

**DISEÑO DE UN PROGRAMA DE APOYO PARA DETERMINAR EL NIVEL DE
CULTURA ESTADÍSTICA DE UN ESTUDIANTE DE GRADO UNDÉCIMO EN EL
TEMA MEDIDAS DE DISPERSIÓN**

MARIA LUCRECIA GARZÓN BELTRÁN

MIRTHA BERENICE GORDILLO LÓPEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2012

**DISEÑO DE UN PROGRAMA DE APOYO PARA DETERMINAR EL NIVEL DE
CULTURA ESTADÍSTICA DE UN ESTUDIANTE DE GRADO UNDÉCIMO EN EL
TEMA MEDIDAS DE DISPERSIÓN**

MARIA LUCRECIA GARZÓN BELTRÁN

MIRTHA BERENICE GORDILLO LÓPEZ

**Trabajo presentado como requisito para optar por el título como Especialista
en Educación Matemática**

Docente asesor:

BENJAMÍN SARMIENTO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2012

Nota de aceptación:

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL JURADO

BOGOTÁ, 30 NOVIEMBRE 2012

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

A mis padres Eloisa y Silvino, quienes siempre han estado brindándome su apoyo para continuar mi formación profesional y personal. Este nuevo objetivo cumplido es muestra de la constancia, responsabilidad y deseo de superación que desde niña me fueron inculcados por ellos.

A mis sobrinos, quienes inician un recorrido por la vida y reconozcan la necesidad del esfuerzo y exigencia a sí mismo para hacer los sueños realidad.

A mis amigos docentes con los cuales he compartido a lo largo de estos últimos años, y de una u otra forma me incentivaron para iniciar esta formación.

Lucrecia

A Dios.

Por la vida, por su amor, por su fidelidad y por brindarme una nueva oportunidad.

A Mi Hijo José Eduardo.

Por su paciencia, su tiempo, su apoyo, y por todo su amor.

A Mis padres Julia y Luis.

Por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

Mirtha Berenice

AGRADECIMIENTOS

A Dios por sus innumerables bendiciones.

Al Profesor Benjamín Sarmiento por su gran apoyo y motivación para la culminación de nuestra especialización y para la elaboración de este trabajo de grado.

Mirtha Berenice

A Dios por seguir recibiendo sus bendiciones a lo largo de mi vida; brindándome esta oportunidad de crecimiento.

A mi familia en general por su apoyo y comprensión por el tiempo sacrificado.

A las directivas de la IE Buenos Aires, quienes me brindaron el tiempo para continuar el proceso formativo. A mis compañeros de la Jornada Tarde Bachillerato por sus palabras de apoyo e interés en mi caminar hacia esta meta.

Al profesor Benjamín Sarmiento por su colaboración, orientación y apoyo en la realización del trabajo de grado.

A mis amigos más cercanos por su compañía, apoyo y ayuda en la realización de mis deberes y ante todo la certeza de poder contar con ellos.

Lucrecia

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diseño de un programa de apoyo para determinar el nivel de cultura estadística de un estudiante de grado undécimo en el tema medidas de dispersión.
Autor(es)	GARZÓN, Lucrecia; GORDILLO, Mirtha.
Director	SARMIENTO, Benjamín
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2012. 72 páginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas
Palabras Claves	Medidas de dispersión, cultura estadística, niveles de pensamiento, alfabetización, razonamiento, pensamiento, formularios.

2. Descripción
El presente trabajo busca dar respuesta a la pregunta: ¿Qué elementos son necesarios para el diseño de cuestionarios interactivos que ayuden a determinar el nivel de cultura estadística en que se encuentran los estudiantes de grado undécimo cuando se evalúa las medidas de dispersión? para ello, se abordó entre otras cosas el estudio de las siguientes temáticas: • Caracterización de la cultura estadística en sus tres niveles (alfabetización, razonamiento y pensamiento). • Aspecto curricular: Estadística en Colombia. • Conceptualización de las medidas de dispersión. • Clasificación de situaciones problema que relacionen medidas de dispersión con los tres niveles de pensamiento estadístico. Se organizaron dos matrices, la primera de preguntas relacionando medidas de dispersión (rango, desviación media absoluta, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación) con los niveles de pensamiento estadístico (Alfabetización, razonamiento y pensamiento), y la segunda de objetivos poniendo en concordancia las medidas de dispersión con los niveles de pensamiento estadístico. El modelo propuesto consta de tres formularios diseñados en un formato electrónico, uno para cada nivel de pensamiento estadístico (alfabetización, razonamiento y pensamiento).

Cada formulario está constituido por un encabezado, diez preguntas de opción múltiple con tres respuestas posibles, dos preguntas para cada uno de los siguientes temas: rango, desviación media absoluta, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación, que corresponden a medidas de dispersión; finalmente una calificación final y una sugerencia para superar el nivel del cuestionario.

3. Fuentes

Las fuentes consultadas más relevantes que sirvieron de base para el desarrollo del proyecto fueron:

Batanero, C. (2010). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Conferencia inaugural.

Castañeda, N. Gómez, M. Joya, A. y Ramírez, M. (2010). Hipertexto Matemáticas 10. (pp. 279 – 281). Bogotá: Santillana.

Downie, N. y Heath, R. (1973). Métodos estadísticos aplicados. (pp. 68 – 84). México: Harla.

Fernández, C. y Fuentes, G. (1995). Curso de Estadística descriptiva. Teoría y práctica. (pp. 141 – 161). Barcelona: Ariel Economía.

Fernández, F. Sarmiento, B y Soler, N. (2008). Estadística y probabilidad en la escuela Secundaria. (pp. 21 – 62). Bogotá: UPN.

Gómez, M. Gómez W. Joya, A. Morales, M y Rodríguez V. (2010). Hipertexto Matemáticas 11. (pp. 290 – 292). Bogotá: Santillana.

Murray, R. y Spiegel, Ph. (1975). Teoría y problemas de Estadística. (pp. 69 – 88). Cali: Mc Graw Hill.

Salcedo, A. (2005). Cultura, Razonamiento y Pensamiento Estadístico. Boletín IASE Hipótesis alternativa. (Vol. 6, pp. 3 – 9). Venezuela: Universidad central de Venezuela.

Tauber, L. (2011). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. (pp. 53 – 74). Buenos Aires: Unl.

4. Contenidos

El presente trabajo se encuentra organizado en las siguientes secciones:

ANTECEDENTES: Hace referencia a la importancia de la enseñanza de la estadística, junto con la evolución presentada en la normatividad del MEN desde los programas de renovación curricular, la resolución 2343 hasta los estándares curriculares, referente a la educación estadística.

JUSTIFICACIÓN: Se exponen las razones por las cuales, a pesar de que la estadística es contemplada en el currículo, la formación que se da a los alumnos es totalmente contraria a la

generación de un pensamiento aleatorio y estocástico.

Una de las razones por las cuales se escogió las medidas de dispersión es debido a la vinculación que se tiene con las medidas de tendencia central, las cuales son más común su trabajo durante el bachillerato y esta sería una oportunidad de extender el panorama de aplicación en la educación estadística.

Es importante diseñar cuestionarios porque que ayuda a evaluar y determinar el nivel de cultura estadística de estudiantes en cuanto a medidas de dispersión. Ya que la evaluación está inmersa en todo proceso educativo y es necesario de un instrumento para realizarla, por tal se proponen cuestionarios, con el fin de facilitar y agilizar la labor docente ya que el formato arroja una valoración que puede ser enviada a un correo electrónico. Además, a un estudiante que soluciona los cuestionarios obtiene un parámetro para valorar su propio desempeño.

OBJETIVOS: El objetivo general planteado es: Diseñar una serie de cuestionarios de apoyo para evaluar y determinar el nivel de cultura estadística de un estudiante de grado undécimo en el tema medidas de dispersión. El anterior objetivo responde a la pregunta problémica: ¿Qué elementos son necesarios para el diseño de cuestionarios interactivos que ayuden a determinar el nivel de cultura estadística en que se encuentran los estudiantes de grado undécimo cuando se evalúa las medidas de dispersión?

MARCO TEÓRICO: Se presenta desde dos perspectivas, lo concerniente al pensamiento estadístico referente a los niveles de pensamiento en la cultura estadística, y el campo teórico de lo estadístico con respecto a las medidas de dispersión.

PROPUESTA DE CUESTIONARIOS EVALUATIVOS: Se describe la estructura de los tres formularios, correspondientes uno para cada nivel de pensamiento estadístico (alfabetización, razonamiento y pensamiento). Para ello fue necesaria la organización de dos matrices, la primera de preguntas relacionando medidas de dispersión (rango, desviación media absoluta, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación) con los niveles de pensamiento estadístico (Alfabetización, razonamiento y pensamiento), y la segunda de objetivos poniendo en concordancia las medidas de dispersión con los niveles de pensamiento estadístico.

CONCLUSIONES: Esta sección presenta los aspectos relevantes que se pueden concluir luego de la realización del presente trabajo, también invitando a una posible complementación e implementación del mismo.

5. Metodología

Para llevar a cabo esta propuesta se desarrollaron las siguientes etapas:

- ✓ Revisión bibliográfica sobre alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico.
- ✓ Revisión bibliográfica sobre las medidas de dispersión, conceptos y propiedades.
- ✓ Diseño de una matriz que permita relacionar los conceptos de medidas de dispersión con cada uno de los niveles de cultura estadística.
- ✓ Diseño de los cuestionarios en un formato electrónico.

6. Conclusiones	
• La elaboración de este trabajo ha permitido organizar un modelo de formularios que facilitan la evaluación de las medidas de dispersión más representativas; por medio de la solución de cuestionarios; involucrando en ellos contextos adecuados para el trabajo en estadística; porque ubica al estudiante en un nivel determinado de cultura estadística. • La organización de los cuestionarios permite la reflexión sobre la evaluación en medidas de dispersión, con el fin de complementar el proceso para que el estudiante tenga un mayor dominio del tema dentro del desarrollo de cada uno de los niveles de pensamiento estadístico. • El material es susceptible a aplicación para realizar reformas pertinentes y como continuación de un proceso de enseñanza – aprendizaje en los temas involucrados en medidas de dispersión. • Es bueno que el docente se esté actualizando en los avances tecnológicos y haga uso de ellos como herramientas que le faciliten el proceso de enseñanza – aprendizaje y de manera específica en la evaluación.	

Elaborado por:	GARZÓN, Lucrecia; GORDILLO, Mirtha.
Revisado por:	SARMIENTO, Benjamín

Fecha de elaboración del Resumen:	30	11	2012
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	
1. ANTECEDENTES	14
1.1 ASPECTOS CURRICULARES DE LA ESTADÍSTICA EN COLOMBIA	16
2. JUSTIFICACIÓN	21
3. OBJETIVOS	23
4. MARCO TEÓRICO	24
4.1 CULTURA ESTADÍSTICA	24
4.1.1 ALFABETIZACIÓN	25
4.1.2 RAZONAMIENTO	26
4.1.3 PENSAMIENTO	28
4.1.4 HABILIDADES A DESARROLLAR EN LOS NIVELES DE PENSAMIENTO ESTADÍSTICO	29
4.2 MEDIDAS DE DISPERSIÓN	33
4.2.1 MEDIDAS DE DISPERSIÓN ABSOLUTAS	35
4.2.1.1 RECORRIDO	35
4.2.1.2 RECORRIDO INTERCUARTÍLICO	36
4.2.1.3 DESVIACIONES MEDIAS	38
4.2.1.4 VARIANZA (s^2)	43
4.2.1.5 DESVIACIÓN TÍPICA O ESTÁNDAR (s)	48
4.2.2 MEDIDAS DE DISPERSIÓN RELATIVAS	51
4.2.2.1 COCIENTES ENTRE UNA MEDIDA DE DISPERSIÓN ABSOLUTA Y LA MEDIANA	52

4.2.2.2 COCIENTES ENTRE UNA MEDIDA DE DISPERSIÓN ABSOLUTA Y LA MEDIA ARITMÉTICA	53
5. DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO	56
5.1 PROPUESTA MATRIZ DE CUESTIONARIOS EVALUATIVOS	57
5.2 FORMULARIOS	70
6. CONCLUSIONES	72
BIBLIOGRAFÍA	73
ANEXO	

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende mostrar un modelo para evaluar a un estudiante en las habilidades del pensamiento estadístico relacionado con algunas medidas de dispersión, en concordancia con los niveles de pensamiento involucrados en la cultura estadística.

Se resalta la importancia de abordar el tema de medidas de dispersión ya que a pesar de que existe motivación en la enseñanza de la Estadística en la Educación Básica Secundaria, es limitado el trabajo que se hace con medidas de dispersión.

Para desarrollar este trabajo se organizaron cuatro secciones así: en la primera sección se dan a conocer los antecedentes, justificación y objetivos. En la segunda sección se presenta el marco teórico desde dos perspectivas, lo concerniente al pensamiento estadístico referente a los niveles de pensamiento en la cultura estadística, y el campo teórico de lo estadístico con respecto a las medidas de dispersión. La tercera parte, describe el modelo planteado para evaluar a un estudiante en el nivel de pensamiento estadístico desarrollado en los temas de medidas de dispersión. Y la cuarta sección corresponde a las conclusiones, anexos y bibliografía.

1. ANTECEDENTES

La enseñanza de la estadística ha adquirido un papel importante durante las últimas décadas en varios países, como lo expone Tauber (2010), situación que no ha sido ajena para Colombia; ya que sus actores principales han tenido una escasa formación, y poco adecuada, en cuanto a técnicas y métodos para desarrollar en el aula. Se enseña de manera algorítmica y descontextualizada, además se centran en libros con errores conceptuales.

A raíz de las problemáticas encontradas en la enseñanza de la estadística, se ha propuesto una formación estadística desde los primeros años debido a que:

- La estadística es parte de la educación general para futuros ciudadanos que requiere la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos que aparecen en medios informativos.
- Es útil para la vida y para muchas profesiones.
- Ayuda a fomentar el razonamiento crítico frente a situaciones reales.
- Ayuda a entender los restantes temas del currículo donde aparecen frecuencias, gráficos o conceptos estadísticos.

A pesar que los contenidos están contemplados en los currículos, no se llegan a desarrollar efectivamente en clase por falta de tiempo, por falta de conocimiento de los conceptos de estadística y de sus aplicaciones de estadística en otras áreas, o por falta de métodos para enseñar. Además la incorporación de conceptos estadísticos, en el proceso de enseñanza aprendizaje, no garantiza los objetivos propuestos; por tal razón surge la necesidad en los formadores, de clarificar marco teórico, determinar objetos de estudio, y especificar conceptos primitivos.

En relación con la enseñanza de la estadística, se han encontrado problemas comunes como:

- Los conceptos enseñados son desactualizados o erróneos.
- La enseñanza está a cargo de matemáticos no especializados en estadística, centrando la enseñanza en axiomas, y no se aprovecha la riqueza de lo intuitivo, aleatorio y probabilístico.
- En las universidades se exige conocimiento y manejo de datos para sacar conclusiones a veces sin permitir avanzar a nuevos conceptos que permitan formar pensamiento y razonamiento estadístico.

A nivel internacional se han convocado congresos para el análisis de la educación en estadística; en especial la Conferencia Internacional de la Enseñanza de la Estadística, realizado en Salvador de Bahía (2006). En donde uno de los grupos de trabajo se centró en el “desarrollo curricular en Estadística en Latinoamérica”, justificando el trabajo en su enfoque didáctico y tratamiento en el aula, que se limita únicamente a la enseñanza y aprendizaje de procesos para llevar a cabo la presentación de la información mediante diagramas, tablas y gráficos. (Boletín IASE, 2005)

Este evento buscó relacionar la estadística con otras áreas como las ciencias y las sociales, como disciplina organizativa para unir los conocimientos y darles sentido.

1.1 ASPECTO CURRICULAR: LA ESTADÍSTICA EN COLOMBIA

La Estadística no siempre ha sido una parte relevante del currículo escolar colombiano. Sin embargo, el seguimiento y estudio de algunos de los documentos emanados del MEN durante los últimos veinte años pone de manifiesto la importancia gradual que ha ido adquiriendo la educación estadística.

Una manera de aproximarse a la tarea de describir la evolución y posicionamiento que ha ganado los temas de estadística en los currículos escolares se encuentra en el trabajo de Echeverri y Vergel (2004, citado por Fernández, Sarmiento y Soler, 2008). Ellos reconocen tres momentos que identifican, desde una perspectiva cronológica, con tres tipos de documentos: los programas de renovación curricular de los años ochentas, los que corresponden al planteamiento de indicadores de logro que se derivan de la resolución 2343 de Junio de 1996 y los que corresponden a los estándares curriculares que fueron publicados originalmente por el MEN en el año 2002.

En los programas de renovación curricular se presentaron objetivos hasta el grado noveno, dentro de lo que se denominó “sistemas de datos”, la cantidad de objetivos aumentaban a medida que avanzaba el grado. Los siguientes fueron los objetivos relacionados con estadística y contemplados en el Programa de Renovación curricular que estuvieron vigentes entre los años de 1983 y 1991:

OBJETIVOS INDICADOS	GRADOS
Efectuar algunos arreglos de objetos.	1, 3 y 5
Recoger datos, ordenarlos en tablas, representar en diferentes tipos de graficas, e incorporar el manejo de datos en la descripción de eventos de la vida cotidiana.	3
Efectuar permutaciones y combinaciones y hallar la frecuencia y la moda de un sistema de datos.	4

Manejar algunos conceptos estadísticos sencillos.	5
Organizar datos en tablas de frecuencia y representarlos con diagramas. Discriminar entre diferentes tipos de frecuencias sus expresiones numéricas.	6
Construir los conceptos de media, mediana y moda como medidas de tendencia central. Organizar datos en tablas de frecuencia y representarlos mediante diagramas.	7
Avanzar en la construcción de las ideas básicas sobre medidas de tendencia central, de dispersión y probabilidad. Estimar, interpretar y hallar de manera precisa algunas medidas de tendencia central y de dispersión. Interpretar algunos informes estadísticos (de prensa o de revistas especializadas) y elaborar críticamente algunas conclusiones para compararlas con las del informe mismo o con las de otras fuentes diferentes a aquella que lanza la información.	9

Los indicadores de logro se presentaron agrupados por grados así, 1 a 3, 4 a 6, 7 a 9 y 10 a 11. Con respecto a estadística y probabilidad, en los grados de 1 a 3 no se encuentran indicadores de logro relacionados con las temáticas en análisis; y para los siguientes grupos de grados aparecen uno o dos indicadores únicamente. Los indicadores relacionados con la estadística, presentados en este caso fueron:

INDICADORES DE LOGRO	GRADO
Interpreta datos representados en tablas y diagramas, comprende y usa la media, la mediana y la moda en un conjunto pequeños de datos y saca conclusiones estadísticas. Reconoce la importancia de averiguar datos y procesar información para tomar decisiones, y de conocer y evaluar sus características en relación	4, 5 y 6

con las decisiones que se tomen.	
Formula inferencias y argumentos coherentes, utilizando medidas de tendencia central y de dispersión para el análisis de los datos, interpreta informes estadísticos y elabora críticamente conclusiones.	7, 8 y 9
Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficos que recojan datos de situaciones del mundo real: estima, interpreta y aplica medidas de tendencia central, de dispersión y correlación.	10 y 11

La referencia más reciente son los Estándares curriculares, los cuales surgen en el año 2002 organizados grado por grado; siendo modificados por un grupo de docentes en educación matemática y publicados nuevamente en el año 2003, agrupados por cada dos grados, quedando vigentes los siguientes estándares:

ESTÁNDARES	GRADOS
Clasificar objetos de acuerdo a cualidades o atributos y organizar información relativa. Interpretar cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. Describir situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. Representar datos relativos a su entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras. Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos. Formular preguntas y plantear y resolver problemas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.	1, 2 y 3
Representar datos usando tablas y graficas (pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). Comparar diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. Interpreta información presentada en tablas y gráficas. (Pictogramas,	4 y 5

gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). Usar e interpretar la mediana (promedio). Formular y resolver problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas y experimentos.	
Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Reconocer relación entre un conjunto de datos y su representación. Usar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagrama de barras, diagramas circulares). Usar medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos. Formular y resolver problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagrama de barras, diagrama circulares. Predecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística.	6 y 7
Reconocer cómo diferentes maneras de presentar la información pueden originar distintas interpretaciones. Interpretar analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Interpreta los conceptos de media, mediana y moda. Selecciona y usa algunos métodos estadísticos adecuados según el tipo de información. Formular y resolver problemas seleccionando información relevante en conjunto de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). Reconocer las tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.	8 y 9
Comparar estudios provenientes de medios de comunicación.	10 y 11

Justificar inferencias provenientes de los medios o de estudios diseñados en el ámbito escolar. Describir tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. Interpretar nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable, estadígrafo y parámetro. Usar comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación. (Percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)	
--	--

También es importante resaltar la reforma en la evaluación propuesta por el Icfes, en donde se involucra de manera más amplia la estadística.

Se observa un gran cambio en la cantidad de estándares planteados, ya que de cinco indicadores de logro, se pasa a 6 estándares por cada par de grados, lo cual ofrece un incremento en la enseñanza de la estadística.

La importancia de la estadística a nivel nacional se debe a innovaciones similares en algunos países como Estados Unidos y el Reino Unido; debido a la importancia de la educación estadística, en la cual se han enfatizado bastantes investigadores.

2. JUSTIFICACIÓN

Las medidas de dispersión son una temática que por razones de organización del currículo en matemáticas y por dificultades de tiempo, en la mayoría de los casos no se trabaja durante la educación básica y Media. Además el trabajo de estas temáticas conlleva a un análisis más amplio en la interpretación de los resultados. Tauber (2010).

Tauber (2010), encontró lo siguiente: El hecho que la estadística se incluya en una forma oficial en el currículo no significa que necesariamente se enseñe. Muchos profesores no se sienten a gusto con esta materia, la dejan como último tema y cuando es posible la omiten. A esta situación se debe agregar que estadística forma parte de una asignatura denominada matemáticas y, en la mayoría de los casos, si se desarrollan los temas estocásticos, el enfoque realizado es puramente formal basado en el uso de fórmulas y reglas y se deja totalmente de lado el aprovechamiento de la intuición, el sentido común, el análisis exploratorio de los datos para generar hipótesis y conjeturas. Con todo esto, la formación que se da a los alumnos es totalmente contraria a la generación de un pensamiento aleatorio y estocástico. (p. 58-59).

Otra de las razones por las cuales se escogió las medidas de dispersión debido a la vinculación que se tiene con las medidas de tendencia central, las cuales son más comunes en su trabajo durante el bachillerato y esta sería una oportunidad de extender el panorama de aplicación en la educación estadística.

Actualmente la estadística está incorporada en los currículos de educación básica. Pero, su enfoque didáctico y su tratamiento en las aulas, en general, se limita

únicamente a la enseñanza y aprendizaje de los procesos para llevar a cabo la presentación de la información mediante diagramas, tablas y gráficos. (Salcedo, 2005).

Se proponen cuestionarios para ser aplicados a estudiantes de grado undécimo ya que el tema medidas de dispersión está involucrado en el estándar: Usar comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación. (Percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad) propuesto por el MEN para el grupo de grados décimo y undécimo.

Es importante diseñar una secuencia de cuestionarios utilizando un programa que ayude a evaluar y determinar el nivel de cultura estadística de estudiantes en cuanto a medidas de dispersión. Ya que la evaluación está inmersa en todo proceso educativo y es necesario de un instrumento para realizarla, por tal se propone la utilización de cuestionarios en formato electrónico, con el fin de facilitar y agilizar la labor docente ya que el formato arroja una valoración que puede ser enviada a un correo electrónico, además, a un estudiante que soluciona los cuestionarios, el formato le proporciona un parámetro para valorar su propio desempeño y pueda dedicarse más a estudiar el tema o a profundizar sobre el mismo.

3. OBJETIVOS

El presente trabajo busca dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué elementos son necesarios para el diseño de cuestionarios interactivos que ayuden a determinar el nivel de cultura estadística en que se encuentran los estudiantes de grado undécimo cuando se evalúa las medidas de dispersión?

3.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar una serie de cuestionarios de apoyo para evaluar y determinar el nivel de cultura estadística de un estudiante de grado undécimo en el tema medidas de dispersión.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar las habilidades que debe tener un estudiante al finalizar su Educación Media para ser clasificado en cada uno de los niveles de cultura estadística.
- Diseñar una matriz que establezca vínculos entre los diferentes conceptos de medidas de dispersión con los niveles de pensamiento estadístico.
- Elaborar cuestionarios para evaluar cada una de las medidas de dispersión y a su vez clasificar el dominio de este tema dentro de un nivel de cultura estadística.
- Organizar los cuestionarios evaluativos dentro de un programa interactivo.

4. MARCO TEÓRICO

4.1 CULTURA ESTADÍSTICA

En los últimos años se han realizado fuertes críticas a la enseñanza de la Estadística centrada en la realización de cálculos, descuidando valiosos elementos de tipo conceptual. Se indica que esa forma de enseñar estadística poco colabora en la comprensión de las grandes ideas estadísticas y que la estadística debe ser utilizada algunos fenómenos del mundo actual. Salcedo (2005).

Por reflexiones como las de Salcedo, se propone un modelo que abarque un desarrollo del pensamiento estadístico en tres niveles: alfabetización, razonamiento y pensamiento, que son considerados dentro de la cultura estadística.

Mediante la cultura estadística se pretende desarrollar:

- Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística con argumentos apoyados en datos y fenómenos estocásticos encontrados en medios de comunicación pero sin limitarse a ellos; presentado por Gal (2002, citado por Tauber, 2010).
- Capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante, según Gal (2002, citado por Tauber, 2010).

Para lograr la cultura estadística es necesario desarrollar los siguientes tres niveles:

4.1.1 ALFABETIZACION

Según Fernández, Sarmiento y Soler (2008) definen la alfabetización estadística como la idea de cultura básica de un individuo en el sentido estadístico, a partir de lo expuesto por los siguientes autores:

Gal (2000), define alfabetización como la habilidad de la gente para interpretar y evaluar críticamente con argumentos basados en datos, información estadística que aparecen en diversos medios, así como para discutir sus opiniones al mirar cuidadosamente dicha información.

Garfield (1999), expresa que la alfabetización es la comprensión del lenguaje estadístico (palabras, términos, símbolos) y capacidad de interpretar gráficos y tablas y de leer y determinar el significado estadístico dado en los medios de comunicación a noticias, encuestas de opinión, indicadores económicos.

Según Snell (1999), afirma que la alfabetización es la habilidad para comprender conceptos estadísticos y para razonar en el nivel más básico.

Para Watson (1997), la alfabetización es la comprensión del texto y del significado e implicaciones de la información estadística del mismo, en el contexto del tema al cual pertenece.

También se define alfabetización como un conjunto de habilidades básicas e importantes que son usadas en la comprensión de la información y en la lectura e interpretación de resultados de investigaciones, según Ben-Zvi y Garfield (2004, citados por Tauber, 2010).

Incluye las habilidades básicas que se utilizan para realizar una lectura e interpretación básica de la información y de los resultados presentados en reportes periodísticos o investigaciones.

Estas habilidades incluyen: organizar datos, construir y presentar tablas y trabajar con distintas representaciones de datos. Incluye una comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos, y de la probabilidad como una medida de la incertidumbre.

4.1.2 RAZONAMIENTO

Se puede definir, el razonamiento según Tauber (2010), como la manera de razonar que tienen las personas en relación con las ideas estadísticas y en cómo se le da sentido a la información estadística.

Para Garfield (2002), el razonamiento es la forma como la gente razona con ideas estadísticas y le da sentido a la información estadística.

Para Chervaney, citado por Sarmiento, Fernández y Soler (2008) es lo que una persona es capaz de hacer con el contenido estadístico (como recordar, reconocer y discriminar entre otros conceptos estadísticos) y las habilidades que demuestra tener en la utilización de conceptos estadísticos en la resolución de problemas; caracterizando el razonamiento estadístico como un proceso de tres pasos: comprensión del problema, planificación y ejecución, y evaluación e interpretación.

El nivel de razonamiento es hacer interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos. Se involucra relaciones entre conceptos o combinar ideas sobre los datos y las posibilidades. Razonar, en este sentido significa comprender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar los resultados estadísticos. (Tauber 2010).

Fernández, Sarmiento y Soler (2008) retoman las habilidades a desarrollar dentro del razonamiento estadístico sugeridas por Garfield (2002):

Razonamiento acerca de los datos: Incluye aspectos como el reconocimiento y la caracterización de datos de tipo cualitativo o cuantitativo, o de tipo discreto o continuo. Comprende el conocimiento de porqué un tipo particular de dato conduce a una clase particular de tabla, gráfica o medida estadística.

Razonamiento acerca de representaciones de datos: Incluye la comprensión de la forma en que una gráfica está representando a una muestra. Comprende el conocimiento de cómo se podría modificar una gráfica para representar de mejor manera un conjunto de datos o la capacidad para reconocer más allá de las características de una distribución aleatoria de datos, características generales como la forma, el centro y la dispersión.

Razonamiento acerca de medidas estadísticas: La comprensión de porqué las medidas de tendencia central, las de posición y las de dispersión, indican diferentes cosas acerca de un conjunto de datos. Incluye el conocimiento de cuáles son las medidas más apropiadas a utilizar de acuerdo a las diferentes condiciones dadas en una situación. Comprende el conocimiento de porqué la utilización de medidas de resumen estadístico para hacer predicciones es más confiable para muestras grandes que para pequeñas. Conocimiento de por qué se debe incluir una medida de tendencia central como una de dispersión, y la razón de porqué los resúmenes de centro y dispersión pueden ser útiles para comparar conjuntos de datos.

Razonamiento acerca de muestras: Incluye conocimientos de como las muestras se relacionan con la población. Incluye el conocimiento de porque una muestra bien seleccionada representará de manera más segura una población, mientras que hay manera de seleccionar muestras que generan sesgos y no son representativas de una población.

Razonamiento acerca de correlaciones y asociaciones: El conocimiento de cómo juzgar e interpretar una relación entre dos variables o de cómo examinar e

interpretar una tabla de doble entrada o de un diagrama de dispersión cuando se considera una relación binaria.

4.1.3 PENSAMIENTO

Según Tauber (2010), el nivel de pensamiento involucra la comprensión del por qué y cómo se realizan las investigaciones y comprender el papel que juegan las grandes ideas estocásticas, implícitas en ellas. Estas ideas incluyen la naturaleza de la variación y cuándo y cómo usar los métodos más apropiados de análisis de datos, tales como resúmenes numéricos y gráficos. Involucra también una comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a la población y cómo diseñar experimentos con el objetivo de establecer causas. Incluye la comprensión de cómo se usan los modelos para simular fenómenos aleatorios y por qué sirven para estimar probabilidades. Implica ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema de investigación y dar conclusiones, y reconocer y comprender los procesos completos (desde proponer preguntas a recolectar los datos para elegir análisis y la prueba de hipótesis que corresponda).

Snee (1990), citado por Salcedo(2005) lo define como: procesos de pensamiento, bajo los cuales se reconoce que la variación está en nuestro alrededor y presente en cualquier cosa que hacemos; en todo trabajo hay una serie de procesos interconectados tales como identificar, caracterizar, cuantificar, controlar y reducir la variación que proveen oportunidades para el mejoramiento.

4.1.4 HABILIDADES A DESARROLLAR EN LOS NIVELES DE PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

Tauber (2010) y Salcedo (2005), según el modelo propuesto por Gal (2004), involucran una componente de conocimiento, compuesto de cinco elementos cognitivos que denomina:

1. Habilidades de alfabetización: Las habilidades para leer y escribir son críticas para la cultura estadística porque virtualmente todos los mensajes estadísticos se transmiten por texto escrito (periódicos) o texto oral (televisión).
2. Conocimiento estadístico: son los conocimientos y conceptos de estadística y probabilidad requeridos para la cultura estadística, estos son:
 - a. Conocimiento de por qué son necesarios los datos y de la forma cómo se pueden producir los datos.
 - b. Familiaridad con los términos e ideas básicos relacionados con las estadísticas descriptivas.
 - c. Familiaridad con términos e ideas básicas relacionados a presentaciones gráficas y tabulares.
 - d. Comprensión de las nociones básicas de probabilidad.
 - e. Conocimiento de cómo se llega a conclusiones o inferencias estadísticas.
3. Conocimiento matemático: instrumentos matemáticos que se requieren para la producción de indicadores estadísticos comunes, como el porcentaje o la media, la mediana, la probabilidad. Así mismo, la comprensión de resultados estadísticos básicos requiere una familiaridad, intuitiva y hasta cierto punto formal, con los procedimientos o cálculos matemáticos básicos.
4. Contexto de conocimiento: interpretar correctamente mensajes estadísticos requiere de la capacidad para ubicar el mensaje en el contexto apropiado de la vida real, y de tener acceso a su conocimiento del mundo. Este tipo de conocimiento también apoya los procesos del conocimiento general y es fundamental para darle sentido a cualquier mensaje.

5. Habilidades críticas: las informaciones estadísticas son producidas por fuentes diferentes (medios de comunicación, anunciantes políticos, centros de trabajo, oficinas gubernamentales), con diferentes intereses, con necesidades distintas y objetivos diversos; por lo que no necesariamente presentan un informe imparcial de los hallazgos e interpretaciones.

Y un componente disposicional, es decir que la cultura estadística no es solamente conocimiento y capacidad. La parte emocional - sentimientos, valores, actitudes es también un componente importante dentro de la educación y surge por la necesidad de tomar una postura crítica con respecto a la información estadística, además de poseer ciertas actitudes y creencias para motivar y sostener sus acciones. Ciertas creencias y actitudes influyen en las posturas de los individuos y la habilidad para tomar medidas en respuesta a la información estadística.

Estos deben ser contextos dependientes, como un conjunto dinámico de conocimientos y aptitudes que juntos forman el comportamiento estadísticamente alfabetizado. Gal (2004) afirma que la comprensión e interpretación de la información estadística requiere no solo conocimientos propios sino también conocimientos matemáticos y de cultura general, pero la evaluación crítica de la información estadística depende de la habilidad para preguntar de manera crítica y asumir una postura basada en creencias y actitudes.

En este modelo, los objetivos a cumplir se encaminan a desarrollar habilidades para generar alfabetización estadística, que son la base para la construcción del razonamiento y del pensamiento estadístico:

- Interpretar los resultados de encuestas, muestras y experimentos como informes presentados en periódicos y otros medios.
- Analizar e interpretar los aspectos probabilísticos en relación con las afirmaciones que se hacen sobre riesgos, errores de estimación y efectos de la muestra, presentados en periódicos y otros medios.

- Aprender sobre estilos, convenciones y sesgos en los informes periodísticos o en publicidades.
- Familiarizarse con las preguntas “críticas” junto con la experiencia al aplicarlas a ejemplos reales o simulados.
- Desarrollar una postura crítica apoyada en las creencias, incluyendo las actitudes y creencias positiva, en relación con las investigaciones que se aplica la estadística.

Wild y Pfannkuch (1999) citados por Salcedo (2005), identifican cuatro dimensiones dentro de los elementos del pensamiento estadístico que se producen durante la investigación:

Dimensión uno: El ciclo investigativo. Hace alusión a la forma de ser del sujeto durante la investigación, en cuanto a su actuación y pensamiento.

Se parte del ciclo estadístico: problema, plan, datos, análisis, conclusiones; y cómo se trata la abstracción y resolución de un problema estadístico basado en un problema real mayor y pretende alcanzar cada meta del aprendizaje. Salcedo (2005).

Dimensión dos: Tipos de pensamiento. Se consideran cinco elementos como fundamentos del Pensamiento Estadístico. Los autores los dividen en inherentes a la Estadística y los generales aplicados en un contexto estadístico.

- Reconocer la necesidad de datos: Es esencial reconocer que las experiencias personales y la evidencia basada en anécdotas son insuficientes, los datos recopilados deliberadamente son necesarios para tener evidencia empírica.
- Transnumeración: tiene lugar cuando encontramos maneras de obtener datos (medidas o clasificación) que capturan los elementos significativos del sistema real.

- Variabilidad: La incertidumbre es una característica del mundo actual y está, a su vez, se debe a la variación presente en todo, una forma de disminuir la incertidumbre es con la utilización de la estadística.
- Un conjunto particular de modelos: La estadística ha desarrollado métodos para el diseño y análisis de estudios, a partir de modelos matemáticos que incluyen componentes aleatorios.
- Conocimiento del contexto, conocimiento estadístico y síntesis: El conocimiento estadístico, el conocimiento contextual y la información que proviene de los datos son necesarios para que se produzca el pensamiento estadístico. El propio pensamiento es la síntesis de estos elementos, que se realiza para producir implicaciones, conceptos y conjeturas.

Entre los tipos de pensamiento que se utilizan en el contexto estadístico están:

- Pensamiento estratégico: El propósito de decidir qué haremos (favorecer el futuro) y cómo lo haremos lo denominamos pensamiento estratégico. Se incluyen algunos aspectos como: Planear cómo abordar la tarea, división de tareas, plazos para la realización de las tareas, división del trabajo, anticipación a problemas y planear como evitarlos. Una parte importante del pensamiento estratégico es tener conciencia de las restricciones que se deben considerar en la planeación.
- Modelación: La construcción de modelos y su utilización para comprender y predecir el comportamiento del mundo que nos interesa estudiar es una forma general del pensamiento.
- Aplicando técnicas: Una técnica básica en la resolución de problemas en las ciencias matemáticas es encontrar la forma de ubicar un nuevo problema dentro de un problema que ya ha sido resuelto antes de imaginar una solución que pueda ser aplicada o adaptada. La disciplina de la estadística es ella misma la manifestación de esta estrategia. Con el uso de estadísticas, primero reconocemos los elementos de nuestro contexto

(desde lo general a lo particular), operando sin un modelo, y así ubicamos los resultados en otro contexto (de lo general a lo particular).

Dimensión tres: Ciclo interrogativo. Es un proceso de pensamiento genérico de uso constante en la solución de problemas estadísticos. El análisis detallado de las entrevistas indica que el pensador está siempre en estados interrogativos mientras que busca la solución de problemas estadísticos. El ciclo se aplica en los niveles macro, pero también en los niveles muy detallados del pensamiento porque el ciclo interrogativo es recurrente. Sus componentes son: la generación, la búsqueda, la interpretación, la crítica, el juicio.

Dimensión cuatro: Disposiciones. Aquí se incluyen las cualidades personales.

El pensamiento estadístico es afectado por los atributos personales que aquí se denominan disposiciones o actitudes. La naturaleza de estas disposiciones emergió de las entrevistas de los estadísticos y se reconocieron posteriormente en el trabajo de los estudiantes. Algunos de ellos son: Escepticismo, imaginación, curiosidad y conocimiento, franqueza, propensión a buscar un significado más profundo, lógico y perseverante. Estos elementos son genéricos, pero parecen importantes en el contexto de la solución de problemas estadísticos.

4.2 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

La variabilidad en los resultados es inherente a cada fenómeno aleatorio, originando en el conjunto de los datos observados una cierta homogeneidad o heterogeneidad, según que las oscilaciones entre ellos sean pequeñas o grandes. Este grado de variabilidad, disparidad o esparcimiento mutuo de los datos estadísticos es la dispersión.

Cuando se pretende asignar un número para cada grado de variabilidad de las observaciones, surgen diferentes medidas de dispersión, dependiendo de si elige como medida la diferencia entre determinados valores de la variable, o la que existe entre todos ellos y una medida de posición, generalmente la media o la mediana, o de modo que la medida no venga influenciada por las propias unidades de medida de los valores cuya dispersión se desea estimar.

A las medidas de dispersión expresadas en la misma unidad de medida que los datos, las denominaremos medidas de dispersión absoluta, y a las expresadas independientemente de dichas unidades, medidas de dispersión relativa.

Las medidas de dispersión son necesarias para efectuar comparaciones significativas entre grupos de observaciones. Cuando se mide la dispersión de los valores de una variable respecto a una de sus medidas de posición se está midiendo el grado de representatividad que dicha medida de posición tiene del conjunto de los datos a los cuales pretende resumir. Esta representatividad es, precisamente, uno de los requisitos exigidos a las medidas de tendencia central. Fernández, Fuentes (1995).

A continuación se tienen en cuenta los siguientes conceptos de medidas de dispersión, los cuales están acompañados por un ejemplo basado en el siguiente problema:

Muchos bancos solían pedir a los clientes que esperaran en filas individuales en las ventanillas de los cajeros, pero casi todos han cambiado ahora a una sola fila de espera principal. Se han tomado los tiempos de espera de varios clientes en dos bancos: en el Banco 1, donde todos los clientes se forman en una sola fila, y en el Banco 2, donde los clientes esperan en filas individuales de tres cajeros diferentes. De acuerdo con los siguientes registros de tiempos en minutos, determinar cuál organización es benéfica para los clientes. Triola (2004).

BANCO 1 (Fila única)	6,5	6,6	6,7	6,8	7,1	7,3	7,4	7,7	7,7	7,7
BANCO 2 (Múltiples filas)	4,2	5,4	5,8	6,2	6,7	7,7	7,7	8,5	9,3	10

4.3 MEDIDAS DE DISPERSION ABSOLUTAS

Las medidas de dispersión absolutas a considerar son:

4.2.1.1 RECORRIDO

También denominado rango, amplitud de variación e intervalo; es la medida de dispersión más fácil de calcular, ya que únicamente se toman los valores extremos de la variable y se establece su diferencia:

$$\text{Recorrido} = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

No se tienen en cuenta las frecuencias. Su uso es bastante limitado y tan solo se utiliza en aquellas ocasiones, en donde nos interesa obtener una idea rápida de la variación de un grupo de datos.

Los principales defectos de esta medida de dispersión son:

- Posee una total dependencia de los valores extremos de la serie, siendo, por tanto, muy sensible a las variaciones que se producen en los datos de una muestra a otra.

- b. Al no tener en cuenta los valores intermedios de la variable, el recorrido dice poco a cerca de la dispersión de ellos pues no es fácil aceptar que los datos se distribuyan uniformemente entre los valores extremos.
- c. No es posible su aplicación en los casos en que algunos de los valores, máximo o mínimo, como ocurre en ocasiones, quede indeterminado.

Ejemplo:

Para el problema enunciado de los bancos se tiene que:

$$\text{Recorrido}_{\text{Banco } 1} = 7,7 - 6,5 = 1,2 \text{ minutos}$$

$$\text{Recorrido}_{\text{Banco } 2} = 10 - 4,2 = 5,8 \text{ minutos}$$

De acuerdo a estos resultados se puede deducir que la atención en el banco de fila única es más ágil que en el banco de múltiples filas.

4.2.1.2 RECORRIDOS INTERCUANTILICOS

Se define como la diferencia entre dos cuantiles simétricos en la serie ordenada de los valores de la variable. Los más comunes son el recorrido intercuartílico y el recorrido interpercentílico.

Recorrido intercuartílico

Es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero:

$$I_{Q'} = Q_3 - Q_1$$

De acuerdo a la situación de los bancos, se tiene:

Banco 1

Para hallar el valor de Q_3 y Q_1 , se debe tener la mediana $M_e = 7,2$ la cual coincide con el Q_2 , a partir de este valor se halla los cuartiles que se necesitan, obteniéndose:

$$Q_3 = 7,7 \text{ y } Q_1 = 6,65$$

De esta forma:

$$I_{Q'} = 7,7 - 6,65 = 1,05$$

Banco 2

Para hallar el valor de Q_3 y Q_1 , se debe tener la mediana $M_e = 7,2$ la cual coincide con el Q_2 , a partir de este valor se halla los cuartiles que se necesitan, obteniéndose:

$$Q_3 = 8,9 \text{ y } Q_1 = 5,6$$

De esta forma:

$$I_{Q'} = 8,9 - 5,6 = 3,3$$

RECORRIDO INTERPERCENTÍLICO

Es la diferencia entre el centil C_h y C_{100-h}

$$I_{C(h)} = C_h - C_{100-h}$$

RECORRIDO SEMIINTERCUARTÍLICO O DESVIACIÓN CUARTÍLICA

Está dado por:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

En la situación de los bancos se tiene:

Banco 1

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{1,05}{2} = 0,525$$

Banco 2

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{3,3}{2} = 1,65$$

La desviación cuartílica tiene el siguiente significado: en el intervalo $(P - Q, P + Q)$, en que P designa el punto medio del intervalo intercuartílico, está el 50% de los datos de la distribución. El punto P coincide con la mediana, M_e , en las distribuciones simétricas, pero aunque esto no suceda, entre $M_e - Q$ y $M_e + Q$ estará un número de datos próximo al 50%

4.2.1.3 DESVIACIONES MEDIAS

Desviación media respecto a la media: La diferencia entre cada dato y la media se llama desviación respecto a la media. La suma de todas las desviaciones respecto a la media de una distribución de frecuencias, vale cero. Por tanto la media aritmética de dichas desviaciones no sirve para medir la dispersión de los valores de una variable. Sin embargo, al considerar los valores absolutos de las desviaciones, se obtiene una importante medida de dispersión llamada desviación media respecto a la media.

La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto a la media. Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ son los diferentes valores de una variable discreta X , de frecuencias absolutas respectivas $f_1, f_2, \dots, f_k$, la desviación media $D_{\bar{x}}$ viene dada por:

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| f_i$$

en donde $N = \sum_{i=1}^k f_i$ y $\bar{x}$ es la media aritmética de la variable X .

Cuando la variable es continua, basta sustituir los valores x_i por sus correspondientes marcas de clase x'_i .

Para nuestro ejemplo se tiene:

Banco 1

$$\bar{x} = \frac{6,5 + 6,6 + 6,7 + 6,8 + 7,1 + 7,3 + 7,4 + 7,7 + 7,7 + 7,7}{10} = \frac{71,5}{10} = 7,15$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (|6,5 - 7,15| + |6,6 - 7,15| + |6,7 - 7,15| + |6,8 - 7,15| + |7,1 - 7,15| + |7,3 - 7,15| + |7,4 - 7,15| + (3|7,7 - 7,15|))$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (|-0,65| + |-0,55| + |-0,45| + |-0,35| + |-0,05| + |0,15| + |0,25| + (3|0,55|))$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (4,1) = 0,41$$

Banco 2

$$\bar{x} = \frac{4,2 + 5,4 + 5,8 + 6,2 + 6,7 + 7,7 + 7,7 + 8,5 + 9,3 + 10}{10} = \frac{71,5}{10} = 7,15$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (|4,2 - 7,15| + |5,4 - 7,15| + |5,8 - 7,15| + |6,2 - 7,15| + |6,7 - 7,15| \\ + (2|7,7 - 7,15|) + |8,5 - 7,15| + |9,3 - 7,15| + |10 - 7,15|)$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (|-2,95| + |-1,75| + |-1,35| + |-0,95| + |-0,45| + (2|0,55|) + |1,35| \\ + |2,15| + |2,85|)$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{10} (14,9) = 1,49$$

Aunque la media en los dos conjuntos de datos es la misma, es decir el tiempo medio de espera no cambió, porque la configuración de las filas no afecta la eficiencia de los cajeros, se cambió al uso de una sola fila (Banco 1) porque los clientes prefieren tiempos de espera con menos variación, ya que ellos no experimentan las molestias de quedar esperando en una fila individual.

Desviación media respecto a la mediana: Cuando se toman las desviaciones o diferencias de los datos, no con respecto a la media, sino con respecto a la mediana de la distribución, se obtienen otras medidas de dispersión: la desviación media respecto a la mediana y la desviación mediana.

La desviación media respecto a la mediana es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto a la mediana. Para el caso de

una variable discreta, dicha desviación media, la distinguiremos con D_{Me} y viene dada por:

$$D_{Me} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k |x_i - M_e| f_i$$

en que, M_e designa el valor mediano y x_i , f_i , N y k tienen el mismo significado que en la desviación media respecto a la media. Y en el caso de una variable continua simplemente se sustituye x_i por x'_i .

Es una medida de dispersión poco utilizada y su mayor uso corresponde a aquellas distribuciones cuyos valores extremos no están definidos, o cuando la media está afectada por valores grandes de la variable, que obligan a calcular la mediana.

A partir del ejemplo que hemos venido abordando se tiene:

Banco 1

$$M_{e1} = 7,2$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (|6,5 - 7,2| + |6,6 - 7,2| + |6,7 - 7,2| + |6,8 - 7,2| + |7,1 - 7,2| + |7,3 - 7,2| + |7,4 - 7,2| + (3|7,7 - 7,2|))$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (|-0,7| + |-0,6| + |-0,5| + |-0,4| + |-0,1| + |0,1| + |0,2| + (3|0,5|))$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (4,1) = 0,41$$

Banco 2

$$M_{e2} = 7,2$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (|4,2 - 7,2| + |5,4 - 7,2| + |5,8 - 7,2| + |6,2 - 7,2| + |6,7 - 7,2| \\ + (2|7,7 - 7,2|) + |8,5 - 7,2| + |9,3 - 7,2| + |10 - 7,2|)$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (|-3| + |-1,8| + |-1,4| + |-1| + |-0,5| + (2|0,5|) + |1,3| + |2,1| \\ + |2,8|)$$

$$D_{Me} = \frac{1}{10} (14,9) = 1,49$$

En este caso se obtuvo que la desviación media con respecto a la media y la desviación media con respecto a la mediana es la misma.

Desviación mediana: La desviación mediana se define como la mediana de la distribución cuyos valores son las desviaciones en valor absoluto, de los datos respecto a la mediana.

En el caso de los bancos se tiene:

Banco 1

$$M_{e1} = 7,2$$

Las desviaciones con respecto a la mediana de cada dato, se tienen al hallar la desviación media con respecto a la mediana,

$$0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,1; 0,1; 0,2; 0,5; 0,5; 0,5$$

Realizando su correspondiente ordenación, se obtiene

$$0,1; 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,6; 0,7$$

Donde se observa que la desviación mediana es 0,5

Banco 2

$$M_{e2} = 7,2$$

Las desviaciones con respecto a la mediana de cada dato, se tienen de hallar la desviación media respecto a la mediana,

$$3; 1,8; 1,4; 1; 0,5; 0,5; 0,5; 1,3; 2,1; 2,8$$

Realizando su correspondiente ordenación, se obtiene

$$0,5; 0,5; 0,5; 1; 1,3; 1,4; 1,8; 2,1; 2,8; 3;$$

Donde se observa que la desviación mediana es 1,35

En el Banco 1 se obtuvo que la desviación mediana es 0,5; este valor es menor que la desviación mediana del Banco 2 cuyo dato fue 1,35. Lo que indica que el Banco 1 tiene menor variación que el Banco 2.

4.2.1.4 VARIANZA (s^2)

Es muy conocida y usada, pero su importancia radica especialmente en que da origen a la medida de dispersión más significativa, denominada desviación típica o estándar (s).

La varianza, es apenas una primera aproximación sobre la cuantificación del grado de variabilidad de una distribución cualquiera. Para comparar dos distribuciones, en cuanto a su variabilidad absoluta, se pueden utilizar sus varianzas, indicándonos cuál de ellas es más homogénea o cuál es más heterogénea.

La varianza presenta el inconveniente de expresar el grado de dispersión de una variable en unidades diferentes a las que se tenía originalmente. Por lo general, se

utiliza la varianza para comprobar dos o más distribuciones que estén dadas en las mismas unidades de medida y para calcular la desviación típica o estándar.

De acuerdo al tipo de variable se realizan los siguientes cálculos:

Caso de una variable discreta: La varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media. Sigamos denotando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ los valores de una variable discreta X y con $f_1, f_2, \dots, f_k$ sus frecuencias absolutas respectivas. La varianza S_x^2 , es, por definición

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

en que

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \text{ y } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

En cuanto a la situación de los bancos se tiene para:

Banco 1

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
6,5	-0,65	0,4225
6,6	-0,55	0,3025
6,7	-0,45	0,2025
6,8	-0,35	0,1225

7,1	-0,05	0,0025
7,3	0,15	0,0225
7,4	0,25	0,0625
7,7	0,55	0,3025
7,7	0,55	0,3025
7,7	0,55	0,3025
Total		2,045

$$S_x^2 = \frac{1}{10}(2,045) = 0,2045$$

Banco 2

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
4,2	-2,95	8,7025
5,4	-1,75	3,0625
5,8	-1,35	1,8225
6,2	-0,95	0,9025
6,7	-0,45	0,2025
7,7	0,55	0,3025
7,7	0,55	0,3025
8,5	1,35	1,8225
9,3	2,15	4,6225
10	2,85	8,1225
Total		29,865

$$S_x^2 = \frac{1}{10}(29,865) = 2,9865$$

El tiempo medio de espera no cambió porque la configuración de las filas no afecta la eficiencia de los cajeros, se cambió a una sola fila porque los clientes prefieren tiempos de espera que sean más consistentes, con menos variación.

Caso de una variable continua: Viene dada por la expresión

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i' - \bar{x})^2 f_i$$

Sin más que sustituir en ella los valores x_i por las marcas de clase x_i' correspondientes.

Cuando la variable es continua, hay que tener en cuenta en el cálculo de la varianza, al igual que ocurría en el de la media, el error de agrupamiento que se origina al admitir que los valores de cada intervalo se concentran en su punto medio, es decir, en su marca de clase. Pero, teóricamente no supera la semiapertura del mayor de los intervalos, es en la práctica muy pequeño, no ocurre lo mismo con la varianza, en la que los valores por debajo de la marca de clase de unos intervalos no se ven compensados por los situados por encima en otros, por estar las desviaciones que intervienen en su definición elevadas al cuadrado. Esto hace que, en el caso continuo, la varianza calculada se aparte por exceso de su verdadero valor. El error producido será tan grande cuanto menor sea el número de intervalos. Si este número es pequeño debe llevarse a cabo una corrección o ajuste de la varianza obtenida.

Propiedades de la varianza

- a. La varianza debe ser siempre un valor positivo: $s^2 \geq 0$

Debido a que en la fórmula dada para calcular la varianza, la expresión $(x_i - \bar{x})$ se encuentra elevada al cuadrado, por consiguiente se obtendrán

resultados positivos. Sólo es nula cuando $x_i - \bar{x} = 0, i = 1, 2, \dots, k$, esto es, cuando todos los valores de la variable son iguales entre si. Es decir, que la varianza de una constante es cero, y en los demás casos un número positivo.

- b. Si s_x^2 designa la varianza de una variable discreta X , la varianza, s_y^2 , de la nueva variable $Y = \lambda X$, en donde λ denota un número cualquiera, es:

$$s_y^2 = \lambda^2 s_x^2$$

En efecto, puesto que $\bar{y} = \lambda \bar{x}$, se tiene:

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (\lambda x_i - \lambda \bar{x})^2 f_i = \lambda^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i = \lambda^2 s_x^2$$

- c. Sea s_x^2 la varianza de la variable discreta X y sea $Y = \lambda X + \mu$. La varianza de Y , es s_y^2 , $s_y^2 = \lambda^2 s_x^2$.

Como $\bar{y} = \lambda \bar{x} + \mu$

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k [(\lambda x_i + \mu) - (\lambda \bar{x} + \mu)]^2 f_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k [\lambda(x_i - \bar{x})]^2 f_i = \lambda^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i = \lambda^2 s_x^2 \end{aligned}$$

- d. La varianza de los valores de una variable, es la media aritmética de los cuadrados de dichos valores menos el cuadrado de la media, esto es:

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2$$

En efecto:

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i^2 - 2\bar{x} \cdot x_i + \bar{x}^2) f_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K x_i^2 \cdot f_i - 2\bar{x} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i + \frac{1}{N} \cdot \bar{x}^2 \cdot \sum_{i=1}^k f_i \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

4.2.1.5 DESVIACIÓN TÍPICA O ESTÁNDAR (s)

Se define como la raíz cuadrada de la varianza, tomada siempre con signo positivo. También se puede definir como la raíz cuadrada de las desviaciones respecto a la media.

La varianza no viene expresada en las mismas unidades de medida que las de los datos, salvo que se extraiga su raíz cuadrada: se obtiene así la más utilizada de las medidas de dispersión: llamada desviación estándar o típica, o desviación cuadrática media respecto a la media, la cual se calcula así:

$$s_x = +\sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}$$

La desviación estándar, obviamente, verificará las propiedades expuestas anteriormente de la varianza.

Veamos, el significado de la desviación estándar.

Sean $x_1, x_2, \dots, x_k$ los valores de una variable discreta X , y $f_1, f_2, \dots, f_k$ sus frecuencias respectivas. Entre todas las diferencias $(x_i - \bar{x})^2$, $i = 1, 2, \dots, k$, se consideran sólo aquellas cuyos valores x_i verifiquen la desigualdad $|x_i - \bar{x}| \geq q$,

en que q designa un número positivo. Sean éstas: $(x_{i1} - \bar{x})^2, (x_{i2} - \bar{x})^2, \dots, (x_{ip} - \bar{x})^2$, afectadas, respectivamente, con las frecuencias $f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ip}$. Se tiene que:

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i \geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p (x_{ij} - \bar{x})^2 f_{ij} \geq q^2 \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^p f_{ij} \right]$$

La cantidad encerrada entre corchetes representa la frecuencia relativa de los x_i tales que $|x_i - \bar{x}| \geq q$, frecuencia que se expresa con la notación $f_r(|x_i - \bar{x}| \geq q)$.

De la fórmula anterior se obtiene: $f_r(|x_i - \bar{x}| \geq q) \leq \frac{S_x^2}{q^2}$. De aquí, puesto que $f_r(|x_i - \bar{x}| \geq q) + f_r(|x_i - \bar{x}| < q) = 1$, resulta:

$$f_r(|x_i - \bar{x}| < q) \geq 1 - \frac{S_x^2}{q^2}$$

Al elegir el valor de q como $q = t \cdot S_x$, la desigualdad anterior se transforma en la siguiente:

$$f_r(|x_i - \bar{x}| < t \cdot S_x) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

Dándole sentido a la desviación típica; la proporción de datos que caen en el intervalo $(\bar{x} - t \cdot S_x, \bar{x} + t \cdot S_x)$ es como mínimo $1 - \left(\frac{1}{t^2}\right)$. Por ejemplo, la proporción de datos incluidos en el intervalo $(\bar{x} - 2 \cdot S_x, \bar{x} + 2 \cdot S_x)$ es como mínimo $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$, es decir el 75% del total; la de los datos que caen en el intervalo $(\bar{x} - 3 \cdot S_x, \bar{x} + 3 \cdot S_x)$ es $1 - \frac{1}{3^2} = 0,88$ como mínimo, esto es, el 88% del total; el

porcentaje de los valores incluidos en el intervalo $(\bar{x} - 10.S_x, \bar{x} + 10.S_x)$ es, como mínimo, el 99% del total.

La desviación típica es una medida precisa de la dispersión de los datos en torno a la media de la distribución, siendo preferida, en general, a las demás medidas absolutas de dispersión.

La desviación típica es la medida de dispersión más conocida y por tal motivo la más utilizada; desempeña un papel muy importante en el análisis de los datos estadísticos.

Al igual que la varianza, permite la comparación de dos o más distribuciones, cuando están dadas en las mismas unidades de medidas, para determinar cuál de ellas presenta mayor o menor grado de variabilidad absoluta.

Supóngase dos series de datos N_1 y N_2 números (o dos distribuciones de frecuencias totales N_1 y N_2) cuyas variaciones vienen dadas por s_1^2 y s_2^2 , respectivamente, y que tienen la misma media $\bar{x}$. Entonces la varianza combinada para ambas series (o ambas distribuciones de frecuencia) está dada por

$$s^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2}$$

Esta es una media aritmética ponderada de las varianzas. Este resultado puede generalizarse a tres o más series de datos.

Retomando el ejemplo de los bancos se tiene:

Banco 1

$$S_x^2 = \frac{1}{10}(2,045) = 0,2045$$

$$S_x = +\sqrt{S_x^2}$$

$$S_x = \sqrt{0,2045} = 0,4949$$

Banco 2

$$S_x^2 = \frac{1}{10}(29,865) = 2,9865$$

$$S_x = +\sqrt{S_x^2}$$

$$S_x = \sqrt{2,9865} = 1,728$$

Aquí se verifica nuevamente una menor variación de tiempo de espera de los clientes en el Banco 1 (fila única)

El valor de la desviación media con respecto a la mediana puede ser menor o igual a la desviación media respecto a la media, la que a su vez es siempre menor que la desviación típica.

$$D_{Me} \leq D_{\bar{X}} < S_x$$

Del ejemplo se tiene:

$$\text{Banco 1 } 0,41 \leq 0,41 < 0,4949$$

$$\text{Banco 2 } 1,49 \leq 1,49 < 1,72$$

4.2.2 MEDIDAS DE DISPERSIÓN RELATIVAS

Se define como el cociente entre una medida de dispersión absoluta (a excepción de la varianza) y una medida de tendencia central, generalmente la media o mediana.

4.2.2.1 COCIENTES ENTRE UNA MEDIDA DE DISPERSION ABSOLUTA Y LA MEDIANA

Los coeficientes de dispersión relativa que resultan de estos cocientes se emplean en aquellos casos en que la medida de tendencia central elegida para representar a la distribución sea la mediana, esto es, en los casos en que la distribución es muy asimétrica o alguno de los valores extremos de la variable quede indefinido. Estos coeficientes, que expresan la correspondiente medida de dispersión absoluta en unidades o porcentajes de la mediana son los siguientes:

INTERVALO INTERCUARTILICO RELATIVO

Se define como el cociente entre el recorrido intercuartílico y la mediana

$$I_{Qr} = \frac{Q_3 - Q_1}{M_e}$$

DESVIACION CUARTÍLICA RELATIVA

Este coeficiente se designa por I'_{Qr} , se obtiene dividiendo, el recorrido intercuartílico entre el doble de la mediana

$$I'_{Qr} = \frac{Q_3 - Q_1}{2M_e}$$

COEFICIENTE DE VARIACION MEDIANA

Se define como el cociente entre la desviación estándar y la mediana, se simboliza: V_{Me}

$$V_{Me} = \frac{S_x}{M_e}$$

El coeficiente de dispersión absoluta más confiable es la desviación estándar (esta confiabilidad aumenta en la medida que el número de datos es más grande), el coeficiente de variación mediana resulta una medida relativa más perfecta que las dos anteriores.

Las medidas de dispersión relativas anteriores no pueden ser aplicadas cuando el valor de la mediana sea cero o un valor próximo a cero, a no ser que se efectué un cambio de origen para los valores de la variable. Cuando la mediana toma un valor muy próximo a cero, el coeficiente de variación mediana tiene un valor tan grande que no resulta adecuado para medir la dispersión relativa a la mediana de la dispersión.

4.2.2.2 COCIENTES ENTRE UNA MEDIDA DE DISPERSION ABSOLUTA Y LA MEDIA ARITMÉTICA

Las medidas de dispersión relativa que se obtienen de estos cocientes expresan la correspondiente medida de dispersión absoluta en unidades o porcentajes de la media, generalmente de la media aritmética. Debe usarse cuando sea el promedio la medida de posición que representa a la distribución de frecuencias. Estas medidas son:

RECORRIDO RELATIVO

Es el cociente entre el recorrido o amplitud de variación, es decir, la diferencia entre los valores extremos de la variable y la media aritmética.

$$A_r = \frac{x_M - x_m}{\bar{x}}$$

Esta medida tiene los inconvenientes propios del rango o recorrido, haciendo su uso muy limitado.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN CUARTÍLICA

Se define como el cociente entre la desviación cuartílica y la media de los cuartiles primero y tercero. Se simboliza V_Q

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

COEFICIENTE DE VARIACION MEDIA DE PEARSON

Se define como el cociente entre la desviación estándar y la media, y se nota $V_{\bar{x}}$

$$V_{\bar{x}} = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}}$$

Este coeficiente es la más importante y confiable medida de dispersión relativa.

Un inconveniente del coeficiente de variación es que deja de ser útil cuando $\bar{x}$ esta próxima a cero.

Con las medidas de dispersión relativa pueden hacerse comparaciones significativas a cerca de la variabilidad de los datos en las distribuciones de frecuencias, aunque dichos datos vengan expresados en diferentes unidades de medidas.

PUNTAJE TÍPICO O ESTANDARIZADO (Z)

Esta medida de dispersión es muy utilizada como variante estadística en la distribución normal y en el análisis del coeficiente de correlación. Se emplea para medir la desviación de una observación con respecto a la media aritmética, en

unidades de desviación típica, determinándose la posición relativa de una observación dentro del conjunto.

La fórmula utilizada en el cálculo es:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Este puntaje típico se emplea para comparar dos o más datos individuales, aunque pertenezcan a distribuciones diferentes, puede suceder que tengan medias y varianzas que no coincidan.

5. DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

La idea de la propuesta es organizar formularios con el fin de evaluar los niveles de desarrollo de pensamiento estadístico de estudiantes de grado undécimo con respecto a las medidas de dispersión, que permitan clasificar las fortalezas en el dominio del tema y a la vez muestre las debilidades. Esto se hace a través de formularios interactivos.

Este proceso fue abordado con base en la siguiente pregunta:

¿Qué elementos son necesarios para el diseño de cuestionarios interactivos que ayuden a determinar el nivel de cultura estadística en que se encuentran los estudiantes de grado undécimo cuando se evalúan las medidas de dispersión?

Para llevar a cabo esta propuesta se desarrollaron las siguientes etapas:

- ✓ Revisión bibliográfica sobre alfabetización, pensamiento y razonamiento estadístico.
- ✓ Revisión bibliográfica sobre las medidas de dispersión, conceptos y propiedades.
- ✓ Diseño de una matriz que permita relacionar los conceptos de medidas de dispersión con cada uno de los niveles de cultura estadística.
- ✓ Diseño de los cuestionarios en un formato electrónico.
- ✓ Escritura de documento final.

5.1 PROPUESTA DE CUESTIONARIOS EVALUATIVOS

Para proponer los formularios fue necesario organizar dos matrices, la primera matriz conformada por objetivos a alcanzar en el trabajo de medidas de dispersión de acuerdo a los niveles de pensamiento estadístico.

Para su elaboración se eligen cinco tipos de medidas de dispersión (rango, desviación media absoluta, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación) y de acuerdo al nivel de alfabetización se plantean objetivos en relación con la habilidad que el estudiante debe alcanzar en cada uno de los temas para reconocer y comprender los conceptos, el vocabulario, los símbolos, el cálculo y la aplicación de fórmulas. Luego, con cada uno de los temas y conforme al nivel de razonamiento se formulan objetivos en relación a la caracterización del concepto, la comprensión de la variabilidad, la resolución de problemas, la interpretación e identificación de información dentro de un concepto o dentro de una fórmula. En cuanto al nivel de pensamiento se plantean objetivos referentes a analizar condiciones, precisar conceptos, reconocer y aplicar propiedades, y sacar inferencias ante una situación dada.

**MATRIZ 1: MEDIDAS DE DISPERSIÓN VS NIVELES DE PENSAMIENTO
(OBJETIVOS)**

Tema	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
RANGO	Interpretar el concepto de rango.	Analizar el cambio en el rango al modificar el conjunto de datos.	Precisar la pertinencia de la aplicación del rango como medida de dispersión.
RANGO	Reconocer el intervalo en donde se localizan los	Resolver problemas aplicando el concepto de rango.	Establecer conclusiones dentro del problema planteado con

	datos de una situación dada.		respecto a la distribución de los datos en el rango.
DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA	Reconocer el proceso para calcular la desviación media absoluta de un conjunto de datos.	Interpretar la relación entre los valores absolutos de la diferencia de cada dato y la media aritmética dentro de la desviación media absoluta.	Analizar las condiciones que deben tener los datos para que la desviación media absoluta sea cero.
	Hallar la desviación media absoluta de un conjunto de datos.	Identificar la interpretación dada a la desviación media absoluta de un conjunto de datos.	Precisar el comportamiento de la desviación media al modificar algún dato del conjunto y comparar el cambio presentado en la nueva desviación media absoluta.
VARIANZA	Reconoce el proceso para hallar la varianza de un conjunto de datos.	Identificar información implícita dentro de la fórmula para el cálculo de la varianza.	Precisar cada uno de los conceptos involucrados en una propiedad de la varianza.
	Calcular la varianza de un grupo de datos.	Comparar e inferir a partir del cálculo de las varianzas de dos conjuntos de datos con características similares.	Analizar y aplicar propiedades de la varianza en un conjunto de datos.

DESVIACIÓN ESTANDAR	Identifica la relación existente entre varianza y la desviación estándar.	Analiza las características de la desviación estándar para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.	Justificar razonamientos y conclusiones usando propiedades de la desviación estándar.
	Aplicar la expresión que permite calcular la desviación estándar en una situación determinada.	Resolver problemas utilizando el concepto de desviación estándar y sus propiedades.	Aplicar propiedades de la desviación estándar de un conjunto de datos e inferir frente a una situación dada.
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	Diferencia el proceso para encontrar el coeficiente de variación.	Reconoce el sentido del coeficiente de variación en un conjunto de datos.	Analiza el cambio en el coeficiente de variación al modificar el conjunto de datos.
	Halla el coeficiente de variación de manera adecuada dentro de un conjunto de datos.	Justifica el uso del coeficiente de variación dentro de dos conjuntos de datos.	Comparar e inferir a partir de modificaciones en un conjunto de datos el cambio presentado en el coeficiente de variación.

Establecidos los objetivos para cada nivel de cultura estadística y medidas de dispersión, se presenta la segunda matriz, que por un lado, relaciona preguntas de situaciones problema con cada uno de los niveles de cultura estadística en donde se evidencia un nivel progresivo de profundización ante una situación dada. Y por otro lado, relaciona los objetivos de la primera matriz con cada una de las preguntas planteadas en la segunda matriz.

MATRIZ 2: MEDIDAS DE DISPERSIÓN VS NIVELES DE PENSAMIENTO (CUESTIONARIOS)

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
RANGO	1. Es correcto afirmar que el rango de una distribución: a) Es la diferencia entre el último y el primer valor de la variable. b) Es la diferencia entre el valor mayor y el menor valor de la variable. c) Es la diferencia entre el valor menor y el mayor valor de la variable.	1. El rango cambia cuando: a) A todos los valores de la variable se le suma una misma constante. b) A todos los valores de la variable se le multiplica por una misma constante. c) Todos los valores de la variable se le resta un valor constante.	1. Con respecto al rango es correcto afirmar que: a) Posee una total independencia de los valores extremos del conjunto de datos. b) Al no tener en cuenta los valores intermedios de la variable, dice poco a cerca de la dispersión, ya que los datos no siempre se distribuyen uniformemente entre los valores extremos. c) Es posible su aplicación en los casos en que algunos de los valores, máximo o mínimo quede indeterminado

R

A

N

G

O

2. Las cuentas mensuales de servicios públicos (agua) de un hogar durante el año 2011 aparecen registrados en siguiente tabla:

MES	COSTOS
ENERO	65.700
FEBRERO	101.200
MARZO	84.150
ABRIL	69.840
MAYO	74.600
JUNIO	65.700
JULIO	99.340
AGOSTO	81.850
SEPTIEMBRE	103.200
OCTUBRE	79.250
NOVIEMBRE	68.700
DICIEMBRE	81.200

Los costos del servicio de agua en el hogar estuvieron en un rango de:

a) \$83.200
b) \$37.500
c) \$45.700

2. Las cuentas mensuales de servicios públicos (agua) de un hogar durante el año 2011 aparecen registrados en siguiente tabla:

MES	COSTOS
ENERO	65.700
FEBRERO	101.200
MARZO	84.150
ABRIL	69.840
MAYO	74.600
JUNIO	65.700
JULIO	99.340
AGOSTO	81.850
SEPTIEMBRE	103.200
OCTUBRE	79.250
NOVIEMBRE	68.700
DICIEMBRE	81.200

Para 2012 se incrementó al doble los integrantes del hogar, siendo el consumo por integrante proporcional al costo. Para el 2012 se tiene previsto que los costos estén en un rango de:

a) \$37.500
b) \$75.000
c) \$18.750

2. Las cuentas mensuales de servicios públicos (agua) para dos hogares durante el año 2011 aparecen registrados en siguiente tabla:

MES	COSTOS HOGAR 1	COSTOS HOGAR 2
ENERO	65.700	68.700
FEBRERO	101.200	76.900
MARZO	84.150	87.890
ABRIL	69.840	52.320
MAYO	74.600	59.210
JUNIO	65.700	99.110
JULIO	99.340	94.200
AGOSTO	81.850	\$\$\$\$\$
SEPTIEMBRE	103.200	64.730
OCTUBRE	79.250	88.680
NOVIEMBRE	68.700	94.320
DICIEMBRE	81.200	97.200

Si los costos del servicio de agua para el segundo hogar estuvieron en un rango de \$48.000 y se sabe que en agosto hubo un valor extremo, es correcto afirmar que:

a) El mayor valor fue de 100.320
b) El menor valor fue de 51.110
c) Cualquiera de las dos afirmaciones anteriores es cierta, pero no juntas a la vez.

DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA	3. El proceso para obtener la desviación media absoluta es: a) La sumatoria de las diferencias en valor absoluto de cada dato con respecto a la media aritmética, dividido por a cantidad de datos. b) El cociente entre la sumatoria de los valores absolutos de las diferencias entre la media aritmética y cada dato. c) El producto de la cantidad de datos por la sumatoria entre las diferencias en valor absoluto de cada dato con respecto a la media aritmética.	3. Los valores obtenidos en valor absoluto de la diferencia de cada uno de los datos con la media aritmética, al hallar la desviación media absoluta, se entienden como: a) La distancia en que se separa un dato con el siguiente. b) El desvío entre cada dato que toma la variable y la media aritmética. c) La varianza entre los datos y la media aritmética.	3. Una de las siguientes afirmaciones es incorrecta a) La desviación media absoluta puede llegar a ser cero. b) Si el desvío entre todos los datos y la media aritmética es igual a cero, es debido a que los datos coinciden con la media aritmética. c) La desviación media absoluta no puede llegar a ser cero, debido a que los datos no pueden coincidir con la media aritmética.
---------------------------	---	--	--

DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA

4. Las siguientes mediciones corresponden a concentraciones de alcohol en la sangre de 15 conductores de vehículos implicados en accidentes.

0,27	0,17	0,17	0,16	0,13
0,14	0,16	0,12	0,16	0,21
0,24	0,29	0,24	0,17	0,18

El valor correspondiente a la desviación media absoluta del problema es:

- a) 0,05
- b) 0,0345
- c) 0,0412

4. Las siguientes mediciones corresponden a concentraciones de alcohol en la sangre de 15 conductores de vehículos, implicados en accidentes.

0,27	0,17	0,17	0,16	0,13
0,14	0,16	0,12	0,16	0,21
0,24	0,29	0,24	0,17	0,18

La desviación media absoluta de esta muestra es 0,0412; este dato representa:

- a) La cantidad de alcohol que tiene en promedio los conductores involucrados en el estudio.
- b) El promedio de las variaciones entre cada medición de alcohol y la media aritmética de la muestra.
- c) La diferencia entre dos mediciones cualesquiera es 0,0412

4. Las siguientes mediciones corresponden a concentraciones de alcohol en la sangre de 15 conductores de vehículos, implicados en accidentes

0,27	0,17	0,17	0,16	0,13
0,14	0,16	0,12	0,16	0,21
0,24	0,29	0,24	0,17	0,18

De los datos anteriores se obtiene que la desviación media absoluta es 0,0412, al agregar un dato que coincida con una de las modas; la desviación media absoluta presenta:

- a) Un aumento debido a que se incrementa la cantidad de datos.
- b) Una disminución ya que se estaría agregando un desvío más.
- c) Una disminución porque la diferencia entre la media y la moda es mayor.

VARIANZA	5. Para hallar la varianza se requiere realizar: a) El cálculo de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media. b) El cálculo de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media. c) El cálculo de la media aritmética de las desviaciones de los datos respecto a la media.	5. En la ecuación $S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$ permite calcular la varianza, por tal, es correcto afirmar que: a) x_i indica cada uno de los datos, $\bar{x}$ indica la frecuencia, y $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ es la mediana. b) x_i indica cada uno de los dato, $\bar{x}$ es la media aritmética, y $(x_i - \bar{x})$ indica cada una de las desviaciones. c) x_i es cada uno de los datos, $\bar{x}$ es la media aritmética, y f_i es la cantidad de veces que está la media.	5. La igualdad $s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2$ refiere una propiedad de la varianza que dice: a) La varianza de los valores de una variable, es la media aritmética de los cuadrados de dichos valores menos la media. b) La varianza de los valores de una variable, es la media aritmética al cuadrado de dichos valores menos el cuadrado de la media c) La varianza de los valores de una variable, es la media aritmética de los cuadrados de dichos valores menos el cuadrado de la media
----------	--	---	---

VARIANZA	6. El tiempo requerido para que un conductor de automóvil responda a una situación de emergencia en particular es t. Se hizo un registro para 10 conductores. Los tiempos (en segundos) fueron $t = 5, 8, 1.1, 7, 6, 9, 7, 8, 7, 8$. ¿Cuál es el valor de la media y cuál es el valor de la varianza? a) Media= 2.13 seg; Varianza = 4.53 seg^2. b) El valor de la media es 6.61 seg y el de la varianza es 4,53 seg^2. c) El valor de la media es 7.9 seg y el de la varianza es 2.13 seg^2.	6. El tiempo requerido para que un conductor de automóvil responda a una situación de emergencia en particular es t, se hizo un primer registro para 10 conductores. Los tiempos (en segundos) fueron. $t = 5, 8, 1.1, 7, 6, 9, 7, 8, 7, 8$ Luego se hizo un segundo registro y los tiempos (en segundos) fueron $t = 8, 7, 8, 9, 4, 7, 6, 9, 5, 6$; Comparando la variabilidad de los dos registros se puede afirmar que: a) El primer registro es más heterogéneo que el segundo, porque la varianza de 4,53 seg^2 es mayor que la varianza del segundo registro, que corresponde a 2,49 seg^2. b) El primer registro es más homogéneo que el segundo, porque la varianza de 4,53 seg^2 es mayor que la varianza del segundo registro, que corresponde a 2,49 seg^2. c) El primer registro es más homogéneo que el segundo, porque la varianza del primer registro es mayor que la varianza del segundo registro.	6. El tiempo requerido para que un conductor de automóvil responda a una situación de emergencia en particular es t, se hizo un primer registro para 10 conductores. Los tiempos (en segundos) fueron $t = 5, 8, 1.1, 7, 6, 9, 7, 8, 7, 8$. Después de un entrenamiento se hizo un segundo registro y los tiempos (en segundos) fueron exactamente la mitad de los del primer registro. ¿Qué relación hay entre la varianza del primer registro y la varianza del segundo registro? a) La varianza del primer registro es la mitad de la varianza del segundo registro. b) La varianza del primer registro es el doble de la varianza del segundo registro. c) La varianza del primer registro es el cuádruplo de la varianza del segundo registro.
--	---	--	---

DESVIACIÓN ESTÁNDAR	7. La relación entre la desviación estándar y la varianza es: a) La desviación estándar es la mitad de la varianza. b) La varianza es la raíz cuadrada de la desviación estándar. c) La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.	7. Si la desviación estándar es pequeña y su rango es grande, se puede afirmar que: a) La mayoría de datos están muy próximas a la media y existe por lo menos un valor atípico. b) Todos los datos son muy homogéneas. c) No es suficiente la información para afirmar algo.	7. Si a cada dato de un conjunto se multiplica por una constante n y luego se le suma otra constante m entonces la relación entre la desviación estándar del conjunto inicial con el conjunto final es: a) La desviación estándar del conjunto final es $\sqrt{n}$ veces la desviación estándar del conjunto inicial. b) La desviación estándar del conjunto final es $n \cdot m$ veces la desviación estándar del conjunto inicial. c) La desviación estándar del conjunto final es n veces la desviación estándar del conjunto inicial.
---------------------	--	--	---

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

8. La siguiente tabla muestra los coeficientes de inteligencia (CI) de 480 niños de una escuela elemental.

CI	70	74	78	82	86
n_i	4	9	16	28	45
CI	90	94	98	102	106
n_i	66	85	72	54	38
CI	110	114	118	122	126
n_i	27	18	11	5	2

Su media aritmética y su desviación estándar son:

- a) 59,79 y 10,47
- b) 95,97 y 10,47
- c) 94,47 y 11,47

8. La siguiente tabla muestra los coeficientes de inteligencia (CI) de 480 niños de una escuela elemental.

CI	70	74	78	82	86
n_i	4	9	16	28	45
CI	90	94	98	102	106
n_i	66	85	72	54	38
CI	110	114	118	122	126
n_i	27	18	11	5	2

El porcentaje de estudiantes cuyos coeficientes de inteligencia (CI) están a una desviación estándar de la media aritmética es:

- a) 68.27%
- b) 95.45%
- c) 99.73%

8. La siguiente tabla muestra los coeficientes de inteligencia (CI) de 480 niños de una escuela elemental.

CI	70	74	78	82	86
n_i	4	9	16	28	45
CI	90	94	98	102	106
n_i	66	85	72	54	38
CI	110	114	118	122	126
n_i	27	18	11	5	2

Supongamos que se quieren hacer estudios sobre el proceso de aprendizaje de los niños con C.I. muy altos o con C.I. muy bajos, para ello se eligen el 6% de los niños. El rango de coeficientes que no se considerará en el estudio es:

- a) [70, 75]
- b) [116.9, 126]
- c) [75, 116.9]

COEFICIENTE DE VARIACIÓN	9. Para hallar el coeficiente de variación de un conjunto de datos se debe: a) Realizar la diferencia entre la desviación estándar y la media aritmética. b) Hallar el cociente entre la varianza y la media aritmética. c) Calcular el cociente entre la desviación estándar y la media aritmética.	9. El coeficiente de variación puede expresarse en términos de porcentaje para: a) Realizar comparaciones de manera más fácil. b) Llevar los valores de dos distribuciones a la misma unidad de medida y así realizar la comparación. c) Comparar la dispersión de dos distribuciones con respecto a un punto fijo de los datos.	9. El coeficiente de variación no cambia cuando: a) A todos los valores de la variable se le suma una misma constante. b) A todos los valores de la variable se le multiplica por una misma constante. c) Todos los valores de la variable se elevan al cuadrado.
---------------------------------	---	---	--

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

10. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de papel y plástico (en libras) desechados por hogares de la ciudad en una semana:

Papel	Plástico	Papel	Plástico
9,55	2,19	6,33	0,92
6,38	2,10	6,16	1,40
2,80	1,41	10,00	1,74
6,98	0,63	12,29	2,87

El valor del coeficiente de variación de la cantidad de papel es:

- a) 2,627
- b) 0,977
- c) 0,362

10. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de papel y plástico en libras desechados por hogares de la ciudad en una semana:

Papel	Plástico	Papel	Plástico
9,55	2,19	6,33	0,92
6,38	2,10	6,16	1,40
2,80	1,41	10,00	1,74
6,98	0,63	12,29	2,87

Con respecto a las mediciones anteriores, la distribución de los datos del plástico presenta una mayor dispersión, debido a que:

- a) Los datos son menores y están tomando un intervalo de variación menor.
- b) El porcentaje de dispersión es mayor con respecto a la dispersión del papel.
- c) El porcentaje al ser mayor representa la relación entre la media de los datos y su desviación estándar correspondiente.

10. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de papel y plástico en libras desechados por hogares de la ciudad en una semana:

Papel	Plástico	Papel	Plástico
9,55	2,19	6,33	0,92
6,38	2,10	6,16	1,40
2,80	1,41	10,00	1,74
6,98	0,63	12,29	2,87

Si los datos que representan la cantidad de papel se reducen a la mitad, el valor del coeficiente de variación:

- a) No tendría mayores cambios, debido a que simplemente los datos de la desviación estándar y la media aritmética reducirían en la misma proporción.
- b) Se mantiene, ya que el porcentaje de comparación no cambia.
- c) Cambiaría completamente debido a la reducción de los valores involucrados.

5.2 FORMULARIOS

El modelo propuesto consta de tres formularios diseñados en un formato electrónico, uno para cada nivel de pensamiento estadístico (alfabetización, razonamiento y pensamiento).

Cada formulario está constituido por un encabezado, diez preguntas de opción múltiple con tres respuestas posibles, dos preguntas para cada uno de los siguientes temas: rango, desviación media absoluta, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación, que corresponden a medidas de dispersión; finalmente una calificación final y una sugerencia para superar el nivel del cuestionario.

Para superar el nivel es necesario que el usuario conteste de manera correcta por lo menos el 70% de las preguntas propuestas, en tal caso se sugiere abordar el siguiente cuestionario hasta superar los tres formularios; en caso contrario se le presentan sugerencias para mejorar el nivel de pensamiento estadístico.

Para evaluar, en el primer formulario se tienen en cuenta las habilidades de comprensión básica de los conceptos de las medidas de dispersión escogidas, el vocabulario estadístico y la simbología propia.

Dentro del segundo formulario se valora la manera de razonar que posee el usuario en relación con las medidas de dispersión y en cómo se le da sentido a la información de éstas dentro de un contexto específico. Además se mide la destreza que demuestra tener el usuario en la utilización de los conceptos de medidas de dispersión (como recordar, reconocer y discriminar entre otros conceptos), y las habilidades en la solución de problemas que le permitan hacer comparaciones entre diferentes situaciones.

Finalmente, para el tercer formulario se estima el papel que juega el concepto de dispersión, la variabilidad en la muestra dada y cómo este cambio repercute al hacer inferencias de la población. Implica ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema y dar conclusiones.

6. CONCLUSIONES

- La elaboración de este trabajo ha permitido organizar un modelo de formularios que facilitan la evaluación de las medidas de dispersión más representativas; por medio de la solución de cuestionarios; involucrando en ellos contextos adecuados para el trabajo en estadística; porque ubica al estudiante en un nivel determinado de cultura estadística.
- La organización de los cuestionarios permite la reflexión sobre la evaluación en medidas de dispersión, con el fin de complementar el proceso para que el estudiante tenga un mayor dominio del tema dentro del desarrollo de cada uno de los niveles de pensamiento estadístico.
- El material es susceptible a aplicación para realizar reformas pertinentes y como continuación de un proceso de enseñanza – aprendizaje en los temas involucrados en medidas de dispersión.
- Es bueno que el docente se esté actualizando en los avances tecnológicos y haga uso de ellos como herramientas que le faciliten el proceso de enseñanza – aprendizaje y de manera específica en la evaluación.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2010). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Conferencia inaugural.

Castañeda, N. Gómez, M. Joya, A. y Ramírez, M. (2010). Hipertexto Matemáticas 10. (pp. 279 – 281). Bogotá: Santillana.

Downie, N. y Heath, R. (1973). Métodos estadísticos aplicados. (pp. 68 – 84). México: Harla.

Fernández, C. y Fuentes, G. (1995). Curso de Estadística descriptiva. Teoría y práctica. (pp. 141 – 161). Barcelona: Ariel Economía.

Fernández, F. Sarmiento, B y Soler, N. (2008). Estadística y probabilidad en la escuela Secundaria. (pp. 21 – 62). Bogotá: UPN.

Gómez, M. Gómez W. Joya, A. Morales, M y Rodríguez V. (2010). Hipertexto Matemáticas 11. (pp. 290 – 292). Bogotá: Santillana.

Murray, R. y Spiegel, Ph. (1975). Teoría y problemas de Estadística. (pp. 69 – 88). Cali: Mc Graw Hill.

Salcedo, A. (2005). Cultura, Razonamiento y Pensamiento Estadístico. Boletín IASE Hipótesis alternativa. (Vol. 6, pp. 3 – 9). Venezuela: Universidad central de Venezuela.

Tauber, L. (2011). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. (pp. 53 – 74). Buenos Aires: Unl.

ANEXO

FORMULARIOS



