Interpretación del Concepto de Derivada en Futuros Educadores Matemáticos que Inician el Ciclo de Profundización en la Universidad Pedagógica Nacional

Cristian David Ramos Obando

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2024

Interpretación del Concepto de Derivada en Futuros Educadores Matemáticos que Inician el Ciclo de Profundización en la Universidad Pedagógica Nacional

Cristian David Ramos Obando
Código:2019240044
CC: 1070968441

Trabajo presentado ante el departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:
MAURICIO BAUTISTA BALLÉN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2024

Agradecimientos

Quiero dar gracias en primer lugar a Dios por brindarme la oportunidad de ingresar a la Universidad Pedagógica Nacional, a estudiar la carrera de mis sueños y poder culminarla. También quiero agradecer a mi familia por su apoyo, y de manera especial a mi tío José Quijano por confiar en mí, brindarme su apoyo y amor incondicional en uno de los momentos más difíciles de mi vida, ayudándome a cumplir mi sueño y siendo un ejemplo tanto de ser humano como de profesional, inculcándome el amor y el respeto por la docencia. Agradezco también a mis padres por su paciencia, amor incondicional, sus consejos y apoyo durante estos años.

A mi asesor de trabajo de grado Mauricio Bautista por su dedicación, paciencia, consejos y ayuda en la elaboración de este trabajo y por haber sido mi asesor a lo largo de las prácticas donde me enseñó y contribuyó en mi formación docente. También quiero agradecer a los docentes de la Licenciatura en Matemáticas quienes me ayudaron a formarme como profesional en cada uno de los espacios académicos.

A mis amigos Jorge y Santiago quienes durante estos años me brindaron palabras de aliento en los momentos difíciles, por las risas y momentos vividos que hoy me hacen considerarlos mis hermanos. También quiero agradecer a Alejandro por haberme acompañado en este proceso y recordarme siempre poner mi vida en las manos de Dios.

Finalmente, quiero manifestar mi profundo agradecimiento a Diana Acero, quien ha sido uno de los apoyos más grandes en este camino. Gracias por estar en los momentos difíciles y en los momentos desafiantes. Por tus palabras sabias y alentadoras que siempre llegaron en los momentos difíciles, Tu compañía hizo de este proceso algo inolvidable.

TABLA DE CONTENIDO

FIGURAS

Pág.

TABLAS

Anexos

Introducción

La interpretación de la derivada es fundamental en el estudio del cálculo y las matemáticas en general. Para los Futuros Educadores Matemáticos [FEM], comprender y aplicar correctamente el concepto de derivada es esencial no solo para el éxito académico en términos del estudio de variabilidad, sino también para su desarrollo profesional. El presente trabajo de grado se centra en explorar rasgos del nivel de interpretación de la derivada en estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, mediante la aplicación de un cuestionario de diez preguntas diseñado específicamente para este propósito.

El primer capítulo aborda la importancia de indagar sobre los diferentes niveles de interpretación de la derivada y se presentan los objetivos planteados. En el segundo capítulo, se realiza un recorrido histórico del desarrollo de la derivada, destacando cómo evolucionó a lo largo del tiempo y reconociendo algunas concepciones desarrolladas por diversos matemáticos y filósofos de la época. Posteriormente, se analiza la relación de la derivada con puntos críticos, máximos y mínimos absolutos y el criterio de la primera derivada. También se presenta un marco didáctico que permite identificar algunos errores, dificultades y obstáculos relacionados con la derivada. Por otro lado, se destaca la importancia de los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] en lo relacionado con el desarrollo del pensamiento variacional siendo este una base fundamental en la compresión del concepto derivada. Además, se establecen diferentes representaciones de la derivada. Finalmente, se realiza una categorización de los niveles de interpretación de la derivada, según los niveles de interpretación de Piaget y García citados en Salazar et al., (2009) los cuales son: Intra, Inter y Trans. Cada uno estos se realizan teniendo presente las diferentes interpretaciones de la derivada.

El tercer capítulo describe la metodología empleada en el estudio, detallando los distintos momentos de su desarrollo: diseño, recolección de datos, análisis de datos y resumen de resultados. Como instrumento de recolección se realizó un cuestionario, el cual se aplicó a la población seleccionada que está compuesta por 11 estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que iniciaron su ciclo de profundización en el 2024-1

En el cuarto capítulo se presenta el cuestionario, construido a partir de la categorización realizada. Además, se explica la intención de cada pregunta, estableciendo su relación con la parte desarrollada en los capítulos anteriores. Además, se presenta una respuesta correcta o deseable de la pregunta con su justificación y finalmente se nombran los objetos matemáticos que aborda la pregunta.

En el quinto capítulo, se presenta un análisis de las preguntas destacando algunos hallazgos encontrados en las respuestas de los estudiantes, asociados a los rasgos de los niveles de interpretación. Finalmente, el capítulo seis presenta las conclusiones abordando algunos hallazgos que, como proyección del trabajo, son importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de la derivada, se resalta que en muchas situaciones se encuentra un mayor desarrollo de los procesos que involucran reglas de derivación, mas no la interpretación del concepto de derivada desde distintos contextos y representaciones.

1 Aspectos Generales

1.1 Justificación

El concepto de derivada juega un papel importante en el ámbito de la formación de Educadores Matemáticos, pues como lo anota Vásquez Astudillo (2021), esta aporta información concreta, se puede interpretar de diferentes maneras, se puede aplicar en situaciones habituales como el movimiento y la covariación y permite resolver algunos problemas que sin el uso de está no sería posible.

La compresión e interpretación de conceptos matemáticos como la derivada se pueden ver afectadas por falta de conocimientos previos propios del Cálculo, quizás los Educadores Matemáticos en formación de la Universidad Pedagógica Nacional pueden no ser ajenos a esto. Vale la pena también considerar que en la actualidad algunas dificultades se acentuaron por las dinámicas académicas que trajo consigo la pandemia, como lo menciona (Jara et al., 2021), la educación en Colombia disminuyó su "calidad" a raíz de la pandemia de COVID-19, lo cual ha generado un desafío sin precedentes para los docentes y estudiantes en todo el mundo, quienes han tenido que enfrentar dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje debido a la transición a modalidades de educación en línea o híbridas.

Durante los semestres 2020-1, 2020-2, 2021-1, 2021-2, las clases de la Licenciatura de Matemáticas, en su mayoría, se desarrollaron en modalidad virtual, generando en ocasiones dificultades en algunos docentes y estudiantes en cuanto al uso de herramientas tecnológicas y llevando a que, en muchos casos, no se desarrollarán todos los planes curriculares establecidos para cada uno de los espacios académicos. Esto pudo interferir en el desarrollo de conocimientos necesarios y propios del quehacer docente en matemáticas, pues es posible que las temáticas que no se abordaron en el aula no se hayan retomado en cursos posteriores.

Es importante mencionar que el enfoque que dan al manejo de la derivada muchos de los futuros educadores matemáticos, puede tener incidencia en la compresión e interpretación de dicho concepto. Un ejemplo de esto es el mencionado por (Salazar et al., 2009) donde la compresión de derivada se puede ver limitada a un proceso netamente algorítmico o a una dependencia relacionada entre pendiente de la recta tangente y una función.

Según (Sierpinska 1985, Cantoral 1988, Vinner 1992, citados por Dolores, 1998), algunas de las consecuencias de la compresión desarrollada por los futuros educadores matemáticos, pueden llevar al desarrollo moderado de procedimientos algebraicos. Se espera que, al buscar un estudio de diferentes concepciones de la derivada, el estudiante obtenga un conocimiento donde “el saber” y “el hacer” permitan una compresión de la derivada evitando caer en un conocimiento desarrollado por la memorización que con el tiempo puede ser olvidado, o jamás identificados en otros contextos diferentes.

Por otro lado, el desarrollo de la compresión de la derivada por medio de la geometría según Cantoral (1988, citado en Dolores, 1998), puede generar en los estudiantes una compresión limitada llevando con esto a un obstáculo, por ejemplo, en el paso de una concepción global a una local. También puede incidir en la compresión, como lo menciona (Orton 1977, citado por Dolores C. 1998), la dificultad para interpretar la derivada a partir de sucesiones de rectas secantes.

Para evidenciar cuándo los futuros Educadores Matemáticos han desarrollado o no compresión de la derivada, como lo mencionan (Sierpinska 1992, Jungk 1977 citados por Dolores C, 1998) algunos aspectos para tener en cuenta para caracterizar la interpretación del concepto son: el reconocer, interpretar y utilizar las diferentes simbologías, identificarla en diferentes contextos permitiendo la resolución de problemas y utilizarla en aplicaciones generando una red de conocimiento con otros campos.

A partir de los elementos presentados, es pertinente indagar acerca de la interpretación del concepto de derivada que desarrollaron los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional que iniciaron el ciclo de profundización en el semestre 2024 -1.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Explorar la interpretación del concepto de derivada en los Futuros Educadores Matemáticos que iniciaron el ciclo de profundización en la Universidad Pedagógica Nacional 2024-1.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Desarrollar un marco conceptual para identificar y describir distintas interpretaciones del concepto de derivada.
2. Construir y aplicar un cuestionario que permita determinar algunos rasgos de los niveles de interpretación del concepto de derivada.
3. Sistematizar y realizar un análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario.

2 Marco de Referencia

En el desarrollo de este capítulo se presenta un recorrido histórico de la evolución de la derivada, las definiciones y conceptos que influenciaron en las diferentes interpretaciones de la derivada; primero, se hace una revisión de diferentes aportes de los matemáticos en el desarrollo de esta, posteriormente se expone un marco matemático el cual evidencia conceptos, definiciones, propiedades de la derivada, objetos matemáticos asociados a ella y por último; se desarrolla un marco didáctico abordando cómo el desarrollo del pensamiento variacional y las diferentes interpretaciones de la derivada pueden influir en el aprendizaje de la misma.

2.1 Marco Histórico

La derivada es un concepto matemático que aporta a otras ciencias, dado que permite realizar estudios de cambio y variación, de optimización, la modelación de fenómenos naturales entre otros; por tal motivo es indispensable conocer cómo en diferentes momentos de la historia hubo aproximaciones o resultados que permitieron la evolución de concepto de derivada. Por otro lado, resulta relevante revisar cómo en estos diferentes momentos de la historia se crearon diferentes interpretaciones de la derivada, según la necesidad de cada momento o el tipo de utilidad (necesidad) que se estaba dando a las matemáticas.

2.1.1 Evolución del Concepto de Derivada

De acuerdo con Grabinet (1983), (citado por Contreras et al., 2000) se reconoce que a lo largo de la historia existen cinco (5) etapas en el desarrollo del concepto de derivada entre las que encontramos: *"*problemas que conducen a la derivada, la derivada como útil, la derivada como objeto de conocimiento, exploración y desarrollo, por último, definición de la derivada" (p.113)

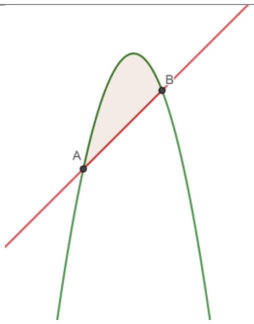
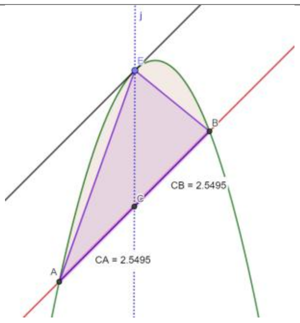
1° etapa: problemas que conducen a la derivada:

Es conocido que, durante la primera etapa del desarrollo de las matemáticas, los estudios se centraron en los objetos geométricos, donde se resaltan nombres de matemáticos y filósofos como: Euclides, Diofanto, Arquímedes, Tales de Mileto, Pitágoras entre otros que realizaron diferentes aportes.

Por su parte, Euclides aportó al desarrollo de la derivada en el siglo IV a.C. en su libro “Elementos”, donde realizó el estudio de objetos geométricos (punto, recta, circunferencia, etc.), los cuales dieron paso a posteriores desarrollos del cálculo. Para el Siglo III a.C. los aportes de Arquímedes en el cálculo de área y volúmenes fueron una primera visión de lo que se conoce hoy en día como límites, integración y derivadas. El principio de Arquímedes consistía en calcular el área cerrada por una parábola y una recta, permitiendo ser “el precursor de los métodos infinitesimales” Sierra y Ortega (1998).

Tabla 1.

Ilustración del principio de Arquímedes: Dada una parábola y una recta que la interseca en dos puntos, el área encerrada es 4/3 del área del triángulo inscrito.

	
Se traza una parábola y una recta que interseca en A y B a la parábola	Para trazar el triángulo se seleccionan tres puntos. Los puntos A y B pertenecen a la cuerda de la parábola y el tercer punto (E) es el punto de la parábola, por donde se traza la recta tangente que a la vez es paralela a la cuerda AB

Para este mismo siglo, el matemático Apolonio de Pérgamo, con la elaboración de su texto *"cónicas de Apolonio de Pérgamo"* en el libro II, desarrolló aportes de las cónicas. Además, creó la definición de tangente a una cónica, definiéndola de la siguiente forma: *"*la recta trazada por el extremo de un diámetro paralelamente a las ordenadas a este" como lo menciona Alarcón et al., (2005) en su texto "*El método de las tangentes de Fermat*". Dicho aporte de Apolonio contribuyó con la evolución de la definición de tangente creada anteriormente por Euclides para el círculo presentada en los *Elementos de Geometría* entre la mencionada por Alarcón et al., (2005) se encuentra:

Definición III-2: se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no la corta (p.101)

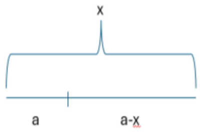
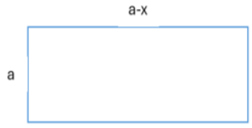
2° etapa: la derivada como útil

El desarrollo del cálculo diferencial tiene sus raíces en varios avances matemáticos previos. Con la evolución de las matemáticas y la aparición del álgebra, surgieron aportes de matemáticos como los realizados por Diofanto de Alejandría quien aportó a la aritmética con estudios que buscaban la solución de ecuaciones algebraicas, también conocidas como "ecuaciones diofánticas". Mientras, Al-kuarismi aportó al álgebra desarrollando un lenguaje simbólico de las matemáticas haciendo uso de la clasificación de "tesoro, raíz y número" ayudando a facilitar futuras representaciones matemáticas. En el año 1591 el matemático Vieta conduce a la separación de dos líneas de las matemáticas las cuales fueron la geometría y el algebra simbólica. Permitiendo tener una comprensión general y eficaz de simbología como (x^3), resultando este aporte esencial para el desarrollo posterior del cálculo.

Para el siglo XVII, los matemáticos Fermat y Descartes, independientemente crearon lo que hoy se conoce como Geometría Analítica, sentando las bases para el estudio de funciones y curvas. En particular, Fermat, en su búsqueda de realizar el cálculo de máximos y mínimos, ideó un método para encontrar puntos extremos sin una noción formal de límites. Según Boyer (1986) citado por Sierra y Ortega (1998),su método fue una de las primeras semillas de la noción de límite y derivada, al estudiar cómo dividir un segmento de longitud x en dos segmentos a y $a - x$, de manera que su producto fuera un máximo . A continuación, se muestra el proceso aritmético presentado por Sierra y Ortega (1998) y una representación gráfica adaptada de la presentada por Contreras et al., (2000):

Tabla 2.

Representación aritmética y gráfica del problema de Fermat

Aritmético	**Gráfico**
Longitudes de los dos segmentos x y $a - x$ Área máxima del rectángulo $x(a - x) = ax - x^2$ Para analizar cómo cambia la función x se remplaza por $x + e$ $a(x + e) - (x + e)^2$ Simplificando se obtiene $ax + ae - x^2 - 2xe - e^2$ Para encontrar el máximo se pone como condición $ax + ae - x^2 - 2xe - e^2 \ < ax - x^2$ Por lo tanto, restando $ax - x^2$ se obtiene $ae - 2xe - e^2 \cong 0$ $a \cong 2x + e$ Como e es un valor muy pequeño $a \cong 2x$ Lo que implica que $x \cong a/2$ Es decir que el valor óptimo de x es la mitad de a	 

Fuente: Sierra y Ortega (1998) y Contreras et al., (2000) Otro de los aportes de Fermat fue la aplicación de su método llamado *"método de los valores próximos"*, con este pudo hallar las tangentes a una curva algebraica de la forma $y = f(x)$, Sierra y Ortega (1998).

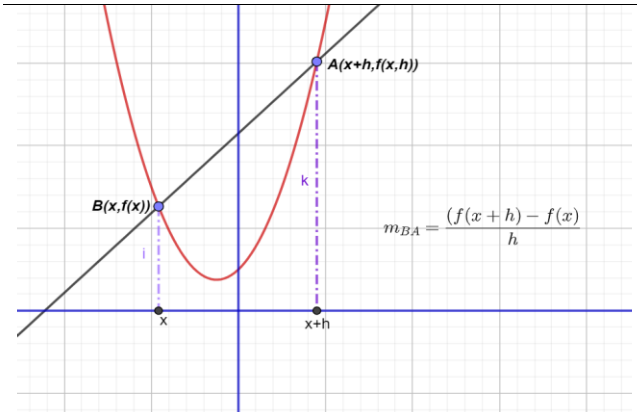
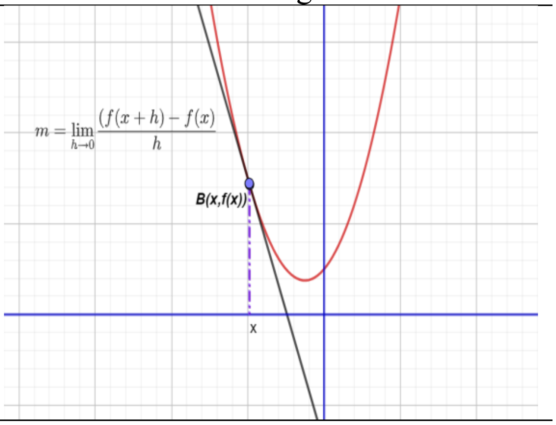
Otros matemáticos que dieron solución a este problema fueron: Walis, Sluse, Hudde. Estos matemáticos dieron bases a lo que hoy se conoce como la derivada por la definición de límite, donde la pendiente de la recta secante está representada por:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al calcular su valor cuando h tiende a 0 se obtiene la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$, Contreras et al., (2000).

Tabla 3.

Ilustración de la recta secante y recta tangente en un punto de la función.

Recta secante	Recta tangente
	
Proceso aritmético del método: Dada la curva $y = ax^2 + bx + c$ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = 2ax + ah + b$	

Fuente: Contreras et al., (2000)

Otros de los estudios realizados por Descartes fue el trazo de rectas tangentes mediante la construcción de la recta normal (recta perpendicular a la recta tangente por un punto). Mediante el uso de este método, pudo calcular la tangente a una elipse y una parábola. Vasco y Suescun, (2011).

3° etapa: la derivada como objeto de conocimiento

Esta época es conocida como la época moderna de las matemáticas, dado que los matemáticos Newton y Leibniz, hicieron uno de los aportes más importante al sintetizar los métodos anteriormente nombrados, con lo cual dieron paso a los objetos matemáticos derivadas e integrales.

Según Sierra y Ortega (1998), Newton expresa en su libro *De quadratura curvarum* una visión sobre las magnitudes matemáticas donde dice que:

> No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes todo lo pequeñas que se quieran, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos; la superficie, por el movimiento de líneas; los sólidos, por el movimiento de las superficies; los ángulos, por la rotación de sus lados; los tiempos por un flujo continuo; y así sucesivamente. (p.89)

Otro de los trabajos desarrollados por Newton es su "*método de fluxiones",* el cual lo publicó en 1736, aunque realmente para el año 1671 ya lo había culminado. Este método consistía en asimilar las cantidades variables como cuerpos en movimiento, por lo tanto, tomaba a x e y, como cantidades que fluían las cuales daban como resultado una velocidad de variación. No obstante, este mismo trabajo lo evita en su libro "*De quadratura curvarum* en el cual sustituye las cantidades fluyentes por términos como "Razón de la primera y la última" siendo esta la razón de incrementos nacientes e incrementos evanescentes que fueron de gran aporte para la derivada." (Sierra y Ortega, 1998, p. 89)

Una representación gráfica que expresa lo anterior, es la presentada por estos mismos autores quienes citan a Rey y Babini (1985).

4° etapa: Exploración y desarrollo

Si bien en la etapa anterior se nombró a Leibniz como uno de los matemáticos que aportó al cálculo de la derivada y se le atribuye el estudio del cálculo infinitesimal, desarrolló algunas reglas comunes para la derivación de expresiones racionales e irracionales y aplicó la derivada en problemas de máximos y mínimos, permitiendo conocer una notación de la primera y segunda derivada (Sierra y Ortega, 1998, p. 90).

En esta misma etapa se considera al matemático Lagrange creador del concepto de función derivada con el término "*derivada*". Otro de sus aportes es su obra *Théorie des fonctions analytiques* donde trata la solución de $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$ mediante el uso del método de división, obteniendo como como resultado $f(x) =1+x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ al resultado obtenido se multiplica el coeficiente x^n por $n!$, a esto Lagrange lo denominó el valor de la función derivada n-ésima de la función en el punto $x = 0$. Además, para el año 1797 como dice (Contreras et al., 2000), cuestiona la concepción creada por Newton sobre límite dado que para él no estaba suficientemente desarrollada.

5° etapa: Definición de la derivada

En esta etapa de la evolución de la derivada, Cauchy introduce una formulación rigurosa del concepto de limite, lo que permite formalizar la derivada. Aunque ya algunos matemáticos habían realizado trabajos sobre la definición de la derivada, Cauchy "rechaza el trabajo realizado por Lagrange en las series de potencias del Teorema de Taylor y toma como fundamental el Teorema realizado por D´Alembert” (Sierra y Ortega, 1998, p. 91).

Cauchy realiza la primera definición de límite y por esta misma desarrolla la definición de derivada para una función $y\ = f(x)$, dando un incremento a la variable $x, \Delta x = i$. Creando así el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ y cuando $i \to 0$, lo definió como la derivada, esta definición es la que se usa hoy en día, simbolizada como:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2.2 Marco Matemático

En este apartado se presentan diferentes definiciones de la derivada, y desarrollo de esta. Además, se expone la definición de derivada de algunos libros de matemáticas dirigidas al medio universitario y de algunos textos escolares. Por otro lado, se exponen algunas propiedades.

2.2.1 Definición de Derivada

A continuación, se presentan algunas definiciones de la derivada planteadas a partir de la recta tangente a la curva en un punto. En el texto de cálculo en una variable de (Stewart, 2012, p. 143) se define la recta tangente de la siguiente forma:

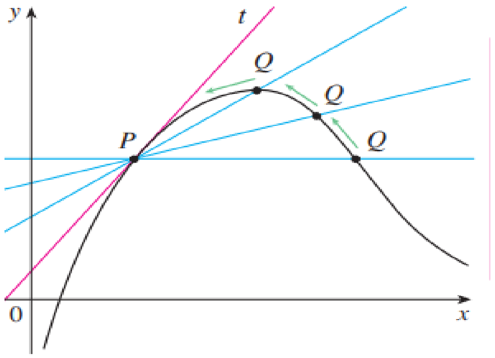
Definición 1. Recta tangente Stewart: “la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto P con la pendiente

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

siempre que exista”.

Figura 1

Recta tangente como límite en posición de la Recta secante cuando Q se acerca a P



Fuente: Stewart (2012)

El texto "*Cálculo con geometría analítica*" de (Larson et al., 2006, p. 97) presenta la definición de la recta tangente con pendiente m .

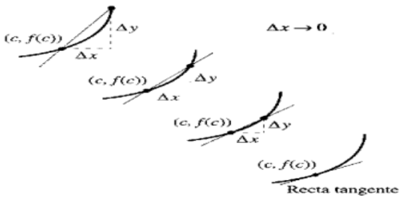
Definición 2. Recta tangente Larson: "Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathrm{c} + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la recta tangente a la gráfica en punto $(c, f(c))$"

Figura 2.

Aproximaciones a la recta tangente.



Fuente: Larson et al., (2006)

En los libros anteriormente nombrados después de hacer uso de la definición de recta tangente en cada caso presentan la definición de la pendiente de la recta tangente

Definición 3. Pendiente de la recta tangente (por límite):

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se reconoce que la derivada corresponde a la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos a lo largo de la curva.

A continuación, se presentan una definición de derivada encontrada encaminada a la compresión de la derivada de una función en un punto y su relación con la derivada como función.

Definición 4. Derivada de una función Stewart: “la derivada de una función $f$en el punto $x = a$ es un número denotado por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe”(Stewart, 2012, p.146).

Definición 5. Derivada de una función Larson: “la derivada de f en x se expresa mediante:

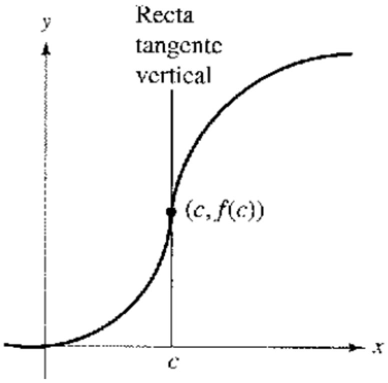
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los *x* para los que exista este límite, f'es una función de x”(Larson et al., 2006, p. 99).

Pero como lo expone Larson et al., (2006) en el libro "*Cálculo con geometría analítica*" la recta tangente de una función continua en un punto, no siempre existe, dado que puede haber casos en los que la recta tangente a la curva es vertical en un punto de la función.

Figura 3.

Recta tangente vertical en una función continua



Fuente: Larson et al., (2006)

Para abordar este caso presenta la siguiente definición:

Definición 6. Definición recta tangente vertical: Si f es continua en c y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \infty$ o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = -\infty$ la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una recta tangente vertical a la gráfica de f.

Además, hace referencia al caso en que el domino de la función es el intervalo $[a, b]$ se puede ampliar la definición de la recta tangente vertical permitiendo incluir los extremos y los límites por derecha $x = a$ y por izquierda $x = b$. (p. 99)

Es importante tener en cuenta la relación entre continuidad y derivabilidad de una función. La continuidad de una función Stewart (2012) la define como:

Definición 7. Continuidad de una función: "Una función es continua en un número $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$." (p. 118).

En seguida, se define cuándo una función es derivable, para ello se presentan dos casos: el primero cuando se toma el intervalo cerrado y el segundo cuando es un intervalo abierto como lo presenta Swokowski (1988):

Definición 8. Derivabilidad en un intervalo abierto: "Una función f es derivable en un intervalo abierto (a, b) si lo es en todos los números c de (a, b). Para este caso también consideran los intervalos infinitos." (p. 95)

Definición 9. Derivabilidad en un intervalo cerrado: "Una función f es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si lo es en el intervalo abierto (a, b) y los límites $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ existen." (p. 95)

Otra definición utilizada para verificar si una función es derivable, y además guarda relación con la definición de recta tangente (**definición 1. Recta tangente Stewart),** es la presentada por Larson (2010, p. 101). Esta definición permite reconocer una relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función:

Definición 10. Derivabilidad por límite: f es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es derivable en (a, b) y existen la derivada por derecha en a $\left(\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ y por izquierda en b $\left(\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)$.

Es relevante estudiar la derivabilidad de una función no continua, para ello se tiene en cuenta la contra recíproca de "Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, la función $f(x)$ es continua en $x = a$". A continuación, se presenta la demostración.

Demostración:

Para demostrar que f es continua en $x = a$ se debe demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para esto se siguen los siguientes pasos:

1. Probar que $f(x) - f(a)$ tiende a 0

   f es derivable en $x = a$, por tanto,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2. A partir de $f(x) - f(a)$, dividirlo y multiplicarlo por $x - a$, considerando que $x \neq a$. se tiene

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

3. El límite cuando $x \to a$ a ambos lados de la igualdad.

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

4. Por propiedad de límites y del producto tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.\ \lim_{x \to a}(x - a)$$

   Como $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es la derivada de la función en el punto a y el límite de $\lim_{x \to a}(x - a) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = f'(a).0$$

Con estos pasos se demuestra que $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

Ahora, como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}[f(a) + (f(x) - f(a)]$$

se tiene que

$$= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)]$$

$$= f(a) + 0$$

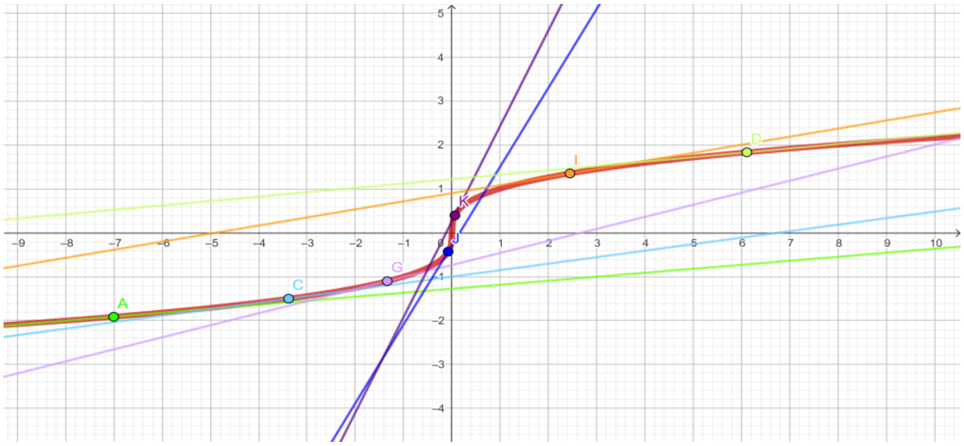
$$= f(a)$$

Por tanto, f es continua en $x = a$

Es importante considerar que la recíproca de este resultado no siempre es verdadera, ya que el hecho de que una función sea continua en $x = a$ no implica necesariamente que sea derivable en $x = a$. Ejemplos de esto son funciones $f(x) = |x|\ y\ f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, las cuales son continuas, pero no son diferenciables en $x = 0$. En el caso de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, como se observa en la Figura 4, la función es continua $x = 0$; sin embargo, su derivabilidad debe analizarse considerando el comportamiento de su pendiente en este punto, más allá de su representación gráfica.

Figura 4.

Rectas tangentes en un punto de la función f(x)=$x^{\frac{1}{3}}$



Al estudiar el comportamiento de la pendiente de las rectas tangente, se observa que cuando x toma valores cercanos a $x = 0$ por derecha y por izquierda, la pendiente de la recta tangente no está definida en $x = 0$ por lo tanto se cumple que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$ por lo tanto, aunque la función es continua no es derivable en $x = 0$.

El estudio de los casos de las funciones que tiene una "punta" como se presenta en el caso de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, Stewart (2012) indica que "la gráfica f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí" (p. 159) esto sucede porque al momento de calcular la derivada en $x = 0$, los límites por derecha y por izquierda son diferentes.

Para $f(x) = |x|$ calcular el límite por la derecha, se tiene que $x > 0$, por tanto

$$f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$$

Para el segundo caso, se calcula el límite por la izquierda si $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$$

Puesto que los límites por derecha y por izquierda son diferentes, la derivada evaluada en $x = 0$ no existe. Este es un ejemplo de una función que en un punto puede ser continua y sin embargo no es derivable en dicho punto.

2.2.2 Conceptos (objetos matemáticos) Relacionados a Derivada

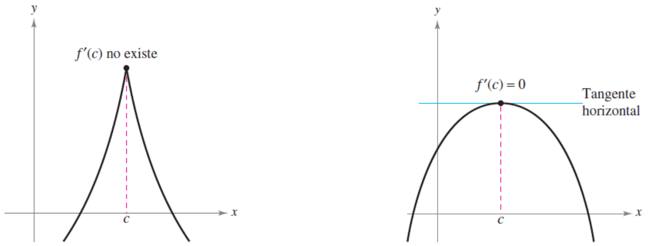
En este apartado se hace una revisión de algunos objetos matemáticos relacionados con la derivada.

2.2.2.1 Números o Puntos críticos de una función

Definición 11. Puntos críticos de una función: Se define como número o punto crítico de una función todo valor c, donde se cumple que la derivada evaluada en c es igual a cero ($f'(c) = 0$) o donde se cumpla que la derivada de la función no exista en c, es decir, cuando f no es derivable en c. (Larson, 2010, p. 166).

Figura 5.

Puntos críticos en una función.



Nota: en la imagen se observa cómo c es un punto crítico de f (Larson, 2010)

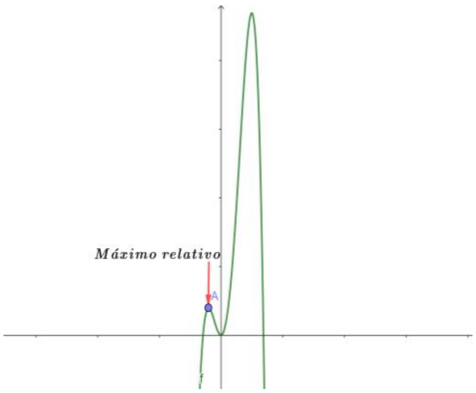
2.2.2.2 Máximos o mínimos relativos de una función

Si una función es continua en un intervalo abierto puede presentar puntos denominados como máximos o mínimos relativos estos pueden llegar a recibir el nombre máximo local o mínimo local. Se define un máximo relativo o local como:

Definición 12. Máximo relativo: Sea f una función diferenciable en un intervalo que contiene a c. Se dice que $f(c)$ es un máximo relativo si $f(c) \geq f(x)$ para valores de x cercanos a c. Otra forma de definirlo es a través de la derivada: si $f´(c)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces c es un máximo relativo.(Stewart, 2012,p. 274)

Figura 6.

Máximo relativo de una función

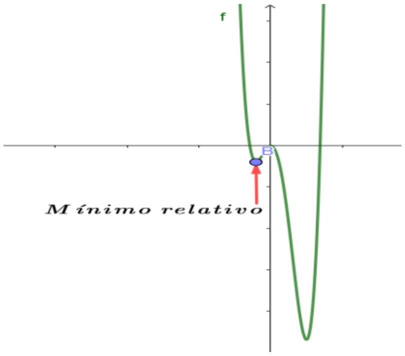


Ahora para definir un mínimo relativo o local se hace uso de la definición presentada en (Stewart, 2012,p 274) que dice:

Definición 13. Mínimo relativo: Sea f una función diferenciable en un intervalo que contiene a c. Se dice que $f(c)$ es un mínimo relativo si $f(c) \leq f(x)$ para los valores de x cercanos a c. Otra forma de definirlo es a través de la derivada: si $f´(c)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces c es un mínimo relativo. En otras palabras, si la función es decreciente antes del punto crítico y creciente después de este, entonces el punto c es posiblemente un mínimo relativo.

Figura 7.

Mínimo relativo de una función



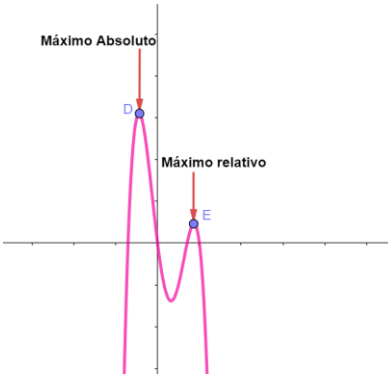
2.2.2.3 Máximos o mínimos absolutos de una función

Los máximos o mínimos de una función, también conocidos como máximo y mínimos absolutos, pueden identificarse en algunos casos porque la pendiente de la recta tangente de la función es cero. Para la definición formalmente los máximos y mínimos absolutos, se tiene lo siguiente:

Definición 14. Máximo Absoluto: Sea c un número en el dominio D de una función f. entonces $f(c)$ es el valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D. Se puede identificar gráficamente los máximos absolutos y relativos de una función como se muestra a continuación:

Figura 8.

Visualización gráfica de los máximos absolutos y relativos de una función.

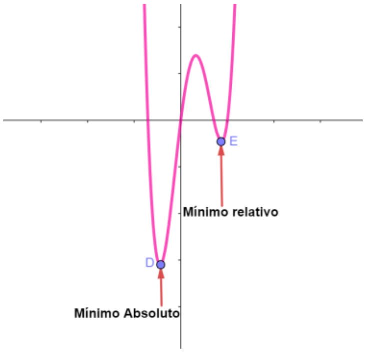


En (Stewart, 2012,p 274) define los mínimos absolutos de una función de la siguiente forma:

Definición 15. Mínimo absoluto: "Sea c un número en el dominio D de una función f entonces $f(c)$ es el valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D". Se puede identificar gráficamente los mínimos absolutos y relativos de una función como se muestra a continuación:

Figura 9.

Visualización gráfica de los mínimos absolutos y relativos de una función.



2.2.2.4 Criterio de la primera derivada y segunda derivada[1]

Para encontrar o determinar cuándo una función presenta un máximo o un mínimo se hace uso del **criterio de la primera derivada,** presentada en (Swokowski, 1988,p. 194) y en (Stewart, 2012. p. 291) el cual permite identificar donde la función es creciente o decreciente. Para esto se hace uso de los valores críticos los cuales ya se definieron y cumplen que $f'(c) = 0$.

Para el criterio de la primera derivada se consideran los siguientes tres casos:

Definición 16. Criterio de la primera derivada – Función creciente: Si la derivada evaluada en c es un número mayor a cero para un intervalo (a, b) entonces se interpreta que la función en ese intervalo es creciente.

$Si\ f'(c) > 0$ en el intervalo $a < c < b$, entonces f es creciente en el intervalo $a < c < b$, siempre que f sea continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b)

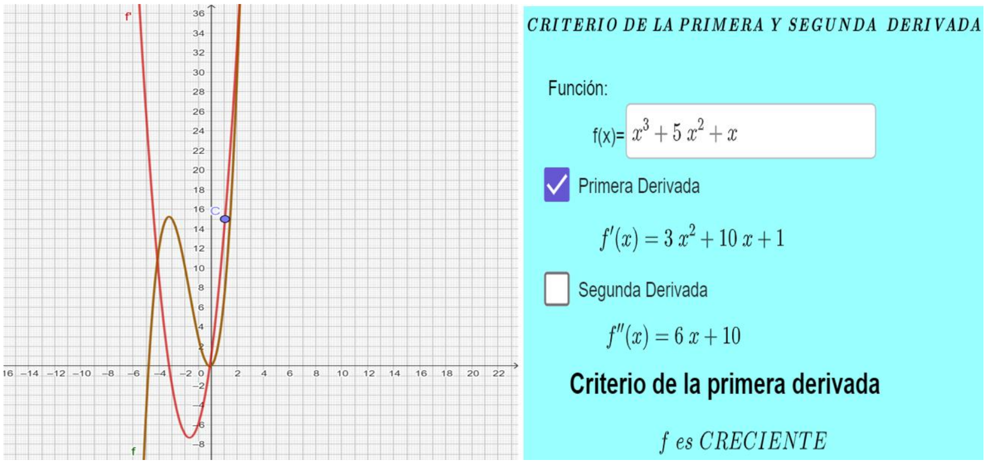
Para la ilustración de este primer caso se hace uso de la **figura 10**, donde se evidencia la función $f(x) = x^3 + 5x^2 + x$ de color café y la gráfica de $f'(x)$ de color rojo. Para el estudio de esta función se analiza $f'(x)$ en el intervalo (0,2). Por consiguiente, si se toma un valor c que pertenece al intervalo, se puede observar que $f'(1) > 0$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo (0,2).

---

[1] Para la observación y como recurso para la compresión del criterio de la primera y segunda derivada se creó un recurso en GeoGebra para el análisis de máximos y mínimos de funciones no constantes. Este recurso se realizó con ayuda del video (Innova Math, 2019) incluyendo algunas modificaciones que consideradas pertinentes para la comprensión. **Recurso:** https://www.geogebra.org/m/kaqcdd3k

Figura 10.

Visualización gráfica del criterio de la primera derivada cuando f (c)>0



CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Función:

f(x)= $x^3+5\,x^2+x$

☑ Primera Derivada

$f'(x)=3\,x^2+10\,x+1$

☐ Segunda Derivada

$f''(x)=6\,x+10$

Criterio de la primera derivada

f es CRECIENTE

Definición 17. Criterio de la primera derivada - Función decreciente: Si la derivada evaluada en c es un número menor a cero para un intervalo (a, b) entonces se interpreta que la función en ese intervalo es decreciente.

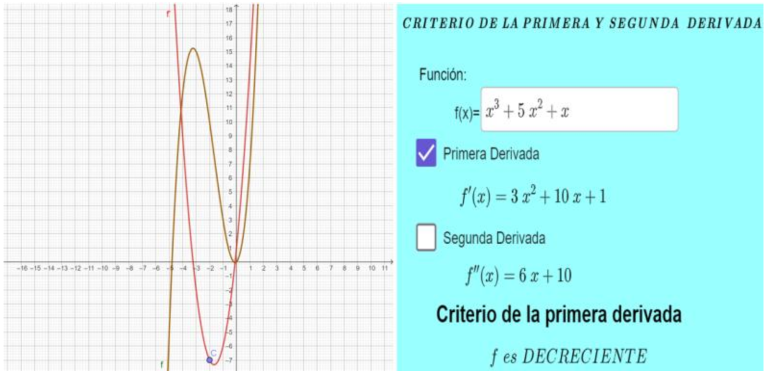
$Si\ f'(c) < 0$ en el intervalo $a < c < b$, entonces f es decreciente en el intervalo

$a < c < b$, siempre que f sea continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b)

Para desarrollo del ejemplo de este segundo caso se hace uso de la **Figura 11** donde se evalúa $f'(x)$ en el intervalo $(-3, -1)$, para esto se toma un c que pertenece al intervalo. En este caso de manera particular, se evalúa $f'(-2)$ cumpliéndose que $f'(-2) < 0$, lo cual permite interpretar que la $f\ (x)$ es decreciente en el intervalo $(-3, -1)$.

Figura 11.

Visualización gráfica del criterio de la primera derivada cuando f (c)<0



CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Función:

f(x)= x^3+5x^2+x

☑ Primera Derivada

$f'(x)=3x^2+10x+1$

☐ Segunda Derivada

$f''(x)=6x+10$

Criterio de la primera derivada

f es DECRECIENTE

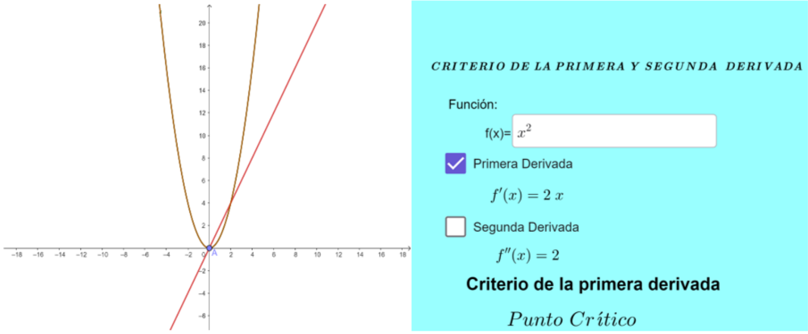
Definición 18. Criterio de la primera derivada – Derivada igual a cero: Si la derivada evaluada en c es igual cero en un intervalo (a,b) entonces la función tiene un punto crítico.

$Si\ f´(c)=0$ en el intervalo $a<c<b$,entonces existe un punto crítico en el intervalo en $a<c<b$

Para la ilustración de este tercer caso se presenta la **figura 12**, donde se evidencia la función $f(x)=x^2$ de color café y la gráfica de $f´(x)$ de color rojo. Para el estudio de esta función, se analiza $f´(x)$ en el intervalo $[-2,2]$ y se cumple que $f´(0)=0$. Por consiguiente, la función $f(x)$ presenta un punto crítico en el intervalo $[-2,2]$.

Figura 12.

Visualización gráfica del criterio de la primera derivada cuando f´ (c)=0



CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Función:

f(x)= x^2

☑ Primera Derivada

$f'(x)=2x$

☐ Segunda Derivada

$f''(x)=2$

Criterio de la primera derivada

Punto Crítico

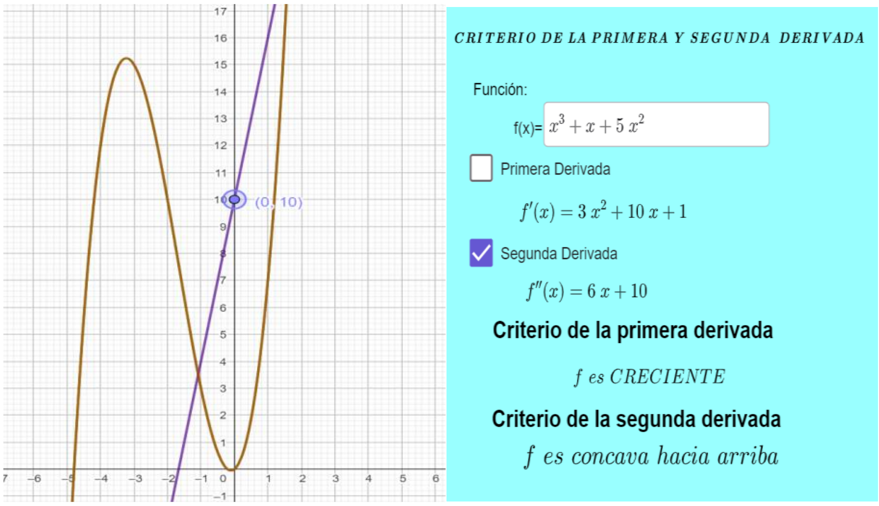
A continuación, se presenta la interpretación de la derivada de la primera derivada, lo cual se conoce como el **criterio de la segunda derivada,** este se utiliza para determinar los intervalos de concavidad de una función. El cual pueden llegar a presentarse dos casos:

Definición 19. Criterio de la segunda derivada - Función Cóncava hacia arriba: Si la segunda derivada en un intervalo (a, b) es mayor a cero, entonces la función es cóncava hacia arriba. Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).(Larson et al., 2006,p.191)

Para la ilustración del primer caso del criterio de la segunda derivada se presenta la **Figura 13.** Para este caso se toma el intervalo $(-1,1)$ y un valor c que pertenece al intervalo, para lo cual se toma $c = 0$, la $f''(0) > 0$. Dado que se obtuvo que la segunda derivada es mayor a cero se interpreta que la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1,1)$.

Figura 13.

Visualización gráfica del 1° caso del criterio de la segunda derivada cuando f´´(c)>0.



CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Función:

f(x)= $x^3+x+5\,x^2$

☐ Primera Derivada

$f'(x)=3\,x^2+10\,x+1$

☑ Segunda Derivada

$f''(x)=6\,x+10$

Criterio de la primera derivada

f es CRECIENTE

Criterio de la segunda derivada

f es concava hacia arriba

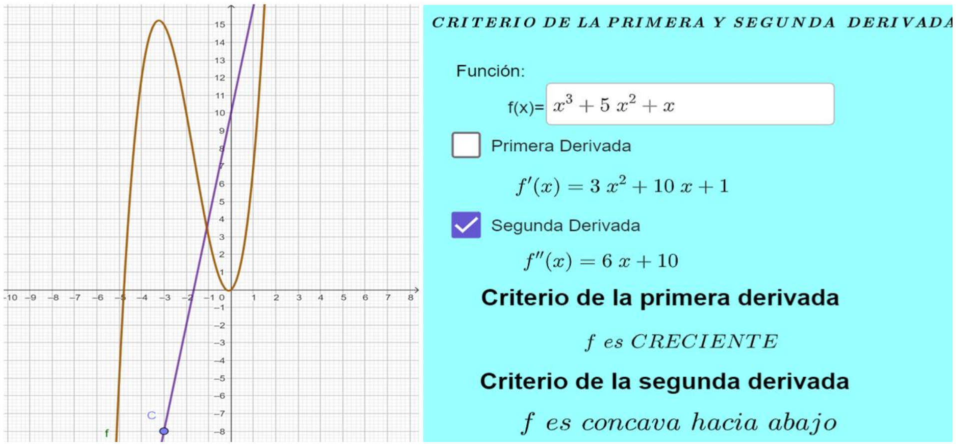
Nota: Para la compresión de la figura la gráfica de color café representa la función y la de color morado representa la segunda derivada de la función.

Definición 20. Criterio de la segunda derivada caso dos - Función Cóncava hacia abajo: Si la segunda derivada en un intervalo (a, b) es menor a cero, entonces se concluye que la función es cóncava hacia abajo. Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b)

Este segundo caso se ilustra en la **Figura 14.** Si se toma el intervalo $(-4, -2)$ y un valor c que pertenece al intervalo en este caso, para $c = -3$, se cumple que $f''(-3) < 0$. Permitiendo interpretar que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-4, -2)$.

Figura 14.

Visualización gráfica del 2° caso del criterio de la segunda derivada cuando f (c)<0



CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Función:

f(x)= $x^3 + 5\,x^2 + x$

☐ Primera Derivada

$f'(x) = 3\,x^2 + 10\,x + 1$

☑ Segunda Derivada

$f''(x) = 6\,x + 10$

Criterio de la primera derivada

f *es CRECIENTE*

Criterio de la segunda derivada

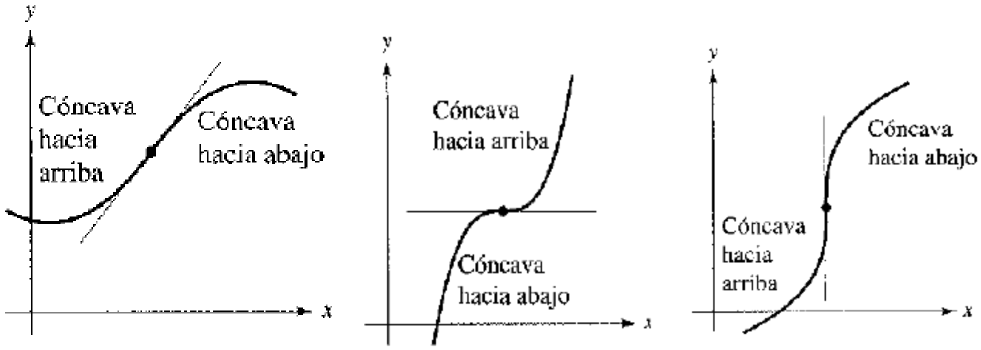
f *es concava hacia abajo*

2.2.2.5 Puntos de inflexión

Los puntos de inflexión de una función continua en un intervalo abierto I y un punto c que pertenece al intervalo I son aquellos en los que la función tiene un cambio de concavidad y la recta tangente existe en el punto $(c, f(c))$, la definición presentada en (Larson et al.,2006,p. 192) permite identificar tres casos.

Figura 15.

Casos posibles de puntos de inflexión en una función.



Fuente: (Larson et al.,2006,p. 192)

Una definición de concavidad que permite ver cómo el cambio de concavidad está relacionada con la segunda derivada de una función $f(x)$ es presentada en (Swokowski, 1988) que dice:

Definición 21. Punto de inflexión "un punto $P(k, f(k))$ en la gráfica de una función f es un punto de inflexión si f'' existe en un intervalo abierto (a, b) que contiene a k y f'' cambia de signo en k" (p. 187).

2.2.2.6 Derivada como razón de cambio instantánea

La aplicación de la derivada en otras ciencias, como la física, se observa en el estudio del movimiento de un cuerpo en línea recta, ya que permite determinar la velocidad y la aceleración del cuerpo. En química, la derivada es útil para analizar cómo varía la concentración de reactivos y productos en una reacción a lo largo del tiempo. Finalmente, otro ejemplo es en economía, debido a que el uso de la derivada permite calcular el costo marginal. En estos casos, la derivada se interpreta como una razón de cambio. A continuación, se presentan algunas definiciones de la derivada como razón de cambio.

Definición 22 velocidad: "Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que en el tiempo t su coordenada es $x(t)$, entonces su velocidad en el tiempo a es $x'(a)$" (Swokowski, 1988,p. 95)

$$x'(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(a + \Delta t) - x(a)}{\Delta t}$$

Para poder encontrar la velocidad instantánea de un cuerpo en un tiempo t, se puede hacer una aproximación por medio del cálculo de la velocidad media la cual define Zemansky et al., (2004) como:

Definición 23 velocidad media: "Una cantidad vectorial cuya componente en x es el cambio de x dividido en el intervalo de tiempo" (p. 41). Además, nos presenta la velocidad media para un movimiento rectilíneo como:

$$V_{med\,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{ (p.42)}$$

En general, la derivada de una función $y = f(x)$ es una razón de cambio instantánea con respecto a la variable x.

$$V_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{med\,x}$$

2.3 Marco Didáctico

En este se presentan diferentes elementos didácticos necesarios para la comprensión del concepto de derivada que se tuvieron en cuenta para la elaboración de las diferentes preguntas del cuestionario. Para ello se definió el pensamiento variacional a partir de lo mencionado por algunos autores; posteriormente se realizó una búsqueda documental sobre los errores, obstáculos y dificultades que se pueden presentar en la interpretación de la derivada.

Adicionalmente se establece cada uno de los niveles de comprensión de Piaget y, por último, se abordan los diferentes sistemas de representación de la derivada.

2.3.1 Pensamiento variacional

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en los Estándares Básicos de Aprendizaje (2006) se establece el pensamiento variacional como uno de los cinco tipos de pensamiento matemático, que tiene como objetivo reconocer, identificar y caracterizar la variación y cambio mediante el uso de situaciones problemas que pueden suceder en ciencias (sociales, naturales y matemáticas) o la vida cotidiana, sin dejar de lado la modelación, descripción y la representación en los diferentes sistemas simbólicos (verbales, tabulares, gráficos o algebraicos). Haciendo uso de estos sistemas de representación, se desarrolla la compresión de un concepto matemático, mediante procesos donde se involucran la observación y medición. Para Vasco C, (2002):

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 63)

Dado que se presenta un continuo cambio y adaptación en la manera de pensar del estudiante, el desarrollo del pensamiento variacional favorece en los estudiantes el desarrollo de la creatividad (modelos mentales), y promueve el dar solución a un problema de forma distintas, dado que se presenta un continuo cambio y adaptación en la manera de pensar del estudiante. Esto debido a que ya no toma de forma aislada las variables, sino que está en la capacidad de relacionarlas evidenciando el comportamiento de dichas variables.

Vasco C, (2002) afirma que “el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios” de lo anterior se debe resaltar que los problemas planteados no van encaminados a procesos netamente algorítmicos o de mecanización. Por el contrario, estos deben constituir un reto que permitan modelar una situación o problema generando procesos donde se evidencia como las variables se relacionan entre sí.

2.3.2 Obstáculos, dificultades y errores de la compresión de la derivada

El aprendizaje e interpretación de la derivada en estudiantes universitarios puede presentar obstáculos, lo cual puede deberse a que no se desarrolló una compresión correcta de saberes previos, por ejemplo, el cálculo reúne saberes tanto del álgebra como de la geometría y el presentar dificultades en el aprendizaje de algunos de los objetos que se abordan en estas áreas pueden obstaculizar el aprendizaje de objetos matemáticos como la derivada. Pero también el aprendizaje o comprensión de dichos conceptos matemáticos también puede estar ligado a la metodología usada por el docente a cargo. Robert (2001) citado por Fuentealba et al., (2018) menciona que “la compresión del concepto de derivada se relaciona con la utilización de métodos de enseñanza que han privilegiado la excesiva mecanización por parte de los estudiantes” desarrollando grandes habilidades en procesos algorítmicos, pero dificultando la compresión e interpretación de la derivada, dado que en ocasiones no llegan a desarrollar un correcto significado de la misma.

Artigue (1995) citado por Sánchez-Matamoros et al., (2008) expresa que, aunque los docentes pueden enseñar a sus estudiantes procesos mecánicos sobre el cálculo de la derivada y resolver problemas, se debe tener en cuenta que lograr una interpretación satisfactoria donde se desarrolle un método de pensamiento y un nivel de pensamiento analítico suficiente para dicha interpretación de conceptos puede ser difícil por la edad de los jóvenes.

A partir de lo expuesto, un aspecto importante a considerar es la construcción del significado de la derivada, reconociendo los diferentes procesos por los cuales desarrollan y dan significado a la derivada, los cuales están asociados, como indica Sánchez et al., (2008) con las "perspectiva gráfica y perspectiva analítica". Además, se puede evidenciar en varios textos la perspectiva como razón de cambio. A continuación, se presentan algunos errores, obstáculos y dificultades relacionados con la interpretación de la derivada.

Errores en la interpretación gráfica

De acuerdo con González-García et al. (2018), existen errores que se presentan por un aprendizaje incompleto en geometría analítica. En consecuencia, los estudiantes presentan errores en el cálculo para determinar la ecuación de la recta dado dos puntos y su pendiente. Además, pueden presentarse casos en que los estudiantes conocen el procedimiento paso a paso para determinar la ecuación, partiendo de la información entregada, pero en la ejecución se cometen errores de sustitución en las ecuaciones algebraicas.

Un error desarrollado por la concepción geométrica de la derivada es el mencionado por Contreras (2003), quien afirma que los estudiantes "saben encontrar puntos de no derivabilidad en la gráfica de una función siempre que sean angulosos o no continuos". Esto conlleva a que los estudiantes piensen que una función no es derivable desde la representación gráfica solo cuando existen puntas o una discontinuidad, generando que omitan o no reconozcan casos donde la recta tangente es vertical o existen cambios exagerados en el comportamiento de la función. Indicando que el estudiante tiene una compresión no desarrollada entre la interpretación geométrica y la derivabilidad de una función.

Errores en la interpretación analítica

De acuerdo con Sánchez et al., (2008) un error consiste en que " los alumnos dan el valor de la abscisa cuando se les pregunta por la razón de cambio en un punto no dado en la tabla," (p. 272). Un ejemplo de este error es: dada la función $f(x) = 3x + 2$ y un ejemplo de tabla con cuatro parejas de valores.

x	1	2	3	5
$f(x)$	5	8	11	17

Si se le preguntará al estudiante por la razón de cambio en $x = 4$. Puede responder que el valor de la razón de cambio es 4, refiriéndose al valor de la abscisa. Pero la verdadera interpretación de razón de cambio que debería decir el estudiante es que por cada incremento en 1 en x el valor de $f(x)$ aumenta en 3.

Uno de los errores que presentaron los estudiantes de acuerdo con González-García et al (2018) es que: no realizan correctamente el cálculo de límites. Además, no determinan las condiciones necesarias de derivabilidad de una función en un punto, generando con esto casos que no identifiquen correctamente dónde una función es derivable.

Dificultades relacionadas con la recta tangente

González-García et al (2018) exponen algunas dificultades que se presentan en la interpretación geométrica de la derivada, entre las que se encuentran: primero, la dificultad con la ecuación general de la recta y la ecuación punto-pendiente. En algunos casos, los estudiantes pueden no recordarla o no aplicarlas correctamente, lo que genera dificultades en las técnicas algebraicas y les impide encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

Una segunda dificultad expuesta por (González-García et al., 2018) está relacionada con la "confusión a la hora de identificar la pendiente de una recta dada su ecuación con la ordenada en el origen" (p. 452). Un ejemplo que describe esta dificultad es: Un estudiante dada la ecuación $y = 4x + 2$, puede llegar a realizar un gráfico donde 2 es la pendiente de la recta y 4 es el corte con el eje y.

Por último, hay dificultades relacionadas con los símbolos que se pueden presentar en el manejo del cálculo, como el caso en el que el estudiante cambie el significado sin tener presente el contexto. Por ejemplo, en el cálculo de la pendiente de la recta tangente a una función en el punto en $x = a$ se puede presentar confusión en reconocer que la variable independiente es x y que a representa un valor específico donde se evalúa la tangente.

Dificultades en la interpretación analítica

"Las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función lineal o cuadrática podían tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función" (Orton, 1983; Hart, 1981) citado por Sánchez-Matamoros et al., (2007). Esto puede estar relacionado con la dificultad que surge al considerar el límite cuando el incremento en un intervalo tiende a cero. Como resultado, Orton encontró que los estudiantes podían comprender la razón de cambio en funciones lineales, pero al considerar una función de otro grado no se presentaba la misma cantidad de respuestas correctas.

Errores en la interpretación como función

Uno de los errores en la compresión de la derivada como función descritos por González-García et al.(2018) se presentan cuando existe un desconocimiento del cálculo de límites de funciones. Generando que se presente este mismo error cuando se debe calcular los límites de una función a trozos, esto se pone de manifiesto cuando se cometen errores en el cálculo del límite por izquierda y por derecha.

González-García et al (2018) describen un error que está ligado al lenguaje, el cual consiste en que al pedir a un estudiante calcular la derivada de una función f en el punto $(a, f(a))$, no identifican el punto indicado, pero cuando cuenta con una expresión de una función conocida y un valor de la abscisa, mediante procesos aritméticos, llega correctamente al valor de la ordenada.

Dificultad en la interpretación como función

Baker citado por Sánchez-Matamoros (2004), expresa que los estudiantes pueden presentar dificultad en el manejo de la información que se obtiene con la segunda derivada de una función. Esto puede ser una evidencia de que no identifican la primera derivada como una función, dado que solo la utilizan para obtener información de la pendiente o la razón de cambio en un punto de la función y dejan de lado que $f´$ tiene su propio dominio, rango, y gráfica.

Además, un estudiante que presenta dificultad con la interpretación de la segunda derivada de una función. pueden llegar a confundir la interpretación del signo (Sánchez-Matamoros et al., 2004,p. 248). Esto impide que pueda determinar asertivamente información de la función, por ejemplo, puede determinar de forma errónea dónde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo o los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

Una dificultad que presentan los alumnos en la interpretación de la derivada como función se presenta en la relación entre la gráfica de la función y su derivada. Es la mencionada por Sánchez-Matamoros (2004) quien afirma que "los estudiantes recuerdan algunos elementos matemáticos de forma incorrecta, pudiendo confundir la información que proporciona f' y f''"(p. 154). Esta dificultad puede tener como consecuencia que dada la gráfica de f', no puedan bosquejar correctamente la gráfica de la función f. Pueden suceder casos donde consideren que $f'(a) = 0$ como la derivada de puntos en los que se presenta un máximo o un mínimo sin dar paso a considerar que pueden ser puntos de inflexión.

Además de las dificultades mencionadas, es importante mencionar el obstáculo de la compresión de la derivada mencionado por Contreras et al., (2000) con respecto "al considerar diversas secantes que tienden hacia la tangente, no se hace explícito el cambio continuo de la pendiente" este tipo de obstáculo, denominado por Contreras como epistemológico, puede ser relacionado con la interpretación de la derivada como razón de cambio, dado que por saberes previos el cálculo de la pendiente de una recta se hace por medio de dos puntos, lo que dificulta comprender la pendiente en un solo punto.

2.3.3 Sistemas de representación de la derivada

Una estructura conceptual presentada por Vargas (2020), a partir de un estudio realizado con docentes en formación acerca de cómo definen la derivada establece categorías entre las que se encuentran las siguientes:

1. La derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto de la función
2. La derivada como límite
3. La derivada en relación a la definición de la derivada como la razón de cambio.

Estas categorías permiten identificar diferentes interpretaciones que se desarrollan de la derivada y son asociadas a las representaciones que crea un estudiante de esta. Para Jiménez (2003), la traducción y relación que presentan las diferentes representaciones son esenciales pues son muy importantes para el desarrollo de la compresión de un concepto matemático como la derivada.

Puesto que la derivada se puede comprender como una función, a continuación, expone las diferentes representaciones de una función. Janvier (1987), citado por Font (2005), expone que las representaciones de una función son: expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal. Aunque estas representaciones pueden llegar a hacer referencia a la misma información cada una de ellas pone en juego diferentes procesos cognitivos. Algunos ejemplos expuestos por Font (2005) establecen que cuando se hace uso de la representación gráfica de una función entra en juego la visualización y la relación entre la geometría y la topología. Por otro lado, cuando se hace uso de la representación verbal se establece que las relaciones están ligadas a las capacidades lingüísticas de la persona, siendo esta importante porque permite interpretar y relacionar las otras representaciones entre sí.

A continuación se presenta una adaptación de la tabla propuesta por Janvier, citado en (Font, 2005,p. 11), donde se establece cómo se relaciona o se traduce de una representación a otra y se ilustran las traducciones que se puede realizar entre las mismas representaciones.

Tabla 4.

Traducción de representaciones de una función

Hacia / **Desde**	**Descripción verbal**	**Gráfica**	**Analítica**	**Tabla**
Descripción verbal	Distintas descripciones	Boceto	Modelo	Estimaciones

Hacia Desde	Descripción verbal	Gráfica	Analítica	Tabla
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Variación de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico	Lectura de gráficas
Analítica	Interpretación de la formula (parámetros)	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula	Cálculo de la tabla
Tabla	Lectura de relaciones	Trazado de gráficas	Ajuste numérico	Modificación de la tabla

Fuente adaptación tabla propuesta por (Font, 2005,p. 11)

Para Font (2005) una de las traducciones que mayor dificultad presenta es la conversión de la representación gráfica a la expresión analítica. Font expone que finalmente el docente debe reflexionar sobre cuáles son las representaciones que pueden llegar a facilitar la compresión del objeto matemático debido que se pueden llegar a generar dificultades en el aprendizaje de los estudiantes al intentar abordar todas o si solo se limita al desarrollo de una representación.

A continuación se presenta una adaptación de las diferentes trasformaciones de las representaciones de la derivada presentados por (Font, 2005,p. 19) abordados en el presente trabajo las cuales están señaladas con una “**x**”.

Tabla 5.

Traducciones de representaciones para cada pregunta.

Hacia Desde	Analítica de $f'(x)$	Gráfica $f'(x)$	Descripciones verbales de $f'(x)$	Gráfica $f(x)$	Descripciones verbales de $f(x)$	Descripciones verbales de $f''(x)$
Analítica de $f(x)$	x		x			
Descripciones verbales de la $f(x)$	x		x	x		
Gráfica $f(x)$		x	x	x	x	
Tabla $f(x)$	x					
Analítica de $f'(x)$					x	
Descripciones verbales de la $f'(x)$				x		

Hacia **Desde**	**Analítica de $f'(x)$**	**Gráfica $f'(x)$**	**Descripciones verbales de $f'(x)$**	**Gráfica $f(x)$**	**Descripciones verbales de $f(x)$**	**Descripciones verbales de $f''(x)$**
Gráfica $f'(x)$			x	x	x	x

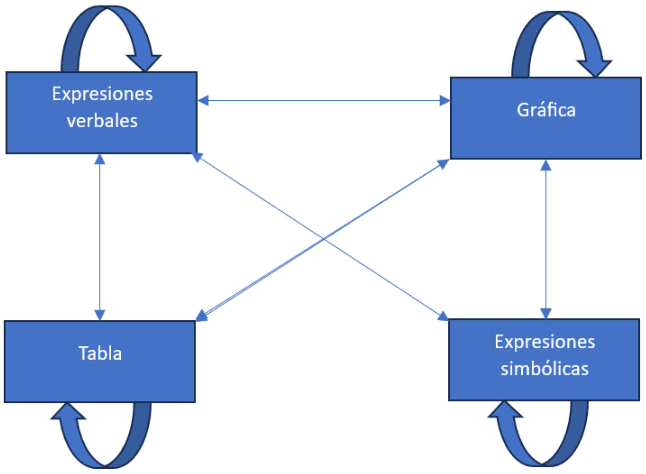
Fuente adaptación de la tabla propuesta por (Font, 2005,p. 19)

Cuando se realiza una traducción entre las diferentes representaciones de $f'(x)$, partiendo de las representaciones de $f(x)$, está implícito el uso de traducciones entre las distintas representaciones de una función y las traducciones entre las distintas representaciones de la función derivada. Por lo tanto, pueden existir procesos que impliquen el uso de diferentes representaciones y traducciones entre ellas.

La **Figura 16** sintetiza las diferentes traducciones entre las representaciones que se pueden deducir de la tabla anterior.

Figura 16.

Traducciones entre las representaciones



Nota: adaptación del esquema b presentado en (Font, 2005,p. 12)

Por otro lado, el estudio de la derivada se puede realizar de forma global o forma local. Pinto-Rojas et al (2018) mencionan que es importante establecer que:

> Desde el punto de vista matemático el aspecto local de la derivada está referido a la consideración del entorno de un punto específico, como una vecindad de este punto en la curva y en lo global es de interés una vecindad del punto especifico suficientemente grande como el dominio de la función. (Pinto-Rojas et al, 2018, p. 1071)

Para Sanchez-Matamorros, García y Llinares (2008), en la Matemática Educativa se hacen estudios e investigaciones que establecen una relación entre: los aspectos locales y globales de la derivada con el uso de una perspectiva cognitiva, llegando a considerar que el realizar esta relación puede generar en los estudiantes una superación en las diferentes dificultades que se presentan en la compresión de la derivada.

2.3.4 Niveles de interpretación de la derivada

De acuerdo con la teoría de Jean Piaget citado por Gómez (2021) el conocimiento humano es activo. Por tal motivo, Piaget considera que "conocer un objeto no significa copiarlo, significa actuar sobre él. Significa construir sistemas de trasformaciones que pueden ser llevadas a cabo con o sobre dicho objeto" (p. 24), como consecuencia de lo anterior, se puede afirmar que el conocimiento está evolucionando continuamente. Esto se debe a que, al construir progresivamente relaciones entre un objeto, otros campos del conocimiento y el propio objeto, se enriquece la compresión y se amplía el conocimiento de este.

El proceso de construcción de conocimiento de acuerdo con Piaget y García, citados por Gómez (2021), se desarrolla en tres etapas las cuales son **Intra**, **Inter** y **Trans**. Para definir cada etapa, en este estudio se hace uso de las definiciones presentadas por Salazar et al., (2009), en él se caracteriza cada uno de estos niveles y permite reconocer que existe una reorganización del conocimiento, lo que implica que el aprendizaje no es necesariamente lineal sino que se presenta gradualmente. A continuación, se presenta la caracterización de cada nivel:

Nivel Intra: en este nivel se analizan particularidades de los conceptos u objetos matemáticos individualmente. Principalmente se reconoce las propiedades, las características y se usan ejemplos concretos. Por tal motivo las generalidades que se pueden llegar a obtener en este nivel son simples. Adicionalmente, no se logra establecer una relación entre el objeto y como este interactúa entre sí o con otros objetos. Se puede decir que en este nivel es una etapa donde se conoce por primera vez un objeto o concepto y se realizan acciones repetitivas.

Cuando se habla de acciones repetitivas se hace referencia a acciones mecánicas que se realizan como una regla, pero no se cuestiona o se indaga acerca del porqué o de su origen, solo se asumen y se aplican. Un ejemplo que permite comprender lo que sucede en el nivel Intra en un estudiante que está desarrollando un aprendizaje del concepto de derivada es:

El estudiante se limita a reconocer el concepto de derivada identificando que se puede escribir de la forma $f'(x)$ y que existe algo llamado derivada, pero no tiene comprensión de lo que significa y su relación con otros campos. También puede presentarse casos donde el estudiante aplique por memorización o repetición una de las reglas de derivación por ejemplo la regla de la potencia y calcule la derivada sin saber qué representa, solo es un resultado de un proceso mecánico.

Nivel Inter: en este nivel se hace uso de las ideas individuales, desarrollando relaciones y comparaciones entre sí. Podemos, entonces, en este nivel evidenciar cómo se establecen relaciones entre una operación inicial (comprendida), con otras operaciones similares o algunas donde se presenta implícitamente la operación ya comprendida.

Debido a esto se logra comprender el porqué de los algoritmos, procedimientos, reglas y cálculos. De esta manera, los resultados obtenidos adquieren un significado, permitiendo aplicar los conocimientos en situaciones más complejas relacionando lo abstracto con situaciones del mundo real presentadas o trabajadas anteriormente.

Retomando el ejemplo anterior en el nivel Intra se puede evidenciar en el estudiante las siguientes situaciones:

El estudiante no solo determina la derivada de $f(x)$, sino que presenta un desarrollo de comprensión de la derivada, que le permite comprender que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente o cómo cambia la pendiente de la recta a lo largo de $f(x)$. De esto el estudiante interpreta que la derivada de la función en un punto indica las unidades en que cambia y por cada unidad en x. Otra evidencia de que el estudiante esta en este nivel, es que identifica la relación abstracta de la derivada con el mundo real, es decir comprende que la derivada de la posición de un cuerpo en movimiento es la velocidad.

Nivel Trans: en este nivel se presenta una reflexión por parte del estudiante entre las relaciones ya establecidas y el desarrollo de nuevas estructuras. Permitiéndole lograr la compresión, abstracción y generalización, es decir puede afrontar situaciones no trabajadas anteriormente, pero donde se ve la aplicación del objeto desarrollado en diferentes contextos llegando en ocasiones a soluciones novedosas.

Finalmente, las evidencias que presenta un estudiante que se encuentra en este nivel y continuando con el ejemplo de la derivada, si al estudiante se le plantea la función que describe el movimiento de una partícula respecto al tiempo, está en la capacidad de comprender que la primera derivada de la función describe la velocidad de la partícula a lo largo del tiempo, pero no se queda solo con esto dado que puede ir más allá comprendiendo que la segunda derivada le permite describir la aceleración. Cabe resaltar que este mismo análisis lo pueden desarrollar en otras ciencias como la economía y la biología aun sin haberlas abordado anteriormente.

2.3.4.1 Rúbrica de los niveles de interpretación Intra, Inter y Trans en la derivada.

En relación con los niveles que permiten comprender la reorganización del conocimiento adquirido por los estudiantes, se describen los niveles de compresión de la derivada. Para explorar la interpretación del concepto de derivada en los Futuros Educadores Matemáticos que iniciaron el ciclo de profundización en la Universidad Pedagógica Nacional 2024-1, se tomaron como referencia los niveles establecidos por Salazar et al., (2009) para: "el esquema algebraico de la derivada y esquema gráfico de la derivada". Partiendo de estos, se establece a continuación cada uno de los niveles para las diferentes interpretaciones de la derivada:

- Interpretación gráfica
- Interpretación analítica
- Interpretación de la derivada como función

Tabla 6.

Rasgos de los niveles de interpretación gráfica de la derivada.

Nivel intra
a. No presenta una relación entre la pendiente de la recta tangente a la curva en $\boldsymbol{x = a}$ y la derivada de la función en $\boldsymbol{x = a}$.
b. Tiene una única interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica.
c. Confunde la derivada de la función $\boldsymbol{f'(x)}$ con la expresión analítica de la recta tangente a la curva en un punto fijo
d. Establece por medio de la gráfica de la función dónde la pendiente de la recta tangente es vertical o no está definida
e. Realiza un bosquejo de la función partiendo de una representación verbal de derivada
f. Establece por medio de la gráfica dónde la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero

Nivel inter
a. Asocia la función derivada para cada valor de x en el dominio con el valor correspondiente de la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto.
b. Interpreta la derivada como pendiente como el coeficiente de la variable x en la ecuación de la recta tangente.
c. Interpreta la gráfica de la recta tangente como el límite de las rectas secantes y como la recta tangente en un punto de la función.
d. Establece relaciones entre los elementos matemáticos analíticos o gráficos puntuales o globales permitiendo establecer una interpretación geométrica de la derivada con características globales
Nivel Trans
a. Realiza una traducción correcta entre representación analítica y gráfica de la derivada.

Tabla 7.

Rasgos de los niveles de interpretación analítica.

Nivel intra
a. No aplica la definición de límite para determinar la derivada
b. Presenta dificultades en la resolución de problemas de razón de cambio a partir de la información gráfica de la función
c. Confunde la variación media con la variación instantánea en algunos contextos
d. No coordina la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente y el límite de las tasas medias de variación, entendidas como función y número.
e. Para calcular el valor de la razón de cambio en $x = a$ requieren de la expresión analítica de $f(x)$, para calcular $f'(x)$ y finalmente evaluar $x = a$
Nivel inter
a. Aplica la definición de límite para determinar la derivada
b. Aplica la definición de límite para determinar la derivada en un punto
c. Interpreta e identifica con claridad la derivada en las diferentes representaciones de la derivada. (gráfica, analítica, tabular)
d. Hace uso correcto entre la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio en algunos contextos particulares, no en todos
e. Coordina gráficamente la pendiente de la recta tangente en un punto con la razón de cambio en un punto, para diferentes magnitudes que dependen del tiempo.
Nivel Trans
a. Interpreta la $f'(x)$ y la $f''(x)$ en una variedad de contextos
b. Hace uso de la derivada para predecir cómo pueden llegar a variar la velocidad a lo largo del tiempo o en punto de un intervalo de tiempo a partir de la gráfica que modela un fenómeno.

Tabla 8.

Rasgos de los niveles de interpretación de la derivada como función.

	Nivel intra
a.	No esboza la gráfica de la función derivada partiendo de la gráfica de la función
b.	Calcula el signo y aplica el criterio de la primera derivada, pero no generaliza para hacer la representación gráfica de la función derivada.
c.	No esboza la gráfica de la función partiendo de la gráfica de la función derivada
d.	Determina en una gráfica los puntos en que la derivada presenta un máximo o un mínimo. Sin embargo, no puede construir la gráfica de la función derivada.
e.	No identifican las condiciones necesarias y suficientes para determinar intervalos donde la función es creciente o decreciente
	Nivel inter
a.	Construye la gráfica de $\boldsymbol{f'(x)}$ a partir de la función aplicando el criterio de la primera derivada, permitiendo describir la variación local y global de la función
b.	No ha construido una relación entre la derivada de una función y la derivada en un punto.
c.	Identifica que si una función es derivable en $\boldsymbol{x = a}$, entonces la función es continua $\boldsymbol{x = a}$
d.	Identifica que si una función es continua en $\boldsymbol{x = a}$**,** no siempre es derivable en $\boldsymbol{x = a}$
e.	Identifica que si una función no es continua en $\boldsymbol{x = a}$**,** entonces la función no es diferenciable en $\boldsymbol{x = a}$
f.	Identifica las condiciones necesarias y suficientes para determinar si la función es creciente o decreciente en un intervalo
	Nivel Trans
a.	Construye la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ a partir de la gráfica de la $\boldsymbol{f'(x)}$ aplicando la información que proporciona la gráfica de $\boldsymbol{f'(x)}$, permitiendo describir la variación local y global de la función
b.	Entiende la función derivada como una función que a cada valor de $\boldsymbol{x}$ le hace corresponder la derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ en dichos puntos del dominio y sobre ella se puede realizar otras interpretaciones entre ellas la que corresponde a la segunda derivada.
c.	Hace traducciones entre las diferentes representaciones de la función y la función derivada
d.	Interpreta los cambios que produce en los puntos críticos cuando la función se somete a transformaciones
e.	Maneja con propiedad los criterios de la primera derivada y segunda derivada para describir tanto la variación local como global de una función representada gráficamente, lo cual permite transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada

3 Metodología del Trabajo

A continuación, se presenta una descripción de los diferentes momentos en el desarrollo del trabajo. Estos momentos están basados en la propuesta sobre las etapas de investigación de Fox (1891) citado por (Salazar et al., 2009.p. 67) los cuales son: diseño, recolección de datos, análisis de datos y resumen de resultados. Por ende, mediante la aplicación del cuestionario. Se pretende, a través de los niveles (Intra, Inter y Trans), explorar la interpretación del concepto de derivada en los Futuros Educadores Matemáticos que iniciaron el ciclo de profundización en la Universidad Pedagógica Nacional 2024-1.

1° Momento. Diseño: El primer momento va dirigido al enriquecimiento del conocimiento acerca de las diferentes interpretaciones de la derivada. Para ello, se hizo un análisis documental en trabajos de grado, artículos, libros, y publicaciones. El material usado permitió investigar acerca de la historia de derivada, las definiciones de la derivada, conceptos asociados a la derivada, errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de la derivada, representaciones y niveles de interpretación.

A partir de lo anterior, se dio paso a realizar un proceso de elaboración y selección de diez (10) preguntas para la creación del cuestionario, esta selección se realizó considerando las diferentes interpretaciones de la derivada, de tal forma que todas las preguntas no apuntaran a una misma categoría. Además, se tuvieron en cuenta las diferentes propuestas de preguntas presentadas en: Salazar et al., (2021), Fuentealba et al., (2018), González et al., (2018), Sánchez et al., (2007) y (Dolores, 1998).

2° Momento. Recolección de datos: Para la aplicación del cuestionario, la población seleccionada son 11 estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional de la Licenciatura de Matemáticas que iniciaron su etapa de profundización en el periodo 2024-1, cabe aclarar que previamente no se les informó sobre la aplicación del cuestionario. Por otro lado, se buscaba identificar los saberes desarrollados en la licenciatura en cuanto a la derivada, interpretación de la derivada y sus diferentes representaciones. Entre las interpretaciones que se abordaron están: la interpretación gráfica, la interpretación como razón de cambio relacionada con el movimiento y como función donde se relaciona f , f' y f''.

3° Momento análisis: el análisis de los datos se realizó después de la aplicación del cuestionario, donde se dio paso a observar y analizar los diferentes errores, dificultades u obstáculos que presentaron los estudiantes. Adicionalmente, se realizó una identificación de los rasgos de los niveles de interpretación de la derivada,

4° Momento. Resumen de resultados: el resumen de resultados se realizó por cada una de las preguntas, revisando las respuestas encontradas y nombrando los errores y dificultades que se pueden evidenciar en las diferentes respuestas. Por otro lado, se presenta un gráfico que permiten reconocer alguna característica de un hallazgo importante encontrado. Además, se presentan algunas respuestas particulares encontradas y finalmente, una relación entre las respuestas y los rasgos de los diferentes niveles de interpretación de la derivada.

Es importante indicar que en el cuestionario se les preguntó por la modalidad en que habían cursado el curso de cálculo diferencial. Lo cual dio como resultado que 10 estudiantes la vieron de forma virtual y solo uno presencial, por tanto, los resultados que se presenten no harán mención a este aspecto.

4 Propuesta de instrumento para el estudio de los niveles de interpretación de la derivada

En el presente capitulo se presenta el cuestionario aplicado. Cada una de las preguntas del cuestionario se presenta en una tabla con la siguiente estructura:

Tabla 9.

Estructura tabla de preguntas del cuestionario

Pregunta	
Interpretación	Gráfica, analítica o derivada como función
Intención de la pregunta	
Solución	
Justificación de la solución	
Elementos matemáticos abordados	

Nota: en el apartado de interpretación se aclara que, aunque la pregunta puede llegar a presentar una o varias de las interpretaciones solo se nombra la que más prevalece según los criterios que se van a evaluar de acuerdo con la rúbrica construida para los niveles de compresión y la intención de la pregunta.

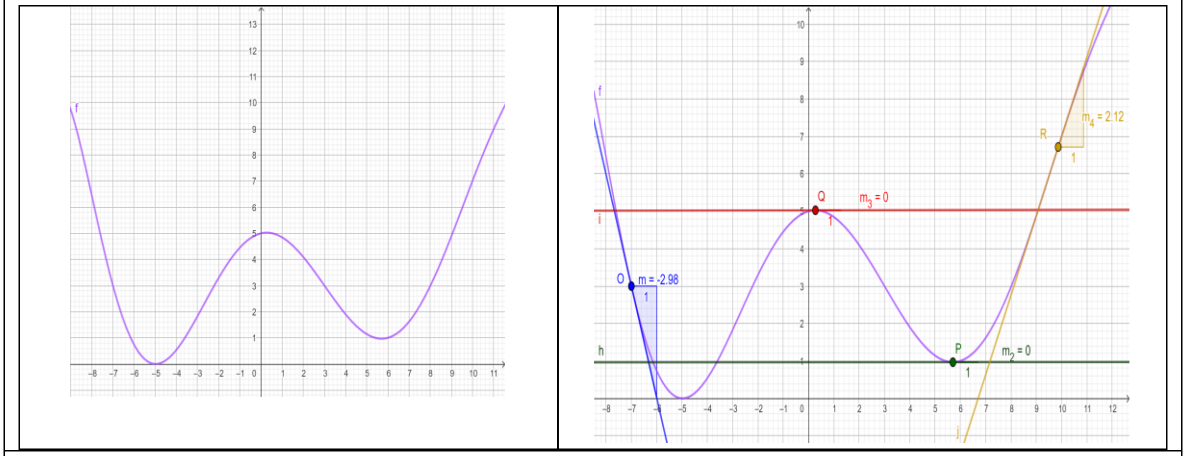
Entre las características que presentan las preguntas del cuestionario es que en ninguna se presenta la expresión algebraica de la función. Además, ninguna de las preguntas va dirigida a evaluar si aplican de forma correcta reglas derivación dado que no es el eje central de este trabajo.

4.1 Cuestionario para la exploración de los niveles de interpretaciones de la derivada

Tabla 10.

Pregunta uno: realización de la gráfica de una función dadas unas condiciones.

1. Realice una gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:
   a) Tiene dos puntos en los que la derivada es cero
   b) Corta el eje y en 5
   c) Corta el eje x en -5
   d) Es creciente en el intervalo $(6, \infty)$
   e) La derivada es menor que cero en el intervalo $(-\infty, -5)$

<table>
<tr><td>Interpretación</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intención: con esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción de la representación verbal de la derivada a la representación gráfica de la función. Por otro lado, se pretende evidenciar cómo plantean una función dadas unas condiciones. Para esto se espera que el estudiante considere relaciones que se pueden presentar, entre las que encontramos: el comportamiento de la derivada en un intervalo, intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función e interpretación de condiciones en un punto donde pueden existir máximos o mínimos y la derivada en relación con su monotonía. Además, de evidenciar si los estudiantes realizan bosquejos de la función partiendo de una descripción verbal de la misma, se pretende identificar cómo bosquejan una gráfica donde se cumple que la pendiente de la recta tangente es menor a cero. Finalmente se busca reconocer si identifican las condiciones para establecer si una función es creciente o decreciente en un intervalo. De tal forma que se evidencie si establecen relaciones entre los distintos elementos matemáticos gráficos puntuales o globales de la derivada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posible solución correcta

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificación: Aunque se reconoce que existen varias posibles soluciones correctas, que podrían incluir funciones que no sean continuas y que pueden cumplir con las condiciones planteadas, se propone la respuesta indicada en la que se cumple que en el intervalo $(-\infty, -5)$ la pendiente de la recta tangente es menor que cero, en este intervalo la función es decreciente. Otra condición es que la gráfica debe tener dos puntos donde la derivada es cero, si se observa la recta de color rojo y verde tienen pendiente cero, en el punto Q la función presenta un máximo y en punto P presenta un mínimo. Por último, una de las condiciones es que la función sea creciente en el intervalo $(6, \infty)$, lo que se interpreta como que la derivada es mayor que cero.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementos matemáticos abordados:
- Derivada de una función
- Máximos o mínimos y continuidad.
- Pendiente de la recta tangente en un punto de la función</td></tr>
</table>

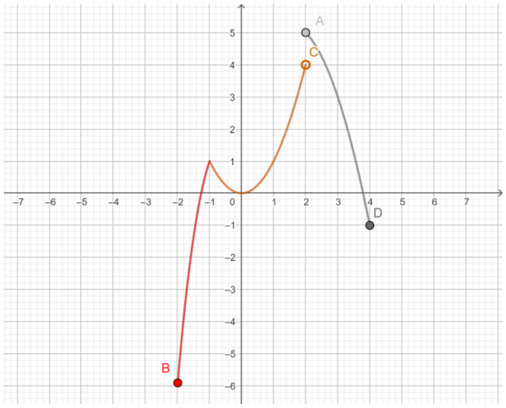
Nota: la realización de esta pregunta es una adaptación de la presentada por (Fuentealba et al., 2018, p. 9)

Tabla 11.

Pregunta dos: identificación de máximos, mínimos y derivabilidad de una función.

<table>
<tr><td colspan="2">

2. A partir de la gráfica que se presenta a continuación es posible afirmar que:

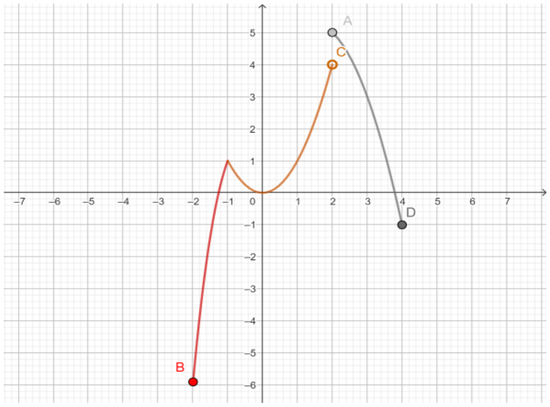


(seleccione todas las respuestas que considere correctas)

a) Tiene un máximo absoluto en $x = -1$
b) Tiene un mínimo absoluto en $x = -2$
c) La función es diferenciable en x = -1
d) La función es diferenciable en $x = 2$
e) Tiene solo un mínimo local en el intervalo [-2,4]

</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intención: mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción entre la representación gráfica de la función y la representación verbal de la derivada. Adicionalmente, busca indagar si el estudiante reconoce en la representación gráfica: los máximos o mínimos absolutos o relativos, puntas y puntos de no continuidad. Además de identificar cómo establece relaciones entre los elementos matemáticos gráficos puntuales o globales e indagar si los estudiantes comprenden que si una función es continua en $x = a$, no siempre la función es derivable en $x = a$ y de igual manera, si comprenden que una función no continua en $x = a,$ no es diferenciable en dicho punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Solución:



Las afirmaciones que son correctas según la función dado son:

b) Tiene un mínimo absoluto en $x = -2$

</td></tr>
</table>

Justificación: La función presenta un máximo absoluto en $x = 2$, dado que se cumple que $f(2) \geq f(x)$ para todos los x que pertenecen a [-2,4]. Por otro lado, tiene un mínimo absoluto en $x = -2$ que corresponde el punto B siendo esta la única afirmación verdadera que se puede hacer de la función f. Por otro lado, la función no es diferenciable en dos puntos. El primero que se puede reconocer es en $x = -2$, dado que en este punto se cumple que $\lim_{x\to-2^+} f(x) \neq \lim_{x\to-2^-} f(x)$, por lo tanto, se presenta una discontinuidad de la función. El segundo punto donde la función no es diferenciable es en $x = -1$ porque, aunque la función es continua presenta una "punta", por tanto, las derivadas por derecha y por izquierda no son iguales. Finalmente, la función en el intervalo [-2,4] presenta dos mínimos locales los cuales están en $x = 0$ y $x = 4$
Elementos matemáticos abordados: • Si una función es derivable en $x = a$ entonces la función es continua en $x = a$. • No existencia de la recta tangente en puntos donde la función presenta puntas. • Máximos o mínimos relativos y absolutos de una función

Nota: la realización de esta pregunta es una adaptación de la presentadas por (Fuentealba et al., 2018, p. 11)

Tabla 12.

Pregunta tres: identificación de la derivada a partir de la definición

<table>
<tr><td colspan="2">**3.** ¿Cuál de las siguientes opciones representa a $M'(2)$ si $M(x) = \sin x^2$?
a. $\lim_{x\to2}\frac{\sin x^2-\sin 4}{x-2}$
b. $\lim_{x\to2}\frac{\sin 2^2-\sin 4}{2-2}$
c. $\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)^2-\sin x^2}{h}$
d. $\lim_{h\to0}\frac{\sin(2+h)^2-\sin 4}{h}$</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Analítica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intención: Mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción de la representación verbal a la presentación analítica de la derivada. Por otro lado, busca reconocer si los estudiantes comprenden y aplican la definición de derivada, para este caso se pretende evidenciar si el estudiante mediante el uso de la definición identifica la derivada en un punto. Además, se busca identificar cómo el estudiante hace uso de las diferentes representaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Solución: Para dar respuesta a la pregunta, las opciones que son correctas para la derivada de la función $M(x) = \sin x^2$ considerando que se evalúa $x = 2$ en la derivada son:
a. $\lim_{x\to2}\frac{\sin x^2-\sin 4}{x-2}$
$d. \lim_{h\to0}\frac{\sin(2+h)^2-\sin 4}{h}$</td></tr>
</table>

Justificación: Para selección de estas respuestas se tiene que la primera opción se puede considerar a partir de:

$f'(x)= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Haciendo uso de esta definición, si se reemplaza por la función $M(x)=\sin x^2$ se tiene como resultado:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x^2-\sin a^2}{x-a}$$

Para $M'(2)$ se tiene

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin x^2-\sin 2^2}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin x^2-\sin 4}{x-2}$$

Para la segunda opción correcta se tiene

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para $M'(2)$ si $M(x)=\sin x^2$ se tiene:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2+h)^2-\sin(2)^2}{h}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2+h)^2-\sin 4}{h}$$

Elementos matemáticos abordados:

- Definición de derivada
- Recta tangente a una curva en un punto.

Nota: pregunta adaptada de las propuestas en Vargas , (2020)

Tabla 13.

Pregunta cuatro: identificación de la derivada dada su definición.

4. ¿A qué valor de la derivada de $f(x)$ en el valor indicado corresponde la siguiente expresión?

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{x-1}$$

a. $f'(0)$, donde $f(x)=e^x$
b. $f'(1)$, donde $f(x)=e^{2x}$
c. $f'(1)$, donde $f(x)=e^{2x}-e^x$
d. $f'(0)$, donde $f(x)=e^{2x}-e^x$

Interpretación	Analítica

Intención: Esta pregunta busca que el estudiante a partir de una representación analítica de la derivada identifique la función y el valor de x en el que se calculó, mediante el uso correcto de la definición de límites para calcular la derivada. Por otro lado, se busca establecer si establecen relación entre la derivada de una función y la derivada en un punto.

Solución: La expresión que describe $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}$ es la opción $b.\ f'(1)$, donde $f(x) = e^{2x}$

Justificación: para saber qué expresión describe el $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}$, se debe hacer uso de la definición de derivada en un punto.

Elementos matemáticos abordados:

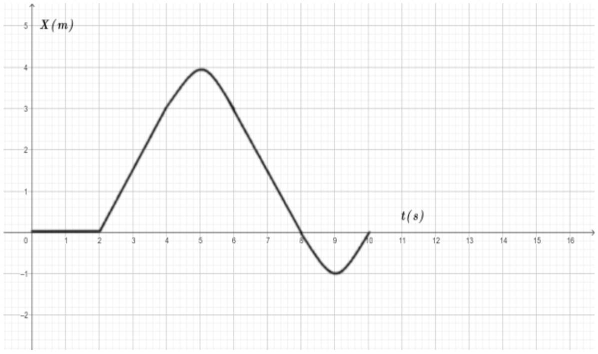
- Definición de derivada en un punto.

Nota: pregunta adapta de uno de los ejemplos propuestos en (Stewart, 2012)

Tabla 14.

Pregunta cinco: interpretación de la derivada como razón de cambio aplicada al movimiento.

5. La siguiente gráfica muestra la posición con respecto al tiempo de un cuerpo que se mueve sobre el eje x.



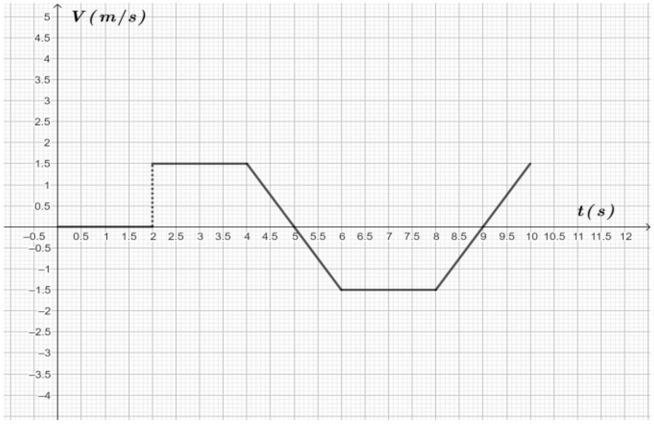
a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]
b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo.
c. ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique
d. ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique

Interpretación	5a Derivada como función 5b Gráfica 5c, 5d Analítica

Intención: mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice varias traducciones entre las representaciones de la derivada, entre las que se encuentran gráfica-gráfica, gráfica-descripción verbal, descripción verbal-descripción verbal. Adicionalmente, se busca indagar si los estudiantes esbozan la gráfica de la función derivada partiendo de la gráfica de la función. Por otro lado, busca identificar si aplica la derivada al análisis del movimiento de un cuerpo. Así mismo, se busca explorar si estudiante establece por medio de la representación gráfica dónde la derivada no está definida. Por ejemplo, en $t = 2$ la función no es diferenciable. Además, de identificar si el estudiante comprende dónde la pendiente de la recta tangente es menor, mayor o igual a cero y cómo interpreta esta información asociada al movimiento del cuerpo. Por ejemplo, en el intervalo $(5,9)$ la pendiente de la recta tangente es negativa lo que quiere indicar que el objeto se está moviendo en sentido negativo y en el intervalo $(9,10)$ se presenta una pendiente positiva de la recta tangente lo que indica que la partícula se está moviendo en sentido positivo. Además, se puede evidenciar en el movimiento, un intervalo donde la posición es constante e igual a cero, es decir que no hay desplazamiento. También evidenciar cómo aplica el criterio de la primera y segunda derivada para realizar representaciones gráficas y descripciones verbales de la función derivada, determinando dónde la función presenta máximos o mínimos mediante el uso de la gráfica. Finalmente, si diferencia la variación media con la variación instantánea en el contexto del movimiento.

Solución:

a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]



b. A continuación, se presenta la descripción

Tiempo	Descripción
Entre 0 y 2 s	Posición constante, Velocidad cero, aceleración 0.
2 s	Posición 0, Velocidad no existe
Entre 2 y 4 s	Cambio de posición de 0 m a 3 m, velocidad constante igual a 1,5 m/s, aceleración 0 m/s^2
Entre 4 y 5 s	Cambio de posición de 3 m a 4 m, velocidad disminuye, aceleración -1,5 m/s^2
5 s	Posición 4 m, Velocidad 0 m/s, aceleración -1,5 m/s^2

Entre 5 y 8 s	Cambio de posición de 4 m a 3 m, velocidad en sentido negativo aumenta; aceleración -1,5 m/s^2
Entre 6 y 8 s	Cambio de posición de 3 m a 0 m, velocidad constante igual a -1,5 m/s (sentido negativo), aceleración 0 m/s^2
Entre 8 y 9 s	Cambio de posición de 0 m a -1 m, velocidad disminuye (sentido negativo), aceleración 1,5 m/s^2
9 s	Posición -1 m, Velocidad 0 m/s, aceleración 1,5 m/s^2
Entre 9 y 10 s	Cambio de posición de -1 m a 0 m, velocidad aumenta (sentido positivo), aceleración 1,5 m/s^2
Entre 10 s	Se termina el intervalo de tiempo en consideración

a. ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique
   En el punto $t = 2$ la velocidad no existe.
b. ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique
   La aceleración en $t = 5$ es negativa y tiene un valor de $-1.5\ m/s^2$ y en $t = 9$ la aceleración es positiva y presenta un valor de 1.5 m/s^2

Justificación: Se encuentra relacionada en el ítem b donde se describe por cada intervalo de tiempo la velocidad y la aceleración.

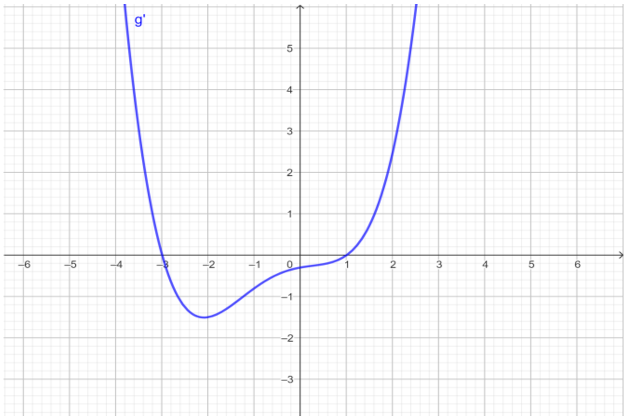
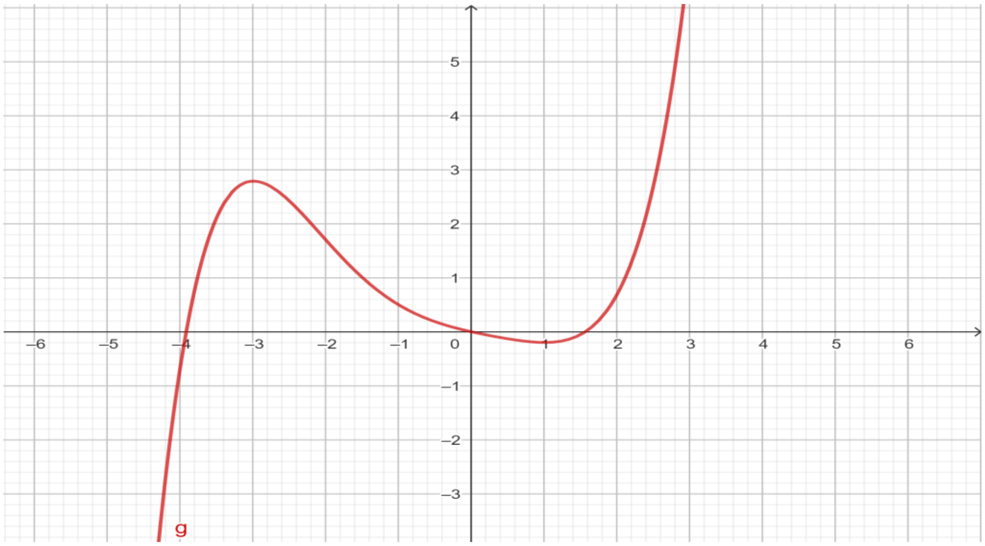
Elementos matemáticos abordados:

- Primera y segunda derivada de una función
- Interpretación de la derivada en las puntas de la gráfica
- Criterio de la primera derivada
- La derivada como aplicación al movimiento
- Interpretación de distancias, velocidades y aceleraciones negativas que se pueden presentar en un gráfico
- Velocidad instantánea y aceleración

Nota: esta es una pregunta adapta de las propuestas en Zemansky , (2004)

Tabla 15.

Pregunta seis: bosquejo de la función, dada la gráfica de la función derivada.

<table>
<tr><td colspan="2">6. Dada la siguiente gráfica de $g'(x)$, bosqueje una gráfica de $g(x)$ cuyo domino está definido en los reales.
 </td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Derivada como función</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intención: mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción de la representación gráfica de la derivada a la representación gráfica de la función. Además, se quiere evidenciar cómo construyen la gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de la $f'(x)$, aplicando la información que proporciona la gráfica de $f'(x)$ de la función. Así mismo, se busca identificar si pueden describir la variación local y global de la función. Adicionalmente, se pretende reconocer si aplican el criterio de la primera derivada y hacen uso de la información que esta les proporciona, para determinar características de la función, por ejemplo, donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Por otro lado, si aplican que la función derivada corresponde a la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función a lo largo del dominio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posible solución correcta:
 </td></tr>
</table>

Justificación: Para realizar el gráfico de la función dada la gráfica de la derivada, se deben observar los valores que toma $g'(x)$. Por ejemplo en el intervalo $(-\infty,-3)$ los valores que toma $g'(x)$ son positivos, lo que quiere decir que la función es creciente en este intervalo. Para el caso de $x=-3$, como $g'(-3)=0$ hay un punto crítico, posteriormente en el intervalo $(-3,1)$, los valores que toman son negativos, quiere decir que en este intervalo la función es decreciente. Por tal motivo existe un máximo en $x=-3$. En el intervalo $(1,\infty)$ los valores que toma $g'(x)$ son positivos lo que permite reconocer que la función es creciente en el intervalo $(1,\infty)$. En $x=1$ la función tiene un mínimo dado que se cumple que $g'(1)=0$.Finalmente, se observa que la función tiene un punto de inflexión en $x=-2$

Elementos matemáticos abordados:

- La función derivada como función.
- Criterio de la primera derivada
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función

Nota: la elboracion de esat pregunta es una adaptacion de la propuesta en (Sánchez et al., 2007) y Fuentealba et al., (2018)

Tabla 16.

Pregunta siete: calcular el valor de f´(a) dada una información de f.

7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Interpretación	Analítica

Intención: mediante esta pregunta se busca indagar acerca de los posibles métodos de solución empleados para estimar el valor de la derivada en un punto no conocido. Una posibilidad es determinar la función mediante los datos de la tabla, bajo el supuesto de que es continua, y posteriormente hacer uso de una de las reglas de derivación, para finalmente evaluar la derivada el punto solicitado, procedimiento que no se desarrolla para estimar sino para encontrar el valor exacto. Otra posibilidad, consiste en estimar la derivada como la pendiente de la recta secante tomando valores de la tabla. Así mismo, se pretende reconocer si se establece una relación entre la pendiente de la recta tangente y la derivada de la función, además de identificar con claridad la derivada en diferentes representaciones. Finalmente se busca saber si interpretan la recta tangente como el límite de las rectas secantes en un punto de la función.

Solución: Un valor estimado de $f'(4)$ considerando la tabla es 8.

Justificación: Para calcular el valor estimado de la derivada en $x=4$ se debe encontrar la derivada en el punto y como no se tiene una expresión analítica de la función no es posible usar la definición de la derivada en un punto. Si se hace uso de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos correspondientes a $x = 3$ y $x = 5$ se tiene que el valor aproximado es:

$$m = \frac{23 - 7}{5 - 3}$$
$$m = \frac{16}{2}$$
$$m = 8$$

Si se encuentra la expresión analítica, bajo el supuesto de que es continua, una posibilidad es $f(x) = x^2 - 2$, posteriormente se calcula $f'(x)$. Para este caso el resultado es $f'(x) = 2x$ y finalmente evaluar $f'(x)$ en $x = 4$

$$f'(x) = 2x$$
$$f'(4) = 2(4)$$
$$f'(4) = 8$$

Elementos matemáticos abordados;

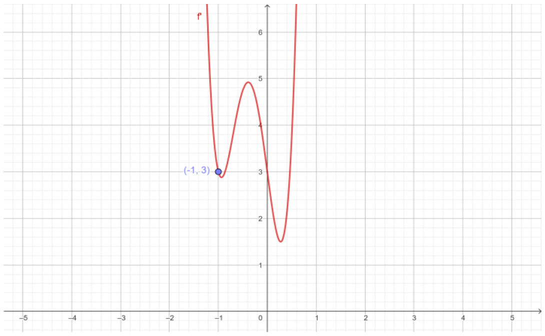
- Recta tangente en un punto de la función
- Razón de cambio media.

Nota. La elaboración de esta pregunta es una adaptación de la propuesta en Sánchez et al., (2007)

Tabla 17.

Pregunta ocho: interpretación f´(x).

8. Dada la siguiente gráfica de $f'(x)$



a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo [-1,0]? Justifique.
b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$? Justifique

Compruebe la veracidad de la siguiente afirmación:

c. Si $f'(0) = 3$ se puede afirmar que la función en $x = 0$ es decreciente.

Interpretación	Derivada como función

Intención: mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción de la representación gráfica de derivada a descripciones verbales. Además, se busca determinar si los estudiantes interpretan de la información que proporciona la gráfica de la función derivada de la función. Por ejemplo, si la función tiene puntos críticos, máximos o mínimos. Además, de evidenciar el uso del criterio de la primera derivada para inferir información del comportamiento de la función. Por ejemplo, intervalos de crecimiento o decrecimiento. Finalmente, evidenciar si han desarrollado una relación entre la pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada de la función en el punto.

Solución:

a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo [-1,0]?
   El comportamiento que presenta la función en el intervalo es creciente
b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$?
   La pendiente que tiene la recta tangente en $x = -1$ es 3
c. Compruebe la veracidad de la siguiente afirmación:

Si $f'(0) = 3$ se puede afirmar que la función en $x = 0$ es decreciente. Esta afirmación es falsa.

Justificación: Para saber el comportamiento que tiene la función en el intervalo [-1,0] se debe hacer uso del criterio de la primera derivada. Dado que se cumple que $f'(x) \geq 0$ entonces la función es creciente en el intervalo [-1,0]. Para saber la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ no es necesario graficar la función solo se debe recordar que la gráfica de la $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente en cada punto entonces como $f'(-1) = 3$, la pendiente de la recta tangente es 3.

Por último, la afirmación es falsa porque haciendo uso del criterio de la primera derivada se cumple que sí $f'(0) \geq 0$ por tal motivo la función es creciente.

Elementos matemáticos abordados:

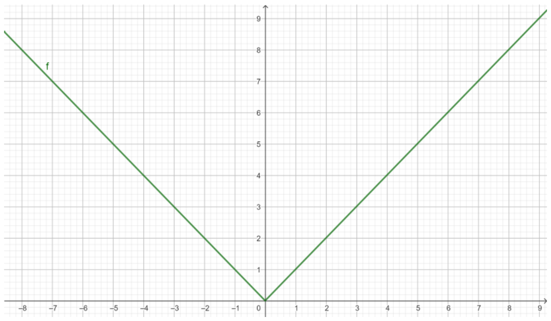
- Criterio de la primera derivada
- Monotonía de una función

Nota: la elaboración de esta pregunta es una adaptación de la presentada en Fuentealba et al., (2018)

Tabla 18.

Pregunta nueve: interpretación de la derivada en una punta de la gráfica.

9. Dada la gráfica de $f(x) = |x|$



a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $x = 0$?

Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación:

b. Como la función es continua, es derivable en $x = 0$

Interpretación	Gráfica

Intención: mediante esta pregunta se busca que el estudiante realice una traducción de la representación gráfica de la función a la representación verbal de la derivada. Además, de evidenciar si comprende que, aunque una función sea continua en $x = a$ no necesariamente es diferenciable en $x = a$. Por otro lado, se pretende determinar si establecen a partir de la gráfica dónde la pendiente de la recta tangente no está definida. Así mismo, evidenciar si establecen relación entre la pendiente de la recta tangente en $x = a$ y la derivada en $x = a$.

Solución:

a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(0)$?
   La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ no existe
b. Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación:
   Como la función es continua es derivable en $x = 0$

Esta afirmación es falsa

Justificación: La pendiente de la recta tangente no existe dado que la gráfica de la función tiene una punta, aunque la función es continua no es derivable en $x = 0$, esto se puede verificar al calcular las dos derivadas laterales se obtiene que el $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0}$.Al observar la gráfica se evidencia que por izquierda la pendiente de la recta tangente es -1 y por derecha la pendiente de la recta tangente es 1.

Si hacemos uso de la definición de valor absoluto que dice:

$$f(x) = |x| = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos verificar si la función es derivable en $x = 0$ calculando las derivadas laterales

1. Derivada lateral cuando $x \to 0^+$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

2. Derivada lateral cuando $x \to 0^-$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Dado que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ la función no es derivable en $x = 0$

Elementos matemáticos abordados:

- Derivabilidad de una función en un punto
- Derivada en los puntos en que hay puntas.

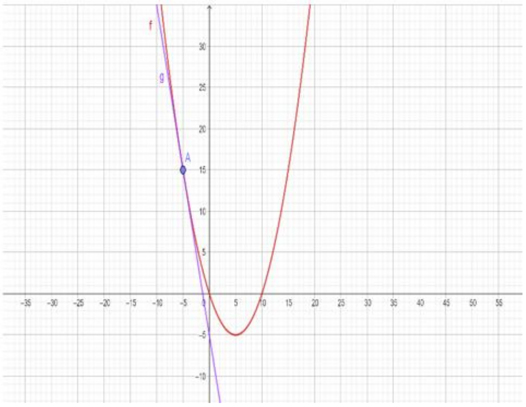
Nota: está pregunta de tomó y adaptó de uno de los ejemplos presentados en (Larson, 2010,p. 102)

Tabla 19.

Pregunta diez: Recta tangente en un punto de la función.

<table>
<tr><td colspan="2">

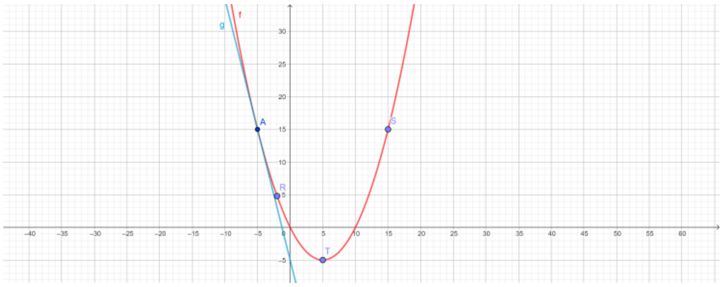
10. La recta g es tangente a la gráfica de $f(x)$, en el punto A



a. Determine el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = -5$
b. Marque en la gráfica un punto R en el cual la derivada de $f(x)$ es menor que cero.
c. Marque en la gráfica un punto S en el cual la derivada de $f(x)$ es mayor que cero.
d. Marque en la gráfica un punto T en el cual la derivada de $f(x)$ es igual que cero.
</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intención: esta pregunta permite que el estudiante realice una traducción de la representación gráfica de la función a la representación gráfica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en un punto y a lo largo de la gráfica de la función, Así mismo, permite explorar cómo hacen uso de la representación gráfica de la derivada para establecer dónde la pendiente de la recta tangente es menor, mayor o igual a cero a lo largo del dominio de la función.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Solución:

a. El valor de la derivada en $x = -5$ es -4



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificación: Para poder encontrar el valor de la derivada en $x = -5$ es como calcular el valor de la pendiente de la recta tangente g por tal motivo los cálculos correspondientes son:</td></tr>
</table>

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{15 - (-5)}{-5 - (0)}$$

$$m = \frac{15 + 5}{-5}$$

$$m = \frac{20}{-5}$$

$$m = -4$$

Otra forma de obtener la respuesta es que a partir de la observación indique que por cada unidad que aumenta el valor de x, el valor de y disminuye 4 unidades. Para la ubicación de los diferentes puntos, se debe tener en cuenta que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en dicho punto. Por tal motivo, como la $f'(x) < 0$ en el intervalo $[-5,0]$ se ubicar el punto R en este intervalo. Por otro lado, se cumple que si $f'(x) = 0$ existe un mínimo de la función, por lo tanto, se puede ubicar en punto T en $x = 5$ y finalmente para ubicar el punto S, se debe cumplir que $f'(x) > 0$ por lo tanto esta condición se cumple en el intervalo $[10,15]$ dado que el comportamiento de la función es creciente en este intervalo.

Elementos matemáticos abordados:

- Pendiente de la recta
- Recta tangente en un punto de la función
- Criterio de la primera derivada

Nota: esta pregunta se adaptó de la presentada por (Salazar Amaya et al., 2009,p. 70-71)

A continuación, se presenta la **tabla 20** que resume la clasificación de las preguntas según la interpretación de la derivada (gráfica, analítica, derivada como función) que aborda.

Tabla 20.

Estructura general del cuestionario

INTERPRETACIÓN	PREGUNTAS
Gráfica	1,2,5b,9,10
Analítica	3,4,5c,5d,7
Derivada como función	5a,6,8

5 Análisis de la prueba

En presente apartado se identifican rasgos de los niveles de interpretación de la derivada encontradas en los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional que respondieron el cuestionario propuesto. Para el análisis, se presentan algunas ilustraciones de las respuestas obtenidas, en algunas, a manera de resumen, se presentan datos estadísticos. Así mismo, Se relacionan algunos hallazgos encontrados con errores, dificultades u obstáculos que se presentan en la interpretación de la derivada.

Para el desarrollo del análisis cuando se quiera especificar hallazgos encontrados en un estudiante en específico, se nombra haciendo uso de la letra E y un número asignado.

5.1 Análisis de los resultados

A continuación, se presenta el análisis de los resultados por cada una de las preguntas.

5.1.1 Pregunta Uno

Realice una gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

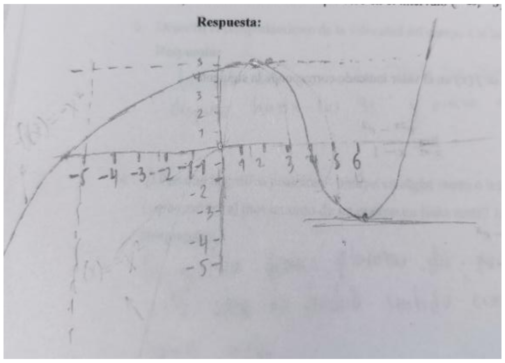
a) Tiene dos puntos en los que la derivada es cero
b) Corta el eje y en 5
c) Corta el eje x en -5
d) Es creciente en el intervalo (6,∞)
e) La derivada es menor que cero en el intervalo $(-\infty, -5)$

En esta pregunta ocho (8) estudiantes realizaron un bosquejo, uno de ellos realizó cinco (5) bosquejos, debido a que realizó uno por cada condición. Un estudiante no realizó el bosquejo de la función y en el esbozo de otro estudiante no se puede inferir con exactitud que cumpla las condiciones dadas, debido a que no representó correctamente el plano cartesiano. Por lo tanto, solo tres de los ochos estudiantes realizaron un bosquejo que cumpliera con todas las condiciones dadas. A continuación, se muestran los hallazgos obtenidos.

Un rasgo del nivel inter de la derivada como función que se puede evidenciar consiste en que identifican si la función es creciente o decreciente en un intervalo y realizan un bosquejo correcto de esta condición. Por otro lado, también se identifica que no se ha desarrollado por completo el rasgo del nivel inter de la interpretación gráfica: "Establece relaciones entre los elementos matemáticos analíticos o gráficos puntuales o globales permitiendo establecer una interpretación geométrica de la derivada con características globales", pues se pide graficar un intervalo donde la función es decreciente y lo hacen correctamente, pero al indicar que realice un gráfico donde la derivada sea menor a cero no lo hacen correctamente. Como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 17.

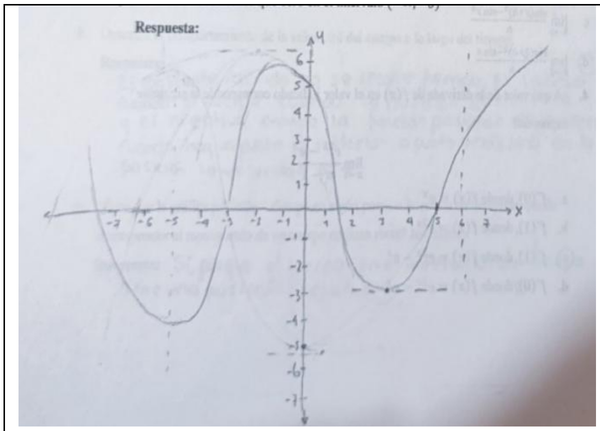
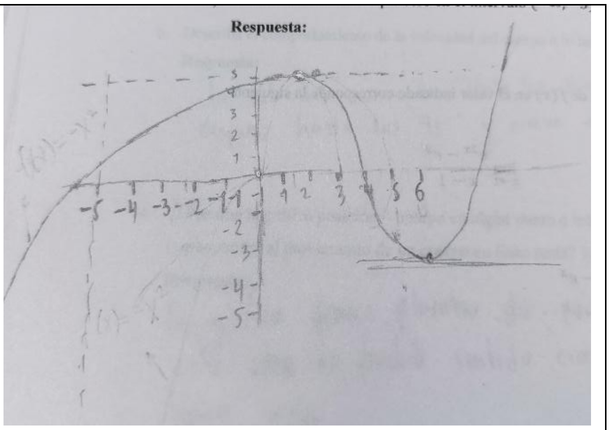
Dificultad en la interpretación global de la derivada.



Por otro lado, algunos estudiantes presentan dificultad con la identificación de las abscisas y las ordenadas. A continuación, se presenta esta dificultad:

Tabla 21.

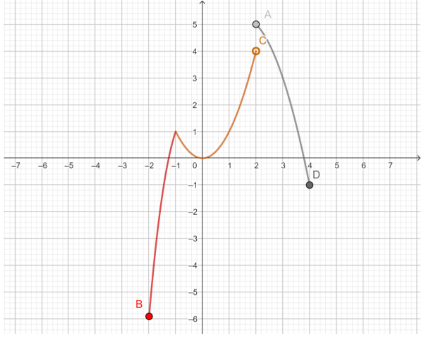
Bosquejos presentado por estudiantes

	
El estudiante E6 no realiza el corte con el eje x, en $x = -5$. Por el contrario, en $x = 5$ ubica un minimo de la función.	El estudiante E9 no realiza el corte en $y = 5$ y tampoco realiza el corte en $x = -5$ pero en ambos casos traza unas lineas no continuas en estos puntos.Ademas, tambien se puede identificar que no cumple con la condicion de que la derivada sea menor a cero en el intervalo $(-\infty, -5)$

De lo anterior, se puede afirmar que los ocho estudiantes no establecieron una relación entre la pendiente de la recta tangente y la derivada en un punto de forma correcta, Además, no realizan un bosquejo de la función partiendo de una representación verbal de derivada que es un rasgo establecido para el nivel intra de la interpretación gráfica de la derivada.

5.1.2 Pregunta Dos

A partir de la gráfica que se presenta a continuación es posible afirmar que:



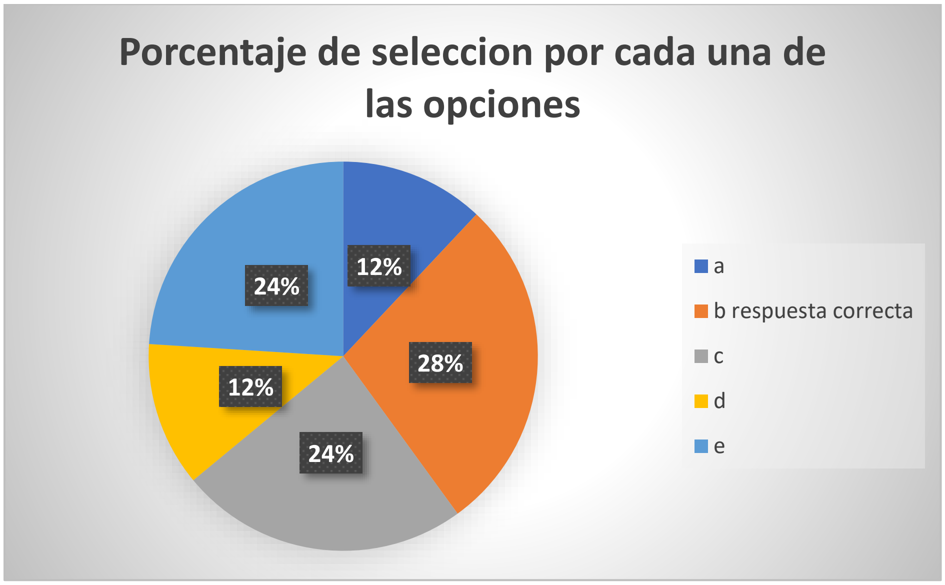
(seleccione todas las respuestas que considere correctas)

a) Tiene un máximo absoluto en $x = -1$
b) Tiene un mínimo absoluto en $x = -2$
c) La función es diferenciable en x = -1
d) La función es diferenciable en $x = 2$
e) Tiene solo un mínimo local en el intervalo [-2,4]

A continuación, se presenta un diagrama que permite identificar el porcentaje de selección por cada una de las opciones:

Figura 18.

Porcentaje de selección de cada una de las opciones



Entre los hallazgos encontrados en esta pregunta, se evidencia que determinan mediante el uso de la gráfica los puntos en que la función presenta un máximo o un mínimo, por ejemplo, reconocen que donde la gráfica presenta una punta de la función hay un máximo, siendo esto un rasgo del nivel intra en la interpretación de la derivada como función. También, se reconoce que se presentan algunos rasgos del nivel inter de la derivada como función, dado que identifican que si una función es continua en $\boldsymbol{x = a}$, no necesariamente es diferenciable en $\boldsymbol{x = a}$ y así mismo, logran identificar que si la función no es continua en $\boldsymbol{x = a}$, entonces la función no es diferenciable en este punto.

5.1.3 Pregunta Tres

¿Cuál de las siguientes opciones representa a $M'(2)$ si $M(x) = \sin x^2$?

a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin x^2 - \sin 4}{x-2}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin 2^2 - \sin 4}{2-2}$

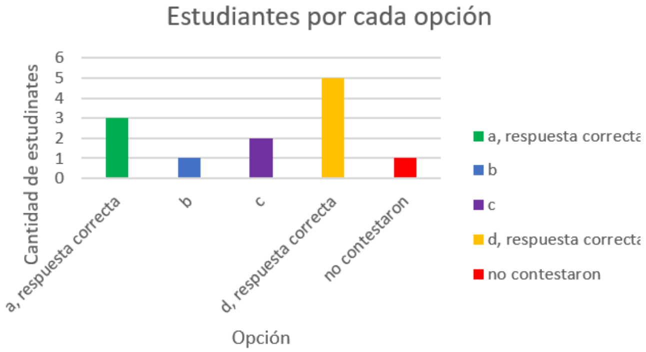
c) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)^2 - \sin x^2}{h}$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2+h)^2 - \sin 4}{h}$

A continuación, se presenta un gráfico que relaciona las opciones con la cantidad de estudiantes que la seleccionaron.

Figura 19.

Cantidad de estudiantes que seleccionaron cada opción



Uno de los hallazgos encontrados es que no todos los estudiantes marcaron las dos opciones que eran correctas. El estudiante E2 fue el único que marco las dos opciones correctas, lo cual ilustra el rasgo del nivel inter de la interpretación analítica de la derivada: “Interpreta e identifica con claridad la derivada en las diferentes representaciones de la derivada. (gráfica, analítica, tabular)”. En este caso se evidencia que puede relacionar diferentes representaciones analíticas como lo son las definiciones formales de la derivada y aplicarlas en algunos casos particulares. Algunos estudiantes seleccionaron c, se esperaba que como respuesta se apuntara a que “Aplica la definición de límite para determinar la derivada en un punto”, sin embargo, identifican la definición para un valor de *x*

5.1.4 Pregunta Cuatro

¿A qué valor de la derivada de $f(x)$ en el valor indicado corresponde la siguiente expresión?

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}$$

a) $f'(0)$, donde $f(x)=e^{x}$
b) $f'(1)$, donde $f(x)=e^{2x}$
c) $f'(1)$, donde $f(x)=e^{2x}-e^{x}$
d) $f'(0)$, donde $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

A continuación, se presenta una tabla que muestra la cantidad de estudiantes que marcaron cada una de las opciones.

Tabla 22.

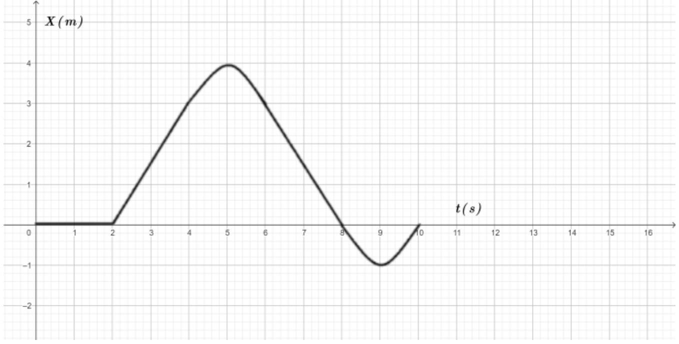
Tabla de frecuencia de la pregunta cuatro

Opción	Número de estudiantes	Porcentaje
A	0	0
B respuesta correcta	6	54,5
C	5	54,5
D	0	0

Esta pregunta permite identificar que cinco de las respuestas ilustran el rasgo nivel intra en la interpretación analítica de la derivada: “no aplica la definición de límites para determinar la derivada”. Por otro lado, se evidencian 6 respuestas que ilustran los rasgos del nivel inter en la interpretación de la derivada como función: “Interpreta e identifica con claridad la derivada en las diferentes representaciones de la derivada” y “Aplica la definición de límite para determinar la derivada en un punto”.

5.1.5 Pregunta Cinco

La siguiente gráfica muestra la posición con respecto al tiempo de un cuerpo que se mueve sobre el eje *x*.

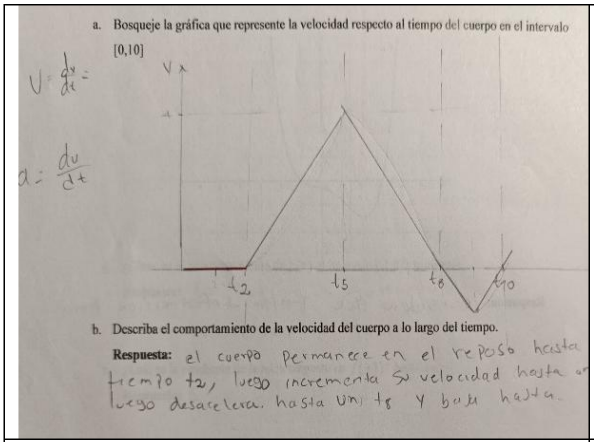
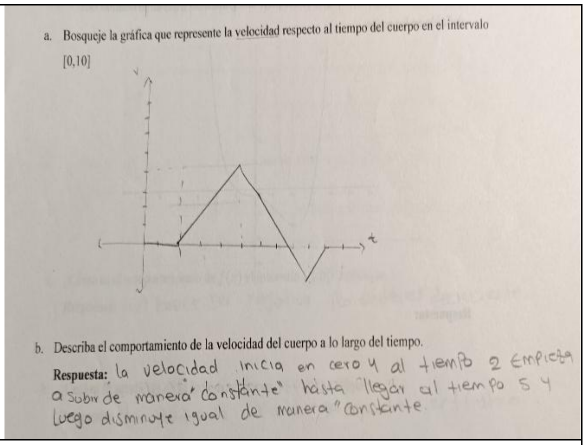


a) Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]
b) Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo.
c) Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]
d) Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo.
e) Para el análisis de la pregunta cinco se clasificaron las respuestas considerando

Para el análisis de la pregunta cinco se clasificaron las respuestas considerando algunas similitudes presentadas en el bosquejo de la gráfica solicitada en el ítem a. Además, se relaciona cómo describe el movimiento en el ítem b con lo presentado en el ítem a. El primer grupo corresponde a las gráficas que presentan puntas en los bosquejos realizados, el segundo grupo corresponde a gráficas que presentan funciones a trozos y el tercer grupo corresponde a gráficas con puntos de discontinuidad.

Tabla 23.

Respuestas grupo gráficas que presentan puntas

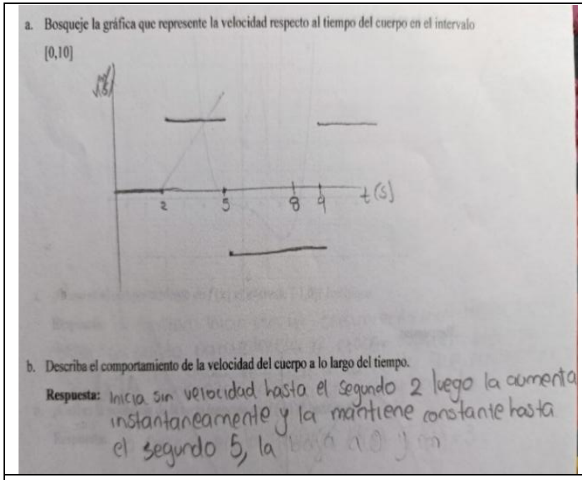
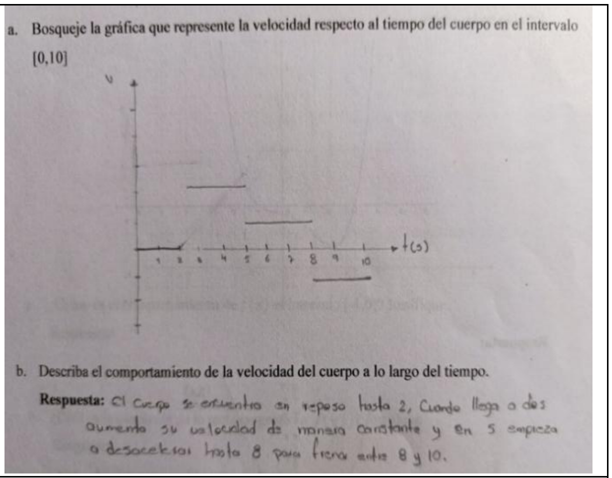
 a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10] $V = \frac{dx}{dt} =$ $a = \frac{dv}{dt}$ b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo. **Respuesta:** el cuerpo permanece en el reposo hasta tiempo t2, luego incrementa su velocidad hasta luego desacelera. hasta un t8 y baja hasta.	 a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10] b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo. **Respuesta:** la velocidad inicia en cero y al tiempo 2 empieza a subir de manera "constante" hasta llegar al tiempo 5 y luego disminuye igual de manera "constante.
El estudiante E11 presenta una respuesta que evidencia intervalos donde hay aumento o disminución de la velocidad, pero no realizan la gráfica de la función derivada correctamente. Se puede identificar que en su hoja de respuestas escribió “$v = \frac{dx}{dt}$” permitiendo identificar que asocia la velocidad con respecto al tiempo con la velocidad	el estudiante E7 expone que el aumento de la velocidad es “constante” por tal motivo la respuesta muestra una interpretación incorrecta de la pendiente de la recta tangente, realizando un bosquejo equivocado de la función derivada.

Estas dos respuestas ilustran el rasgo descrito en el nivel Intra de la interpretación gráfica relacionado con que no presentan una relación en entre la recta tangente en un punto de la función y la derivada de función en el punto. Se observa que ambas respuestas se identifican con el rasgo del nivel Intra respecto a la interpretación analítica de la derivada, no coordina la razón de cambio con la pendiente de la recta tangente entendidas como función y número.

A continuación, se realiza el análisis del segundo grupo correspondiente a las gráficas que se realizaron a trozos.

Tabla 24.

Respuestas grupo por trozos

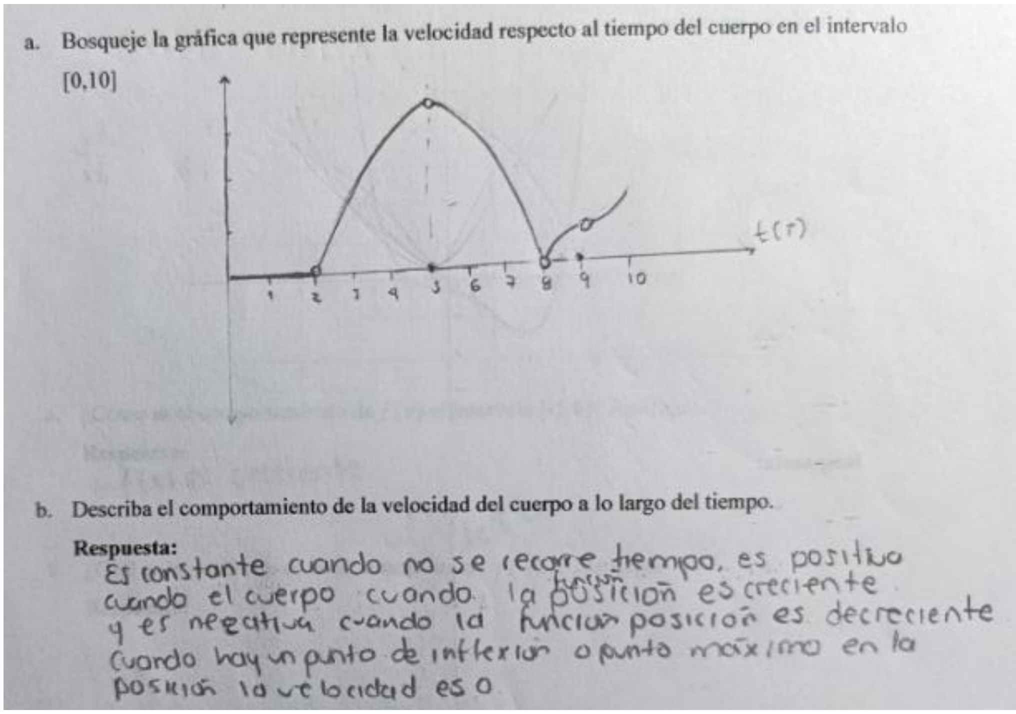
 a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10] b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo. **Respuesta:** Inicia sin velocidad hasta el segundo 2 luego la aumenta instantaneamente y la mantiene constante hasta el segundo 5, la baja a 0 y [illegible]	 a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10] b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo. **Respuesta:** El cuerpo se encuentra en reposo hasta 2, Cuando llega a dos aumenta su velocidad de manera constante y en 5 empieza a desacelerar hasta 8 para frenar entre 8 y 10.
En esta respuesta del estudiante E2 se observa una gráfica de la función derivada a trozos.	En la respuesta del estudiante E5 se muestra una función a trozos, similar al estudiante E2, con diferencias en los signos atribuidos a la velocidad.

En ambos casos se evidencia una confusión con la velocidad instantánea, la pendiente de la recta tangente y derivada como función, en ambos casos realizaron la gráfica de una función discontinua. Finalmente, en ambas respuestas se presentan rasgos del nivel intra en la interpretación de la derivada como función “no esboza la gráfica de la función derivada partiendo de la gráfica de la función”, lo que genera que presenten dificultad en obtener la gráfica de $f'(x)$ dada la gráfica de $f(x)$.

Ahora se realiza el análisis del tercer grupo denominado gráficas con puntos de discontinuidad. En este grupo se encuentran respuestas de la gráfica de la velocidad respecto al tiempo del cuerpo como se muestra a continuación:

Figura 20.

Gráficas con puntos de discontinuidad



a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]

b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo.

Respuesta:
Es constante cuando no se recorre tiempo, es positivo
cuando el cuerpo cuando la función posición es creciente
y es negativa cuando la función posición es decreciente
cuando hay un punto de inflexión o punto máximo en la
posición la velocidad es 0

En la respuesta del ítem b, se evidencia rasgos del nivel trans de la interpretación de la derivada porque cumple con el indicador que dice: "Hace traducciones entre las diferentes representaciones de la función y la función derivada" en este caso se evidencia que realiza una traducción correcta de la gráfica de la función a una descripción verbal de la función derivada. Pero también, en el ítem a se evidencia el rasgo de nivel intra en la interpretación de la derivada como función "no esboza la gráfica de la función derivada partiendo de la gráfica de la función".

Otro rasgo del nivel intra en la interpretación de la derivada como función es que "determina en una gráfica los puntos en que la derivada presenta un máximo o un mínimo. Sin embargo, no puede construir la gráfica de la función derivada". Este rasgo se puede evidenciar porque interpreta adecuadamente puntos en que la velocidad es cero, pero en el momento de hacer el gráfico en estos puntos no lo grafican de forma correcta, dado que indica que hay puntos diferentes a $t = 2$ s en los que la velocidad no tiene valor.

A continuación, se realiza el análisis de los hallazgos encontrados en las preguntas 5c y 5d.

5c ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique

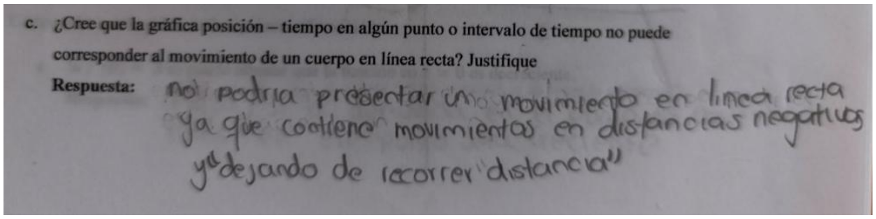
En esta pregunta se reconoce que pudo haber un error de redacción dado que se lleva a que el estudiante realice una interpretación errónea al decir "en" línea recta y se sugiere cambiar la pregunta para efecto de uso con el siguiente enunciado:

Cree que la gráfica posición-tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no corresponde al movimiento de un cuerpo **sobre** una línea recta

A continuación, se muestra una de las respuestas donde varios estudiantes coincidieron en que la gráfica no corresponde al movimiento de un cuerpo en línea recta.

Figura 21.

Respuesta pregunta c



c. ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique

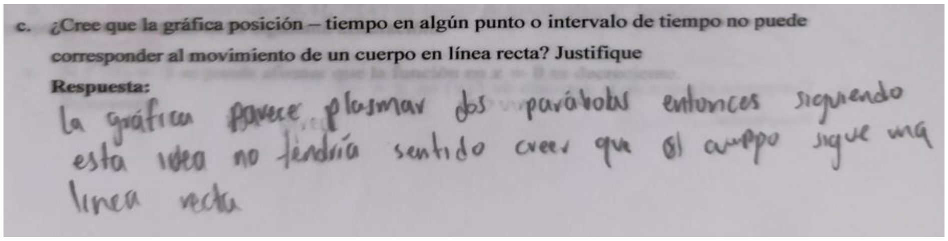
Respuesta: no podria presectar un movimiento en linea recta ya que contiene movimientos en distancias negativas y "dejando de recorrer distancia"

Esta respuesta, independiente de la interpretación de la derivada, muestra que el estudiante no concibe que haya posiciones negativas.

A continuación, se presenta una respuesta donde se relaciona la gráfica de la función derivada con el movimiento que realiza un cuerpo en "línea recta"

Figura 22.

Respuesta estudiante E9 basada en trazos



c. ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique

Respuesta:

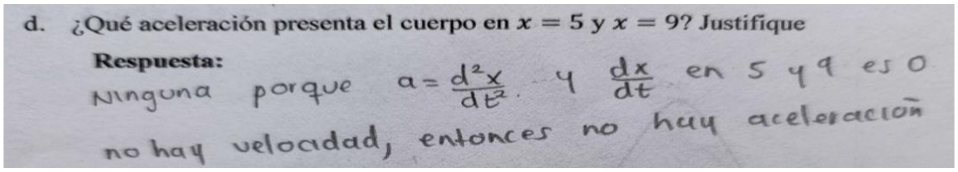
La gráfica parece plasmar dos parábolas entonces siguiendo esta idea no tendría sentido creer que el cuerpo sigue una línea recta

Esta respuesta muestra un rasgo no desarrollado completamente del nivel inter de la interpretación analítica de la derivada debido que no se cumple con el indicador "Interpreta e identifica con claridad la derivada en diferentes las representaciones de la derivada" esto genera que el estudiante E9 afirme que no puede corresponder a un cuerpo en movimiento de línea recta debido que la gráfica de posición- tiempo tiene una parábola. Se muestra una confusión entre la trayectoria de un cuerpo y la gráfica de la posición con respecto al tiempo, lo cual dificulta explorar la interpretación del concepto de derivada.

5d ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique

Figura 23.

Interpretación errónea de la velocidad y aceleración



d. ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique

Respuesta:

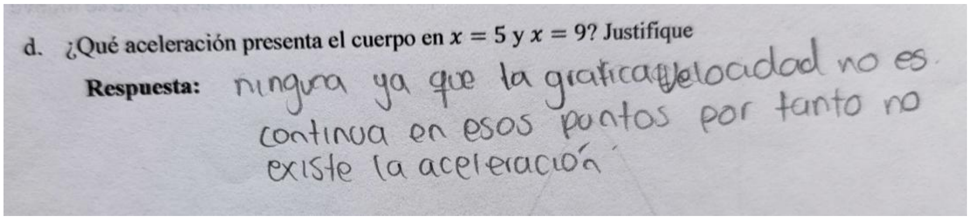
Ninguna porque $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. y $\frac{dx}{dt}$ en 5 y 9 es 0 no hay velocidad, entonces no hay aceleración

Esta respuesta muestra que la asociación entre un máximo o un mínimo con que la pendiente de la recta tangente sea cero, sin embargo, se asocia que, si la primera derivada de una función es cero en un punto, la segunda derivada debe ser cero.

Finalmente, se tiene el caso del estudiante E9 a continuación se muestra su respuesta:

Figura 24.

Interpretación de la aceleración en gráficas no continuas



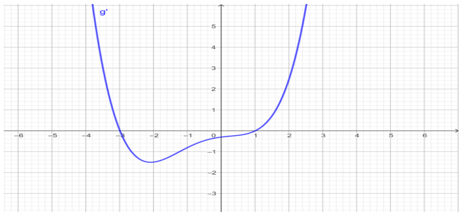
d. ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique

Respuesta: ninguna ya que la grafica velocidad no es continua en esos puntos por tanto no existe la aceleración

Un último caso es el estudiante E9, quien a pesar de haber realizado un bosquejo incorrecto para la gráfica velocidad- tiempo, está en el grupo de estudiantes que realizó el bosquejo con puntos de discontinuidad, su respuesta en el ítem d, ilustra un rasgo de la interpretación de la derivada como función de nivel inter dado que se evidencia el indicador que dice: “identifica que si una función es no continua en $\boldsymbol{x = a}$, no es derivable en $\boldsymbol{x = a}$"

5.1.6 Pregunta Seis

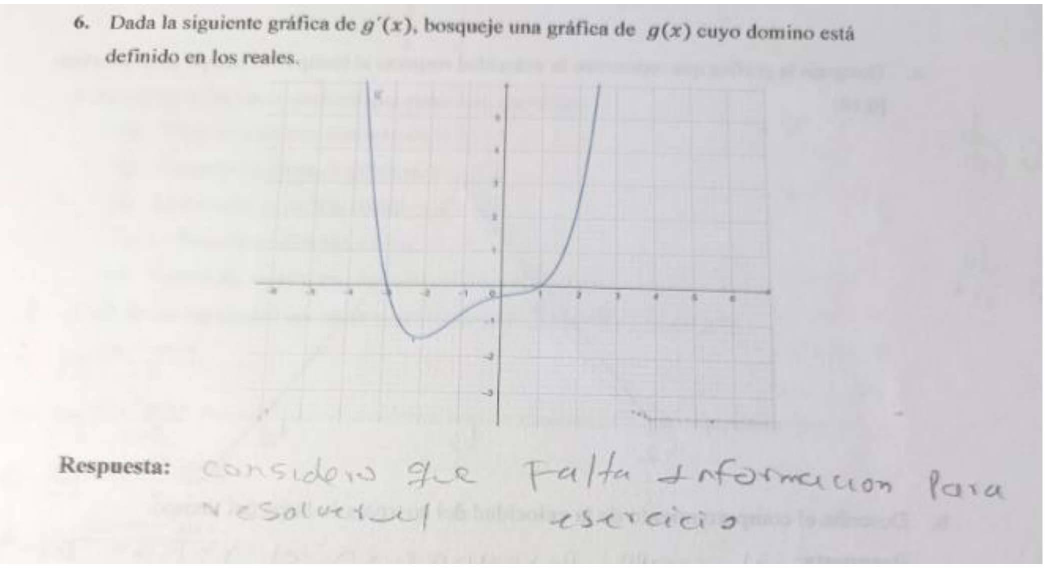
Dada la siguiente gráfica de $g´(x)$, bosqueje una gráfica de $g(x)$ cuyo domino está definido en los reales.



Lo primero que se puede evidenciar es que el 36% de los estudiantes, es decir 7 de ellos presentan en sus respuestas rasgos del nivel intra de la interpretación gráfica de la derivada, debido a que no se percibe que construyan la gráfica de la función partiendo de la gráfica de la función derivada. También está relacionado con lo mencionado por Sánchez, (2004) quien afirma que “los estudiantes recuerdan algunos elementos matemáticos de forma incorrecta, pudiendo confundir la información que proporciona $f´$ y $f´´$”(p. 154) y al no tener claridad de la información que proporciona $f´$ no pueden realizar el gráfico de la función. Consecuencia de esto en los ejercicios planteados donde se involucra una traducción de la representación gráfica de $f'(x)$ a la representación gráfica de $f(x)$. El estudiante puede considerar que hace falta información en el problema como se evidencia en la respuesta del estudiante a continuación.

Figura 25.

Estudiante que pide más información



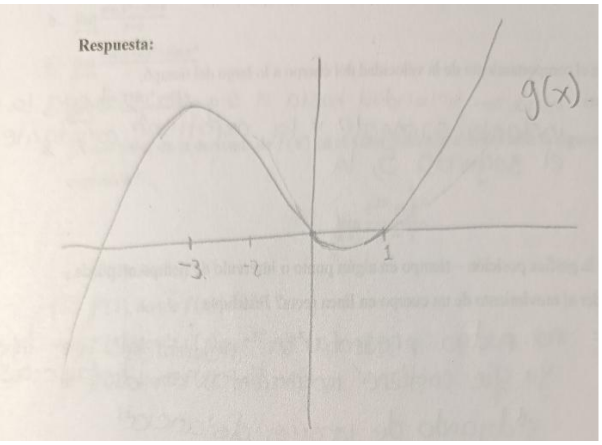
6. Dada la siguiente gráfica de $g'(x)$, bosqueje una gráfica de $g(x)$ cuyo domino está definido en los reales.

Respuesta: considero que Falta informacion para resolver el esercicio

Por otro lado, entre los estudiantes que realizaron un bosquejo de la gráfica de la función se pudo evidenciar dos casos. El primero, con una interpretación del signo de la derivada que le permite interpretar en qué intervalos la función es creciente o decreciente, pero no reconocen los cortes de la función derivada con $x = 0$, la cual expresa información respecto a un posible máximo o mínimo de la función. Esto se puede evidenciar en la figura 26. Dado que realizan un corte en el eje en $x = 1$ o ponen el mínimo o máximo de la función en un valor diferentes de $x = -3$ y $x = 1$. Además, en todos los casos no tienen presente la variación que presenta la gráfica de la derivada en el intervalo $[-3,1]$.

Figura 26.

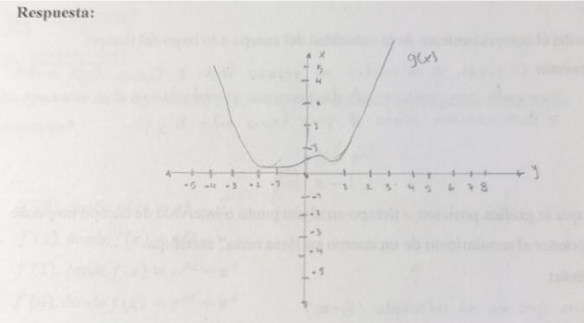
Bosquejo de los estudiantes dada la gráfica f´(x)



Un segundo caso, permite evidenciar un nivel intra de la interpretación de la derivada como función dado que "no identifican las condiciones necesarias y suficientes para determinar intervalos donde la función es creciente o decreciente", esto se puede observar porque en los intervalos donde la función es creciente la traza decreciente y en los intervalos donde la función es decreciente la realiza creciente. La figura 27 muestra dificultades para obtener la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ a partir de la gráfica de la $\boldsymbol{f'(x)}$, asociando a la gráfica de la función una forma similar a la gráfica de la función derivada.

Figura 27.

Inadecuada interpretación de los elementos de la primera derivada



5.1.7 Pregunta Siete

En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Tabla 25.

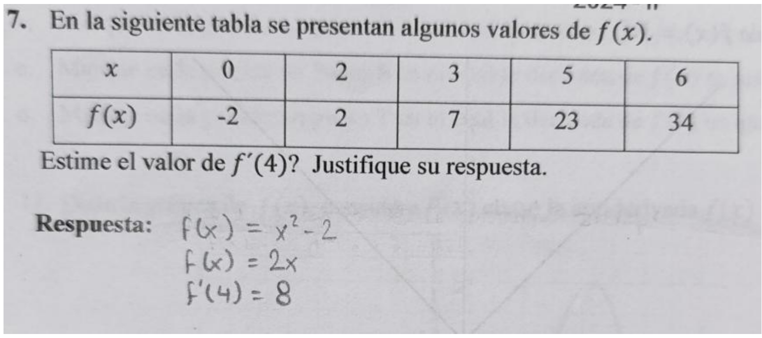
frecuencia de solución de un problema con representación tabular

Método utilizado	Cantidad de estudiantes	Porcentaje
Aplicación de reglas de derivación	6	54,55%
Definición de derivada en un punto	3	27,27%
Método gráfico	1	9,09%
No contestaron	1	9,09%

Para el desarrollo de esta pregunta se puede reconocer que un 54,55% de los estudiantes incurren en el uso de reglas de derivación para poder determinar la derivada de una función esto es un rasgo presente en el nivel intra de la interpretación analítica “Para calcular $f'(a)$ primero calculan la $f'(x)$ y posteriormente evalúa $x = a$”, además se puede evidenciar rasgos de nivel inter en la interpretación analítica de la derivada, esto porque realizan transducciones entre las representaciones de la derivada. En este caso realizaron una traducción de la representación tabular de la función a una representación analítica de la función. Posteriormente de una representación analítica de la función a una representación analítica de la derivada de la función. Además, se puede evidenciar el paso de una compresión global de la derivada a la compresión local. En el momento que se realiza el proceso de calcular la derivada en el punto que es un rasgo característico de un nivel inter en la interpretación gráfica de la derivada. En la siguiente figura se evidencia una respuesta de un estudiante que hace uso de las reglas de la derivación para encontrar la derivada en un punto.

Figura 28.

Procesos con reglas de derivación



7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

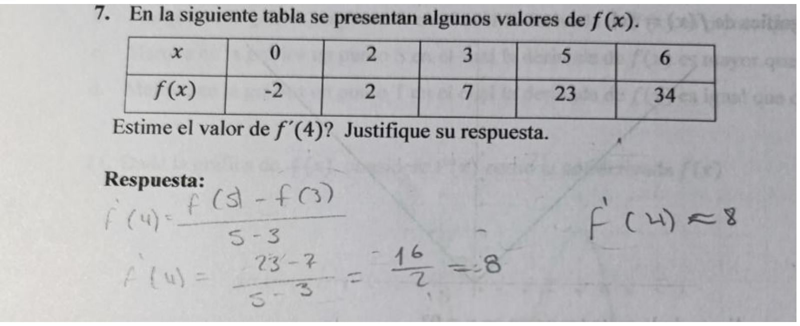
Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta: $f(x) = x^2 - 2$
$f(x) = 2x$
$f'(4) = 8$

Un segundo grupo de estudiantes no usó de las reglas de derivación para determinar la derivada en el punto solicitado; ellos para resolver la pregunta hicieron uso de la definición de la pendiente de la recta tangente en un punto, es decir interpretaron que a la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto y con esto pudieron llegar a la respuesta sin tener que hacer uso de reglas de derivación. Realizando una transformación entre la representación tabular de la función a una representación analítica de la derivada. Este método usado por los estudiantes permite reconocer que comprenden la razón de cambio media para estimar la razón de cambio instantánea, que es un rasgo del nivel inter de la interpretación analítica de la derivada que está asociada al indicador: “Diferencia entre la variación media y la variación instantánea en varios contextos” dado que si lo diferencia puede hacer uso correcto de estas variaciones. Y finalmente se evidencia un rasgo asociado a la interpretación gráfica de la derivada que está asociado al indicador “No presenta una relación entre la pendiente de la recta tangente a la curva en $\boldsymbol{x = a}$ y la derivada de la función en $\boldsymbol{x = a}$**”** que para este caso se cumple que si presenta la relación nombrada anteriormente**.** A continuación, se muestra la respuesta de uno de los estudiantes donde hace uso de la variación media y es de resaltar que fue uno de los dos que utilizó el signo “≈” en su respuesta haciendo referencia que es una estimación del valor pedido.

Figura 29.

Respuesta sin uso de reglas de derivación



7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta:

$$f'(4) = \frac{f(5) - f(3)}{5-3}$$

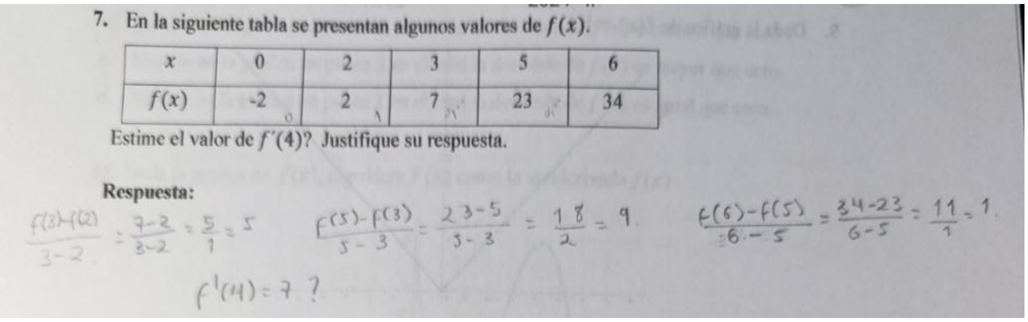
$$f'(4) = \frac{23-7}{5-3} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(4) \approx 8$$

Ahora se presenta un caso (figura 30) que se hace usos incorrectos de los datos, dado que se puede evidenciar que al remplazar $f(3)$ no toma el valor 7 pone un valor 5, y con esto llega a un valor equivocado de la derivada de la función en el punto $x = 4$. Permitiendo aun así evidenciar un rasgo de nivel inter en la interpretación de la variación media.

Figura 30.

Error en el uso de la información



7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta:

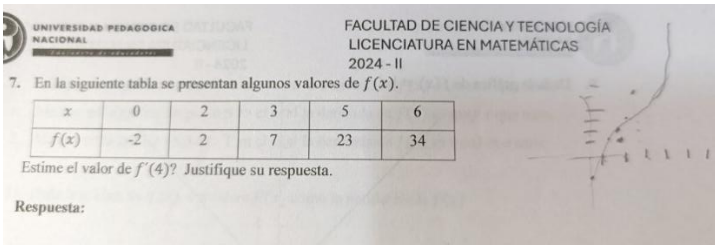
$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{7-2}{3-2} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{23-5}{5-3} = \frac{18}{2} = 9 \qquad \frac{f(6)-f(5)}{6-5} = \frac{34-23}{6-5} = \frac{11}{1} = 1$$

$$f'(4) = 7 \ ?$$

Por último, se encuentra el E3 que realizó una transformación de la representación tabular de la función a la gráfica de la función, aunque incorrecta, y no presenta una respuesta para el valor de la derivada en el punto $x = 4$

Figura 31.

Uso de representaciones para llegar a la respuesta



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
2024 - II

7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

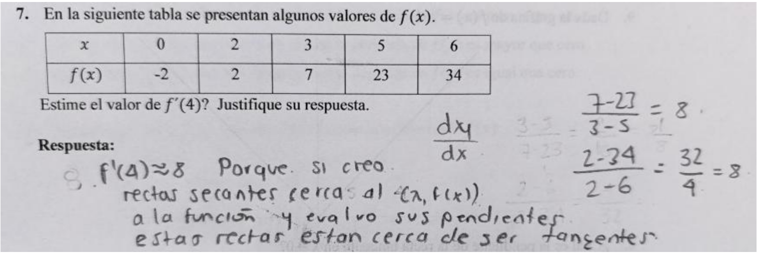
Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta:

Una de las respuestas a resaltar es la del E6, quien realizó una descripción verbal y mediante esta justificó su respuesta. Esto permitió identificar un rasgo del nivel inter en la interpretación de gráfica de la derivada, ya que, según el indicador, “Interpreta la gráfica de la recta tangente como el límite de las rectas secantes y como la recta tangente en un punto de la función.” En su respuesta, explicó que hizo uso de las rectas secantes para encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto solicitado.

Figura 32.

Interpretación correcta de la derivada



7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta:

8. $f'(4) \approx 8$ Porque si creo rectas secantes cerca al $(x, f(x))$ a la función y evaluo sus pendientes estas rectas estan cerca de ser tangentes.

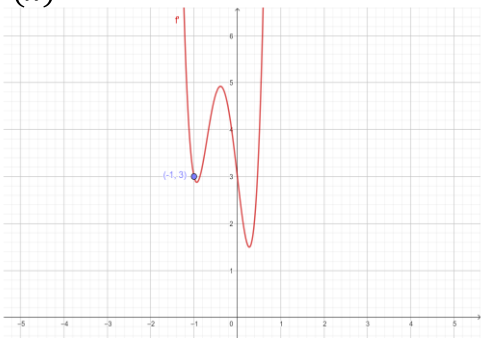
$\frac{dy}{dx}$

$\frac{7-23}{3-5} = 8$

$\frac{2-34}{2-6} = \frac{32}{4} = 8$

5.1.8 Pregunta Ocho

Dada la siguiente gráfica de $f'(x)$



a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo $[-1,0]$? Justifique.
b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$? Justifique
Compruebe la veracidad de la siguiente afirmación:
Si $f'(0) = 3$ se puede afirmar que la función en $x = 0$ es decreciente.

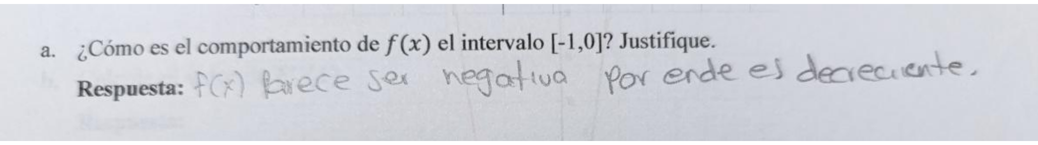
En el análisis de esta pregunta se pudo evidenciar que el ítem a podía referirse a continuidad o monotonía. Aun así, permite identificar los rasgos que los estudiantes identifican a por observación de la gráfica de una función. Esto puede estar asociado a un nivel intra en el desarrollo de la interpretación de la derivada, dado no hace una asociación completa de la información que ofrece la gráfica de la derivada con la información que esta ofrece de la función viendo un también una dificultad en la información global.

Por otro lado, también se pudo evidenciar que algunos estudiantes confunden la información o la toman de forma incorrecta. En este caso $f(x)$ es creciente en todo su dominio, sin embargo, algunas respuestas indican intervalos en los que es decreciente. Esta respuesta hace referencia al rasgo del nivel intra en la interpretación gráfica de la derivada “Establece por medio de la gráfica dónde la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero”.

A continuación, se muestra una respuesta de un estudiante que dice que la función es negativa entonces es decreciente, es decir que atribuye al signo de la función la interpretación en cuanto a su monotonía.

Figura 33.

Interpretación errónea de la derivada



a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo [-1,0]? Justifique.

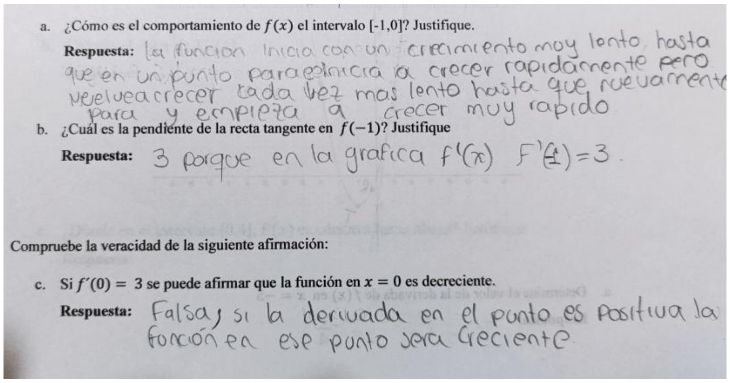
Respuesta: f(x) parece ser negativa por ende es decreciente.

Por otro lado, con respecto al enunciado b varios estudiantes dijeron que faltaba información para obtener el valor de la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$. Esto demuestra una de nivel intra de interpretación gráfica de la derivada dado que como dice el indicador "No presenta una relación entre la pendiente de la recta tangente a la curva en $\boldsymbol{x = a}$ y la derivada de la función en $\boldsymbol{x = a}$".

Finalmente, se resaltan las respuestas del E2 que ilustra rasgos del nivel trans en la interpretación de la derivada como función dado que describe cómo es el comportamiento de la derivada a lo largo del dominio. Así mismo, se pudo identificar que la gráfica es interpretada como la gráfica de las pendientes de la recta tangente a lo largo de del dominio de la función y tiene claridad en el criterio de la primera derivada demostrando rasgos del nivel trans de la interpretación analítica de la segunda derivada. A continuación, se muestra las respuestas del estudiante:

Figura 34.

Interpretación correcta de la derivada



a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo [-1,0]? Justifique.

Respuesta: la funcion inicia con un crecimiento muy lento hasta que en un punto para e inicia a crecer rapidamente pero vuelve a crecer cada vez mas lento hasta que nuevamente para y empieza a crecer muy rapido

b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$? Justifique

Respuesta: 3 porque en la grafica $f'(x)$ $F'(-1)=3$.

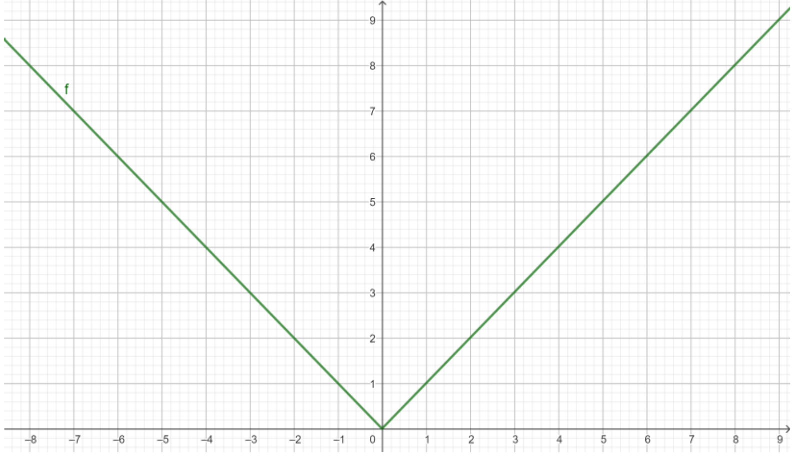
Compruebe la veracidad de la siguiente afirmación:

c. Si $f'(0) = 3$ se puede afirmar que la función en $x = 0$ es decreciente.

Respuesta: Falsa, si la derivada en el punto es positiva la función en ese punto sera Creciente

5.1.9 Pregunta Nueve

Dada la gráfica de $f(x) = |x|$



a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en x = 0?

Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación:

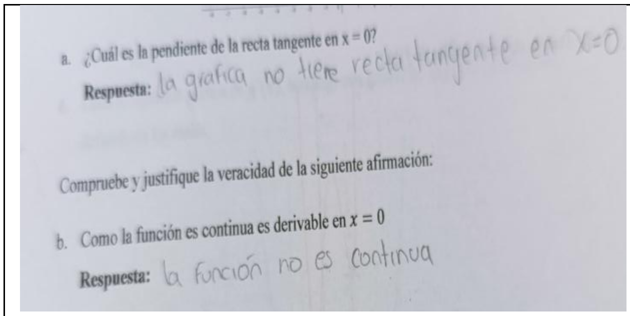
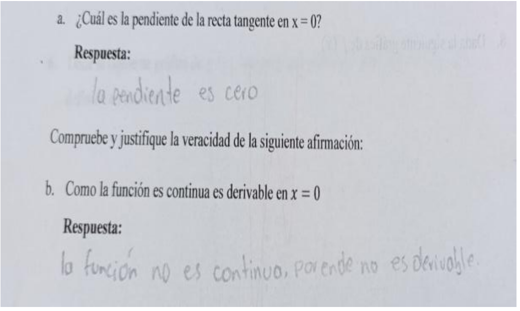
b. Como la función es continua es derivable en $x = 0$

Entre los hallazgos encontrados en este punto se encontró que para algunos estudiantes la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es cero demostrando un nivel intra no desarrollado en la interpretación de la derivada de la función dado que no logran identificar cuando una función es derivable en un punto. El estudiante E2 expresa, sin justificación, que no existe la recta tangente en $x = 0$.

Finalmente, algunas respuestas muestran una dificultad en el rasgo de la interpretación de la derivada como función que dice: "Identifica que si una función es derivable en $\boldsymbol{x = a}$**,** entonces la función es continua $\boldsymbol{x = a}$**".** Todo lo anterior se puede evidenciar en respuestas que se muestra en la tabla 26:

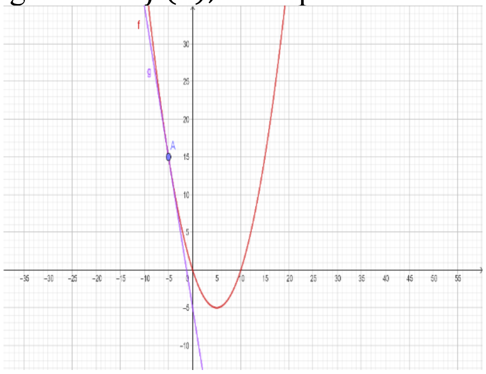
Tabla 26.

Respuestas de estudiantes con interpretaciones diferentes

 a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en x = 0? **Respuesta:** la grafica no tiere recta tangente en x=0 Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación: b. Como la función es continua es derivable en $x = 0$ **Respuesta:** la función no es continua	 a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en x = 0? **Respuesta:** la pendiente es cero Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación: b. Como la función es continua es derivable en $x = 0$ **Respuesta:** la función no es continuo, porende no es derivable.
En esta repuesta se evidencia que la función no es derivable en $x = 0$, sin embargo también afirma que la función no es continua.	Se asigna pendiente a la recta en $x = 0$ es cero. Atribuye que la función no es derivable a que no es continua, sin embargo en el ítem a, indicó que la derivada es 0.

5.1.10 Pregunta Diez

La recta g es tangente a la gráfica de $f(x)$, en el punto A

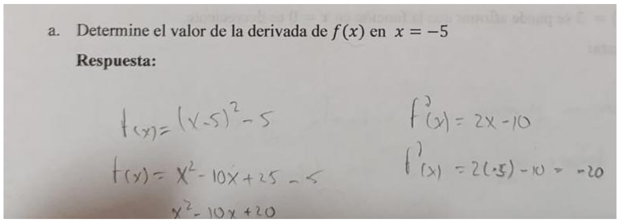


a. Determine el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = -5$
b. Marque en la gráfica un punto R en el cual la derivada de $f(x)$ es menor que cero.
c. Marque en la gráfica un punto S en el cual la derivada de $f(x)$ es mayor que cero.
d. Marque en la gráfica un punto T en el cual la derivada de $f(x)$ es igual que cero.

Esta pregunta permitió evidenciar que todos los estudiantes tienden, y está muy arraigado en su conocimiento, a hacer uso de las reglas de derivación para encontrar la solución a problemas donde no es necesario. La mayoría, primero encontró la función posteriormente hizo uso de reglas de derivación y finalmente remplazaron a x según el punto donde se le solicitaba la derivada. (Cabe aclarar que se evidenció que comentan errores en la determinación de la expresión analítica de la función). El método descrito anteriormente usado por los estudiantes evidencia un rasgo del nivel intra en la interpretación analítica de la función asociado a indicador "Para calcular $\boldsymbol{f'(a)}$, primero encuentran la expresión analítica de $\boldsymbol{f(x)}$,posteriormente calculan $\boldsymbol{f'(x)}$ y finalmente evalúan $\boldsymbol{x = a}$" como se muestra en la figura 35.

Figura 35.

Respuesta punto 10



a. Determine el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = -5$

Respuesta:

$f_{(x)} = (x-5)^2 - 5$

$f_{(x)} = x^2 - 10x + 25 - 5$

$x^2 - 10x + 20$

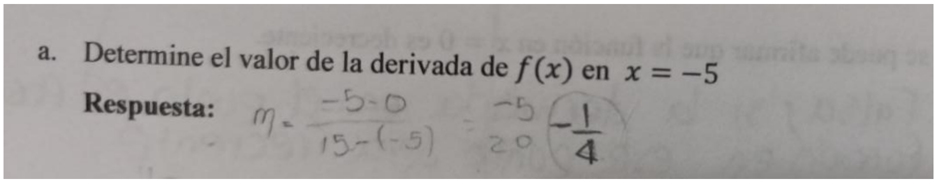
$f'_{(x)} = 2x - 10$

$f'_{(x)} = 2(-5) - 10 = -20$

En la imagen se puede evidenciar el uso de procesos algorítmicos para encontrar la derivada en un punto, pero en este caso se encontró expresión analítica incorrecta demostrando una dificultad en la traducción de la representación gráfica de la derivada a la representación analítica de la función. En este caso, no era necesario hacer este procedimiento porque pudieron calcular la derivada como la pendiente de la recta tangente. Como se evidencia a continuación en la respuesta del estudiante E2.

Figura 36.

Respuesta calculando la pendiente de la recta tangente



a. Determine el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = -5$

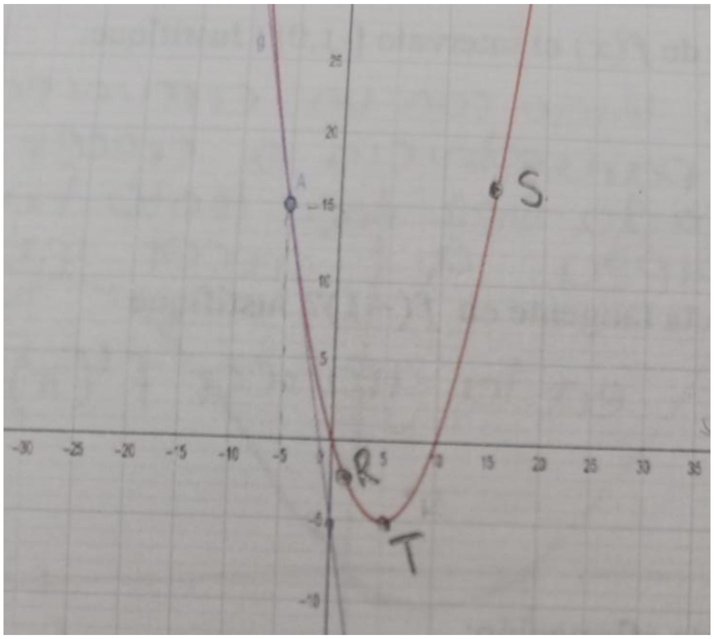
Respuesta: $m = \frac{-5-0}{15-(-5)} = \frac{-5}{20} \boxed{-\frac{1}{4}}$

En esta respuesta se evidencia un error en la toma de los valores para calcular la pendiente de la recta tangente, dado que ponen los valores de forma contraria, es decir, los valores de denominador los pone en el numerador. Finalmente, no se encontró en las respuestas una solución mediante la cual expresaran el valor de la derivada como la razón de cambio relacionando que por cada unidad que aumenta el valor de x, el valor de y disminuye 4 unidades.

Por otro lado. En esta pregunta no se presentó dificultad para dar solución a los ítems (b, c y d) que consistían ubicar unos puntos con unas condiciones específicas. Así mismo, esta pregunta permitió identificar con claridad rasgos del nivel inter de la interpretación gráfica de la derivada dado que pudieron ubicar adecuadamente los puntos donde la pendiente es mayor, menor o igual a cero. A continuación, se muestra una de las respuestas de los estudiantes donde se evidencia lo anteriormente descrito.

Figura 37.

Ubicación de puntos con condiciones



6 Conclusiones

Con el desarrollo del presente estudio que pretendió explorar la interpretación del concepto de derivada en algunos Futuros Educadores Matemáticos, se ratifica la importancia de examinar constantemente la compresión matemática de conceptos claves para un docente de Matemáticas, como lo es la derivada, lo cual podría ser una herramienta fundamental para identificar carencias en la formación matemática de los FEM.

El marco de referencia fue fundamental para identificar y describir los niveles de interpretación de la derivada en relación con la interpretación gráfica, la interpretación analítica y la interpretación de la derivada como función. La identificación de rasgos para estos niveles permitió caracterizar las respuestas de los estudiantes.

Por otro lado, los resultados de este estudio muestran que los futuros educadores matemáticos que abordaron el cuestionario pueden identificar intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función. además de mostrar rasgos de la interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente y hacer uso de esta relación para determinar espacios donde la pendiente de la recta tangente es menor, mayor o igual a cero, sin embargo, se resalta la dificultad en la traducción entre diferentes representaciones y de extraer correctamente la información que ofrece la representación gráfica de la función y de la función derivada.

En la interpretación analítica de la función, se evidencian del uso de la definición de la derivada, así como del criterio de la primera y segunda derivada. Sin embargo, es fundamental fortalecer esta interpretación y las diferentes representaciones de la derivada. Además, es necesario fortalecer su aplicación en diversos contextos, más allá del ámbito de la física, con el fin de mejorar la compresión de los conceptos de variación media y variación instantánea.

Se recomienda abordar en las aulas la interpretación de la derivada como función, puesto que es la interpretación en la que se observa mayor dificultad, en concordancia con esto es importante trabajar rasgos de la interpretación de la derivada como función mediante el uso de traducciones de las representaciones de la función y de función derivada para que el estudiante pueda esbozar la gráfica de la función partiendo de la gráfica de la derivada y viceversa.

Personalmente, este estudio fue una oportunidad para profundizar mis conocimientos en el concepto de derivada y así contar con herramientas para utilizarlo e interpretarlo con mayor profundidad en mi futuro profesional como educador matemático. De la misma manera, se resalta la importancia de trabajar un concepto matemático desde distintas miradas y no únicamente en los procesos algorítmicos para darle una mayor profundidad a los procesos de aprendizaje.

En conclusión, este estudio no solo evidencia y da a conocer los vacíos conceptuales y actitudinales que pueden tener algunos estudiantes, sino también resalta la importancia de construir herramientas y estrategias que permitan mejorar de manera efectiva la formación matemática que tienen los futuros educadores matemáticos, para que así posean y desarrollen dominios teóricos necesarios para su ser profesional con lo que puedan trabajar el concepto de derivada de una manera más clara y profunda, impactando de manera positiva en la enseñanza matemática del país.

Considero que es importante tanto para la Licenciatura en Matemáticas como para los Futuros Educadores Matemáticos fortalecer las habilidades de interpretación en conceptos esenciales del Cálculo tales como la derivada, este tipo de trabajo abre las puertas a una visión diferente de la forma en la que se están abordando este tipo de conceptos en el aula, es un instrumento que sirve de punto de partida para que en los cursos de cálculo se haga mayor énfasis en la interpretación de los conceptos matemáticos más allá del aprendizaje netamente algorítmico.

Este trabajo podría ampliarse y abordarse con mayor profundidad al realizar más aplicaciones del cuestionario diseñado o hacer uso de este para generar nuevos cuestionarios que permitan identificar los niveles de interpretación, además de realizar entrevistas que permitan identificar con mayor claridad algunas interpretaciones de los Futuros Educadores, por último, sugiero seleccionar una muestra más amplia que permita evidenciar rasgos de los niveles de interpretación.

7 Referencias

Alarcón, A., S., Suescún, C. M., y Torre, A. (2005). *El método de las tangentes de Fermat*. *Vol. XIII No 2*, 101-123.

Contreras de la Fuente, Á. (2003). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad: Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2003, ISBN 84-95699-43-5, págs. 71-86*, 71-86. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2729183

Contreras de la Fuente, Á., Luque , L., Ordóñez , L., Ortega , M., y Sánchez , C. (2000). *IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas «Thales»*. https://tiendaeditorial.uca.es/es/catalogo-de-venta/2940-ix-congreso-sobre-ensenanza-y-aprendizaje-de-las-matematicas-thales.html

Dolores, C. (1998). *Capítulo 13. Investigaciones en Matemáticas Educativa II*. Iberoamérica.

Font, V. (2005). *Funciones y Derivadas*. Universidad de Barcelona. https://www.researchgate.net/publication/28231415_Una_aproximacion_ontosemiotica_a_la_didactica_de_la_derivada

Fuentealba, C., Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2018). Puntos de no-derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Educação e Pesquisa*, *44*, e181974. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844181974

Gómez, F. (2021). *Capítulo 2 Un modelo de investigacion en didactica de laprogramacion*. https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/475620/mod_resource/content/2/Capitulo-2-Un-modelo-de-investigacion-en-didactica-de-la-programacion.pdf

González, A., Muñiz, L., y Rodríguez, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Gutierrez, E. (2021). *CAPITULO III Derivada de una Función*. https://www.researchgate.net/publication/352536199_CAPITULO_III_Derivada_de_una_Funcion

Innova Math (director). (2019, junio 16). *Crea tu applet—Criterios de la Derivada* [Video recording]. https://www.youtube.com/watch?v=woKymJH2M9U

Jara Vaca, F. L., Chávez , J. E., Villa , I. C., y Novillo , J. L. (2021). Rol del docente para la educación virtual en tiempos de pandemia: Retos y oportunidades. *Polo del Conocimiento: Revista científico - profesional*, *6*(11), 30-45.

Jiménez, E. R. B. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de colombia* [Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4702/erbj1de4.pdf

Larson, R. (2010). *Cálculo 1. De una variable* (Novena). Mc Graw Hill Educación.

Larson, R., y Hostetler, R. P. (2006). *Cálculo con geomtría analítica* (octava). Mc Graw Hill Educación.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineaminetos Curriculares*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Pinto-Rojas, I., y Parraguez, M. (2018). *Un modelo de acercamiento local y global de la derivada en pro de superar el obstáculo de su comprensión*. *31*(1).

Salazar , C., Díaz Rojas, H., y Bautista , M. (2009). Descripción de niveles de comprension del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED; Núm. 26 (2009): jul-dic*. https://doi.org/10.17227/ted.num26-421

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros , G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto).* https://idus.us.es/handle/11441/73311

Sánchez-Matamoros , G., García , M., y Llinares , S. (2007). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *24*(1), 85-98. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3816

Sierra , M., y Ortega del Rincón, T. (1998). El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza. *RIFOP: Revista interuniversitaria de formación del profesorado: continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales*, *32*, 87-115.

Stewart, J. (2012). *Cálculo. De una variable. Trascendentes tempranas* (Séptima). cengage Learning. https://latam.cengage.com/

Swokowski, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica* (Segunda).

Vargas , M. F. (2020). *La derivada de una función desde la perspectiva de los profesores de matemáticas de 1° de bachillerato* [Doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/63624/6494.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Vasco, C. E. (2002). *El pensamiento variaciónal, la modelación y las nuevas tegnologias*. 61-70. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1142293/Vasco2002El.pdf

Vasco, S. A., y Suescun, C. M. (2011). *El método de Descartes para determinar la tangente a una curva*.

Vásquez , S. A. (2021). Juventud y Ciencia Solidaria: En el camino de la investigación. *Cátedra UNESCO | Tecnologías de apoyo para la Inclusión Educativa*, *1*(8), 30-37.

Zemansky, S., y Freedman, Y. (2004). *Física Universitaria Vol.1—Sears,* (Décimo primera, Vol. 1). Pearson Educación.

Anexo. Cuestionario

Interpretación del Concepto de Derivada en Futuros Educadores Matemáticos que Inician el Ciclo de Profundización en la Universidad Pedagógica Nacional en 2024 -I

El presente cuestionario aporta información acerca de la Interpretación del Concepto de Derivada en Futuros Educadores Matemáticos, lo cual suministra información para el desarrollo del trabajo de grado con esta temática. Le agradezco su participación, sus datos personales no se verán reflejados en el trabajo y las hojas con las respuestas serán de exclusivo manejo del autor del trabajo de grado.

Nombre: ____ Fecha: __/____/______

¿En qué semestre(s) cursó Cálculo diferencial?

-

¿Cuándo curso el espacio académico de cálculo diferencial lo hizo de manera presencial o virtual? **Marque con una X**

- **Virtual ( )**
- **Presencial ( )**

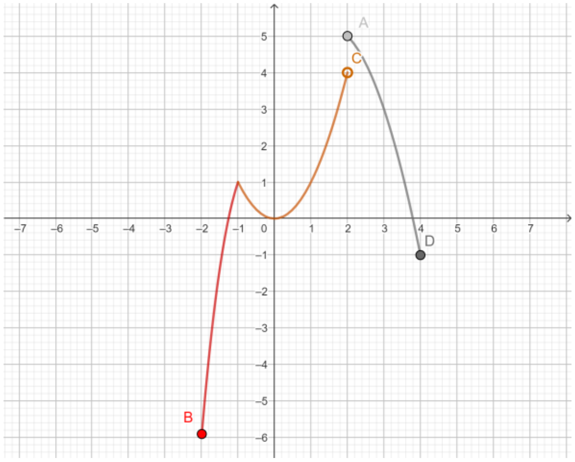
Cuestionario.

1. Realice una gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

   a. Tiene dos puntos en los que la derivada es cero
   b. Corta el eje y en 5
   c. Corta el eje x en -5
   d. Es creciente en el intervalo (6,∞)
   e. La derivada es menor que cero en el intervalo $(-\infty, -5)$

   Respuesta:

2. A partir de la gráfica que se presenta a continuación es posible afirmar que:



(seleccione todas las respuestas que considere correctas)

a. Tiene un máximo absoluto en $x = -1$

b. Tiene un mínimo absoluto en $x = -2$

c. La función es diferenciable en x = -1

d. La función es diferenciable en $x = 2$

e. Tiene solo un mínimo local en el intervalo [-2,4]

3. ¿Cuál de las siguientes opciones representa a $M'(2)$ si $M(x) = \sin x^2$?

a. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin x^2 - \sin 4}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin 2^2 - \sin 4}{2-2}$

c. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)^2 - \sin x^2}{h}$

d. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(2+h)^2 - \sin 4}{h}$

4. ¿A qué valor de la derivada de $f(x)$ en el valor indicado corresponde la siguiente expresión?

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x-1}$$

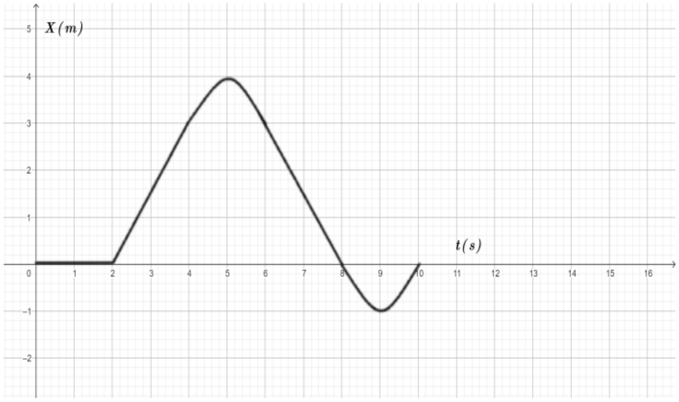
a. $f'(0)$, donde $f(x) = e^x$

b. $f'(1)$, donde $f(x) = e^{2x}$

c. $f'(1)$, donde $f(x) = e^{2x} - e^x$

d. $f'(0)$, donde $f(x) = e^{2x} - e^x$

5. La siguiente gráfica muestra la posición con respecto al tiempo de un cuerpo que se mueve sobre el eje *x*.



a. Bosqueje la gráfica que represente la velocidad respecto al tiempo del cuerpo en el intervalo [0,10]

b. Describa el comportamiento de la velocidad del cuerpo a lo largo del tiempo.

Respuesta:

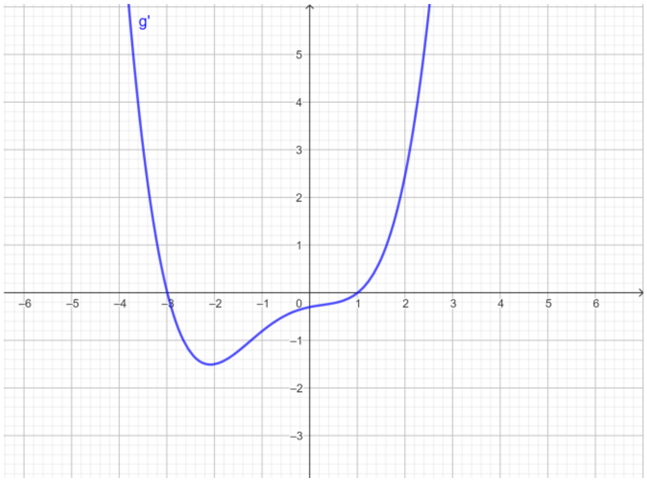
c. ¿Cree que la gráfica posición – tiempo en algún punto o intervalo de tiempo no puede corresponder al movimiento de un cuerpo en línea recta? Justifique

Respuesta:

d. ¿Qué aceleración presenta el cuerpo en $x = 5$ y $x = 9$? Justifique

Respuesta:

6. Dada la siguiente gráfica de $g\acute{}(x)$, bosqueje una gráfica de $g(x)$ cuyo domino está definido en los reales.



Respuesta:

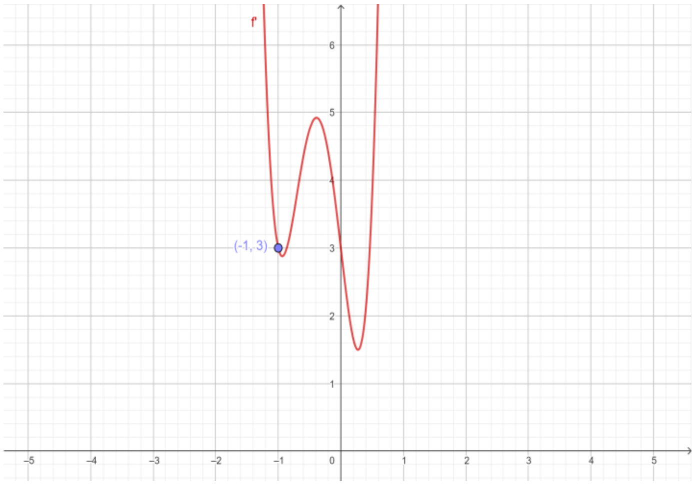
7. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de $f(x)$.

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	-2	2	7	23	34

Estime el valor de $f'(4)$? Justifique su respuesta.

Respuesta:

8. Dada la siguiente gráfica de $f'(x)$



a. ¿Cómo es el comportamiento de $f(x)$ el intervalo [-1,0]? Justifique.

Respuesta:

b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en $f(-1)$? Justifique

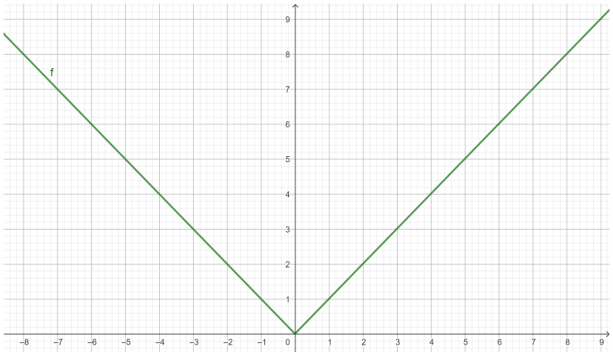
Respuesta:

Compruebe la veracidad de la siguiente afirmación:

c. Si $f'(0) = 3$ se puede afirmar que la función en $x = 0$ es decreciente.

Respuesta:

9. Dada la gráfica de $f(x) = |x|$



a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en x = 0?

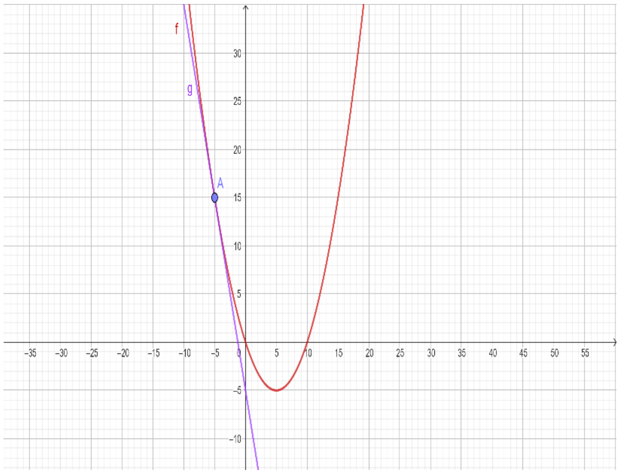
Respuesta:

Compruebe y justifique la veracidad de la siguiente afirmación:

b. Como la función es continua es derivable en $x = 0$

Respuesta:

10. La recta g es tangente a la gráfica de $f(x)$, en el punto A



a. Determine el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = -5$

Respuesta:

b. Marque en la gráfica un punto R en el cual la derivada de $f(x)$ es menor que cero.

c. Marque en la gráfica un punto S en el cual la derivada de $f(x)$ es mayor que cero.

d. Marque en la gráfica un punto T en el cual la derivada de $f(x)$ es igual que cero.