos materiales se pueden construir con los estudiantes utilizando materiales accesibles como cartulinas, cartones, goma eva o fomy y utilizando tapitas.
-

Anexos de la tarea

Anexo A. Guía de trabajo. Parte 1.



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 1⁴

Exploración del Numicon y del Muro de fracciones

Nombres: _____

Fecha: _____

Parte 1 (20 minutos)

1. Realiza un autoanálisis de tu quehacer docente durante el desarrollo de las clases y responde a estas preguntas:

a. ¿Con qué frecuencias utilizas materiales didácticos en tus clases de matemáticas? Explica.

b. ¿Utilizas materiales didácticos para enseñar fracciones? Explica.

c. ¿Consideras/considerarías apropiado utilizar algún material para enseñar las fracciones? Justifica tu respuesta.

d. Si utilizas materiales didácticos o recursos para enseñar fracciones, explicar cómo lo utilizas, en cuál(es) momento(s), los contenidos particulares que enseñas con este(os) material(es) y si sigues algún procedimiento para su uso.

⁴ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora.

Parte 2 (20 minutos)

Para responder las preguntas que siguen, ten en cuenta los materiales didácticos que hay en la mesa.

1. ¿Han visto alguna vez estos materiales? ¿Cómo creen que se llaman?

2. ¿Para qué creen que sirven?

3. ¿Qué contenidos matemáticos se podrían enseñar con estos materiales? ¿Cómo y en qué grados?

4. ¿Consideras oportuno el uso de estos materiales en la enseñanza de algún concepto matemático? ¿Por qué?

5. ¿Cómo describirías ambos materiales?

Anexo B. Guía de trabajo. Parte 2.



COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 2⁵

Exploración del Numicon y del Muro de fracciones

Nombres: _____

Fecha: _____

1. Lee la información referente a los materiales didácticos denominados: Muro de fracciones y Numicon facilitada por la formadora.

2. Manipulando el material que se halla sobre la mesa, verifica las características de cada material didáctico junto con sus elementos y sus respectivos nombres, de acuerdo con la lectura.

3. Dibuja en hojas o cuadernos las piezas de cada material con sus respectivos nombres.

4. Responde:

a. ¿Utilizarías estos materiales en tus clases de matemáticas? Explica.

b. ¿Consideras que con estos materiales se puede enseñar asuntos propios de las fracciones? Explica tu respuesta y en dado caso, cuáles asuntos de las fracciones abordarías con cada uno de ellos.

⁵ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado «División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales» (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora.

Anexo C. Información adicional



COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA – CAAZAPÁ

DOCUMENTO INFORMATIVO TAREA 1⁶

Materiales didácticos. Numicon y Muro de fracciones

Fragmentos tomados de Benítez (2024) y de Nührenbörger & Steinbring (2008)

1. Materiales manipulativos

Nührenbörger y Steinbring (2008) destacan que los materiales manipulativos son herramientas esenciales en la educación matemática, especialmente en la formación de docentes. Estos materiales no solo facilitan la comprensión de conceptos matemáticos abstractos, sino que también promueven la mediación instrumental. Pero así también estos autores recalcan que los materiales por sí solos no generan conocimiento, su uso requiere de una selección adecuada al contenido matemático y una planificación estructurada que conduzca a los resultados esperados.

Los materiales manipulativos son más que simples herramientas de enseñanza; son medios que facilitan la construcción activa del conocimiento matemático por parte de los estudiantes, apoyando tanto su comprensión conceptual como su capacidad para resolver problemas de manera efectiva. (Nührenbörger y Steinbring, 2008)

2. Materiales manipulativos: Muro de fracciones y Numicon

2.1. Muro de fracciones

El Muro de Fracciones o Diagrama de Freudenthal, también conocido como «fraction wall» en inglés, es una herramienta utilizada en la educación matemática para ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones y sus relaciones. No existe evidencia concreta de que Hans Freudenthal (1905-1990) sea el creador del concepto del Muro de Fracciones ni la fecha exacta de la aparición de este material, pero se reconoce a este personaje por haber influido en la construcción del Diagrama de Freudenthal. (Solís, 2008, citado por Huaranga y Laurente, 2011)

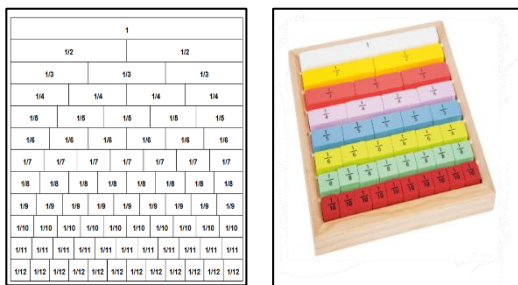
El Muro de Fracciones tiene forma de un rectángulo dividido en franjas horizontales, cada una de ellas representa la unidad, la primera franja va completa y las siguientes franjas son divididas en porciones iguales cada una de las cuales representan fracciones unitarias como un medio, un tercio, un cuarto, un quinto, un sexto, un séptimo, un octavo, un noveno, un décimo, un onceavo, un doceavo.

El Muro de fracciones es un material idóneo para abordar fracciones equivalente, comparar fracciones y realizar operaciones (Flores et al., 2011). En la figura 1 se observa el Diagrama de Freudenthal o el Muro de fracciones en dos versiones diferentes.

⁶ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado «División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales» (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora.

Figura 1

Diagrama de Freudenthal o el Muro de fracciones



Nota. Extraído de Huaranga y Laurente (2011)

Fernández (2009) menciona las siguientes ventajas que conlleva el uso del Muro de fracciones durante la enseñanza de los números fraccionarios: facilita la identificación de fracciones equivalentes, igualdades y desigualdades entre fracciones, el estudiante se familiariza con todas las operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones, resulta fácil su construcción, manejo y es útil para entender las fracciones. En cuanto a las desventajas se puede mencionar la representación de fracciones impropias, así como realizar algunas adiciones y sustracciones.

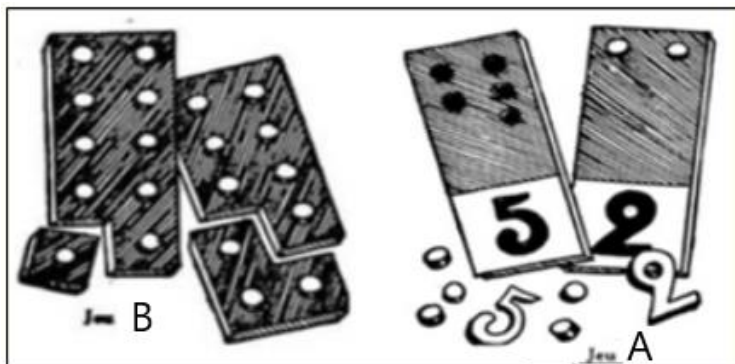
2.2. Numicon

Según investigaciones realizadas por Jobbé-Duval (2021), este material manipulativo hace su aparición entre los años 1867 y 1893 en su primera versión, presentado por el alemán Ernst Troelltsch, denominado Nürnberger Rechenbrett (ábaco de Nuremberger) con el propósito de servir a la construcción del número como relación entre cantidades. Después de la primera guerra mundial, Eugen Koller presenta otra versión mejorada del ábaco de Nürnberger con placas rectangulares perforadas con diez orificios en las que se pueden alojar cilindros de sección bicolor.

En 1923, la profesora Suzanne Herbinière-Lebert (1893-1985) introdujo un material educativo manipulativo con dos versiones de juego, A y B. La versión A consistía en placas perforadas, siendo pionera en el uso de cilindros móviles insertados en placas rectangulares que contenían entre 1 y 10 agujeros. Este recurso se utilizaba para ayudar en la iniciación sensorial al cálculo de operaciones con números naturales, facilitando la comprensión de conceptos matemáticos básicos a través de la manipulación física. La versión B son placas parecidas a las actuales que presentan la forma de acuerdo con los orificios que contienen, A Herbinière-Lebert se la considera inventora de esta particular forma de almohadillas con unidades de base móviles (Jobbé-Duval, 2021). En la figura 2 se puede observar la presentación de ambas versiones de las placas.

Figura 2

Placas de Numicon de Herbinière-Lebert



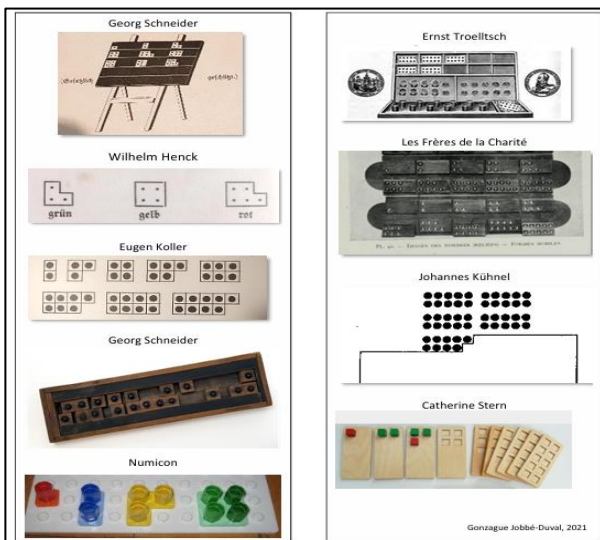
Nota. Extraído de Jobbé-Duval (2021)

Catherine Stern, luego de la segunda guerra mundial, presenta en los Estados Unidos sus Pattern Boards de estilo similar a las placas de Herbinière-Lebert (pero estrechamente asociados con barras que representan cantidades del 1 al 10). En 1996, los británicos Romey Tacon, Ruth Atkinson y Tony Wing se inspiraron en el trabajo de Catherine Stern (aunque también podría ser en Suzanne Herbinière-Lebert) para crear las formas del Numicon actual. (Jobbé-Duval, 2021)

El Numicon, desde su origen, ha presentado varias modificaciones en su estructura hasta llegar a ser lo que actualmente se utiliza. En la figura 3 se presentan las diferentes modelos de este material didáctico a través del tiempo.

Figura 3

Evolución del Numicon



Nota. Extraído de Jobbé-Duval (2021)

Este material manipulativo contiene los siguientes elementos: unas piezas llamadas placas o formas Numicon con orificios circulares que van del 1 al 10, de diferentes colores y formas según el número que representan, unas clavijas que sirven para encajar en los agujeros de las formas Numicon, unas bolsas negras llamadas bolsas sensoriales, las ruletas Numicon, un tablero con 100 cilindros organizados en 10×10 que permiten encajar las formas Numicon y las clavijas. (Díaz-Serrano y Arnal-Palacián, 2020). En la figura 4 se muestra el Numicon con todos sus elementos.

Figura 4.

Numicon y sus elementos



Nota. Fotografía propia

El Numicon es un recurso manipulativo utilizado desde el 2015 en Reino Unido, destinado a mejorar la comprensión de los niños acerca de las matemáticas, se fomenta su uso para ayudar a los estudiantes a una mejor

comprensión del concepto de número y las relaciones numéricas que se van estableciendo entre ellos, al igual que desarrollar habilidades multisensoriales (Sánchez, 2015).

En la figura 5 se muestra la presentación del Numicon promovido en el Reino Unido, las placas tienen forma rectangular con puntos estructurados en un par de columna de modo que resulte fácil realizar las operaciones en el Numicon.

Figura 5

Forma ordenada del Numicon actual



Nota. Extraído de Díaz-Serrano y Arnal-Palacián (2020)

Según Díaz-Serrano y Arnal-Palacián (2020), entre las actividades que demuestran el éxito del uso del Numicon se encuentran:

- ✓ La identificación y creación de patrones como formas y colores.
- ✓ Permite realizar secuencias de menor a mayor o viceversa.
- ✓ El uso de los agujeros para completar la sucesión de números admite comparaciones unas placas con otras.
- ✓ Estimula el cálculo temprano en niños pequeños a través de las operaciones de adición y sustracciones simples.

Para Sánchez (2015), con ayuda de este material manipulativo los alumnos aprenden más rápido conceptos abstractos que habitualmente les cuesta comprender de acuerdo con su propio ritmo; aumenta la confianza de los estudiantes y el interés por las matemáticas, desarrolla destrezas para el aprendizaje de los estudiantes, fomenta el trabajo en equipo y la habilidad de resolver problemas de manera colectiva.

Con el uso de este material se pretende que el aprendizaje de conceptos abstractos sea de manera rápida y que asienten conocimientos, que los estudiantes sean capaces de resolver las operaciones con números naturales y fraccionarios (Cermeño y Kusnerd, 2016). La principal desventaja del Numicon es que no se presta para desarrollar muchos de los ejes temáticos del currículo escolar, pues se centra sobre todo en el aprendizaje de los números, operaciones con números y resolución de problemas (Cermeño y Kusnerd, 2016).

Referencia:

Benítez, A. (2024). *División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales*. [Tesis para Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Nührenbörger, M., & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in teacher education. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 157-159). Brill Sense.

4.1.2. Tarea 2. Representación de fracciones con el Numicon y con el Muro de fracciones

Objetivo:	Utilizar el Muro de fracciones y el Numicon para facilitar la comprensión del concepto matemático fracción y la representación de fracciones propias e impropias a través de estos materiales.
Tiempo:	90 a 120 minutos
Materiales:	Numicon Muro de fracciones y tarjetas fraccionarias Hojas blancas, marcadores, proyector
Descripción de la actividad:	Se presenta a los docentes una tarea elaborada por un estudiante que aborda la representación de las fracciones. Cada profesor evalúa la corrección del procedimiento y adopta una postura crítica al respecto. Posteriormente, se distribuye una guía de trabajo que invita a los profesores a observar videos explicativos sobre la representación de fracciones utilizando los recursos didácticos Numicon y Muro de fracciones. A partir de las observaciones realizadas, los docentes llevan a cabo actividades de representación de fracciones propias e impropias mediante el uso de materiales manipulativos, como el Numicon y el Muro de fracciones. Para concluir, los profesores comparten sus reflexiones sobre la experiencia vivida al implementar estos recursos didácticos en la enseñanza de las fracciones, discutiendo la posibilidad de utilizar en el desarrollo de contenido matemático, así como las ventajas y los desafíos que presenta su uso en el aula.

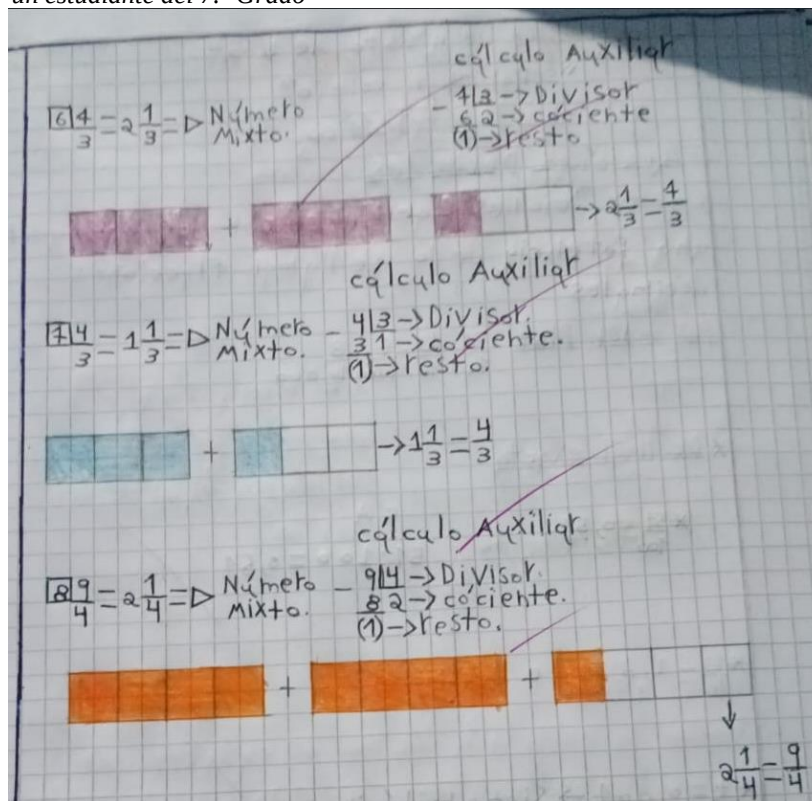
Tarea o situación

Parte 1. (20 minutos)

1. Observa las imágenes presentadas a continuación y luego realiza las actividades propuestas.

Figura 1

Tarea realizada por un estudiante del 7.º Grado



Nota. Facsímil de un cuaderno de un alumno paraguayo de 7.º grado.

1.1. Responde las preguntas

- ¿Cuál cree que es el objetivo de la tarea propuesta al estudiante cuya producción se presentó anteriormente? ¿Por qué?
- ¿Es correcto lo realizado por el estudiante? Justifica tu respuesta.
- Explica el procedimiento realizado por el estudiante.
- Cuando desarrollan conceptos como fracción y su representación ¿Cómo lo hacen? ¿Qué recursos y procedimientos utilizan?
- ¿Consideran que el Muro de fracciones y el Numicon podría utilizarse para ampliar el mismo objetivo de la tarea propuesta cuya producción se presentó antes? ¿Por qué?

Parte 2. (20 minutos)

B.

1.2. Marca la fracción que representa cada figura en la actividad propuesta en la parte inferior y justifica tu elección.

Figura 2

Ejercicios sobre representación de fracciones

$\frac{5}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{4}{8}$

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- Observa y contesta.

Nota. Extraído de <https://www.topworksheets.com/es/matematicas/fracciones/fracciones-65ee17d72805b>

1.3. Responde estas preguntas de acuerdo con la actividad presentada más arriba.

- ¿Qué fracción de los polígonos son grises? ¿Y negros?
- ¿Qué fracción de los polígonos son cuadrados grises y negros?
- ¿Qué fracción de los polígonos son triángulos grises y negros?

2. Ahora elige uno de los materiales: Muro de fracciones o Numicon e intenta representar todas las fracciones presentadas de las dos actividades.

Propuesta didáctica

Tarea y trabajo en grupos (40 minutos): Se realiza un breve recordatorio de las características de los materiales manipulativos estudiados en la sesión anterior, el Muro de fracciones y Numicon y sus elementos constitutivos. Seguidamente se distribuye a los profesores la hoja que contiene la guía de trabajo (ver

Anexo 2 A), en la cual se presenta la primera parte de la tarea, todas las actividades presentadas la resuelven en equipos conformados y la presentan por escrito. Se hace entrega de la segunda parte de la tarea en otra guía de trabajo (ver

Anexo 2B) nuevamente se trabaja en equipo para responder las respuestas a las actividades.

Plenaria (20 minutos): Cada equipo elige un representante para socializar el trabajo realizado en sus respectivos grupos.

Información teórica (30 minutos): Se facilita a los profesores algunos enlaces de YouTube para observar los vídeos explicativos referentes a la representación de fracciones propias e impropias en los materiales didácticos Muro de fracciones (dos opciones de vídeo que puede seleccionar el profesor) y el Numicon.



https://youtu.be/v_FNb95ZlPQ



https://youtu.be/_0Gv6s2Bp6k

Luego de visualizar los vídeos se solicita la siguiente tarea (ver

Anexo 2C).

-
1. Observa los videos y practica el procedimiento para representar las fracciones.
 2. Identificar cuál de los materiales didácticos: el Muro de fracciones y/o el Numicon son más apropiados para representar las fracciones propias e impropias. Explica
 3. Procede a representar en los materiales didácticos las fracciones propias e impropias que fueron presentadas en las actividades 1. A y 1. B.
 4. Explica tu experiencia en el uso de estos materiales para representar las fracciones propias e impropias.

Reflexión y cierre (20 minutos): Primeramente, los profesores presentan a sus pares el procedimiento de representación realizado con las fracciones en estos materiales didácticos: el Muro de fracción y el Numicon. Para finalizar, la formadora solicita a los profesores su comentario, las cuales son plasmadas en la pizarra y de estas ideas se elabora la reflexión final.

1. *La representación de las fracciones propias e impropias en el Muro de Fracciones:* con las representaciones realizadas se observa que este material facilita la representación de fracciones propias, pero presenta una dificultad a la hora de representar las fracciones impropias. En este caso es necesario contar con otro Muro de fracciones dependiendo de cuánto más supera la unidad. Es decir, si se tiene una fracción $3/2$ se necesita dos muros, ya que en el primer muro solo se tiene $2/2$ se recurre a otro Muro para completar la fracción solicitada.
2. *La representación de las fracciones propias e impropias en el Numicon:* luego de experimentar las representaciones en este material, se reconoce que resulta muy práctico la representación de fracciones propias e impropias, al contar con ciertas cantidades de placas Numicon facilita la representación y refuerza la comprensión de las fracciones.
3. *Las representaciones de los números fraccionarios:* se menciona que los números fraccionarios pueden representarse de varias formas y con el uso de estos materiales se pone en práctica algunas de ellas como la verbal, la simbólica expresado como fracción y la manipulable al experimentar la representación de las fracciones en el Muro de fracciones y en el Numicon. Así también se reconoce que estos materiales didácticos permiten la representación de otras fracciones como las unitarias, no unitarias, homogéneas y heterogéneas.

Anexos de la tarea 2

Anexo 2 A Guía de trabajo. Parte 1



MINISTERIO DE
EDUCACIÓN
Y CIENCIAS
PARAGUAY

PARAGUÁI
TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 2⁷

Representación de fracciones con el Numicon y con el Muro de fracciones

Nombres: _____

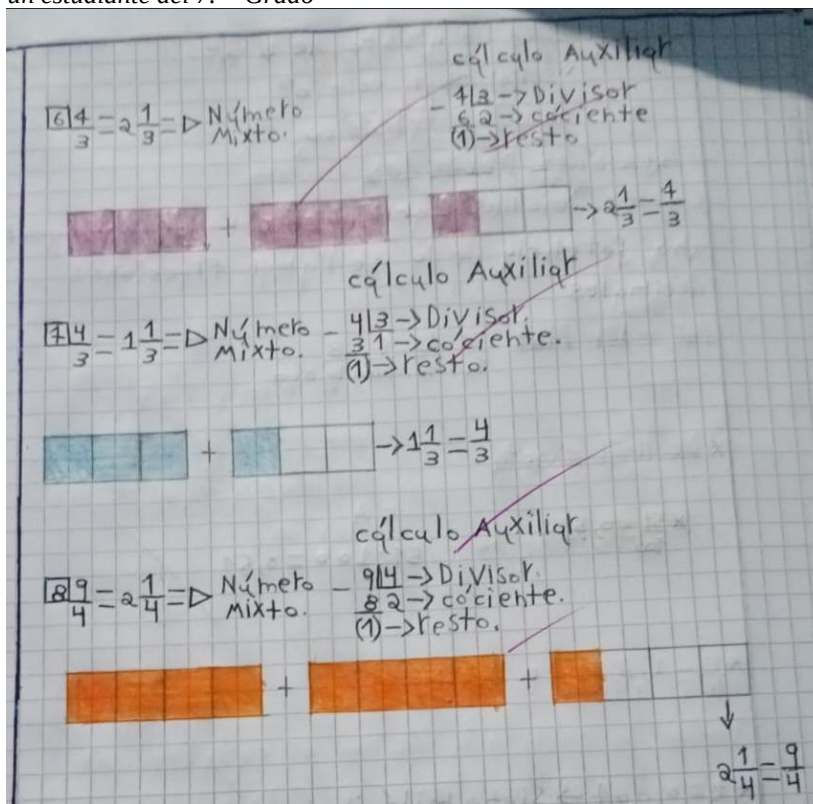
Fecha: _____

Parte 1. (20 minutos)

1. Observa las imágenes presentadas a continuación y luego realiza las actividades propuestas.

Figura 1

Tarea realizada por un estudiante del 7.^{mo} Grado



Nota. Facsímil de un cuaderno de un alumno del 7.^{mo} Grado de Paraguay.

- a) ¿Cuál cree que es el objetivo de la tarea propuesta al estudiante cuya producción se presentó anteriormente? ¿Por qué?

⁷ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora.

b) ¿Es correcto lo realizado por el estudiante? Justifica tu respuesta.

c) Explica el procedimiento realizado por el estudiante.

d) Cuando desarrollan conceptos como fracción y su representación ¿Cómo lo hacen? ¿Qué recursos y procedimiento utilizan?

e) ¿Consideran que el Muro de fracciones y el Numicon podría utilizarse para ampliar el mismo objetivo de la tarea propuesta cuya producción se presentó antes? ¿Por qué?

Anexo 2B. Guía de trabajo. Parte 2



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 2⁸

Representación de fracciones con el Numicon y con el Muro de fracciones

Nombres: _____

Fecha: _____

Parte 2. (20 minutos)

1.2. Marca la fracción que representa cada figura en la actividad propuesta en la parte inferior y justifica tu elección.

Figura 2

Ejercicios sobre representación de fracciones

5/2 2/5 4/8 8/4 6/3 3/6 8/4 4/8

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- Observa y contesta.

Nota. Extraído de <https://www.topworksheets.com/es/matematicas/fracciones/fracciones-65ee17d72805b>

1.3. Responde estas preguntas de acuerdo con la actividad presentada más arriba.

a) ¿Qué fracción de los polígonos son grises? ¿Y negros?

b) ¿Qué fracción de los polígonos son cuadrados grises y negros?

⁸ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

c) ¿Qué fracción de los polígonos son triángulos grises y negros?

2. Ahora elige uno de los materiales: Muro de fracciones o Numicon e intenta representar todas las fracciones presentadas de las dos actividades

Anexo 2C. Información adicional y Guía de trabajo. Parte 3



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



**BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ**
Excedencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Información adicional y tarea 3⁹

Representación de fracciones con el Numicon y con el Muro de fracciones

Nombres: _____

Fecha: _____

1. Ingresa en estos enlaces y observa los vídeos explicativos referentes a la representación de fracciones propias e impropias en los materiales didácticos: Muro de fracciones y Numicon.



https://youtu.be/v_FNb95ZlPQ



https://youtu.be/_0Gv6s2Bp6k

2. Luego de observar los videos, realiza la siguiente actividad

- Observa los videos y practica el procedimiento para representar las fracciones.
- Identificar cuál de los materiales didácticos: el Muro de fracciones y/o el Numicon son más apropiados para representar las fracciones propias e impropias. Explica
- Procede a representar en los materiales didácticos las fracciones propias e impropias que fueron presentadas en las actividades 1. A y 1. B.
- Explica tu experiencia en el uso de estos materiales para representar las fracciones propias e impropias.

⁹ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

4.1.3. Tarea 3. Fracciones equivalentes con el Numicon y con el Muro de fracciones

Objetivo:	Afianzar la comprensión de representación de equivalencias de fracciones utilizando materiales manipulativos como el Muro de fracciones y el Numicon para representar las equivalencias.
Tiempo:	100 a 120 minutos
Materiales:	Numicon Muro de fracciones y tarjetas fraccionarias Hojas blancas, marcadores, proyector
Descripción de la actividad:	La propuesta busca que los profesores afiancen sus conocimientos en la representación de fracciones equivalentes utilizando los materiales manipulables: el Numicon y Muro de fracciones. Para ello se plantea a los profesores un caso respecto a la gestión que realiza una profesora al presentar a los estudiantes una tarea para desarrollar fracciones equivalentes. A partir del análisis del caso presentado los profesores interpretan la situación y manifiestan su postura al respecto. Posterior a eso observan unos videos explicativos sobre fracciones equivalentes representados en el Muro de fracciones y el Numicon, utilizan las mismas fracciones expresadas en el caso planteado para representar en estos materiales manipulativos, pueden recurrir a las tarjetas fraccionarias para representar. Los profesores realizan una reflexión sobre su gestión en el aula, de los beneficios que los materiales didácticos pueden generar durante el desarrollo de la clase. Por último, se solicita a los profesores algunas ideas de cómo presentarían a sus estudiantes este contenido de representación de equivalencias utilizando uno de los materiales.

Tarea o situación

Parte 1 (20 minutos).

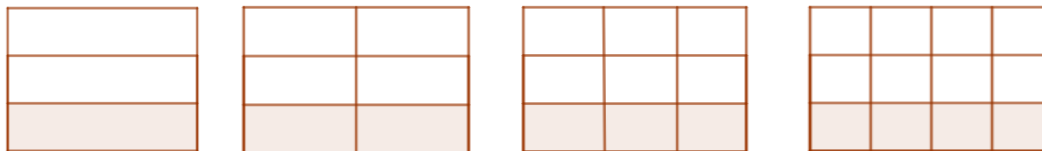
1. Lee el siguiente caso.

- La Prof. Eva, catedrática de Matemáticas llega al salón de clase de los estudiantes, pone como título Equivalencia de fracciones en la pizarra y escribe la definición:

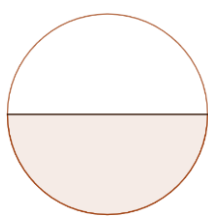
“Una fracción es equivalente a otra cuando amplificamos y simplificamos por el mismo número” luego presenta este ejercicio y solicita a sus estudiantes resolver el ejercicio y determinar entre estas fracciones cuál o cuáles podrían ser fracciones equivalentes entre sí. Les recuerda que en caso de duda pueden leer en la pizarra la definición.

FRACCIONES EQUIVALENTES

- A. Anota las fracciones equivalentes a la fracción dada en cada caso tomando como unidad cada uno de los rectángulos y luego colorea las tortas fraccionarias y las figuras rectangulares de acuerdo a la fracción correspondiente.



$$\frac{1}{3} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$



$$\frac{1}{2}$$

=

—

=

—

=

—

=

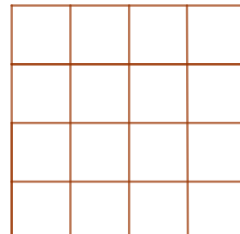
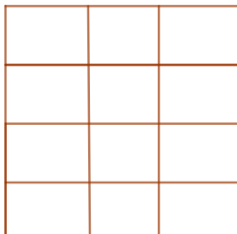
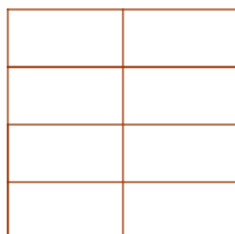
—

=

—

=

—



$$\frac{1}{4}$$

=

—

=

—

=

—

B. Para obtener fracciones equivalentes basta con multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número. Halla la fracción equivalente a la dada expresando el resultado.

$$\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \text{—}$$

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \text{—}$$

$$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \text{—}$$

$$\frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \text{—}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{5} = \text{—}$$

$$\frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \text{—}$$

2. Luego de leer la situación planteada, analiza la gestión de la Prof. Eva respondiendo las siguientes interrogantes:

- ¿Consideran que con la explicación dada a los estudiantes comprenderán las fracciones equivalentes?
- ¿Tu enseñanza es parecida a la de la Prof. Eva?
- ¿Si Ud. fuera la Prof. Eva, como lo haría?
- ¿Qué recomendación le darías a la Prof. Eva?

Parte 2 (20 minutos).

3. Escribe en una tarjeta:

- ¿Qué significa que una fracción sea equivalente a otra?
- Las características que debe presentar una fracción para que sea equivalente a otra. Utilizar una de las figuras que aparece en la tarea de los estudiantes para explicar.

Propuesta didáctica

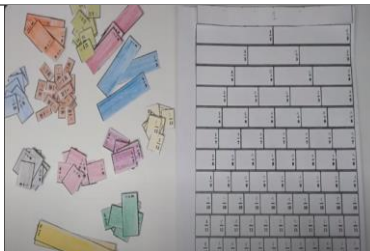
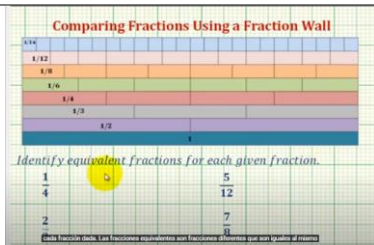
Tarea y trabajo en grupos (40 minutos): Se inicia la tercera sesión, recordando la representación realizada en la sesión anterior. Se solicita a cada profesor conformar equipos de trabajo y que elijan un material para representar con sus pares algunas fracciones en uno de los materiales: el Numicon o Muro de fracciones. Los profesores comentan su experiencia al representar las fracciones propias e impropias.

Luego de retroalimentar y fijar esta representación se presenta la primera guía de trabajo (

Anexo 3A) para analizar una situación de enseñanza de un contenido matemático. Al término de este análisis se propone la lectura de la segunda parte de la tarea.

Plenaria (20 minutos): Se invita a los equipos de trabajo que socialicen las repuestas a cada actividad y sus puntos de vista sobre la situación vivida por ellos al analizar la enseñanza de la Prof. Eva.

Información teórica y trabajo en equipo (30 minutos): A modo de refuerzo se facilita dos vídeos explicativos de las equivalencias de fracciones representados en el Muro de fracciones y uno en el Numicon. Los profesores pueden seleccionar uno de los videos del Muro de fracciones para comprender la equivalencia de fracciones.



<https://acortar.link/cBI6TF>

<https://acortar.link/jCvGOx>

<https://youtu.be/osC2Oqk8Uuo>

Después de observar los videos se solicita a los profesores que utilicen los materiales: Muro de fracciones y Numicon para representar las fracciones equivalentes que la Prof. Eva presentó a sus estudiantes. Las tarjetas fraccionarias también son utilizadas en la representación.

Reflexión y cierre (20 minutos): Seguidamente, para culminar, la formadora solicita a cada profesor el procedimiento de representación de las equivalencias de fracciones y su experiencia haciéndolo en el Muro de fracciones y el Numicon. En plenaria se socializa los diferentes puntos tratados en esta sesión:

1. *La representación de las equivalencias de fracciones:* resulta más dinámico y comprensible utilizando estos materiales, en el caso del Muro de fracciones incluso se puede usar una regla para identificar más rápidamente la equivalencia; así, por ejemplo, la equivalencia de $\frac{1}{2}$ usando una regla te indica que son 2 veces un $\frac{1}{4}$, es decir $\frac{2}{4}$, a su vez siguiendo la dirección de la regla puede ser también $\frac{3}{6}$. En el Numicon sucede lo mismo es ir aumentando las fichas Numicon al representar la fracción, es decir se representa $\frac{1}{2}$ y se une a otra ficha $\frac{1}{2}$ y se cuenta las partes tomadas que son 2 y el total de orificios que sería 4, por tanto $\frac{2}{4}$.
2. *Las interpretaciones que promueve cada material manipulativo:* la representación de equivalencia de las fracciones en el Muro de fracciones favorece la interpretación parte-todo y medida de la fracción, mientras que el uso del Numicon enfatiza la interpretación de la fracción como razón. Es decir, se debe tener en cuenta la cantidad tomada en relación al total, por ejemplo, se elige una placa de 2 agujeros se tapa uno, se toma otra placa de 4 agujeros se tapa 2 y así sucesivamente; entonces se infiere que en este caso siempre será la mitad del todo la parte tomada. La razón es uno es a dos como dos es a cuatro.
3. *La importancia de analizar la práctica docente:* con el análisis de la enseñanza de una profesora presentada permite una reflexión de las prácticas llevadas a cabo en aula y a partir de allí tomar decisiones que lleven a mejorar la gestión del profesor a la hora de planificar el desarrollo de los contenidos matemáticos y por ende el aprendizaje de los estudiantes.
4. *La inclusión de materiales didácticos* requiere de una buena planificación para su uso y puede ser un recurso que ayuda a captar la atención de los estudiantes y a que comprendan conceptos que quizás les resulte difícil entender. En este caso, el uso de estos materiales el Muro de fracciones y el Numicon permite trabajar un objeto matemático (equivalencia de fracciones) desde algo concreto, manipulable para luego representarlo numéricamente. Esta es una ventaja en el momento de desarrollar temas abstractos como las fracciones.

Anexo de la tarea

Anexo 3A. Guía de trabajo.



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 1¹⁰

Representación de equivalencia de fracciones en el Numicon y del Muro de fracciones
Nombres: _____

Fecha: _____

Parte 1 (20 minutos).

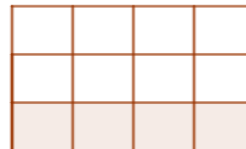
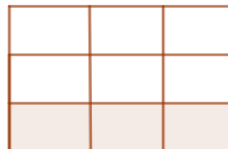
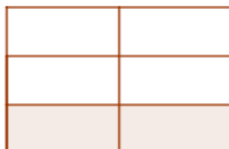
- Lee el siguiente caso.
- La Prof. Eva, catedrática de Matemáticas llega al salón y pone como título Equivalencia de fracciones en la pizarra y escribe la definición:
“Una fracción es equivalente a otra cuando amplificamos y simplificamos por el mismo número” luego presenta este ejercicio y solicita a sus estudiantes resolver el ejercicio y determinar entre estas fracciones cuál o cuáles podrían ser fracciones equivalentes entre sí. Les recuerda que en caso de duda pueden leer en la pizarra la definición.

FRACCIONES EQUIVALENTES

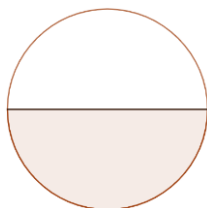
- A. **Anota las fracciones equivalentes a la fracción dada en cada caso tomando como unidad cada uno de los rectángulos y luego colorea las tortas fraccionarias y las figuras rectangulares de acuerdo a la fracción correspondiente.**



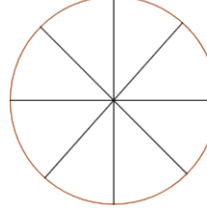
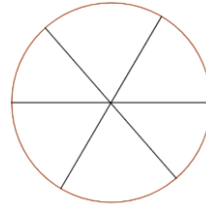
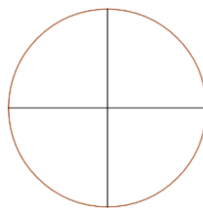
$\frac{1}{3}$



= — = — = —



$\frac{1}{2}$



= — = — = —

¹⁰ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

$$\frac{1}{4} = \quad = \quad = \quad = \quad$$

B. Para obtener fracciones equivalentes basta con multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número. Halla la fracción equivalente a la dada expresando el resultado.

$$\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \quad \quad \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \quad \quad \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \quad$$

$$\frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \quad \quad \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \quad \quad \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \quad$$

1. Luego de leer la situación planteada, analiza la gestión de la Prof. Eva respondiendo las siguientes interrogantes:

- ¿Crees que con la explicación dada los estudiantes comprenderán las fracciones equivalentes? (Explica tu respuesta detalladamente).

- ¿Cómo se parece tu forma de enseñar a la de la Prof. Eva? (Describe brevemente tu enfoque en la enseñanza de fracciones).

- Si fueras la Prof. Eva, ¿cómo lo harías diferente? (Proporciona sugerencias sobre cómo mejorar la explicación de fracciones equivalentes).

- ¿Qué recomendación le darías a la Prof. Eva para que los estudiantes comprendan mejor las fracciones equivalentes?

Parte 2 (20 minutos).

Escribe en una tarjeta:

a. El concepto que tienes de la equivalencia de fracciones.

b. Las características que debe presentar una equivalencia de fracciones utilizan una de las figuras que aparece en la tarea de los estudiantes para explicar.

c. ¿Cómo te ayudaron los materiales manipulativos a comprender mejor las fracciones equivalentes?

d. ¿Crees que estos materiales mejorarían el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

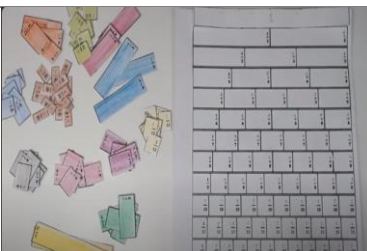
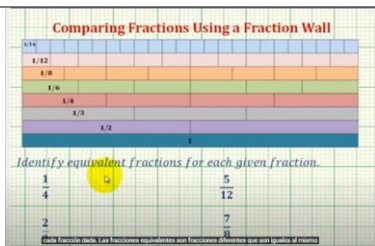
Información adicional y tarea 3¹¹

Representación de equivalencia de fracciones en el Numicon y con el Muro de fracciones

Nombres: _____

Fecha: _____

1. Ingresa en estos enlaces y observa los vídeos explicativos referentes a la representación de equivalencias de fracciones en los materiales didácticos: Muro de fracciones y Numicon. Puedes seleccionar uno de los videos explicativos de la equivalencia en el Muro de fracciones.



<https://acortar.link/CBl6TF>

<https://acortar.link/jCvGOx>

<https://youtu.be/osC2Oqk8Uuo>

2. Utiliza los materiales: Muro de fracciones y Numicon para representar las fracciones equivalentes que la Prof. Eva presentó a sus estudiantes o recurre a las tarjetas fraccionarias utilizadas en la representación. Explica el procedimiento.

¹¹ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

4.1.4. Tarea 4. División con el Numicon y con el Muro de fracciones (partitiva y cuotitiva)

Objetivo:	Diferenciar entre la interpretación de la división partitiva y la cuotitiva de fracciones, mediante el uso de materiales manipulativos: el Muro de fracciones o Numicon, para mejorar la comprensión del significado de la división con fracciones.
Tiempo:	120 a 150 minutos
Materiales:	Numicon Muro de fracciones y tarjetas fraccionarias Hojas blancas, marcadores, proyector.
Descripción de la actividad:	La tarea propuesta pretende que los profesores interpreten dos significados de la división con fracciones, la partitiva y la cuotitiva con el uso de materiales manipulativos: el Muro de fracciones o el Numicon. Se presenta algunas producciones de los estudiantes y se analiza el procedimiento realizado para resolver cada tarea. Los profesores identifican los errores y aciertos de los estudiantes e intentan justificar cada caso. Se realiza una explicación de las dos interpretaciones de la división (partitiva y cuotitiva). Los profesores presentan sus conclusiones para identificar los significados de la división analizados en esta sesión y demuestran cómo lo pueden resolver con los materiales didácticos: Muro de fracciones y el Numicon.

Tarea o situación

Parte 1: (20 minutos)

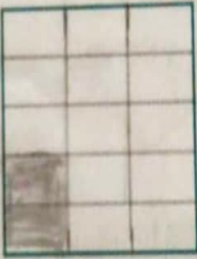
1. Observa las siguientes actividades realizadas por un estudiante referente al contenido división con fracciones.

Figura 1

Problema de división de fracciones

2. Representa el problema utilizando un gráfico. Luego, halla la solución.

En la casa de Gustavo comen $\frac{2}{5}$ kg de pescado en 3 días. Si comen la misma cantidad diariamente, ¿cuánto consumen por día?



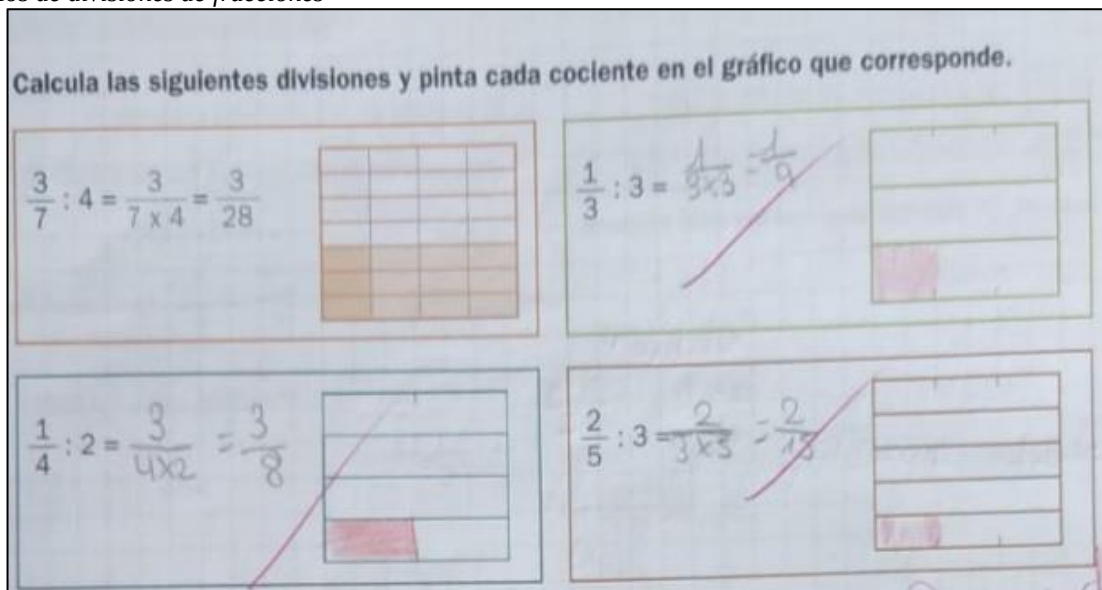
$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$

Rta = consumen $\frac{2}{15}$ por día

Nota. Facsímil del libro Matemática 7.º grado. Fundación Alianza (2000, p. 45).

Figura 2

Ejercicios de divisiones de fracciones



Nota. Facsímil del libro Matemática 7.º grado. Fundación Alianza (2000, p. 52).

2. Con respecto a ambas imágenes describe:

- A. El procedimiento para llegar a la respuesta, en cada caso.
- B. Si hay errores en las respuestas dadas.
- C. ¿Cómo se está interpretando la división entre fracciones?
- D. ¿Se puede aplicar esta interpretación para dividir fracción entre fracción?

Parte 2. (20 minutos)

1. En cada grupo de trabajo elijan un problema. Resuélvanlo con ayuda de los materiales didácticos y expliquen el procedimiento utilizado. Compartan sus respuestas y las conclusiones a las que llegaron.

Problema 1. "¿Qué sucede si tienes $\frac{3}{4}$ de *chipa guasu* y quieres repartirlo equitativamente a las 2 personas? ¿Cuánto de *chipa guasu* le tocará a cada una?"

Problema 2. Ana tiene $\frac{3}{4}$ gr de queso y quiere dividirlo en paquetes de $\frac{1}{3}$ gr. ¿Cuántos paquetes de $\frac{1}{3}$ gr obtendrá?

Utiliza uno de los materiales: el muro de fracciones o en el Numicon para resolver una de las situaciones de división anterior.

Propuesta didáctica

Tarea y trabajo en grupos (40 minutos): Se inicia la sesión, recordando todo el proceso que se ha desarrollado durante los encuentros anteriores y si consideran importantes para mejorar la gestión del profesor en el aula. Se propone trabajar en parejas y para ello se distribuye la primera parte de la guía de trabajo (ver **Anexos 4A**). La cuál deben resolver por escrito en los equipos conformados en el tiempo establecido.

Luego se les entregará la segunda parte de la tarea en otra guía de trabajo (ver **Anexo 4B**

). Los profesores leen el problema y resuelven por equipo utilizando los materiales, un problema para cada pareja, explican el procedimiento utilizado. Los profesores mencionan las diferencias en cuanto a los procedimientos para resolver cada problema. Se llega a la conclusión de que hay más de una interpretación de la división con fracciones.

Plenaria (30 min): La formadora invita a los distintos equipos a socializar las respuestas que dieron en los equipos previos.

Información teórica y trabajo en equipos (30 minutos): Se les pide a los profesores, reunidos en los mismos equipos, que realicen lo siguiente de acuerdo con el documento que se entregue, sobre la interpretación de la división entre números fraccionarios. (Ver

Anexo 4C y Anexo 4D). Los profesores pueden recurrir a los siguientes links para observar la resolución de la división con fracciones utilizando el Muro de fracciones y el Numicon.



<https://youtu.be/Qx1JQM0hNss>

<https://youtube.com/shorts/DHrcSaSXChk?feature=share>

1. Lee la información referente a la interpretación de la división entre números fraccionarios.
2. ¿Qué significa la interpretación cuotitiva y partitiva?
3. Cada grupo prepara su interpretación apoyada en uno de los materiales: Muro de fracciones o Numicon.
4. Resuelven otros problemas por equipo, como, por ejemplo:
 - Se quiere repartir $\frac{1}{3}$ de torta entre 4 niños ¿Qué parte de la torta le corresponde a cada niño?
 - Si tengo $1\frac{1}{2}$ litro de jugo y quiero depositarlo en botellas de $\frac{1}{2}$ litro ¿Cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro necesito?

Reflexión y cierre (20 min):

En la plenaria, se invita a los participantes a reflexionar sobre los aprendizajes obtenidos durante la sesión, centrándose en estos aspectos:

1. *Relevancia del uso de materiales manipulativos:* se reconoce la utilidad del Numicon y el Muro de fracciones para facilitar la comprensión de las dos interpretaciones (partitiva y cuotitiva) de la división entre fracciones. Se identifica que la división partitiva se puede utilizar ambos materiales, pero en la división cuotitiva resulta más práctico el Muro de fracciones.
2. *Interpretaciones de la división:* se reflexiona sobre las distintas interpretaciones que pueden surgir de la división entre fracciones, se enfatiza la importancia de diferenciar entre la interpretación de la división partitiva y cuotitiva.
3. *La interpretación partitiva de la división entre fracciones:* se deduce que para identificar esta interpretación se debe tener en cuenta las siguientes características, el dividendo puede ser menor que el divisor, el divisor es un número entero, el cociente es una fracción y es menor o igual que el dividendo, pero menor que el divisor. La acción que se realiza es repartir, distribuir, dividir las partes de un todo.
4. *La interpretación cuotitiva de la división entre fracciones:* para resolver este tipo de interpretación es necesario tener en cuenta las siguientes características, el dividendo debe ser mayor que el divisor, puede ser una fracción o un número natural, el cociente puede ser una fracción o un número natural. La acción que se realiza es medir.

Anexos



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 4¹²

División con el Numicon y con el Muro de fracciones (partitiva y cuotitiva)

Nombres: _____

Fecha: _____

Parte 1 (20 minutos)

1. Observa las siguientes actividades realizadas por un estudiante referente al contenido división entre fracciones.

Figura 1

Problema de división de fracciones

2. Representa el problema utilizando un gráfico. Luego, halla la solución.

En la casa de Gustavo comen $\frac{2}{5}$ kg de pescado en 3 días. Si comen la misma cantidad diariamente, ¿cuánto consumen por día?



$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 1} = \frac{6}{5}$

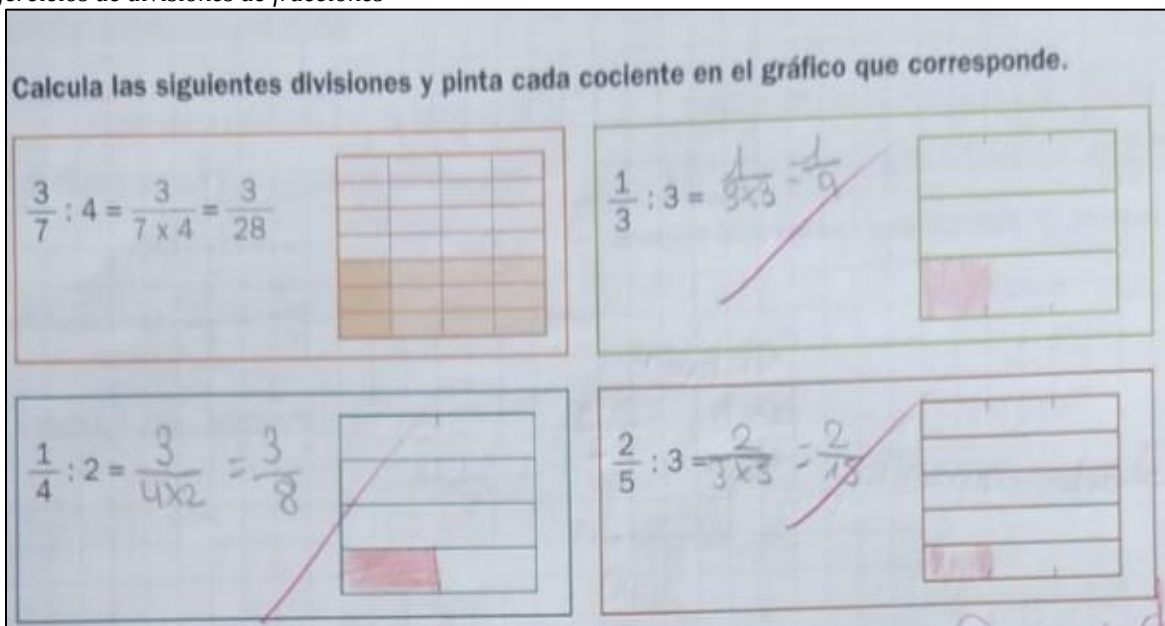
Rta = consumen $\frac{6}{5}$ por día

Nota. Facsímil del libro Matemática 7.^{mo} grado. Fundación Alianza (2000, p. 45).

¹² Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

Figura 2

Ejercicios de divisiones de fracciones



Nota. Facsímil del libro Matemática 7.^{mo} grado. Fundación Alianza (2000, p. 52).

2. Con respecto a ambas imágenes describe:

a. El procedimiento para llegar a la respuesta, en cada caso.

b. Si hay errores en las respuestas dadas.

c. ¿Cómo se está interpretando la división entre fracciones?

d. ¿Se puede aplicar esta interpretación para dividir fracción entre fracción?

Anexo 4B



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
**DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ**
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Tarea 4¹³

División con el Numicon y con el Muro de fracciones (partitiva y cuotitiva)

Nombres: _____

Fecha: _____

Parte 2 (20 minutos).

Utiliza uno de los materiales: el muro de fracciones o en el Numicon para resolver una de estas situaciones sobre la división. Explica el procedimiento utilizado. Puedes trabajar en parejas.

a. **Problema 1.** "¿Qué sucede si tienes $\frac{3}{4}$ de *chipa guasu* y quieres repartirlo equitativamente a las 2 personas? ¿Cuánto de *chipa guasu* le tocará a cada una?"

b. **Problema 2.** Ana tiene $\frac{3}{4}$ gr de queso y quiere dividirlo en paquetes de $\frac{1}{3}$ gr. ¿Cuántos paquetes de $\frac{3}{4}$ gr obtendrá?

¹³ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado "División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales" (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

Anexo 4C Información adicional



MINISTERIO DE
**EDUCACIÓN
Y CIENCIAS**
PARAGUAY

PARAGUÁI
**TEKOMBO'E
HA TEMBIKUAA**
MOTENONDEHA



BECAS
DON CARLOS
ANTONIO LÓPEZ
Excelencia es futuro

COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

Información adicional sobre la interpretación de la división entre números fraccionarios de la tarea 4¹⁴.

Interpretación de la división entre números fraccionarios

En el conjunto de los números fraccionarios la división puede ser interpretada de diversas maneras. Según Contreras (2012), los significados de la división con números fraccionarios son extensiones del significado de la división entre números naturales. Se describen a continuación la sistematización realizada por este autor:

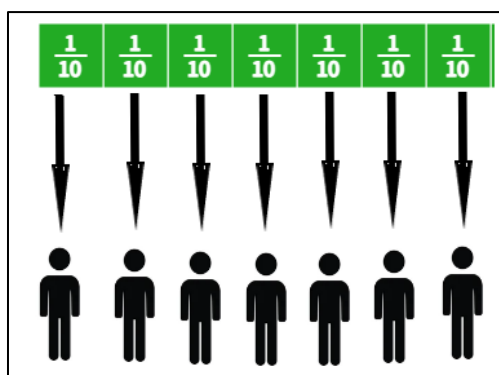
Partitiva: En esta interpretación de la división, el objeto se divide en partes del mismo tamaño, para poder repartir el dividendo en lo que enuncie el divisor, el dividendo puede ser menor al divisor. La división partitiva implica repartir una parte de un todo en partes iguales. Otras características a tener en cuenta en esta interpretación es que el divisor debe ser un número natural y el cociente o resultado es una fracción menor que el dividendo y el divisor. Ejemplo: Se tiene $\frac{7}{10}$ de *chipa guasu* y se quiere repartir a 7 niños ¿Cuánto le corresponde a cada niño? Para resolver este problema, se hace: $\frac{7}{10} \div 7 = \frac{1}{10}$. También se podría hacer la pregunta: ¿Qué parte de la *chipa guasu* le corresponde a cada niño?

La respuesta para ambas preguntas es $\frac{1}{10}$ de *chipa guasu*. Ver **Figura 1**

La primera pregunta es de reparto sin especificar el tipo de objeto a dividir y se centra en el cálculo abstracto sin ofrecer contexto adicional. En cambio, la segunda pregunta contextualiza el problema en un objeto específico: la *chipa guasu*, una comida típica. Esto ayuda a que los estudiantes visualicen el reparto de una porción de comida entre varios, lo cual puede facilitar la comprensión de la fracción resultante.

Figura 1.

Representación de la interpretación de la división partitiva



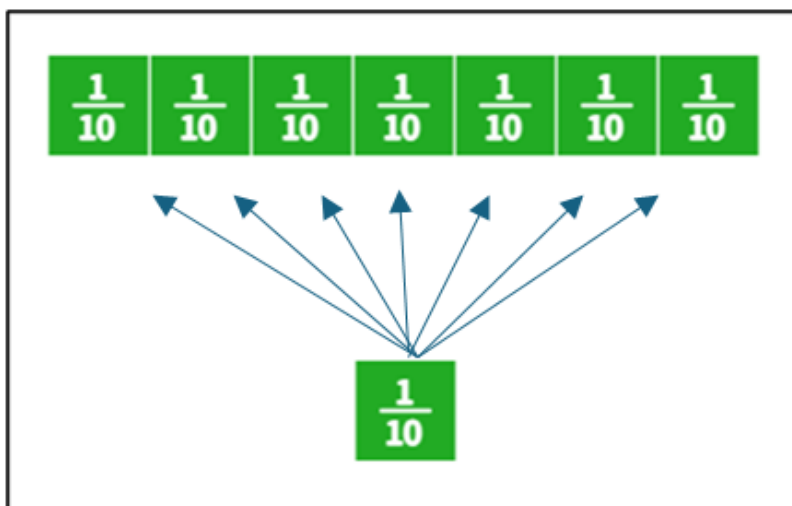
Nota. Elaboración propia

¹⁴ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

Cuotitiva o de medida: Esta interpretación se refiere a preguntarse cuántas veces cabe el divisor en el dividendo. El divisor se toma como unidad de medida del dividendo. Las condiciones que deben tener los términos de la división para interpretar la operación como cuotitiva son: el dividendo debe ser mayor que el divisor y puede ser número natural o número fraccionario, el cociente puede ser un número natural o una fracción. Ejemplo: Se quiere conocer cuántas veces cabe $\frac{1}{10}$ en $\frac{7}{10}$. Lo cual se representa con la división: $\frac{7}{10} \div \frac{1}{10} = 7$, porque $\frac{1}{10}$ cabe 7 veces en $\frac{7}{10}$, tal como se observa en la figura 2.

Figura 2

Representación de la interpretación de la división cuotitiva



Nota. Elaboración propia.

Inversión de la multiplicación: Esta interpretación trata de encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra parte, y la medida del producto. En el caso discreto del producto cartesiano se ejemplifica con casos de combinatoria que no se pueden extender a fracciones y en el caso continuo se ejemplifica con problemas de área rectangular. Ejemplo:

Si el área de un rectángulo coloreado mide $15/35$ y la base mide $5/7$, la altura del rectángulo medirá $15/35 \div 5/7 = 3/5$. (Contreras 2012)

Inversión del factor multiplicativo: Esta interpretación consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. Es decir, que se reduce el dividendo según el factor multiplicativo escalar por divisor dado. Ejemplo:

“Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$; y observaremos, que, si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor $\frac{2}{5}$, estaba reducida la operación á hacer dos veces menor el quebrado, lo que se consigue (Teor. 3ª) multiplicando su denominador por 2, de manera que $\frac{3}{8}$ sería el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sino por $\frac{2}{5}$, que es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este, debemos hacer aquel cinco veces mayor; lo cual se consigue (Teor. 2ª) multiplicando su numerador por 5; de manera que, ejecutándolo, tendré por cociente verdadero $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ ”(…) (Vallejo, 1813, p.120, citado por Contreras, 2012, p. 84)

Las características que presenta esta interpretación son: se reduce el denominador a lo que indica el divisor, por tanto, el dividendo es mayor que el divisor y el cociente, tanto el dividendo como el cociente pertenecen a la misma especie y el divisor constituye un factor multiplicativo.

Proporción de valor unitario desconocido: Esta interpretación es aplicada cuando existe una correspondencia no unitaria entre dos magnitudes, se busca hallar el valor unitario comprendido entre estas magnitudes. Es decir, se compara una magnitud con otra, corresponde a una proporción y se expresa $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$.

Ejemplo:

“Peso de la torta $\frac{3}{7}$ de la torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?” (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212, citado por Contreras, 2012, p. 117).

Proporción de valor unitario conocido: En este caso lo que se quiere conocer es el valor de la cantidad correspondiente a la primera magnitud. Conociendo el dividendo y el cociente se busca el divisor que guarda relación con el dividendo. Es decir, se busca un número que se encuentra con el dividendo en tal proporción como la unidad con el divisor $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$. Ejemplo:

“Paquetes. Se tiene una cuerda de $42 \frac{1}{2}$ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta $3 \frac{1}{2}$ metros?” (García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 17 citado por Contreras, 2012, p. 118)

Como se ha visto interpretar una división entre números fraccionarios requiere interpretar la operación y reconocer las características que presentan para realizar solo el procedimiento adecuado y responder a una de estas interrogantes: cuántas veces cabe **b** en **a**, si el dividendo debe ser mayor o menor con respecto al divisor, entonces los valores del cociente pueden adoptar un número natural o fracción (propia o impropia) entre otras.

En este trabajo de grado se toma las dos primeras interpretaciones de la división entre fracciones.

Referencia:

Benítez, A. (2024). *División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales*. [Tesis para Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Anexo 4D



COLEGIO NACIONAL DE SANTA TERESITA - CAAZAPÁ

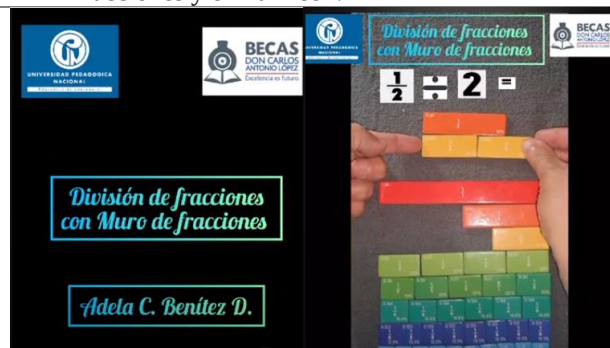
Tarea 4¹⁵

División con el Numicon y con el Muro de fracciones (partitiva y cuotitiva)

Nombres: _____

Fecha: _____

1. Lee la información referente a la interpretación de la división entre números fraccionarios.
2. Observa los siguientes videos explicativos sobre la resolución de la división con fracciones en el Muro de fracciones y el Numicon.



<https://youtu.be/Qx1JQM0hNss>



<https://youtu.be/qmkum17kxjQ>

3. Luego responde:
¿Qué significa la interpretación cuotitiva y partitiva?
4. Elabora un informe de la interpretación de la división con fracciones apoyada en uno de los materiales: Muro de fracciones o Numicon.
5. Resuelve estos problemas utilizando los materiales didácticos:
 - a. Se quiere repartir $\frac{1}{3}$ de torta entre 4 niños ¿Qué parte de la torta le corresponde a cada niño?

- b. Si tengo $1\frac{1}{2}$ litro de jugo y quiero depositarlo en botellas de $\frac{1}{2}$ litro ¿Cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro necesito?

¹⁵ Esta tarea fue diseñada en el marco del desarrollo del trabajo de grado “División entre números fraccionarios con el Muro de fracciones y el Numicon: tareas profesionales” (2024). Gracias al convenio UPN – BECAL, Maestría de la Docencia de la Matemática, autora Adela Benítez y bajo la asesoría de la Mg. Lyda Mora

Conclusiones

A continuación, se exponen las conclusiones del presente trabajo de grado, en torno a cuatro secciones. En la primera sección se describe el cumplimiento del objetivo general y las actividades que involucran las tareas propuestas, en la segunda se hace en relación con los alcances del diseño de tareas elaboradas. Posteriormente, en la tercera sección, se presentan reflexiones sobre la experiencia personal de la autora. Finalmente, algunas recomendaciones y perspectivas futuras en cuanto a la enseñanza de la división con fracciones.

5.1. Conclusiones relacionadas con los objetivos

Para el logro del objetivo general del presente trabajo de grado, inicialmente, se tuvieron que alcanzar los objetivos específicos planteados, en el primer objetivo se ha profundizado tanto en conceptos matemáticos como didácticos relacionados con el objeto de estudio: la división entre números fraccionarios representados mediante fracciones, así como en aspectos vinculados con la formación de profesores de matemáticas.

En este trabajo, la autora pudo distinguir claramente entre los conceptos de los números racionales y los números fraccionarios. Se corrigió la interpretación inicial de las fracciones como números en sí mismos. Este análisis permitió entender que las fracciones, al igual que las expresiones decimales, son únicamente representaciones simbólicas de los números fraccionarios. Así también, se exploró la historia y el origen de estos conjuntos y subconjuntos numéricos. Se interpretó que los números fraccionarios tienen diversas formas de representación: simbólica, gráfica y manipulativa que antes se desconocían, al igual que las distintas interpretaciones de las fracciones y de la división entre números fraccionarios.

Antes de emprender este estudio, el conocimiento sobre la simplificación y amplificación de fracciones era limitado, particularmente en cuanto a su relevancia dentro de la constitución de los números fraccionarios y racionales como clases de equivalencia. Este trabajo permitió comprender con mayor claridad que la elección del representante único, formado a partir de pares de números naturales, define al número racional o fraccionario propiamente dicho.

En cuanto a la formación de profesores de matemáticas, se destacó la relevancia de las tareas profesionales en formación continua como una herramienta esencial para su desarrollo profesional. La reflexión y el autoanálisis desempeñan un papel crucial, ya que permiten al docente evaluar su práctica, identificar errores y trabajar en su mejora. Este proceso fomenta un enfoque más crítico y constructivo hacia la enseñanza, incentivando la implementación de estrategias que optimizan su gestión en el aula.

Al principio se tenía la idea de que las tareas diseñadas para los profesores eran semejantes a las propuestas para los estudiantes. Sin embargo, se comprendió que estas deben ser diferenciadas, ya que las tareas para los profesores deben abordar cuestiones específicas de su práctica docente. Mientras que los estudiantes se centran en el aprendizaje de conceptos, los profesores necesitan tareas que les permitan reflexionar y mejorar sus métodos de enseñanza, particularmente en relación con los conceptos matemáticos del currículo y su aplicación en el aula.

Por ello, las tareas dirigidas a los profesores deben involucrar actividades que sean representativas de su rol, promoviendo la reflexión sobre su propia práctica docente. Esto se conecta con la competencia de mirar profesionalmente la enseñanza, que abarca tres destrezas fundamentales: reconocer las producciones de los estudiantes, interpretarlas y tomar decisiones informadas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Gracias al análisis de la literatura especializada, se pudo conocer a diversos autores e investigadores destacados en el campo de la Educación Matemática y permitió profundizar en conceptos fundamentales como los mencionados anteriormente, también se adquirió un bagaje cultural y académico enriquecedor con los siguientes referentes: Llinares y Sánchez (1997 con su obra de la editorial Síntesis; Vasco (1991; 2021) con sus producciones tituladas el Archipiélago fraccionario y el Zoológico Numérico; y Contreras (2020) y Márquez (2013) quienes aportaron de manera significativa a este trabajo con sus investigaciones alrededor de la división con fracciones. En cuanto a las tareas profesionales, los trabajos de Llinares (2011, 2013, 2019) y otros investigadores resultaron fundamentales para este estudio.

Respecto al objetivo de establecer relaciones entre los significados e interpretaciones de la división, se logró a través del uso de materiales manipulativos como el Muro de fracciones y el Numicon. Se analizó en qué medida cada material permite evidenciar las interpretaciones de la división con fracciones, concluyendo que el Numicon es adecuado exclusivamente para la interpretación partitiva, mientras que el Muro de fracciones es útil tanto para la interpretación de la división partitiva y cuotitiva.

Y el tercer objetivo, finalmente, pues se constituye, como en lo detallado, del objetivo general se lograron diseñar cuatro tareas profesionales dirigidas a docentes en ejercicio para fortalecer la enseñanza de la división de fracciones mediante el uso de materiales didácticos, como el Numicon y el Muro de fracciones. En este sentido, se considera, además, que las diversas actividades que contemplan las tareas elaboradas permiten enriquecer el conocimiento de los profesores de matemáticas en cuanto al uso de dichos materiales, ya que permitirán mejorar su conocimiento sobre la división de fracciones, y por ende, promover un aprendizaje más efectivo en los estudiantes, ya que, cada una de estas, ha sido estructurada para ofrecer un

enfoque práctico y reflexivo, facilitando así, que los docentes exploren nuevas estrategias de enseñanza.

Así también, se cree que las propuestas diseñadas permitirán mejorar la interpretación de los significados de la división con fracciones (partitiva y cuotitiva) y fomentar la habilidad de implementar métodos innovadores que capturen la atención de los alumnos, por lo cual, se espera que dichos docentes logren crear, además, ambientes de aprendizaje dinámicos y participativos, considerado esencial para el desarrollo académico de los educandos.

En este contexto, se cree que la primera tarea, enfocada al conocimiento del Numicon y el Muro de fracciones, permitirá manipularlos y explorarlos, y así los docentes podrán familiarizarse con estos materiales y abordar, posteriormente, la división con fracciones de manera más efectiva en el aula, al realizar ejercicios prácticos con ellos. Así mismo, se considera que la interacción con estos materiales podría tener un impacto significativo en la presentación de los contenidos, lo cual favorecerá una conexión más profunda con los conceptos matemáticos.

En cuanto a la segunda tarea, enfocada en la representación de fracciones propias e impropias y la tercera tarea, centrada en la representación de fracciones equivalentes, ambas utilizando el Numicon y el Muro de fracciones, se considera que permitirán a los educadores adquirir la habilidad para utilizarlos, ya que al manipular estos elementos, podrán observar la aplicabilidad de los conceptos matemáticos en situaciones prácticas, lo cual resultará esencial, pues posibilita que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda y significativa. Así mismo, se espera que los educadores, al incorporar estos materiales en sus prácticas de aula, logren despertar un mayor interés en sus alumnos, ya que la manipulación de materiales concretos puede favorecer el aprendizaje.

En la cuarta tarea se presentan problemas que permiten la interpretación y diferenciación de dos significados de la división con fracciones (cuotitiva y partitiva), usando materiales didácticos como el Numicom y el Muro de fracciones, lo cual se considera que facilitaría la comprensión de estos conceptos por parte de los docentes, quienes podrían implementarlos en sus clases. Así también, se fomentará la colaboración entre educadores para desarrollar problemas contextualizados que reflejen situaciones de la vida real y permita generar diversas perspectivas sobre cómo abordar los problemas de manera efectiva, enriqueciendo así el proceso de enseñanza-aprendizaje. De esta forma, se busca que los educadores se conviertan en facilitadores del conocimiento, guiando a los estudiantes a través de la resolución de problemas que despierten curiosidad y creatividad, lo cual es fundamental en el proceso educativo.

En conclusión, a través de estas cuatro tareas diseñadas se persigue no solo fortalecer la comprensión de la división con fracciones, sino también enriquecer la práctica pedagógica de los docentes al generar espacios de diálogo entre colegas, consolidando así una comunidad de maestros que aprenden juntos desde sus experiencias. Por lo anterior, en la implementación de esta propuesta, se espera que los educadores adquieran herramientas valiosas que les permitan ofrecer una enseñanza más efectiva y adaptada a las necesidades de sus estudiantes.

5.2. Conclusiones relacionadas con el diseño de las tareas

El proceso de diseño de las tareas educativas presentó una serie de desafíos que requerían una cuidadosa interpretación y selección de un modelo de propuesta de tareas y materiales didácticos que cumplieran los requerimientos para el logro de los objetivos. Desde el inicio, se hizo evidente la necesidad de comprender el concepto matemático a fondo para llevarlo a la enseñanza y adecuarlo al esquema de tareas planteados por García (2005).

Posteriormente, se analizó la conveniencia de los materiales, quedando seleccionados el Numicon y el Muro de fracciones. La selección no se limitó a considerar solo la pertinencia de los recursos en relación con los objetivos de aprendizaje, también fue necesario tener en cuenta la capacidad de los docentes para implementar estos materiales manipulativos en el aula. Por ende, se convirtió en un ejercicio de reflexión sobre las habilidades pedagógicas y la creatividad de los educadores para adaptar los recursos a su contexto específico.

Estas tareas buscan fomentar la adquisición del dominio sólido de la división con fracciones y sus conexiones, por parte de los profesores, como también incentivarlos para diseñar y aplicar estrategias de enseñanza que promuevan el aprendizaje significativo de las matemáticas, permitiendo el desarrollo profesional continuo, que les permita mantenerse actualizado con las mejores prácticas.

Por otra parte, la dificultad se intensificó al intentar equilibrar la teoría educativa con la práctica, lo que exigía una comprensión profunda de cómo cada recurso podía facilitar la enseñanza de conceptos complejos como la división de fracciones. Así, el diseño de tareas se transformó en una actividad de reflexión continua sobre las mejores prácticas educativas, con el objetivo de asegurar que las actividades propuestas no solo fueran innovadoras, sino también efectivas en el logro de los aprendizajes esperados.

Así también, se presentó cierta dificultad en el diseño del esquema para la utilización de los materiales seleccionados, puesto que, cada recurso educativo conlleva implicaciones específicas para su uso y es esencial que se considere cómo se integrarán en las dinámicas de enseñanza.

5.3. Relacionadas con la experiencia de la autora

A pesar de no ser profesora de matemáticas, se realizó a lo largo del trabajo un exhaustivo estudio y análisis que permitió comprender este tema de manera significativa, a través de la exploración de diferentes metodologías pedagógicas, gracias a las cuales se ha podido identificar herramientas que facilitan la enseñanza de conceptos complejos como la división de fracciones. En este sentido, el uso del Muro de fracciones y el Numicon ha demostrado ser un recurso novedoso e interesante para el desarrollo de las tareas propuestas.

Esta experiencia ha demostrado que, aunque la formación no sea formal en este ámbito, el interés y la dedicación hacia el aprendizaje son fundamentales para alcanzar un entendimiento profundo de temas desafiantes. Durante este proceso, se ha llegado a comprender que el dominio de un contenido matemático requiere un enfoque que vaya más allá de la teoría, por lo cual es fundamental integrar la práctica como un pilar esencial en el proceso de formación profesional, reconociendo la importancia de aprender haciendo para afianzar los conocimientos.

Al revisar la literatura existente y analizar diversas estrategias educativas, se ha podido comprender la enseñanza de la división con fracciones de manera más pertinente, pues ha permitido reconocer la importancia de crear experiencias de aprendizaje que fomenten la curiosidad y el razonamiento crítico de los docentes.

Asimismo, se ha entendido que la formación continua es esencial en el ámbito educativo y, como resultado, se fomentaría un desarrollo profesional que permitirá la interacción con otros educadores y la participación en comunidades de aprendizaje, enriqueciendo la propia comprensión y contribuyendo a construir un entorno educativo más colaborativo.

5.4. Recomendaciones y perspectivas futuras

La división con fracciones, como concepto matemático, presenta diversas interpretaciones que pueden enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, debido a las limitaciones de tiempo en este trabajo, se centró exclusivamente en dos de sus significados (cuotitiva y partitiva). En este sentido, se recomienda a los educadores explorar las diferentes interpretaciones de la división, como su representación en contextos prácticos y cotidianos.

Adicionalmente, es fundamental considerar el uso de herramientas pedagógicas innovadoras para abordar la división, tal como como el Numicon y el Muro de fracciones, pues no solo hacen que el aprendizaje sea más accesible, sino que también fomentan la comprensión conceptual de los objetos matemáticos.

De igual manera, incorporar actividades que permitan a los docentes experimentar con estas herramientas de manera más dinámica, que posibilite un cambio en su forma de enseñanza. Además, se sugiere que se implementen proyectos colaborativos entre profesores, para trabajar en equipo y poder resolver problemas relacionados con la división, promoviendo así habilidades interpersonales y una mayor motivación hacia el aprendizaje.

En cuanto a las perspectivas futuras, existe un amplio campo de estudio que puede desarrollarse en relación con la enseñanza de la división. Investigaciones adicionales podrían enfocarse en el uso de estos materiales para interpretar los significados de la división no abarcados en este trabajo de grado, así como su relación con el algoritmo de la división con fracciones y otros temas relacionados con este objeto matemático.

Asimismo, se podrían explorar estrategias de enseñanza diferenciadas que atiendan a la diversidad de estilos de aprendizaje presentes en el aula. Con base a esta orientación, es posible avanzar hacia un modelo educativo más inclusivo, que responda a las necesidades de todos los

estudiantes, fortaleciendo así su comprensión de conceptos matemáticos fundamentales, logrados a partir de la formación continua de los docentes.

Referencias

- Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia*, 1(1), 1-14
- Aké, L. P., y López-Mojica, J. M. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de Matemáticas. *Páginas de Educación*, 13(1), 58-81.
- Archimedes Tube. (2021, 25 de octubre). *Las cortaduras de Dedekind* [Video].
<https://www.youtube.com/watch?v=WzkLZhgm63Q>
- Cermeño, O. y Pacheco, J. (2016). *Numicon, aprendizaje multisensorial*. [Tesis para grado académico Maestro/a de Educación Primaria, Universitat Jaume I]. Repositorio UJI.
- Contreras, M. (2004). Concepto de orientación educativa: diversidad y aproximación. *Revista iberoamericana de Educación*, 35(1), 1-22.
- Contreras, M (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. [Tesis Doctoral en Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia]. Repositorio de Tesis RODERIC.
- Corredor, D. y Gordillo, T. (2020). *Partetouille y Fractionary: juegos para la enseñanza de las fracciones*. [Tesis de grado para obtener el título de licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.
- De la Cruz, E. C. (2024). *Aritmoplano como material didáctico para el aprendizaje de fracciones en estudiantes del VI ciclo de una institución pública, Lima 2023*. [Tesis de maestría en Educación con Mención en Didáctica de la Matemática en la Educación Básica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. Repositorio de Tesis UNMSM.

- Díaz-Serrano, P. y Arnal-Palacián, M. (2020). Uso de Numicon en educación infantil con alumnos con necesidades educativas especiales. *Revista Pesquisa e Ensino*. V1. 1-22.
<https://doi.org/10.37853/pqe.e202030>
- Diccionario Etimológico Castellano En Línea. (2024, 30 de Abril). *Etimologías*.
<https://etimologias.dechile.net/?fraccio.n>
- Fernández, B. (2009). Materiales para la enseñanza de las fracciones. *Revista digital Innovaciones y Experiencias Educativas*, N.º 24.
https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/BLANCA_FERNANADEZ_1.pdf
- Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Revista Realidad y Reflexión*. 53(53), 40–60. <https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10887>
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Freudenthal (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. (Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001. <https://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf>
- García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, 17(2), 153-166.
- Gómez, B., Figueras, O., Contreras, M. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 43 - 63.

- Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*,14(3), 204-225.
- Huaranga, A. y Laurente, J. (2011). *El material didáctico “mate-fracc” en el aprendizaje de fracciones en alumnas del primer grado de secundaria de la institución educativa “María Inmaculada” de Huancayo*. [Tesis de grado para optar al título de licenciatura. Universidad Nacional del Centro del Perú]. Repositorio UNCP.
- Infobae. (2023, 10 de mayo). *Prueba PISA: Argentina mantiene bajos resultados, en medio de una caída global de aprendizajes*.
<https://www.infobae.com/educacion/2023/05/10/prueba-pisa-argentina-mantiene-bajos-resultados-en-medio-de-una-caida-global-de-aprendizajes/>
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., y Choy, BH (2018). Mejorar la percepción: uso de una trayectoria de aprendizaje hipotética para mejorar el discurso profesional de los futuros maestros de primaria. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14 (11), em1599. <https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>
- Jobbé-Duval, G. (24 de abril de 2021). Los folletos Herbinière-Lebert (1923): orígenes, competidores y actualidad. *Manosear*. <http://goupil.eklablog.fr/les-plaquettes-herbiniere-lebert-1923-origines-concurrents-et-enjeux-a-a207526198>
- Ley 1264 de 1998. (1998, 21 de abril). *Ley General de Educación*. Congreso de la República del Paraguay.
- Ley 5749 de 2017. (2017, 24 de enero). *Que establece la carta orgánica del Ministerio de Educación y Ciencias*. Congreso de la República del Paraguay.

<https://mec.gov.py/talento/cms/wp-content/uploads/2019/07/Ley-5749-2017-CartaOrganicaMEC.pdf>

- Li, Y. & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, 40, 833-843.
- Liñán, M., Barrera, V. y Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17, 41-63. DOI: 10.29257/EA17.2014.04
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. En Llinares, S. y Sánchez, M. *Fracciones*. (pp. 52-77). Editorial Síntesis.
- Llinares, S., Valls, J. y Roig, A. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basados en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20 (3), 59-82.
- Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 78, 5–16.
- Llinares, S. (2013). Conocimiento de matemáticas y Tareas en la formación de maestros. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*.
- Llinares, S. (2019, del 5 al 10 de mayo) Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. [conferencia]. *Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática*. Medellín, Colombia.
- Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. y Groenwald, C. (2020). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de*

- matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Luque, C., Jiménez, H. y Ángel, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables* (2ª ed.). Universidad Pedagógica Nacional
- Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2014). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Clasificar, medir e invertir* (2ª ed.). Universidad Pedagógica Nacional.
- Márquez, A. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones*. [Tesis de maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.
- Ministerio de Educación y Ciencias. (2014) *Actualización Curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media. Área Matemática*. MEC
- Ministerio de Educación y Ciencias. (2018). *Resultados Educativos. Informe Institucional*. MEC.
- Morcote, O. y Flores, P. (2001). Algunos Elementos del Conocimiento Profesional en la Planeación de Clases de Futuros Profesores de Secundaria (Un Caso: las Fracciones). *Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces* (Universidad de Sevilla), pp. 449-458
- Motrel, E. (2022). *Numicon como material manipulativo en la enseñanza-aprendizaje de fracciones*. [Tesis de grado en educación primaria. Universidad de Valladolid]. Repositorio documental.
- Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la*

- Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817.
- <https://core.ac.uk/download/pdf/132456907.pdf>
- Muñoz, J. (2002). *Aritmética de los números enteros*. UOC Papers.
- <https://www.bibliotecadigitaldebogota.gov.co/resources/2058500/>
- Salazar, J. (2021). *Recursos en el aula de clase para la enseñanza de fracciones en educación general básica media de las instituciones de educación públicas de la ciudad de Latacunga. (Ecuador)*. [Tesis de doctorado, Universidad de Extremadura]. Repositorio Institucional.
- Sánchez, A. (2015). *Numicon y el aprendizaje lógico matemático*. [Tesis de grado para licenciatura en educación infantil. Universidad de Valladolid]. Repositorio documental.
- <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/14481>
- Sfard, A. (1991). Sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academia Publisher.
- Terrones, B. (2023). *Los 3 países con la mejor educación de Latinoamérica, según prueba PISA: superan a Argentina y Brasil*. OECD. https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i-and-ii-country-notes_ed6fbcc5-en/paraguay_1abb8775-en.html
- Vasco, C. (1991). *El archipiélago Fraccionario* (pp. 31, 1-33). Universidad Nacional de Colombia.
- Vasco, C. (2021). *El zoológico numérico*. Universidad del Norte.
- Vigilio, C. (2015). *Estrategia didáctica para el uso de materiales concretos en la enseñanza de la matemática del VI ciclo EBR, Lima. (Perú)*. [Tesis de Maestría en Educación en la Mención de Investigación e Innovación Curricular, Universidad San Ignacio de Loyola,]. Repositorio Institucional.

Zarco, A. (s,f). *Historia del Papiro de Rhind y similares*. Universidad de Castilla-La Mancha

https://matematicas.uclm.es/ita-r/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf