

**¡A UTILIZAR GEOGEBRA! UN CURSO ELECTIVO PARA DESARROLLAR
ARGUMENTOS INDUCTIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON
ESTUDIANTES DE SEXTO A OCTAVO GRADO**

ZAIRA MARCELA LÓPEZ GARCÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C

2024

¡A UTILIZAR GEOGEBRA! UN CURSO ELECTIVO PARA DESARROLLAR
ARGUMENTOS INDUCTIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON
ESTUDIANTES DE SEXTO A OCTAVO GRADO

Trabajo de grado para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática

Zaira Marcela López García

Asesora: Dra. Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de matemáticas

Bogotá, D.C.

2024

Agradezco a...

Mi familia por brindarme el apoyo, la comprensión y el amor incondicional en esta gran aventura durante mis últimos dos años. Gracias madre que, aunque no vivamos juntas, con tus mensajes, estados, caricias y detalles haces relucir el orgullo que tienes por nosotros, tus hijos.

Gracias padre, por traerme aromática cuando me veías estresada, por escucharme y darme palabras de fuerza y esperanza cuando lo veías necesario. Han sido mi inspiración para dar lo mejor de mí en todo lo que me propongo.

A Jango y a Max, quienes aún me siguen llenando de energía todos los días con los corazoncitos llenos de amor insuperable. Gracias por aquellos recibimientos inigualables cada vez que llego a mi hogar y por acompañarme en la mayoría de las noches donde tenía que trasnochar ya que, aunque estaba cansada y agotada, con solo saber que estaban al lado mío, hacían más fácil que siguiera concentrada para completar mis metas diarias. Me llena de paz tenerlos conmigo, al menos durante algunos años más de vida.

A mi asesora y compañera del escrito, Leonor, porque desde que estuve en la universidad como estudiante de pregrado me ha inspirado a trabajar en la línea de investigación de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. Gracias por: seguir apoyando mi proceso académico, darme la oportunidad de haber formado un equipo contigo durante año y medio, tenerme tanta paciencia al leer las versiones del documento y darme diferentes consejos, con el fin de que nuestro trabajo de grado haya quedado mucho mejor de lo había imaginado y, el cual le cogí bastante cariño. Siempre serás mi persona de admirar.

A mis profesores, compañeros y amigos de la maestría (Dey, Geral, Sergio, Victor, Christian y Javier). Gracias por ser parte esencial de mi proceso educativo. A lo largo de esta etapa, compartimos aprendizajes, experiencias y momentos inolvidables que marcaron mi camino académico y personal. Juntos construimos no solo conocimiento, sino también una amistad que siempre llevaré en mi corazón.

A la institución CoRe por darme el aval de crear, implementar y de desarrollar una electiva con los estudiantes. A mis estudiantes que fueron parte del proyecto, quienes estuvieron activos, participaron y dieron lo mejor de ellos en cada una de las sesiones.

Dedico mi estudio a...

Mi abuelita que no pudo acompañarme durante el último semestre de mi maestría, pero sé que siempre me va a estar acompañando en cada uno de mis logros.

Al universo § por no permitir que me rindiera y dejara este proyecto a la deriva. Gracias por darme las últimas energías que necesitaba para culminar lo que tanto esfuerzo me había costado.

Tabla de contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Delimitación del problema.....	3
1.1. Formulación del problema	3
1.2. Justificación.....	8
1.3. Objetivos	10
1.3.1. Objetivo general.....	10
1.3.2. Objetivos específicos	10
1.4. Revisión de antecedentes	10
Capítulo 2. Marco de Referencia	18
2.1. Génesis instrumental	18
2.2. Argumentación matemática.....	20
2.2.1. Argumento	21
2.2.2. Argumento inductivo	22
Capítulo 3. Marco metodológico	25
3.1. Posicionamiento investigativo.....	25
3.2. Estrategia investigativa	25
3.3. Conjetura	26
3.4. Contextualización del estudio	27
3.5. Planeación del experimento de enseñanza	28
3.6. Descripción de la experimentación	31
3.7. Registro de la información y construcción de los datos a analizar	31
3.8. Análisis de la información.....	33
Capítulo 4. Análisis de resultados.....	36
4.1. Tarea 1: Lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos dados	36
4.1.1. Episodio No. 1 – G2 (Sofía, Juliana, Miguel).....	36
4.1.2. Episodio No. 2 – G3 (Martín, Alejandro, Samir)	51
4.1.3. Episodio No. 3 – G4 (Laura, Sara, Mariana)	62
4.2. Tarea 2: Recta perpendicular por el punto medio – mediatriz	76
4.2.1. Episodio No. 4 – G3 (Martín, Alejandro, Samir)	76
4.2.2. Episodio No. 5 – G4 (Laura, Sara, Mariana)	90
4.3. Tarea 3. Intersección de mediatrices de un triángulo.....	104

4.3.1. Episodio No. 6 – G2 (Sofía, Juliana, Miguel).....	104
4.3.2. Episodio No. 7 – G4 (Laura, Sara, Mariana)	114
4.4. Tarea 4. Triángulos separables.....	125
4.4.1. Episodio No. 8 – G4 (Laura, Sara, Mariana)	125
Capítulo 5. Discusión y resultados.....	137
5.1. Identificación de los elementos del argumento inductivo al usar los recursos didácticos	137
5.2. Rastreo de la génesis instrumental	143
5.3. Apoyo de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos	145
5.4. Gestión docente para apoyar la producción de argumentos inductivos	146
Capítulo 6. Conclusiones	149
6.1. Cumplimiento de los objetivos.....	149
6.2. Verificación de la conjetura del experimento de enseñanza	150
6.3. Proyecciones del trabajo.....	151
Referencias bibliográficas.....	153
Anexos	155
Anexo 1 – Enunciado y planeación de la tarea preliminar.....	155
Anexo 2 – Enunciados de las tareas	161
Anexo 3 – Instrucciones de grabación para los estudiantes	169
Anexo 4 – Acuerdos de GeoGebra.....	170
Anexo 5 – Planeación detallada de los enunciados de las tareas	170

Índice de tablas

Tabla 1.1 <i>Porcentaje de estudiantes que alcanzaron el nivel 4 2020-2022</i>	5
Tabla 2.1 <i>Elementos de un argumento inductivo</i>	24
Tabla 3.1. <i>Tareas propuestas para los estudiantes</i>	29
Tabla 3.2 <i>Organización de los grupos de trabajo</i>	30
Tabla 3.3 <i>Grupos e información analizada</i>	33
Tabla 3.4 <i>Herramienta analítica de la génesis instrumental</i>	34
Tabla 3.5 <i>Herramienta analítica para la producción de argumentos inductivos</i>	34
Tabla 5.1 <i>Síntesis de la producción de argumentos inductivos por tarea</i>	138
Tabla 5.2 <i>Síntesis de la génesis instrumental por grupos</i>	143

Índice de figuras

Figura 1.1 <i>Estructura de un argumento inductivo elaborado por Molina y Samper (2019)</i>	15
Figura 2.1 <i>Estructura de un argumento simple</i>	22
Figura 2.2 <i>Estructura de un argumento inductivo según el grupo de investigación Æ•G, 2023</i> . 23	
Figura 3.1 <i>Plantilla discursiva para elaborar un argumento inductivo</i>	27
Figura 3.2 <i>Esquema argumentativo para representar un argumento inductivo</i>	27

Índice de imágenes

Imagen 4.1. <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 2-Tarea 1</i>	43
Imagen 4.2. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 2-Tarea 1</i>	43
Imagen 4.3. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 2-Tarea 1</i>	44
Imagen 4.4 <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 3-Tarea 1</i>	55
Imagen 4.5. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 3-Tarea 1</i>	55
Imagen 4.6. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 3-Tarea 1</i>	56
Imagen 4.7. <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 1</i>	68
Imagen 4.8. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 1</i>	69
Imagen 4.9. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 1</i>	69
Imagen 4.10. <i>Respuestas del ítem 2 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2</i>	81
Imagen 4.11. <i>Respuestas del ítem 3 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2</i>	82
Imagen 4.12. <i>Respuestas del ítem 4 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2</i>	83
Imagen 4.13. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 3-Tarea 2</i>	83
Imagen 4.14. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 3-Tarea 2</i>	84
Imagen 4.15. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 2</i>	99
Imagen 4.16. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 2</i>	100
Imagen 4.17. <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 2-Tarea 3</i>	108
Imagen 4.18. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 2-Tarea 3</i>	108
Imagen 4.19. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 2-Tarea 3</i>	109
Imagen 4.20. <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 3</i>	119
Imagen 4.21. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 3</i>	119
Imagen 4.22. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 3</i>	120

Imagen 4.23. <i>Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 4</i>	130
Imagen 4.24. <i>Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 4</i>	131
Imagen 4.25. <i>Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 4</i>	131

Introducción

En el presente documento presentamos los resultados de la investigación realizada en el marco del trabajo de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Nuestro interés se centró en favorecer el aprendizaje de la argumentación de estudiantes de Educación Básica Secundaria con foco en la estructura que tienen los argumentos inductivos y la producción de tales argumentos en la solución de problemas geométricos, con la mediación de GeoGebra.

En el primer capítulo presentamos la delimitación del estudio. Para ello, describimos la importancia, pertinencia y viabilidad de este, exponemos el objetivo general y los objetivos específicos y, finalmente, presentamos la revisión de antecedentes, sintetizando la información sobre documentos fundamentales para nuestra investigación.

En el segundo capítulo describimos el marco de referencia que sustentó el análisis de la información recogida empíricamente. Los referentes están centrados en dos constructos, principalmente: el argumento inductivo, que desarrollamos siguiendo la línea conceptual del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot G$) de la UPN; y la génesis instrumental, propuesta por Rabardel (1995; citado en Pérez 2014 y en Sua y Camargo, 2019), que nos permite caracterizar el efecto de un artefacto, en nuestro caso de GeoGebra, en la resolución de problemas.

En el tercer capítulo, presentamos la metodología de investigación. Esta incluye la exposición de la perspectiva investigativa y el enfoque asumidos y la estrategia empleada en el estudio. Además, describimos realizada, mencionando el conjunto de tareas propuestas a estudiantes de sexto a octavo grado de Educación Básica Secundaria. Adicionalmente, explicitamos el procedimiento utilizado para la recolección, organización y construcción de datos investigativos y, explicamos el proceso de análisis de los datos.

En el cuarto capítulo realizamos el análisis detallado de los datos, centrando la atención en los indicios del aprendizaje de argumento inductivo y en la génesis instrumental que contribuyó al aprendizaje con el uso de GeoGebra.

En el quinto capítulo hacemos una discusión sobre: los cambios de la identificación de los elementos de los argumentos inductivos por cada tarea; el papel de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos; la productividad de los enunciados de las tareas y de los recursos

didácticos; la gestión que debe tener el profesor antes, durante y después de tareas que centren la atención en que los estudiantes interactúen y argumenten. Después, en la sección de conclusiones, nos enfocamos en el cumplimiento de los objetivos, los aprendizajes personales y las proyecciones que tenemos de nuestro trabajo de grado.

Capítulo 1. Delimitación del problema

En este capítulo, describimos¹ los aspectos que delimitan el problema investigativo. En el primer apartado, la autora del trabajo de grado expone la formulación del problema de manera personal, por lo que esta sección está escrita en primera persona del singular, al igual que la justificación. Ella presenta la necesidad que dio lugar a la investigación, refiere a ciertas circunstancias de la institución donde trabajaba cuando inició el proyecto académico, las relaciona con un interés académico personal, establece una posible salida para atender la necesidad y propone la pregunta investigativa. En el segundo apartado, la autora presenta la justificación del estudio donde muestra la importancia, la pertinencia y la viabilidad de este.

Después del planteamiento, mencionamos los objetivos del estudio tanto general como específicos y, por último, exponemos la revisión de algunas investigaciones que han hecho otros autores sobre la argumentación inductiva y la génesis instrumental; estos fundamentaron teórica y empíricamente nuestro estudio.

1.1. Formulación del problema

La institución educativa en la que me encontraba vinculada como docente de aritmética, álgebra y geometría durante el año 2023, tiene como objetivo ofrecer una educación de alta calidad buscando una mejora continua en los índices de calidad establecidos por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Con el fin de lograr las metas de calidad, la institución que llamaremos “CoRe” ha utilizado las siguientes estrategias en los últimos años:

- Contratar los servicios de la organización denominada Milton Ochoa para apoyar el proceso académico de los estudiantes, a partir de la herramienta *Martes de Prueba*, que consiste en medir semanalmente la calidad académica, por medio de la solución de cuadernillos con preguntas de selección múltiple, en las áreas evaluadas por el ICFES.

¹ Nos referimos a la primera persona del plural en la mayor parte del documento por el trabajo en conjunto de la estudiante de maestría y la asesora del trabajo de grado.

- Establecer un convenio con la entidad de Santillana para que los estudiantes utilicen, en las clases, los textos fungibles llamados *Activamente* y repasen en casa lo trabajado con ejercicios del libro virtual de la plataforma *Ecosistema Digital Integrado* (EDi).

La primera herramienta, según la organización Milton Ochoa, permite generar planes de mejora constantes y motivan el refuerzo de conocimientos de los estudiantes, poniendo a prueba sus habilidades y destrezas, en la búsqueda de mejores resultados a corto, mediano y largo plazo en la institución. En el área de matemáticas, las preguntas se encuentran enmarcadas dentro de los procesos de: comunicación, representación y modelación; planeamiento y resolución de problemas; y, razonamiento y argumentación. En particular, para construir las preguntas y analizar los resultados acerca de la argumentación, Milton Ochoa se basa en la definición que tiene el ICFES sobre el proceso de argumentación en matemáticas, definido en el documento *Evaluar para Avanzar* (2021) así:

La capacidad que tiene el estudiante para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones, siempre justificando por qué o cómo se llegó a estas, a través de ejemplos y contraejemplos, o, señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes (pp. 24).

A inicios del año 2023, la organización Milton Ochoa realizó un informe general del año 2022, por área, en donde estableció que:

En matemáticas existen dos procesos que necesitan especial atención, por el bajo porcentaje de estudiantes que están en un nivel alto o superior en el consolidado de respuestas de los cuadernillos. Estos son: problemas que involucren información cuantitativa para plantear e implementar estrategias que lleguen a las soluciones adecuadas; y, validar o refutar una afirmación, proceso o estrategia, justificando su respuesta, para dar solución al problema, asociado al razonamiento y a la argumentación matemática. (En presentación realizada a los docentes de la institución, 2023).

Los resultados del desempeño de los estudiantes en el nivel 4, correspondiente al proceso argumentativo, evaluado en matemáticas durante los años 2020-2022 por el ICFES (Tabla 1.1), indican que, efectivamente ha venido disminuyendo ampliamente el porcentaje de estudiantes que se ubican en este nivel, pese a las estrategias descritas.

Tabla 1.1 *Porcentaje de estudiantes que alcanzaron el nivel 4 2020-2022*

		<i>Año escolar</i>	<i>Porcentaje de estudiantes que alcanzaron el nivel</i>
NIVEL 4	<i>Competencia argumentativa</i>	2020	44%
		2021	29%
		2022	26%

Así, durante el primer periodo escolar, seguí observando una brecha negativa entre el proceso de argumentación y los demás procesos evaluados por los cuadernillos de *Martes de Prueba* en estudiantes de sexto a octavo grado. Sin embargo, en el colegio no hay espacios de reunión de los profesores del área de matemáticas, para revisar cómo se podría atender, por ejemplo, qué se espera que los estudiantes realicen para la solución de las preguntas y cómo apoyarlos para que mejoren.

En cuanto a la segunda estrategia que utiliza CoRe, referente al convenio con Santillana, en los libros se propone un enfoque macro, con proyectos transversales, acompañado de problemas específicos y de un conjunto de ejercicios de refuerzo, de acuerdo con cada proyecto. El enfoque podría ser un apoyo efectivo para el desarrollo de procesos matemáticos como el de argumentación. Sin embargo, en la institución no se puede seguir la secuencia como lo propone Santillana, debido a que, a petición de los padres de familia, la dirección del colegio exige que los docentes nos concentremos principalmente en los contenidos y en completar los ejercicios del libro en su totalidad sin importar el proyecto transversal.

Desde mi punto de vista, los esfuerzos que realiza el colegio para mejorar la calidad, y específicamente el proceso de argumentación de los estudiantes, son insuficientes y eventualmente contradictorios. De un lado, el espacio *Martes de Prueba* solamente mide el nivel de argumentación en que se encuentran los estudiantes, más no hace propuestas sobre cómo enseñar a argumentar. De otro lado, las directrices institucionales sobre el aprovechamiento del convenio con Santillana restringen la posibilidad de los profesores de establecer estrategias pedagógicas para enseñar a argumentar. El foco de las clases de matemáticas se concentra en completar el libro y hacer los ejercicios propuestos en la plataforma, sin dar lugar para trabajar en el proceso argumentativo de forma decidida.

De manera específica, en la clase de geometría es en donde evidencié mayor dificultad para apoyar el proceso de argumentación de los estudiantes. Esta materia solamente tiene un espacio

por semana con una duración de cuarenta y cinco minutos por clase. En ese tiempo se exige a los docentes que los estudiantes desarrollen la unidad de geometría del libro Santillana en cada periodo académico. Así, es poco probable que, en las clases de geometría, se pueda enfocar en orientar los procesos de argumentación en los estudiantes.

La metodología que adoptó la institución me ha causado cierto conflicto y ha sido un poco frustrante para mí, especialmente en cuanto a la enseñanza de la geometría. Lo anterior debido a que, en mi formación como docente viví una experiencia en la que con mis compañeros debíamos resolver problemas geométricos en grupo, descubrir propiedades y justificarlas, algunas veces con ayuda de un sistema teórico local desarrollado en el curso. De alguna forma esperaba recrear ese ambiente en mis clases de geometría.

Adicionalmente, durante los años 2018 y 2019, cuando fui monitora en el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot G$, aprendí la importancia que existe de no imponer a los estudiantes las definiciones de objetos geométricos o los teoremas, sino de permitirles llegar a sus propios descubrimientos, a partir de sus construcciones, procedimientos o exploraciones, para luego proponer afirmaciones que se deben argumentar para ser aceptadas. En el proyecto que el grupo desarrollaba, tuve la oportunidad de observar clases de geometría en grados sexto y octavo en un colegio, en donde vivencié que sí era posible fomentar procesos argumentativos en las clases de geometría. Sin embargo, las decisiones adoptadas en la institución CoRe no permiten que, en las clases de matemáticas, y especialmente de geometría, los estudiantes aprendan a argumentar.

En el colegio CoRe sucedía lo que mencionan Planas y Morera (2012), es decir, se esperaba que los estudiantes mostraran niveles de argumentación óptimos, sin desarrollar una estrategia pedagógica específica que permitiera un desarrollo progresivo de la práctica argumentativa, con exigencias de describir, explicar, justificar y argumentar, que pueden darse tanto en situaciones de razonamiento individual como en situaciones de interacción en grupo. Por lo anterior, consideré que era necesario buscar un espacio específico y alternativo en la institución CoRe, diferente a las clases usuales de geometría para que los estudiantes de secundaria aprendieran a argumentar.

El interés del colegio CoRe por mejorar la argumentación de los estudiantes no es aislado. Tanto los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) como diversos investigadores, han señalado la importancia de aprender a argumentar en el aula, por múltiples razones. Por ejemplo, Ruiz (2012), reconoce el papel de la argumentación en la construcción autónoma de conocimiento por parte de los estudiantes, ofreciendo la posibilidad de escucharse,

analizar situaciones colaborativamente y discutir las ideas de los compañeros. Esta postura es similar a la establecida por Reuter et al. (2023), quienes señalan que aprender a argumentar, favorece la actividad matemática de persuadir y convencer a otros de la validez de una afirmación matemática, por medio de argumentos deductivos, y la actividad exploratoria de descubrir propiedades y proponer conjeturas, ampliando el universo de conocimientos que se tienen, por medio de argumentos abductivos e inductivos.

En el proceso de atender la necesidad, pensé en adoptar en ese espacio una vía sugerida por el grupo de investigación $\mathcal{A}E \cdot G$ y por García, A. (2015). Estos autores proponen propiciar la argumentación en matemáticas a partir de la resolución de problemas, como fue la experiencia que viví en mi formación universitaria. Además, afirman que resolver problemas matemáticos permite que los estudiantes exploren, encuentren propiedades, argumenten sobre qué tan seguros están de las propiedades descubiertas y refuten los descubrimientos de otros compañeros.

Para estimular un ambiente de resolución de problemas, consideré la opción de usar GeoGebra, como proponen diversos autores. Por ejemplo, Bravo, Arenas y Pineda (2019) afirman que el uso de GeoGebra favorece la argumentación matemática, pues permite un acercamiento práctico de verificación, con lo cual los resolutores ganan razones para sustentar sus afirmaciones. Adicionalmente, Sua y Camargo (2019) mencionan que enfocarse en problemas geométricos con el uso de GeoGebra contribuye a que los estudiantes exploren y justifiquen sus respuestas, encontrando razones válidas para sus descubrimientos.

En síntesis, consideré que una vía factible para atender la necesidad de desarrollar el proceso argumentativo de los estudiantes era crear un curso electivo en la institución CoRe, para proponer una forma diferente de trabajar en geometría y presentar a mi institución una alternativa, en la que los estudiantes aprendan a argumentar. En ese curso electivo, intenté favorecer la argumentación mediante la resolución de problemas y aprovechando los recursos que brinda GeoGebra. Adicionalmente, como el trabajo en geometría que se realiza en la institución no conduce a que los estudiantes tengan un suficiente bagaje de conocimiento geométrico para enfocar el curso electivo en la argumentación deductiva, decidí centrarme en la argumentación inductiva.

Por lo anterior, propuse responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo promover la argumentación inductiva en un espacio alternativo a la clase de geometría de estudiantes de Educación Básica Secundaria en el que solucionen problemas geométricos con mediación de GeoGebra?

1.2. Justificación

A continuación, presento la justificación de mi estudio, la cual está constituida a partir de los siguientes elementos: mis intereses académicos personales; las orientaciones curriculares sugeridas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia sobre la enseñanza de la argumentación; y, los señalamientos de la comunidad matemática sobre la importancia de contribuir al aprendizaje de la argumentación de estudiantes de todos los niveles educativos. La justificación me permite: sustentar la importancia del estudio para fomentar la argumentación de estudiantes de secundaria; mostrar la pertinencia de la investigación para la comunidad de educación matemática; y, evidenciar la viabilidad del estudio respecto al tiempo, dedicación y autorizaciones necesarias para llevar a cabo el estudio.

Con relación a mis intereses personales, me enfoqué en la argumentación en geometría porque, como ya dije en la formulación del problema, desde que inicié el primer semestre en la Licenciatura en Matemáticas, empecé a interesarme por aquella rama de las matemáticas y por su enseñanza. Esto me permitió ver la importancia de implementar lo aprendido en la institución CoRe, pensando en que los estudiantes tuvieran la oportunidad de realizar exploraciones y descubrieran por ellos mismos enunciados matemáticos.

En cuanto a las directrices curriculares que son establecidas por el Ministerio de Educación Nacional, en los Lineamientos Curriculares se menciona que la geometría es una herramienta que permite desarrollar la argumentación. Adicionalmente, los Lineamientos, sugieren que las situaciones problema que proponga el profesor deben permitir al estudiante “explorar, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples, y al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción del conocimiento” (MEN, 2006, p. 16). Por esa razón, se propone la implementación de situaciones problemas que se conviertan en un reto para los estudiantes, en las que ellos desarrollen procesos de visualizar, explorar y conjeturar en torno a la solución de problemas geométricos y, proponer argumentos a favor o en contra de una conjetura para utilizarlos en la justificación de afirmaciones.

Además, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), se señala que la argumentación es fundamental para fomentar el razonamiento en los estudiantes y lograr que sean matemáticamente competentes. Complementando lo anterior, algunos autores mencionan que la argumentación matemática en el aula no es solamente un discurso en el que los estudiantes comparten una respuesta, se encuentran en desacuerdo con algún compañero o enumera los pasos de algún procedimiento (Rumsey y Langrall, 2016; y Grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$). Así, desde nuestro punto de vista, no basta promover ambientes de clase que favorezcan la argumentación. Es necesario enseñar cómo se formula un argumento y promover la construcción de significado del papel que desempeña cada elemento que conforma la formulación como señalan Planas y Morera (2012). Adicionalmente, es de suma importancia proponer y generar espacios en los que se propicie una motivación para argumentar, escuchar los argumentos de otros y construir el conocimiento de objetos o procesos matemáticos (MEN, 2006).

Justifico la importancia de enseñar a argumentar en el señalamiento que hacen algunos investigadores. Por ejemplo, Rumsey y Lagrall (2012) dicen que la argumentación puede influir positivamente en el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes y en generar que ellos asuman un papel central en su aprendizaje. Así, los estudiantes tienen la oportunidad de apropiarse de las matemáticas que están aprendiendo.

Adicional a lo dicho, Planas y Morera (2012) mencionan que trabajar la argumentación en la formación de profesores de matemáticas es de gran importancia, debido a que les permite desarrollar el conocimiento profesional necesario para reconocer el aprendizaje de la argumentación matemática como un continuo que se inicia con la descripción de hechos e ideas y se perfecciona con la justificación de argumentaciones parciales y la elaboración de contra argumentos.

Finalmente, el estudio era viable, ya que conté con el apoyo de la institución educativa. La institución CoRe me brindó la oportunidad de crear y ofrecer un curso electivo alternativo a las clases de matemáticas y geometría, para estudiantes de 6° a 8°. Además, conté con la autorización de los padres de familia, para que los estudiantes pudieran ser grabados al momento de solucionar problemas geométricos con el uso de GeoGebra y en las puestas en común.

1.3. Objetivos

Con base en lo establecido en la formulación del problema y la justificación, el estudio tiene los siguientes objetivos:

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar la argumentación inductiva de estudiantes de Educación Básica Secundaria del Colegio CoRe en un curso electivo, que promueva la resolución de problemas de geometría plana con el uso de GeoGebra.

1.3.2. Objetivos específicos

- Diseñar un conjunto de tareas que promueva la argumentación inductiva en estudiantes de Básica Secundaria, con problemas de geometría que se resuelven con mediación de GeoGebra.
- Establecer la influencia del programa GeoGebra en la elaboración de argumentos inductivos al resolver problemas de geometría.
- Presentar a la institución CoRe una alternativa para fomentar la argumentación en el aula de matemáticas por medio de un curso electivo para solucionar problemas geométricos con el uso de GeoGebra.

1.4. Revisión de antecedentes

En esta sección presentamos la revisión de antecedentes literarios que nos permitieron construir fundamentos teóricos y metodológicos para nuestro estudio. Organizamos la presentación de la revisión, comenzando por estudios que usan GeoGebra en la resolución de problemas de geometría, con el interés de favorecer la argumentación. Además, documentos que ofrecen fundamentos sobre qué es argumento y argumentación. Finalmente mencionamos trabajos que tienen como eje central la argumentación inductiva.

Sua y Camargo (2019), pretenden aportar a la comprensión de la acción conjunta, que se produce entre el razonamiento científico y el uso de GeoGebra en un estudio en el que realizan un experimento de diseño con parejas de estudiantes de educación básica secundaria. Los investigadores se enfocan en examinar el uso que hacían los estudiantes de la herramienta ‘Rastro’

de GeoGebra para explorar, plantear conjeturas y justificar sus respuestas, mediante un estudio de caso de una pareja de estudiantes.

Los autores usan la génesis instrumental y el razonamiento científico, como conceptos teóricos fundamentales para comprender cómo los estudiantes interactúan con GeoGebra y cómo estas interacciones pueden transformarse en aprendizajes significativos por los estudiantes cuando ellos exploran, descubren y justifican una hipótesis para resolver el problema en cuestión. Estas últimas acciones son las que integran lo que ellos denominan razonamiento científico; al involucrar el descubrimiento y la justificación, vemos su asociación con la argumentación.

El estudio se centra en un problema geométrico de conjuración, cuyo objetivo era que los estudiantes descubrieran que *los puntos que cumplen ser el centro de una circunferencia que contiene a dos puntos A y B, pertenecen a la mediatriz del segmento AB*. Los estudiantes, a través de la manipulación y exploración de objetos geométricos en GeoGebra, debían formular conjeturas y argumentarlas, además de comprender y generalizar las propiedades geométricas subyacentes.

Los autores destacan la importancia de que los profesores planteen problemas abiertos que puedan ser abordados por los estudiantes, lo que fomenta la producción de enunciados y promueve la argumentación. Resaltan que la relación artefacto-individuos se estimula por el tipo de problemas y los procesos argumentativos ejecutados por los estudiantes.

El ejercicio investigativo les permite a Sua y Camargo (2019) identificar artefactos que evolucionan en instrumentos para los estudiantes, en tanto que estos comienzan a utilizar las herramientas no solo para realizar tareas específicas, sino también para explorar, generalizar y justificar propiedades matemáticas.

Este artículo nos proporciona herramientas conceptuales y metodológicas valiosas. Una de ellas es la idea de que los estudiantes pueden llegar a conclusiones generales a partir de observaciones específicas, utilizando GeoGebra para llegar a la solución. Esta idea es clave para fomentar la argumentación inductiva en el aula. Otra herramienta que nos brinda el estudio es una mirada al tipo de problemas geométricos que podríamos utilizar o modificar para favorecer el uso de GeoGebra en problemas en los que ellos deben explorar, plantear conjeturas y argumentar sus respuestas. Adicionalmente, el marco de referencia nos brinda una conceptualización de la Génesis Instrumental, para interpretar el uso de GeoGebra en la solución de problemas, especialmente el uso dado a la herramienta 'Rastro'. El artículo muestra que GeoGebra y el

razonamiento científico son dos elementos que conforman un dúo útil para la resolución de problemas, que debería explotarse de manera más decidida en las clases de geometría.

Planas y Morera (2012), en un proyecto investigativo del Ministerio de Ciencias e Innovación de España, buscan entender la complejidad de la noción de argumentación y el papel que la interacción en el aula de matemáticas desempeña en el aprendizaje de esta. Las autoras enfocan el marco de referencia en la argumentación matemática. Ellas la definen como “un discurso dirigido a un receptor con el fin de justificar una opinión partiendo de hechos o datos y razonando los criterios sobre los que se decide la adecuación de la opción elegida.” (pp. 3).

A lo largo del artículo, las autoras destacan la importancia de enseñar a los estudiantes a estructurar argumentos de manera lógica y coherente, utilizando esquemas de argumentación como el de Toulmin (1985; citado en Planas y Morera 2012). Mencionan que este esquema ayuda a descomponer los argumentos en elementos clave, tales como datos (premisas), aserciones y garantías (razones que validan la conclusión). El uso de aquellos elementos permite que los estudiantes justifiquen el camino que los llevó al planteamiento de soluciones.

Las investigadoras emplean una metodología cualitativa basada en el análisis de casos de estudio de profesores de Educación Básica de Secundaria. Ellas recopilan información a partir de la interacción de los profesores y sus estudiantes durante la resolución de problemas matemáticos de aritmética y geometría. Analizan la información para identificar y evaluar las prácticas argumentativas que emergen en las aulas.

En uno de los ejemplos presentados, los estudiantes exploran diferentes estrategias de solución de un problema y argumentan sus afirmaciones en cada etapa del proceso, empleando principios aritméticos antes vistos. La argumentación matemática surge mediante la justificación de las estrategias que emplean los estudiantes. En el segundo ejemplo, los estudiantes utilizan GeoGebra para encontrar una propiedad geométrica específica, argumentando sus afirmaciones con la información obtenida en la exploración y el descubrimiento de la construcción geométrica realizada y la manipulación dinámica de los objetos.

En las conclusiones, las autoras mencionan que la generalización tiene un papel importante para desarrollar argumentos en el aula; la identifican en varios argumentos propuestos por los estudiantes. Ellos hallan soluciones resolviendo casos concretos, pero se preguntan por la situación genérica cuya solución informe sobre todos los posibles casos; este es un indicio de argumentación inductiva en el aula de matemáticas.

También, las autoras concluyen que la argumentación matemática debe ser vista como un proceso continuo de construcción y validación de ideas matemáticas. Este proceso es fundamental en su enseñanza, ya que permite a los estudiantes desarrollar un entendimiento más profundo de los conceptos matemáticos. Finalmente, invitan a la comunidad educativa en seguir contribuyendo con la elaboración de una percepción más amplia de lo que se conoce como argumentación, para que los estudiantes aprendan a exponer argumentos a partir de la resolución de problemas. El enfoque de la argumentación matemática que presentan Planas y Morera (2012) es relevante para nuestro estudio, ya que las autoras insisten en que la argumentación es un proceso que debe estar continuamente apoyado y desarrollado en el aula, tal como nosotras queremos mostrar en nuestro estudio. También, nos proporciona herramientas teóricas importantes sobre la conceptualización de argumentación, la relación de esta con la generalización y el esquema de Toulmin para construir argumentos. Este esquema es también utilizado por el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot G$.

Rumsey y Langrall (2016) exploran estrategias didácticas para fomentar la argumentación matemática en aulas de primaria. La investigación reportada en el artículo se centra en cómo los profesores pueden integrar la argumentación matemática cuando los estudiantes tienen poca experiencia en el desarrollo de habilidades argumentativas. A través de una unidad de enseñanza de ocho lecciones dirigida a estudiantes de cuarto grado, analizan cómo la argumentación puede servir no solo para explorar propiedades aritméticas, sino también para identificar, conjeturar, justificar y argumentar las respectivas propiedades.

En el documento, las autoras definen argumentación matemática como un proceso discursivo en el que los estudiantes exploran, descubren y justifican sus afirmaciones a través de un razonamiento estructurado, definición que resulta ser similar a sugerida por el grupo $\mathcal{A} \cdot G$ (ver Camargo et al., 2024; Molina y Samper, 2019; Sua y Camargo, 2019) y por Planas y Morera (2012). Este proceso implica la formulación de conjeturas, la búsqueda de evidencia para apoyar esas conjeturas, y la comunicación de argumentos.

Las investigadoras presentan cinco estrategias didácticas que usaron para promover el aprendizaje de la argumentación matemática de sus estudiantes: introducir *plantillas discursivas* como apoyo para desarrollar el discurso argumentativo; articular una buena discusión sobre un *contenido familiar* en el que proponen un tema controversial que se hubiera visto en clases anteriores; especificar condiciones para brindar a los estudiantes oportunidades de modificar afirmaciones o conjeturas para que fueran ciertas; realizar afirmaciones falsas para que los

estudiantes desarrollaran sus propias ideas, validaran o se cuestionaran las afirmaciones de otros y así las modificaran o validaran; y, tomar propiedades matemáticas conocidas por ellos y mostrarlas de maneras nuevas o inesperadas, para desafiar a los estudiantes, ayudando a que formularan preguntas y afirmaciones con su respectiva justificación.

Como conclusiones, las autoras afirman que gracias a que se fomentó la argumentación en la clase de matemáticas, los niños tuvieron la oportunidad de apropiarse de lo que estaban aprendiendo, más allá de la comprensión procedimental. También indican que ellos participaron de forma lúdica explorando, conjeturando y justificando sus ideas. Ellas mencionan que la argumentación es más que compartir una respuesta, estar en desacuerdo, enumerar los pasos de un procedimiento, explicar una respuesta o notar un patrón, aspecto que va relacionado con mi perspectiva investigativa. Por eso dicen que la enseñanza con énfasis en la argumentación es una poderosa herramienta que debe integrarse a las clases de matemáticas.

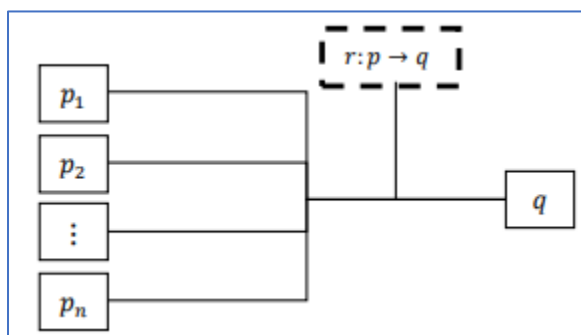
El documento de Rumsey y Langrall (2016) es significativamente útil para el desarrollo de nuestro trabajo de grado, debido a que nos da una guía para implementar el uso de plantillas discursivas en las tareas propuestas. Estas plantillas ofrecen una estructura lingüística que facilita la formulación de argumentos, aspecto relacionado con nuestro enfoque discursivo en el aula y nuestro objetivo del estudio.

Molina y Samper (2019) llevan a cabo un estudio en el que proponen una rúbrica para identificar los tipos de argumentos que están asociados a los tipos de enunciados de problema abiertos de conjeturación en geometría, abordados en GeoGebra. En el estudio rastrean las estrategias de solución realizadas por un grupo de estudiantes que se encontraban cursando *geometría plana* en la UPN cuando abordan problemas que involucran la mediatriz de un segmento.

En el marco conceptual, los autores definen *problema abierto de conjeturación* como un problema donde el enunciado no revela su solución o respuesta y solicita establecer una conjetura. También definen argumento en matemáticas siguiendo el modelo de Toulmin, diciendo que es “un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares y una general. En cualquier argumento, inicialmente se expresa un punto de vista, denominado aserción (q); luego se proporcionan datos (p) para apoyar la aserción y se justifica el uso de los datos como soporte de la aserción (r) por medio de la garantía” (pp.113).

La estructura de un argumento inductivo es desarrollada por Molina y Samper (2019) a partir de una modificación del esquema tradicional del modelo propuesto por Toulmin (Figura 1.1) para argumentos deductivos. En el esquema el dato se compone de varios casos que llevan a expresar una aserción, con base en una regla general que se infiere del examen de los casos.

Figura 1.1 Estructura de un argumento inductivo elaborado por Molina y Samper (2019).



En las reflexiones finales, Molina y Samper (2019) afirman que los entornos de geometría dinámica, como GeoGebra, promueven la exploración visual y el descubrimiento que están en la base de una argumentación inductiva. Particularmente los diferentes tipos de arrastre que se pueden efectuar con la herramienta ‘Rastro’, posibilitan la visualización de varios casos de una situación problema, provocando la producción de conjeturas y argumentos deductivos, inductivos y abductivos, según el tipo de enunciado.

Este artículo nos muestra la posibilidad de elaborar una estructura para el argumento inductivo que podría ser útil para el diseño de las tareas, aprovechando el modelo de Toulmin. Aunque el modelo se propuso para producir argumentos deductivos, Molina y Samper (2019) proponen una estructura para producir argumentos inductivos, tomando como base el modelo de Toulmin.

Hernández y Parra (2013) desarrollan una conceptualización de argumentos inductivos y deductivos haciendo énfasis en la manera en que estos pueden variar en sus características, estructura y el ámbito de validez, dependiendo de las premisas y garantías empleadas. Para hacer la caracterización se basan en el modelo de Toulmin y en observaciones de la interacción entre estudiantes mientras resuelven problemas geométricos utilizando herramientas digitales.

Los autores utilizan el referido modelo, para analizar, en el caso de los argumentos inductivos, cómo los estudiantes elaboran conjeturas a partir de observaciones específicas, cómo estas conjeturas se transforman en generalizaciones. En particular, enfatizan en que tanto la

aserción como la garantía, en un argumento inductivo, son de naturaleza probable, no son absolutamente ciertas, pues dependen de las evidencias observadas. Además, destacan que la inducción en matemáticas no se limita a una progresión de lo particular a lo general, sino que puede adoptar diversas formas. Esta flexibilidad en la estructura del argumento inductivo permite a los estudiantes explorar y generalizar conceptos geométricos de manera más robusta.

Los investigadores analizan cómo los estudiantes generan y justifican argumentos inductivos, al formular y refinar conjeturas basadas en la exploración empírica y el descubrimiento de propiedades. Ellos identifican diferentes estructuras argumentativas que surgen durante el proceso. Este les permite mapear los patrones de generalización que los estudiantes emplean y cómo estos patrones se relacionan con la validez del argumento obtenido. Esto los lleva a concluir que los argumentos inductivos no solo son inferencias que van de datos particulares a aserciones generales, sino que pueden adoptar diversas formas. Esta flexibilidad en la estructura del argumento inductivo permite a los estudiantes explorar y generalizar conceptos geométricos de manera más robusta.

Hernández y Parra se centran en la conformación del argumento inductivo en función de los datos y garantías, independientemente del tipo de problema que lo origine. Ellos muestran un marco a seguir más apropiado para nuestro trabajo, que el descrito por Molina y Samper (2019). Este documento es fundamental para nuestro trabajo de grado, ya que nos proporciona un fundamento para imaginar tareas que permitan a los estudiantes proponer conjeturas y sugerir argumentos inductivos con los cuales respaldarlas, en la solución de problemas geométricos. El uso del modelo de Toulmin nos permite organizar el análisis de los argumentos generados por los estudiantes, especialmente en la conformación del dato.

Samper y Toro (2017) pretenden impulsar el uso del programa de geometría dinámica Cabri en las clases de matemáticas como un recurso eficaz para el aprendizaje de los estudiantes sobre la formulación de argumentos. Para ello, los autores realizan un experimento de enseñanza dirigido a estudiantes de grado octavo. Elaboran una propuesta de siete actividades enmarcadas dentro de la actividad demostrativa y el aprendizaje del software Cabri. Las categorías de análisis se dividen en dos aspectos: la forma como se estructuran los argumentos y la naturaleza del argumento según la garantía.

En el marco de referencia, los autores se fundamentan en la actividad demostrativa que incluye dos procesos: conjeturar y justificar. Además, utilizan la estructura de los argumentos de

acuerdo con el modelo de Toulmin, así como Planas y Morera (2012), Hernández y Parra (2013) y Sua y Camargo (2019).

En el análisis, observan que los estudiantes por lo general se centran en usar garantías visuales y que Cabri puede convertirse en una herramienta potente para suscitar la producción de argumentos, siempre que las tareas estén bien diseñadas en procura de la justificación de las afirmaciones y haya un acompañamiento cercano del profesor.

En las conclusiones, corroboran la importancia del uso de la geometría dinámica en el aula dado que: permite visualizar, explorar, analizar y plantear conjeturas; ofrece la oportunidad de trabajar en construcciones geométricas euclidianas; permite transformar o modificar continuamente los objetos geométricos en tiempo real con la herramienta 'Rastro' preservando las relaciones con las que fueron construidos. Pero aclaran que las actividades tienen que planearse cuidadosamente de tal forma que apunten a la construcción de conocimiento y favorezcan la argumentación. Así, los estudiantes no solamente aprenden a usar las diferentes herramientas y funciones del programa, sino que también aprenden a interpretar la información sobre las figuras representadas.

Este artículo contribuye a nuestro estudio debido a que brinda una vía para el diseño de las tareas en las que se pida a los estudiantes realizar una exploración con el uso de software como Cabri o GeoGebra. Además, aquellas tareas contribuyen a que los estudiantes puedan explorar y descubrir propiedades geométricas, para luego expresar argumentos en los que justifiquen lo descubierto.

Capítulo 2. Marco de Referencia

Este capítulo aborda los fundamentos teóricos que estructuran nuestra propuesta, distribuidos en dos secciones. En la primera, desarrollamos la conceptualización de génesis instrumental, mirada que nos permite identificar el rol de GeoGebra en la resolución de los problemas propuestos en las tareas. A partir de esta mirada, analizamos su incidencia en la producción de argumentos inductivos por parte de los estudiantes, en consonancia con los planteamientos de Pérez (2014) y de Sua y Camargo (2019). En la segunda, planteamos la conceptualización de argumentación, argumento matemático y argumento inductivo, con base en los planteamientos del grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot G$, Rumsey y Lagrall (2016), Planas y Morera (2012) y, Hernández y Parra (2013).

2.1. Génesis instrumental

Una de las perspectivas teóricas que afirma Pérez (2014) para estudiar el papel de las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es la Génesis Instrumental. Escogimos esta teoría como fundamento de nuestra investigación ya que se enfoca en el uso de las tecnologías al resolver problemas matemáticos. Particularmente en nuestro estudio, nos sirve para analizar cómo GeoGebra es utilizado por los estudiantes como apoyo para producir argumentos inductivos, durante el desarrollo de los problemas geométricos propuestos en las tareas del curso electivo.

Así, para nuestro estudio tomamos la definición de génesis instrumental sugerida por Sua y Camargo (2019): “es el proceso mediante el cual los individuos interactúan con artefactos que median su actividad al resolver tareas, los dotan de significado y los incorporan en su labor bajo secuencias de acciones realizadas de manera regular” (p. 10).

En esta teoría se desarrollan cuatro conceptos fundamentales: artefacto, instrumento, instrumentalización e instrumentación. A continuación, nos referimos a cada uno de ellos.

- **Artefacto:** Es definido por Pérez (2014) como el objeto técnico, creado por seres humanos con un propósito específico. En el campo de la Educación Matemática, se reconocen tanto las herramientas tecnológicas usuales (ábacos, regla, transportados, compás) como las herramientas tecnológicas (programas informáticos, aplicaciones, etc.). También se pueden denominar artefactos simbólicos a aquellas herramientas

técnicas creadas para trabajar con objetos matemáticos (principalmente los algoritmos, los sistemas de numeración, los sistemas numéricos, etc.). En este estudio tomamos como artefacto tanto a GeoGebra en su globalidad, como a las opciones que brinda el programa y que utilizaron los estudiantes en sus exploraciones. Por ejemplo: ‘distancia o medida’, ‘circunferencia’, ‘medida de ángulo’, ‘punto’, ‘segmento’, ‘recta’ o la función de arrastre.

- **Instrumento:** Según Trouché (2004; en Pérez 2014), un instrumento no existe por sí mismo, sino que es una transformación del artefacto que se convierte en instrumento para un individuo cuando este se apropia significativamente de este y lo integra en la resolución de una tarea. Esto quiere decir que mientras el artefacto es la herramienta en sí, el instrumento surge cuando el individuo le asigna usos y significados específicos al artefacto, desarrollando formas de usos personales. Cuando esto ocurre, se dice que cada individuo ha construido un instrumento a partir del artefacto.

En nuestro trabajo de grado algunos de los artefactos que se transforman en instrumentos son: ‘medida de distancia’, ‘medida de ángulo’, función de arrastre, entre otros.

La evolución de los artefactos en instrumentos requiere de dos procesos articulados entre sí, producto de la relación entre el individuo y el artefacto: instrumentalización e instrumentación. Estos procesos son de importancia en nuestro estudio, por lo que fueron el centro de nuestra atención al realizar el rastreo de la información, cuando los estudiantes resolvieron las tareas propuestas. Entendemos estos procesos como se expresa a continuación.

- **Instrumentalización:** Como señalan Sua y Camargo (2019) la instrumentalización es el proceso mediante el cual el individuo reconoce las funciones, capacidades y limitaciones del artefacto, ajustándolo o modificándolo según sus necesidades para resolver un problema o realizar una tarea. En nuestro estudio, este proceso es evidente por ejemplo cuando los estudiantes: construyen un segmento AB con la opción ‘segmento’ sin considerar que es necesario determinar primero los puntos A y B o cuando dejan de usar la opción ‘punto’ para hallar la intersección de dos rectas y utilizan la opción ‘punto de intersección’.

Según Trouché (2004; en Pérez 2014) la instrumentalización sucede en tres etapas. En la primera, se descubren y seleccionan las funciones relevantes del artefacto, en este

caso de GeoGebra. En la siguiente etapa, se personaliza y adapta el conjunto de herramientas que se utilizan para realizar las tareas específicas. Finalmente, en la etapa de transformación, los estudiantes modifican el uso de la herramienta para fines diferentes a los originalmente concebidos.

- **Instrumentación:** De acuerdo con Sua y Camargo (2019), la instrumentalización es el proceso en el que el individuo se apropia de la herramienta para usarla en beneficio de la resolución de la tarea. El foco de atención ya no está en el artefacto sino en la tarea misma. En otras palabras, a medida que el individuo reconoce el potencial de las herramientas del programa GeoGebra, la adapta a sus fines, según sus conocimientos, para darle solución al problema.

2.2. Argumentación matemática

En consonancia con Rumsey y Langrall (2016), el Grupo de Investigación $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$, y Planas y Morera (2012), consideramos que la argumentación matemática es un proceso discursivo, sociocultural y dinámico en el que, cuando sucede en el aula, los estudiantes descubren e infieren información nueva a partir de otra ya existente, para generar proposiciones que se articulan con el fin de convencer o persuadir a los demás miembros de la comunidad de la certeza o la aceptabilidad de una afirmación. Esto implica una comunicación en la que los estudiantes no solo presentan afirmaciones, sino que también las justifican a través del diálogo, ya sea verbal o escrito.

En este intercambio de ideas los participantes formulan argumentos mediante un proceso de exposición y realimentación, lo cual es esencial para la construcción del conocimiento matemático. Las normas de la clase, las herramientas disponibles (como por ejemplo GeoGebra) y las prácticas compartidas, influyen en cómo se construyen los argumentos y si son aceptados o convencen a los interlocutores. Las ideas matemáticas no surgen ni se desarrollan en aislamiento, sino dentro de un entorno social y cultural que establece qué argumentos se admiten.

Decimos que la argumentación es un proceso dinámico porque no se trata simplemente de presentar argumentos como única respuesta a preguntas, sino de un constante intercambio y evolución de ideas. A lo largo de este proceso, los estudiantes exploran, descubren, presentan afirmaciones, justifican sus respuestas, y, lo más importante, participan activamente en la crítica y ajuste de sus argumentos en función de la realimentación que reciben de sus compañeros o del profesor. De este modo, la argumentación matemática se convierte en un proceso de aprendizaje

en evolución, donde las ideas se enriquecen, se ajustan y se perfeccionan mediante la interacción continua.

2.2.1. Argumento

La conceptualización de argumento que asumimos en este trabajo es la que sugiere el grupo de investigación $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$:

Es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La aserción se presenta en una de tres maneras: como una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las razones se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. (Camargo et al., 2024, p. 317).

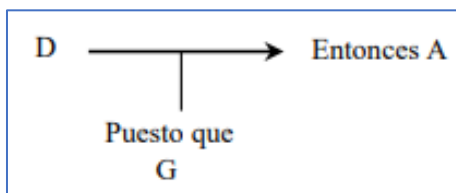
Hay que tener presente que la justificación es entendida por el grupo $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$ como el conjunto de razones (dato y garantía) que son utilizados para sustentar la aserción, lo que quiere decir que una justificación no es un argumento sino parte de este.

Los argumentos a los que nos referimos en este trabajo de grado son argumentos simples. Esto quiere decir, como lo señalan Camargo et al. (2024) que los argumentos se conforman por tres elementos relacionados funcionalmente de la siguiente manera:

- Dato: Razón que sustenta la aserción.
- Aserción: Sostiene mediante un enunciado general por qué el dato apoya la aserción.
- Garantía: Razón que sustenta la relación entre el dato y la aserción.

Si la garantía no es mencionada, Camargo et al. (2024) afirman que se establecerá como un argumento simple incompleto. La estructura funcional de un argumento simple corresponde a la adaptación del esquema argumentativo propuesto por Toulmin (2007), quien incluye seis posibles componentes de un argumento. Para un argumento simple, el grupo $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$ propone la representación que aparece en la Figura 2.1 en el que simboliza la relación entre el dato y la aserción con una flecha e , indica el sustento que permite pasar del dato a la aserción debajo de la flecha.

Figura 2.1 Estructura de un argumento simple.



Nota: Tomado del grupo de investigación Æ•G (2024)

Finalmente, definimos argumento matemático como un argumento que surge en la actividad matemática como puede ser generalizar, visualizar, explorar, representar o clasificar. La aserción en este tipo de argumento se refiere a un objeto matemático, como pueden ser propiedades o relaciones entre propiedades, y las razones que se aportan para sustentarla pueden estar relacionadas o no con condiciones de índole matemática (Camargo et al., 2024).

2.2.2. Argumento inductivo

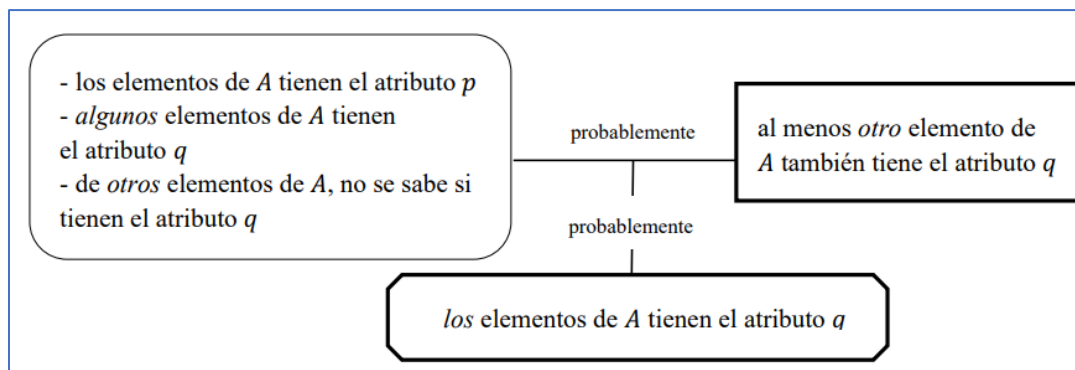
De acuerdo con lo establecido por el grupo de investigación Æ•G, en el proceso de producir un argumento, la inferencia que se hace a partir de información con la que se cuenta determina si la argumentación es inductiva, deductiva o abductiva. El grupo establece una tipificación para los argumentos inductivos, deductivos y abductivos. Como lo mencionamos en la delimitación del problema, en este trabajo nos centramos en los argumentos inductivos.

La argumentación inductiva se basa en un grupo de elementos que comparten una característica común, denominado conjunto referencial y se caracteriza por observar empíricamente un atributo u otra característica que se encuentra presente en algunos de los elementos que pertenecen a este conjunto. Luego, si se consideran uno o varios casos no observados que pertenecen al conjunto referencial, se puede inferir que aquellos casos también cumplen con el otro atributo mencionado.

En consonancia con Camargo et al. (2024), en un argumento inductivo, el dato representa la característica común a todos los elementos del grupo de referencia, además de otra característica observada en varios de los elementos, distinta a la del conjunto referencial y el o los elementos no observados que cumplen el atributo general del conjunto referencial. La aserción sugiere, como inferencia, que es probable que aquel elemento del grupo también cumple con el atributo. La garantía corresponde al posible patrón de generalización escrito de forma condicional, es decir, la idea de que todos los elementos del conjunto referencial comparten el atributo.

Desde esta perspectiva, como lo menciona Copi y Cohen (2013) tanto la aserción como la garantía en un argumento inductivo son de naturaleza probable, lo que significa que la aserción no necesariamente será verdadera y puede dar lugar a la refutación, ya que se pone en cuestionamiento el dato o la garantía. Esto quiere decir que el argumento inductivo parte de una inferencia basada en la observación de patrones. Así, teniendo en cuenta el criterio de tipificación mencionado, y sintetizando lo anterior, en un argumento inductivo la aserción y la garantía son los elementos inferidos durante la argumentación a partir de un dato, y ambos son probables. El esquema que se muestra en la Figura 2., representa la estructura funcional del argumento inductivo y marca con el recuadro resaltado los elementos que fueron inferidos en el argumento.

Figura 2.2 Estructura de un argumento inductivo según el grupo de investigación *Æ•G*, 2024.



De acuerdo con lo mencionado anteriormente, en el presente trabajo nos centramos en la construcción de significado de un argumento inductivo, intentando que los estudiantes reconozcan los elementos considerados en la Tabla 2.1

Tabla 2.1 *Elementos de un argumento inductivo*

1. Dato	Conjunto universal de objetos que se exploran
	Propiedad conocida que tienen los objetos del conjunto universal
	Propiedad descubierta en algunos de los objetos del conjunto universal
	Caso no explorado que pertenece al conjunto universal
2. Aserción	Enunciación sobre el caso no explorado en relación con la propiedad descubierta
3. Garantía	Patrón de generalización o conjetura que establece una proposición condicional del tipo “si <i>propiedad conocida</i> entonces <i>propiedad descubierta</i> ”

Capítulo 3. Marco metodológico

En el presente capítulo, describimos el proceso metodológico utilizado en el desarrollo de la investigación, cuyo propósito es que estudiantes de sexto a octavo grado aprendan a producir argumentos inductivos. Iniciamos sintetizando la aproximación investigativa y la estrategia cualitativa empleada. Luego, contextualizamos la investigación describiendo los participantes, las experiencias previas de los estudiantes, el espacio en el que se desarrolló el curso electivo y las tareas propuestas. Después, indicamos las técnicas para recolectar la información y, finalmente, describimos las herramientas analíticas.

3.1. Posicionamiento investigativo

Nuestro estudio asume un enfoque fenomenológico, debido a que, como menciona Camargo (2021), pretende realizar una indagación sistemática de un fenómeno, mediante descripciones, explicaciones, interpretaciones e inferencias, asociadas a un proceso cualitativo. La aproximación investigativa que encamina el estudio es hermenéutica, porque pretendemos rastrear detenidamente las acciones, las interacciones y los discursos de los estudiantes para “... buscar una cercanía total con el fenómeno que se está indagando para conocerlo, comprenderlo y captar su significado en profundidad de forma global” (Camargo, 2021, p. 18).

3.2. Estrategia investigativa

La estrategia que utilizamos en nuestro estudio es un Experimento de Enseñanza. En ese sentido, se centra en el diseño, la implementación y la evaluación de un conjunto de tareas, que pueden trabajarse en secuencia. El experimento se enmarca en una conjetura o hipótesis general sobre un aprendizaje específico (Camargo, 2021).

En nuestra investigación los participantes son la investigadora-profesora (autora del trabajo de grado), la investigadora asesora (directora del trabajo de grado) y un grupo de estudiantes de Educación Básica Secundaria. Las investigadoras propusimos una conjetura sobre la forma en la que los estudiantes podrían aprender sobre argumentación inductiva, diseñamos las tareas, generamos las condiciones para su ejecución, una de nosotras implementó las tareas y fuimos haciendo ajustes a estas a medida que analizábamos su funcionamiento. En el proceso cotejamos la información que íbamos obteniendo con fundamentos teóricos sobre la enseñanza y el

aprendizaje para entrelazar las fuentes empíricas y teóricas en el curso del experimento (Buitrago y Martínez, 2012).

3.3. Conjetura

En nuestro estudio, la conjetura que pusimos a prueba es la siguiente: estudiantes de sexto a octavo grado de Educación Básica Secundaria que participen en el curso electivo pueden aproximarse a la producción de argumentos inductivos mediante la solución de problemas geométricos, resueltos con ayuda del software GeoGebra y tres recursos didácticos que acompañan los enunciados; estos contribuyen a que los estudiantes estructuren los elementos de un argumento inductivo identificando el papel de cada uno, estableciendo su relación con los otros y reconociendo la naturaleza probable de la aserción y la garantía. Los tres recursos didácticos son los siguientes.

(i) Cuestionario. En el enunciado de las tareas, además de la formulación del problema se incluyen ítems, tipo cuestionario, que orientan: el proceso de exploración, en GeoGebra, de casos particulares que cumplen una propiedad dada; el descubrimiento y formulación explícita de una propiedad; la enunciación de una aserción sobre un caso no explorado, que se infiere a partir de lo descubierto en los casos explorados; y la formulación de la conjetura a manera de patrón de generalización. En lugar de un enunciado del tipo ‘descubra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos’, que daría lugar a proponer una propiedad descubierta únicamente, optamos por un enunciado que dirija la atención de los estudiantes en los diferentes momentos de la argumentación inductiva y en la forma en cómo se formula el argumento. El enunciado del problema que se encuentra en la sección 4 ejemplifica el recurso didáctico.

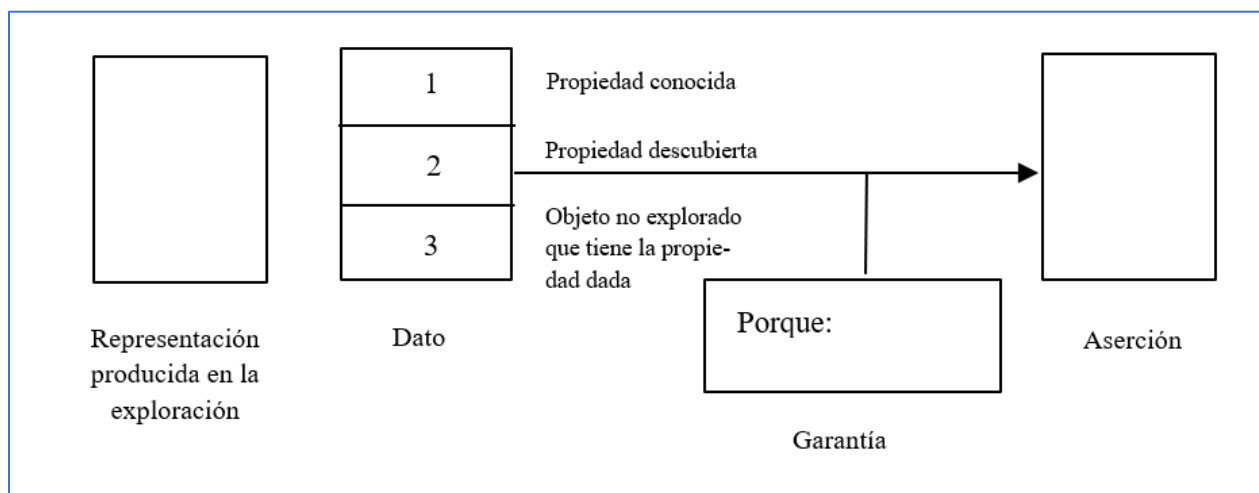
(ii) Plantilla discursiva. Como segunda parte del enunciado de la tarea, que se entrega a los estudiantes una vez han resuelto el problema, usamos una adaptación de una plantilla discursiva adaptada de una propuesta por Rumsey y Langrall (2016) para que los estudiantes identifiquen la estructura mediante la cual se comunica un argumento inductivo. Los estudiantes deben completar una oración construida de tal forma que se van incorporando los elementos del argumento, ligados por palabras, frases y conectores que van dando la forma al argumento. Un ejemplo de plantilla discursiva está en la Figura 3.1.

Figura 3.1 *Plantilla discursiva para elaborar un argumento inductivo*

Observo que _____ sabía que tenían la propiedad _____ también tienen la propiedad _____ (Dato). Afirmino que el objeto no explorado _____ tiene la propiedad _____ (Aserción).
 Esto es así porque _____ (Garantía).

(iii) Esquema argumentativo. Como tercera parte de la tarea proponemos a los estudiantes completar un esquema (Figura 3.2). Es una adaptación que hacemos de la propuesta de Kuntze (2008), quien señala que es útil para apoyar visualmente la identificación de los componentes de un argumento. Aunque este investigador lo propone para los argumentos deductivos, nosotras lo adaptamos a los argumentos inductivos.

Figura 3.2 *Esquema argumentativo para representar un argumento inductivo*



3.4. Contextualización del estudio

El curso se desarrolló en el colegio CoRe, ubicado en la localidad de Engativá y categorizado con un estrato socioeconómico tres. El colegio tiene dos horas establecidas para cursos electivos como danzas, artes y robótica, que contribuyen a la formación integral del estudiante. En este espacio, cada estudiante elige a su elección desde el principio de año el curso electivo que quiere desarrollar. Sin embargo, vimos la oportunidad de implementar las tareas dentro de un curso electivo para no ir en contra de las políticas institucionales y así, tuvimos la autorización por el rector de implementar el experimento de enseñanza durante el cuarto periodo académico del año 2023. El horario del colegio es rotativo cada seis días; lo que quiere decir que

la electiva “¿A utilizar GeoGebra!” se desarrolló cada sexto día escolar, en el horario asignado de 2:10 p.m. a 3:30 p.m.

Los estudiantes que se inscribieron al curso electivo son niños y adolescentes con buen nivel académico, que voluntariamente quisieron asistir. A la mayoría de ellos les gusta participar, prestar atención y preguntar. Este hecho es un indicio de que les gustan las matemáticas y que quieren aprender de programas informáticos, que normalmente no se utilizan en las clases de matemáticas.

En un principio pensamos en realizar el curso electivo en la sala de informática; sin embargo, el salón se encontraba ocupado por los estudiantes de la electiva de periodismo. Por tal razón, decidimos utilizar un salón apartado de los demás salones, para aislar el ruido ocasionado por las demás electivas. El salón contaba con video Beam, tablero, sillas y mesas para los estudiantes.

En cuanto a computadores portátiles para el trabajo en grupos, fue imposible usar los equipos de la institución debido a que se encontraban en mal estado. Por esta razón, utilizamos: el computador personal de la autora de este trabajo, un computador de uno de los estudiantes, con autorización previa de los padres de familia, y tres portátiles de compañeros docentes del colegio CoRe que nos prestaron sus equipos de forma solidaria.

3.5. Planeación del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se desarrolla en tres etapas, atendiendo a lo sugerido por Camargo (2021), planeación, experimentación y registro de información y análisis. En la etapa de planeación, se estructura el experimento con el fin de poner a prueba la conjetura propuesta en la investigación. En esta sección presentamos información con relación a esta etapa.

Diseñamos cuatro tareas de geometría, para desarrollar con el apoyo de GeoGebra, cuyo foco era la relación de equidistancia. Para la primera clase, planeamos una introducción a la electiva y un trabajo con material concreto con la tarea preliminar “*puntos equidistantes a un punto*” implementada el lunes 28 de agosto del año 2023, para introducir la relación de equidistancia (Anexo 1 – Enunciado y planeación de la tarea preliminar). Los títulos de las cuatro tareas y una descripción breve de estas se encuentran en la Tabla 3.1. Además, en el Anexo 2 – Enunciados de las tareas se encuentran los enunciados de las tareas, (en los que se incluye el

problema y los recursos didácticos descritos) como se propusieron a los estudiantes durante el curso electivo.

Tabla 3.1. *Tareas propuestas para los estudiantes*

Tarea	Fecha	Título	Descripción
1	13 de septiembre del 2023	Puntos equidistantes a dos puntos	Se pide a los estudiantes que: identifiquen y representen en GeoGebra puntos que equidisten a dos puntos fijos; descubran el lugar geométrico en donde se encuentran esos puntos; produzcan una conjetura sobre el lugar geométrico; y, elaboren un argumento utilizando los tres recursos didácticos.
2	02 de octubre	Hecho geométrico de la mediatriz	Se pide a los estudiantes que: representen un segmento y su mediatriz, usando la opción ‘mediatriz’ de GeoGebra; descubran alguna propiedad de la mediatriz respecto al segmento (bien sea que la recta es perpendicular al segmento o que la intersección entre la recta y el segmento es el punto medio del segmento, o ambos); formulen una conjetura; y, elaboren un argumento utilizando los tres recursos didácticos.
3.	18 de octubre	Intersección de mediatrices de un triángulo	Se pide a los estudiantes que: construyan un triángulo en GeoGebra; construyan las mediatrices de los segmentos; hallen el punto de intersección de las mediatrices; descubran alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices utilizando las funciones de ‘arrastre’ y ‘rastros’; formulen una conjetura; y, elaboren un argumento utilizando los tres recursos didácticos.
4.	03 de noviembre	Equidistancia en un triángulo a uno de los lados (triángulos separables)	Se pide a los estudiantes que: construyan un triángulo ABC ; determinen el punto medio del segmento AB y lo nombren con P ; ubiquen el punto C de tal forma que P equidiste de A , B y C ; dejando fijos los puntos A y B ; arrastren el punto C para que descubran una propiedad que cumple el triángulo ABC cuando el punto P equidista de A , B , C ; formulen una conjetura; y elaboren un argumento utilizando los tres recursos didácticos.

Además de planear las tareas, decidimos organizar a los estudiantes inscritos en la electiva en cinco grupos por su cercanía de edad y buscando, en lo posible, que fueran de cursos diferentes. Asignamos un responsable del computador, encargado de establecer quién manipulaba GeoGebra, en la Tabla 3.2, se encuentran la respectiva organización. Los nombres son seudónimos para respetar la confidencialidad de los estudiantes. Los estudiantes que están en la primera fila de la tabla fueron los responsables de los portátiles.

Tabla 3.2 Organización de los grupos de trabajo

Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo 5	
Juan P.	6°	Miguel	6°	Alejandro	7°	Laura	8°	Daniela	8°
Ana H.	6°	Sofía	7°	Samir	7°	Sara	8°	Mariana S.	8°
Juan A.	6°	Juliana	7°	Martín	7°	Mariana	7°	Paula	8°

En cuanto a la adecuación de los computadores, la investigadora-profesora fue la encargada de instalar GeoGebra y un software para grabar las sesiones en todos los equipos, antes de iniciar con el curso electivo. La instalación del software se realizó con el fin de que cada grupo grabara las pantallas de los computadores para registrar la exploración en GeoGebra y obtener la producción oral de los estudiantes. Luego, la profesora realizó un documento guía para que los estudiantes (encargados de los computadores) siguieran instrucciones sobre cómo prender la cámara, grabar la pantalla, terminar la sesión y guardar la grabación en la carpeta asignada (Anexo 3 – Instrucciones de grabación para los estudiantes). Planeamos que las grabaciones fueran realizadas por los mismos estudiantes. Adicionalmente, la auxiliar practicante de la Entidad de formación para el Estado del trabajo colombiano, Sena, ofreció usar el celular de la profesora para grabar las puestas en común.

Para guiar a los estudiantes en el uso de GeoGebra, como era la primera vez que empleaban el programa, la investigadora profesora creó un archivo en Word en el que aparecen los pasos a seguir en GeoGebra apenas sea abierto el programa. Esto para que los estudiantes supieran como debían ocultar la cuadrícula, quitar los ejes, utilizar el despliegue de herramientas, determinar puntos, renombrar objetos geométricos, medir distancias, disminuir el número de decimales, entre otros (Anexo 4 – Acuerdos de GeoGebra).

Como guía de planeación de la gestión de la profesora, creamos un archivo de Word que se encuentra en el Anexo 5 – Planeación detallada de los enunciados de las tareas, en el que: i) describimos cada uno de los ítems de los enunciados ii) describimos la gestión del profesor al inicio, durante y al finalizar cada sesión. Además, realizamos una tabla de dos columnas; en la columna de la derecha incluimos la posible gestión de la profesora cuando los estudiantes desarrollaran cada ítem del enunciado de la tarea. En la columna izquierda escribimos posibles preguntas o situaciones propuestas por los estudiantes.

3.6. Descripción de la experimentación

Iniciamos las sesiones el día 28 de agosto del año 2023 y finalizamos el día 07 de noviembre del mismo año. Procuramos seguir el cronograma previsto en la planeación. Sin embargo, enfrentamos algunos retrasos debido a varias circunstancias imprevistas. Tuvimos problemas logísticos como dificultades para tener a tiempo los computadores, cambios de horario en la institución y ausencias de algunos estudiantes por actividades externas, como presentaciones o eventos escolares.

Durante el desarrollo de las tareas, evidenciamos diferencias en la motivación de los estudiantes. En algunas sesiones, los estudiantes mostraron gran entusiasmo y compromiso con las actividades, mientras que en otras se observó desmotivación, sobre todo de los estudiantes del grupo 1, en parte porque mostraban mayor interés en las responsabilidades académicas habituales del colegio. Además, en una de las sesiones, tuvimos problemas técnicos con el programa de grabación de un computador, lo que nos impidió registrar las interacciones y vivencias de los estudiantes en esa ocasión, lo cual fue una limitación en la recolección de datos. Tuvimos que basarnos en las notas de campo de la sesión, que se generaron en una reunión posterior entre la investigadora-profesora y la investigadora-asesora. Los estudiantes de séptimo y octavo, así como el estudiante de sexto grado del grupo 2 mostraron más entusiasmo. En varias ocasiones llegaron al aula con inquietudes sobre los problemas a resolver y manifestaron interés en continuar con las tareas.

3.7. Registro de la información y construcción de los datos a analizar

Utilizamos las siguientes formas de recolección de información que nos permitieron construir un conjunto de datos para nuestro análisis.

- Registros de interacciones en Teams: Las interacciones fueron grabadas y almacenadas en la plataforma Teams.
- Grabaciones de audio y video: Realizamos grabaciones de las interacciones entre la profesora y los estudiantes, tanto al inicio como al finalizar las sesiones (en las puestas en común).
- Producciones escritas de los estudiantes: Las respuestas escritas a las tareas, que los estudiantes entregaron al terminar cada clase, fueron archivadas.
- Archivos de GeoGebra: Los archivos generados por los estudiantes en GeoGebra fueron archivados; estos permitieron rastrear el proceso de exploración y descubrimiento a lo largo de las tareas propuestas.

Aunque todos los grupos intentaron realizar grabaciones de sus sesiones, el grupo 1 enfrentó problemas técnicos con la grabación en el computador asignado, y algunos estudiantes del grupo 5 faltaron a varias sesiones del curso por razones institucionales. Además, de la tarea 2 no contamos con la información completa debido a fallos de los archivos de audio. Adicionalmente, de la tarea 4, solo conservamos las producciones escritas de los grupos 2 y 3, ya que problemas técnicos con los computadores resultaron en la pérdida de información. Por estas razones optamos por analizar solamente las producciones de los grupos 2, 3 y 4.

Una vez obtenida la información, realizamos el siguiente tratamiento para construir los datos de la investigación: i) A partir de la escucha y observación atenta a las grabaciones de las sesiones en Teams elaboramos una narración detallada de lo que hicieron los estudiantes de los grupos 2, 3 y 4 al resolver cada tarea. ii) En los momentos en que identificábamos información o interacciones relevantes, especialmente aquellas relacionadas con la génesis instrumental o el proceso de construcción de argumentos inductivos, transcribimos textualmente lo que los estudiantes decían. iii) Adicionalmente, incluimos capturas de pantalla de GeoGebra para complementar las narraciones. Prestamos especial atención a los momentos en que los estudiantes estaban en el proceso de exploración, descubrimiento y formulación de conjeturas, así como a las discusiones sobre cómo debían completar el cuestionario, la plantilla y el esquema discursivo para elaborar el argumento.

El resultado de este proceso es una narración compuesta de partes descriptivas, transcripciones e imágenes en GeoGebra, que es la que utilizamos para el análisis. Los datos de la investigación son los fragmentos de transcripciones que están en los episodios en donde podemos

rastrear la génesis instrumental y respuestas incluidas en el cuestionario, la plantilla y el esquema discursivo en las que evidenciamos el proceso de producción de argumentos inductivos.

3.8. Análisis de la información

Como corresponde a un experimento de enseñanza, hicimos dos tipos de análisis: microanálisis entre sesión y sesión y, análisis retrospectivo. El primero lo realizamos en los espacios de dirección de trabajo de grado, en los que discutíamos los sucesos principales de cada clase, el funcionamiento de las tareas y de los recursos didácticos. Lo anterior nos llevó a hacer algunos ajustes a los enunciados de las tareas y a los recursos didácticos. Por ejemplo, en la tarea 4 incluimos una pregunta que permitiera a los estudiantes reflexionar explícitamente sobre la naturaleza probable de la aserción y de la garantía formuladas.

El análisis retrospectivo lo hicimos al finalizar el experimento y lo presentamos en el capítulo 4 de este documento. La elección de la población para el análisis de los datos atendió a determinados criterios, entre ellas las grabaciones de las interacciones en el software instalado. En la Tabla 3.3 informamos los análisis que hicimos:

Tabla 3.3 *Grupos e información analizada*

Tarea	Grupos analizados			Información usada en el análisis	
	2	3	4	Descripción de la interacción	Producción escrita
1	x	x	x	G2, G3, G4	G2, G3, G4
2		x	x	G3, G4	G3, G4
3	x		x	G2, G4	G2, G4
4			x	G4	G4

Para el análisis, usamos dos herramientas analíticas: En la primera herramienta (Tabla 3.4) registramos aspectos de la génesis instrumental. La dividimos en tres columnas. En la primera, separamos datos relacionados con la instrumentación y la instrumentalización. En la segunda columna incluimos las evidencias que se corresponden a cada proceso. En la tercera columna, hacemos nuestra interpretación y explicación de la producción registrada.

Tabla 3.4 *Herramienta analítica de la génesis instrumental*

	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización		
Instrumentación		

En la segunda herramienta analítica (Tabla 3.5) caracterizamos datos relacionados con la producción de argumentos inductivos de los estudiantes. La tabla está dividida de acuerdo con los elementos de un argumento inductivo: las condiciones iniciales, la propiedad descubierta, el caso no explorado, la aserción y el patrón de generalización (garantía).

Tabla 3.5 *Herramienta analítica para la producción de argumentos inductivos*

Condición inicial	
Evidencias	Interacción de los estudiantes o verbalizaciones claves
	Recurso didáctico (cuestionario, plantilla discursiva, esquema argumentativo)
Interpretación	
Propiedad descubierta	
Evidencias	Interacción de los estudiantes o verbalizaciones claves
	Recurso didáctico (cuestionario, plantilla discursiva, esquema argumentativo)
Interpretación	
Caso no explorado	
Evidencias	Interacción de los estudiantes o verbalizaciones claves
	Recurso didáctico (cuestionario, plantilla discursiva, esquema argumentativo)
Interpretación	
Aserción	
Evidencias	Interacción de los estudiantes o verbalizaciones claves
	Recurso didáctico (cuestionario, plantilla discursiva, esquema argumentativo)
Interpretación	

Patrón de generalización	
Evidencias	Interacción de los estudiantes o verbalizaciones claves
	Recurso didáctico (cuestionario, plantilla discursiva, esquema argumentativo)
Interpretación	

Capítulo 4. Análisis de resultados

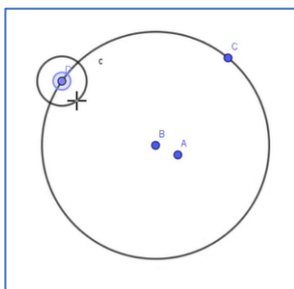
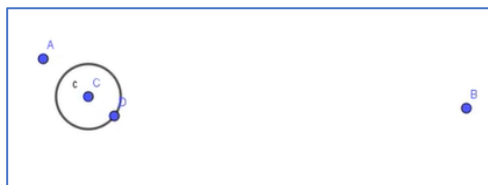
A continuación, presentamos el análisis de los resultados de la tarea investigativa. En primera instancia presentamos las narraciones construidas a partir de la información registrada. Luego, presentamos aspectos de las producciones escritas y finalmente, analizamos los resultados de acuerdo con las herramientas analíticas descritas en el capítulo previo.

4.1. Tarea 1: Lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos dados

4.1.1. Episodio No. 1 – G2 (Sofia, Juliana, Miguel)

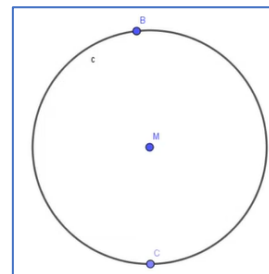
4.1.1.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

Sofía le dice a Miguel “ve poniendo los puntos A y B ”. Miguel da clic en la opción ‘punto’ y construye los puntos A y B . Después, Sofia lee el enunciado de la tarea y Miguel, al escucharla, decide realizar una circunferencia con centro en un punto no determinado, que queda nombrado como C y que pasa por un nuevo punto D que surge cuando el estudiante da clic en otra parte de la pantalla. Al ver la circunferencia obtenida, borra toda la construcción e inicia de nuevo. Determina los dos puntos A y B más cerca uno del otro y construye una circunferencia con centro en B y que pasa por un punto C que queda determinado al dar clic.

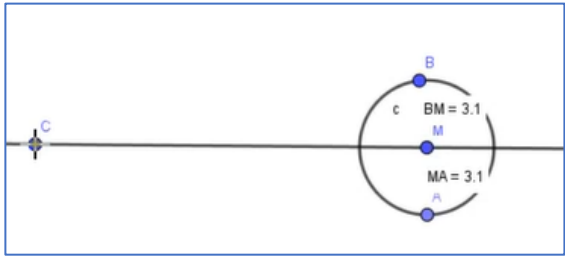


Sofía le dice “ahí [C] no estaría a la misma distancia [de A y de B]”. Miguel decide borrar toda la construcción, pero como tiene activa la opción ‘circunferencia’ genera una nueva circunferencia con centro en un punto (D) de la primera circunferencia. Decide usar la herramienta ‘deshacer’ deshaciendo toda la construcción.

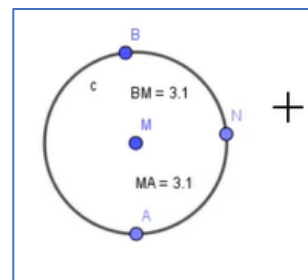
Miguel deja de utilizar como primera instancia la opción ‘punto’, y con la opción ‘circunferencia’, construye una circunferencia con centro en A , radio AB . Luego, utiliza la opción ‘punto’ para construir un punto C en la circunferencia de tal forma que quede visualmente alineado con A y B . Después utiliza la opción ‘renombrar’ y renombra el punto A como M . Surge la siguiente conversación:



1.	Juliana:	<i>Listo, ¿Cuál es el otro [punto]?</i>	
2.	Sofia:	<i>Ah, pero debe equidistar es de A y de B.</i>	
3.	Miguel:	<i>Toca cambiar otro nombre, esperen (renombra el punto C como A).</i>	
4.	Miguel:	<i>Ahora sí, terminé de hacer la primera construcción. (Mide las distancias de A a M y de M a B).</i>	
5.	Sofia:	<i>Eso, sí. Ya está que el punto M equidiste de A y B. (Vuelve a leer todo el enunciado)</i>	
6.	Juliana:	<i>Ya hicimos el punto B. Solo falta hacer el C, D y E que es lo mismo, pero toca poner [nombres de] puntos diferentes N, O y P.</i>	
7.	Sofia:	<i>Yo digo que para que sean equidistantes, debemos poner el punto en un extremo para que digamos [no es entendible en el video] toca hacer una filita, en la mitad... ¿Este está en la mitad? (Señala el punto M).</i>	
8.	Miguel:	<i>Igual no importa, porque mira que medí las distancias de aquí [punto B] a aquí [punto M] y desde este punto [punto M] a A y, miden lo mismo.</i>	
9.	Juliana:	<i>Para que todos estén a la misma distancia, podemos hacer como un cuadrado.</i>	
10.	Miguel:	<i>O un triángulo.</i>	

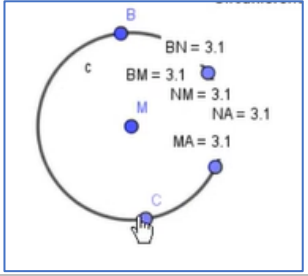
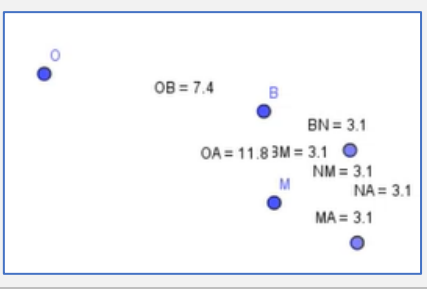
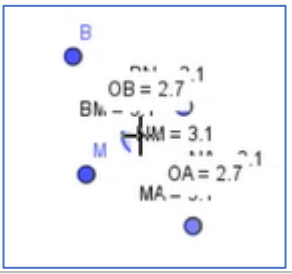
11.	Sofía:	<i>Pero ¿por qué?</i>
12.	Miguel:	<i>Porque aquí nos están pidiendo unos [puntos] que equidisten de A y de B. Listo, hasta aquí estamos bien (construcción). Pero ahora debemos hacer un punto N que equidiste de A y de B al mismo tiempo. Entonces tocaría poner un punto acá (superpuesto al punto M) lo cual no es posible. Entonces lo que toca buscar ahora es otro punto que tenga la misma distancia de 3.1 y, por lo tanto, tocaría hacer como un cuadrado para que cumpla.</i>
13.	Sofía:	<i>Pero solo tienen que ser equidistantes en A y en B. [Silencio por un minuto].</i>
14.	Miguel:	<i>Entonces lo que podemos hacer es otra circunferencia de tal forma que en vez de que el centro sea M, sea N.</i>
15.	Sofía:	<i>Yo digo que pongamos unos puntos al lado, para que tengan la misma distancia [de los puntos A y B] como lo están pidiendo [en el enunciado de la tarea]. Para que esté a la mitad de distancia de A y B.</i>
16.	Miguel:	<i>Listo, suponiendo que tenemos el punto N, ¿Cómo haríamos para que quede a la misma distancia de los puntos A y B?</i>
17.	Sofía:	<i>Por ejemplo, se puede trazar una línea horizontal en M y ahí poner los puntos.</i>
18.	Miguel:	<i>Sofí intenta lo que dices (entrega el mando del computador a Sofía).</i>
19.	Sofía:	<p><i>Pues aquí, hacer una recta. (Utiliza la opción recta, da clic en el punto M e intenta poner el otro punto fuera de la circunferencia de tal forma que la recta quede de forma horizontal).</i></p>  <p><i>¿Está recto? ¿y si ponemos la cuadrícula? ¡Ah! verdad que no se puede. ¿Está recto?</i></p>
20.	Juliana:	<i>Sí, pero ¿la recta para qué nos sirve?</i>
21.	Sofía:	<i>Es que la recta equidista de los puntos, pero no sé (elimina la recta.)</i>

Los estudiantes dejan de hablar por un tiempo y luego la docente realiza un ejemplo general a todos los grupos, indicando la diferencia entre equidistar a un punto y equidistar a dos puntos. Después de que la profesora realiza la explicación, Miguel les sugiere al grupo realizar una construcción parecida a la realizada con el punto M . El estudiante construye un punto C en la circunferencia y lo renombra como N .

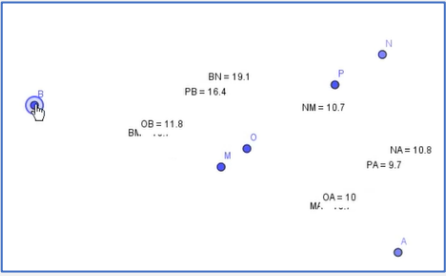


22.	Miguel:	<p>(Mide las distancias de A a N, de N a B y de N a M; y, arrastra los puntos A y N, hasta que todas las distancias sean de 3.1).</p> <p><i>Listo, ahí todos tendrían la misma distancia.</i></p>	
23.	Sofía:	<p><i>Pero ¿dónde está B y N?</i></p>	
24.	Miguel:	<p><i>Aquí está M (señalando el punto con el mouse), aquí está N y esta es la distancia de N sobre A y de N a B. (Moviendo el mouse, da clic en el punto N). Bueno, N está a la misma distancia de A y B. Además, como se supone que también está en la misma circunferencia, también debe estar a la misma distancia de M, entonces también cumpliría.</i></p>	

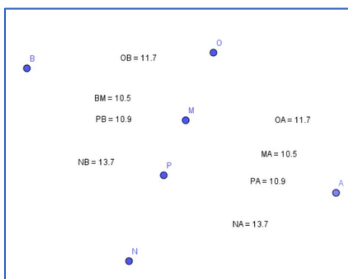
La docente se dirige al grupo y pregunta por la construcción que observa en la pantalla. Miguel menciona que, hasta ahora, todos los puntos construidos “*son equidistantes*”. La profesora pregunta por los puntos que equidistan de N ; Sofía responde “*de los demás puntos [A, B, M] porque todas las distancias son de 3.1*”. La profesora les dice que en el enunciado no se menciona que la distancia de M a N también debe ser la misma, además que no necesariamente la distancia de M , N , O y P a los puntos A y B debe ser de 3.1. Simplemente cada punto debe estar a la misma distancia a los puntos A y B . Adicionalmente, les dice que pueden utilizar la opción ‘objeto visible’, para que puedan ocultar la circunferencia y les recomienda poner un punto en cualquier parte de la pantalla que cumpla la condición. La profesora se dirige a otro grupo y surge la siguiente conversación para tomar una decisión:

25.	Miguel:	(Miguel construye un punto C en la circunferencia) <i>Entonces, ¿en dónde lo ponemos?</i>	
26.	Sofia:	<i>Yo digo que por acá (señala con el dedo un punto que está más o menos en medio de M y N)</i>	
27.	Juliana:	<i>Sí, la mitad entre esos dos [puntos M, N]. El problema son los carteles (refiriéndose a los textos de las distancias).</i>	
28.	Miguel:	<i>Espera que ya tenía el punto aquí (refiriéndose al punto C). (Arrastra el punto C y se da cuenta que el arrastre solo es posible sobre la circunferencia).</i>	
29.	Juliana:	<i>Pero C está en la circunferencia (Miguel utiliza la opción de ocultar la circunferencia).</i>	
30.	Miguel:	<i>¿Entonces qué hago?</i>	
31.	Juliana:	<i>Pues elimina el punto.</i>	
32.	Miguel:	<i>Es que creo que, si lo elimino, se elimina todo (Elimina el punto C). ¡Ah mentira, no! Listo, entonces ahora vamos a poner un punto acá (en cualquier parte del plano), lo renombramos y le ponemos O. Listo, ahora medimos las distancias de O a A y de O a B.</i>	
33.	Juliana:	<i>Pero deben tener la misma distancia. (Miguel arrastra el punto O hasta que quede dentro de la circunferencia y equidiste de los puntos A y B).</i>	
34.	Miguel:	<i>Aquí está.</i>	
35.	Sofia:	<i>Entonces toca hacer lo mismo con el [punto] P. Eso era lo que estaba diciendo desde el principio.</i>	

Miguel vuelve a determinar un punto, lo renombra con P , utiliza la opción ‘medir distancia’ para medir las distancias de P a A y de P a B y luego arrastra el punto hasta que la distancia de A a P y de B a P es la misma. Llamamos nuevamente a la profesora:

36.	Miguel:	<i>Profe aquí nos dio como un rombo y luego como un... no sé.</i>
37.	Zaira:	<p><i>Pero en la construcción no alcanzo a ver muy bien los puntos. Voy a arrastrar los puntos A y B para que pueda visualizar mejor la medida de las distancias y los puntos.</i></p>  <p><i>Ahora, por favor vuelvan a arrastrar los puntos que crean necesarios, para que cumplan la condición. ¿Qué punto sigue cumpliendo con equidistar de A y B?</i></p>
38.	Miguel:	<i>M porque está en el medio de A y B.</i>
39.	Zaira:	<i>Muy bien. Ahora, nuevamente arrastren los puntos N, O y P, de tal forma que cumplan con la condición de equidistar y ya vuelvo. Me deben responder a qué objeto geométrico pertenecen aquellos puntos [M, N, O, P].</i>

Sofía tiene el control del computador y empieza a arrastrar los puntos O y P hasta que cumplan la condición. Miguel se da cuenta que el punto N pertenece a la circunferencia porque se mueve de forma circular. Toma otra vez el control del computador, decide borrar el punto N y construir otro punto en el plano, renombrarlo nuevamente como N , medir las distancias y arrastrarlo hasta que cumpla la condición.



Los estudiantes no hacen referencia al lugar geométrico de los puntos, consideran que han resuelto el problema y empiezan a contestar las preguntas del cuestionario entregado.

4.1.1.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

Miguel lee: “¿a qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B ?”

40.	Sofía:	<i>O sea ¿qué forma?</i>
41.	Miguel:	<i>Yo digo que es como un rombo, ¿no?</i>
42.	Juliana:	<i>¿Un rombo irregular?</i>
43.	Miguel:	<i>O un cuadrado.</i>
44.	Sofía:	<i>Es como un cuadrilátero irregular, ¿no?</i>
Juliana escribe la respuesta al segundo ítem del cuestionario.		
45.	Sofía:	(Lee la pregunta del tercer ítem). <i>Al lado de O, en cualquier lado... Como en el lado de ON.</i>
Juliana determina un punto en el plano y lo intenta renombrar como Z.		
46.	Sofía:	<i>Pero no toca hacerlo, es suponiendo.</i>
47.	Miguel:	<i>Yo diría, ponerlo en el lado opuesto de N, ¿no? (Juliana elimina el punto y escribe la respuesta del ítem 3).</i>
48.	Sofía:	<i>Sí, pues es que todos esos puntos siguen una misma recta.</i>
49.	Miguel:	<i>Si, miren... Este punto y este también... Entonces nos quedó mal, porque ese punto Z debe estar en esa misma también.</i>
50.	Sofía:	<i>Pero igual ese punto como lo pusimos, que sea opuesto, también va a estar sobre esa recta que no alcanzamos a hacer.</i>
51.	Miguel:	<i>Ah bueno, podríamos ponerlo acá, que siguen una recta, porque equidistan de A y B (Refiriéndose al ítem 5).</i>

Los estudiantes entregan la primera parte de la tarea a la profesora.

En la Imagen 4.1 mostramos las respuestas que dieron los estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.1. Respuestas al cuestionario del Grupo 2-Tarea 1

Enunciado 1.

- Con ayuda del programa de geometría dinámica, GeoGebra, representar la siguiente situación:
 - Construir dos puntos y llamarlos A y B .
 - Construir un punto, llamarlo M , que sea equidistante de A y de B (es decir, que M se encuentre a la misma distancia de A y de B).
 - Construir un punto N que equidiste de A y de B .
 - Construir un punto O equidistante de A y de B .
 - Construir un punto P equidistante de A y de B .
- Repita la situación cuantas veces sea necesaria, hasta que descubras en dónde se ubican los puntos. ¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B ?
 R. A un cuadrilatero irregular o rombo.
- Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginen un punto Z de tal forma que equidiste de A y B . ¿En dónde pondrían al punto Z ?
 R. En el lado opuesto de N .
- ¿Por qué colocarían al punto Z en ese lugar?
 R. Porque debe equidistar en "A" y "B" y de tal forma se seguiría el patrón de la figura.
- ¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de A y de B ?
 R. Que todos los puntos equidistan y siguen una recta

4.1.1.3. Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos

Luego de que los estudiantes respondieran el cuestionario, la profesora recoge la hoja y los estudiantes empiezan a responder la plantilla discursiva y el esquema argumentativo. En la Imagen 4.2 presentamos la respuesta a la plantilla discursiva que dieron los estudiantes.

Imagen 4.2. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 2-Tarea 1

Enunciado 2.

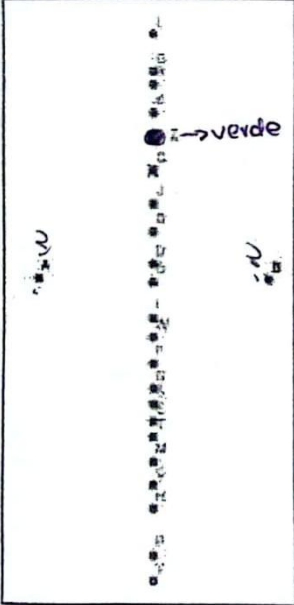
- Completan los siguientes espacios:
 Observo que los puntos azules que equidistan de los puntos A y B , pertenecen a una recta. Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a la recta de los puntos azules. Esto pasa porque "Z" también está en la recta de los puntos azules, por lo cual, también equidista de "A" y "B".

4.1.1.4. Respuestas al esquema argumentativo para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.3 se puede ver la respuesta al esquema discursivo completado por los estudiantes, el cual debían realizar luego de haber escrito y completado la plantilla discursiva.

Imagen 4.3. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 2-Tarea 1

2. Completen el siguiente diagrama:



Los puntos azules están a la misma distancia de A y de B

Descubrí que los puntos azules pertenecen a la recta.

Z está a la misma distancia de A y de B, igual que los puntos azules.

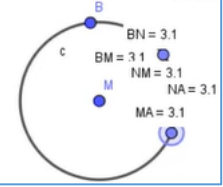
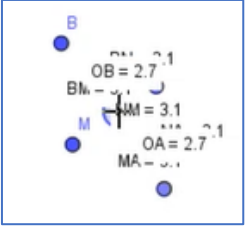
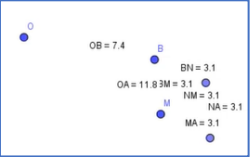
Z pertenece a la misma recta de los puntos azules

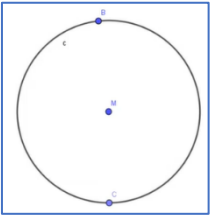
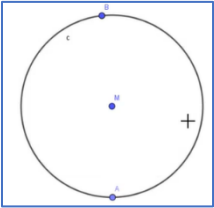
porque son equidistantes (los puntos azules).

4.1.1.5. Análisis del episodio 1

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	<p>Al inicio de la interacción Miguel construye una circunferencia con centro en C (punto que determina) y radio BC, pero da clic en un punto distinto de B.</p> <p>Miguel borra la construcción, pero no desactiva la opción ‘circunferencia’, con lo cual genera una circunferencia que no quiere hacer.</p> <p>Miguel construye una circunferencia con centro en A, radio AB sin haber determinado previamente los puntos A y B.</p>	<p>Circunferencia. Al ser la primera vez que los estudiantes usan el programa, Miguel hace varios intentos de construcción, a partir de los puntos A y B, pero luego desiste. Es decir, está aprendiendo a construir circunferencias, pero aún no sabe cómo usar puntos, ya determinados en la pantalla, como centro y como punto que pertenece a ella.</p>

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
	<p>En [22] Miguel arrastra los puntos A y N, hasta que todas las distancias son de 3.1 unidades.</p>  <p>En [28] Miguel arrastra el punto C y se da cuenta que C pertenece a la circunferencia. Más adelante arrastra el punto N y se da cuenta que N pertenece a la circunferencia.</p> <p>En [33] Miguel arrastra el punto O hasta que queda dentro de la circunferencia y equidiste de los dos puntos A y B.</p>  <p>Después de [35] Miguel arrastra el punto P hasta que la distancia de A a P y de B a P son iguales. Después de [39], Sofía arrastra los puntos O y P hasta obtener la misma distancia de O y de P a los puntos A y B.</p>	<p>Arrastre. Los estudiantes, aprenden a usar el arrastre libre para localizar puntos en una determinada posición. También se dan cuenta que hay puntos que pueden experimentar un arrastre libre y otros que experimentan un arrastre limitado según el objeto al que pertenecen.</p>
	<p>Cuando los estudiantes empiezan a solucionar el problema con el uso de GeoGebra, Miguel utiliza dos veces la opción ‘deshacer’ para eliminar la construcción realizada completamente.</p> <p>En [32] Miguel piensa que al eliminar un punto, se elimina la construcción completa. Pero por sugerencia de Juliana, elimina el punto C y se da cuenta que no se elimina algún otro objeto geomético.</p> 	<p>Eliminación de objetos. Miguel aprende a eliminar objetos de las construcciones en GeoGebra, sin necesidad de deshacer las construcciones que había hecho anteriormente.</p>

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentación	<p>En [1-2] Miguel construye una circunferencia con centro en A, radio AB y un punto C en la circunferencia.</p>  <p>Luego renombra el punto A como M.</p>  <p>En [3] Miguel renombra el punto C como A debido a que Sofía indica que el punto M debe equidistar de los puntos A y B.</p>	<p><i>Uso de renombrar para lograr la relación geométrica solicitada.</i> El grupo utiliza la herramienta de ‘renombrar’ para lograr una configuración deseada, que no surge naturalmente al construir una circunferencia.</p>
	<p>Miguel inicia construyendo una circunferencia con centro en M y radio MB.</p> <p>En [4-5, 8] mide las distancia de A a M y de M a B. Sofía expresa que los puntos solicitados equidistan de M.</p> <p>En [Figura 4.1-4 y 4.1-5] construye el punto M en la circunferencia y arrastra los puntos A y N para que equidisten de A y de B.</p> <p>En [22] mide las distancias de A a N, de N a B y de N a M y luego arrastra hasta que equidisten de los puntos A y B. En [32] mide las distancias de O a A y de O a B. Después de [35] mide las distancias de A a P y de B a P. Después arrastra el punto P hasta que el punto equidiste de los puntos A y B.</p>	<p><i>Uso de las herramientas circunferencia, distancia y arrastre para corroborar y generar equidistancia entre dos puntos.</i> Miguel utiliza la circunferencia como recurso para buscar puntos equidistantes a dos puntos. Luego utiliza la opción de distancia en compañía del arrastre para determinar puntos, medir las distancias a A y a B y situarlos, mediante el arrastre, en la posición solicitada.</p>

Acerca del argumento inductivo

Condiciones iniciales: <i>Subconjunto de puntos que equidistan de A y de B construidos en GeoGebra</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>Una vez que logran una representación en la que hay un punto que equidista de A y de C, Sofía dice: <i>¡Ah!, pero debe equidistar es de A y de B.</i></p> <p>En [2-5] Miguel construye el punto <i>M</i> que equidista de los puntos <i>A</i> y <i>B</i></p> <p>En [14] Miguel sugiere volver a hacer la construcción de una circunferencia para crear un punto <i>N</i> (centro) que equidiste de <i>A</i> y de <i>B</i>.</p> <p>[Después de 21-22] Miguel construye un punto <i>C</i> en la circunferencia, lo renombra como <i>N</i>, mide las distancias de <i>N</i> a <i>A</i> y de <i>N</i> a <i>B</i> y afirma que todos los puntos tienen la misma distancia.</p> <p>En [32-33] Miguel construye un punto en el plano, renombra el punto como <i>O</i>, mide las distancias y arrastra el punto hasta que equidiste de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>.</p> <p>En [35] Miguel construye un punto <i>P</i>, mide las distancias de <i>P</i> a <i>A</i> y de <i>P</i> a <i>B</i> y arrastra el punto <i>P</i> hasta que equidiste de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>.</p> <p>[Después de 39] Sofía vuelve a arrastrar los puntos hasta que equidisten de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Los estudiantes argumentan que los puntos azules son los puntos que cumplen con la condición de equidistar de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>. Utilizan acciones previas en GeoGebra y relacionan su conocimiento con la propiedad descubierta.</p>
Interpretación	<p>Como se evidencia en las interacciones y en el esquema argumentativo, los estudiantes logran percibir la condición inicial, con ayuda de la profesora. Aunque Sofía menciona la condición de equidistancia desde el principio, pero parece referirse a “igual separación” y solo hasta que la profesora les aclara, cambian de idea y mira la configuración para responder el cuestionario. Por lo tanto, sí hay indicios de que la identifican.</p>
Propiedad descubierta: <i>El subconjunto de puntos construidos pertenecen a una misma recta</i>	

<p>Evidencias</p>	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [15-21, Figura 6] Sofía supone que todos los puntos que equidistan deben estar sobre una recta, construye la recta, pero sus compañeros no le entienden y descartan la idea.</p> <p>En [45, 47, 50] los estudiantes proponen construir otros puntos alineados con los que ya habían construido.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Los estudiantes escriben en el segundo renglón que los puntos azules, pertenecen a “una” recta.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Los estudiantes completan el Cuadro, escribiendo que los puntos azules construidos de tal forma que cumplieran con la condición inicial pertenecen a “la recta”.</p>
<p>Interpretación</p>	<p>En la interacción, Sofía en varias ocasiones da indicios de tener idea de que los puntos que equidistan de los puntos A y B están alineados. Sin embargo, los demás miembros del grupo descubren el lugar geométrico mientras van escribiendo la respuesta del ítem 5 del cuestionario.</p> <p>Cuando los estudiantes escriben la respuesta del ítem 2 del cuestionario hacen referencia a un cuadrilátero del que hablaban al inicio de la interacción. Posiblemente no estaban mirando el lugar geométrico de los puntos M, N, O y P, sino la configuración global resultante. Pero con la ayuda de la plantilla y del esquema sí establecen explícitamente la propiedad descubierta.</p>
<p>Caso no explorado: <i>Punto Z no construido en GeoGebra que equidista de los puntos A y B</i></p>	
<p>Evidencias</p>	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [44-45] Sofía le indica a Juliana que no debe construir el punto Z, que hay que suponerlo.</p> <hr/> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>En el tercer cuadro de esquema argumentativo, los estudiantes escriben: “Z está a la misma distancia de A y B. igual que los puntos azules”.</p>

Interpretación	Sofía explica que el punto Z no debe ser construido. Les dice a sus compañeros que deben suponer dónde quedaría. Esto quiere decir que Sofía es quien identifica que deben imaginar un punto que cumpla con la condición inicial sin necesidad de construirlo.
Aserción: <i>Punto Z pertenece a la recta MN</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [46-50] los estudiantes concluyen que el punto Z debe estar en la misma recta donde se encuentran los puntos M, N, O y P.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #000;"/> <p>Cuestionario:</p> <p>En el cuestionario escriben: <i>En el lado opuesto de N.</i></p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>En la tercera línea, los estudiantes completan la frase diciendo que: “Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a la recta de los puntos azules”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Los estudiantes completan el cuadro 4 del esquema argumentativo de la siguiente manera: Z pertenece a la misma recta de los puntos azules.</p>
Interpretación	A medida que los estudiantes van contestando las preguntas del cuestionario, expresan la aserción. Contestan <i>en el lado opuesto de</i> donde el punto Z cumpliría con la condición inicial de equidistar de A y B . En cuanto a la plantilla y el esquema, se evidencia que efectivamente los estudiantes sí llegan a expresar la aserción.
Patrón de generalización: <i>Si los puntos M, N, O, P equidista de dos puntos fijos, A y B, los puntos forman una recta</i>	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>En el ítem 5, los estudiantes escriben las propiedades de “que los puntos equidistan de dos puntos fijos y que aquellos puntos forman una recta”.</p>
Interpretación	Lo expresado por los estudiantes no tiene la generalidad esperada porque se refieren al punto Z , aunque no lo representan de forma condicional, sino como una conjunción en el cuestionario. Además, en la plantilla discursiva en lugar de hacer referencia a cualquier punto se refieren al punto Z . Los estudiantes

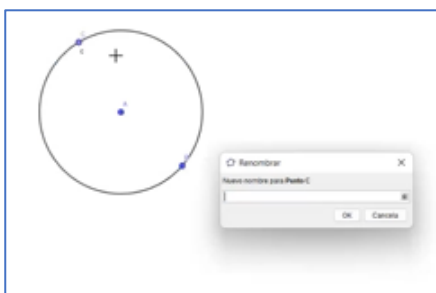
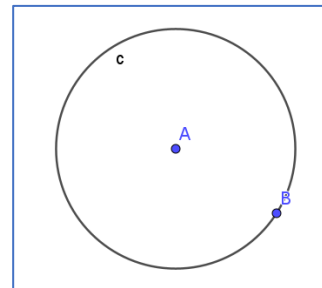
<p>intentan hacer una condicional al referirse a “por lo cual” pero no lo relacionan bien, debido a que el antecedente debe ser el consecuente y viceversa. En el esquema argumentativo los estudiantes escriben “son equidistantes (los puntos azules)” sin nombrar la propiedad descubierta, quizás por el poco espacio que tenían en el cuadro.</p>
--

4.1.2. Episodio No. 2 – G3 (Martín, Alejandro, Samir)

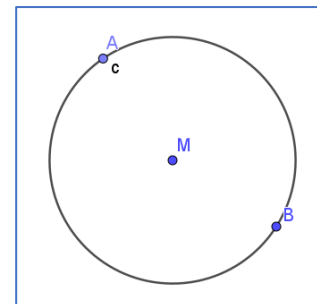
4.1.2.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

La tarea propuesta a los estudiantes comienza pidiendo construir dos puntos A y B , en GeoGebra. Alejandro replica la instrucción dada previamente por la profesora sobre cómo construir y nombrar puntos, para representar los puntos solicitados. Luego leen la segunda instrucción en la que se pide construir un punto que equidiste de A y B y llamarlo M . Martín le indica a Alejandro que realice un “círculo AB ”, probablemente inspirado en el resultado de una tarea previa en el que habían encontrado que los puntos que equidistaban de un punto dado estaban en una circunferencia.

Alejandro utiliza por primera vez la opción ‘circunferencia’ de GeoGebra, para construir una circunferencia con centro en A y radio AB . Para ello, una vez escogida la opción, da clic en el punto A y luego hace clic en el punto B . Martín le dice que hay necesidad de construir otro punto que esté más o menos alineado con A y B , además de que esté sobre la circunferencia. Alejandro construye un punto siguiendo la indicación de Martín y este punto, por defecto, queda nombrado como C .

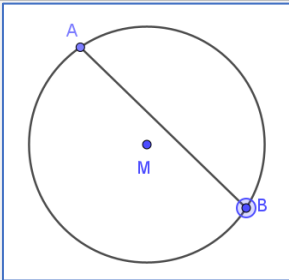


Como el enunciado de la tarea indica que los puntos a construir, después de haber construido los puntos A y B deben ser M , N , O , P Alejandro selecciona la opción ‘renombrar’ de

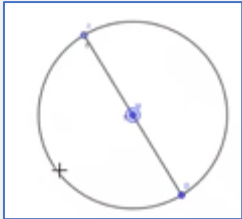
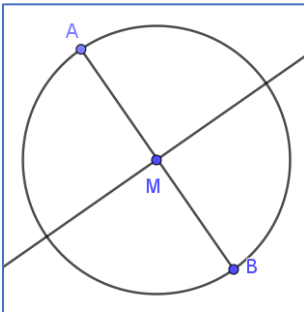


GeoGebra, que la profesora les había enseñado, para cambiar el

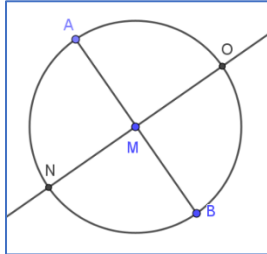
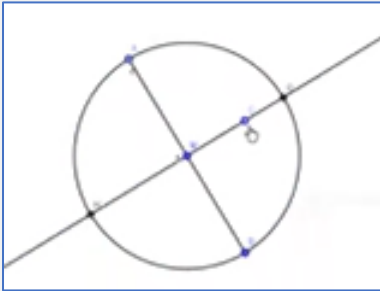
nombre del punto C por punto M y cuando da clic en el punto², Martín argumenta que los puntos a los que deben cambiar el nombre son: el punto A , al que deben llamar M y el punto C al que deben llamar A , para que la representación cumpla con lo establecido en el enunciado del problema. Recalca que el punto M “va en el medio”. Alejandro acepta la indicación de Martín y hace una representación de este. Al intentar construir otro punto, diferente de M que cumpla la condición de equidistar de los puntos A y B , los estudiantes tienen la siguiente conversación:

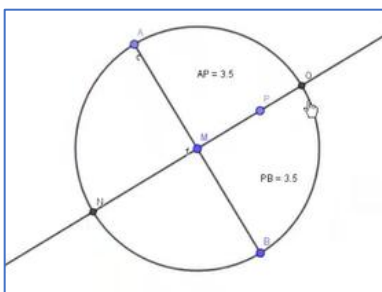
1.	Samir:	<i>Pues puede estar un poquito más arriba, ¿no?</i> (señala con el cursor un punto muy cercano a M).
2.	Martín:	(Sin prestar atención a lo que dice Samir). <i>Entonces, técnicamente así está bien [la construcción], pero tocaría encontrar la perpendicular... Que sean circunperpendiculares para hacer esos puntos [M, N y O].</i>
3.	Samir:	<i>¡Ah claro!, debe ser recto.</i>
Alejandro mueve el mouse en una trayectoria recta que contiene a M e intenta ser perpendicular a un segmento AB aún no representado. Luego intenta usar la opción ‘perpendicular’ de GeoGebra, pero no lo logra porque no está representado el segmento AB .		
4.	Martín:	<i>Mas bien hagamos la linea AB.</i>
 <p>Alejandro traza el segmento AB, el cual no pasa por M porque A, M y C no fueron construidos como puntos colineales aún cuando esa era la pretensión de los estudiantes.</p>		
5.	Samir:	<i>No, pero que pase por el punto M.</i>
Alejandro mueve el punto B , hasta que el punto M queda en el segmento AB .		
6.	Martín:	<i>Sí, hasta que esté alineado. Eso, ya.</i>

² La Figura no es nítida, debido a que se encuentra tomada del video. Sin embargo, vemos necesario dejarla para destacar que el estudiante intenta renombrar el punto C inicialmente.

	Los estudiantes se quedan en silencio unos dos minutos y luego se reanuda la conversación.	
7.	Alejandro:	<i>¡Ah! Ya se. Yo tengo una idea de que atrás [señala a la izquierda] estuviera M y adelante [señala a la derecha] N y estarían iguales [las distancias a A y a B].</i>
	Alejandro mueve el cursor en una trayectoria rectilínea perpendicular al segmento AB y señala con el mouse lugares donde habría puntos de intersección de la perpendicular con la circunferencia ³ .	
8.	Martín:	<i>Sí, pero primero toca crear la perpendicular.</i>
9.	Samir:	<i>Y ni siquiera tiene que estar en la circunferencia. Puede estar acá y acá o acá y allá. (Señala con la mano lugares en donde pueden estar los puntos que están en la recta perpendicular que aún no han podido construir).</i>
	Alejandro señala, con el mouse, puntos en el interior de la circunferencia sobre la línea perpendicular imaginaria.	
10.	Martín:	<i>Y miren que todos esos puntos están sobre una misma recta, pero no sé cómo crearla.</i>
	Alejandro usa, por segunda vez, la opción 'recta perpendicular' y usa el segmento AB para construir la recta perpendicular del segmento AB por M .	
11.	Alejandro:	<i>Ya, lo tengo, ahora sí.</i>
	Martín muestra las intersecciones entre la circunferencia y la recta.	
12.	Martín:	<i>Entonces este sería N (señalando un punto de la intersección) y este sería el otro ¿qué dice? ¿O y que?</i>

³ La Figura no es nítida, debido a que se encuentra tomada del video. Sin embargo, es necesario dejarla para destacar que el estudiante señala con el mouse los aquellos posibles puntos de intersección.

	Alejandro construye nuevos puntos, renombrándolos según el enunciado de la tarea.	
13.	Alejandro:	<i>¿y P?</i>
14.	Samir:	<i>El otro lo podríamos poner por acá. (Señala otro lugar de la recta en el interior de la circunferencia).</i>
15.	Martín:	<i>No, no, porque si lo ponemos acá (señala un punto en el segmento AB)</i>
16.	Samir:	<i>(Interrumpe a Martín) ¡No! Acá, en un lugar sobre esa línea [la perpendicular]. Sería igual de A y B.</i>
17.	Martín:	<i>Tiene sentido, no está tan alocado.</i>
18.	Alejandro:	<i>Entonces la idea sería poner a P por aquí.</i>
	Alejandro determina un punto P sobre la recta NO en el interior de la circunferencia.	



Finalmente, el grupo corrobora la construcción, utilizando la herramienta de medida de distancia para medir la distancia de P a A y de P a B . Samir pregunta si tienen que comprobar también las distancias con el punto M y Martín le indica que no hay necesidad, debido a que M “es el centro”. Luego, por indicación de la docente, los estudiantes arrastran los puntos

A y B para corroborar si siempre se cumple que los puntos equidistan de A y de B .

4.1.2.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

En la Imagen 4.4 presentamos las respuestas que dieron los estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.4. *Respuestas al cuestionario del Grupo 3-Tarea 1*

2. Repite la situación cuantas veces sea necesaria, hasta que descubras en dónde se ubican los puntos.
¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B ?

R. es una recta

3. Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginen un punto Z de tal forma que equidiste de A y B ¿En dónde pondrían al punto Z ?

R. En la recta \overline{NOP}

4. ¿Por qué colocarían al punto Z en ese lugar?

R. porque aunque se mueva la recta \overline{AB} los puntos en el segmento \overline{NOP} siempre equidistan

5. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de A y de B ?

R. estaran en la recta \overline{NOP} todos los puntos que equidistan de \overline{AB}

4.1.2.3. Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.5 se encuentran las respuestas a la plantilla discursiva.

Imagen 4.5. *Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 3-Tarea 1*

Observo que los puntos O, N, P que equidistan de los puntos A y B , pertenecen a una recta. Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a dicha recta. Esto pasa porque equidista de A y B

4.1.2.4. Respuestas al esquema para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.6 se pueden ver las respuestas al esquema completado por los estudiantes, el cual debían completar luego de haber completado la plantilla discursiva.

Imagen 4.6. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 3-Tarea 1

Los puntos azules están a la misma distancia de A y de B 1

Descubrí que los puntos azules pertenecen a una recta 2

Z está a la misma distancia de A y de B, igual que los puntos azules. 3

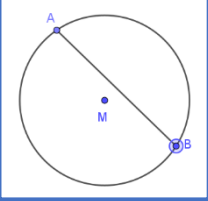
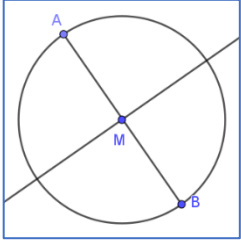
Z pertenece a la recta 4
ONP

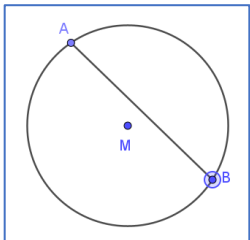
porque los puntos que equidistan pertenecen a la recta 5

4.1.2.5. Análisis del episodio 2

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	Al inicio de la interacción de los estudiantes, Alejandro utiliza la opción 'circunferencia' de GeoGebra, para construir una circunferencia con centro en A y radio AB.	Circunferencia. Es la primera vez que los estudiantes usan GeoGebra y Alejandro interpreta el ícono de la opción 'circunferencia', de forma correcta, para construir una circunferencia, escogiendo la herramienta 'centro - punto'.

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
	<p>En [4] Alejandro traza el segmento AB, usando la herramienta 'segmento' de GeoGebra.</p> 	<p>Segmento. Es la primera vez que usan GeoGebra. Alejandro selecciona da clic en el ícono 'recta' y cuando se despliega el menú, escoge la opción 'segmento' para construir el segmento AB, utilizando la opción 'segmento'.</p>
	<p>Entre [3-10] Alejandro construye la recta perpendicular al segmento AB.</p> 	<p>Recta perpendicular. Al ser la primera vez que los estudiantes usan GeoGebra, en un primer momento Alejandro no puede construir la recta perpendicular. Él no tenía presente que debía construir la recta AB o el segmento AB para luego sí trazar la recta perpendicular. Adicionalmente, puede que el ícono de la herramienta no sea tan claro ni ilustrativo sobre los objetos que se deben usar, como las herramientas anteriores. Esta situación evidencia que los estudiantes hasta ahora están aprendiendo a manejar el programa. Después de un tiempo, Alejandro logra construir la recta perpendicular dando clic en el segmento y luego en el punto M, identificando los objetos que necesita para construir la recta.</p>
	<p>En [5] Alejandro arrastra los puntos A y B a diferentes lugares, procurando que el punto M sea el centro de la circunferencia que para pasa por A y de B.</p>	<p>Arrastre. Por primera vez, Alejandro hace uso del arrastre para corroborar que una propiedad sea un invariante.</p>

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentación	<p>Como Alejandro hace una circunferencia con centro en A que pasa por B antes de [1], Martín propone usar la herramienta ‘renombrar’ para modificar los nombres de A y C. Obtienen una circunferencia con centro en M y dos puntos, A y B que equidistan de M, gracias a renombrar los puntos.</p>	<p>Uso no convencional de la opción ‘renombrar’. Como utilizan la opción ‘centro-punto’ de GeoGebra para hacer la circunferencia con centro en A y radio AB, entonces, al crear el punto C, Martín se da cuenta que la representación no cumple con la condición solicitada al inicio del enunciado del problema. El estudiante propone renombrar dos de los puntos construidos de una forma específica, para cumplir con la condición. Alejandro, con la sugerencia de Martín, usa la opción ‘renombrar’ de manera, ingeniosa, creativa y auténtica, para que la construcción en GeoGebra cumpla con que M sea quien equidiste de A y B.</p>
	<p>Entre [7-8] Alejandro decide valerse del mouse para hacer un dibujo imaginario de la recta perpendicular al segmento AB y poder identificar a ojo en dónde deberían ir los puntos N, P y O.</p>	<p>Uso del mouse para representar un lugar geométrico y la localización de puntos en este. Cuando los estudiantes ven la necesidad de construir la recta perpendicular al segmento AB, pero aún no saben cómo construirla en GeoGebra, Alejandro hace uso del mouse para hacer la representación de la recta que desean construir y determinar tres puntos en ella.</p>
	<p>En [4] Alejandro construye el segmento AB y los estudiantes se dan cuenta que el segmento no contiene al punto M.</p>  <p>El diagrama muestra una circunferencia con un punto central etiquetado como 'M'. Una línea segmentada conecta dos puntos etiquetados como 'A' y 'B' que están sobre la circunferencia. El punto 'M' está situado dentro de la circunferencia pero no está sobre el segmento 'AB', lo que ilustra que el segmento 'AB' no contiene al punto 'M'.</p>	<p>Uso del arrastre para representar una relación geométrica. Como los estudiantes necesitan que los puntos A, M y B sean colineales, hacen el arrastre del punto B, para lograr la colinealidad y estar seguros de que el punto M equidista tanto de A como de B. En la resolución de este problema no es necesaria una construcción robusta de la colinealidad, por lo que el uso que hacen del arrastre es útil en la resolución del problema.</p>

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
	En las respuestas del cuestionario asociado al problema, los estudiantes hacen referencia a que, aunque se <i>mueva</i> la recta AB , los puntos en el segmento NOP siempre equidistan de los puntos A y B .	<i>Mención al arrastre para justificar un invariante.</i> Con la mención al arrastre, los estudiantes sostienen que los puntos construidos N, O, P siempre equidistan de los puntos A y B , aunque estos cambien de posición.
	Al final de las intervenciones, Alejandro verifica la equidistancia del punto P respecto a los puntos fijos A y B con la opción ‘medida’ de GeoGebra.	<i>Uso de la opción medida para verificar equidistancia.</i> Alejandro utiliza la opción de ‘medida’ para corroborar si el último punto construido cumple con la condición establecida en la tarea.

Acerca del argumento inductivo

Condiciones iniciales: <i>Subconjunto de puntos que equidistan de A y de B construidos en GeoGebra</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>Al inicio de la interacción, los estudiantes renombran el centro de la circunferencia construida llamándolo M y a los puntos en la circunferencia llamándolos A y B.</p> <p>Entre [12] y [13], determinan los puntos O y N en la intersección de la perpendicular al segmento AB que pasa por M. Y luego determinan un punto P en el interior de la circunferencia, contenido en la recta perpendicular del segmento AB.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Los estudiantes, en el primer renglón, hacen referencia a los puntos O, N, P que construyeron en GeoGebra, con la condición de que fueran equidistantes tanto de A como de B, refiriéndose a la característica que tienen en particular los tres puntos.</p> <p>Esquema argumentativo:</p>

	Los estudiantes mencionan que: “No debes referirte a que A y B son puntos fijos sino a la equidistancia de puntos a estos pues estamos hablando de la propiedad dada para el subconjunto de puntos”. Además, completan el esquema escribiendo que son “Los puntos azules que están a la misma distancia de A y de B ”.
Interpretación	De todos los puntos del plano, los estudiantes identifican puntos que tienen una propiedad especial dada: equidistar de los puntos A y B . Al inicio utilizan una circunferencia para determinar los primeros puntos que cumplieran con equidistar. Las evidencias nos permiten afirmar que los estudiantes identifican claramente cuál, es la propiedad dada en el enunciado, que cumple con el subconjunto de puntos.
Propiedad descubierta: <i>El subconjunto de puntos construidos pertenecen a una misma recta</i>	
Evidencias	Interacción de los estudiantes: Entre [7] y [8], imaginan el lugar en donde ubicar los puntos O y N en una línea imaginaria perpendicular al segmento AB . En la discusión grupal para dar solución a la tarea, Martín dice que todos esos puntos [O, N, P] tienen que estar en la misma recta [10].
	Cuestionario: Los estudiantes en el segundo punto (ítem), escriben que el lugar geométrico al que pertenecen los puntos construidos que equidistan de los puntos A y B , es una recta.
	Plantilla discursiva: Los estudiantes escriben en el segundo renglón que los puntos N, O, P que cumplen la condición inicial, pertenecen a una recta.
	Esquema argumentativo: Los estudiantes en el cuadro 2 del esquema argumentativo, escriben que los puntos azules construidos de tal forma que cumplieran con la condición inicial pertenecen a una recta.
Interpretación	La propiedad descubierta se evidencia en todos los registros. Los estudiantes descubren que el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición de equidistar de los puntos A y B , es una recta.
Caso no explorado: <i>Punto Z no construido en GeoGebra que equidista de los puntos A y B</i>	


Evidencias	<p>Esquema argumentativo:</p> <p>Los estudiantes completan el cuadro 3, informando que el punto Z está a la misma distancia de A y de B, igual que los puntos azules.</p>
Interpretación	<p>Tanto en el cuestionario como en la plantilla, los estudiantes no se refieren a un caso no explorado, debido a que el enunciado del problema hacía alusión a este. Sin embargo, logramos evidenciar en el esquema que los estudiantes sí identifican que el caso no explorado, correspondiente al punto Z, cumple con la condición inicial igual que los puntos construidos, de equidistar de A y de B.</p>
<p>Aserción: <i>Punto Z pertenece a la recta MN</i></p>	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>Los estudiantes dicen, en el ítem 3, que el elemento no explorado Z es la recta NOP, quizás queriendo escribir que Z pertenece a la recta NOP.</p>
	<p>Plantilla discursiva:</p> <p>En el tercer renglón los estudiantes hacen referencia a que un punto Z que cumple la misma condición, debe pertenecer a la misma recta, escribiendo “a dicha recta”</p>
	<p>Esquema argumentativo:</p> <p>En el cuadro 4 del esquema, los estudiantes reportan que el punto Z pertenece a la recta NOP, haciendo referencia a la recta MN.</p>
Interpretación	<p>Los estudiantes reconocen que un punto no explorado, Z, pertenece a la recta que contiene a los puntos construidos en GeoGebra N, O, P tanto en las intervenciones, como en los recursos didácticos realizados.</p>
<p>Patrón de generalización: <i>El conjunto de puntos que equidistan de dos puntos fijos, A y B, forman una recta</i></p>	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>En los ítems 4 y 5 los estudiantes indican que los puntos que equidistan de A y B, siempre estarán en una misma recta MN.</p>
	<p>Esquema argumentativo:</p> <p>Los estudiantes en el cuadro 5, reportan que los puntos que equidistan (sin mencionar a qué puntos fijos), pertenecen a la recta (sin mencionar a qué recta o a que es una misma recta).</p>

Interpretación	Los estudiantes generalizan que los puntos deben estar en una recta. Sin embargo, el patrón de generalización no se ve en la plantilla discursiva, escribiendo solamente “porque equidista de A y B ”. Con sus palabras, lo reportado en el cuestionario y el esquema argumentativo, los estudiantes se refieren a la siguiente proposición condicional: Todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B , pertenecen a una misma recta.
-----------------------	--

4.1.3. Episodio No. 3 – G4 (Laura, Sara, Mariana)

4.1.3.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

Antes de resolver el problema propuesto en la tarea 2, los estudiantes hacen una exploración libre de GeoGebra. Utilizan las opciones ‘punto’, ‘renombrar objeto’, ‘distancia o longitud’ y ‘ángulo’ para hacer algunas representaciones y saber cómo usar el programa. Luego, Laura borra todas las representaciones y lee la primera instrucción: *Construir dos puntos y llamarlos A y B* . La misma estudiante construye el punto A e intenta construir el punto B , de tal forma que quede a la misma distancia de la parte izquierda de la pantalla al punto A , un poco más abajo. Mariana le sugiere de que mejor construya el punto B “de forma horizontal”, es decir, al lado derecho de A y a la misma distancia que el borde superior de la pantalla. Sara lee el enunciado de la tarea completo y surge la siguiente discusión:

1.	Laura:	<i>Así que hay que construir un punto M que equidiste de A y de B. ¿Sí? Luego, construir un punto N que equidiste, construir un punto O equidistante también.</i>
2.	Sara:	<i>O sea, todos.</i>
3.	Laura	<p><i>Todos [los puntos M, N, O y P] van a ser equidistantes de A y de B (construye el punto B, e intenta que este quede a la misma distancia que A, del borde superior de la pantalla).</i></p>  <p><i>¿Por qué no podemos realizar una cuadrícula? (Borra el punto B al no quedar satisfecha con la posición en la que quedó).</i></p>
4.	Mariana	<i>Porque la profe dijo.</i>

Laura construye un nuevo punto B e intenta que quede a la misma distancia del borde superior de la pantalla que A , por segunda vez. Sara propone utilizar la opción ‘recta’ para construir la recta AB , pero Laura le dice que, para seguir la instrucción dada, es mejor construir otro punto y construye un punto que intenta ser colineal a los puntos A y B .

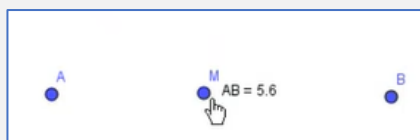


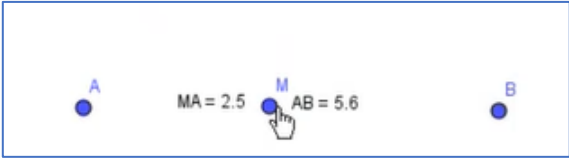
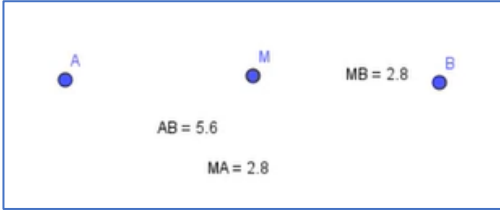
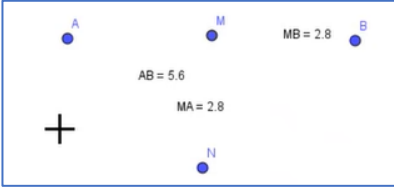
5.	Mariana:	<i>Pero está más cerca de la A.</i>
6.	Laura:	<i>Sí, yo sé que está más cerca de la A.</i>
7.	Sara:	<i>Bueno, pero tenemos que mirar cuánto mide en cada lado.</i>
8.	Laura:	<i>Toca medir la distancia... ¿Dónde está la distancia?</i> (Busca en los menús de GeoGebra que están en la parte superior de la pantalla (Archivo, Edición, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana y Ayuda) y no encuentra la opción de medir las distancias de un punto a otro).
9.	Sara:	<i>¡Qué haces!</i>
10.	Mariana:	<i>¿No hay [una] regla?</i>
11.	Laura:	<i>No sé, no la encuentro.</i>
12.	Mariana:	<i>No, no hay una regla. No sé, de pronto la profe utiliza otro GeoGebra... ¿Y si pones una línea recta?</i>
13.	Laura:	<i>Pero es que la profe nos mostró una [opción] que nos daba [la distancia]. (Renombra el punto C como M).</i>

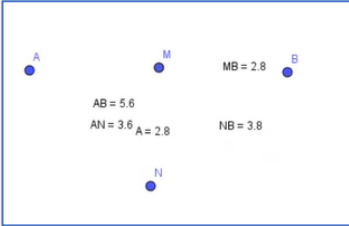
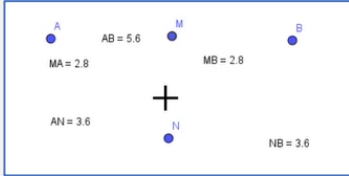
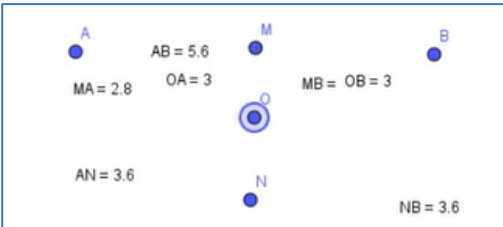


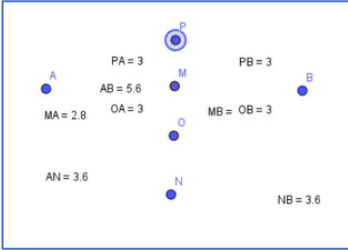
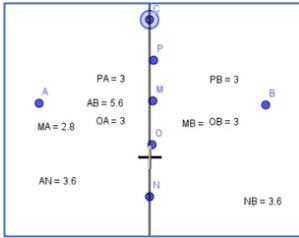
Las estudiantes llaman a la profesora y le preguntan cómo se miden distancias en GeoGebra. La profesora les indica que deben desplegar las opciones del ícono ‘ángulo’ y que, para medir distancias, deben utilizar la herramienta ‘distancia o longitud’.

14.	Laura:	<i>¡Ah! muchas gracias, muy amable (utiliza la herramienta y mide la distancia de A a B).</i>
-----	--------	---

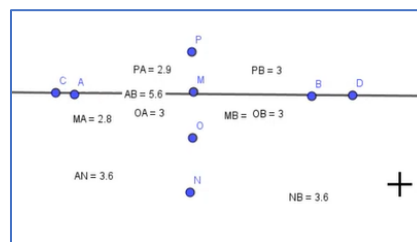


		<i>Acá, la distancia de A a B es 5.6 ¿Cuál es la mitad de 5,6?</i>
15.	Mariana:	¿Es 2,7? Mmmm
16.	Sara:	2,75.
17.	Laura:	<p>¿Cómo va a ser 2,75? Es 2,8 porque acuérdense que es solo un decimal (mide la distancia de A a M).</p>  <p><i>Faltan 3 décimas. (Arrastra el punto M hasta que la distancia de A a M sea de 2,8 y luego mide la distancia de M a B).</i></p>  <p><i>Listo, entonces... (Construye un punto y lo renombra como N)</i></p> 
18.	Sara:	<i>Tienen [los puntos M y N] que estar en una línea recta.</i>
19.	Mariana:	<i>(No le presta atención al comentario de Sara) Quedo más corrido para el lado del A.</i>
20.	Laura:	<i>Sí, yo sé que quedó más corrido (mide la distancia de A a N [3,6] y de N a B [3,8]) ¡Uy! Casi.</i>

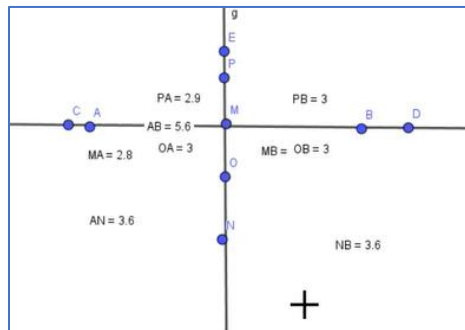
		
21.	Mariana:	<i>Casi, pero no.</i>
22.	Laura:	(Arrastra el punto N hasta que las distancias de AN y NB fueran 3,6) <i>Mariana si quieres sigue tu. Entonces mira, lo pones acá</i> (Señala con el mouse una posición para el punto O).
		
		Mariana construye un punto y lo renombra como O .
23.	Laura:	<i>Listo</i> (mide las distancias de A a O y de B a O , luego arrastra el punto O hasta que las distancias de A a O y de B a O le quedan iguales a 3,0).
24.	Mariana:	<i>Entonces faltaría</i> [construir el punto] P
		
25.	Laura:	<i>Listo. ¿si está recto acá?</i> (Se pregunta si los puntos M , O , N se encuentran alineados).
26.	Sara:	Sí, 3 y 3
27.	Mariana:	<i>Ahora el P. Lo mismo, toca hacer la misma construcción.</i>
		Laura construye el punto P , mide las distancias AP y PB , y arrastra el punto P hasta que equidiste de A y de B , quedando la siguiente construcción.

		
28.	Sara:	<i>Pero ¿si están a la misma distancia?</i>
29.	Mariana:	<i>A N lo veo corrido para acá (a la izquierda).</i>
30.	Sara:	<i>Pero acá sí se ve recto (Refiere a que los puntos P, M y O se encuentran alineados).</i>
31.	Laura:	<i>Bueno, hagamos una recta (construye una recta determinada por el punto N y un punto C que no estaba en la representación, Figura 12).</i>
		
32.	Sara:	<i>¿Ves que no están rectos? (bien alineados)</i>
33.	Laura:	<i>Pero lo peor de todo es que están cerca.</i>
34.	Mariana:	<i>Pero no están rectos.</i>


Laura elimina la recta NC y construye una recta CD que visualmente parecería contener a los puntos A y B .



Luego Laura construye una recta determinada por el punto O y un punto E que no estaba en la representación.



En ese momento llega la docente y pregunta por la construcción realizada. Surge la siguiente conversación:

35.	Zaira:	<i>¿Cómo realizaron la construcción?</i>
36.	Laura:	<i>Primero construimos A y B aquí, señalando los puntos.</i>
37.	Zaira:	<i>Listo, ¿y luego?</i>
38.	Laura:	<i>Pusimos a M aquí en el centro y revisamos que midiera lo mismo (mostrando con la flecha los textos donde aparecían las distancias de A a M y de M a B).</i>
39.	Zaira:	<i>¿Y después?</i>
40.	Laura:	<i>Pusimos los otros (los puntos N, O, P) acá (muestra los puntos).</i>
41.	Zaira:	<i>¿y si cumplen [la condición de equidistar de los puntos A y B]?</i>
42.	Laura:	<i>Sí.</i>
43.	Zaira:	<i>Ok. Ahora, díganme otro punto donde también se cumpla que equidiste.</i>
44.	Sara:	<i>Cualquier parte que siga esta recta de acá (señalando con la mano la recta EO)</i> 
45.	Zaira:	<i>Ok. Ahora sí pueden contestar el cuestionario.</i>

4.1.3.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

En la Imagen 4.7 mostramos las respuestas que dieron las estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.7. Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 1

2. Repite la situación cuantas veces sea necesaria, hasta que descubras en dónde se ubican los puntos. ¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B ?	R. <u>a una línea recta</u>
3. Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginen un punto Z de tal forma que equidiste de A y B ¿En dónde pondrían al punto Z ?	R. <u>en la recta formada por M, N y O</u>
4. ¿Por qué colocarían al punto Z en ese lugar?	R. <u>porque equidista al punto A y B y hace parte de la recta</u>
5. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de A y de B ?	R. <u>Va a formar parte de una recta.</u>

4.1.3.3. Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.8 presentamos las respuestas a la plantilla discursiva, que los estudiantes escribieron.

Imagen 4.8. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 1

Grupo 4

Enunciado 2.

1. Completen los siguientes espacios:

Observo que los puntos Azules que equidistan de los puntos A y B, pertenecen a una recta. Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a la recta formada por los puntos azules. Esto pasa porque los puntos azules forman esta recta cumpliendo la condición dada, equidistan a A y B.

4.1.3.4. Respuestas al esquema argumentativo para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.9 se puede ver la respuesta al esquema completado por los estudiantes, el cual debían realizar luego de haber completado la plantilla discursiva.

Imagen 4.9. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 1

2. Completen el siguiente diagrama:

Los puntos azules están a la misma distancia de A y de B 1

Descubrí que los puntos azules pertenecen a una recta 2

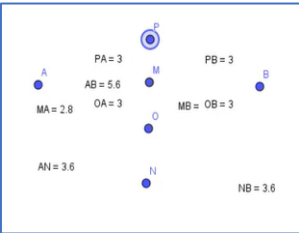
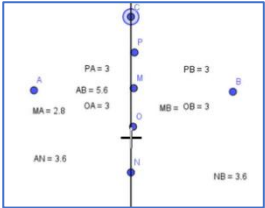
Z está a la misma distancia de A y de B, igual que los puntos azules. 3

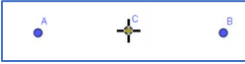
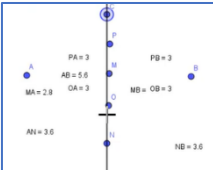
Z pertenece a la recta formada por los puntos Azules. 4

porque Equidistan a A y B. 5

4.1.3.5. Análisis del episodio 3

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
<p>Instrumentalización</p>	<p>En [3] Laura decide borrar el punto B (que ha ubicado, intentando que quede de tal forma que la recta que contuviera los puntos A y B quede inicialmente vertical y luego horizontal), al no quedar satisfecha con la posición en la que quedó. Muy posiblemente quería usar la cuadrícula para garantizar que la distancia de los puntos A y B al borde superior de la pantalla fuera la misma.</p> <p>En [17] Laura arrastra el punto M hasta que la distancia de A a M sea de 2,8.</p> <p>En [22] Laura arrastra el punto N hasta que las distancias de AN y NB sean de 3,6.</p> <p>En [23] Laura arrastra el punto O hasta que las distancias de A a O y de B a O sean de 3,0.</p> <p>En [27] Laura construye el punto P, mide las distancias AP y PB, y arrastra el punto P hasta que el punto equidiste de A y de B.</p>  <p>En [31-34] Laura construye una recta para corroborar si los puntos M, N, O y P son colineales.</p> 	<p>Arrastre. Al principio, las estudiantes no usaron la opción del arrastre de los puntos libres como el punto B, para ubicarlo en una posición determinada. Querían usar una regla como instrumento de alineación.</p> <p>Después, al momento de querer hacer que el punto M equidistara de A y B, arrastraron el punto M. Las estudiantes replicaron el uso del arrastre para que los demás puntos (N, O, P) estuvieran en la posición indicada y cumplieran con la condición de equidistar de los puntos A y B.</p> <p>Sin embargo, a las estudiantes no se les vuelve rutinario el uso del arrastre en otras ocasiones. Por ejemplo, en [31], Laura hubiera podido verificar que los puntos realmente eran colineales, por medio del arrastre de cada uno de los puntos para garantizar que quedaran todas sobre una misma recta.</p>

	<p>En [3] Laura quiere utilizar la cuadrícula que proporciona GeoGebra, probablemente para saber las distancias que hay entre los puntos.</p> <p>En [4] Laura construye un punto C, e intenta que quede equidistante a los puntos A y B “a ojo”,</p>  <p>perceptivamente.</p> <p>En [7-13] la estudiante busca en los íconos superiores de GeoGebra, la opción ‘medida de distancia o longitud’, pero no la encuentra.</p> <p>En [14] Laura utiliza por primera vez la opción ‘medida de distancia o longitud’ según la instrucción dada por la docente para medir la distancia AB.</p> <p>En [17, 20, 23, 27] Laura mide las distancias requeridas con la herramienta ‘medida de distancia o longitud’.</p>	<p>Distancia o longitud. Al ser la primera vez que las estudiantes utilizan GeoGebra, no encuentran la opción ‘distancia o longitud’.</p> <p>Con ayuda de la docente, aprenden a medir distancias en el programa GeoGebra y Laura empieza a utilizar la opción con cierta agilidad para dar solución a la tarea.</p>
Instrumentación	<p>En [31] y en [34 – 35] Laura construye una recta construida a partir de un punto determinado en la pantalla y un punto que no estaba en la representación.</p>  <p>Visualmente la recta construida parece contener algunos puntos. Con esta verificación, aceptan que los puntos son colineales, a pesar de que la construcción no es perfecta.</p>	<p>Uso no convencional de la recta para corroborar la colinealidad entre puntos.</p> <p>Las estudiantes usan la opción ‘recta’ para comprobar que efectivamente los puntos M, N, O y P pertenecen a una misma recta, debido a que tenían sospecha de que los puntos estaban alineados.</p>

	<p>En [4] Laura construye un punto C, e intenta que quede equidistante a los puntos A y B “a ojo” “de forma visual”.</p> <p>En [14] Laura utiliza por primera vez la opción ‘medida de distancia o longitud’ según la instrucción dada por la docente para medir la distancia AB.</p> <p>En [17, 20, 23, 27] Laura mide las distancias requeridas con la herramienta ‘medida de distancia o longitud’.</p>	<p><i>Uso de la opción de distancia para corroborar equidistancia entre dos puntos.</i></p> <p>En un primer momento, las estudiantes revisan “a ojo” si el punto M equidista de los puntos A y B.</p> <p>Luego, utilizan la opción ‘medida de distancia o longitud’ para verificar la equidistancia entre los puntos.</p>
--	--	---

Acerca de la argumentación inductiva

Condiciones iniciales: <i>Subconjunto de puntos que equidistan de A y de B construidos en GeoGebra</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En las intervenciones [1-3], después de construir los puntos A y B, las estudiantes recalcan que, según la instrucción dada, deben construir los puntos M, N, O de tal forma que equidisten de los puntos A y B. Así, mencionan que todos aquellos puntos que construirán van a ser equidistantes de A y de B.</p> <p>En las intervenciones [5-17], las estudiantes intentan determinar el punto, M, de tal forma que quedara colineal a los puntos A y B y equidistante de ambos. Luego, con el uso del arrastre y la medida de distancias, arrastran el punto M hasta que las distancias de AM y MB sean iguales.</p> <p>En las intervenciones [17-27], las estudiantes determinan los puntos N, O, P de la misma forma que determinaron la posición del punto M.</p> <p>En las intervenciones [38-41] las estudiantes describen a la docente el procedimiento realizado para dar solución a la tarea y confirman que los puntos construidos M, N, O y P cumplen con la condición de equidistar de los puntos A y B de acuerdo con la construcción realizada.</p>

	<p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes completan el primer renglón de acuerdo con la Figura que aparece en la plantilla discursiva. Aluden a que los puntos azules son aquellos que equidistan de los puntos A y B.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Las estudiantes completan el Cuadro 1, teniendo presente que los puntos azules están a la misma distancia de dos puntos fijos, A y B.</p>
Interpretación	<p>Con las evidencias anteriores, logramos identificar que las estudiantes sí establecieron la propiedad que cumple el subconjunto de puntos, para este caso, que debían equidistar de A y B. En la interacción, las estudiantes determinan los puntos M, N, O y P de tal forma que equidisten de los puntos fijos A y B; mientras que, en la plantilla y el esquema, se basan en la Figura del esquema, en el que visualizan aquellos puntos de color azul y determinan que aquellos puntos son los que equidistan de los puntos A y B.</p>
<p>Propiedad descubierta: <i>El subconjunto de puntos construidos pertenecen a una misma recta</i></p>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [18] Sara menciona que los puntos N y M están sobre una recta.</p> <p>En las intervenciones [22-25] Laura construye los puntos O y P de tal forma que se vea una alineación con los puntos M y N ya construidos.</p> <p>En [30] Sara identifica que los puntos P, M y O son colineales.</p> <p>En las intervenciones [31-34] Laura construye una recta determinada por el punto N y un punto C que no estaba en la representación. Luego, las estudiantes identifican que los puntos a pesar de no pertenecer a la recta, si se encuentran cerca de ella.</p>

	<p>Cuestionario:</p> <p>Las estudiantes en el segundo ítem del cuestionario escriben que la figura geométrica que pertenecen los puntos construidos que equidistan de los puntos A y B, es una recta.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes escriben en el segundo renglón que los puntos azules que cumplen la condición inicial pertenecen a una recta.</p> <p>Esquema:</p> <p>Las estudiantes completan el Cuadro 2, escribiendo que los puntos azules construidos de tal forma que cumplieran con la condición inicial pertenecen a una recta.</p>
Interpretación	<p>Las estudiantes descubrieron la propiedad gracias a la exploración hecha en GeoGebra, en donde fueron determinando puntos que equidistaran de A y de B.</p> <p>El descubrimiento inicia cuando Sara insinúa que los puntos construidos que equidistan de los puntos A y B deben estar alineados. La estudiante avanza hacia el descubrimiento de la propiedad, pero se detiene porque las demás compañeras no le prestan atención a su comentario. Luego, Laura busca la alineación con los puntos M y N para construir los puntos O y P. Es después que empiezan a mencionar la propiedad descubierta. En las producciones escritas las estudiantes identifican y mencionan la propiedad descubierta de acuerdo con la construcción o la Figura vista.</p>
Caso no explorado: <i>Punto Z no construido en GeoGebra que equidista de los puntos A y B</i>	
Evidencias	<p>Esquema argumentativo: Las estudiantes completan el Cuadro 3, informando que el punto Z está a la misma distancia de A y de B, igual que los puntos azules.</p>
Interpretación	<p>Tanto en el cuestionario como en la plantilla, los estudiantes no se refieren a un caso no explorado, debido a que el enunciado de la pregunta o la plantilla es quién les da la información. Sin embargo, en el esquema sí evidenciamos que las estudiantes identifican que el caso no explorado, corresponde al punto Z, que cumple con la condición inicial, igual que los puntos construidos, de equidistar de los puntos A y B.</p>
Aserción: <i>Punto Z pertenece a la recta MN o puntos azules</i>	

Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>Las estudiantes escriben en el ítem 3, que el punto Z que equidista de los puntos A y B, pertenece a la recta formada por los puntos M, N, O.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes escriben en el renglón 3 que el punto Z que cumple con la misma condición de los puntos azules, pertenece a la recta formada por los puntos azules.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Las estudiantes escriben en el Cuadro 4 del esquema que, Z pertenece a la recta formada por los puntos azules.</p>
Interpretación	De acuerdo con lo escrito en el cuestionario, el diagrama y el esquema, identificamos que las estudiantes llegan a concluir la asección de forma acertada.
<p>Patrón de generalización: <i>El conjunto de puntos que equidistan de dos puntos fijos, A y B, forman una recta</i></p>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [44] Sara dice que cualquier punto que equidiste de los puntos A y B, pertenece a la recta EO, construida de tal forma que visualmente contuviera los puntos M, N, O y P, que equidistan de los puntos A y B.</p> <p>Cuestionario:</p> <p>En el ítem 4 las estudiantes respondieron que el punto Z debe pertenecer al lugar geométrico encontrado, porque equidista de los puntos A y B y hace parte de la recta.</p> <p>Plantilla:</p> <p>En la plantilla, las estudiantes concluyen que los puntos azules forman esta recta cumpliendo con la condición dada, equidistar de A y B.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Las estudiantes concluyen que los puntos equidistan de A y B.</p>

Interpretación	<p>Identificamos que las estudiantes sí lograron reconocer que los puntos cumplen con ambas propiedades, equidistar de los puntos A y B y pertenecer a una misma recta. Esto les permite afirmar que el punto Z pertenece a la recta sin hacer la exploración. Sin embargo, no hacen explícita la dependencia del lugar geométrico a la equidistancia. No escriben una proposición condicional como esta: <i>Si los puntos equidistan de dos puntos fijos A y B, entonces aquellos puntos pertenecen a una misma recta.</i></p> <p>Pese a que sí llegaron a encontrar el patrón de generalidad, en el esquema no logran expresarlo, debido a que en el cuadro 5, solo escriben la primera condición, los puntos equidistan de A y B. Así, sí realizan una inducción empírica, pero de manera incompleta.</p>
-----------------------	---

4.2. Tarea 2: Recta perpendicular por el punto medio – mediatriz

4.2.1. Episodio No. 4 – G3 (Martín, Alejandro, Samir)

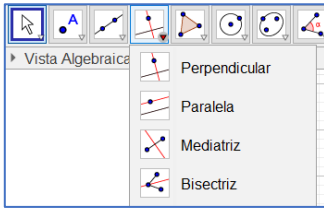
4.2.1.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

Luego de que la docente les dice a todos los estudiantes que a partir del arrastre se puede representar una familia de objetos geométricos, pregunta: *¿Entonces, en GeoGebra se pueden representar varios segmentos a partir de uno construido?*

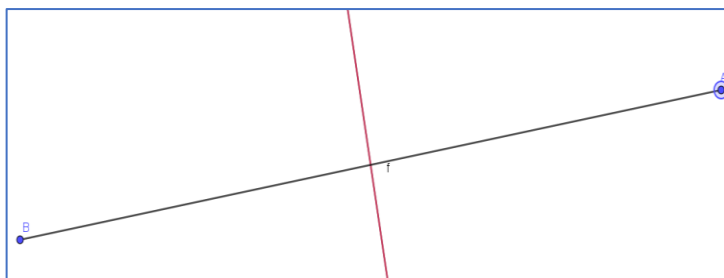
1.	Martín:	<i>Sí</i>
2.	Zaira:	<i>¿Por qué?</i>
3.	Martín:	<i>Pues sería como infinitos porque va a tener diferentes posiciones cuando los [puntos los] movemos y además va cambiando lo que mide [los segmentos], ¿no?... Es que el segmento se puede extender hasta infinito.</i>

Después, Samir empieza a leer la primera parte de la tarea: *“realiza la siguiente construcción en GeoGebra, construye dos puntos y llámalos A y B . Luego, construye el segmento AB ”*. Martín menciona que el segmento se puede construir de una vez. Alejandro construye el segmento AB con la opción ‘segmento’ sin determinar antes los puntos A y B . Samir sigue leyendo la segunda parte de la tarea *“utiliza la herramienta mediatriz para*

construir la mediatriz del segmento AB , llamarla m y resaltarla de un color distinto a la del segmento”. Surge la siguiente conversación:

4.	Martín:	¿Cómo era que se llamaba? El segmento AB , ¿cierto?
5.	Alejandro:	Sí.
6.	Martín:	Entonces no hay que hacer ningún cambio en el [nombre de los] puntos. Haz la mediatriz.
7.	Alejandro:	(Revisa en los diferentes despegables de GeoGebra como: punto, recta [también revisa las diferentes opciones como recta, segmento y segmento de longitud dada], circunferencia y ángulo) ¿Me recuerdan dónde está la mediatriz?
8.	Martín:	Mira, aquí está la mediatriz (indica con el dedo para desplegar las opciones del ícono de ‘recta perpendicular’).  (Alejandro da clic en la opción ‘mediatriz’, después da clic en el punto A). Coge la rec... Solo el segmento. (Alejandro da clic nuevamente en la opción ‘mueve’, luego le da clic en el segmento AB y construye la recta g , que es mediatriz del segmento AB).
9.	Alejandro	¡Ah!, ya.

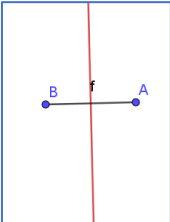
Martín pregunta por el nombre que debe tener la mediatriz. Sin embargo, Samir le dice que toca primero cambiar la recta de un color para que “se vea mejor”. Alejandro vuelve a leer el enunciado de la tarea y reitera lo dicho por Samir y Martín: “toca llamarla m , y resaltarla de color distinto”.

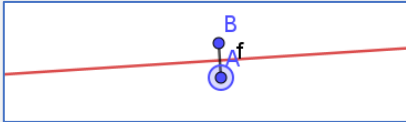


10.	Martín:	¿En minúscula o mayúscula toca?
11.	Alejandro:	En minúscula, acuérdate (da clic en el segmento al intentar renombrar la recta g como m , pero crea otra recta h , que se superpone a la recta g del segmento AB , debido a que el programa seguía en la opción ‘mediatriz’). Pero no se puede.
12.	Samir:	Es que debes oprimirle aquí primero (hace clic en el primer ícono de las herramientas para desactivar la opción).

13.	Alejandro:	<i>¡Ah! Con razón. Listo (renombra la recta h como m y empieza a mover uno de los extremos del segmento AB).</i>
14.	Samir:	<i>Yo quiero (Mueve el punto A de forma circular y rápido).</i>
15.	Alejandro:	<i>¿Le cambiaron la sensibilidad?</i>
16.	Samir:	<i>Hágalo usted. Es que a mí me gusta rápido, tú lo hiciste un poquito más lento (le entrega computador a Alejandro).</i>
18.	Martín:	<i>Lo siguiente, ¿qué toca hacer?</i>
19.	Alejandro:	<i>Espera (da clic izquierdo en la recta m, luego da clic derecho en la recta m) ¿Será que para cambiar el color hay alguna opción aquí?</i>
20.	Samir:	<i>Es que cámbielo de color, toca cambiarlo de color.</i>
21.	Alejandro:	<i>Sí, pero no me aparece (revisa en los íconos de GeoGebra ‘ángulo’ ‘deslizador’ y ‘mover gráfico’).</i>
22.	Samir:	<i>Pero toca es a la recta.</i>
23.	Alejandro:	<i>¿En propiedades? (da clic derecho en la recta por segunda vez, luego en propiedades y cambia el color de la recta m). Sí era ahí. Así, ya.</i>

La profesora les dice a todos los estudiantes que se le había olvidado mencionar cómo cambiar el color de los objetos construidos. Alejandro contestó: *solo es presionar la mediatriz y darle las propiedades y ya. Ahí aparece*. La docente les muestra a los demás estudiantes cómo cambiar el color a los objetos geométricos construidos. Luego, Alejandro le presta el computador a Samir y Samir arrastra el punto A hacia un extremo de la pantalla.

24.	Alejandro:	<i>¡Pero qué estás haciendo!</i>
25.	Samir:	<i>Es que quería arrastrar el punto hasta el infinito.</i>
	Alejandro le quita el mando y arrastra nuevamente el punto A para que sea visible.	
		
26.	Martín:	<i>Qué dice después.</i>
27.	Alejandro:	<i>Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad de la mediatriz m respecto al segmento AB. Según lo explorado, ¿qué propiedad cumple la mediatriz? (Mueve los puntos A y B en diferentes posiciones de la pantalla, primero mueven el punto B y luego el punto A, procurando que el segmento AB tenga la misma distancia, pero con diferente posición de modo circular).</i>

28.	Martín:	<i>Miren estas</i> (Martín mueve el punto A de tal forma que visualmente quede cerca al punto B).
		
29.	Alejandro:	<i>¡Ey Martín!, ¿qué haces?</i>
30.	Martín:	<i>Pues es que esa es la idea. [...] Pues miren que siempre va a estar paral... Siempre va a ser la línea perpendicular en el medio, ¿no?</i>
31.	Alejandro:	<i>Sí, ¿no? Como la anterior vez.</i>
32.	Martín:	<i>O sea, miren que se ubica el medio y la línea perpendicular y ya</i> (Mientras seguía moviendo el punto A de tal forma que el segmento AB cambiaba de posición y de longitud).
33.	Alejandro:	<i>Ah sí por eso, es parecido a lo que hicimos la anterior vez.</i>

La docente se dirige hacia el grupo y pregunta por la construcción realizada, Martín con el mouse arrastra el punto B para obtener varias posiciones del segmento mientras que Alejandro responde lo dicho por Martín anteriormente *que, aunque se mueva el segmento, la mediatriz siempre va a ser perpendicular*. Martín complementa diciendo que *siempre va a estar en la mitad de los puntos A y B* .

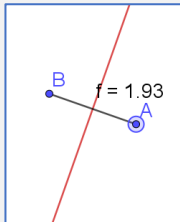


La docente pregunta por cómo pueden corroborar que “pasa por la mitad”.

Responden:

34.	Samir:	<i>Pues a ojo, ¿no?</i>
35.	Martín:	<i>Midámoslo</i> (Alejandro busca en las diferentes opciones de GeoGebra, pero no encuentra la opción ‘medida o longitud’).

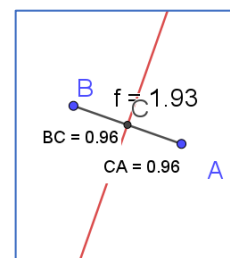
⁴ La imagen se ve borrosa debido a que fue tomada del video realizado con el celular.

36.	Alejandro	¿Dónde está?
37.	Martín:	En donde aparece el ángulo (Samir le señala a Alejandro la opción ‘ángulo’ para desplegar las opciones).
38.	Alejandro:	¿En ángulo me sirve para eso? ¿para saber si está en la mitad?
39.	Martín:	No, no. O sea, me refiero a la herramienta. (Alejandro mide la longitud del segmento AB)
		
41.	Zaira:	¿Pero cómo pueden hacer para hallar ese punto de intersección [entre la recta m y el segmento AB]? Existe una opción en GeoGebra para hallar la intersección entre la recta y el segmento. Búsquenla, para que la puedan utilizar.
42.	Martín	Pues sería esta, ¿no? (refiriéndose a la opción de punto, utiliza la opción y cuando le da clic en el posible punto de intersección, determina un punto C en el segmento AB) No, pero no me sirve (elimina el punto C).
43.	Samir:	¿Y si mejor utilizas la de abajo?
44.	Martín:	¿Cuál?, ¿está? (refiriéndose a la opción ‘intersección’)
45.	Samir:	Sí, ¿no?

Martín determina el punto de intersección entre el segmento AB y la recta m , dando clic a la intersección. Luego mide las distancias de B a C y de C a A .

La docente pregunta ¿cómo saben que el punto C está en el medio? Martín responde porque la distancia de AB está “dividida en dos” por el punto C . La docente les dice que revisen si en todos los casos explorados sucede lo mismo.

Luego de que la docente se va, Alejandro intenta arrastrar el punto C , pero Martín le indica que debe mover es la recta m . Como tampoco funciona, Martín le dice a Alejandro que los objetos que deben arrastrar son los puntos A o B otra vez. Cuando Alejandro arrastra el punto

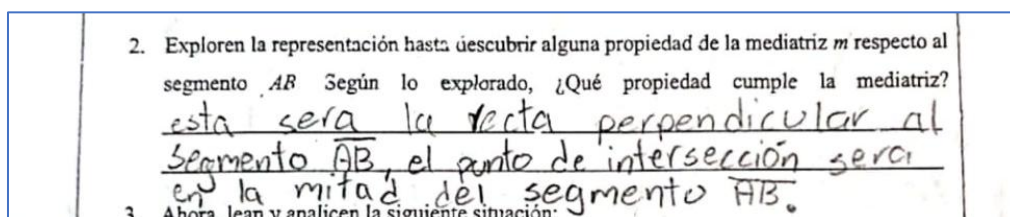


A, el grupo corrobora que las distancias de A a C y de C a B siempre son las mismas. Después, Martín les propone utilizar la opción ‘ángulo’ para corroborar también que el ángulo sea recto, por lo que Alejandro utiliza la opción ‘medir ángulo’, dando clic primero en el segmento y luego en la recta.

4.2.1.2. Respuestas al cuestionario

De acuerdo con lo descubierto en la exploración, Martín empieza a escribir la respuesta del ítem 2 del cuestionario.

Imagen 4.10. Respuestas del ítem 2 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2



Luego, lee en voz alta para sus compañeros y dice que ahora deben responder el ítem 3. Después de leer la situación del ítem 3, Samir dice que no está de acuerdo con la pregunta del cuestionario *¿están de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz?*, pero Martín lo contradice, argumentando que el “segmento” podría ser uno de los palos de Juan y “la recta roja” el otro palo, asegurando que *no va a ser como un segmento el palo*. Después de un silencio de dos minutos aproximadamente, ocurre la siguiente discusión:

47.	Martín:	<i>No, creo que no.</i>
48.	Samir:	<i>Algo me dice que no, la mediatriz no es un segmento.</i>
49.	Martín:	<i>Yo creo que no. Este es el primer palo, ¿no? El problema es que la recta no es un segmento. La recta es infinita y ese es el problema... No existe un palo que tenga la longitud infinita, entonces sería un segmento no una recta.</i>
50.	Samir:	<i>Aparte una cruz en mi punto de vista religioso es más arriba y si lo ponemos en la cruz quedaría en la mitad. Quedaría un símbolo de más.</i>

Martín empieza a escribir la justificación del ítem 3.

Imagen 4.11. Respuestas del ítem 3 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2

Juan encuentra un trozo de palo en el parque. Su amiga Carla le dice que podrían buscar otro trozo de palo para formar una cruz. Juan le sugiere colocar el segundo palo como si fuera la mediatriz del primero.

¿Están de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz? Si No Justifiquen su respuesta.

Porque la mediatriz es una recta infinita, por lo tanto no existe un palo infinito.

Después la profesora vuelve a donde está el grupo. Pregunta por cómo construyeron el punto de intersección y el ángulo de 90° . Alejandro responde “con la opción de ‘ángulo’ dimos clic en la recta y luego en el segmento”. Luego, la profesora les dice que va a realizar algunas preguntas. Surge la siguiente conversación:

51.	Zaira:	Bueno, les voy a hacer unas preguntas, ¿Será que se puede arrastrar la recta m? o bueno, ¿la recta roja?
52.	Samir:	No señora.
53.	Martín:	¿Pero la mediatriz o el segmento? Igual es que ninguno [se puede mover] porque van a depender de esos puntos.
54.	Samir:	Además, es que la recta es una línea fija por las propiedades que tienen.
55.	Zaira:	¿Línea fija?
56.	Martín:	No o sea que si se pudiera mover como quisiera, se va a quitar la función que tiene la mediatriz.
57.	Zaira:	Mueve el punto A o B ¿qué sucede?
58.	Alejandro:	La mediatriz se mueve
59.	Martín:	Sí, pero es que es solo cuando se mueve cualquier punto.
60.	Zaira:	¿Será que se puede mover el punto C?
61.	Samir:	Ah no, es que sería al mover los puntos A y B, o los puntos que formaron el segmento.

62.	Zaira:	Muy bien, por lo que la recta está condicionada a los puntos A y B. Terminen de contestar las preguntas.
-----	--------	--

Alejandro lee la pregunta del ítem 4, Martín indica que deben poner lo que descubrieron en GeoGebra y Alejandro adiciona la respuesta con respecto a la última exploración de la recta, afirmando que está condicionada a los puntos A y B.

Imagen 4.12. Respuestas del ítem 4 al cuestionario del Grupo 3-Tarea 2

<p>4. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre la mediatriz de cualquier segmento?</p> <p>esta estará ubicada de manera perpendicular al segmento, además el punto de intersección será en la mitad del segmento, además la mediatriz se puede mover pero condicionada</p>
--

Los estudiantes entregan a la docente el cuestionario. Más adelante, en la discusión grupal, cuando Martín lee la respuesta del ítem 3, un estudiante de otro grupo le dice que en el enunciado de la situación se mencionaba que ellos debían imaginar el palo “como si fuera la mediatriz” más no que debía ser la mediatriz. Martín responde que en ese caso sí estaría de acuerdo con sus compañeros, informando que estarían de acuerdo con la opción de Juan porque cumpliría con las dos propiedades mencionadas en el ítem 2.

4.2.1.3. Respuesta a la plantilla discursiva

Los estudiantes entregan el cuestionario y después completan los espacios de la plantilla discursiva.

Imagen 4.13. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 3-Tarea 2

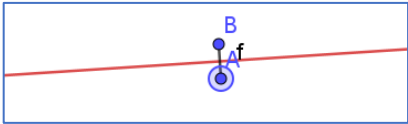
Tarea 3: Hecho Geométrico de la Mediatriz	
Grupo	<u>3</u>
Enunciado 2.	
1. Completen los siguientes espacios:	
Observo que	la mediatriz del segmento
cumple que	está en la mitad del segmento y es infinito
Afirmo que	la mediatriz de un segmento MN, cumple que es equidistante de M y N o sea que está en la mitad del segmento MN
Esto pasa porque	la mediatriz es la recta en la mitad del segmento en este caso M,N

4.2.1.5. Análisis del episodio No. 4

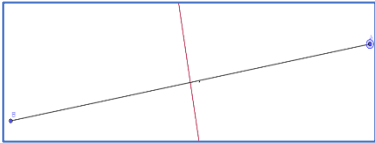
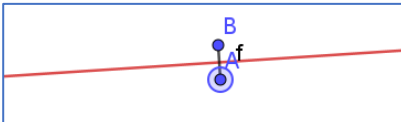
Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	<p>En [3], Martín dice:</p> <p><i>Pues sería como infinitos [segmentos] porque va a tener diferentes posiciones cuando los movemos [los puntos] y además va cambiando lo que mide [los segmentos], ¿no?... Es que el segmento se puede extender hasta infinito.</i></p>	<p>Arrastre para obtener una familia de objetos <i>construidos</i>. Martín reconoce que con el arrastre se obtiene una familia de objetos que comparten los atributos que caracterizan al objeto inicial construido, en este caso, el segmento <i>AB</i>.</p>
	<p>En [8], Martín está seguro de que la opción ‘mediatriz’ se encuentra en el ícono de ‘recta perpendicular’.</p> <p>En [36-39] Martín le indica a Alejandro el ícono que debe desplegar para encontrar la opción ‘medida o longitud’ en GeoGebra, correspondiente a la opción ‘ángulo’.</p> <p>Entre las intervenciones [50] y [51], Alejandro dice: “...con la opción de ‘ángulo’ dimos clic en la recta y luego en el segmento” para construir el punto de intersección entre el segmento y la recta.</p>	<p>Despliegue de ventanas en <i>GeoGebra</i>. Los estudiantes identifican que en GeoGebra hay íconos que despliegan diferentes opciones de construcción de objetos geométricos. Además, es claro que los estudiantes identifican dónde se encuentran ubicadas dichas opciones ‘mediatriz’, ‘distancia’ y ‘punto de intersección’.</p>
	<p>Entre las intervenciones [3] y [4], Alejandro construye el segmento <i>AB</i> con la opción ‘segmento’ sin determinar antes los puntos <i>A</i> y <i>B</i>.</p>	<p>Segmentos. Los estudiantes identifican que, para construir un segmento no es necesario determinar los puntos, sino que pueden utilizar de una vez la opción ‘segmento’.</p>

	<p>En [19] Alejandro intenta cambiar el color de la recta m, dando clic derecho e izquierdo en la recta. Además, pregunta si existe alguna opción que pueda cambiar la recta de color.</p> <p>En [21], Alejandro revisa los íconos ‘ángulo’ ‘deslizador’ y ‘mover gráfico’ para encontrar alguna opción que cambie el color de la recta m.</p> <p>En [22-23] Alejandro dice: <i>¿En propiedades?</i> (da clic derecho en la recta por segunda vez, luego en propiedades y cambia el color de la recta m, Figura 2). <i>Sí era ahí. Así, ya.</i></p> <p>Entre las intervenciones [23] y [24], Alejandro les dice a todos sus compañeros que para cambiar de color la recta “solo es presionar la mediatriz y darle las propiedades y ya. Ahí aparece”.</p>	<p>Cambio de color Alejandro decide que, para destacar un objeto geométrico en GeoGebra, se puede cambiar de color; da clic derecho en el objeto que quiere destacar y luego, en propiedades. Alejandro aprende a cambiar de color la recta construida.</p>
	<p>En las intervenciones [41-45] la docente les pregunta a los estudiantes cómo pueden hallar la intersección entre el segmento y la recta. Al inicio Alejandro utiliza la opción ‘punto’, después, por sugerencia de Samir, utiliza la opción ‘punto de intersección’ y da clic en donde visualmente es la intersección entre el segmento y la recta.</p>	<p>Puntos de intersección.</p> <p>Los estudiantes empiezan a instrumentalizar la opción de ‘intersección’ en GeoGebra. Aún no consideran dar clic primero en uno de los objetos y luego, en el otro objeto.</p>
	<p>En la conversación que surge después de [45], Alejandro intenta arrastrar el punto C (intersección entre la mediatriz y el segmento AB), pero Martín le indica que debe mover es la recta m. Como tampoco funciona, Martín le dice a Alejandro que los objetos que deben arrastrar son los puntos A o B otra vez.</p> <p>En las intervenciones [51-62], la docente les explica que la recta m y el punto C están condicionados a los puntos A y B.</p>	<p>Arrastre directo - arrastre indirecto.</p> <p>Los estudiantes establecen la distinción entre el arrastre directo y el arrastre indirecto, identificando qué objetos dependen del arrastre de otros para cambiar de posición.</p>

<p>Instrumentación</p>	<p>En las intervenciones [27-30] los estudiantes intentan que el segmento cambie de posición sin cambiar su longitud; cambie la longitud sin cambiar de posición; y, cambie la longitud de forma horizontal para casos extremos.</p> 	<p>Uso del arrastre para descubrir las propiedades de un objeto.</p> <p>Los estudiantes usan el arrastre para arrastrar los puntos A y B y observar, en diferentes perspectivas, el comportamiento de la recta, mediatriz, del segmento AB.</p>
-------------------------------	--	---

Acerca de la argumentación inductiva

<p>Condiciones iniciales: Subconjunto de mediatrices del segmento AB representados por la recta m.</p>	
<p>Evidencias</p>	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [8] Alejandro construye la mediatriz del segmento AB.</p> <p>Entre las intervenciones 9 y 10, Samir arrastra el punto A hacia un extremo de la pantalla, cambiando de longitud al segmento AB y cambiando de posición a la mediatriz. Además, Samir indica que <i>quería arrastrar el punto hasta el infinito</i>.</p>  <p>En [27], Alejandro mueve el punto B y luego el punto A, de manera circular, procurando que el segmento AB tenga la misma distancia, pero con diferente posición de los puntos.</p> <p>En [28] Martín arrastra el punto A hasta que quede cerca del punto B, revisando el comportamiento de la mediatriz para el caso de un segmento de longitud mínima.</p>  <hr/> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Los estudiantes escriben en el primer renglón: Observo que <i>la mediatriz del segmento</i></p>
<p>Interpretación</p>	<p>Los estudiantes reconocen que la condición inicial de los casos explorado es ser la mediatriz del segmento AB. Lo sabemos porque utilizan el arrastre para explorar un conjunto de representaciones de segmentos y sus mediatrices. Sin embargo, en el esquema argumentativo, solo escribieron como condición inicial que se tenía el segmento MN, lo que corresponde al caso no explorado.</p>

Propiedad descubierta: <i>La mediatriz m es perpendicular al segmento AB y, la intersección entre la recta m y el segmento AB, es el punto medio de AB.</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [30 y 32], Martín dice: <i>Siempre va a ser la línea perpendicular en el medio, ¿no? [...]</i> <i>O sea, miren que se ubica el medio y la línea perpendicular y ya</i> (Mientras seguía moviendo el punto A de tal forma que el segmento AB cambiaba de posición y de longitud).</p> <p>Entre las intervenciones [33 y 34], Alejandro le responde a la docente: <i>aunque se mueva el segmento, la mediatriz siempre va a ser perpendicular.</i> Martín adiciona: <i>siempre va a estar en la mitad de los puntos A y B.</i></p> <p>Finalmente, los estudiantes muestran que la recta es perpendicular, midiendo el ángulo y que C es el punto medio de AB midiendo cada una de las distancias. Además, nuevamente arrastran los puntos A y B.</p> <p>Cuestionario: En la pregunta del ítem 2 los estudiantes contestan: <i>esta será la recta perpendicular al segmento AB, el punto de intersección será en la mitad del segmento AB.</i></p> <p>Plantilla discursiva: En el segundo renglón de la plantilla, los estudiantes completan la frase escribiendo: <i>cumple que está en la mitad del segmento y es infinito.</i></p>
Interpretación	<p>Los estudiantes descubren las propiedades de la mediatriz de un segmento mediante la exploración, inclusive de casos extremos. Balacheff (2003) menciona el importante papel de los casos extremos en el descubrimiento de propiedades, para lograr una mayor convicción.</p> <p>El descubrimiento realizado corresponde a lo escrito en el cuestionario. Sin embargo, en la plantilla discursiva, los estudiantes solamente hacen referencia a una condición encontrada, relacionándola con lo explorado en GeoGebra de la forma condicionada en que se puede mover la mediatriz. En el esquema argumentativo, se ve que probablemente los estudiantes sí reconocen que la mediatriz se comporta de una manera particular porque depende de la posición y del tamaño del segmento AB. Sin embargo, no se refieren a las propiedades geométricas exploradas y descubiertas.</p>
Caso no explorado: <i>La mediatriz del segmento MN</i>	
Evidencias	<p>Martín dice al final que, si se pudiera ver el palo como infinito, sí será la mediatriz. Martín reconoce que se puede suponer que el palo es como una mediatriz.</p>

Interpretación	<p>Los estudiantes tuvieron problemas para identificar que la cruz que se menciona en el enunciado fuera un caso no explorado porque no asociaban a uno de los palos de la cruz con la mediatriz. Sin embargo, al final sí lo aceptaron.</p> <p>Ahora, en el esquema argumentativo, al igual que en la propiedad descubierta, escribieron que los casos no explorados fueron con respecto a una familia de segmentos AB en vez de una familia de mediatrices no exploradas. Lo que quiere decir que los estudiantes no pudieron identificar bien el caso no explorado en la tarea.</p>
<p>Aserción: <i>la mediatriz del segmento MN es perpendicular al segmento y/o la intersección entre el segmento MN y su mediatriz es el punto medio de MN</i></p>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>Durante la discusión grupal, los estudiantes reconocen que, están de acuerdo con la opción de Juan, porque al formar una cruz, se cumplen con la propiedad de ser perpendicular y de pasar por el punto medio del segmento. La información es mencionada en el ítem 2 del cuestionario.</p> <p>Plantilla discursiva: Los estudiantes completan el cuarto renglón de la plantilla discursiva de la siguiente manera: Afirmando que la mediatriz de un segmento MN, cumple que <i>es equidistante de M y N, o sea que está en la mitad del segmento MN.</i></p>
Interpretación	<p>A los estudiantes se les dificultó identificar la aserción debido a que: para la respuesta del cuestionario, centraron el problema de Juan en una propiedad asociada a longitud de una recta con respecto a la longitud de un palo; en la plantilla discursiva escribieron solo una de las propiedades encontradas, correspondiente a que la recta pasa por la mitad del segmento MN y en el esquema argumentativo, no fueron específicos, simplemente escribieron “la mediatriz cumple de la misma forma”. Además, en la plantilla discursiva aluden a una de las dos propiedades que tenían que mencionar.</p>
<p>Patrón de generalización: <i>Si una recta es la mediatriz de un segmento, entonces la recta es perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento.</i></p>	
Evidencias	<p>Intervenciones:</p> <p>En [30] Martín dice: <i>Pues es que esa es la idea. [...] Pues miren que siempre va a estar paral... Siempre va a ser la línea perpendicular en el medio, ¿no?</i></p> <p>En [32] Martín dice: <i>O sea, miren que se ubica el medio y la línea perpendicular y ya.</i></p>

	Entre [33 y 34] Alejandro dice: <i>Aunque se mueva el segmento, la mediatriz siempre va a ser perpendicular.</i> Martín complementa diciendo que <i>siempre va a estar en la mitad de los puntos A y B.</i>
	Cuestionario: Los estudiantes responden al ítem 4, que la mediatriz de cualquier segmento <i>estará ubicada de manera perpendicular al segmento. Además, el punto de intersección será en la mitad del segmento...</i>
	Plantilla discursiva: Los estudiantes completan el quinto y sexto renglón de la plantilla discursiva de la siguiente manera: <i>la mediatriz es la recta en la mitad del segmento, en este caso MN</i>
Interpretación	Los estudiantes identifican las dos propiedades que cumple la mediatriz de un segmento. Además, Martín hace referencia a que “siempre” se va a cumplir que son perpendiculares y que la recta pasa por el punto medio del segmento. Sin embargo, en la plantilla discursiva a pesar de que habían identificado tres propiedades de la mediatriz, correspondiente a que la recta pasa por la mitad del segmento, en un lenguaje coloquial no lo escriben como lo pensaron en su momento. Finalmente, en el esquema argumentativo, quizás por el cambio de formato de la plantilla, los estudiantes escribieron <i>lo hemos explorado en GeoGebra</i> no correspondiendo a lo que queríamos que escribieran los estudiantes.

4.2.2. Episodio No. 5 – G4 (Laura, Sara, Mariana)

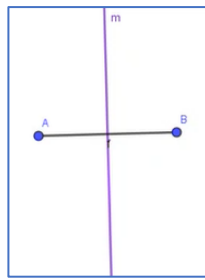
4.2.2.1. Descripción de la interacción de las estudiantes al resolver el problema

Las estudiantes empiezan leyendo la primera parte del enunciado de la tarea. Sara le dice a Mariana que construya, en GeoGebra, dos puntos y los llame A y B . Mariana determina los dos puntos y Sara expresa que ahora debe construir el segmento determinado por los dos puntos. Mariana utiliza la opción ‘recta’ sin desplegar las otras opciones y construye la recta AB , pero Laura dice que no es la construcción solicitada. Mariana elimina la recta, da clic en el ícono ‘recta’, para desplegar las opciones de GeoGebra, después da clic en la opción ‘segmento’ y construye el segmento AB . Sara lee lo que sigue del enunciado de la tarea “Utilizar la herramienta ‘mediatriz’ para construir la mediatriz del segmento AB . Llamarla m y resaltarla de un color distinto”. Mariana despliega los íconos de ‘recta’ y ‘recta perpendicular’, da clic en la opción ‘mediatriz’ y construye la mediatriz del segmento AB .

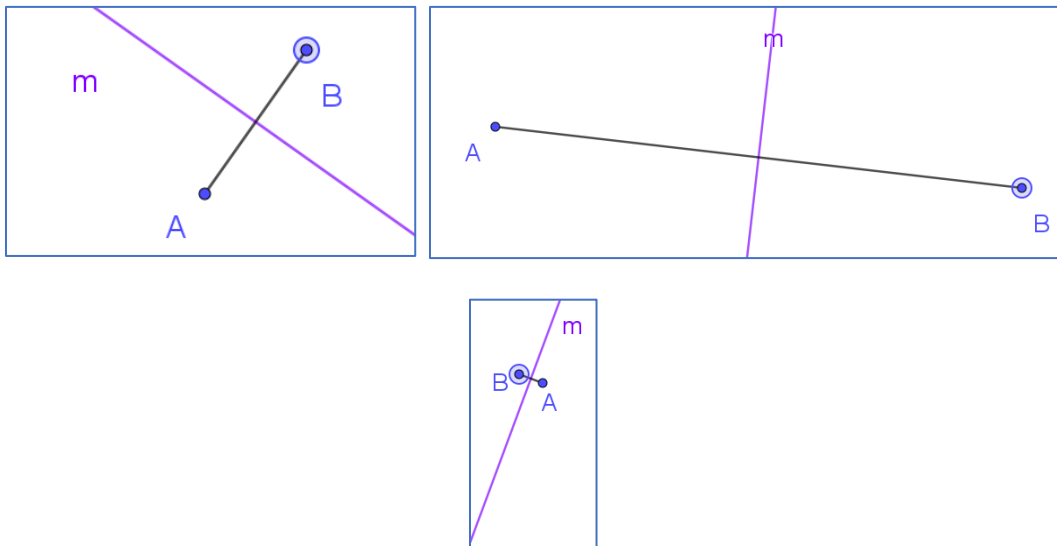
En ese momento la docente explica dónde pueden cambiar el color de los objetos construidos en GeoGebra. Mariana le hace entrega del computador a Laura y surge la siguiente conversación en el grupo:

1.	Sara:	<i>Y resaltar de un color distinto al segmento $[AB]$. Pero todavía no le has cambiado el nombre</i>
2.	Laura:	<i>Ya va [Renombra la recta como M dando clic derecho en la recta y luego en ‘renombrar’].</i>
3.	Sara:	<i>Pero ponla en minúscula porfa.</i>
4.	Laura:	<i>(Renombra la recta como m) Ya.</i>
5.	Sara:	<i>Ahora toca hacer que esa línea tenga un color diferente a la que está ahí.</i>

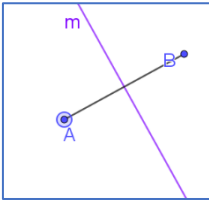
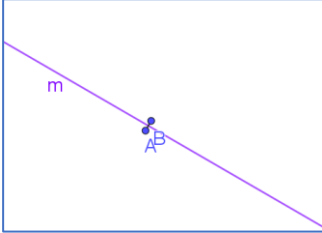
Laura da clic en la recta m , luego da clic en propiedades “color” y pone de color morado a la recta m .



Sara lee lo que falta del primer ítem del cuestionario “*Mueve los puntos A y B hasta descubrir alguna propiedad de la mediatriz m respecto al segmento AB* ” Laura empieza a arrastrar el punto B en diferentes posiciones (primero de forma circular, luego de forma horizontal alargando y disminuyendo la longitud del segmento).



Mientras que Laura arrastra el punto B , le va diciendo a sus compañeras:

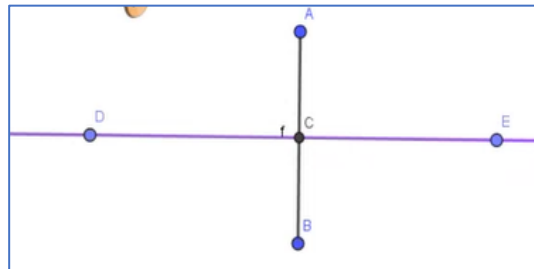
6.	Laura:	<i>Miren como vamos, m va a ser perpendicular a ese segmento en estos casos (empieza a arrastrar el punto A de tal forma que el segmento cambie de posición, pero la longitud del segmento pareciese ser el mismo).</i>	
7.	Sara:	<i>No, no tiene nada que ver que sea perpendicular.</i>	
8.	Laura:	<i>Mira, se ve. En este caso sí.</i>	
9.	Sara:	<i>Mira este caso que es perpendicular, pero no está equidistante a ambos puntos (dibuja en una hoja aparte un caso donde el segmento es perpendicular a la recta, pero la intersección entre la recta y el segmento no es el punto medio del segmento).</i>	
10.	Laura:	<i>Sí, no. Pero en estos casos sí [las representaciones realizadas en GeoGebra]. Mira que aquí sí se cumple siempre (le muestra a Sara una representación extrema).</i>	
11.	Sara:	<i>Jaja. Eso ni se ve. Ah no, pero sí porque aquí equidistan [la equidistancia de la recta a A y a B]... Entonces ¿qué propiedad cumple la mediatriz?</i>	
12.	Laura:	<i>Ser perpendicular al segmento AB.</i>	
13.	Sara:	<i>Y que equidistan de A y B (escribe la respuesta del ítem 2)</i>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>2. Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad de la mediatriz m respecto al segmento AB. Según lo explorado, ¿Qué propiedad cumple la mediatriz?</p> <p><u>Siempre permanece perpendicular a AB y equidistando a A y a B</u></p> </div>

La profesora llega a donde está el grupo y pregunta cómo descubrieron que la mediatriz es perpendicular al segmento AB .

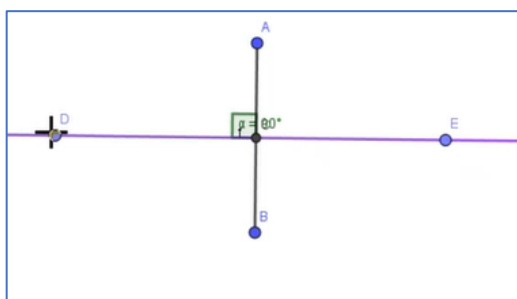
14.	Laura:	<i>Moviéndolo, ¿quiere que lo movamos? (arrastra el punto A de modo que el segmento cambia de longitud).</i>
15.	Zaira:	<i>Y ¿qué significa que sea perpendicular?</i>
16.	Laura:	<i>Que se cruzan y forman cuatro ángulos de noventa grados.</i>

17.	Zaira:	<i>¿Y cómo saben o [cómo] comprueban que forman cuatro ángulos de 90 grados?</i>
18.	Sara:	<i>Pues su amplitud.</i>

La profesora les dice que existe una opción en GeoGebra llamada ‘ángulo’, para que midan la amplitud del ángulo que requieran. Pero primero deben determinar el punto de intersección del segmento y la recta. Laura va a la opción ‘punto’ y luego da clic en la intersección entre la recta y el segmento, nombrado por el programa como el punto C . La



profesora les dice que ahora deben determinar otro punto sobre la recta m , Laura utiliza la



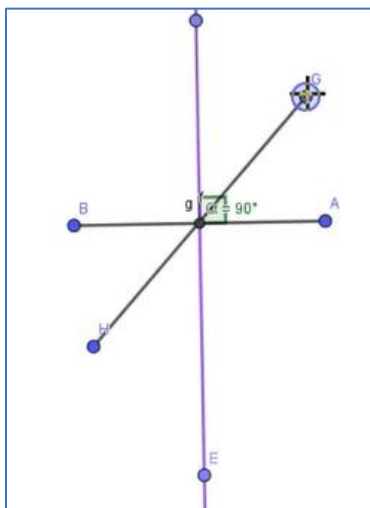
opción ‘punto’ otra vez y da clic en la recta, para construir los puntos D y E sobre la recta m .

Luego, Laura utiliza la opción ‘ángulo’, da clic en los puntos A , C y D . La profesora les dice que nuevamente muevan el punto A . Laura intenta mover el punto, pero no puede debido a que está activa la opción ‘ángulo’.

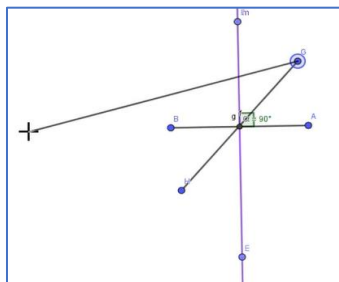
19.	Laura:	<i>Ay, perdón (Se dirige al ícono ‘mover’, arrastra el punto A en varias direcciones de tal forma que el segmento AB tenga diferentes longitudes).</i>
20.	Zaira:	<i>¿Qué sucede?</i>
21.	Sara:	<i>Pues que la recta mediatriz es perpendicular.</i>
22.	Zaira:	<i>O sea que sí se cumple. Listo, ahora revisen, por ejemplo, con otra recta que no cumpla con ser perpendicular al segmento AB ¿qué sucede?</i>

23.	Mariana:	<i>Pues no sería la mediatriz</i>
-----	----------	-----------------------------------

La profesora se va a otro grupo y Sara sugiere que la recta mencionada por la profesora podría ser la “bisectriz” pero Laura lo niega. Para intentar hacer la construcción auxiliar, Laura utiliza la opción ‘segmento’ y construye un segmento GH de tal forma que visualmente pase por el punto C .

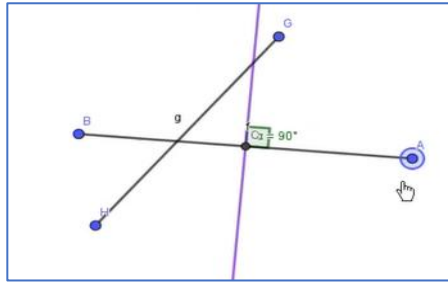


Luego, da clic nuevamente en el punto G para intentar moverlo, pero al tener activa la opción segmento se empieza a trazar otro segmento. Laura lo elimina sin dar clic para formar el segmento:

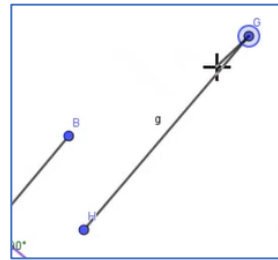


Después, Laura arrastra el punto A , aunque el programa sigue en la opción de ‘segmento’.

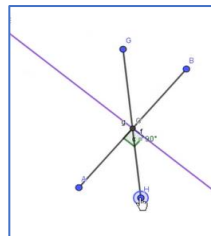
24.	Laura:	<i>Pero es que si yo muevo esto (el punto A), este (segmento GH) se va a quedar ahí. ¿cómo hago para que se salte?</i>
-----	--------	--



(Vuelve a intentar mover el punto G , pero por segunda vez empieza a construir un segmento).

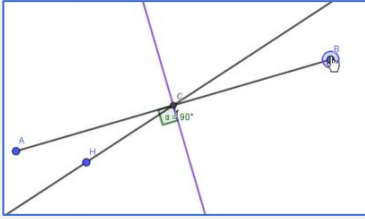
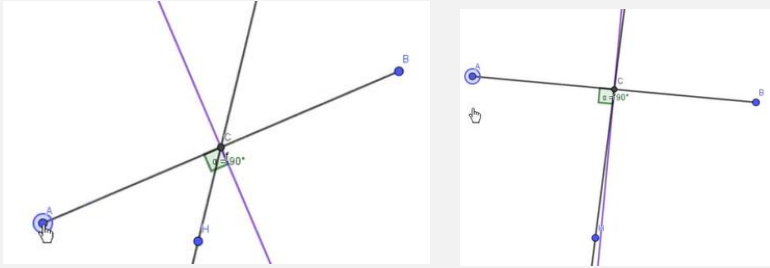


¿Qué pasó? (decide dar clic a la opción ‘mover’ y mueve los puntos G, H para que el segmento vuelva a contener al punto C).



Luego Laura llama a la profesora y le pregunta “¿cómo uno esto (el punto C) a la línea (segmento GH)?”. La profesora no comprende la pregunta, por lo que pide a Laura explicarse. Ella dice:

25.	Laura:	<i>Es que vea profe (da clic en ‘mover’ y mueve el punto B), cuando nosotras movemos este coso [el punto B], sí se mueve la mediatriz, pero usted nos dijo que pusiéramos otra recta para mirar que, si se movía, seguía igual. ¿Cómo hacemos para poner una recta y que se mueva con esto [el punto C]?</i>
26.	Zaira:	<i>Por ejemplo, le dan clic en la opción ‘recta’ (Laura da clic en el ícono ‘segmento’ y luego en la opción ‘recta’). Listo, primero dan clic en el punto C y luego en el otro punto construido (Laura construye la recta CH). Muy bien, entonces el segmento</i>

		<p>[CH] debería pasar por ese punto [punto C] (Laura da clic en la opción 'mover' y mueve el punto B).</p>  <p>Listo, muy bien. Ahora intente mover el punto C, ¿se puede mover? (Laura da clic en el punto C y lo intenta mover). ¿Por qué no se puede mover? (las estudiantes no contestan). Intente mover a la recta m (Laura no puede mover la recta m)</p>
27.	Laura:	<i>Se mueve, pero se lleva todo.</i>
28.	Zaira:	<p>¿y por qué? Intenten mover al punto A (Laura mueve el punto A)</p> 
29.	Mariana:	<i>Ese sí se puede mover.</i>
30.	Sara:	<i>Están relacionados.</i>
31.	Laura:	<i>Pues uno depende del otro, ¿no?</i>
32.	Zaira:	<i>¿De qué objetos [geométricos]?</i>
33.	Laura:	<i>La mediatriz de A y de B.</i>
34.	Sara:	<i>Del segmento AB.</i>
35.	Zaira:	<p><i>Muy bien. Ahora el punto C depende ¿de qué objetos? (Laura mueve el punto A)</i> <i>¿El punto C de donde salió?</i></p>
36.	Mariana:	<i>De la intersección de la recta y el segmento, o sea que depende de la mediatriz y del segmento AB.</i>

37.	Zaira:	<i>Claro. Aparte se dieron cuenta que ese punto es particular, ¿qué característica tiene ese punto con respecto al segmento AB?</i>
-----	--------	---

4.2.2.2. Respuestas al cuestionario

Después de un tiempo en el que las estudiantes hablan de otros asuntos, Sara lee el tercer ítem de la tarea “Juan encuentra un trozo de palo...” “... está de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz”.

38.	Mariana:	<i>Sí, porque la mediatriz es una línea en el medio y perpendicular.</i>
39.	Laura:	<i>Claro, porque una cruz es algo perpendicular. Bueno entonces escribe [dirigiéndose a Sara].</i>
40.	Sara:	<i>[Empieza a escribir en la hoja y dice] Sí, ya que, al formar una cruz, se requieren de dos segmentos perpendiculares.</i>
41.	Laura:	<i>Se conforman.</i>
42.	Mariana:	<i>Se forman.</i>

3. Ahora, lean y analicen la siguiente situación:

Juan encuentra un trozo de palo en el parque. Su amiga Carla le dice que podrían buscar otro trozo de palo para formar una cruz. Juan le sugiere colocar el segundo palo como si fuera la mediatriz del primero.

¿Están de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz? Si No Justifiquen su respuesta.

Ya que una cruz se compone de dos segmentos perpendiculares

Sara le pasa la hoja a Laura y ella lee el cuarto ítem del cuestionario: “¿qué conclusión puede sacar de la mediatriz de cualquier segmento?”. Laura le vuelve a pasar la hoja a Sara y dice “que el punto de intersección entre esta y...”

43.	Mariana:	<i>¿El segmento? [Sara escribe “que el punto”].</i>
44.	Sara	<i>(Escribe: que el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento AB). No, porque nos están preguntando sobre la mediatriz, no sobre el punto de intersección. (Elimina lo que había escrito).</i>

45.	Mariana:	<i>¿Qué habías escrito?</i>
46.	Sara:	<i>Que la mediatriz intersecaba de forma perpendicular al segmento.</i>
47.	Laura:	<i>Sobre la mediatriz de cualquier segmento.</i>
48.	Sara:	<i>No, porque esa es la conclusión del punto, no de la mediatriz.</i>
49.	Laura:	<i>No, porque el punto que forman entre ellas...</i>
50.	Mariana:	<i>hace parte de la mediatriz.</i>

La profesora va donde está el grupo y pregunta por la respuesta del segundo ítem.

51.	Laura:	<i>“Están de acuerdo con Juan para formar una cruz?” Sí, pues es que Juan dijo que hay que poner el segundo palo como la mediatriz del segmento.</i>
52.	Sara:	<i>Dijimos que estábamos de acuerdo porque un ángulo se conformaba de dos segmentos de forma perpendicular. O sea que la mediatriz es el segmento que estaban buscando.</i>
53.	Zaira:	<i>De acuerdo, muy bien. Y ahora, ¿qué conclusión?</i>
54.	Mariana:	<i>No lo hemos escrito.</i>
55.	Sara:	<i>Que la mediatriz del segmento está equidistando los dos puntos que...</i>
56.	Zaira:	<i>No, esa es la definición que obtuvimos la clase pasada. ¿Qué descubrieron? Que la mediatriz cumple ¿qué?</i>
57.	Laura:	<i>¿Con respecto al segmento? Que forman... Que da perpendicular y que forma un ángulo recto.</i>
58.	Zaira:	<i>Exacto. Terminen rápido de escribir porque ya voy a recoger.</i>
59.	Laura:	<i>(Le dicta a Sara) Ya que... la mediatriz va a estar... Que la mediatriz y el segmento van a quedar perpendiculares y van a formar cuatro ángulos de noventa grados.</i>

El grupo guarda el archivo de GeoGebra y entrega la tarea a la profesora.

<p>4. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre la mediatriz de cualquier segmento?</p> <p>Que la mediatriz y el segmento AB quedan perpendiculares formando ángulos de 90°.</p>
--

4.2.2.3. Respuesta a la plantilla discursiva

En la Imagen 4.15 se encuentra las respuestas a la plantilla discursiva.

Imagen 4.15. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 2

<p>Enunciado 2.</p> <p>1. Completen los siguientes espacios:</p> <p>Observo que la mediatriz formada por el segmento AB cumple que es perpendicular al segmento AB.</p> <p>Afirmo que la mediatriz de un segmento MN, cumple que es perpendicular al segmento MN.</p> <p>Esto pasa porque la mediatriz es el punto medio del segmento MN.</p>

4.2.2.4. Respuesta al esquema argumentativo

En la Imagen 4.16 se pueden ver las respuestas al esquema completado por los estudiantes, el cual debían realizar luego de haber escrito y completado la plantilla discursiva.

Imagen 4.16. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 2

2. Completar el siguiente diagrama:

Representación gráfica
(El segmento AB representa los casos explorados)

Dato

Condición de las rectas exploradas:
La mediatriz es perpendicular a MN

Propiedad descubierta:
Forman 4 ángulos de 90°

Caso no explorado en GeoGebra:
Mediatriz del segmento MN

Aserción

Afirmación sobre el caso no explorado en GeoGebra:
La mediatriz pasa de la misma manera

➔

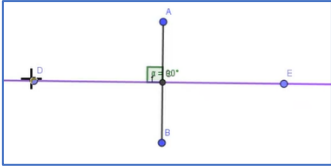
Garantía

Puedo afirmarlo porque
al hacer la representación gráfica se puede ver esta condición

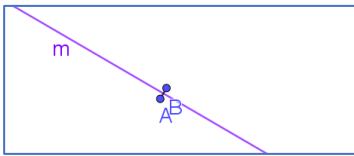
4.2.2.5. Análisis del episodio 5

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación
Instrumentalización	<p>En [2] Laura renombra la recta como M dando clic derecho en la recta y luego en 'renombrar'.</p> <p>En [3] Sara indica que el nombre de la recta debe escribirse en minúscula.</p>	<p>Renombrar. Laura identifica las opciones para renombrar los objetos matemáticos según lo que indique el problema. Además, Sara identifica que las rectas deben ser renombradas en minúscula.</p>

	<p>Entre las intervenciones [18] y [19], Laura va a la opción ‘punto’ y luego da clic en la intersección entre la recta y el segmento, nombrado por el programa como el punto C. Laura utiliza la opción ‘punto’ otra vez y da clic en la recta, para construir los puntos D y E sobre la recta m. Luego, Laura utiliza la opción ‘ángulo’, da clic en los puntos A, C y D.</p> 	<p>Medida de un ángulo. Las estudiantes utilizan la opción ‘ángulo’ y construyen el punto de intersección entre las rectas y un punto sobre la recta diferente al de la intersección para comprobar que el segmento AB y su mediatriz son perpendiculares. Las estudiantes identifican que para usar la opción ‘ángulo’, deben dar clic en tres puntos donde el segundo punto debe ser el vértice del ángulo.</p>
	<p>En [19] Laura intenta mover el punto, pero no puede debido a que está activa la opción ‘ángulo’. Luego, se dirige al ícono ‘mover’, arrastra el punto A en varias direcciones de tal forma que el segmento AB tenga diferentes longitudes.</p>	<p>Mueve, arrastra o selecciona objetos. Laura identifica que los objetos construidos que no son limitados pueden moverse siempre y cuando vuelva a utilizar la opción ‘mover’ después de haber construido un objeto.</p>
<p>Instrumentación</p>	<p>En las imágenes que aparecen entre las intervenciones [5] y [6], Laura arrastra el punto B de forma circular y de forma horizontal alargando o disminuyendo el segmento.</p> <p>En [6], Laura arrastra el punto A cambiando de posición, sin afectar la longitud del segmento.</p> <p>En [10], Laura arrastra el punto A de tal forma que esté visualmente cerca al punto B.</p> <p>En [14], [19] Laura arrastra el punto A de modo que el segmento AB cambie de longitud.</p>	<p>Uso del arrastre de los extremos del segmento, para encontrar una propiedad de la mediatriz del segmento. Laura arrastra los puntos A y B para identificar el comportamiento de la mediatriz del segmento AB. En un inicio Laura arrastra los puntos modificando la posición de uno de ellos, luego arrastra los puntos de tal forma que cambia la distancia del segmento AB y finalmente arrastra los puntos en casos extremos, para identificar y corroborar la propiedad encontrada por el grupo y dar solución a la pregunta del ítem 1.</p>

Acerca de la argumentación inductiva

Condiciones iniciales: <i>Subconjunto de mediatrices del segmento AB representados por la recta m.</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>Al inicio de la interacción [1-5], Laura representa el segmento AB, construye la mediatriz del segmento, la renombra como m y la resalta de color morado. Luego, Laura arrastra uno de los extremos del segmento de forma circular.</p> <p>En [11] Sara dice que para el caso extremo representado en [10], la recta equidista de los extremos del segmento. En [13] Sara complementa la respuesta del ítem 2 del cuestionario diciendo que la recta también equidista de los puntos A y B.</p> <p>En las intervenciones [6] [14] [19], Laura arrastra uno de los extremos del segmento de forma horizontal alargando y disminuyendo la longitud del segmento.</p> <p>Laura representa un caso extremo de la mediatriz del segmento AB acercando uno de los puntos al otro.</p>  <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes escribieron “Observo que la mediatriz formada por el segmento AB...”</p>
Interpretación	<p>Logramos identificar que en la interacción sí hacen alusión a las condiciones iniciales que se les solicitaba. Sin embargo, solamente en la plantilla discursiva, las estudiantes escriben la condición inicial, quizás porque se encuentran más familiarizadas con el formato entregado. En el esquema argumentativo, las estudiantes escriben que “la condición de las rectas exploradas corresponde a que la mediatriz del segmento MN es perpendicular” haciendo referencia a lo que exploraron y descubrieron en GeoGebra a excepción de identificar lo solicitado a pesar de haberlo escrito bien en la plantilla.</p>
<p>Propiedad descubierta: <i>La mediatriz m es perpendicular al segmento AB y, la intersección entre la recta m y el segmento AB, es el punto medio de AB.</i></p>	

<p>Evidencias</p>	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [6] Laura dice: <i>Miren como vamos, m va a ser perpendicular a ese segmento en estos casos.</i> En [10] Laura arrastra el punto B cerca al punto A y dice que para ese caso se cumple en que m es perpendicular a AB. En [12] Laura responde a la pregunta ¿qué propiedad cumple la mediatriz?: <i>Ser perpendicular al segmento AB.</i></p> <p>En [14-21] Laura mide uno de los ángulos que hay entre la recta m y el segmento AB para corroborar que la mediatriz del segmento AB y el segmento son perpendiculares.</p> <p>Cuestionario: “Siempre permanece perpendicular a AB y equidistante a A y a B”</p> <p>Plantilla discursiva: “...cumple que es perpendicular al segmento AB”</p> <p>Esquema argumentativo: En condición de las rectas exploradas escribieron “la mediatriz es perpendicular a MN”</p>
<p>Interpretación</p>	<p>Las estudiantes identifican que la mediatriz es la recta perpendicular al segmento AB. A través de la exploración de los puntos en GeoGebra, consolidan la idea de que la mediatriz es perpendicular al segmento. Aunque en el esquema argumentativo mencionan erróneamente el segmento MN en lugar de AB, este error parece ser más un error en la escritura del mismo y lo escriben en el “caso no explorado” más no en “propiedad descubierta” quizás por el cambio de formato y porque aún no identifican las diferencias entre las tres partes que conforman el dato.</p>
<p>Aserción: <i>la mediatriz del segmento MN es perpendicular al segmento y/o la intersección entre el segmento MN y su mediatriz es el punto medio de MN</i></p>	
<p>Evidencias</p>	<p>Cuestionario: Las estudiantes en el ítem 3 escriben: “Sí, ya que una cruz se confirma de dos segmentos perpendiculares”</p> <p>Plantilla discursiva: “Afirmo que la mediatriz de un segmento MN, cumple que <i>es perpendicular al segmento MN</i>”</p> <p>Esquema argumentativo: En el tercer cuadro responden <i>la mediatriz pasa de la misma manera a MN</i> y en el cuadro de propiedad descubierta las estudiantes escriben <i>forman 4 ángulos de 90°.</i></p>
<p>Interpretación</p>	<p>En este caso, las estudiantes para identificar las propiedades geométricas de la mediatriz del segmento MN, exhiben una interpretación clara sobre la relación de perpendicularidad entre la mediatriz y el segmento. Identifican que se forman cuatro ángulos rectos en la intersección.</p>

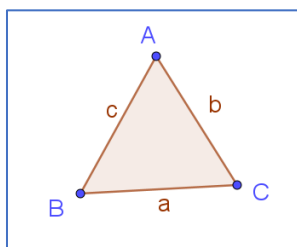
Patrón de generalización: <i>Si una recta es la mediatriz de un segmento, entonces la recta es perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento.</i>	
Evidencias	Cuestionario: Las estudiantes escriben <i>la mediatriz y el segmento van a quedar perpendiculares formando ángulos de 90°.</i>
Interpretación	En este caso, las estudiantes no identifican el patrón de generalización. En la plantilla discursiva escriben “esto pasa porque <i>la mediatriz es el punto medio del segmento MN</i> ”, haciendo alusión a la definición de mediatriz. En el esquema argumentativo escriben <i>al hacer la representación gráfica no puede ver esta condición</i> , evidenciando que el esquema no fue bien diligenciado para ellas. Sin embargo, en el cuestionario, sí distinguen las propiedades relacionadas a pesar de no haber escrito la expresión de forma condicional.

4.3. Tarea 3. Intersección de mediatrices de un triángulo

4.3.1. Episodio No. 6 – G2 (Sofia, Juliana, Miguel)

4.3.1.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

Miguel lee la primera parte del enunciado y empieza a construir el triángulo ABC utilizando la opción ‘polígono’. Juliana le pregunta si hay que construir un triángulo normal y Miguel responde que simplemente es “hacer el triángulo” y construye el triángulo ABC dando clic tres veces a la pantalla.

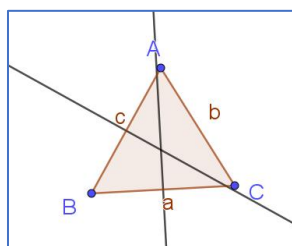


Miguel sigue leyendo el enunciado y dice que ahora deben construir las mediatrices de los segmentos AB , BC , y AC . Surge la siguiente conversación:

1.	Sofia:	<i>¿Cómo es que se hace eso?</i>
2.	Juliana:	<i>(Le dice a Miguel) La mediatriz creo que estaba en la recta.</i>

3.	Miguel:	(Despliega el ícono 'recta') <i>No, no está.</i>
4.	Juliana:	<i>Creo que es en la siguiente</i> (hace referencia al ícono que se encuentra a la derecha de la opción 'recta'. Miguel despliega el ícono 'rectas perpendiculares'). <i>Le das clic al punto A y luego al punto B, creo.</i> (Miguel utiliza la opción mediatriz para construir las mediatrices de los segmentos solicitados).
5.	Miguel:	<i>Sí, ahora sí a construir las otras</i> (mediatrices).

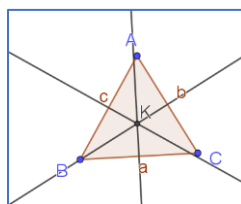
Sofía expresa que puede que haya quedado mal la construcción porque, aunque sí es un triángulo, parece "torcido". Luego, ella toma el mouse y arrastra el punto B hasta que visualmente el triángulo sea equilátero y construye la mediatriz del segmento AC .



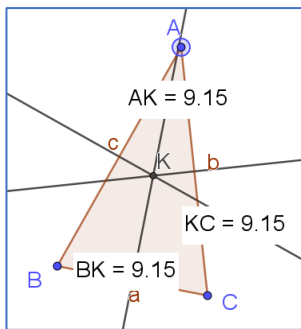
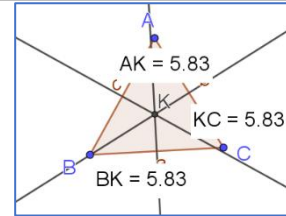
Después, Miguel lee la segunda parte del enunciado en el que se pide utilizar la opción 'intersección'. Sofía se apropia del computador y despliega los íconos de 'recta perpendicular', 'circunferencia' y 'ángulo', pero no encuentra la opción, Juliana le dice que utilice la opción 'punto'. Cuando despliegan el ícono en el que aparece 'punto', se percatan que existe la opción 'intersección' y la utilizan para hallar la intersección de las mediatrices construidas de la siguiente manera:

6.	Sofía:	<i>Listo, ahora ¿qué tengo que hacer?</i>
7.	Miguel:	<i>Dale clic en las tres rectas</i> (señala cada una de las mediatrices. Sofía le da clic en dos rectas y se determina un punto de intersección). <i>Mm no sé, dejémoslo así y ahorita lo renombramos.</i>

Sofía da clic derecho y renombra el punto de intersección como K . Luego, intenta arrastrar el punto K , pero no puede. Miguel lee la última parte del enunciado en la que se pide explorar la situación hasta descubrir alguna propiedad que cumpla la intersección de las mediatrices correspondiente al punto K .



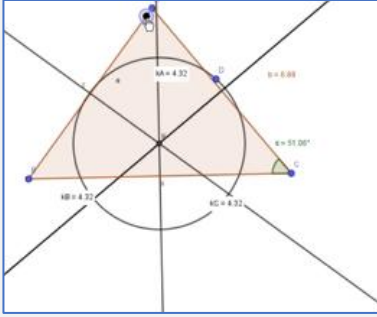
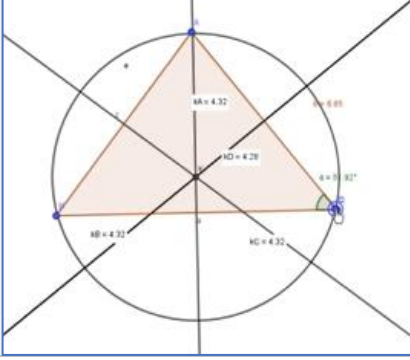
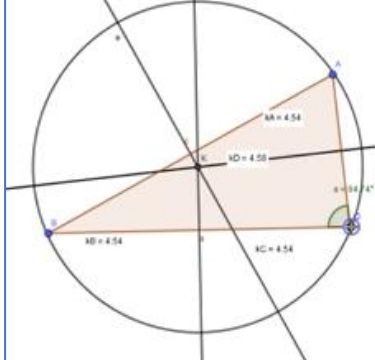
6.	Sofia:	<i>O sea que están... No sé, de pronto... Que está a la misma distancia de cada punto del triángulo, o sea que K está a la misma distancia A, B y C.</i>
7.	Miguel:	<i>Pero ¿cómo sabes? ¿y si los medimos?</i>
8.	Sofia:	<i>Pues parece, pero tienes razón, es mejor revisar entonces.</i> (Despliega algunos íconos hasta encontrar la opción ‘distancia’ y mide las distancias de K a C, de A a K y de K a B)
9.	Miguel:	<i>¡Ay sí! Sí, si es verdad. Tienes razón</i>
10.	Juliana:	<i>¿K es equidistante entonces?</i>
11.	Miguel:	(Completa la oración) <i>a los puntos A, B, C.</i> (Juliana escribe en el ítem 2 del cuestionario).



La profesora se acerca al grupo y pregunta por cómo realizaron la exploración. Miguel contesta “lo medimos”. La profesora les dice que solo han revisado que cumple en un triángulo que parece ser muy particular y que es necesario que sigan explorando. Sofia arrastra el punto A de manera vertical y Miguel afirma que también

se cumple. La profesora les dice que revisen otros casos.

12.	Sofia:	Pues hagamos uno irregular (nuevamente arrastra el punto A)	
13.	Juliana:	<i>Ese es un [triángulo] escaleno, y sí equidista.</i>	
14.	Sofía:	<i>Bueno, entonces revisemos otros triángulos. ¿Cuáles más hay?</i>	
15.	Miguel:	<i>Muchos</i> (Sofia arrastra los puntos A, B, C en diferentes posiciones)	

16.	Juliana:	<i>Ahí estaríamos comprobando la propiedad que descubrimos.</i>
17.	Miguel:	<i>Son diferentes, pero siempre se cumple la equidistancia.</i>
18.	Sofía:	<p><i>Sí, o sea, no importa el tipo de triángulo, los puntos [A, B, C] van a seguir siendo equidistantes a ese punto [K] (Construye una circunferencia con centro en K y radio KD).</i></p> 
19.	Miguel:	<i>¿Esa circunferencia qué?</i>
20.	Sofía:	<i>Solo estaba probando.</i>
21.	Miguel:	<i>Pero ese punto no sirve porque ese punto [D] sale adicional</i>
22.	Sofía:	<p><i>Sí, pero como hemos construido esto en otros días... (refiriéndose a la opción 'circunferencia'). Ah ya sé, espera (arrastra el punto D hasta que quede en la misma posición al punto C)</i></p> 
23.	Juliana:	<p><i>Miren, los puntos del triángulo [A, B, C]... No, pero arrastren los puntos otra vez (Sofía arrastra los puntos A y B, luego vuelve a sobre poner el punto D en el punto C)</i></p> <p><i>Entonces miren que K es el centro de la circunferencia, ¿no?</i></p> 
24.	Sofía:	<i>Pero es lo mismo porque equidistan.</i>
25.	Miguel:	<i>Bueno, dejémoslo así (entregan el cuestionario).</i>

4.3.1.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

En la Imagen 4.17 mostramos las respuestas que dieron las estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.17. Respuestas al cuestionario del Grupo 2-Tarea 3

2. Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices:

1) El punto K es equidistante a los puntos A, B, C .

3. Elaboren un argumento exponiendo lo que descubrieron junto con la justificación que les permite afirmar que la propiedad anterior es cierta.

No importa el tipo de triángulo que se utilice, (equilátero, isóceles o escaleno) siempre va a equidistar de los puntos A, B, C .

4.3.1.3. Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.18 se encuentra la respuesta a la plantilla discursiva que los estudiantes completaron después de haber entregado el cuestionario.

Imagen 4.18. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 2-Tarea 3

Completen los siguientes espacios:

Dato:

- Condición inicial de los casos explorados: Construir un triángulo (A, B, C) y sus mediatrices f_{AB} , BC y CA .
- Propiedad descubierta de los casos explorados: La equidistancia entre el punto medio de las mediatrices (K) y los vértices del triángulo ABC .
- Mencionar un caso no explorado: Un triángulo con puntos G, H, L con centro de mediatriz S .

Aserción:

Afirmación del caso no explorado: La equidistancia entre los puntos G, H, L con respecto a S .

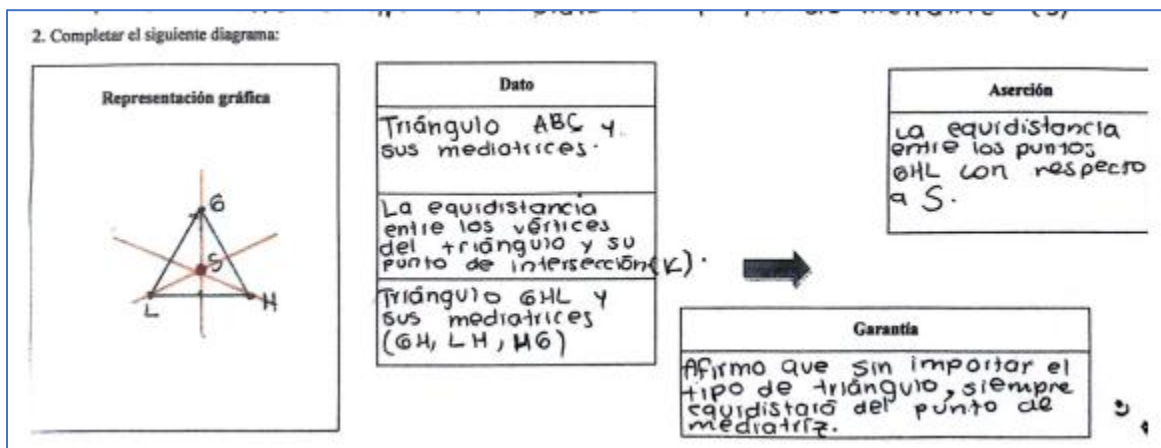
Garantía:

Puedo afirmarlo porque sin importar el tipo de triángulo formado por los puntos G, H, L siempre equidistara del punto de mediatriz (S).

4.3.1.4. Respuestas al esquema argumentativo para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.19 se puede ver la respuesta al esquema completado por los estudiantes, el cual debían realizar luego de haber escrito y completado la plantilla discursiva.

Imagen 4.19. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 2-Tarea 3



4.3.1.5. Análisis del episodio 6

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	<p>En [2] Juliana le sugiere a Miguel que la opción 'mediatriz' se encuentra en el ícono 'recta'.</p> <p>En [4] Juliana le sugiere a Miguel dar clic en el ícono 'rectas perpendiculares' para utilizar la opción 'mediatriz'. Además, le indica que, para construir la mediatriz, le debe dar clic a dos de los puntos del triángulo, para este caso, los puntos A y B.</p> <p>En [5] Miguel construye las mediatrices que hacen falta.</p>	<p>Mediatriz. Juliana le da instrucciones a Miguel sobre cómo construir las mediatrices; probablemente las conocía porque fue utilizada para solucionar la tarea de la sesión anterior.</p> <p>Miguel reconoce la ubicación de la opción 'mediatriz' y los objetos que solicita GeoGebra, para construir las mediatrices de los segmentos BC y AC.</p>

	<p>Entre las intervenciones [5] y [6] Sofía busca la opción de intersección en diferentes íconos como ‘recta perpendicular’, ‘circunferencia’ y ‘ángulo’. Luego Juliana sugiere revisar en el ícono ‘punto’, Sofía encuentra la opción ‘punto de intersección’.</p> <p>En [6-7] Miguel le dice a Sofía que, de dar clic en las tres mediatrices construidas, pero se percatan que con dos rectas se determina el punto solicitado. Después, Sofía intenta arrastrar el punto de intersección.</p>	<p>Intersección de objetos. Los estudiantes reconocen que la opción ‘punto de intersección’ es diferente a la opción ‘punto’ y se encuentra en el ícono ‘punto’.</p> <p>Además, identifican que, para hallar el punto de intersección de las mediatrices, como lo solicita la tarea, es suficiente con dar clic en dos de las rectas.</p> <p>Los estudiantes identifican que el punto de intersección no es posible moverlo.</p>
	<p>Entre las intervenciones [5] y [6], Sofía intenta arrastrar al punto K.</p> <p>Entre las intervenciones [11] y [12], Sofía arrastra el punto A de manera vertical.</p> <p>En [15] Sofía arrastra los vértices en diferentes posiciones.</p> <p>En [22] Sofía arrastra el punto D hasta que quede en la misma posición al punto C.</p>	<p>Arrastre. En la tarea se evidencia que los estudiantes volvieron rutina el uso del arrastre libre. Sofía arrastra los vértices del triángulo en diferentes ocasiones para comprobar que la propiedad descubierta se cumpla. También utiliza el arrastre para sobre poner dos puntos y así identificar otra posible propiedad que dé solución a la tarea.</p> <p>Sin embargo, aún no identifican que existen otro tipo de arrastre en el que un objeto depende de otros previamente construidos.</p>

<p>Instrumentación</p>	<p>En [6] Sofía dice: <i>K está a la misma distancia A, B y C.</i></p> <p>En [8] Sofía despliega algunos íconos hasta encontrar la opción ‘distancia’ y mide las distancias de <i>K</i> a <i>C</i>, de <i>A</i> a <i>K</i> y de <i>K</i> a <i>B</i>.</p> <p>En [9] Miguel indica que la afirmación de Sofía es cierta.</p>	<p><i>Uso de la opción ‘medida de distancia’ para corroborar la propiedad de un objeto.</i> Sofía identifica una posible propiedad que cumple la intersección de las mediatrices, pero al Miguel no estar tan seguro, Sofía utiliza la opción ‘medida de distancia’ para corrobora su afirmación, midiendo las distancias del punto <i>K</i> a los vértices del triángulo. Así, reconocen que <i>K</i> equidista de los puntos <i>A</i>, <i>B</i>, <i>C</i>.</p>
	<p>En [18] Sofía Construye una circunferencia con centro en <i>K</i> y radio <i>KD</i>.</p> <p>En [19] y [21] Miguel pregunta por la construcción de la circunferencia y menciona que no sirve la construcción porque “salse un punto adicional”.</p> <p>En [22] Sofía arrastra el punto <i>D</i> hasta que quede en la misma posición de uno de los vértices.</p> <p>En [23] Juliana dice “Entonces miren que <i>K</i> es el centro de la circunferencia, ¿no?”</p>	<p><i>Uso de la opción ‘circunferencia’ con centro en K para identificar la relación de este punto con los vértices del triángulo.</i> Sofía construye una circunferencia centrada en <i>K</i> y ajusta su radio, por medio del arrastre, para que pase por los vértices del triángulo, visualizando que los puntos <i>A</i>, <i>B</i>, <i>C</i> pertenecen a la misma circunferencia. Sin embargo, los demás integrantes no dejaron planteada la idea en el cuestionario.</p>

Acerca del argumento inductivo

Condiciones iniciales: Triángulo ABC ; mediatrices de AB , BC , AC ; punto de intersección de las mediatrices K .	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [1-5], los estudiantes construyen el triángulo ABC y las mediatrices de sus lados, siguiendo las instrucciones iniciales del cuestionario.</p> <p>Luego, en [6 y 7] determinan el punto de intersección de estas mediatrices y lo renombran como punto K.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Los estudiantes escriben: “Construir un triángulo (A, B, C) y sus mediatrices AB, BC, CA”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>En el cuadro 1 del “Dato” escriben “Triángulo ABC y sus mediatrices”</p>
Interpretación	<p>Los estudiantes identifican dos de las tres condiciones iniciales y establecen la construcción requerida del triángulo y sus mediatrices. Esto nos sugiere que identifican los elementos necesarios para avanzar en la exploración, a excepción de que no escriben que el punto de intersección de las mediatrices es parte de la condición inicial, quizás porque fue la última condición establecida antes de empezar a explorar.</p>
Propiedad descubierta: <i>El punto K, el cual es la intersección de las mediatrices del triángulo ABC, equidista de los vértices del triángulo.</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [6] Sofía dice: “...o sea que K está a la misma distancia A, B y C”.</p> <p>En las intervenciones [8-11] Sofía comprueba con la opción ‘distancia’ que el punto de intersección equidista de los vértices del triángulo.</p> <p>Cuestionario: “El punto K es equidistante a los puntos A, B, C”.</p> <p>Plantilla discursiva: “La equidistancia entre el punto medio de las mediatrices K y los vértices del triángulo ABC”</p> <p>Esquema argumentativo: Los estudiantes escriben en el segundo cuadro: “La equidistancia entre los vértices del triángulo y su intersección K”</p>

Interpretación	Los estudiantes identifican visualmente la propiedad de equidistancia del punto K en el triángulo ABC . Probablemente por estar mirando un triángulo casi equilátero, la propiedad fue evidente para ellos. Sin embargo, aunque reconocen la propiedad, se limitan a una comprobación inicial sin explorar cómo la propiedad se podría aplicar en otros casos, antes de la intervención de la profesora. Esto les restringe su capacidad de exploración.
Caso no explorado: Triángulo GHL ; mediatrices de los segmentos del triángulo; punto de intersección S de las mediatrices.	
Evidencias	<p>Plantilla discursiva: Un triángulo con puntos GHL con centro de mediatrices en S.</p> <p>Esquema argumentativo: En el cuadro 3 del “Dato” escriben “Triángulo GHL y sus mediatrices GH, LH, HG”.</p>
Interpretación	En la plantilla discursiva, los estudiantes intentan hacer alusión a las tres propiedades que debe cumplir el caso no explorado: mencionan un triángulo distinto a los explorados y el punto de intersección de las mediatrices de ese triángulo. Sin embargo, en el esquema argumentativo, no escriben como condición del caso no explorado, la construcción del punto de intersección de las mediatrices, quizás porque ya lo dan por hecho.
Aserción: <i>El punto S equidista de los puntos G, H, L.</i>	
Evidencias	<p>Plantilla discursiva: “La equidistancia entre los puntos GHL con respecto a S”.</p> <p>Esquema argumentativo: “La equidistancia entre los puntos GHL con respecto a S”. Además, realizan la siguiente representación gráfica:</p> <div data-bbox="812 1297 1036 1507" style="text-align: center;"> </div>
Interpretación	Como se puede evidenciar, los estudiantes escriben lo mismo tanto en la plantilla como en el esquema, identificando correctamente la aserción y representando un triángulo, las mediatrices y el punto de intersección al que se referían.
Patrón de generalización	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [17] Miguel dice “Son diferentes, pero siempre se cumple la equidistancia.”</p>

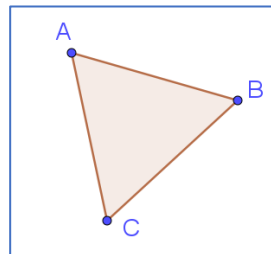
	<p>En [18] Sofia dice “Sí, o sea, no importa el tipo de triángulo, los puntos van a seguir siendo equidistantes a ese punto”.</p> <p>Cuestionario: En el ítem 3 los estudiantes escriben “No importa el tipo de triángulo que se utilice, (equilátero, isósceles o escaleno) siempre va a equidistar de los puntos A, B, C”</p> <p>Esquema argumentativo: Afirmando que, sin importar el tipo de triángulo, siempre equidistará del punto de mediatriz.</p>
Interpretación	<p>Los estudiantes logran identificar el patrón de generalización. Aunque no lo escriben adecuadamente porque aluden a un triángulo específico. Sin embargo, cabe mencionar que, en la plantilla discursiva los estudiantes escriben “Sin importar el tipo de triángulo formado por los puntos GHL siempre equidistará del punto de mediatriz S” haciendo referencia al caso particular. El uso de la expresión “sin importar el tipo de triángulo” y palabra “siempre” son indicios de generalización a cualquier triángulo, aun cuando sigan llamándolo GHL.</p>

4.3.2. Episodio No. 7 – G4 (Laura, Sara, Mariana)

4.3.2.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

Laura abre el programa GeoGebra, luego empieza a ocultar los ejes y la cuadrícula. Después, construye los puntos A, B, C con la opción “punto” y los segmentos AB, BC, AC con la opción ‘segmento’.

Laura les dice a las compañeras que ahora deben “hacer las mediatrices de los segmentos”; sin embargo, Mariana no está de acuerdo y le dice a Laura que elimine la construcción realizada para que utilice la opción “polígono”. Laura le responde que “el otro triángulo va a quedar igual”. De igual forma, Laura elimina la construcción y vuelve a construir el triángulo con la herramienta “polígono”)



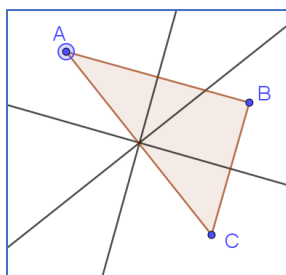
Luego Laura busca la opción mediatriz en el despliegue de los íconos de ‘segmento’ y de ‘recta paralela’. Ella utiliza la opción ‘mediatriz’ para hallar las mediatrices de los tres segmentos solicitados. Sara le dice a Laura que ahora deben “hallar el punto de intersección”. Surge la siguiente conversación:

1.	Laura:	(Determina el punto de intersección con la opción 'intersección') <i>¿y qué toca hacer con el punto de intersección?</i> (renombra el punto de intersección como K)
2.	Sara:	<i>Explorar las representaciones</i> (el programa aún sigue en la opción 'intersección' y Laura intenta mover el punto B , pero se da cuenta que no está en la opción adecuada y la cambia por la opción 'mover').
3.	Laura:	<i>¿Y si movemos este?</i> (refiriéndose al punto K , intersección de las mediatrices) ... <i>¡No se puede mover!</i> (Vuelve a intentar mover el punto K) ... <i>Es que quiero que este punto [K] quede de noventa grados</i> (sigue sin poder mover el punto a pesar de estar con la opción mover).

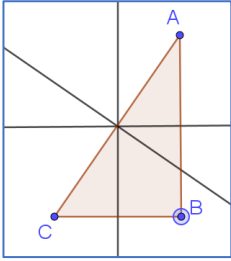
La profesora va donde está el grupo y les preguntan por lo que han hecho.

4.	Laura:	Profe es que no sé cómo moverlo.
5.	Zaira:	<i>¿El punto K se puede mover?</i>
6.	Laura:	<i>Ya lo intenté y no.</i>
7.	Zaira:	<i>¿Por qué creen que el punto K no se puede mover?</i>
8.	Sara:	<i>Porque si es... O sea, porque la mediatriz no se podría mover.</i>
9.	Zaira:	<i>Exacto, la vez pasada vimos que la mediatriz es una recta que depende de ¿qué puntos?</i>
10.	Mariana:	<i>Pues de los extremos, ¿no?</i>
11.	Laura:	<i>Entonces sería mover A, B o C para que se pueda mover, ¡pero es que no se mueve!</i>

La profesora da clic en el punto A y lo arrastra. Luego, se va a revisar otro grupo.

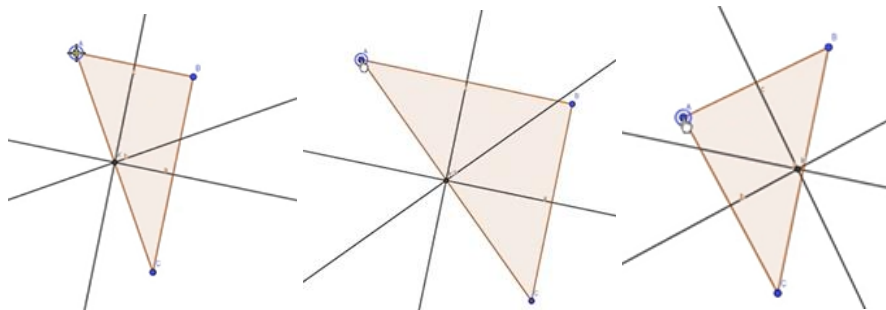


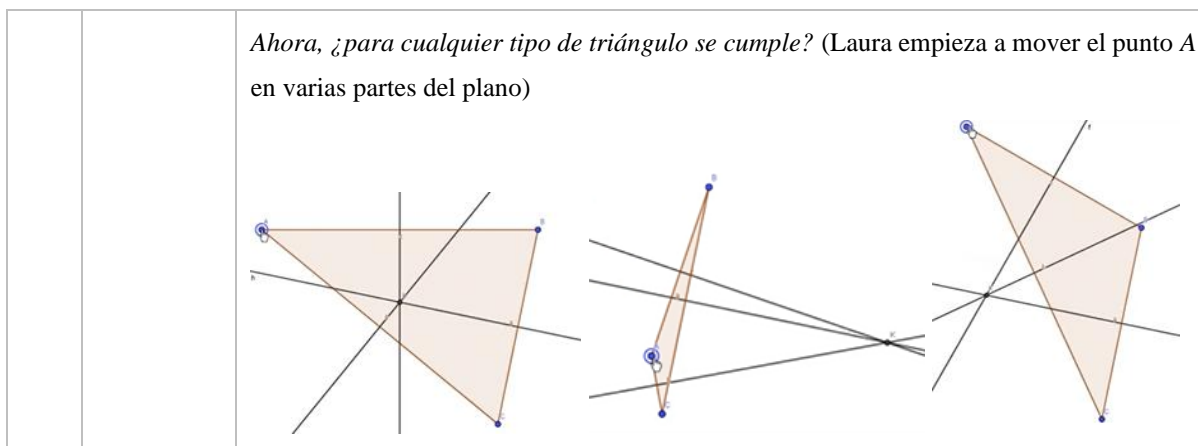
12.	Laura:	<i>jajaja ¡no puede ser!</i>
13.	Mariana:	<i>Miren que ahí quedó como con un ángulo recto.</i>
14.	Laura:	<i>A ver, hagamos un ángulo de noventa grados</i>

		
15.	Sara:	<i>Pero cómo sabes que es rectángulo (Laura no le presta atención al comentario).</i>
16.	Laura:	<i>Miren, cuando es un triángulo rectángulo, el punto de intersección va a ser la mediatriz de BC.</i>
17.	Mariana:	<i>¿Cómo así?</i>
18.	Laura:	<i>Sí, es que el punto de intersección va a pasar por el punto de intersección entre la mediatriz formada por el segmento opuesto al ángulo recto... ¿Si entendiste? No, es que, si no, no se entiende.</i>
19.	Sara:	<i>Entonces... Cuando es un triángulo rectángulo, interseca con el segmento opuesto al ángulo recto ¿sí?</i>

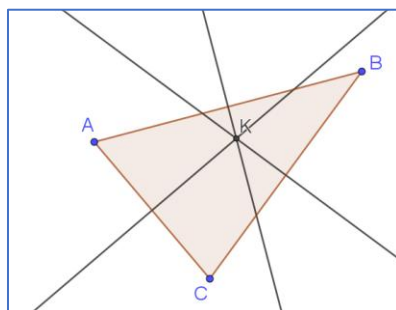
La profesora llega y les pregunta por lo que han hecho. Además, les dice que le pongan un ejemplo en GeoGebra. Laura mueve el punto A , hasta llegar a que el punto K sea el punto medio del segmento AC .

20.	Laura:	<i>Pasa por el punto de intersección entre la mediatriz del segmento opuesto del ángulo recto.</i>
21.	Zaira:	<i>Y ¿cuál es el punto de intersección de las mediatrices? lo vimos la clase pasada, ese punto es particular... ¿Cuáles son las dos propiedades de la mediatriz?</i>
22.	Sara	<i>Ah pues que equidistan.</i>
23.	Laura	<i>¿Eso quiere decir entonces que es el punto medio?</i>
24.	Zaira:	<i>Listo, ese puede ser una.</i>



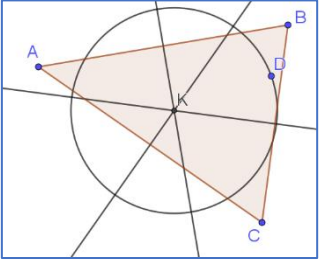


La profesora se va a supervisar a otro grupo y Laura explora un caso extremo, arrastrando el punto B hacia la esquina derecha de la pantalla y luego los tres puntos en diferentes direcciones.



Mariana lee el segundo ítem del cuestionario “exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices”. Sara dice “que cambia cada que movemos algún punto del triángulo” pero Laura le indica que no se puede decir porque ya no es un triángulo rectángulo, sino cualquier triángulo.

25.	Sara:	<i>Pues es el punto de intersección de las mediatrices...</i>
26.	Mariana:	<i>Pero es que tienes que buscar es una característica de la intersección de las mediatrices, no decir qué es porque eso ya se sabe.</i>
27.	Sara:	<i>Es el punto K.</i>
28.	Mariana:	<i>Pues sí, pero ¿la característica en común?</i>
29.	Laura:	<i>Es que ¿qué puede haber en común?... Esperen, esperen... ¡Círculo!</i>
30.	Mariana:	<i>¿No sería el centro?</i>

31.	Laura:	<p><i>Eso, el centro... Estaba pensando en un punto de la circunferencia. (crea la circunferencia con centro en K y radio KD)</i></p>	
32.	Sara:	<p><i>El problema es que, si mueves algún punto del triángulo, se cambia todo y debes volver a arrastrar a [el punto] D.</i></p>	
33.	Mariana:	<p><i>Pero esa puede ser... Haciendo una circunferencia donde K sea el centro, va a unir todos los puntos del triángulo.</i></p>	
34.	Laura:	<p><i>¿No queda mejor que los puntos son equidistantes al punto K? (Sara escribe la respuesta del segundo ítem del cuestionario, mientras Laura sigue explorando casos).</i></p> <p><i>Pues es que sabemos que cualquier tipo de triángulo que hagamos, siempre va a equidistar.</i></p>	
35.	Mariana:	<p><i>Bueno, esa puede ser una y la otra puede ser que los puntos pertenecen a la misma circunferencia con centro en K.</i></p>	
36.	Sara:	<p><i>Pues eso pongámoslo en lo que sigue, porque dice que toca escribir un argumento. (Mariana le dice a Sara lo que debe escribir en el ítem 3 del cuestionario, Figura 4.3-4). Aparte deberíamos poner lo que vimos del triángulo rectángulo.</i></p>	
37.	Laura:	<p><i>(Lee lo que escribió Sara) Listo, sí. Me parece.</i></p>	

4.3.2.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

En la Imagen 4.20 mostramos las respuestas que dieron las estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.20. *Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 3*

2. Explore la representación hasta descubrir alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices:

En todos los triángulos, los puntos equidistan de K y en el rectángulo, K es el punto medio...

3. Elaboren un argumento exponiendo lo que descubrieron junto con la justificación que les permite afirmar que la propiedad anterior es cierta.

El punto que es la intersección de las mediatrices del triángulo, también es el centro de una circunferencia que une los puntos del triángulo.

4.3.2.3. *Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos*

En la Imagen 4.21 presentamos las respuestas a la plantilla discursiva que entregaron las estudiantes.

Imagen 4.21. *Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 3*

1. Completen los siguientes espacios:

Dato:

- Condición inicial de los casos explorados: existe un triángulo ABC , con las mediatrices de los segmentos AB , BC , AC .
- Propiedad descubierta de los casos explorados: los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento.
- Mencionar un caso no explorado: construir un triángulo xyz , construir las mediatrices de los segmentos xy y yz , hallar el punto de intersección de las mediatrices, llamarlo m .

Aserción:

Afirmación del caso no explorado: la unión de las mediatrices forman el punto centro m de una circunferencia

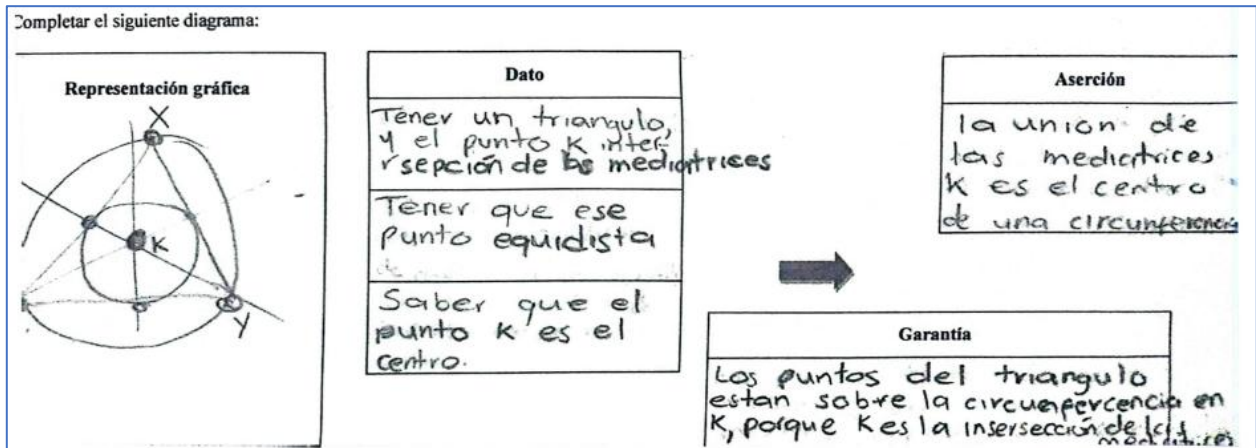
Garantía:

Puedo afirmarlo porque al utilizar los instrumentos de geometría (circunferencia) los puntos están en esta misma,

4.3.2.4. Respuestas al esquema argumentativo para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.22 se evidencia la respuesta al esquema argumentativo completado por las estudiantes

Imagen 4.22. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 3



4.3.2.5. Análisis del episodio 7

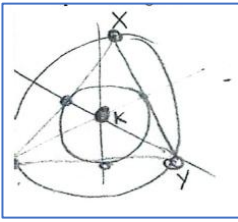
Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	<p>Laura al inicio construye los puntos A, B, y C usando la opción "punto" y une los segmentos AB, BC, y CA con la opción "segmento" para realizar el triángulo ABC.</p> <p>Luego, por sugerencia de Mariana, Laura elimina la construcción y construye el triángulo ABC con la opción 'polígono'.</p>	<p>Polígono. Las estudiantes aprenden a construir polígonos con un determinado número de lados. La dificultad inicial para elegir la herramienta correcta muestra un proceso de instrumentalización donde los estudiantes dependen de la experimentación y el apoyo de sus compañeros para entender el funcionamiento de GeoGebra.</p>

	<p>En [1] Laura determina el punto de intersección K con la opción ‘intersección’.</p> <p>En [3] Laura intenta mover el punto K con el uso del arrastre, pero el programa está en la opción de ‘intersección’.</p> <p>Luego, se da cuenta que con la opción ‘mover’ pasa igual ya que el punto K sigue sin poder moverse.</p> <p>Entre [4-11] Laura le pide ayuda a la profesora y se da cuenta que el punto K depende de los puntos A, B, C.</p>	<p><i>Puntos fijos versus puntos dependientes.</i> Las estudiantes al inicio quieren mover el punto K, utilizando el ‘arrastre’ con el mismo punto, para poder explorar la situación que solicitaba el problema, sin embargo, no fue posible.</p> <p>Cuando llega la profesora, las estudiantes recuerdan que una situación parecida, pasaba con la mediatriz de un segmento. Luego, identifican que, para que el punto K pueda ser explorado en diferentes posiciones, debían mover los vértices del triángulo ya que dependía de ellos.</p>
<p>Instrumentación</p>	<p>Entre [4-11] Tras construir las mediatrices, las estudiantes determinan el punto de intersección K y tratan de moverlo sin éxito, descubriendo que este depende de los vértices y la disposición de las mediatrices.</p>	<p><i>Uso del arrastre para descubrir una propiedad.</i> Los estudiantes identifican que K es un punto dependiente de las mediatrices del triángulo y no puede moverse libremente.</p>
	<p>En [30] y [31] Laura construye una circunferencia con centro en K y radio KD hasta uno de los vértices, explorando visualmente la equidistancia de K respecto a A, B, y C.</p>	<p><i>Uso de la opción ‘circunferencia’ para identificar la equidistancia de los vértices del triángulo al punto K.</i></p> <p>La construcción de la circunferencia les permite visualizar la propiedad de equidistancia del circuncentro respecto a los vértices.</p>

Acerca del argumento inductivo

Codiciones iniciales: <i>Familias del triángulo ABC, Mediatrices de los segmentos AB, BC, AC y el punto de intersección de las mediatrices, K.</i>	
Evidencias	<p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes escriben, en el segundo renglón: “Existe un triángulo ABC, con las mediatrices de los segmentos AB, BC, AC”.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>En el cuadro 1 del Dato, las estudiantes escriben: “Tener un triángulo y el punto K intersección de las mediatrices”.</p>
Interpretación	<p>Aunque en la interacción se observa que las estudiantes tienen una idea de lo que se debe poner como condición inicial, ellas no lo especifican en los recursos didácticos. Por una parte, en la plantilla discursiva no mencionan el punto K como la intersección de las mediatrices y, por otra parte, en el esquema argumentativo, no describen los triángulos particulares que fueron explorados sino hacen mención a un triángulo general. Asimismo, reconocen que se debe poner el punto de intersección, pero no especifican las mediatrices a las que se refieren.</p>
Propiedad descubierta: <i>El punto K equidista de los vértices del triángulo o los vértices del triángulo ABC están sobre una misma circunferencia con centro en K.</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes</p> <p>Entre las intervenciones [13-19] las estudiantes descubren que, si el triángulo ABC es rectángulo, entonces el punto K pertenece también al segmento opuesto del ángulo recto.</p> <p>Entre [21] y [23], Laura identifica que el punto K es aún más particular, ya que va a ser el punto medio del segmento opuesto al ángulo recto cuando el triángulo es rectángulo.</p> <p>Entre [21] y [28], Mariana le explica a Sara que la característica o propiedad descubierta debe ser algo nuevo y no una propiedad que ya está establecida desde el inicio.</p> <p>Entre [31] y [35], las estudiantes descubren que en diferentes tipos de triángulos representados por el triángulo ABC, se cumple que el punto K equidista de los tres vértices porque pertenecen a una misma circunferencia con centro en K.</p>

	<p>Cuestionario:</p> <p>En el ítem 3 las estudiantes escriben: “En todos los triángulos, los puntos equidistan de K y en el [triángulo] rectángulo, K es el punto medio del lado opuesto del ángulo que es recto”.</p>
<p>Interpretación</p>	<p>En este caso, ni en la plantilla ni en el esquema las estudiantes escribieron la propiedad descubierta como parte del dato. Identifican la propiedad descubierta como una propiedad a la que habían llegado en clases anteriores. Por otro lado, no completan la oración y solamente escriben “tener que ese punto equidista” probablemente refiriéndose a que el punto K equidista de los vértices del triángulo (sin especificar que corresponde a los triángulos ABC explorados por medio del arrastre).</p> <p>Sin embargo, en la interacción y en el cuestionario sí se logra identificar que las estudiantes descubren tres propiedades que cumple el punto K respecto al triángulo ABC; esto gracias a la gran variedad de casos explorados en GeoGebra y a la pregunta específica solicitada en el cuestionario. Cabe mencionar que las estudiantes iniciaron descubriendo una propiedad en una familia de casos específicos (triángulos rectángulos) resaltando que, a pesar de ser un triángulo particular, realizaron diferentes construcciones para verificar que la propiedad sí se cumplía en esa familia de triángulos.</p>
<p>Caso no explorado: <i>Triángulo XYZ, mediatrices de los segmentos XY, YZ, XZ y punto M intersección de las mediatrices.</i></p>	
<p>Evidencias</p>	<p>Plantilla discursiva:</p> <p>Construir un triángulo XYZ, construir las mediatrices de los segmentos XY, YZ, XZ, hallar el punto de intersección de las mediatrices, llamarlo M.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>En la representación gráfica, las estudiantes realizaron lo siguiente:</p> <div style="text-align: center;">  </div>

Interpretación	Las estudiantes aluden un caso no explorado en la plantilla discursiva. Hacen referencia a las tres condiciones que deben tener presentes. Sin embargo, en el esquema argumentativo, no escriben específicamente el caso no explorado sino lo dejan escrito en términos generales, quizás porque los tres cuadros del esquema en cuanto al dato no mencionan lo que deben escribir en cada uno de ellos.
Aserción: <i>El punto M es el centro de la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo XYZ</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [30] Mariana dice “¿No sería el centro?”</p> <p>En [33] Mariana dice “... Haciendo una circunferencia donde K sea el centro, va a unir todos los puntos del triángulo.”</p> <p>En [34] Laura dice “¿No queda mejor que los puntos son equidistantes al punto K?”</p> <p>Cuestionario:</p> <p>“En todos los triángulos, los puntos equidistan de K y en el [triángulo] rectángulo, K es el punto medio del lado opuesto del ángulo que es recto”.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>Las estudiantes escriben: “la unión de las mediatrices forma el punto centro M de una circunferencia”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>Las estudiantes escriben: “la unión de las mediatrices K es el centro de una circunferencia”</p>
Interpretación	<p>Las estudiantes escriben diferentes aserciones en los recursos didácticos, probablemente porque descubrieron varias propiedades que cumplía la intersección de las mediatrices del triángulo. En el cuestionario mencionan las dos primeras propiedades descubiertas: una, respecto a la familia de triángulos rectángulos; y la otra, referente a que el punto equidista de los vértices del triángulo.</p> <p>En la plantilla y el esquema, las estudiantes mencionan, de forma parcial, la tercera propiedad, correspondiente a que el punto K es el centro de una circunferencia que contiene a los vértices del triángulo.</p>
<p>Patrón de generalización: <i>Dado un triángulo. Si la intersección de sus mediatrices es un punto K, entonces:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>K es el centro de la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo.</i> • <i>K equidista de los vértices del triángulo.</i> 	

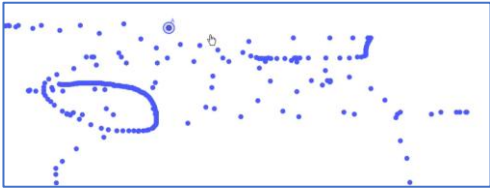
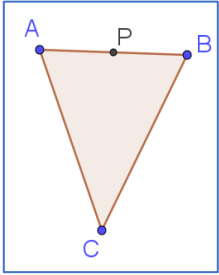
<p>Evidencias</p>	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [33] Mariana dice “Pero esa puede ser... Haciendo una circunferencia donde K sea el centro, va a unir todos los puntos del triángulo”.</p> <hr/> <p>Cuestionario:</p> <p>“El punto que es la intersección de las mediatrices del triángulo, también es el centro de una circunferencia que une los puntos del triángulo”.</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>“Los puntos del triángulo están sobre la circunferencia en K porque K es la intersección de las mediatrices”</p>
<p>Interpretación</p>	<p>Las estudiantes reconocen el patrón de generalización, pero no lo escriben completo. Es interesante lo que escriben en el cuestionario, ya que, aunque en el ítem 3, se les solicitaba escribir un posible argumento con su respectiva justificación, ellas escribieron lo que podría ser un patrón sin necesidad de escribirlo de forma condicional. Además, en el esquema argumentativo, las estudiantes sí intentan escribir el patrón de forma condicional debido a que lo escriben de forma general y utilizan la palabra “porque” para relacionar la intersección de las mediatrices con los vértices del triángulo y la circunferencia con centro en K.</p> <p>Sin embargo, lo escrito en la plantilla discursiva hace alusión a la circunferencia construida en GeoGebra, quizás porque relacionan el “puedo afirmarlo porque” con las exploraciones y el descubrimiento hecho con el uso de GeoGebra.</p>

4.4. Tarea 4. Triángulos separables

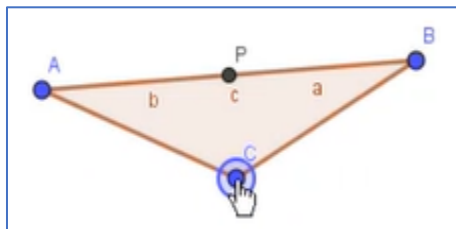
4.4.1. Episodio No. 8 – G4 (Laura, Sara, Mariana)

4.4.1.1. Descripción de la interacción de los estudiantes al resolver el problema

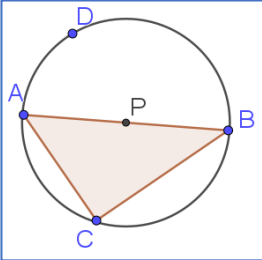
La profesora les recuerda a los estudiantes qué acciones realizar para que solo aparezcan dos decimales en las etiquetas de la opción ‘distancia’ y ‘ángulo’. Laura pregunta “¿qué influye?” y la profesora responde “Por si quieren hacer medidas y que no se vean todos los decimales posibles”. Luego, la profesora les comenta a todos los estudiantes cómo se utiliza la opción “rastros” y cuál es su función.

1.	Zaira:	<p>Entonces por favor den clic derecho en cualquier punto y le dan en la opción rastro. (Laura construye un punto A y da clic derecho en la opción rastro). Listo, ahora muevan ese punto. (Laura mueve el punto A y las estudiantes se asombran)</p>  <p>Puede que necesiten varios puntos que cumplan la propiedad que ustedes descubran. Ahora, tengan presente que los puntos A y B son fijos, no los pueden mover cuando hagan la exploración.</p>
2.	Sara:	<p>Okey, dice que debes construir el triángulo ABC y el punto medio del segmento AB (Laura utiliza la opción 'polígono' para construir el triángulo solicitado y luego, utiliza la opción de 'mediatriz' para hacer la mediatriz del segmento AB, pero luego lo elimina).</p>
3.	Laura:	<p>¿En dónde es el punto?</p>
4.	Sara:	<p>El punto medio del segmento.</p>
5.	Laura:	<p>O sea, le saco la mediatriz y solamente pongo un punto ahí y después quito la mediatriz (construye la mediatriz del segmento AB y luego al utilizar la opción 'intersección' para hallar el punto de intersección entre el segmento AB y su mediatriz, se percató de la opción 'medio o centro' que estaba en el mismo ícono de 'punto'; oculta la mediatriz, determina el punto medio del segmento AB y renombra el punto como P).</p> 

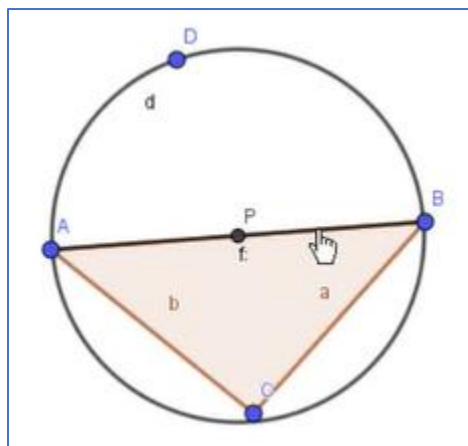
Laura empieza a arrastrar el punto C de manera vertical de abajo a arriba.



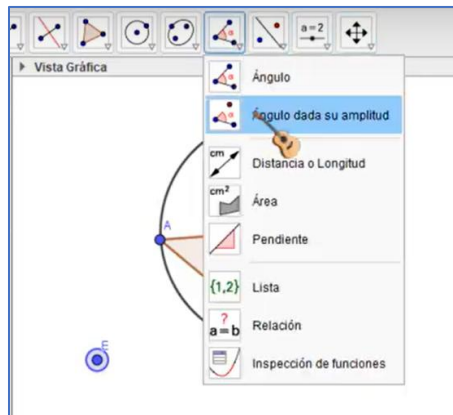
6.	Sara:	<p>Has la circunferencia para ver si están equidistando</p>
----	-------	---

7.	Laura:	<p><i>Eso es</i> (construye una circunferencia con centro en P y radio PD de tal forma que visualmente contenga a los puntos A y B. Después arrastra el punto C hasta que pertenezca visualmente a la circunferencia)</p> 
----	--------	---

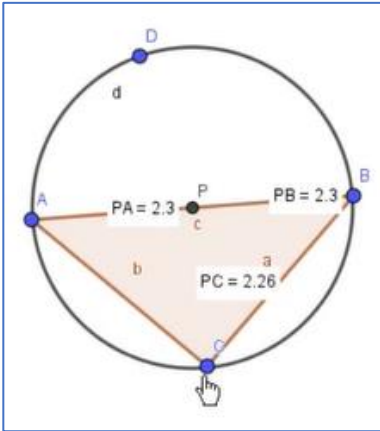
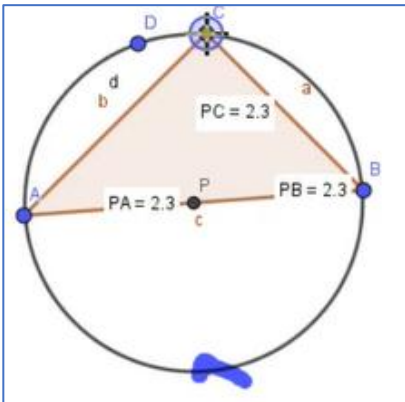
Luego, Laura busca por un gran tiempo la opción de ‘distancia o longitud’ en varios íconos como ‘punto’, ‘perpendicular’, ‘polígono’ y ‘circunferencia’ pero no logra encontrarla hasta que les pregunta a una de sus compañeras “¿cómo era que se sabía la longitud de un segmento?” y le dice que no la ve por ningún lado. Después, construye el segmento AB para comprobar si así aparece la distancia de este, pero lo elimina de nuevo.

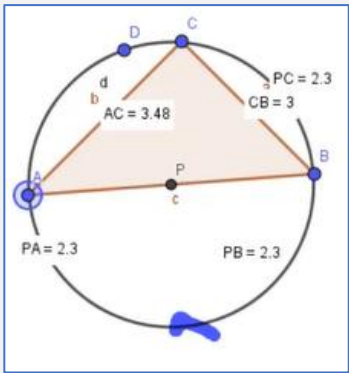


Finalmente, Laura dice “no, no pude”, vuelve a revisar en la mayoría de los íconos, pero como no encuentra la opción, llama a la profesora y le pregunta “¿cómo se hace para hallar la longitud de cada segmento?” a lo que ella responde que se encuentra en el ícono de ‘ángulo’.

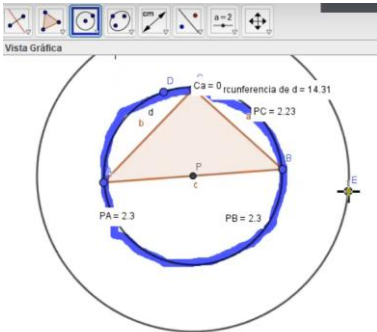


Laura, en un inicio, mide las distancias de AB , BC , CA , pero dice “no, así no era”.

8.	Laura:	<p>(Mide las distancias de PA, PB, PC) <i>No puede ser.</i></p>  <p>(Arrastra el punto C delicadamente procurando que las distancias sean las mismas, pero como no lo logra, lo intenta de nuevo, pero en la parte superior de la circunferencia). <i>Ahí está, mira esto.</i></p> 
9.	Sara:	¿Qué es eso?

10.	Laura:	<i>Lo puse para arriba (utiliza la opción ‘distancia’ y mide las distancias de AC y CB)</i>
11.	Mariana:	<i>Entonces, de C a B hay 3, pero de C a A hay 3.5</i> 
12.	Sara:	<i>(Lee el ítem 2 del cuestionario). Entonces se puede decir que el punto C hace parte de la misma circunferencia que tiene como centro P. (Sara responde el ítem 2 del cuestionario).</i>
13.	Laura:	<i>O sea que los puntos A, B, C van a ser parte de la misma circunferencia centrada por el punto K.</i>

Llega la profesora y pregunta por la construcción realizada. Mariana responde “hicimos el círculo y después le pusimos el punto P , luego hicimos la circunferencia y llevamos la C a la circunferencia”. La profesora les pregunta si funciona para otros casos y les recomienda usar la opción ‘rastros’.

13.	Laura:	<i>Listo (utiliza el rastro a pulso, evidenciando que efectivamente cumple con la propiedad descubierta)</i> 
14.	Zaira:	<i>O sea que, ¿de qué propiedad se dieron cuenta? ¿cómo pueden hacer para relacionar el punto P con los vértices?</i>
15.	Sara:	<i>El punto P es el centro de esa circunferencia.</i>

4.4.1.2. Respuestas al cuestionario asociado al problema

En la Imagen 4.23 mostramos las respuestas que dieron las estudiantes al cuestionario entregado, después de que terminaran de resolver el problema en GeoGebra.

Imagen 4.23. Respuestas al cuestionario del Grupo 4-Tarea 4

2. Dejando fijos los puntos A y B , arrastren el punto C , para investigar qué propiedad cumple el triángulo ABC cuando el punto P equidista de los vértices A , B , C . Escriban la propiedad descubierta:

Los puntos A , B y C van a ser parte de una misma circunferencia que tiene como centro el punto P y donde el segmento AB es su diámetro.

3. Escriban lo que pueden afirmar de un triángulo no explorado en GeoGebra, que cumpla la condición. (Sugerencia: imaginen un triángulo MNO y el punto medio de uno de los lados).

Un triángulo MNO , el punto A siendo punto medio de MN , el punto A equidistante a MNO . Los puntos M , N y O van a ser parte de una misma circunferencia con centro A y MN como su diámetro.

4. ¿Qué afirmación general les permite concluir lo que dicen sobre el triángulo no explorado?

Si los vértices de un triángulo equidistan al punto medio de uno de sus segmentos entonces sus vértices van a ser parte de la misma circunferencia que tiene como diámetro uno de los segmentos del Δ .

4.4.1.3. Respuestas a la plantilla discursiva para producir argumentos inductivos

En la Imagen 4.24 presentamos las respuestas a la plantilla discursiva

Imagen 4.24. Respuestas a la plantilla discursiva del Grupo 4-Tarea 4

Completen los siguientes espacios:

Dato:

- Condición inicial de los casos explorados: CONSTRUIR UN TRIANGULO ABC, QUE TENGA PUNTO P QUE ES EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO AB.
- Propiedad descubierta de los casos explorados: AL MOVER EL PUNTO C MANTENIENDO LA EQUIDISTANCIA DEL TRAYECTO QUE REALIZO FORMA UNA CIRCUNFERENCIA.
- Condiciones iniciales del caso no explorado: TRIANGULO FGH, SEGMENTO GH CUENTA CON UN PUNTO MEDIO DENOMINADO Z.

Aserción:

Afirmación sobre el caso no explorado: EL PUNTO H FORMA UNA CIRCUNFERENCIA AL MOVERSE MANTENIENDO LA EQUIDISTANCIA DEL PUNTO Z.

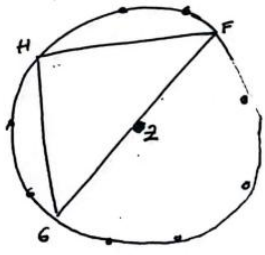
Garantía:

Puedo afirmarlo porque: AL MOVER UN PUNTO MANTENIENDO LA EQUIDISTANCIA DEL PUNTO DEL OPUESTO, SE FORMA UNA CIRCUNFERENCIA.

4.4.1.4. Respuestas al esquema argumentativo para producir argumentos inductivos

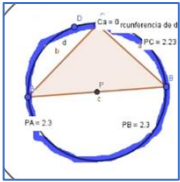
En la Imagen 4.25 se puede ver la respuesta al esquema completado por las estudiantes. Es necesario mencionar que para la respuesta de la plantilla y del esquema, no estuvo presente la estudiante Laura ya que, por motivos familiares, la recogieron temprano.

Imagen 4.25. Respuestas al esquema argumentativo del Grupo 4-Tarea 4

<p>Representación gráfica</p> 	<p>Dato</p> <p>Triangulo HFG / segmento GF / Punto medio del seg GF llamado Z. Equidistante.</p> <p>Punto Z es el ee de una circunferencia que se forma al mover el punto H.</p> <p>Triangulo ZFJ, Punto medio del segmento (P) ZF Equidistante.</p>	<p>Aserción</p> <p>El punto J, al moverse forma una circunferencia cuando se sigue la equidistancia.</p> <p>→</p> <p>Garantía</p> <p>Al mover un punto de un triangulo manteniendo la equidistancia del trayecto, se genera una circunferencia con el punto central</p>
--	---	---

4.4.1.5. Análisis del episodio 8

Acerca de la génesis instrumental

Proceso	Evidencias	Interpretación y Explicación
Instrumentalización	<p>En [1] y [2], la profesora explica cómo activar el rastro en GeoGebra, Laura crea el punto A y sigue las instrucciones de la profesora, activando el rastro y moviendo el punto, lo cual provoca asombro en sus compañeras.</p> <p>En [13] Laura utiliza la opción ‘rastro’ para verificar que el punto C debe pertenecer a la circunferencia con centro en K para que cumpla con las condiciones iniciales.</p> 	<p>Rastro. La activación del rastro permite a los estudiantes visualizar el movimiento de los objetos geométricos en la pantalla, lo que ayuda a visualizar su trayectoria. Al inicio los estudiantes solo observan el rastro con asombro y no lo exploran como una herramienta que les permita dar una solución alternativa al problema, sin embargo, después por sugerencia de la profesora, lo utilizan específicamente para comprobar que efectivamente el punto C pertenece a la circunferencia previamente construida.</p>
	<p>Al inicio, Laura intenta revisar la opción de ‘medio o centro’ para determinar el punto medio del segmento AB, pero no lo consigue.</p> <p>En [5] Laura dice “O sea, le saco la mediatriz y solamente pongo un punto ahí y después quito la mediatriz” pero se percata que la opción que estaba buscando se encontraba en el ícono ‘punto’ así que oculta la mediatriz y determina el punto medio del segmento.</p>	<p>Punto medio. La estudiante sabía que existía una opción en GeoGebra que le permitía determinar el punto medio del segmento. Sin embargo, al no encontrar alguna opción, decide hacer la construcción auxiliar de la mediatriz que le permite encontrar el punto solicitado. Finalmente, Laura identifica la ubicación de la opción y la utiliza para seguir el paso a paso de la tarea.</p>

Instrumentación	<p>En [7] Laura intenta hallar la opción de “distancia” en GeoGebra y pregunta: “¿cómo se hace para hallar la longitud de cada segmento?”.</p> <p>En [8] y [10] Laura mide las distancias PA, PB, y PC y arrastra el punto C manualmente varias veces para hacer coincidir las medidas visualmente. Tras verificar algunas medidas, dice: “No puedo hacer que todas las distancias sean iguales”.</p>	<p>Medida de distancias para verificar equidistancia. La medición de distancias permite a Laura identificar la equidistancia del punto P a los vértices del triángulo, aunque enfrenta dificultades para lograr la precisión en su construcción.</p>
	<p>Después de construir y medir, Laura utiliza el rastro para verificar la posición de C en la circunferencia centrada en P mientras mueve los puntos A y B. Al ver que C se mantiene en la circunferencia, comenta: “Miren, C se queda en la circunferencia si movemos todo el triángulo” [Intervenciones 13-15]. A partir de este punto, las estudiantes usan el rastro para validar la consistencia de la propiedad de equidistancia.</p>	<p>Uso del rastro para validar la equidistancia.</p> <p>Las estudiantes usan la opción ‘rastro’ para verificar la propiedad de equidistancia del punto K con los vértices de triángulo ABC. El rastro permite a las estudiantes observar y validar la propiedad de equidistancia con diferentes triángulos que cumplen las condiciones iniciales.</p>

Acerca del argumento inductivo

Condiciones iniciales: Triángulo ABC , P punto medio del segmento AB , P equidista de A , B , C	
Evidencias	<p>Plantilla discursiva:</p> <p>“Construir un triángulo ABC que tenga punto P que es punto medio de un segmento AB”.</p>
	<p>Esquema argumentativo:</p> <p>“Triángulo HFG, segmento GF, punto medio del segmento GF llamado Z equidistante”</p>

Interpretación	Las estudiantes interpretan de forma adecuada las condiciones iniciales de los casos que se exploraron en GeoGebra. A diferencia de las tareas previas, las estudiantes identifican que las condiciones iniciales son las que se les solicita antes de iniciar con la exploración de los casos.
Propiedad descubierta: <i>P es el centro de una circunferencia que contiene a los puntos A, B, C.</i>	
Evidencias	<p>Interacción de los estudiantes:</p> <p>En [6-7] Sara dice “Has la circunferencia para ver si están equidistando” y Laura construye una circunferencia con centro en P y radio PD de tal forma que visualmente contenga a los puntos A y B. Después arrastra el punto C hasta que pertenezca visualmente a la circunferencia.</p> <p>En [8] Laura mide las distancias de PA, PB, PC y arrastra el punto C delicadamente hasta que las distancias sean las mismas.</p> <p>En [12] sara dice: “Entonces se puede decir que el punto C hace parte de la misma circunferencia que tiene como centro P”</p> <p>En [13] Laura dice “O sea que los puntos A, B, C van a ser parte de la misma circunferencia centrada por el punto K”.</p> <p>Cuestionario:</p> <p>En el ítem 2 del cuestionario, las estudiantes escriben: “Los puntos A, B, C van a ser parte de una misma circunferencia que tiene como centro el punto P y donde el segmento AB es su diámetro”</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>“Al mover el punto C manteniendo la equidistancia del trayecto que realizó, forma una circunferencia”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>“Punto Z es el centro de una circunferencia que se forma al mover el punto H”</p> <div data-bbox="784 1566 1058 1824" style="text-align: center;"> </div>

Interpretación	Las estudiantes descubrieron la propiedad, pero no por exploración, sino por una cierta intuición derivada de la resolución de las tareas previas. La construcción de la circunferencia para verificar la equidistancia hizo que no encontraran la circunferencia al hacer el rastro de los posibles puntos P . De igual forma, se puede concluir que llegaron a la propiedad descubierta evidenciándolo en las tres producciones escritas.
Caso no explorado: Triángulo MNO , Z punto medio del segmento MN , Z equidista de M , N , O .	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>Las estudiantes escriben en el ítem 3: “Un triángulo MNO, el punto A siendo punto medio de MN, el punto A equidistando a MNO, los puntos M, N, O van a ser parte de una misma circunferencia con centro A y MN como su diámetro”.</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>“Triángulo FGH, segmento GH cuenta con un punto medio denominado Z”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>“Triángulo ZFJ, punto medio del segmento (P) ZF equidistando”</p>
Interpretación	Las estudiantes identifican y escriben de manera precisa, en el cuestionario, el cumplimiento de la propiedad descubierta en el caso no explorado. Sin embargo, no sucede lo mismo en la plantilla discursiva posiblemente porque Laura no estaba presente y porque la profesora recogió el cuestionario antes de entregarles la plantilla y el esquema.
Aserción: Z es el centro de una circunferencia que contiene a los puntos M , N , O .	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>Las estudiantes escriben: “Los puntos M, N, O van a ser parte de una misma circunferencia con centro en A y MN como su diámetro”</p> <p>Plantilla discursiva:</p> <p>“El punto H forma una circunferencia al moverlo manteniendo la equidistancia del punto Z”</p> <p>Esquema argumentativo:</p> <p>“El punto J forma una circunferencia cuando se sigue la equidistancia”</p>

Interpretación	Las estudiantes identifican que la aserción corresponde a que el objeto no explorado cumple con la propiedad descubierta. Sin embargo, lo escriben como si pensarán en la construcción realizada en GeoGebra y no mencionan en ninguno de los casos, el punto que debe corresponder al centro de la circunferencia a excepción en el cuestionario que lo escriben de forma correcta.
Patrón de generalización: Dado un triángulo y el punto medio de uno de sus lados. Si el punto equidista de los vértices del triángulo, entonces ese punto es el centro de una circunferencia que contiene a los tres vértices del triángulo.	
Evidencias	<p>Cuestionario:</p> <p>En el ítem 4, las estudiantes escriben: “Si los vértices de un triángulo equidistan al punto medio de uno de sus segmentos, entonces sus vértices van a ser parte de la misma circunferencia que tiene como diámetro uno de los segmentos del triángulo”.</p> <p>Plantilla discursiva: “Al mover un punto manteniendo la equidistancia del punto del segmento opuesto, se forma una circunferencia”</p> <p>Esquema argumentativo: “Al mover un punto de un triángulo manteniendo la equidistancia del trayecto, se genera una circunferencia con el punto central”</p>
Interpretación	En el cuestionario, a pesar de que la idea era que ellas establecieran el argumento completo, las estudiantes logran escribir y relacionar de forma condicional la propiedad descubierta. Además, escriben el patrón de generalización como si siguieran trabajando en GeoGebra, ya que utilizan términos como “mover”, “se forma”, “trayecto”, lo mismo sucede en la escritura de la plantilla discursiva.

Capítulo 5. Discusión y resultados

El capítulo de discusión lo hemos dividido en cuatro partes. Inicialmente presentamos los cambios en la identificación de los elementos de los argumentos inductivos, que observamos en los discursos de los estudiantes en cada tarea. Después, enfocamos la mirada en el papel de GeoGebra en la resolución de los problemas y la producción de argumentos inductivos. Finalmente, nos centramos en la gestión del profesor antes y durante la implementación de las tareas. Cada uno de estos apartados articula los resultados obtenidos integrando ejemplos representativos.

5.1. Identificación de los elementos del argumento inductivo al usar los recursos didácticos

En la Tabla 5.1, mostramos una síntesis de los resultados obtenidos en la identificación de los elementos del argumento inductivo, que lograron los estudiantes en cada tarea. Cada fila corresponde a los elementos que estructuran un argumento y cada columna corresponde a las tareas analizadas por grupo. Las siglas utilizadas en la columna de “recurso didáctico” corresponden a I: Interacciones entre los estudiantes⁵, C: Cuestionario, PD: Plantilla discursiva y EA: Esquema argumentativo.

El color verde lo utilizamos cuando reconocimos que los estudiantes lograron escribir el elemento específico. El color rojo lo usamos cuando los estudiantes no escribieron ni interpretaron correctamente el elemento. El color amarillo lo usamos cuando: los estudiantes escribieron el elemento del argumento incompleto; obtuvieron ayuda específica de la profesora; al escrito le falta algo para cumplir con lo establecido; o, se pueden obtener diferentes interpretaciones de lo que escribieron. Los cuadros en blanco son aquellos casos en los que el elemento del argumento se encontraba explícito en el enunciado de la tarea o en el recurso didáctico.

⁵ Aunque las interacciones no son un recurso didáctico, decidimos incluir esta información en la tabla para poder apreciar visualmente la globalidad del proceso.

Tabla 5.1 *Síntesis de la producción de argumentos inductivos por tarea*

Elemento del argumento inductivo		Recurso didáctico	T1			T2		T3		T4
			G2	G3	G4	G3	G4	G2	G4	G4
Dato	Condiciones iniciales	I	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde
		C	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde
		PD	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Amarillo	Amarillo	Amarillo
		EA	Verde	Verde	Verde	Rojo	Rojo	Amarillo	Amarillo	Verde
	Propiedad descubierta	I	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde
		C	Rojo	Verde	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde	Verde
		PD	Verde	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde	Rojo	Amarillo
		EA	Amarillo	Verde	Verde	Rojo	Amarillo	Verde	Rojo	Amarillo
	Caso no explorado	C	Verde	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde	Verde	Amarillo
		PD	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Amarillo
		EA	Verde	Verde	Verde	Rojo	Verde	Amarillo	Amarillo	Verde
	Aserción		C	Amarillo	Verde	Verde	Rojo	Verde	Verde	Verde
PD			Verde	Verde	Verde	Amarillo	Verde	Verde	Amarillo	
EA			Verde	Verde	Verde	Rojo	Amarillo	Verde	Amarillo	
Garantía – Patrón de generalización		C	Amarillo	Amarillo	Amarillo	Amarillo	Amarillo	Amarillo	Verde	
		PD	Rojo	Rojo	Amarillo	Amarillo	Rojo	Amarillo	Rojo	
		EA	Rojo	Amarillo	Rojo	Rojo	Rojo	Amarillo	Amarillo	Rojo

Los resultados muestran que algunos grupos lograron formular algunos elementos del argumento inductivo de manera adecuada (en 60 casos), otros no lo lograron (en 18 casos), y en 40 casos escribieron los elementos parcialmente correctos o incompletos. Una mirada a la ligera podría hacer pensar que el experimento no tuvo éxito. Sin embargo, los cuadros marcados con amarillo, sumados a los cuadros verdes (100 casos), dejan ver que, en su mayoría, los estudiantes escribieron los elementos del argumento inductivo, aunque no siempre de manera un perfecta.

Como se puede evidenciar en la Tabla 5.1, la escritura del dato fue la mejor lograda, lo que indica que, excepto en siete casos, los estudiantes lograron identificar cuáles eran las condiciones iniciales, la propiedad descubierta y el caso no explorado sobre el que debían decir algo en la aserción. Las condiciones iniciales, que hacen parte del dato, no fueron

escritas por los estudiantes en el cuestionario, ya que estaban mencionadas en el enunciado de los problemas. De igual forma, no fue necesario, en las primeras dos tareas, que los estudiantes completaran el espacio del caso no explorado en la plantilla discursiva, pues decidimos dárselo para que ellos reconocieran el papel de ese elemento en la formulación de un argumento inductivo. El esquema argumentativo apoya la identificación al pedir una representación gráfica de la exploración y ubicaran allí el caso no explorado.

En cuanto a los recursos, observamos que la plantilla discursiva fue la más útil para que los estudiantes escribieran las condiciones iniciales. Por ejemplo, en la Tarea 2, el Grupo 4 completó: “Observo que la mediatriz formada por el segmento AB ...” escribiendo que la condición inicial es pertenecer al subconjunto de rectas del plano que son mediatriz de los segmentos que se exploran. Los estudiantes identificaron el dato, aunque no se refieren a la mediatriz del segmento sino, de manera incorrecta, a la mediatriz “formada” por el segmento.

Los cuestionarios fueron particularmente útiles para guiar la identificación y escritura de la propiedad descubierta; todos los grupos tuvieron éxito, a excepción del Grupo 2, en la Tarea 1 que incluyó a los puntos A y B en el descubrimiento y se refirió a la figura geométrica a la que pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B como “un cuadrilátero o rombo”. La profesora les dijo que no incluyeran a los puntos A y B y ellos corrigieron la propiedad, pero no modificaron el cuestionario.

En el esquema argumentativo era el único recurso que, en todas las tareas, los estudiantes debían escribir cuál era el caso no explorado. Los estudiantes no tuvieron dificultad para identificar cuál era, salvo el Grupo 3 en la Tarea 2 que escribió “con segmentos diferentes”; este grupo entendía que debían pensar en un segmento no explorado, pero no supo cómo denominar un segmento específico que no correspondiera a la familia de segmentos AB representada al arrastrar los extremos del segmento.

También, se puede observar que el elemento del dato en el que hubo más errores en la escritura fue la propiedad descubierta, sobre todo en el esquema argumentativo. Al hacer un cambio en esquema, buscando mayor autonomía por parte de los estudiantes, ellos tuvieron menos apoyo para la escritura de la propiedad, pese a haberla encontrado en la exploración. Nos apresuramos un poco al eliminar las pistas que tenía el esquema lo cual no fue una buena decisión.

En cuanto a la escritura de la asección, salvo en dos casos los grupos lograron escribir asecciones correctas o parcialmente correctas. Sin embargo, en dos casos el Grupo 4, aunque escribió bien la asección en el cuestionario, no lo hizo tan correctamente en la plantilla discursiva y en el esquema, en las Tareas 3 y 4. Y en la Tarea 2, aunque habían escrito bien la asección en el cuestionario y en la plantilla, no lo hizo bien en el esquema argumentativo. Quizás descuidaron la escritura, por no reconocer aún la importancia de la precisión o se les hizo complejo identificar la estructura del esquema argumentativo al realizar el cambio en el marco de aquella tarea. El Grupo 3 no logró escribir la asección ni en el cuestionario ni en el esquema, en la Tarea 2, y muy parcialmente en la plantilla. El hecho de mencionar como caso no explorado a un objeto concreto (un palo para formar una cruz), confundió a los estudiantes y los llevó a escribir que el palo no podía ser una mediatriz “porque la mediatriz es una recta infinita, por lo tanto, no existe un palo infinito”. La estrategia que usamos para que los estudiantes pensarán en un caso no explorado desvió el propósito que teníamos de sacar a los estudiantes del contexto de GeoGebra.

Pese a los inconvenientes señalados, casi todos los grupos, en casi todas las tareas, lograron escribir la asección, infiriendo la propiedad que debía cumplir el caso no explorado. Consideramos que este es un logro importante del uso de los recursos didácticos, pues generalmente los enunciados de los problemas invitan a proponer la conjetura, pero no a hacer una inferencia sobre un caso no explorado. El hecho de que en los tres recursos se pregunte por la inferencia hace que los estudiantes deban hacer explícita la atribución de la propiedad descubierta a los casos no explorados, incluso generalizando a cualquier otro caso. Como señalan Camargo et al (2024), este es un elemento clave de la argumentación inductiva.

En cuanto a la garantía, en el aprendizaje sobre argumento inductivo, los estudiantes deben identificar que ella expresa la dependencia entre la propiedad conocida y la propiedad descubierta, en una proposición condicional general, a manera de patrón de generalización. También deben aprender a expresarla en forma si... entonces..., de tal manera que en el antecedente esté expuesta la propiedad conocida (de forma general) y en el consecuente esté expuesta la propiedad descubierta (de forma general). Esta es la manera en la que el patrón de generalización establece el puente entre el dato y la asección, permitiendo sustentar la asección que se hace sobre un caso no explorado. En la escritura de la garantía, solo el Grupo 4, en las Tareas 3 y 4 la escribió de forma correcta, los demás grupos o no lo lograron, o

formularon la dependencia de forma algo vaga, insinuando la dependencia, pero no de manera condicional. Por ejemplo, en la Tarea 4, el Grupo 4 escribió: "Esto se cumple porque siempre pasa en los triángulos," lo que refleja una identificación de que la propiedad descubierta se puede generalizar a todos los triángulos.

El recurso que permitió una mejor expresión de la garantía fue el cuestionario. Fue el único en el que los estudiantes del Grupo 4 pudieron escribir de forma adecuada el patrón de generalidad, en las dos últimas tareas. En la Tarea 3, los estudiantes escribieron "El punto que es la intersección de las mediatrices del triángulo, también es el centro de una circunferencia que une los puntos del triángulo" y en la Tarea 4, escribieron "si los vértices de un triángulo equidistan al punto medio de uno de sus segmentos entonces sus vértices van a ser parte de la misma circunferencia que tiene como diámetro uno de los segmentos del triángulo".

La garantía fue el elemento menos logrado en la formulación del argumento inductivo, con una alta proporción de celdas rojas y amarillas. Este hecho coincide con resultados de estudios previos, como el de Hernández y Parra (2013). Estos autores señalan que la garantía es un componente abstracto y complejo, que requiere conectar el dato con la aserción mediante un enunciado condicional. Este hallazgo refuerza la necesidad de un acompañamiento docente más cercano para ayudar a los estudiantes a articular esta conexión. También vemos la necesidad de adecuar los espacios en la plantilla discursiva y en el esquema con preguntas más explícitas para reconocer formato condicional.

Si bien en el experimento de enseñanza teníamos previsto que los estudiantes se percataran que la aserción y la garantía del argumento inductivo son de naturalezas probable, esta discusión no se dio, ya que ninguno de los grupos descubrió una propiedad que sólo se cumpliera para unos casos. En el Episodio 7, el Grupo 4 realizó una exploración y llegó a concluir que el punto de corte de las mediatrices de un triángulo estaba contenido en un lado de triángulo, propiedad que se verifica solo para triángulos rectángulos. Sin embargo, las estudiantes explicitaron que estaban asumiendo, en el dato, que el triángulo era rectángulo. El trabajo de este grupo hubiera sido una oportunidad valiosa para reflexionar sobre propiedades que se descubren, que están limitadas a ciertos casos, y que podrían no generalizarse a todos los casos. Infortunadamente no tuvimos tiempo para propiciar esta discusión.

En síntesis, los recursos didácticos fueron útiles para lograr que los estudiantes produjeran de forma escrita los argumentos inductivos, lo que corrobora nuestra conjetura que nos propusimos analizar en el experimento de enseñanza. No obstante, consideramos que el uso de los recursos debe ser más apoyado en espacios de socialización para discutir acerca de la estructura de un argumento inductivo, analizar el papel que juega cada elemento, centrar la atención en el elemento no explorado dentro de la producción de los argumentos inductivos y reflexionar sobre el carácter probable de los argumentos inductivos.

Adicionalmente, queremos mencionar que la cantidad de cuadros resaltados en amarillo se debe a la dificultad que tenían los estudiantes para poner por escrito, de forma completa y correcta, lo que habían descubierto en la formulación oral del argumento. Aunque, a medida que fueron desarrollando las tareas e iban contestando el cuestionario, la plantilla discursiva y el esquema argumentativo, fuimos observando un cambio en la escritura, aún falta mucho trabajo para lograr las formulaciones esperadas. Esto fue más notorio en el caso de la garantía pues los estudiantes no estaban familiarizados con la forma de escribir una expresión condicional.

Al analizar los tres recursos didácticos, el cuestionario emergió como una herramienta esencial para orientar la exploración inicial y estructurar las condiciones del problema, en consonancia con la idea de Camargo et al. (2024) sobre la necesidad de guiar a los estudiantes en la observación y el descubrimiento de propiedades. La plantilla discursiva, alineada con la propuesta de Rumsey y Langrall (2016), facilitó la formulación de aseveraciones, proporcionando una estructura lingüística que los estudiantes pudieron seguir. Sin embargo, las garantías continuaron siendo un reto significativo, lo que corrobora lo señalado por Hernández y Parra (2013), quienes destacan que las garantías requieren un nivel más abstracto de razonamiento para conectar el dato con la aseveración.

Por otro lado, el esquema argumentativo presentó mayores desafíos, especialmente al intentar relacionar visualmente los elementos del argumento (dato, aseveración y garantía). Esto se alinea con los planteamientos de Molina y Samper (2019), quienes señalan que los esquemas visuales pueden ser demandantes si no se acompañan de una guía docente adecuada. En el marco de esta investigación, los estudiantes lograron, en algunos casos, establecer conexiones empíricas entre los elementos del argumento utilizando GeoGebra,

pero estas relaciones no siempre se tradujeron en una formalización escrita completa, como lo reflejan las celdas rojas y amarillas.

5.2. Rastreo de la génesis instrumental

El análisis de la génesis instrumental en esta investigación se centró en observar cómo los estudiantes pasaron de una exploración inicial de las herramientas de GeoGebra, caracterizada por la instrumentalización, a un uso más estructurado y orientado hacia la solución de problemas, conocido como instrumentación. Este proceso, como señalan Camargo et al. (2024), implica transformar los artefactos tecnológicos en instrumentos que median la construcción de conocimiento matemático. En la Tabla 5.2 presentamos una síntesis de los procesos de Génesis Instrumental. En ella se encuentra las herramientas que los estudiantes instrumentalizaron y aquellas que instrumentaron al resolver cada tarea.

Tabla 5.2 *Síntesis de la génesis instrumental por grupos*

	Instrumentalización	Instrumentación
Grupo 2	Circunferencia Arrastre Eliminación de objetos Mediatriz Intersección de objetos	Uso de la opción ‘renombrar’ para relacionar una propiedad con otra. Uso de ‘circunferencia’ para corroborar equidistancia entre dos puntos. Uso de ‘distancia o longitud’ para comprobar la propiedad de un objeto Uso de ‘circunferencia’ para identificar la relación entre dos objetos
Grupo 3	Circunferencia Segmento Recta perpendicular Arrastre Despliegue de ventanas Cambio de color Puntos de intersección	Uso de ‘renombrar’ para cumplir con la condición solicitada. Mouse para representar un lugar geométrico y localización de puntos Uso del ‘arrastre’ para representar una relación geométrica Uso del ‘arrastre’ para justificar una invariante Uso de ‘distancia o longitud’ para verificar equidistancia Uso del ‘arrastre’ para obtener una familia de objetos construidos

		Uso del ‘arrastre’ para descubrir las propiedades de un objeto
Grupo 4	Arrastre Distancia o longitud Renombrar Medida de un ángulo Mover y seleccionar Polígono Puntos dependientes Punto medio Rastro	Uso de ‘recta’ para corroborar colinealidad entre puntos Uso de ‘distancia o longitud’ para corroborar equidistancia entre dos puntos Uso del ‘arrastre’ de extremos de segmentos para encontrar propiedad de la mediatriz Uso del ‘arrastre’ para descubrir una propiedad Uso de ‘circunferencia’ para identificar equidistancia de puntos. Uso de ‘rastros’ para verificar la propiedad descubierta

Con respecto a la instrumentalización, a pesar de no haber interactuado con GeoGebra previamente, los estudiantes lograron tener una apropiación básica de diferentes opciones. En las primeras tareas, los estudiantes mostraron un uso inicial de GeoGebra marcado por la exploración de las opciones del software. Por ejemplo, en la Tarea 2, Laura intentó construir la mediatriz de un segmento utilizando el ícono de ‘recta perpendicular’, afirmando: “creo que con esto se puede, pero no estoy segura” y luego, ve que existe la opción específica de ‘mediatriz’ y la usa. Otro ejemplo ilustrativo fue cuando Alejandro primero, por su propia cuenta identificó cómo cambiar el color a los objetos matemáticos creados en GeoGebra y luego, les enseñó a todos los demás estudiantes cuáles eran los pasos que debían seguir (ver análisis del episodio No. 4).

Así, a medida que se enfrentaron a cada tarea, los estudiantes fueron reconociendo el funcionamiento de las opciones y el orden de los íconos en los menús para poder usarlos. Este comportamiento evidencia una fase en la que los estudiantes todavía no habían internalizado las funciones específicas del software, pero sí corrobora lo que señalan Sua y Camargo (2019), cuando indican que GeoGebra es un software fácil de instrumentalizar y muy amigable con los estudiantes para poder encontrar por sí mismos las opciones o herramientas que necesitan para la exploración y el descubrimiento de propiedades.

Conforme avanzaron en el desarrollo de las tareas, observamos ejemplos de instrumentación. Los estudiantes fueron bastantes creativos al usar GeoGebra para dar solución a cada problema y descubrir alguna propiedad. Por ejemplo, en la Tarea 4, el Grupo

3 optimizó su interacción con GeoGebra al renombrar puntos para evitar confusiones en la construcción de una circunferencia centrada en el punto medio de un segmento. Mariana comentó: “Si nombramos bien los puntos, evitamos errores en las construcciones” lo que refleja cómo los estudiantes comenzaron a estructurar sus estrategias para cumplir con las condiciones establecidas en el cuestionario.

Además, identificamos momentos de interacción social en los que los estudiantes compartieron estrategias y conocimientos relacionados con el uso de las herramientas. Algunos estudiantes usaron GeoGebra de formas tan creativas que no las habíamos previsto en la planeación. Por ejemplo, en la Tarea 3, Samir explicó al grupo cómo utilizar la herramienta ‘distancia’ para verificar la equidistancia del circuncentro a los vértices del triángulo, diciendo: “Seleccionas dos puntos, eliges la opción de distancia y ahí compruebas si son iguales.”

5.3. Apoyo de GeoGebra en la producción de argumentos inductivos

En este apartado nos referimos al papel de GeoGebra para identificar el dato, la aserción y la garantía, en la producción de argumentos inductivos. Con respecto al dato, vimos que los estudiantes: pudieron identificar las condiciones dadas, ligándolas a la construcción realizada para hacer la exploración y descubrir la propiedad. Las opciones de ‘arrastre’, ‘distancia’, ‘recta’, ‘circunferencia’, ‘rastros’, ‘mediatriz’, ‘punto’, ‘segmento’, ‘medida de ángulo’ permitieron a los estudiantes visualizar los invariantes esperados.

A medida que fueron realizando las tareas lograron relacionar el caso no explorado con aquellos que exploraron en GeoGebra. Esto, aun cuando en la planeación tuvimos dificultades para decidir cómo lograr que ellos supusieran un caso no explorado, sin hacer la representación. Por ejemplo, en la Tarea 2 pretendimos que los estudiantes pensarán en el caso no explorado imaginando una situación concreta. Esta estrategia no fue tan afortunada como comentamos anteriormente y esto llevó a que en las siguientes tareas mantuviéramos el formato de la primera tarea. Dado que GeoGebra permite una exploración de infinitos casos, es un tanto complejo lograr que los estudiantes imaginen un caso no explorado y prediquen sobre este, sino hacer la representación. Pero es necesario que lo hagan para que puedan completar los elementos del argumento inductivo.

Con respecto a la garantía, efectivamente GeoGebra contribuyó a que los estudiantes para obtener el patrón de generalización con cierta facilidad y con mucha certeza oralmente, aunque con dificultades en la escritura. En Tarea 1, los estudiantes solo exploraron muy pocos casos. Luego de conocer el arrastre como método para representar infinitos casos que cumpliera con las condiciones del dato, ellos empezaron a usarlo tímidamente, con pocos casos, para llegar a una conclusión. A partir de la Tarea 2, los Grupos 3 y 4 se familiarizaron a tal grado con el dinamismo del software que optaron por representar casos extremos, dentro de la variedad de casos, por medio del arrastre, para luego sí llegar la conclusión. Así, podemos ver cómo GeoGebra fue brindando a los estudiantes las herramientas necesarias y suficientes para llegar al patrón de generalización, A medida que los estudiantes fueron instrumentalizando el programa, ellos fueron aprovechando más sus recursos para ampliar los rangos de exploración.

Finalmente, es importante mencionar que GeoGebra no jugó ni debería jugar ningún papel en la producción de la aserción, porque lo ideal es que los estudiantes hagan una inferencia sin realizar alguna exploración.

5.4. Gestión docente para apoyar la producción de argumentos inductivos

Un aspecto positivo por destacar en el desarrollo del experimento de enseñanza fue la gestión docente, tanto en la planeación como en la dirección de las clases. Según Planas y Morera (2012), el rol del profesor es esencial en la organización de las actividades y en la interacción con los estudiantes durante las sesiones, ya que debe estar preparado para anticipar posibles respuestas, gestionar dinámicas grupales y adaptarse a las necesidades emergentes del aula. En este sentido, el papel desempeñado por nosotras resultó central para el éxito alcanzado, gracias a la preparación previa y a la capacidad de la autora del trabajo para responder a las situaciones que surgieron durante las actividades.

En la planeación, diseñamos cuidadosamente las tareas y recursos didácticos, anticipando posibles respuestas, dudas y dificultades que los estudiantes podrían encontrar. Por ejemplo, al planificar las actividades con GeoGebra, entregamos a los estudiantes instrucciones detalladas sobre el uso de herramientas como ‘rastreo’, ‘mediatriz’ y ‘circunferencia’, previendo que algunos estudiantes podrían enfrentar dificultades en tareas posteriores que necesitaran nuevamente aquellas herramientas. Esta anticipación permitió

que cada grupo contara con el apoyo necesario para avanzar en sus exploraciones y descubrimientos.

La planeación también incluyó la elaboración de un "libreto docente" que contenía posibles intervenciones, preguntas orientadoras y maneras de guiar a los estudiantes sin proporcionarles directamente las respuestas. Este enfoque, alineado con lo señalado por Planas y Morera (2012), demostró ser clave para garantizar una interacción constructiva entre los estudiantes y los recursos didácticos. Aunque el libreto no se siguió al pie de la letra, sirvió como una guía flexible que permitió adaptar las intervenciones según las necesidades específicas de cada grupo y cada tarea.

Durante las sesiones, la gestión docente fue un factor determinante para fomentar la participación y apoyar la producción de argumentos inductivos. La capacidad para atender a los cinco grupos de manera simultánea fue esencial, permitiendo responder a las necesidades diferenciadas de los estudiantes. Por ejemplo, en una de las sesiones, mientras un grupo tenía dificultades para identificar el punto de intersección de las mediatrices, otro necesitaba aclaraciones sobre cómo completar la plantilla discursiva. La rapidez para detectar estas situaciones y priorizar las intervenciones permitió mantener un flujo constante de trabajo y evitar que algún grupo quedara rezagado.

Asimismo, hubo momentos en los que fue necesario interrumpir la dinámica grupal para hacer aclaraciones al curso completo, sin proporcionar más información de la cuenta. Un caso destacado ocurrió en la Tarea 3, cuando varios grupos presentaron dudas similares sobre cómo trazar mediatrices en GeoGebra. En ese momento, la profesora decidió explicar nuevamente el procedimiento, lo que permitió que todos los estudiantes retomaran la actividad con mayor claridad. Este tipo de intervenciones, como señalan Planas y Morera (2012), son fundamentales para establecer un equilibrio entre la atención individualizada y el manejo de la dinámica general del aula.

De manera autocrítica, reconocemos que hubiera sido importante dedicar más tiempo a profundizar en las instrucciones para el uso avanzado de GeoGebra, especialmente en herramientas como 'mediatriz' y 'circunferencia', que generaron dificultades recurrentes. Además, aunque logramos atender las necesidades diferenciadas de los estudiantes, en algunos casos se podría haber proporcionado un acompañamiento más sistemático para los grupos con mayores dificultades.

No obstante, la experiencia docente adquirida durante este experimento refuerza la idea de que la planeación detallada y la flexibilidad en la gestión de las clases son elementos esenciales para el éxito de este tipo de actividades. La capacidad para anticipar respuestas, identificar necesidades emergentes y adaptar las intervenciones fueron aspectos que contribuyeron significativamente a que los estudiantes avanzaran en la formulación de argumentos inductivos.

Capítulo 6. Conclusiones

En el capítulo de conclusiones, primero nos centramos en el cumplimiento del objetivo general y de los objetivos específicos. Después, verificamos la conjetura o hipótesis escrita en el experimento de enseñanza. Asimismo, se señalan las limitaciones del estudio y se plantean posibles líneas de investigación futuras que permitan profundizar en los temas abordados.

6.1. Cumplimiento de los objetivos

El propósito general de nuestro estudio fue promover la argumentación inductiva en la educación básica secundaria del Colegio CoRe por medio de una electiva que promueva la resolución de problemas geométricos con el uso de GeoGebra. Este objetivo se cumplió plenamente, como se evidencia en los capítulos de análisis y discusión. Los resultados muestran que los estudiantes lograron identificar, formular y relacionar elementos clave del argumento inductivo, tales como el dato, la aserción y la garantía, aunque con algunas dificultades en la escritura de esta última. Los tres recursos didácticos utilizados en cada una de las tareas entregadas fueron de gran ayuda para el cumplimiento del objetivo. No sobra decir que esto se logró mediante la resolución de problemas geométricos que requerían no solo la construcción de objetos geométricos, sino también la exploración y el descubrimiento de propiedades que contribuyeron a la formulación de conjeturas y de argumentos inductivos.

Uno de los objetivos específicos era diseñar un conjunto de tareas que promuevan la argumentación inductiva. Este objetivo se cumplió a través de la creación de tareas secuenciadas que guiaron a los estudiantes en la exploración de propiedades geométricas, la formulación de conjeturas y la construcción de argumentos inductivos. Las tareas diseñadas, incluidas en los anexos Anexo 1 – Enunciado y planeación de la tarea preliminar, Anexo 2 – Enunciados de las tareas y Anexo 5 – Planeación detallada de los enunciados de las tareas, fueron utilizadas de manera efectiva durante el curso, logrando su propósito de promover procesos de argumentación inductiva.

Otro objetivo específico era establecer la influencia del programa GeoGebra en la elaboración de argumentos inductivos al resolver problemas de geometría. Como se analizó en cada uno de los episodios del capítulo 4 y en las secciones 5.2 y 5.3 del capítulo 5, GeoGebra desempeñó un papel clave al permitir a los estudiantes visualizar propiedades

geométricas, explorar patrones y verificar conjeturas. Herramientas como el ‘rastreo’ y el ‘arrastrado’ fueron fundamentales para que los estudiantes relacionaran sus construcciones geométricas y hallazgos con los elementos del argumento inductivo. Sin embargo, el análisis también mostró que algunas funciones del programa, como ‘mediatriz’, requieren un mayor nivel de orientación por parte del docente para su correcta utilización.

Finalmente, el tercer objetivo específico era presentar a la institución CoRe una alternativa para fomentar la argumentación en el aula de matemáticas por medio de un curso electivo para solucionar problemas geométricos con el uso de GeoGebra. Aunque la autora del escrito ya no trabaja en el Colegio CoRe, durante la implementación del curso recibió comentarios positivos tanto de los colegas como de los padres de familia. A pesar de los inconvenientes tecnológicos y logísticos, logramos llevar a cabo el curso con éxito.

El desarrollo del curso electivo suscitó el interés de algunos colegas de la institución, quienes se acercaron curiosos para conocer más sobre las actividades que los estudiantes estaban realizando. Asimismo, el rector del colegio le informó a la profesora que algunos padres de familia comentaron de manera positiva que sus hijos parecían contentos con el curso electivo y expresaron interés en que se diera continuidad a este tipo de actividades para el próximo año, sugiriendo la creación de un curso electivo centrado exclusivamente en matemáticas para estudiantes que estuvieran motivados por la materia.

Este tipo de retroalimentación, tanto por parte de los profesores como de los padres de familia, fue muy valioso. No solo porque validó la importancia del curso, sino también porque abrió la puerta a la posibilidad de consolidar esta experiencia en el colegio, con un enfoque más específico en la enseñanza de la geometría a través de GeoGebra. Este trabajo no solo impactó a los estudiantes, sino que también despertó nuestro interés en seguir modificando los recursos didácticos para que los estudiantes formulen un argumento inductivo de forma explícita, reconociendo cada elemento que lo compone.

6.2. Verificación de la conjetura del experimento de enseñanza

Nuestra conjetura era que los estudiantes podían aproximarse a la producción de argumentos inductivos, mediante la solución de problemas geométricos con el uso de GeoGebra y tres recursos didácticos que acompañaban los enunciados. Los resultados nos permiten afirmar que la conjetura fue verificada. Los estudiantes lograron construir

argumentos inductivos en la mayoría de los casos, aunque con algunas limitaciones en la escritura precisa de los mismos. Como lo muestra el análisis presentado en el capítulo 5 (ver páginas 42-145), los estudiantes lograron identificar elementos como el dato y la aserción con mayor precisión, mientras que la formulación de la garantía presentó mayores desafíos, requiriendo mayor orientación por parte de la docente.

El experimento también permitió observar que los recursos diseñados cumplieron con su propósito de facilitar la estructuración del argumento inductivo. En compañía de GeoGebra no solo facilitaron la exploración y descubrimiento, sino que también promovieron la formulación de argumentos. Este hallazgo valida la pertinencia de la propuesta y sugiere que, con ajustes en el diseño de las tareas y un mayor énfasis en la escritura del patrón de generalización, los estudiantes podrían consolidar su capacidad para producir argumentos inductivos.

6.3. Proyecciones del trabajo

Nuestro trabajo tuvo un primer impacto en la comunidad académica, con una ponencia en el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, evento que fue realizado en el año 2024 y que se dejó documentado en las memorias. En la comunicación, presentamos un ejemplo de argumentación inductiva de un grupo de tres estudiantes de grado octavo del colegio CoRe, presentando el enunciado de la tarea 3 y sintetizando aspectos de la interacción del grupo y del uso del cuestionario, la plantilla discursiva y del esquema argumentativo. La recepción fue positiva y generó reflexiones valiosas que, además de fortalecer las conclusiones de esta investigación, abriendo la posibilidad de transformar este trabajo en un artículo académico para someterlo a una revista especializada en Educación Matemática.

En términos de desarrollo futuro, una de las proyecciones más relevantes es la optimización de los recursos didácticos diseñados, adaptándolos a diferentes niveles educativos con el uso de GeoGebra para la solución de problemas geométricos. Por ejemplo, se podría explorar cómo los recursos funcionan en cursos regulares, no electivos, o cómo su efectividad varía al integrarse con otros softwares educativos. Esta línea de investigación no solo permitiría validar los recursos en otros escenarios, sino también ajustarlos para optimizar su impacto en la producción de argumentos inductivos.

Otra proyección clave es la posibilidad de replicar este modelo de enseñanza en otros colegios, incluidos aquellos en los que actualmente labora la autora del trabajo. Esta expansión contribuiría a evaluar cómo la metodología y los recursos pueden implementarse en diferentes entornos, ajustándose a las necesidades específicas de los estudiantes y las instituciones. El interés manifestado por la comunidad escolar del Colegio CoRe, sugiere que este tipo de iniciativas podría consolidarse como parte de un enfoque pedagógico continuo que integre la tecnología como mediadora del aprendizaje matemático.

Finalmente, este trabajo podría inspirar futuras investigaciones que exploren no solo la argumentación inductiva, sino también cómo los estudiantes transitan hacia otros tipos de argumentos, como el deductivo y el abductivo, dentro de un marco similar de tareas mediadas por GeoGebra.

Referencias bibliográficas

- Bravo, A., Arenas, J. y Pineda, E. (2019). El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, un enfoque de aprendizaje por problemas. *Revista Docencia Universitaria*, 20 (2), 55-67.
- Buitrago, A. y Martínez, J. (2012). *Actividad demostrativa y argumentación matemática en estudiantes de grado octavo*. [Tesis de Maestría], Universidad Pedagógica Nacional. Repositorio institucional: <http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/185>
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. ISBN: 978-958-501-036-9.
- Camargo, L., Perry, P., Molina, O., Samper, C. y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA* 18(3), 313-338. <http://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749>.
- Copi, I. y Cohen, C. (2013). Conceptos básicos de lógica, *Introducción a la lógica.*, Ed. Limusa, S.A. de C.V Grupo Noriega. México (p.p. 4-22). ISBN: 978-607-05-0325-2
- García, A. (2015). Importancia de la competencia argumentativa en el ámbito educativo: una propuesta para su enseñanza a través del role playing online. *RED-Revista de Educación a Distancia*, 1(45), 1-20.
- Hernández, H. y Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. *Innovación Educativa*, 13(63), 61-73.
- Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities. *PME*, 32(3) 289-296.
- Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 109–134.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.

- Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educativa: Formación de Profesores*, 53(2), 129–150.
- Planas, N. y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marba y M. Briceño (Eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp. 275-300). Fondo Editorial Mario Briceño Irigorri.
- Rabardel, P. (1995). Les Hommes et les Technologies, Approche Cognitive des Instruments Contemporains. *Paris: U. Série Psychologie*.
- Reuter, F (2023). Explorative mathematical argumentation: A theoretical framework for identifying and analyzing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 112(3), 415–435. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5>.
- Ruiz, F. (2012). Caracterización y evolución de los modelos de enseñanza de la argumentación en clase de ciencias en la educación primaria (Tesis doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona. Depósito digital de documentos de la UAB.
- Rumsey, C., y Langrall, C. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, 22(7), 412-419.
- Samper, C. y Toro, J. (2016). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista virtual Universidad Católica del Norte* 50, 367-382.
- Sua, C. y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educación matemática [online]*, 31(1), 7-37.

Anexos

Anexo 1 – Enunciado y planeación de la tarea preliminar

Tarea preliminar (TP): Puntos equidistantes a un punto (lunes 28 de agosto)
<p><i>Enunciado 1 dirigido a los estudiantes</i></p> <p>Con material concreto (papel crepé), representen diez puntos de un color rojo y un punto de color verde, denominado M. Luego, dispóngalos en una superficie lisa (sin rayas), puede ser en el tapete en el que están sentados.</p> <p>Muestren la figura que se obtiene si los diez puntos de color rojo se encuentran a la misma distancia del punto M. Esto quiere decir que los puntos equidistan de M.</p> <p>Piensen en un punto imaginario T, dialoguen en dónde pondrían al punto T para que cumpla la condición de estar a la misma distancia de M que los diez puntos de color rojo. ¿En dónde colocarían el punto T?</p> <hr/> <p>Escriban por qué colocarían al punto T en ese lugar</p> <hr/> <hr/> <hr/> <p>¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de M que los diez puntos de color rojo?</p> <hr/> <hr/> <hr/>

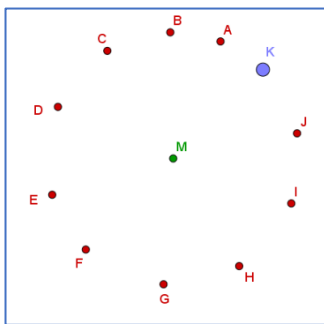
Enunciado 2 dirigido a los estudiantes de sexto y séptimo:

1. Completen los espacios:

Los puntos de color rojo están _____ del punto M . Observo que los puntos de color rojo pertenecen a _____.

Afirmo que un punto K que tiene la misma condición que los puntos rojos cumple que _____ . Esto pasa porque _____.

2. Completen el siguiente diagrama



Los puntos rojos están a la misma distancia de _____

K está a la misma distancia de _____ que los puntos rojos

K pertenece a _____



porque _____

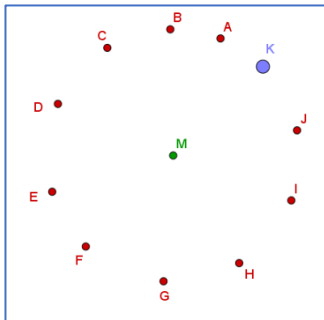
Enunciado 2 dirigido a los estudiantes de octavo:

1. Completen los espacios:

Los puntos de color rojo están _____ del punto M . Observo que los puntos _____ de color rojo pertenecen a _____.

Afirmo que un punto K que tiene la misma condición que los puntos rojos cumple que _____ . Esto pasa porque _____.

2. Completen el siguiente diagrama



Los puntos rojos están a la misma distancia de _____

K está a la misma distancia de _____ que los puntos rojos

K pertenece a _____



porque _____

Conceptos involucrados

Equidistancia: Dos o más pares de puntos son equidistantes si la distancia entre los puntos de cada par es igual.

Circunferencia: Una circunferencia con centro M es el conjunto de puntos del plano que equidistan de M .

Descripción del enunciado 1 – Tarea preliminar

El primer enunciado busca que los estudiantes representen once puntos con papel crepé, destacando uno, llamado M de los demás. Luego, deben ubicar diez puntos de tal forma que equidisten de M . De esta forma representan la condición que constituyen el conjunto referencial que está dada en el enunciado. A continuación, deben analizar el lugar geométrico de los 10 puntos hasta encontrar que pertenecen a una circunferencia con centro en el punto M . Después, deben analizar la posición que ocuparía un punto imaginario K si cumple la misma condición dada para los elementos del conjunto referencial, hasta darse cuenta de que el punto K pertenece a la circunferencia con centro en el punto M . Esto los debe llevar a suponer que cualquier punto que está a la misma distancia de M , como los diez puntos representados, pertenece a una circunferencia.

Gestión del enunciado 1 – Tarea preliminar

Al empezar la sesión, la docente les dice a los estudiantes que formen grupos de tres personas. Después, entrega a cada grupo un cuarto de papel crepé, una regla o escuadra, un compás, un pedazo de hilo y la hoja con el enunciado 1. Les pide que realicen la tarea y completen los espacios. Mientras los estudiantes trabajan, la docente va pasando por los grupos para responder dudas o preguntar por los procedimientos que hicieron para contestar las preguntas. En la Tabla 1 proponemos posibles preguntas/dudas de los estudiantes y la posible reacción de la docente.

Preguntas o dudas de los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Preguntan qué significa equidistancia o misma distancia.	Les sugiere a los estudiantes que sean ellos quienes representen puntos de tal forma que dos de ellos estén a la misma distancia de otro. Luego les pide decir cuál es el compañero que equidista de los otros dos.
Consideran que los puntos se encuentran formando una cruz o un polígono.	Les pide comprobar con herramientas de medida colocando puntos sobre los lados del polígono o sobre la cruz. Les pregunta si los puntos podrían estar en los lados de un triángulo o del polígono que hayan mencionado.
Al responder el ítem 2 mencionan un círculo en lugar de una circunferencia.	Les pide recordar qué figuras han visto en geometría y si han establecido una diferencia entre circunferencia y círculo. Les señala puntos en el círculo y les pregunta si estos están a la misma distancia de M que los diez puntos iniciales.

Intentan representar a K	Les recuerda que la idea es imaginar qué pasa con el punto sin representarlo.
Al responder el ítem 3 refieran a la pregunta hecha, es decir digan que T tiene que estar a la misma distancia a M que lo demás puntos.	Les aclara que la condición de estar a la misma distancia es lo que les piden, pero ellos deben decir por qué cumple la condición al estar en donde lo pusieron. Señala con el dedo un punto en el interior o en el exterior de la circunferencia y pregunta: ¿Qué pasaría si estuviera acá o acá?
Al responder el ítem 4 no generalicen	¿Qué podría asegurar de otros puntos no representados? ¿Por qué? ¿Puede haber un punto de la circunferencia que no esté a la misma distancia del centro que los demás puntos de la circunferencia?

Descripción del enunciado 2 - TP

El segundo enunciado de la tarea está pensado de acuerdo con las estrategias propuestas por Rumsey & Langrall (2016) y los formatos de diagrama que propone Kunz (2010). La idea es orientar a los estudiantes, de tal manera que vayan diferenciando los elementos de un argumento: lo que les dan como dado (dato), el elemento descubierto (dato), la conclusión de que un objeto no explorado que tenga la condición dada tiene la propiedad descubierta (aserción) y que sustenten la conclusión generalizando que se cumple para cualquier objeto que cumpla la condición (garantía), mediante diferentes maneras de expresar un argumento inductivo.

En el ítem 1, se pone en funcionamiento la primera estrategia discursiva de Rumsey & Langrall (2016). Para ello, se usa una plantilla de tal forma que los estudiantes completen la frase y así vayan aprendiendo una forma de expresar el argumento.

Respecto al ítem 2, se pone en funcionamiento la estrategia sugerida por Kuntze (2008), el cual propone que los estudiantes completen un diagrama y así, visualmente vayan identificando los componentes de un argumento inductivo.

En la segunda parte de la tarea, hemos decidido diferenciar el enunciado por cursos, poniendo un grado mayor de dificultad a los estudiantes de grado octavo, para analizar qué variaciones podemos apreciar en las respuestas. A los estudiantes de grados sextos y séptimos, les pedimos buscamos

una aserción que es una afirmación, mientras que, a los estudiantes de grado octavo, les pedimos una aserción que es una negación.

Gestión del enunciado 2 - TP

Para la segunda parte del problema, la docente entrega por grupos el enunciado y les pide diligenciar los formatos.

Mientras los estudiantes rellenan las plantillas y el diagrama, la docente va pasando por los grupos. Después presentan lo que completaron y se discuten las respuestas. En la discusión grupal, es posible prever las siguientes reacciones para las respuestas dadas por los estudiantes:

Respuestas de los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
En la primera parte de la plantilla, mencionan que los puntos rojos están sobre una circunferencia.	Pregunta: ¿La circunferencia no fue lo que descubrieron? Les recuerda que en esa parte se escribe la condición que debía cumplir el objeto, no lo que descubrieron al cumplir la condición.
En la segunda parte de la plantilla, mencionan que los puntos rojos están a la misma distancia de M .	¿Será que cuando menciona “observo”, se refiere a las construcciones iniciales realizadas por ustedes? Cuando mencione lo que observaron, se refiere a lo que ustedes descubrieron cuando solucionaron el problema, no a la condición que debía cumplir el objeto.
En la tercera parte de la plantilla, puede que refieran nuevamente a la distancia	Preguntar por ¿A qué se refiere con “tener la misma condición”? La equidistancia es la condición ya mencionada, ¿no? ¿qué fue lo descubierto por ustedes en donde debe estar el punto K ?
En la cuarta parte de la plantilla, puede que repitan la condición, del punto específico.	He de aclarar que deben pensar para cualquier punto que cumpla la condición de que sean equidistantes al punto M .

Como se evidencia en la tabla, lo más seguro que suceda es que los estudiantes inviertan sus respuestas entre equidistancia y circunferencia. La idea es aproximar al estudiante, mostrando

claves del formato como por ejemplo el “observo que”, “afirmo que”, “esto pasa porque”, entre otros. Respecto al diagrama de argumento inductivo, les menciono que antes de la fecha deben mencionar primero la condición inicial para los diferentes puntos. Luego, la condición que les dieron para un punto que imaginaron. Después de la flecha, se escribe lo que descubrieron y debajo de la flecha, lo que se puede imaginar para cualquier punto que cumpla la condición inicial.

Anexo 2 – Enunciados de las tareas

Tarea 1. Puntos equidistantes a dos puntos (13 de septiembre del 2023)

Enunciado 1.

1. Con ayuda del programa de geometría dinámica, GeoGebra, representar la siguiente situación:
 - a. Construir dos puntos y llamarlos A y B .
 - b. Construir un punto, llamarlo M , que sea equidistante de A y de B (es decir, que M se encuentre a la misma distancia de A y de B).
 - c. Construir un punto N que equidiste de A y de B .
 - d. Construir un punto O equidistante de A y de B .
 - e. Construir un punto P equidistante de A y de B .
2. Repite la situación cuantas veces sea necesaria, hasta que descubras en dónde se ubican los puntos. ¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos A y B ?

3. Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginen un punto Z de tal forma que equidiste de A y B ¿En dónde pondrían al punto Z ?

4. ¿Por qué colocarían al punto Z en ese lugar?

5. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de A y de B ?

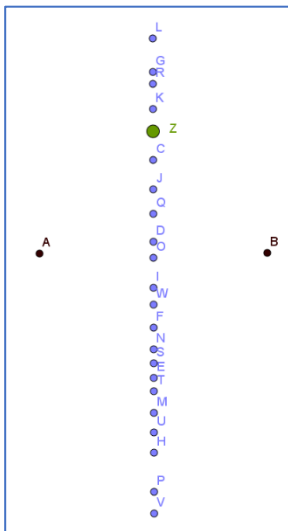
Enunciado 2.

1. Completen los siguientes espacios:

Observo que los puntos _____ que _____ de los puntos A y B , pertenecen a _____. Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a _____.

Esto pasa porque _____

2. Completen el siguiente diagrama:



Los puntos azules están a la misma distancia de _____ y de _____

Descubrí que los puntos azules pertenecen a _____

Z está a la misma distancia de _____ y de _____, igual que los puntos azules.

Z pertenece a _____

porque

Tarea 2. Hecho geométrico de la Mediatriz

Enunciado 1 dirigido a los estudiantes

1. Realicen la siguiente construcción utilizando GeoGebra:
 - Construir dos puntos y llamarlos A y B .
 - Construir el segmento AB .
 - Utilizar la herramienta mediatriz para construir la mediatriz del segmento AB . Llamarla m y resaltarla de un color distinto al del segmento.
2. Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad de la mediatriz m respecto al segmento AB . Según lo explorado, ¿Qué propiedad cumple la mediatriz respecto al segmento?

3. Minimicen el programa GeoGebra. Ahora, lean y analicen la siguiente situación:

Juan encuentra un trozo de palo en el parque. Su amiga Carla le dice que podrían buscar otro trozo de palo para formar una cruz. Juan le sugiere colocar el segundo palo como si fuera la mediatriz del primero.

¿Están de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz? Si ___ No___ Justifiquen su respuesta.

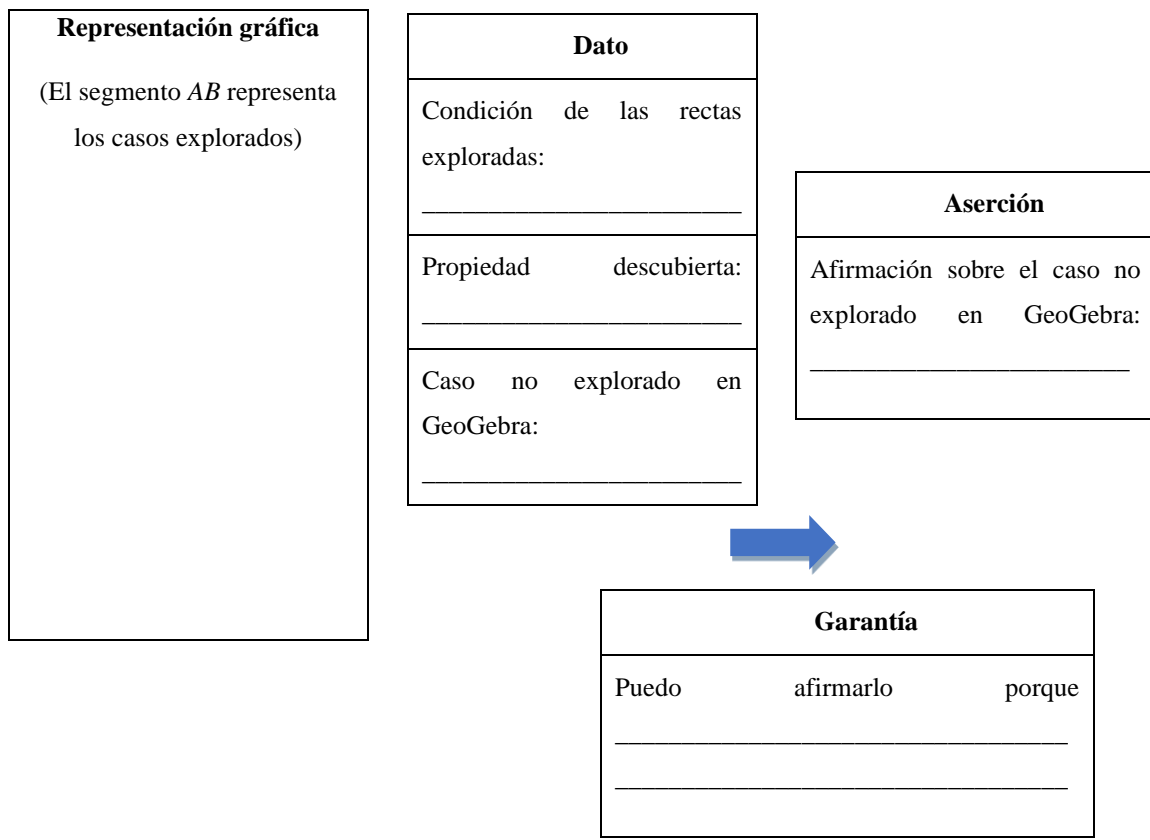
4. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre la mediatriz de cualquier segmento?

Enunciado 2 dirigido a los estudiantes

1. Completen los siguientes espacios:

Observo que _____
 cumple que _____. Afirmo que la
 mediatriz de un segmento MN , cumple que _____.
 Esto pasa porque _____

2. Completar el siguiente diagrama:



Tarea 3. Intersección de las mediatrices de un triángulo

Enunciado 1 dirigido a los estudiantes

1. Realicen la siguiente construcción utilizando GeoGebra:
 - Construir el triángulo ABC .
 - Construir las mediatrices de los segmentos AB , BC , AC .
 - Con la herramienta *intersección*, hallar el punto de intersección de las mediatrices, llamarlo K .
2. Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices:

3. Elaboren un argumento exponiendo lo que descubrieron junto con la justificación que les permite afirmar que la propiedad anterior es cierta.

Enunciado 2 dirigido a los estudiantes

1. Completen los siguientes espacios:

Dato:

- Condición de los casos explorados:

- Propiedad descubierta:

- Caso no explorado:

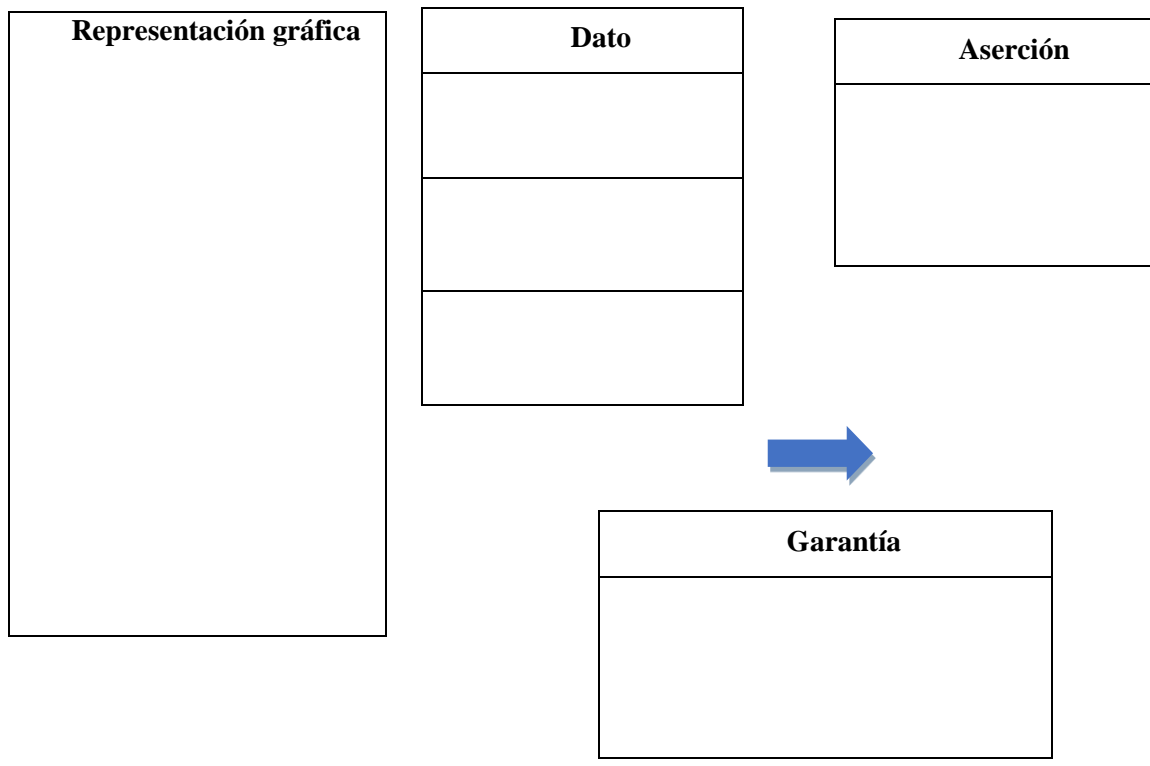
Aserción:

Afirmación del caso no explorado _____

Garantía:

Puedo afirmarlo porque _____

2. Completar el siguiente diagrama:



Tarea 4. Triángulos separables*Enunciado 1 dirigido a los estudiantes*

1. Realicen la siguiente construcción utilizando GeoGebra:
 - Construir el triángulo ABC .
 - Construir el punto medio del segmento AB . Llamarlo P .
 - Ubicar el punto C de tal forma que P equidiste de A , B y C .
2. Dejando fijos los puntos A y B , arrastren el punto C , para investigar qué propiedad cumple el triángulo ABC cuando el punto P equidista de los vértices A , B , C . Escriban la propiedad descubierta:

3. Escriban lo que pueden afirmar de un triángulo no explorado en GeoGebra, que cumpla la condición. (Sugerencia: imaginen un triángulo MNO y el punto medio de uno de los lados).

4. ¿Qué afirmación general les permite concluir lo que dicen sobre el triángulo no explorado?

Enunciado 2 dirigido a los estudiantes

1. Completen los siguientes espacios:

Dato:

- Condición inicial de los casos explorados: _____
- Propiedad descubierta de los casos explorados: _____
- Condiciones iniciales del caso no explorado: _____

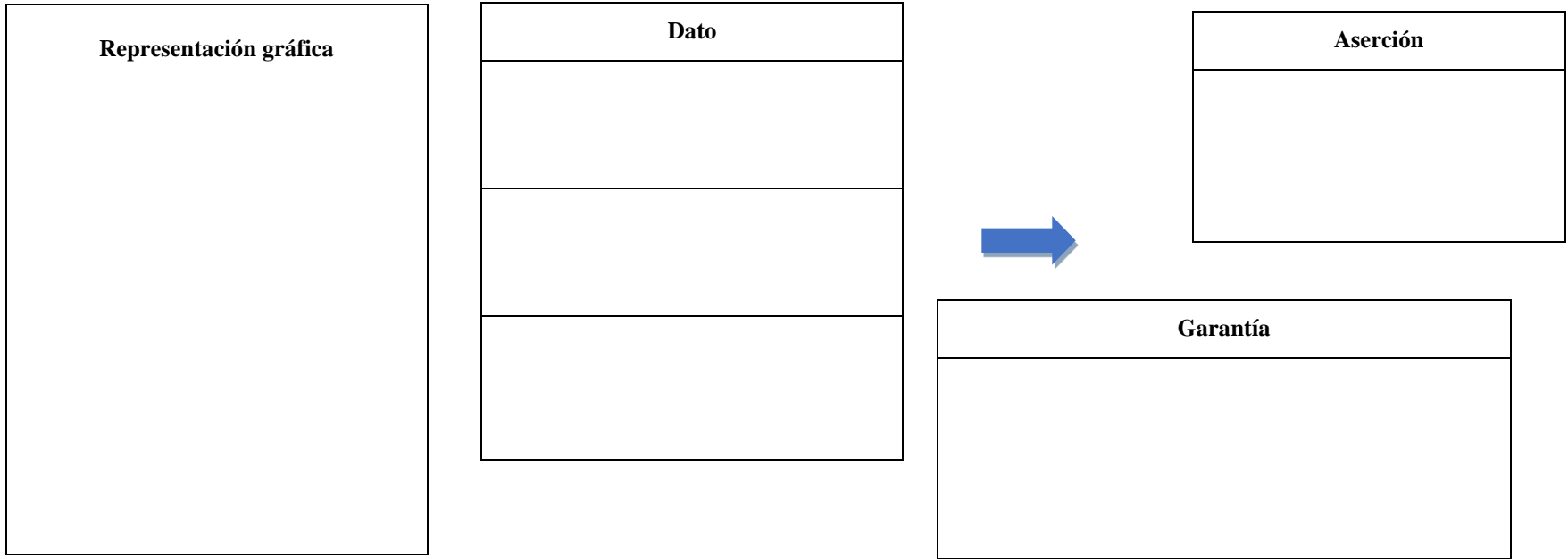
Aserción:

Afirmación sobre el caso no explorado: _____

Garantía:

Puedo afirmarlo porque: _____

2. Completar el siguiente diagrama:



Anexo 3 – Instrucciones de grabación para los estudiantes


Grupos e integrantes:

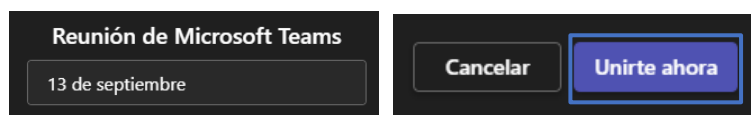
Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo 5	
Juan P.	6°	Juan M.	6°	Alejandro	7°	Laura	8°	Daniela	8°
Ana H.	6°	Sofía	7°	Samir	7°	Sara	8°	Mariana S.	8°
Juan A.	6°	Juliana	7°	Martín	7°	Mariana R.	7°	Paula	8°

Estudiantes encargados de los computadores por grupo

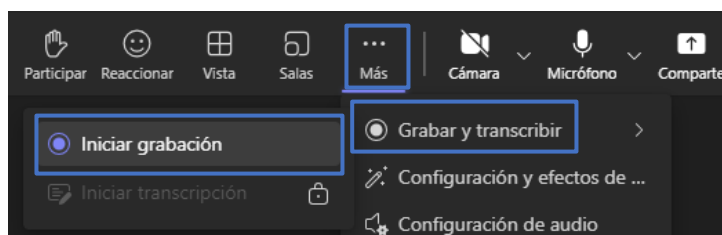
Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo 5	
Juan P.	6°	Juan M.	6°	Alejandro	7°	Laura	8°	Daniela	8°


Instrucciones para grabar en la plataforma Teams:

1. Abrir la aplicación de GeoGebra.
2. Ingresar a la aplicación de Teams.
3. En la parte lateral izquierda se encuentran los canales por grupo, deben ingresar al canal correspondiente de acuerdo con la tabla anterior.
4. Luego de ingresar al canal, deben iniciar la grabación (con cámara encendida) dando clic en el ícono,  escribir en el título de la grabación la fecha de la sesión y dar clic en “unirte ahora”. Por ejemplo:



5. Ahora, para grabar pantalla, deben: dar clic en el ícono “más”, luego en “grabar y transmitir” y después en “iniciar grabación” como se muestra a continuación:



6. Para finalizar la grabación, deben primero “detener grabación” con los pasos establecidos en el ítem 5 y luego dar clic en el ícono.  Además, deben guardar el archivo de GeoGebra después de terminar cada sesión en la carpeta “Curso electivo” del canal.

Anexo 4 – Acuerdos de GeoGebra

- *Eliminar los ejes y la cuadrícula de la vista geométrica:* Clic derecho en la pantalla y luego, clic izquierdo en “ejes”. Mismo procedimiento para “cuadrícula”.
- *Despliegue de herramientas con íconos:* En la parte superior se encuentran íconos como punto, recta, triángulo y demás... Al dar clic derecho en la flecha que aparece debajo de cada uno de los íconos, se despliegan diferentes herramientas que pueden ser utilizadas.
- *Construcción de puntos:* Parte superior, clic en el centro del ícono “punto A”. Después, clic en la pantalla.
- *Renombrar puntos:* Clic en ícono “mueve”; luego, clic izquierdo en el punto y, clic derecho en “renombrar”.
- *Medida de distancias:* Clic en ícono de ángulo; luego, clic en “distancia o longitud” y, clic en los dos puntos (ejemplo A y B).
- *Disminuir el número de decimales:* Clic en “opciones”. Luego, “redondeo” y “1 cifras decimales”.

Anexo 5 – Planeación detallada de los enunciados de las tareas

Descripción del enunciado 1 – Tarea 1

El ítem 1 del enunciado invita a los estudiantes a representar varios puntos, con el uso del GeoGebra y ubicarlos para que cumplan la condición de equidistar de dos puntos A y B . Este ítem contribuye a que los estudiantes identifiquen la condición dada en el enunciado del problema. Para resolver el ítem 2, los estudiantes deben descubrir que aquellos puntos que equidistan de A y de B forman una recta, identificando una propiedad distinta que cumple la condición inicial. Para hacer el descubrimiento pueden, por ejemplo, trazar una recta que contenga los puntos, arrastrar puntos que no determinan la recta para ver cuándo pertenecen y cuando no pertenecen a ella, construir un punto que pertenece a la recta y arrastrarlo sobre la recta comparando las distancias, encontrar el punto medio del segmento y usarlo para construir la recta, arrastrar los puntos A y B y reacomodar los puntos para lograr la equidistancia, etc. En los ítems 3 y 4, los estudiantes al imaginar, sin construir en GeoGebra, un punto que equidiste de A y de B , identifican que el punto no construido debe pertenecer a la recta formada por los puntos explorados anteriormente, teniendo presente la propiedad encontrada en el ítem 2. Finalmente, en el ítem 5, los estudiantes concluyen que

cualquier punto, no explorado, que está a la misma distancia de dos puntos, pertenece a una misma recta. La docente les indica que la recta descubierta tiene un nombre particular, llamada *Mediatriz*.

Gestión del enunciado 1 – Tarea 1

La sesión inicia con la explicación por parte de la docente, con el uso del Video Beam, de propiedades, herramientas e íconos del aplicativo de GeoGebra, que serán utilizados durante la sesión. Luego de entregar el enunciado 1 a los estudiantes, la docente va a ir pasando por los grupos para preguntar por lo que están haciendo, lo que se han dado cuenta, el ítem en que se encuentran y si tienen alguna duda. En la siguiente tabla, se describen las posibles preguntas que surjan en los estudiantes, durante la primera parte de la sesión:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Ítem 1	
Pregunten por lo que quiere decir que “ M se encuentre a la misma distancia de A y de B ”.	Mide la distancia del punto A al punto M . Luego, mide la distancia del punto B al punto M , ¿son las mismas? Entonces ¿qué quiere decir que el punto M se encuentre a la misma distancia de A y de B ? por lo tanto M ...
Pregunten cómo mover los puntos para que la distancia cambie.	Dale clic en el ícono “mover”. Luego arrastra cualquiera de los puntos construidos, ¿qué sucede con las distancias?
Solo localicen puntos en un semiplano (determinado por la \overleftrightarrow{AB}).	Proponer que busquen más puntos hasta que perciban que se trata de una recta y no de un rayo o un segmento.
Si utilizan la herramienta de <i>segmento</i> , para hacer los segmentos con extremos en los puntos construidos.	Enseñar a poner de color claro los segmentos, para que lo que se destaque en la construcción, sean los puntos y no los segmentos.
Deciden ubicar los puntos que estén a la misma distancia de A o de B , no de ambos.	Revisar construcción y mostrar un ejemplo de algún punto que no esté cumpliendo con la condición inicial.

	<p>Preguntar ¿el punto tiene la misma distancia tanto de A, como de B?</p> <p>Recordar a los estudiantes que los puntos deben estar en la misma distancia de A y de B.</p>
<p>Consideran que los puntos se encuentran formando una circunferencia u otro objeto geométrico.</p>	<p>Preguntar si uno de los puntos que esté sobre el objeto geométrico, cumple la condición de estar a la misma distancia de A y B.</p>
Ítem 2	
<p>En la exploración solo agregan otros puntos libres.</p>	<p>Si dicen que es una recta, sugerir que construyan la recta.</p>
<p>Si solo hacen la recta y no más.</p>	<p>Hay que sugerir que arrastre un punto y cuando se sale y cuando no está en la recta.</p>
<p>Si no se les ocurre mover a los puntos A y a B.</p>	<p>Cambiar las posiciones de a y b para reacomodar los puntos. ¿Por qué no se puede mover a A y a B? ¿Siempre será una recta?</p>
<p>En la socialización, los estudiantes escriban que la figura geométrica corresponde a “un segmento” o “un rayo”.</p>	<p>La docente pregunta a los estudiantes si existe diferencia entre los tres objetos geométricos y si están de acuerdo con lo establecido por el grupo. Luego, pregunta por los extremos del segmento (rayo o línea) y, si existe un punto que no esté dentro del segmento, que cumpla con la condición de equidistar tanto de A como de B.</p>
<p>En la socialización, los estudiantes escriban que la figura geométrica corresponde a “una línea”</p>	<p>Pregunta por lo que entienden por “línea”. Luego, menciona que en la electiva no nos vamos a referir a línea como objeto geométrico, sino que deben ser más específicos, como una recta, un segmento, un rayo o una semirrecta.</p>
Ítem 3	

Intentan representar al punto Z	Les recuerda que la idea es imaginar qué pasa con el punto sin representarlo. Luego, les indica que para que realicen mejor el ejercicio, deben minimizar el programa de GeoGebra, para contestar los ítems del 3 al 5.
En la socialización, refieran a que Z tiene que estar a la misma distancia de A y de B , en vez de hacer referencia a la recta descubierta.	Preguntar ¿qué significa que estén a la misma distancia? ¿puede el punto Z no estar en la recta descubierta, pero sí equidistar de los puntos A y B ?
Ítem 4	
En la socialización, mencionen que Z debe estar en la recta porque “equidista de los demás puntos”.	Preguntar ¿ Z equidista de todos los puntos? ¿la distancia de Z a M es la misma que de Z a B ? o de cuáles puntos en particular debe equidistar el punto.
Ítem 5	
Al responder el ítem 5 los estudiantes no generalicen que cualquier punto que equidiste de A y B , debe pertenecer a la misma recta que los puntos construidos.	<p>Construye un punto que esté fuera de la recta y pregunta si aquel punto cumple con la condición.</p> <p>¿Dónde deben pertenecer para que cumpla la condición dada?</p> <p>¿Puede haber un punto de la recta que no esté a la misma distancia de los puntos A y B que los demás puntos de la recta?</p>
Descripción del enunciado 2 – Tarea 1	
<p>El segundo enunciado de la tarea utiliza las estrategias didácticas propuestas por Rumsey & Langrall (2016) y Kunz (2010) para que los estudiantes se acostumbren al formato que conlleva a generar un argumento inductivo. En el ítem 1, los estudiantes van a completar los espacios de tal forma que en la primera parte se evidencie que: el conjunto referencial es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B; y, que un subconjunto, correspondiente a los puntos construidos en GeoGebra, cumplen que pertenecen a la misma recta. En la segunda parte, los estudiantes deben afirmar que un punto no construido, que</p>	

cumple con la condición inicial, debe pertenecer a la recta formada por los puntos construidos anteriormente. Finalizan la oración, escribiendo la posible conjetura la cual surge de la exploración inicial de tal forma que soporte el enunciado dicho anteriormente. Por lo que el ítem 1 se establece con el fin de: hacer explícita la propiedad del conjunto referencial, mostrar alguna propiedad descubierta, considerar un punto no explorado e intentar generalizar.

En el ítem 2, los estudiantes deben completar un diagrama con la información anterior, en la cual se evidencia una representación gráfica en GeoGebra, un cuadro donde pondrán el conjunto referencial y los casos particulares, un cuadro donde pondrán la propiedad encontrada y un último cuadro, debajo de una flecha, en el que deben poner el por qué consideran que la aserción es cierta según lo explorado con el programa. El ítem 2 contribuye a que los estudiantes vayan identificando visualmente el comportamiento de un argumento inductivo, debido a sus tres componentes: Dato, aserción y garantía.

Gestión del enunciado 2 – Tarea 1

Mientras los estudiantes rellenan las plantillas y diagramas, la docente va pasando por los grupos revisando lo escrito por los estudiantes, respondiendo dudas, recordando las condiciones iniciales y la estructura que tienen los diagramas del segundo enunciado. Después de ello, los estudiantes presentan lo que completaron y se discuten las respuestas. Durante la discusión grupal, de acuerdo con las interacciones de los estudiantes, la docente tiene prevista las siguientes posibles dudas que surjan a través de la siguiente tabla:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Escribir “observo que los puntos que <i>están sobre una misma recta</i> de los puntos <i>A y B...</i> ”	¿Es correcto pensar en que la condición dada es la recta que contiene a los puntos construidos? Además, si se refiere a “ <i>una misma recta de A y B</i> ”, se puede entender como la recta que pasa por los puntos <i>A y B</i> . ¿cualquier punto de esa recta cumple la condición de equidistar de <i>A</i> y de <i>B</i> ?
No saber qué poner en “observo que los puntos ____ que ____”	¿Cuáles son los puntos que exploraron? ¿Qué condición le pusimos a estos puntos?
Escribir “... pertenecen a <i>los puntos que equidistan de A y de B</i> ”	Para la segunda parte, ¿en qué nos íbamos a enfocar? ¿qué observaron cuando construyeron los puntos? Los puntos equidistan de <i>A</i> y de <i>B</i> , pero así se construyeron. Aquí

	preguntan es por lo que observaron al realizar la construcción.
Escribir “Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a <i>una recta</i> ”.	¿Pertenece a cualquier recta? (Realizar un contraejemplo en GeoGebra con el computador del grupo de una recta que pase por Z , diferente a la mediatriz). ¿Esa recta cumple la condición inicial?
Escribir “Esto pasa porque <i>el punto Z equidista de ambos puntos A y B</i> ”	Esa es la condición. Pero miren que se estaría repitiendo parte de lo dicho anteriormente, ¿no? ¿Cuál fue la inferencia que hicieron para llegar a concluir que efectivamente el punto Z que equidista de A y de B , debe estar en la misma recta que los demás puntos construidos?
En la socialización intentan parafrasear lo dicho por otro grupo y no leen lo escrito en la hoja.	¿Por favor lees tal cual como lo pusiste en la hoja? No es necesario que intentes expresar de otra forma lo escrito, solo lee.
En la socialización si hay algún grupo que tienen respuestas parecidas	¿Creen que la respuesta del grupo XX es la misma que la del grupo XX? ¿por qué? Si hay diferencias, ¿Cuáles son?

Finalmente, la docente les informa a los estudiantes que lo que dan como dado corresponde al dato, el objeto descubierto a la aserción y la conclusión general que ocurre con cualquier objeto que cumpla con la primera condición, que también cumplirá lo descubierto por los objetos explorados, corresponde a la garantía.

Descripción del enunciado 1 – Tarea 2

El ítem 1 del enunciado invita a los estudiantes a construir las mediatrices del segmento AB , con el uso de GeoGebra. Este ítem contribuye a que los estudiantes identifiquen la condición inicial dada en el enunciado del problema.

Luego, en el ítem 2, los estudiantes deben descubrir que la mediatriz es perpendicular al segmento o que la mediatriz pasa por el punto medio del segmento AB . Los estudiantes al explorar con el software pueden identificar una o dos propiedades distintas a la condición inicial. Para hacer el descubrimiento, ellos pueden: construir puntos que pertenezcan a la recta y revisar si cumplen los puntos con equidistar tanto de A , como de B al arrastrar A y B para representar una familia de segmentos; construir el punto medio del segmento AB y luego arrastrar los puntos A y B para evidenciar si la recta m no contiene al punto medio o si el punto medio siempre pertenece a la intersección entre el segmento AB y la recta m ; intentar arrastrar la recta m , tomando un punto que pertenezca a la recta y darse cuenta que la posición de m depende de la posición del segmento AB ; construir otra recta que pase por el punto medio (al ojo) sin ser perpendicular para ver si coinciden; construir otra recta que pase por el punto medio, sin ser perpendicular para ver si coinciden cuando muevan el punto A o el punto B ; medir el ángulo formado por la recta y el segmento siendo el vértice el punto medio del segmento AB para ver si el ángulo es recto; utilizar la herramienta de *ángulo dada su amplitud* para mostrar que el ángulo es de 90° , entre otros.

En el ítem 3, los estudiantes leen una situación y la interpretan explicando que la sugerencia propuesta por Juan, de formar una cruz considerando de la mediatriz de un segmento, es correcta. Luego, deben justificarla usando la propiedad encontrada en el ítem 1. Esperamos que los estudiantes afirmen que la propuesta es correcta, debido a que la mediatriz debe pasar por el punto medio, hecho que sucede también en una cruz o que la mediatriz de un segmento es perpendicular a este y que, por lo tanto, debe suceder lo mismo para formar una cruz con los palos mencionados en el problema. Para finalizar, en el ítem 4, los estudiantes concluyen que la mediatriz m de cualquier segmento no representado por el segmento AB , cumple que m

es perpendicular al segmento AB , y/o que la intersección entre la recta m y el segmento AB es el punto medio de este segmento.

Gestión del enunciado 1 – Tarea 2

La sesión inicia con la explicación por parte de la docente, con el uso del Video Beam, del uso del arrastre en GeoGebra. Para ello, la docente construye un segmento MN y arrastra los puntos M y N en diferentes lugares de la pantalla para que el segmento quede en diferente posición y longitud. Luego pregunta:

¿Qué tienen de diferente los segmentos?

¿Al construir un segmento MN con el programa, este puede representar varios segmentos?

¿Por qué?

La idea es que los estudiantes identifiquen que, con el uso del arrastre en GeoGebra, se pueden representar varios segmentos a partir de uno construido, al arrastrar los extremos que son objetos geométricos libres (Molina y Samper, 2019).

Después, la docente les muestra a los estudiantes que existe una opción de GeoGebra llamada mediatriz que pueden utilizar para resolver el primer ítem del primer enunciado de la tarea. Luego de entregar el enunciado 1, la docente va a ir pasando por los grupos para preguntar cómo van, qué se han dado cuenta cuando resuelvan el segundo ítem y si tienen alguna duda específica. En la siguiente tabla, se describen las posibles preguntas que surjan en los estudiantes, durante la primera parte de la sesión:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Ítem 1 - Construcción	
Pregunten por lo que quiere decir que la recta m corresponde a la mediatriz del	Construye un punto en la recta. ¿Ese punto equidista de A y de B ? ¿Cumple con la definición de equidistar de ambos puntos?

segmento AB si no fue construida con los puntos que equidistan de A y de B .	
Pregunten cómo construir el segmento AB o la mediatriz del segmento.	Mencionar en dónde se encuentran ubicadas las herramientas que necesiten y recordar que ya se había realizado un trabajo de construcción de segmentos.
No utilicen la herramienta mediatriz para trazar la mediatriz del segmento AB , sino que construyan la recta a partir de algunos puntos que equidistaran de A y de B .	Arrastrar alguno de los extremos y preguntar si la recta sigue cumpliendo con ser la mediatriz del segmento AB . Mencionar que, en GeoGebra, la propiedad que se construye, como por ejemplo la mediatriz, debe siempre mantenerse así se muevan los puntos libres de la construcción.
No se acuerden cómo etiquetar a la recta m .	Decirles que existe un documento en Word donde muestran los pasos a seguir para nombrar un objeto.
Ítem 2 (exploración) <i>Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad de la mediatriz m respecto al segmento AB. Según lo explorado, ¿Qué propiedad cumple la mediatriz?</i>	
Pregunten qué significa <i>explorar la representación</i> para descubrir una propiedad.	Explorar significa reacomodar los objetos hasta encontrar una propiedad invariante, quiere decir que no cambia, siempre sucede.
Intenten arrastrar puntos o rectas dependiente	En GeoGebra algunos objetos geométricos dependen de otros

Proponen alguna característica de la mediatriz de un segmento, que no es cierta como decir que es un segmento,	Buscar un no ejemplo y preguntarles si cumple para la recta de cualquier segmento representado por AB .
Descubren que se intersecan, pero no se dan cuenta que es perpendicular que pasa por el medio.	Descubren que se intersecan, pero no se dan cuenta que es perpendicular que pasa por el medio.
No arrastren los puntos A y B o los arrastren procurando variaciones mínimas del segmento para encontrar la posible característica encontrada.	Sugerir arrastrar los puntos para corroborar que la característica encontrada si cumpla en los otros casos. Sugerir que pongan a A y a B en situaciones extremas.
Si construyen el segmento AB horizontal y arrastran los puntos A y B hacia la derecha o izquierda.	Sugerir mover los puntos para otros espacios que no sean los usuales (horizontal o vertical).
Si una de las conclusiones que hacen es que existe un punto de intersección entre el segmento y la recta.	Preguntar por la relación que hay entre el punto de intersección y el segmento AB
En la socialización, los estudiantes escriban que el ángulo que la conforma es recto.	Si el ángulo es recto, ¿Qué relación existe entre el segmento y la recta?
Ítem 3 (problema) <i>¿Están de acuerdo con la opción de Juan para formar la cruz? Si ___ No ___ Justifiquen su respuesta.</i>	
Intentan representar la situación de la cruz en una hoja.	¿Ellos lo pueden hacer? En la situación no dice que no se pueda

Respondan que no, porque una cruz puede formar una “X” y no cumpliría con ser la mediatriz.	Mencionar que es una cruz convencional de las religiones cristianas.
En la socialización respondan que sí, porque es recto	Preguntar ¿qué significa que sea recto?
Ítem 4 (conclusión) ¿Qué conclusión pueden sacar sobre la mediatriz de cualquier segmento?	
Mencionen que la intersección de la recta y el segmento sea el punto medio de la recta.	Preguntar ¿Una recta tiene punto medio? ¿el punto medio es con respecto a quién?
Mencionen como conclusión que la recta equidista de los puntos A y B	¿Pero esa característica no se había concluido en la clase anterior?
Descripción del enunciado 2 – Tarea 2	
<p>Para el segundo enunciado de la tarea, se modifican los formatos propuestos en las estrategias didácticas de Rumsey & Langrall (2016) y Kunz (2010), debido a que los estudiantes ya han trabajado en completar algunas plantillas para generar argumentos inductivos. En el ítem 1, los estudiantes deben saber expresar que el conjunto referencial son las mediatrices de los segmentos. Además, a raíz de la exploración de un subconjunto de mediatrices de los segmentos representados por el segmento AB, deben expresar la característica encontrada; bien sea que la intersección entre la recta y el segmento corresponde al punto medio del segmento AB, o que la recta m es perpendicular al segmento MN o ambas. Luego, puedan afirmar que la mediatriz de un segmento MN no explorado, es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. Finalizan la oración, escribiendo la posible conjetura la cual surge de la exploración inicial, de tal forma que soporte el enunciado.</p> <p>En el ítem 2, los estudiantes deben completar un diagrama con la información anterior. En el cuadro de <i>representación gráfica</i> los estudiantes van a dibujar un segmento MN y su mediatriz.</p>	

Luego, en el cuadro del *dato*, van a escribir que la condición de las rectas exploradas corresponde a los segmentos representados por el segmento AB y sus mediatrices; la propiedad descubierta, correspondiente a que en las mediatrices exploradas se cumple que la mediatriz es perpendicular al segmento por el punto medio; y, la característica inicial del caso no explorado, siendo que la recta n es mediatriz del segmento MN . Para el segundo cuadro, *garantía*, los estudiantes escriben por qué consideran que la afirmación es correcta, según lo evidenciado durante la exploración; y finalmente, en el tercer cuadro de *aserción*, los estudiantes establecen que el segmento MN es perpendicular a la recta n , o que la intersección entre MN y n es el punto medio del segmento MN . El ítem 2 contribuye a que los estudiantes vayan estructurando visualmente el comportamiento de un argumento inductivo, por medio de los tres componentes: Dato, aserción y garantía.

Gestión del enunciado 2 – Tarea 2

Mientras los estudiantes rellenan las plantillas y diagramas, la docente va pasando por los grupos revisando lo escrito por los estudiantes, respondiendo dudas, recordando las condiciones iniciales y la estructura que tienen los diagramas del segundo enunciado. Después de ello, los estudiantes presentan en plenaria lo que completaron. De acuerdo con las interacciones de los estudiantes, la docente tiene prevista las siguientes posibles dudas o expresiones que surjan a través de la siguiente tabla:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Los estudiantes no saben qué contestar en la plantilla en la primera parte del ítem 1, debido al cambio de formato	Recordar a los estudiantes que la primera parte del esquema hace referencia a las condiciones dadas en el problema.
Los estudiantes representan en el primer cuadro del ítem 2, los palos de la situación anterior.	Acordar que la representación debe ser acorde a lo contestado en el ítem 1 del segundo enunciado.

No saber qué poner en el <i>dato</i>	Mencionar a los estudiantes que el dato está estructurado en tres partes. La primera que hacer referencia a la construcción que realizaron al inicio; la segunda, que hace referencia a la característica encontrada al explorar la representación en el programa y la tercer que hace referencia al segmento no explorado, para este caso el segmento <i>MN</i> y su mediatriz.	
No saber qué poner en la <i>garantía</i>	¿A qué llegaron en la situación de la cruz? La mediatriz de un segmento cualquiera, ¿qué cumple?	
No saber qué poner en la <i>aserción</i>	¿Qué concluyes con respecto al segmento <i>MN</i> y la mediatriz?	

Descripción del enunciado 1 – Tarea 3

El ítem 1 del enunciado invita a los estudiantes a construir las mediatrices de los segmentos del triángulo ABC , y el punto de intersección con el uso de GeoGebra. Esta primera parte, contribuye a que los estudiantes identifiquen la condición inicial dada en el enunciado. Luego, el ítem 2 permite a los estudiantes explorar la situación arrastrando los vértices del triángulo, para descubrir alguna propiedad que los estudiantes crean que sea cierta, sin importar la generalización a la que lleguen los estudiantes, debido a que la intención con la tarea 4 consiste en que los estudiantes se den cuenta que un argumento inductivo no necesariamente es cierto, porque el descubrimiento se hace construyendo algunos casos, no todos los posibles. Algunas propiedades que pueden afirmar los estudiantes son: los vértices del triángulo pertenecen a una circunferencia con centro en K , los vértices equidistan del punto K , el punto K siempre pertenece en la región del triángulo (dentro), entre otros.

Para hacer el descubrimiento, los estudiantes pueden: arrastrar uno de los vértices en forma circular para visualizar el arrastre guiado que tiene el punto K (Arzarello et al. En Molina &

Samper, 2019), intentar arrastrar el punto K para confirmar que el punto K depende de otros objetos geométricos, construir una circunferencia con centro en K donde el radio es la distancia entre K y uno de los vértices para saber si los otros vértices también pertenecen a la circunferencia construida, medir las distancias de KA , KB , KC para identificar si las distancias son iguales, construir una circunferencia con la herramienta de *tres puntos* y arrastrar los vértices para intentar identificar una relación entre la circunferencia y el punto K , entre otros.

En el ítem 3, los estudiantes deben elaborar un argumento, según como se ha venido estableciendo durante las sesiones anteriores respecto al patrón de generalidad. Lo esperado sería que mencionen que la propiedad que ellos encuentren es cierta porque todos los casos explorados en GeoGebra que cumple la condición inicial también cumplen la propiedad descubierta.

Gestión del enunciado 1 – Tarea 3

La sesión inicia con la explicación por parte de la docente, con el uso del Video Beam, de la ubicación de las herramientas necesarias para desarrollar el primer enunciado: construcción de un triángulo y punto de intersección de dos rectas. Luego de entregar el enunciado 1, la docente va a ir pasando por los grupos para preguntar por la construcción realizada de acuerdo con el primer ítem, la propiedad encontrada para responder al segundo ítem y si tienen alguna duda específica durante la solución del enunciado. En la siguiente tabla, se describen las posibles preguntas que surjan en los estudiantes, durante la primera parte de la sesión:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Ítem 1 (construcción)	
<ul style="list-style-type: none"> • Construir el triángulo ABC. • Construir las mediatrices de los segmentos AB, BC, AC. • Con la herramienta <i>intersección</i>, hallar el punto de intersección de las mediatrices, llamarlo K. 	
Pregunten cómo construir el segmento AB o la mediatriz del segmento.	Mencionar en dónde se encuentran ubicadas las herramientas que necesiten y

	recordar que ya se había realizado un trabajo de construcción de segmentos.
Pregunten si es necesario hacer las tres mediatrices para hallar el punto de intersección	Realicen la intersección de dos de las tres rectas y revisen si ese punto de intersección también pertenece a la tercera recta.
Construir solo tres puntos, sin los segmentos para construir el triángulo.	¿Cuál es la definición de un triángulo? ¿qué objetos geométricos conforma un triángulo? ¿Será que es suficiente con solo hacer los puntos?
No se acuerden cómo etiquetar algún objeto geométrico.	Decir que existe un documento en Word con herramientas que se han utilizado en GeoGebra.
Ítem 2 (exploración) <i>Exploren la representación hasta descubrir alguna propiedad del punto de intersección de las mediatrices</i>	
Intenten arrastrar el punto de intersección K	Informar que, en GeoGebra, algunos objetos geométricos dependen de otros, como por ejemplo este caso. ¿Cuáles objetos puedes mover? ¿Qué sucede con K cuando mueves alguno de los vértices del triángulo?
Proponen alguna propiedad no prevista, que en ocasiones no sea cierta. Ejemplo: <i>El punto K pertenece al interior del triángulo.</i>	Dejar que el estudiante escriba su respuesta, debido a que en la socialización del segundo enunciado se hablará al respecto.

Solo mencionan que la característica descubierta es que las mediatrices se intersecan en un punto	La construcción que te dicen ¿es lo que descubres?
No arrastren los puntos o los arrastren procurando variaciones mínimas del punto K para encontrar la posible característica encontrada.	Sugerir que arrastren los puntos A y B ¿Qué sucede con el punto K ?
Si construyen triángulos conocidos como rectángulo, isósceles, equilátero.	¿sugerir? ¿Qué tanto sugerir en la exploración para esta tarea particularmente?
En la socialización se refieran al círculo y no a la circunferencia	Ya habíamos mencionado la diferencia entre circunferencia y círculo ¿cuál era?
En la socialización, se refieran a “tener la misma distancia” en vez de equidistar	Si tienen la misma distancia a un vértice, ¿qué significa según lo visto en sesiones anteriores?

Descripción del enunciado 1 – Tarea 4

El ítem 1 del enunciado invita a los estudiantes a construir un triángulo ABC y el punto medio P , del segmento AB , además de buscar una configuración de tal forma que P equidiste de los vértices A , B y C . Luego, en el ítem 2, los estudiantes deben arrastrar el punto C , para investigar una propiedad del triángulo que se cumple cuando los puntos A y B están fijos y, P equidista de A , B y C . Los estudiantes pueden llegar descubrir que el triángulo ABC es rectángulo con $\angle C$ recto o que el punto C pertenece a la semicircunferencia con centro en P y diámetro AB .

En el proceso de llegar a descubrir alguna de estas propiedades, mientras exploran diversas representaciones con GeoGebra, los estudiantes pueden: utilizar la herramienta *rastros* para ubicar a mano alzada el lugar geométrico en donde se ubica el vértice C , que hace que el punto

P equidista de los tres vértices; construir una circunferencia con centro en P , radio PA y arrastrar el punto C de tal forma que se superponga a la circunferencia para garantizar la equidistancia de P a los vértices, debido a que conocen la definición de circunferencia; medir las distancias AP , PB , PC , arrastrar el punto C , hasta que equidista, e ir poniendo puntos extras como rastro auxiliar o huella; medir los tres ángulos del triángulo ABC y descubrir que los ángulos A y B son agudos. Una vez descubierta la propiedad los estudiantes deben consignarla en el espacio indicado.

En el ítem 3, los estudiantes, con el apoyo de una sugerencia, deben inventarse un ejemplo con un triángulo no explorado en el primer ítem, para hacer referencia a un caso con las condiciones iniciales pertinentes y la aserción respecto al ejemplo, que crean cierta.

Para finalizar, en el ítem 4, los estudiantes deben concluir de forma general que, dado un triángulo, si el punto medio de uno de sus lados equidista de los tres vértices, entonces el triángulo cumple la propiedad descubierta. Este patrón de generalidad establecido les permite sustentar lo que afirman en el ítem 3 sobre el caso no explorado.

Gestión del enunciado 1 – Tarea 4

La sesión inicia con la siguiente pregunta por parte de la docente:

Para ustedes, ¿qué significa argumentar? ¿cuál es la función de un argumento?

Las preguntas se realizan con el fin de que los estudiantes expresen lo que consideran cuál es el papel de un argumento y así identificar que un argumento se elabora para sustentan por medio de razones, una afirmación; por lo tanto, relaciona tres elementos que componen un argumento: el dato, la aserción y la garantía, como se había visto en sesiones anteriores. Luego, para relacionar los elementos de un argumento, se leen algunos ejemplos de argumentos, escritos por algunos de los grupos en la tarea anterior:

La idea es que los estudiantes respondan a las siguientes preguntas: *¿qué se está afirmando? ¿cómo lo sustentan? ¿Cuáles son las razones que sustentan la afirmación?*

Después, para que los estudiantes puedan evidenciar que un argumento inductivo no siempre lleva a un patrón de generalización verdadero, se socializa otra respuesta dada por un grupo de estudiantes, que corresponde a:

El punto de intersección de las mediatrices G de un triángulo MNO no explorado, está en el interior del triángulo porque si un punto es la intersección de las mediatrices de un triángulo, siempre está en el interior del triángulo.

La docente pregunta si la afirmación es cierta. Posiblemente los estudiantes indiquen que no, debido a que, en su exploración, evidenciaron que existen soluciones donde el punto de intersección está por fuera del triángulo o incluso, está en un segmento de este. Deberían manifestar que quienes concluyeron esa afirmación debieron hacer una exploración restringida a solo unos casos y que este es un problema que puede tener la argumentación inductiva.

Luego de entregar el enunciado 1, la docente va pasando por los grupos para preguntar cómo van, qué se han dado cuenta cuando resuelvan el segundo ítem y si tienen alguna duda específica. En la siguiente tabla, se describen las posibles preguntas que surjan en los estudiantes, durante la primera parte de la sesión:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Ítem 1 (construcción)	
No encuentren la herramienta <i>punto medio</i> en GeoGebra para que sea utilizada.	Mencionar a los estudiantes que la herramienta se encuentra en el ícono donde está el punto A .
No utilicen la herramienta <i>distancia</i> para medir las equidistancias entre los vértices y el punto P sino que determinan la equidistancia al ojo.	¿Cómo puedes verificar que P sí equidista de los vértices A , B y C ?

<p>Dejen más de dos decimales al medir las distancias entre los vértices del triángulo en GeoGebra.</p>	<p>Recordarles a los estudiantes que la cantidad de decimales debe ser de dos. Además, he de mencionarles que si no se acuerdan cómo modificar el programa deben ir al documento de <i>definiciones y convenciones</i> en Teams.</p>
<p>Ítem 2 (exploración)</p>	
<p>En la exploración, arrastren los puntos A y B.</p>	<p>Decirles que hay que tener presente que los punto A y B son fijos, según indicaciones dadas. Mostrar la herramienta <i>candado</i> que tiene GeoGebra para dejar quieto a los objetos.</p>
<p>Si generalizan que los ángulos A y B siempre son agudos</p>	<p>Decirles que es cierto que los ángulos son agudos pero que sus valores son muy variados. Por eso sería interesante mirar la amplitud del ángulo C.</p>
<p>Si mencionan que el punto C está en una curva (o lugar geométrico escondido), pero no relacionan el lado AB con el diámetro de una circunferencia.</p>	<p>Pedirles usar la opción <i>rastro</i> o colocar puntos auxiliares y llamarlos C_i. Si no visualizan la semicircunferencia, pedirles que miren si la curva pudiera pasar por los puntos A y B y que miren la curva para ver en dónde se encuentran los puntos A, B y C.</p>
<p>Si hacen referencia a que la propiedad encontrada es que los vértices equidistan de P.</p>	<p>La propiedad escrita, ¿no corresponde a una parte de la condición inicial? ¿qué pueden explorar respecto al punto C?</p>

En caso de que los estudiantes pongan puntos auxiliares y pregunten cómo nombrar a cada punto.	Decir a los estudiantes que los puntos pueden ser nombrados como C_1, C_2, \dots para hacer referencia a las posiciones 1, 2, 3... del punto C. Porque es el mismo punto, en distintas posiciones.
Si no exploran la amplitud del ángulo C.	¿Qué sucede con los ángulos del triángulo? Exploren la amplitud cuando cumple la condición dada
Si sospechan que el lugar geométrico que describe C es una semicircunferencia, pero no estar seguros.	Pedir a los estudiantes que lo confirmen construyendo una circunferencia.
Ítem 3 (problema)	
No atiendan la sugerencia y se refieran a las condiciones del triángulo ABC y del punto medio P del lado AB	Mencionar a los estudiantes que es un caso que no se haya explorado en GeoGebra
Renombrar los puntos A, B y C con las etiquetas M, N, O.	Decir a los estudiantes que pueden usar GeoGebra, pero deben referirse a otro triángulo y no al mismo, cambiando los nombres. Deberían otro triángulo en donde el punto medio de un lado equidiste de los vértices, pero no pueden arrastrarlo, porque es un triángulo que no explora.
Escriban en general para cualquier triángulo, que se cumple la propiedad encontrada.	Recalcar que deben hacer referencia a un caso no explorado, más no la generalidad a la que llegaron.
Ítem 4 (conclusión)	

Escriban un ejemplo específico y no el patrón de generalidad	Recalcar a los estudiantes que están preguntando por una afirmación que se cumpla siempre según lo explorado.
Pregunten por la diferencia entre el ítem 3 y el ítem 4.	Decir a los estudiantes que el tercer ítem hace referencia a lo que se puede concluir dadas las condiciones iniciales en un caso no explorado, según lo descubierto; mientras que en el ítem 4, se debe escribir en términos generales lo descubierto.
Se refieren al patrón general, pero no asocian que este es el sustento de lo dicho sobre el caso no explorada.	Preguntarles por qué pueden afirmar lo que dicen del caso no explorado.

Descripción del enunciado 2 – Tarea 4

En el segundo enunciado de la tarea, no se modifican a grandes rasgos los formatos propuestos de la tarea 4, debido a que la plantilla generada, contribuyó a que los estudiantes escribieran argumentos inductivos de forma adecuada. En el ítem 1, los estudiantes deben saber expresar que **el dato** corresponde a: triángulos ABC con el punto medio P del lado AB de tal forma que equidiste de los vértices; el vértice C forma un ángulo recto o describe una semicircunferencia con centro en P y radio PA ; Se tiene un triángulo MNO junto con un punto K de tal forma que es punto medio del segmento MN y equidista de los tres vértices del triángulo. Luego, en la aserción pueden afirmar que el triángulo MNO es rectángulo con el ángulo O recto o que el punto O describe al lugar geométrico de una semicircunferencia con diámetro MN . Como garantía escriben el posible patrón de generalización que surge de la exploración inicial, de tal forma que soporte el enunciado.

En el ítem 2, los estudiantes deben completar un diagrama con la información anterior. En el cuadro de *representación gráfica* los estudiantes deben dibujar triángulo MNO y el punto K de tal forma que equidiste de los tres vértices. Luego, en los cuadros denominados Dato, Aserción y Garantía escriben lo establecido en el ítem 1, de acuerdo con el conjunto

referencial, la propiedad descubierta y el patrón de generalización. El ítem 2 contribuye a que los estudiantes vayan estructurando visualmente el comportamiento de un argumento inductivo, por medio de los tres componentes: Dato, aserción y garantía.

Gestión del enunciado 2 – Tarea 4

Mientras los estudiantes rellenan las plantillas y diagramas, la docente va pasando por los grupos revisando lo escrito por los estudiantes, respondiendo dudas, recordando las condiciones iniciales y la estructura que tienen los diagramas del segundo enunciado. Después de ello, los estudiantes presentan en plenaria lo que completaron. La docente le pedirá a un representante por grupo que exponga su argumento y lo explique. De acuerdo con las interacciones de los estudiantes, la docente tiene prevista las siguientes posibles dudas o expresiones que surjan a través de la siguiente tabla:

Preguntas/dudas o situaciones propuestos por los estudiantes	Posibles reacciones de la docente
Los estudiantes no saben qué contestar en la plantilla en la primera parte del ítem 1.	Recordar a los estudiantes que la primera parte del esquema hace referencia a las condiciones dadas en el enunciado del problema.
No saber qué poner en el <i>dato</i>	Mencionar a los estudiantes que el dato está estructurado en tres partes. La primera que hacer referencia a la construcción que realizaron al inicio; la segunda, hace referencia a la característica encontrada al explorar la representación en el programa y la tercer hace referencia al caso no explorado.
No saber qué poner en la <i>garantía</i>	¿Qué conclusión general establecieron cuando exploraron las diferentes situaciones en GeoGebra?

No saber qué poner en la <i>aserción</i>	¿Qué concluyes con respecto al punto O cuando cumple la condición inicial respecto al triángulo MNO ?	
No explican el argumento en su conjunto	Preguntarles ¿cuál es la afirmación que se produjo y qué permitió sustentar eso que se dijo? ¿Qué es lo que están argumentando y cómo lo están justificando?	
No se evidencia que tengan clara la función de un argumento inductivo.	Preguntarles: ¿qué información es la que da el dato?	