



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

Regularidades a partir de matrices de adyacencia de Grafos específicos que se pueden obtener a partir de ciclos Hamiltonianos

Juan Pablo Devia Cruz

Cod.2018140027

Jonnathan Parra Correa

Cod.2018140060

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
2023

Regularidades a partir de matrices de adyacencia de Grafos específicos que se pueden obtener a partir de ciclos Hamiltonianos

Juan Pablo Devia Cruz

Cod.2018140027

Jonnathan Parra Correa

Cod.2018140060

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Director:

Magister Pablo Andrés Beltrán Sosa

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia

2023

Dedicatoria

A mis padres, por su amor incondicional, apoyo constante y sacrificio incansable. Sin su aliento y orientación, esta tesis no habría sido posible. A mis amigos, que han sido mi fuente de alegría y equilibrio durante los momentos más desafiantes de este viaje académico.

Jonnathan Parra Correa.

A toda mi familia y amigos, por haber brindado con su apoyo y esfuerzo emprendedor el soporte suficiente para alcanzar las metas proyectadas.

Juan Pablo Devia Cruz.

Agradecimientos

Mi agradecimiento se extiende a mis padres, cuyo apoyo, amor y ánimo constante han sido mi fuente de inspiración y motivación a lo largo de mi trayecto académico.

A mis amigos, quienes han estado a mi lado durante las épocas de desafío y celebración, les agradezco por su compañía y apoyo emocional.

Este logro es el resultado de un esfuerzo conjunto y el apoyo de muchas personas. Estoy agradecido por la confianza y la ayuda que he recibido a lo largo de este viaje académico.

Con gratitud y cariño,

Jonnathan Parra Correa

En el recorrido de este trabajo de grado, he sido afortunado de contar con el apoyo de familiares y amigos, quienes han sido mi fuente de inspiración y fortaleza en el camino. Quiero expresar mi profunda gratitud por su apoyo constante.

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermana Daniela, quienes han sido mis modelos a seguir y han sacrificado tanto para brindarme la oportunidad de completar esta carrera, les agradezco desde lo más profundo de mi corazón.

A mis amigos, quienes me han brindado su aliento, paciencia y comprensión en los momentos en que más los necesitaba. Sus palabras de aliento y risas compartidas han alegrado mi vida en la universidad.

Con gratitud y cariño.

Juan Pablo Devia Cruz

Resumen

En este trabajo de grado, se ha llevado a cabo un análisis de las matrices de adyacencia. Este análisis se inicia con la exploración de sus propiedades y regularidades a través del estudio de las matrices de adyacencia, Como resultado de este trabajo de grado, se han establecido definiciones y un teorema, tales como las secuencias de vértices, los corrimientos y las matrices bases. Estas definiciones surgen a partir de patrones generalizados que caracterizan la estructura de los ciclos Hamiltonianos. Además se desarrolla un algoritmo basados en las definiciones establecidas, él tiene como objetivo hallar un ciclo Hamiltoniano y así dar una solución al TSP(Problema del viajante de comercio).

Lista de Figuras

4-1	Grafo	13
4-2	Lazo	14
4-3	Grafo simple y multigrafo	14
4-4	Grafo no dirigido y grafo dirigido	15
4-5	Recorridos	15
4-6	Grafo conexo y no conexo	16
4-7	Grafo	17
4-8	Ciclo hamiltoniano	17
4-9	Camino hamiltoniano	18
5-1	Grafo inicial	23
5-2	Ciclo hamiltoniano resultante	25
5-3	Grafo 2	26
5-4	Ciclo hamiltoniano	27
5-5	Grafo grado 7	27
5-6	Ciclo hamiltoniano	30
5-7	Grafo orden 5	30
5-8	Ciclo hamiltoniano	31
5-9	Grafo	41
5-10	Grafo de 5 vértices	43
5-11	Grafo de orden 8	47
5-12	Grafo	48

Lista de Tablas

4-1	Matriz de adyacencia definición	17
5-1	Matriz de adyacencia grafo exploración	24
5-2	Modificación matriz de adyacencia exploración	24
5-3	Matriz de adyacencia final exploración	25
5-4	Matriz de adyacencia grafo 2	26
5-5	Modificación matriz de adyacencia grafo 2	26
5-6	matriz de adyacencia ciclo final	27
5-7	Matriz de adyacencia Grafo grado 7	28
5-8	Modificación ma Grafo grado 7	28
5-9	Modificación 2 ma Grafo grado 7	28
5-10	Modificación 3 ma Grafo grado 7	29
5-11	Modificación 4 ma Grafo grado 7	29
5-12	Matriz de adyacencia ciclo grafo grado 7	30
5-13	Matriz de adyacencia Grafo orden 5	31
5-14	matriz de adyacencia ciclo Grafo orden 5	31
5-15	Matriz de adyacencia patrón 1	32
5-16	Matriz de adyacencia patrón 2	32
5-17	Matriz de adyacencia patrón 3	32
5-18	Ciclo de vértices 1	34
5-19	Ciclos de vértices 1	34
5-20	Matriz base $\tilde{1}$	34
5-21	Matriz Base	35
5-22	Matriz base de $\tilde{1}$ grafo orden 11	35
5-23	$\tilde{1}$ en un grafo de 5 vértices	35
5-24	$\tilde{1}$ en un grafo de 7 vértices	36
5-25	$\tilde{1}$ en un grafo de 9 vértices	36
5-26	$\tilde{1}$ en un grafo de 11 vértices	36
5-27	$\tilde{2}$ para un grafo con 5 vértices	36
5-28	$\tilde{2}$ para un grafo con 7 vértices	37
5-29	$\tilde{2}$ para un grafo con 9 vértices	37
5-30	$\tilde{2}$ para un grafo con 11 vértices	37
5-31	Ciclos de vértices 2	37

5-32 Ciclos de vértices 2	38
5-33 Matriz de adyacencia	38
5-34 Matriz de adyacencia	39
5-35 Matriz base $\tilde{1}$	40
5-36 Matriz base $\tilde{2}$	40
5-37 Matriz de adyacencia	41
5-38 Matriz de adyacencia	45
5-39 Matriz de adyacencia $\tilde{1}$	45
5-40 Matriz de adyacencia $\tilde{2}$	46
5-41 Matriz de adyacencia $\tilde{3}$	46
5-42 Matriz de adyacencia $\tilde{1}$	47
5-43 Matriz de adyacencia $\tilde{3}$	48
5-44 Matriz de adyacencia $\tilde{5}$	49
5-45 Matriz de adyacencia $\tilde{7}$	49

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
1 Introducción	1
2 Justificación	3
3 Objetivos	4
3.1 General	4
3.2 Específicos	4
4 Marco Teórico	5
4.1 Estado del Arte	5
4.2 Marco Matemático	13
4.2.1 Teoría de Grafos	13
4.2.2 Nociones básicas	19
4.2.3 Teoría Combinatoria	20
4.2.4 Teoría de Optimización	21
5 Exploración y Generalidades	23
5.1 Grafos de orden impar	23
5.1.1 Exploración de generalidades	33
5.1.2 Secuencias y corrimientos	33
5.1.3 Algoritmo	40
5.2 Grafos de orden par	46
5.2.1 Exploración y Generalidades	46
6 Conclusiones y Trabajos a futuro	52
6.1 Conclusiones	52
6.2 Trabajos a futuro	53

1 Introducción

Uno de los problemas más destacados y ampliamente reconocidos en el ámbito de la teoría de grafos es el Problema del Agente Viajero (TSP, por sus siglas en inglés, Traveling Salesman Problem). Este problema ha sido objeto de extensa investigación en el campo de la teoría de grafos y la optimización combinatoria.

El Problema del Agente Viajero se plantea de la siguiente manera: dado un conjunto de ciudades y las distancias entre cada par de ciudades, el objetivo es encontrar la ruta más corta que visite cada ciudad exactamente una vez y regrese a la ciudad de origen. En otras palabras, se busca identificar un ciclo Hamiltoniano en un grafo ponderado completo, donde un ciclo Hamiltoniano es un ciclo que visita cada vértice exactamente una vez.

A partir del problema mencionado previamente, se inicia el desarrollo del trabajo de grado, que consta de seis capítulos, siendo este el primero. El segundo capítulo se dedica a la justificación, donde se proporciona una breve contextualización de la temática abordada, se destaca la relevancia del tema seleccionado y se subraya cómo el trabajo de grado contribuirá al avance del campo de estudio, ya sea a través de la generación de nuevas ideas o la propuesta de soluciones prácticas.

En el tercer capítulo, se presentan los objetivos tanto general como específicos abordados en el trabajo de grado. El cuarto capítulo se enfoca en el marco teórico, comenzando con un análisis del estado del arte. Aquí se exponen las tendencias y enfoques utilizados en la teoría de grafos para abordar las matrices de adyacencia. Se realiza una revisión de estas tendencias y se compara el enfoque adoptado en este trabajo de grado con las investigaciones previas.

Posteriormente, en el marco matemático, se definen y esclarecen los conceptos clave necesarios para la comprensión del tema abordado en el trabajo de grado, que incluyen la Teoría de Grafos, Teoría Combinatoria y Teoría de Optimización. Luego, se continúa con el marco didáctico, donde se presentan enfoques que se han abordado en la literatura en relación con el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje en el ámbito específico del trabajo de grado.

El capítulo 5, titulado <<Exploraciones y Generalidades>>, se dedica al análisis de grafos con un número impar de vértices. En la sección 5.1, se presenta un método de fuerza bruta para encontrar caminos Hamiltonianos, detallando el proceso y proporcionando ejemplos ilustra-

tivos. A continuación, en la sección 5.1.1, se profundiza en la exploración de generalidades, donde se definen conceptos como ciclo de vértices, matrices base. En la sección 5.1.2, se define el concepto de corrimientos y se demuestra el teorema de composición de ciclos. A partir de los elementos previamente definidos, se presenta un algoritmo en la sección 5.1.3 para encontrar ciclos Hamiltonianos, acompañado de ejemplos relevantes. Por último, en la sección 5.2, se realiza un estudio sobre grafos pares, donde se exploran algunas propiedades en relación con los conceptos previamente definidos.

2 Justificación

Este trabajo de grado surge a raíz del problema del agente viajero (TSP, por sus siglas en inglés), que implica la búsqueda del camino más corto para visitar una serie de ciudades y regresar al punto de partida, sin pasar por ninguna ciudad más de una vez. Se define entonces como una solución al problema un ciclo hamiltoniano, el cual se relacionará con su matriz de adyacencia, y se llevará a cabo un análisis exhaustivo de dichos ciclos soluciones del TSP.

Históricamente, situaciones cotidianas aparentemente no relacionadas con las matemáticas han dado lugar a teorías matemáticas fundamentales, como la teoría de grafos. Esto demuestra que la abstracción y la conceptualización son procesos esenciales en el análisis de situaciones específicas y su transformación en estructuras matemáticas generales.

En particular, los grafos se han convertido en una herramienta de representación esencial para comprender y resolver una amplia variedad de problemas del mundo real. La teoría de grafos tiene aplicaciones en campos tan diversos como la informática, la logística, las redes sociales y la biología, lo que subraya su importancia en la resolución de problemas prácticos.

En el contexto de este trabajo de grado, se analizarán las propiedades de las matrices de adyacencia, que son una parte fundamental de la teoría de grafos. Estas matrices permiten representar y analizar las relaciones entre los nodos de un grafo de manera eficiente. Al explorar estas propiedades, se pueden abordar cuestiones de conectividad, estructura de grafos, algoritmos de búsqueda de caminos, detección de patrones y optimización, lo que contribuirá a un mejor entendimiento y aplicación de los grafos en diversas áreas.

Además, relacionar este trabajo de grado con la enseñanza en educación media puede ser beneficioso para los estudiantes. Al mostrar aplicaciones concretas de conceptos matemáticos y algoritmos, se puede despertar el interés de los estudiantes en las matemáticas y fomentar su desarrollo de habilidades analíticas y de resolución de problemas. Esto puede abrir nuevas perspectivas y motivaciones para el aprendizaje de las matemáticas en un nivel más avanzado.

3 Objetivos

3.1. General

Identificar propiedades y regularidades a partir de matrices adyacencia de grafos Hamiltonianos que se puedan obtener a partir de ciclos Hamiltonianos.

3.2. Específicos

1. Reconocer y caracterizar propiedades en las matrices de adyacencia de los ciclos Hamiltonianos.
2. Generalizar propiedades de las matrices de adyacencia de ciclos Hamiltonianos.
3. Construir un algoritmo que permita a partir del análisis de las matrices de adyacencia encontrar un ciclo Hamiltoniano.

4 Marco Teórico

4.1. Estado del Arte

En esta sección, se presentarán las tendencias y enfoques que han sido utilizados en la teoría de grafos para abordar las matrices de adyacencia, con el énfasis en generalizar sus propiedades y características. Además, se llevará a cabo una revisión exhaustiva de la literatura existente en busca de comparaciones pertinentes con el enfoque adoptado en este trabajo de grado.

La búsqueda documental se llevó a cabo en diversos repositorios académicos, incluyendo el Repositorio Institucional de la UPN, el Repositorio Institucional de la UNAL, así como en plataformas de renombre como Scielo, Dialnet y Google Académico. Para optimizar la búsqueda, se emplearon palabras clave específicas como "teoría de grafos", "matrices de adyacencia".

Uno de los primeros documentos relevantes que surgió en la búsqueda fue un artículo presentado por el Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional, titulado Caracterización de sólidos mediante la teoría de grafos (Ombita et al., 2017). En dicho artículo, se establece una conexión significativa entre diversos tipos de sólidos y la teoría de grafos, con el objetivo de caracterizar estos sólidos a través del análisis de las matrices de adyacencia de los grafos correspondientes.

El artículo aborda específicamente los sólidos platónicos, que son poliedros cuyas caras son polígonos regulares congruentes. Asimismo, se explora cómo, al realizar truncamientos en estos sólidos, se obtienen los sólidos arquimedianos. El proceso desarrollado en el artículo, haciendo uso de matrices, se puede describir de la siguiente manera:

En primer lugar, se realiza una representación gráfica de cada sólido platónico mediante grafos, lo que permite obtener la matriz de adyacencia correspondiente. En esta matriz, los nodos representan los vértices del sólido, y las conexiones reflejan las aristas que los unen. Luego, se crea una nueva matriz de adyacencia que refleja las relaciones de conectividad entre los vértices del sólido.

A continuación, se lleva a cabo un proceso de truncamiento en el sólido, lo que resulta en la

generación de nuevos vértices. Por ejemplo, al truncar un tetraedro, se obtiene un triángulo y tres nuevos vértices. Para reflejar estos cambios en la matriz de adyacencia, se reemplaza la fila y columna correspondientes al vértice truncado con los nuevos vértices, ajustando las conexiones para que cada vértice continúe conectado con sus predecesores y sucesores.

Luego, se utiliza grafos isomorfos para representar el mismo sólido, permutando filas y columnas en la matriz de adyacencia, manteniendo intactas las conexiones originales. Por ejemplo, al permutar la primera fila y columna con la última, se conservan las conexiones entre los vértices. Estos pasos se repiten para lograr diferentes niveles de truncamiento y, de esta manera, generar matrices de adyacencia para sólidos arquimedianos.

Este método se aplica específicamente a los sólidos cuyos truncamientos generan tres nuevos vértices, es decir, aquellos cuya intersección con el plano de corte forma un triángulo. Esto incluye al tetraedro, el cubo y el dodecaedro. Para otros sólidos arquimedianos que no sigan este patrón, se requeriría un enfoque distinto para obtener sus respectivas matrices de adyacencia.

En otro artículo del Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional (Rincón et al., 2017), se aborda un problema similar, centrado en la caracterización de sólidos redondos generados mediante cortes en una semiesfera. En este contexto, cada arista se representa como un arco de circunferencia y se relaciona con dos vértices extremos, permitiendo así la representación de estos cortes a través de grafos y la obtención de sus matrices de adyacencia correspondientes.

El artículo procede a categorizar los cortes en dos grupos: G1 (cortes no tangentes) y G2 (cortes tangentes). A partir de esta caracterización, se comienzan a observar patrones en las matrices de adyacencia. En el Grupo 1, los coeficientes en la matriz de adyacencia son siempre 1 o 2, y la diagonal por encima de la principal se alterna entre 1 y 2. En el Grupo 2, las matrices son siempre cuadradas, con coeficientes 2 en las diagonales principales y 1 en las diagonales adyacentes.

Luego, se establecen relaciones entre el número de cortes (C), el número de vértices (V) y el número de aristas (A) para los Grupos 1 y 2. Por ejemplo, se concluye que cuando $C \geq 3$, entonces $V = 2C$ y $A = 3C$. Esto sugiere que con las características mencionadas, es posible distinguir una matriz de adyacencia que representa un sólido redondo y generar la matriz del siguiente corte a partir de la matriz de un corte anterior.

En resumen, este fragmento de texto presenta un enfoque matemático y de teoría de grafos para abordar la caracterización de sólidos redondos generados a través de cortes en una semiesfera, utilizando matrices de adyacencia y estableciendo relaciones entre los cortes, vértices

y aristas.

En un tercer documento (Acosta y Montoya, 2018), se abordó la teoría de grafos y la conjetura de evasividad como parte de su trabajo de grado. En una de las secciones, se sumergió en la representación de grafos como estructuras de matriz y exploró algunas propiedades relacionadas con las matrices de adyacencia de los grafos. Destacó una de las propiedades clave, que es la simetría de la matriz de adyacencia en los grafos simples, así como la presencia de ceros en su diagonal principal.

Luego, se introdujo el teorema sobre paseos en grafos, que establece que si M es la matriz de adyacencia de un grafo G , entonces la entrada (i, j) de la matriz M^k cuenta el número de paseos de longitud k entre los vértices v_i y v_j . Propuso ejemplos concretos para ilustrar la aplicación de estos conceptos en la práctica.

Posteriormente, estableció una relación fundamental entre las matrices de adyacencia y los isomorfismos de grafos. Para demostrar este vínculo, recurrió al uso de matrices inversas y operaciones entre matrices. Mencionó que, a partir de los isomorfismos, se puede afirmar que si dos grafos son isomorfos, entonces existe una matriz de permutación P tal que la matriz de adyacencia del primer grafo es igual a la matriz de adyacencia del segundo grafo permutada por P . Esta matriz de permutación P se utilizó para relacionar los vértices de un grafo.

En este contexto específico, se utilizó la matriz de permutación para cambiar el orden de las filas o columnas de una matriz dada, y se relacionó con el teorema que conecta las matrices de adyacencia de un grafo con los paseos en dicho grafo.

Además, presentó un algoritmo que siguió una estrategia de búsqueda basada en la multiplicación de matrices para encontrar paseos de longitud k . Inicialmente, calculó la matriz de adyacencia elevada a una potencia específica y verificó si la entrada correspondiente era mayor que cero. La eficiencia de este método depende de la cantidad de cálculos necesarios para elevar la matriz de adyacencia a una potencia k . Para valores pequeños de k y grafos pequeños, este enfoque es viable. Sin embargo, en el caso de grafos grandes o valores de k muy grandes, puede volverse ineficiente debido a la necesidad de realizar múltiples multiplicaciones de matrices.

En el cuarto documento (Franco, 2016), que constituye también un trabajo de grado, se abordan aspectos algebraicos en el ámbito de la teoría de grafos. La segunda sección de esta investigación se enfoca específicamente en las matrices asociadas a los grafos. En esta sección, se presenta la definición de la matriz de adyacencia. Sin embargo, los autores resaltan que esta matriz no se limita únicamente a grafos simples, ya que existen otros tipos de grafos.

En este punto, el autor propone diversas propiedades relacionadas con estas matrices en contextos variados, como grafos con peso, grafos dirigidos, multigrafos y pseudografos. Destacan que la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica, lo que implica que $a_{ij} = a_{ji}$ para cada par de vértices v_i y v_j . Esto se debe a que si existe una arista que conecta v_i con v_j , también existe una arista que conecta v_j con v_i . Además, se centran en demostrar proposiciones específicas relacionadas con las matrices en grafos bipartidos. Afirman que la matriz de adyacencia de un grafo depende de la etiqueta de los vértices, de manera que diferentes etiquetados de un mismo grafo pueden generar diferentes matrices de adyacencia, pero estas matrices están relacionadas mediante la permutación de matrices. También sostienen que la suma de los elementos en la fila (o columna) i -ésima de la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es igual al grado del vértice v_i y que en un grafo no dirigido sin lazos, la suma de todos los elementos de la matriz de adyacencia es el doble del número de aristas en el grafo. En grafos dirigidos, la suma de todos los elementos de la matriz de adyacencia es igual al número de aristas en el grafo.

Una vez que han establecido estas características, los autores proceden a explorar las relaciones entre el contenido de las matrices de adyacencia para determinar la cantidad de caminos existentes en el grafo. Este análisis se lleva a cabo utilizando los isomorfismos de los grafos, ya que este lo utilizan para identificar grafos que son esencialmente iguales en términos de su estructura de conexiones, independientemente del etiquetado de los vértices. Cuando dos grafos son isomorfos, esto significa que se pueden mapear uno al otro mediante una biyección de vértices, y sus matrices de adyacencia serán iguales una vez que se aplique esta biyección.

Por lo tanto, el isomorfismo de grafos es una forma de tratar la dependencia del etiquetado, ya que permite establecer que dos grafos con etiquetas de vértices diferentes aún pueden ser considerados equivalentes en términos de su estructura de conexiones.

En un quinto documento (Ponzoni, 2001) dedicado al diseño de algoritmos en el ámbito del análisis de observabilidad de procesos industriales mediante la utilización de la teoría de grafos, se exploran diversos aspectos relacionados con las matrices de adyacencia y cómo las técnicas de teoría de grafos pueden aplicarse para realizar permutaciones en matrices cuadradas con el propósito de mejorar el procesamiento de datos.

En dicho documento, se caracterizan las matrices como matrices cuadradas en las cuales los elementos fuera de la diagonal indican el número de aristas entre dos nodos, mientras que los elementos en la diagonal principal representan el doble del número de bucles en cada nodo. Para grafos no dirigidos, se subraya que la matriz de adyacencia es simétrica, pero para dígrafos (grafos dirigidos), esta simetría no es necesariamente aplicable.

El documento introduce la técnica de la Forma Triangular en Bloques (FTB), que es una

técnica de reorganización estructural de matrices cuadradas con amplias aplicaciones computacionales, incluida la resolución de sistemas lineales. La FTB se centra en transformar una matriz en una forma que facilite ciertas operaciones matriciales y cálculos. En este proceso, se destaca la posibilidad de permutar una matriz cuadrada de manera que su diagonal quede libre de ceros, lo que luego permite la aplicación eficiente de la FTB.

En este contexto, se emplea la teoría de grafos mediante la representación de un bigrafo (grafo bipartito) en el cual los nodos representan tanto las filas como las columnas de la matriz. Durante el proceso, se hacen uso de dos tipos de permutaciones: las permutaciones no simétricas, que implican un reordenamiento de las filas o columnas de la matriz que altera su disposición original de manera arbitraria, y las permutaciones simétricas, que son reordenamientos que mantienen la estructura simétrica original de la matriz. Estas permutaciones se aplican en la optimización de algoritmos diseñados para reorganizar matrices cuadradas que surgen al representar grafos como matrices de adyacencia. El objetivo fundamental es llevar la matriz de adyacencia a una forma especial que simplifique la resolución de problemas específicos.

En un sexto documento (Noruega, 2012) "Úso de Matrices de Adyacencia en la Resolución de Problemas de Diseño con Grafos Bicoloreados: Un Enfoque Metodológico", se aborda la resolución de problemas de diseño arquitectónico, una tarea que implica la descomposición de problemas complejos en elementos más manejables. Este enfoque explora la aplicación de la teoría de grafos, especialmente grafos bicoloreados, junto con matrices de adyacencia, como herramienta eficaz en este proceso. La representación visual de relaciones entre elementos y la simplificación de problemas se logra a través de la estructuración en subproblemas mediante grafos bicoloreados, donde las matrices de adyacencia desempeñan un papel crucial en este proceso.

En el centro de esta metodología se encuentra el concepto de grafo bicoloreado, donde los vértices se dividen en dos conjuntos, sin aristas que conecten vértices del mismo conjunto. Esta división facilita la representación clara de las relaciones entre elementos, y la descomposición de problemas comienza representando las interacciones entre elementos identificables mediante un grafo, que luego se descompone en subgrafos bicoloreados. Este proceso estructurado simplifica la identificación y abordaje de subproblemas individuales.

La representación gráfica de las relaciones entre elementos se logra mediante matrices de adyacencia, compuestas por ceros y unos, que revelan de manera concisa las conexiones entre elementos. Cada entrada $m_{i,j}$ en la matriz indica si existe una relación entre los elementos u_i y w_j . Esta representación matricial proporciona una visión estructurada de las interacciones y establece las bases para la construcción de los grafos bicoloreados.

Se presentan ejemplos prácticos para ilustrar la aplicación de esta metodología, como el abordaje de la representación de características arquitectónicas y edificios. La matriz de ad-

yacencia correspondiente refleja las relaciones entre características y edificios, estableciendo la base para la creación de un grafo bicolorado que descompone el problema de diseño.

La elección de etiquetar o no los vértices en el grafo bicolorado constituye una consideración crucial, especialmente en contextos como modelos arquitectónicos en cuadrícula, donde el etiquetado es esencial para reflejar coordenadas geométricas. Este proceso de etiquetado afecta la interpretación del problema y la visualización de soluciones potenciales.

En resumen, la combinación de matrices de adyacencia y grafos bicolorados emerge como un enfoque metodológico sólido para abordar problemas de diseño en arquitectura. La representación visual estructurada, respaldada por la claridad proporcionada por las matrices de adyacencia, facilita la descomposición de problemas complejos en subproblemas manejables. Esta metodología ofrece a los diseñadores una herramienta efectiva para visualizar, analizar y resolver problemas arquitectónicos de manera sistemática.

En un séptimo documento académico (Cabezas et al., 1996), se aborda la aplicación de matrices de adyacencia y el algoritmo de Dijkstra para resolver problemas relacionados con la optimización de rutas en redes de transporte. Este enfoque resulta esencial en diversos campos, como la logística, la planificación urbana y la gestión de redes de comunicación.

En referencia a las matrices de adyacencia, estas se presentan como representaciones gráficas de las relaciones entre nodos en un grafo. En el ámbito de las redes de transporte, los nodos representan ubicaciones, como intersecciones o centros logísticos, y las aristas entre nodos indican las conexiones o caminos posibles entre ellos. La matriz de adyacencia facilita la visualización y manipulación de esta información, permitiendo una representación estructurada de la red.

El algoritmo de Dijkstra se destaca como una herramienta fundamental para encontrar las rutas más cortas entre nodos en un grafo ponderado. En el caso de redes de transporte, los pesos pueden representar distancias, tiempos o costos asociados a cada conexión. Dijkstra opera de manera eficiente, calculando la distancia mínima desde un nodo de origen a todos los demás nodos de la red. Este algoritmo asegura que, al finalizar, se tiene la información necesaria para determinar las rutas óptimas desde el nodo de origen a cualquier destino.

En la aplicación del problema propuesto, que busca optimizar las rutas de entrega en una red de transporte, se utilizan matrices de adyacencia para modelar la conectividad entre ubicaciones y los costos asociados a cada conexión. Posteriormente, se implementa el algoritmo de Dijkstra para encontrar las rutas más cortas desde el almacén central hasta cada destino de entrega. Este enfoque garantiza una planificación eficiente de las rutas, minimizando los costos totales y optimizando los tiempos de entrega.

En conclusión, la combinación de matrices de adyacencia y el algoritmo de Dijkstra proporciona una solución robusta y eficiente para problemas de optimización de rutas en redes de transporte. Este enfoque no solo permite una representación clara de la estructura de la red, sino que también garantiza la selección de rutas óptimas, contribuyendo significativamente a la mejora de la eficiencia logística y la gestión de recursos en diversas aplicaciones prácticas.

El fragmento de texto (Fernández, 2016) se sumerge en el estudio de grafos mediante el empleo de matrices de adyacencia, proporcionando una definición formal y resaltando su aplicabilidad en la representación y análisis de la topología de los grafos. La matriz de adyacencia $A(G)$ de un grafo G , definida sobre un conjunto de vértices V , se configura como una matriz $p \times p$, donde los elementos a_{ij} indican la existencia de aristas entre los vértices v_i y v_j .

Enfatizando su importancia, la matriz de adyacencia emerge como una herramienta esencial para visualizar propiedades fundamentales de los grafos. La diagonal principal, compuesta exclusivamente de ceros, señala la ausencia de bucles en los grafos considerados, contribuyendo a una representación fiel de su estructura. Además, se destaca la simetría inherente de la matriz, reflejando la relación bidireccional entre los vértices, un aspecto clave para el análisis de conectividad.

El texto avanza presentando un ejemplo concreto: el grafo completo G_2 y su correspondiente matriz de adyacencia $A(G_2)$. Este grafo completo, donde todos los vértices están conectados entre sí, sirve como ilustración para el proceso de conteo de aristas utilizando matrices de adyacencia. Se demuestra que contando el número de veces que aparece el "1" en la matriz y ajustando por la simetría, es posible determinar eficientemente el número total de aristas en el grafo completo.

El fragmento concluye con una tabla que generaliza el proceso de conteo para grafos completos K_n . Este análisis revela una expresión general para el número de aristas en función de n , subrayando la utilidad de las matrices de adyacencia en la simplificación y sistematización de operaciones contables en teoría de grafos.

En resumen, el texto destaca la importancia de las matrices de adyacencia como herramientas fundamentales en la representación y análisis de grafos, enfocándose en su capacidad para facilitar el conteo de aristas y proporcionar una visión estructural detallada de estos objetos matemáticos.

Este trabajo académico (Estrada., 2017) se propone explorar la interconexión entre la teoría de grafos, relaciones binarias y matrices de adyacencia, con un énfasis particular en su

aplicabilidad en el campo de la Informática. La investigación se llevó a cabo mediante la colaboración con colegas de otras instituciones académicas y la consulta de diversas fuentes, tanto bibliográficas en formato físico como digital.

Dentro de los conceptos clave abordados se encuentran los grafos dirigidos, las relaciones de equivalencia y las matrices de adyacencia. Se resalta la importancia fundamental de las relaciones binarias en la identificación de relaciones de equivalencia, subrayando la necesidad de que estas cumplan con propiedades específicas, como ser reflexivas, simétricas y transitivas. La presentación de ejemplos concretos demuestra de manera efectiva cómo las matrices de adyacencia se erigen como herramientas esenciales para el análisis detallado de relaciones en estructuras gráficas complejas.

Un caso de aplicación práctica se presenta al analizar la conectividad de diferentes puntos en una ciudad mediante una relación binaria, utilizando una matriz de adyacencia para representar gráficamente esta red. Se concluye que la relación resultante satisface las condiciones necesarias para ser considerada una relación de equivalencia.

En resumen, este trabajo académico destaca la importancia crítica de las matrices de adyacencia en el estudio y análisis de relaciones de equivalencia en grafos, resaltando su aplicación práctica en el ámbito de la Informática. La atención se centra en la utilidad de estos conceptos en el desarrollo de sistemas informáticos que se fundamentan en la representación gráfica de redes y estructuras complejas.

Los documentos presentados comparten un enfoque en la teoría de grafos y el uso de matrices de adyacencia en sus investigaciones, lo que constituye una similitud fundamental entre ellos. Sin embargo, cada uno de estos documentos se distingue por sus objetivos y aplicaciones específicas, cada uno de ellos aporta una perspectiva única de las matrices de adyacencia aplicándolas de acuerdo con los objetivos y preguntas específicas de su investigación.

En este trabajo de grado, se exploró inicialmente el comportamiento de la matriz de adyacencia en grafos simples que son soluciones del problema del agente viajero (TSP, por sus siglas en inglés). A partir de los patrones y regularidades en las posiciones de los valores 1 y 0 en estas matrices, se desarrolló un algoritmo diseñado para identificar uno de los múltiples ciclos hamiltonianos presentes en los grafos, los cuales son a su vez soluciones del TSP. Durante el desarrollo de este trabajo de grado, se examinaron y definieron propiedades específicas de estas matrices que fueron fundamentales en la creación de dicho algoritmo.

A pesar de la diversidad de enfoques, todos estos documentos demuestran el valor y la versatilidad de las matrices de adyacencia en el campo de la teoría de grafos y sus aplicaciones en diversos contextos académicos.

4.2. Marco Matemático

Para el desarrollo de este trabajo se tomarán conceptos relacionados a la rama del Álgebra, mas en concreto la Teoría de Grafos. Se definirán caminos hamiltonianos, nodos y otros conceptos que se deben tener en cuenta de esta teoría. Además, se abordaran conceptos relacionados con la teoría de optimización y la combinatoria que serán de utilidad para la finalidad de este trabajo. La mayor parte de estos conceptos son tomados del (Cioaba y Murty, 2009), (Rodríguez, 2008) y (Byrkit y Pettofrezzo, 1972).

4.2.1. Teoría de Grafos

Para abordar la teoría de grafos, el trabajo se inicia con la presentación de algunas definiciones, características, tipos y propiedades que resultarán útiles en la investigación.

Definición 1 (Grafo) *Un Grafo es un par $G = (V, A)$ donde V es una colección de puntos llamados vértices o nodos y se notan como $V = V(X)$ y A es la colección de líneas llamadas caminos o aristas $A = A(x)$, cada arista es asociada a dos vértices (no necesariamente distintos) llamados extremos. Cuando los extremos son iguales la arista es denominada **Bucle**.*

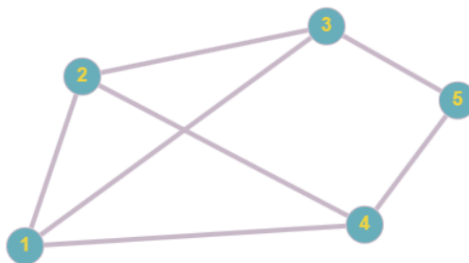


Figura 4-1: Grafo

En este caso la colección de vértices está formado por los puntos ver la Figura 4-1

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y las aristas

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 1), (1, 3), (2, 4)\}$$

Definición 2 (Lazos o Bucle) *Un lazo es una arista cuyos vértices adyacentes son el mismo.*

Un ejemplo de un lazo lo podemos observar en la Figura 4-2, el vértice x_2 está conectado consigo mismo por lo que dicha arista es un lazo:

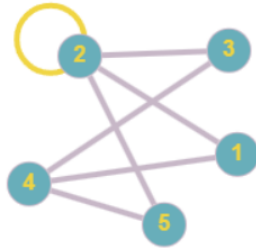


Figura 4-2: Lazo

Definición 3 (Grafo simple) *Se le llama grafo simple a aquel que no tiene un bucle o aristas que tengan el mismo par de extremos.*

Definición 4 (Multigrafo) *Son grafos que contienen aristas cuyos extremos son los mismos.*

Como se observa en la siguiente figura 4-3 el grafo de la izquierda es un grafo simple y el de la derecha es un multigrafo:

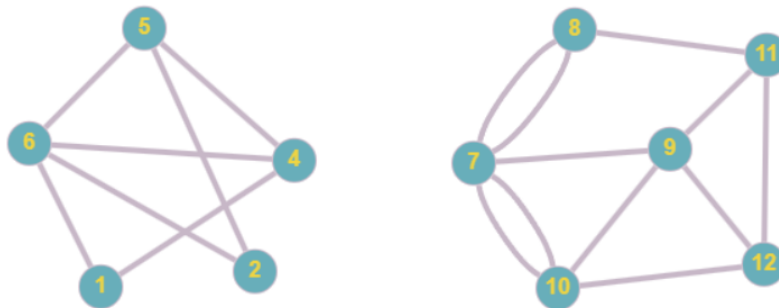


Figura 4-3: Grafo simple y multigrafo

Definición 5 (Grafo dirigido) *Un grafo dirigido o digrafo $G = (V, A)$ es un conjunto V de vértices conectados con un conjunto A de aristas, que son pares ordenados de elementos de V . Quiere decir que las aristas tienen un sentido o dirección definido.*

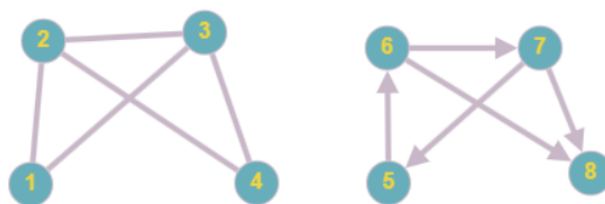


Figura 4-4: Grafo no dirigido y grafo dirigido

Definición 6 (Vértices adyacentes) Cuando x_n y x_m son extremos de una arista, decimos que x_n y x_m son vértices adyacentes.

En la Figura 4-4 podemos observar que el vértice x_1 y el vértice x_2 son adyacentes ya que son extremo de una arista y podemos ver que x_1 y x_4 no lo son.

Definición 7 (Grado de un vértice) El grado de un vértice x_n es el número de vértices adyacentes a él, esto es, el número de aristas que tienen como extremo el vértice x_n y se denota $\text{grad}(x_n)$.

En la Figura 4-4 el vértice x_2 tiene grado 3, quiere decir $\text{grad}(x_2) = 3$ y $\text{grad}(x_4) = 2$

Definición 8 (Trayectoria de un grafo) Una trayectoria T denotada $x_n - x_m$ es una secuencia alternada finita de vértices y aristas de G , en la que los vértices son adyacentes al siguiente y las aristas son distintas. Se comienza en x_n y se finaliza en x_m donde x_n y x_m son vértices de un grafo no dirigido $G = (V, A)$. La longitud n de una trayectoria o camino es el número de aristas que hay en ella, si $n = 0$ se denomina **camino trivial**. Cualquier camino no trivial donde $x_n = x_m$ es un **camino cerrado**.

Definición 9 (Recorrido) Sea $G = (V, A)$ un grafo, un recorrido en G es una sucesión $x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, \dots, x_{k-1}, a_k, x_k$ donde $x_i \in V$ y a_i es una arista incidente a x_{i-1} y x_i

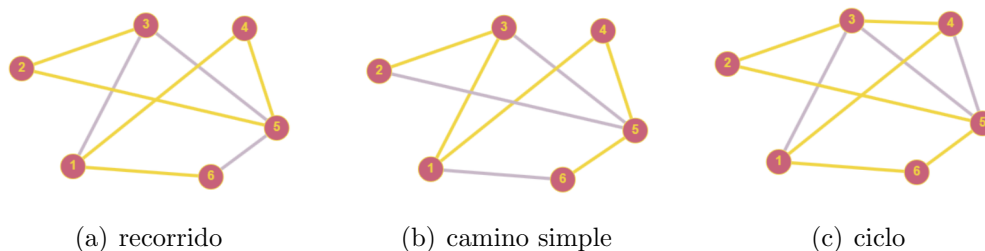


Figura 4-5: Recorridos

La longitud del recorrido de las trayectorias mostradas en la figura 4-5 a y 4-5 b es 5 y longitud del recorrido de la figura 4-5 c es 6.

Definición 10 (Orden de un grafo) Se denota generalmente con n y se refiere al número total de vértices o nodos que componen G . por ejemplo en la figura 4-5 el orden es 6.

Definición 11 (Camino) Un recorrido es camino si todas las aristas son distintas. Podemos observar la figura 4-5 los ejemplos presentados son caminos.

Por ejemplo en la figura 4-5 a el camino es $x_3 \rightarrow$

Definición 12 (Camino simple) Un camino es simple si no hay vértices repetidos salvo quizás el primero y el último. en la figura 4-5 el ejemplo b y c que se presentan son caminos simples, el a no lo es ya que se repiten vértices en el recorrido.

Definición 13 (Ciclo) Un recorrido se denomina ciclo si es un camino simple cerrado no trivial. En la figura 4-5 el ejemplo c es un ciclo ya que termina en el mismo vértice en el que comenzó por ende es un camino simple cerrado.

Definición 14 (Grafo conexo) Un grafo es conexo si existe un camino entre cada par de vértices en G . en caso contrario se le llama **grafo desconexo**

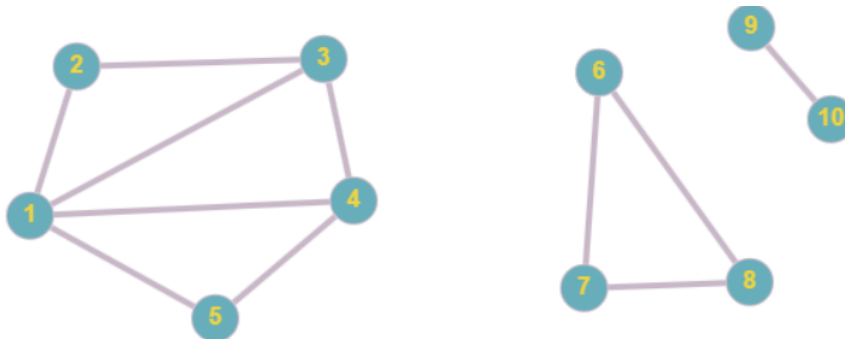


Figura 4-6: Grafo conexo y no conexo

El grafo de la derecha en la Figura 4-6 es no conexo ya que no existe recorrido de ningún vértice a los vértices x_9 y x_{10} .

Definición 15 (Complemento de un grafo) G de un grafo simple G es el grafo con los mismos vértices que G , tal que para cualquier par de vértices que son adyacentes en G si y solo si no son adyacentes en G .

Definición 16 (Matriz de adyacencia) Dado un grafo $G = (V, A)$ donde $V = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, se llama matriz de adyacencia de G al arreglo (rectangular) que tiene una fila y una columna por vértice. Si el vértice x_n es adyacente a x_m , entonces (n, m) en el arreglo es 1, de lo contrario es 0 y se denota $A(G)$.

A continuación damos un ejemplo de un grafo y su correspondiente matriz de adyacencia:

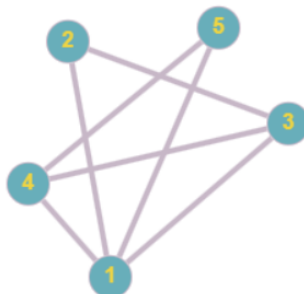


Figura 4-7: Grafo

Su matriz de adyacencia correspondiente es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	1	1	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	1	1	0	1	0
X_4	1	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Tabla 4-1: Matriz de adyacencia definición

La matriz de adyacencia de un grafo simple es simétrica y si no hay lazos en el grafo la diagonal de la matriz serán ceros. Además el arreglo será simétrico para un grafo no dirigido.

Definición 17 (Ciclo hamiltoniano) Sea G un grafo de orden n . Un ciclo hamiltoniano C_n es un ciclo (camino cerrado simple) que pasa por todos los vértices una sola vez.

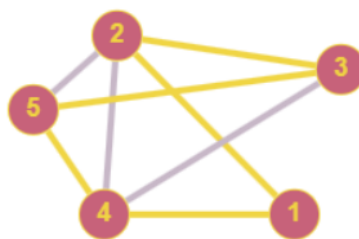


Figura 4-8: Ciclo hamiltoniano

Definición 18 (Grafos hamiltoniano) *Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se llama grafo hamiltoniano.*

Definición 19 (Camino hamiltoniano) *Un camino hamiltoniano en un grafo es un camino simple que pasa por todos los vértices.*

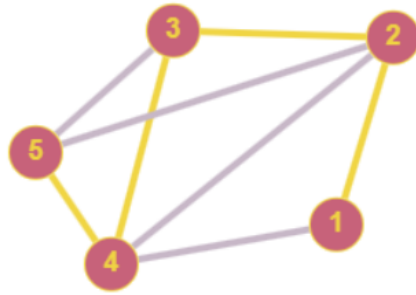


Figura 4-9: Camino hamiltoniano

Teorema 1 (Teorema de existencia de camino hamiltoniano) *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$. Si $\text{grad}(u) + \text{grad}(v) \geq n$ para cualquier par de vértices no adyacentes $u, v \in G$, entonces G es hamiltoniano.*

Demostración 1 (Teorema de existencia de camino hamiltoniano) *Consideremos $G \cup G^c = K_n$, con K_n un grafo completo. Se sabe K_n contiene ciclos hamiltonianos, sea C_n un ciclo hamiltoniano de K_n tal que tiene el máximo número de aristas de G , además G y G^c tienen el mismo conjunto de vértices por la definición de grafo complementario por lo tanto la unión de G y G^c tiene como conjunto de vértices a los vértices de G , así C_n como es un ciclo hamiltoniano de K_n , $K_n = G \cup G^c$ es un ciclo hamiltoniano de K_n entonces C_n tiene el mismo conjunto de vértices que G .*

Para probar que todas las aristas de C_n son también aristas de G se procede a utilizar contradicción. Sea $x_1 x_n \in A(C_n)$ y $x_1 x_n \notin A(G)$ Sean

$$S = \{x_i : x_{i+1} x_1 \in A(G)\}$$

$$Q = \{x_i : x_i x_n \in A(G)\}$$

Por la definición del conjunto S se tiene que la cardinalidad va ser igual al grado del vertice x_1 y por la definición del conjunto Q se tiene que su cardinalidad es el grado del vertice x_n .

$$|S| = d(x_1)$$

$$|Q| = d(x_n)$$

Ahora se va a probar que $S \cap Q = \emptyset$, suponga que $S \cap Q \neq \emptyset$, esto implicaría que existe un x_i que cumple las definiciones de ambos conjuntos, obteniendo el siguiente ciclo hamiltoniano: $x_1 \rightarrow x_{i+1} \rightarrow x_{i+2} \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_i \rightarrow x_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_1$ Este nuevo ciclo hamiltoniano tiene al menos una arista, sea x_1x_{i+1} o x_nx_i , que contradice la elección del ciclo C_n por lo tanto $S \cap Q = \emptyset$

Ahora se probará que $x_n \notin S \cup Q$, si $x_n \in Q$. Por la definición del conjunto S tendríamos un lazo en el ciclo y si se dice que $x_n \in S$ se tendría la arista $x_{n+1} \rightarrow x_1$ y el vértice x_{n+1} no existe.

Por la teoría de conjuntos se tiene que $|S \cup Q| = |S| + |Q| - |S \cap Q|$, Por lo demostrado anteriormente se tiene que $|S \cup Q| = d(x_1) + d(x_n)$ y $|S \cup Q| < n$ por lo tanto $d(x_1) + d(x_n) < n$, lo cual contradice las hipótesis del teorema.

4.2.2. Nociones básicas

Definición 20 (Función) .Es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente; o lo que es lo mismo: f es una función si y solo si

$$(\forall x, y, z)(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z)$$

Definición 21 (Función inversa) Se dirá que f^{-1} es la inversa de f si: $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = x$

Definición 22 (Función inyectiva) Una función de $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva o uno a uno si $f(a) \neq f(b)$ para todo $a, b \in X$ con $a \neq b$.

Teorema 2 (Teorema Función Inversa) Dada una función f si f es inyectiva, entonces su inversa es una función

Demostración 2 (Teorema Función Inversa) Se toma $(x, y_1) \in f^{-1} \wedge (x, y_2) \in f^{-1}$ entonces por la definición de función biyectiva se tiene $(y_1, x) \in f \wedge (y_2, x) \in f$ como f es inyectiva entonces $y_1 = y_2$ a lo cual se puede decir que es una función.

Definición 23 (Función sobreyectiva) .Una función es sobreyectiva si para todo $y \in Y$, existe un x tal que $f(x) = y$

Definición 24 (Función biyectiva) .Una función es biyectiva si es sobreyectiva y inyectiva

Definición 25 (divisibilidad) Sea a, b números enteros con a diferente de cero. Se dice que a divide a b se existe un entero c tal que $b = ac$. En tal caso escribimos $a \mid b$. Decimos también que a es un divisor de b o que b es un múltiplo de a .

Definición 26 (Primos relativos) *Se dice que dos enteros a y b , no ambos 0, son primos relativos si el máximo común divisor es la unidad; esto es, si $(a, b) = 1$.*

La relación entre los conceptos de función y teoría combinatoria se evidencia en la aplicación de técnicas combinatorias para analizar y contar funciones en matemáticas. En el contexto de la teoría combinatoria, se emplean métodos específicos para determinar el número de funciones posibles entre dos conjuntos finitos. Esta tarea implica la aplicación de principios de conteo, como el principio de multiplicación, con el propósito de calcular cuántas funciones distintas pueden definirse entre dichos conjuntos.

Es importante destacar que una función tiene la capacidad de mapear elementos de un conjunto de dominio a un conjunto de codominio, y estos elementos pueden considerarse como secuencias o permutaciones de objetos. Por ejemplo, si se tiene un conjunto de n elementos en el dominio, se pueden considerar todas las posibles permutaciones de esos elementos como funciones biyectivas de sí mismos.

En el contexto de la teoría de grafos, las funciones desempeñan un papel fundamental al modelar relaciones y mapeos entre vértices. En consecuencia, resulta relevante introducir lo siguiente:

4.2.3. Teoría Combinatoria

La combinatoria es una rama de las matemáticas en la cual se utilizan herramientas y técnicas como las permutaciones, las combinaciones, los diagramas de árbol y las identidades combinatorias para resolver diferentes problemas en donde se pueden hallar un conjunto finito de soluciones. La combinatoria tiene aplicaciones en muchas áreas de las ciencias y la tecnología, y es una herramienta esencial en la investigación y el desarrollo de sistemas y algoritmos computacionales, así que para entender esto se hace necesario dar las siguientes definiciones de (Muñoz,2012) como fundamento teórico:

Definición 27 (Permutación) *Una permutación de $[n] \rightarrow [n]$ es una función biyectiva $f : [n] \rightarrow [n]$*

Definición 28 (Grupo simétrico) *Es el conjunto de todas las permutaciones y se denota S_n*

Definición 29 (Coeficiente binomial) *Para todo entero k con $0 \leq k \leq n$, el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se define como el número de subconjuntos de k elementos de $[n]$*

Teorema 3 (Teorema del binomio) *Para todo entero n positivo se tiene que*

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Definición 30 (Desarreglo) Una permutación $\sigma \in S_n$ es un desarreglo si $\sigma(i) \neq i$ para todo $i \in (1, \dots, n)$. Sea $D_n \subset S_n$ el conjunto de todos los desarreglos de S_n

4.2.4. Teoría de Optimización

Los modelos de optimización Matemática son usados en casi la mayoría de las áreas de toma de decisiones, como por ejemplo la ingeniería de diseño, en la parte financiera o de inversión, donde se busca lograr alguna mejora en el nivel de rendimiento de las empresas. La Teoría de la optimización es un conjunto de métodos analíticos y/o numéricos con los cuales se pretende encontrar e identificar la mejor opción entre una colección de alternativas, sin tener que evaluar o estudiar todas las alternativas posibles de manera mecánica, un problema de optimización es en general un problema de decisión para lograr distintos objetivos como mayores ganancias, mayor producción o menores costos.

Los problemas de optimización generalmente se clasifican en lineales y no lineales dependiendo de la relación con las variables implicadas en el problema.

Definición 31 (Optimización continua) Se dice que es un problema de **Optimización Continua** cuando todas las variables de decisión pueden tomar cualquier valor en el conjunto de los reales dentro de este tipo de optimización se destacan los problemas de distintos tipos según la variable y la función a trabajar como las siguientes:

Definición 32 (Optimización Convexa) Es donde se debe minimizar la función convexa a trabajar a un conjunto solución convexo.

Definición 33 (Programación lineal) Es un procedimiento matemático para determinar la asignación óptima de recursos. Este se puede aplicar en la mayoría de facetas de los negocios, desde publicidad hasta planificación de recursos, problemas de transporte, distribución, etc. la programación lineal aborda problemas donde la función a optimizar (objetivo) como las relaciones correspondientes o variables (recursos) son lineales y las variables de decisión son continuas, la mayoría de estos problemas presentan un objetivo el cual se quiere optimizar y un conjunto de restricciones que se dan según el contexto del objetivo a lograr.

Definición 34 (Programación no lineal) Muchos problemas de optimización cumplen con la característica de ser no lineales por lo que para estos problemas implican una mezcla de álgebra lineal, cálculo multivariado, análisis numérico y técnicas de computación. la optimización no lineal principalmente se usa para proporcionar información para análisis matemático por lo que se utiliza en las ciencias aplicadas fundamentales y campos como ingenierías, control de inventarios, exploración geofísica, análisis de regresión, etc.

Definición 35 (Optimización Combinatoria) Cuando se pretende trabajar con variable discretas (valor enteros) se presenta un problema de **Optimización Combinatoria**, una

característica de este tipo de optimización es que únicamente cuenta con un número finito de soluciones factibles y es un grupo grande de soluciones. para abordar este tipo de optimización se deben tener en cuenta los siguientes conceptos:

5 Exploración y Generalidades

5.1. Grafos de orden impar

Para iniciar con el trabajo de exploración se plantean algunos grafos de 5 y 7 nodos para determinar sus soluciones. Es importante saber que de cada grafo se tendrá una matriz de adyacencia, en la cual x_i indica el vértice, 0 indica que no hay arista entre vértices y 1 indica la existencia de arista entre vértices. Para esta exploración se tienen en cuenta las siguientes propiedades de las matrices de adyacencia.

La matriz de adyacencia de un grafo simple y no dirigido siempre es simétrica, además si no hay lazos en el grafo la diagonal de la matriz serán ceros.

Inicialmente se toma el siguiente grafo G de orden 5 con una colección de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

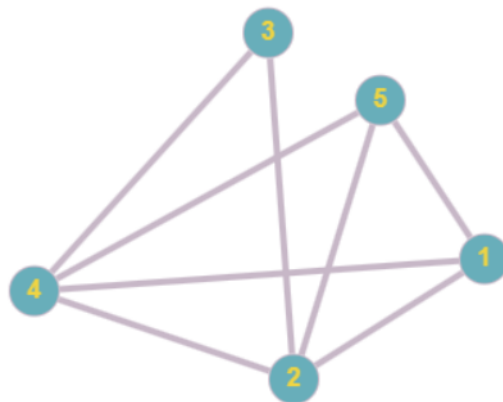


Figura 5-1: Grafo inicial

A partir del grafo de la Figura 5-1, se construye la matriz de adyacencia $A(G)$ obteniendo

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	1	1
X_2	1	0	1	1	1
X_3	0	1	0	1	0
X_4	1	1	1	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Tabla 5-1: Matriz de adyacencia grafo exploración

Teniendo $A(G)$ anterior, se inicia con el siguiente proceso:

1. Cada fila debe quedar solo con dos aristas, para así determinar que cada vértice quede de grado 2
2. Si se elimina un 1, también se procede a eliminar el 1 simétrico correspondiente a la columna.
3. Se toma como criterio de partida algunas conexiones fijas, es decir si el vértice x_1 esta conectado con el vertice x_2 no se elimina esa conexión, se procede a la siguiente.

Teniendo claro lo anterior, se comienza entonces desde la primera fila de $A(G)$ hasta la última de esta, de la siguiente forma:

Se inicia con la primera fila. Como el vértice x_1 esta conectado con el vértice x_2 , se elimina la arista que está con x_4 , obteniendo así

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	1	1
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	1	1	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Tabla 5-2: Modificación matriz de adyacencia exploración

Como la fila 1 ya tiene dos aristas se prosigue con la fila 2, en esa se observa que siguiendo la secuencia el vértice x_2 está conectado con el vértice x_3 , por ende se elimina la arista de x_4 y x_5 obteniendo el siguiente arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Tabla 5-3: Matriz de adyacencia final exploración

Ahora bien, con este proceso se observa que cada vértice es de grado dos, esto, respetando las condiciones establecidas para lograr llegar al ciclo hamiltoniano cuya representación es de la siguiente forma:

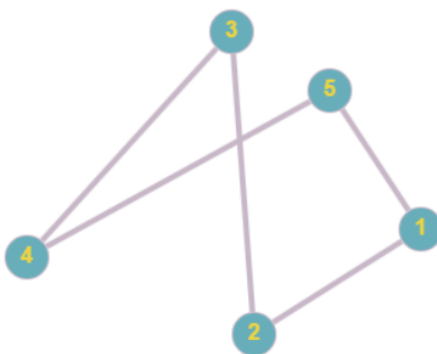


Figura 5-2: Ciclo hamiltoniano resultante

Nótese que el camino hamiltoniano resultante se puede escribir teniendo en cuenta que el vértice 1 es x_1 , el vértice 2 es x_2 y así sucesivamente, obteniendo:

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$$

Del proceso anterior se logra evidenciar que las conexiones siguen un patrón, en este caso las aristas van de x_1 a x_2 y x_2 a x_3 notando que el subíndice de cada vértice va aumentando de 1 en 1.

Ahora, se tomará otro grafo de orden 5 distinto al anterior.

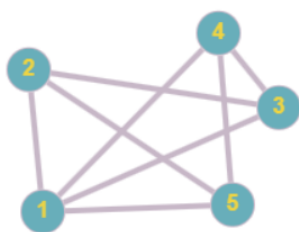


Figura 5-3: Grafo 2

Su arreglo correspondiente es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	1	1	1
X_2	1	0	1	0	1
X_3	1	1	0	1	0
X_4	1	0	1	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Tabla 5-4: Matriz de adyacencia grafo 2

Siguiendo el mismo proceso se inician a eliminar aristas de forma que los vértices queden de grado 2, comenzando por x_1 se elimina inicialmente la arista que está en x_3 , sin embargo, la fila 1, continua con tres aristas (grado 3), por ende se elimina también la arista de x_4 , de forma que el arreglo queda:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	1
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Tabla 5-5: Modificación matriz de adyacencia grafo 2

Continuando con la fila 2 se elimina la arista de x_5 siguiendo las condiciones dadas quedando el arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Tabla 5-6: matriz de adyacencia ciclo final

Encontrando así el ciclo hamiltoniano que se representa como:

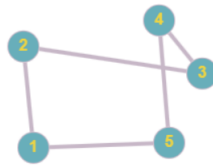


Figura 5-4: Ciclo hamiltoniano

Como en el ejemplo anterior escribiremos este ciclo hamiltoniano de la siguiente forma:

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$$

De igual forma se logra evidenciar que las aristas siguen un patrón, en este caso las aristas van de x_1 a x_2 y x_2 a x_3 notando que el subíndice de cada vértice va aumentando de 1 en 1.

Ahora, para comprobar si este patrón sigue de esa forma se analiza un grafo de orden 7, como por ejemplo:

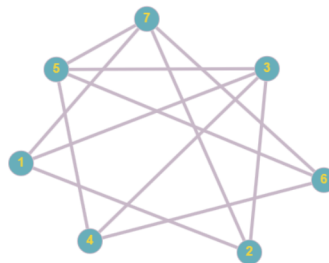


Figura 5-5: Grafo grado 7

La $A(G)$ correspondiente a la Figura 5-5 es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	1	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	1
X_3	1	1	0	1	1	0	0
X_4	0	0	1	0	1	1	0
X_5	0	0	1	1	0	1	1
X_6	0	0	0	1	1	0	1
X_7	1	1	0	0	1	1	0

Tabla 5-7: Matriz de adyacencia Grafo grado 7

Siguiendo las condiciones establecidas se inicia con la fila 1 eliminando la arista de x_3 para que 1 quede de grado 2 de forma que se obtiene la matriz de adyacencia:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	1
X_3	0	1	0	1	1	0	0
X_4	0	0	1	0	1	1	0
X_5	0	0	1	1	0	1	1
X_6	0	0	0	1	1	0	1
X_7	1	1	0	0	1	1	0

Tabla 5-8: Modificación ma Grafo grado 7

Siguiendo con la fila 2 se elimina la arista de la posición x_7 , puesto que la arista de la posición x_3 está conectada consecutivamente con el vértice x_3 , obteniendo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	1	0	0
X_4	0	0	1	0	1	1	0
X_5	0	0	1	1	0	1	1
X_6	0	0	0	1	1	0	1
X_7	1	0	0	0	1	1	0

Tabla 5-9: Modificación 2 ma Grafo grado 7

Observando $A(G)$ anterior se observa que algunas filas tienen un grado mayor a 2, por ende se continúa con la fila 3, ahora bien como x_3 está conectado con x_4 , se elimina la arista de x_5 de forma que la nueva matriz queda

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	1	0
X_5	0	0	0	1	0	1	1
X_6	0	0	0	1	1	0	1
X_7	1	0	0	0	1	1	0

Tabla 5-10: Modificación 3 ma Grafo grado 7

Continuando con el mismo proceso, se elimina la arista de x_6 de la fila 4, así que $A(G)$ queda

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	1
X_6	0	0	0	0	1	0	1
X_7	1	0	0	0	1	1	0

Tabla 5-11: Modificación 4 ma Grafo grado 7

Por último se elimina la arista de x_7 de la fila 5, para así obtener grado 2, en todas las filas.

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1
X_7	1	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-12: Matriz de adyacencia ciclo grafo grado 7

De modo que el grafo del ciclo hamiltoniano es

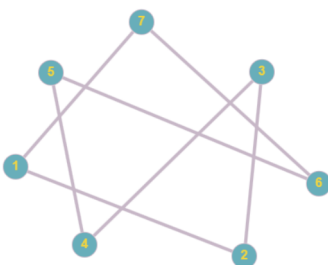


Figura 5-6: Ciclo hamiltoniano

Qué en notación de grafos queda como:

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7$$

Se puede observar que en un grafo de orden 7 las aristas pueden llegar al mismo patrón mostrado en los dos grafos de orden 5 anteriores, ya que las aristas van de x_1 a x_2 y x_3 a x_4 es decir que el subíndice de cada vértice va aumentando de 1 en 1.

A partir de este patrón encontrado en los ciclos hamiltonianos de los grafos de orden 5 y orden 7 se intenta hacer el proceso análogo anterior con otros grafos obteniendo el mismo patrón o distintos a ese, como por ejemplo, si tomamos el siguiente grafo:

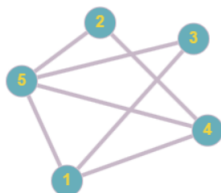


Figura 5-7: Grafo orden 5

con su arreglo correspondiente:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	1
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	1
X_5	1	1	1	1	0

Tabla 5-13: Matriz de adyacencia Grafo orden 5

Se comienza a modificar el arreglo con el mismo proceso análogo explicado anteriormente así obteniendo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Tabla 5-14: matriz de adyacencia ciclo Grafo orden 5

Obteniendo el siguiente ciclo hamiltoniano:

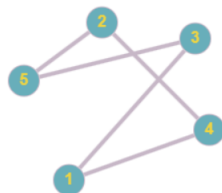


Figura 5-8: Ciclo hamiltoniano

Notado de otra forma:

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4$$

Si se observan las posiciones de los vértices podemos notar que la forma del patrón entre los vértices sus subíndices no aumentan de 1 en 1 sino, de 2 en 2 al igual que existe la posibilidad

de que aumenten de 3 a 3, si se observan dichos patrones desde las matrices de adyacencia se puede afirmar que esos ciclos no son los mismos:

Para el patrón de 1 en 1 la matriz correspondiente es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Tabla 5-15: Matriz de adyacencia patrón 1

Para el patrón de 2 en 2 la matriz correspondiente es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Tabla 5-16: Matriz de adyacencia patrón 2

Y para el patrón de 3 en 3 la matriz correspondiente es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Tabla 5-17: Matriz de adyacencia patrón 3

Estos patrones son los que se definirán como **Ciclo de vértices** y su notación será \tilde{s}

5.1.1. Exploración de generalidades

En esta sección, se darán algunas definiciones que serán importantes para la construcción de generalidades. Como se pudo notar en la sección anterior, los patrones de los ciclos encontrados se notan de la forma \tilde{s} , que será definida por lo siguiente.

Definición 36 (Ciclo de vértices) *En un ciclo hamiltoniano C_n , con $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, se llamará Ciclo de vértices denotado \tilde{s} a una secuencia de vértices de forma que para cada i, j con $0 < j < n$ e i es una secuencia de G y $s < n, i, j \in \mathbb{N}$ e $i \neq n$, se cumpla que $x_1 \rightarrow x_{1+i} \rightarrow x_{1+2i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{1+ji}$ si, $y = 1 + ji \wedge y > n \rightarrow y = (1 + ji) \bmod(n)$ entonces, $x_1 \rightarrow x_{1+i} \rightarrow x_{1+2i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$*

Según la definición anterior, existen 2 ciclos de vértices en un ciclo hamiltoniano de 5 vértices y 3 ciclos de vértices en un ciclo hamiltoniano de 7 vértices, es decir $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ para un grafo de orden 5 y $\tilde{1}, \tilde{2}$ y $\tilde{3}$ para un grafo de orden 7. Además recalcar que según la cantidad de vértices del grafo aumentan los ciclos de vértices.

Ahora bien, si para un ciclo hamiltoniano de 5 vértices se hace el ciclo de vértices $\tilde{3}$ se obtiene la misma matriz de adyacencia de $\tilde{2}$ y si se intenta hacer $\tilde{4}$ la secuencia de vértices termina siendo $\tilde{1}$.

Luego de definir los **ciclos de vértices** se analiza la matriz de adyacencia de estas secuencias y observando las matrices 5-16 y 5-17 se puede asumir que $\tilde{2}$ y $\tilde{3}$ son el mismo ciclo hamiltoniano, por lo que solo se estudiará $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$.

Además de lo anterior, se precisa una nueva definición.

Definición 37 (Matriz Base) *Dado \tilde{s} , se denominará <<Matriz Base>> a la matriz de adyacencia correspondiente a \tilde{s} . la fila i de la matriz base se denota como F_b .*

Teniendo en cuenta lo anterior, las matrices 5-15, 5-16 y 5-17 son matrices bases.

5.1.2. Secuencias y corrimientos

En el análisis de los arreglos de los grafos y de sus matrices bases se pueden observar diferentes características, estas son fundamentales para poder dar algunas definiciones y resultados importantes en la consecución de nuevos ciclos Hamiltonianos.

Algunas características se enuncian a continuación

1. **Ubicación de aristas:** En la matriz 5-15 se puede notar que las conexiones (1) están separadas por dos ceros, lo que visualmente desde la matriz representaría $\tilde{1}$, de esta forma las representaciones de $\tilde{1}$ en cualquier fila y en diferentes posibles posiciones de la matriz de adyacencia sería la siguiente:

0	1	0	0	1
---	---	---	---	---

Tabla 5-18: Ciclo de vértices 1

También se puede encontrar

0	1	0	1	0
---	---	---	---	---

Tabla 5-19: Ciclos de vértices 1

Esta representación se ve ilustrada en los ciclos de un grafo con 5 vértices, ya que se está estudiando aquellos grafos con cantidad de vértices impar observe como se representa $\tilde{1}$ en un grafo de 7 vértices:

La matriz base de $\tilde{1}$ en un grafo de 7 vértices es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1
X_7	1	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-20: Matriz base $\tilde{1}$

La matriz base de $\tilde{1}$ en un grafo de 9 vértices es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1	0	0
X_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X_8	0	0	0	0	0	0	1	0	1
X_9	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-21: Matriz Base

La matriz base de $\tilde{1}$ en un grafo de 11 vértices es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
X_8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
X_9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
X_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-22: Matriz base de $\tilde{1}$ grafo orden 11

Note entonces que visualmente en cada matriz el ciclo de vértices 1 visualmente se ve de la siguiente manera:

0	1	0	0	1
---	---	---	---	---

Tabla 5-23: $\tilde{1}$ en un grafo de 5 vértices

0	1	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-24: $\tilde{1}$ en un grafo de 7 vértices

0	1	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-25: $\tilde{1}$ en un grafo de 9 vértices

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-26: $\tilde{1}$ en un grafo de 11 vértices

Se puede entonces notar un patrón en la representación de $\tilde{1}$ relacionando el número de elementos totales (cantidad de vértices del grafo) con la cantidad de ceros que separan los 1.

Ahora teniendo en cuenta lo anterior, para cualquier grafo con n vértices donde n es impar se toma:

1. Número vértices n
2. Cantidad de ceros ($\check{0}_1$): $\check{0}_1 = n - 3$

Para saber como es la representación de $\tilde{1}$ se necesita conocer la cantidad de ceros que hay entre los 1, por lo que se le resta 3 a la cantidad de vértices que tiene el grafo.

Por otro lado en la matriz 5-16 se observa que las conexiones (1) están en posiciones consecutivas (sin ceros en medio) lo que representaría visualmente $\tilde{2}$, de esta forma la representación de $\tilde{2}$ en cualquier fila y en diferentes posibles posiciones de la matriz de adyacencia sería la siguiente:

0	0	1	1	0
---	---	---	---	---

Tabla 5-27: $\tilde{2}$ para un grafo con 5 vértices

Si se hace el mismo proceso con grafos con cantidad de vértices impar se obtiene:

0	0	1	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-28: $\tilde{2}$ para un grafo con 7 vértices

0	0	1	0	0	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-29: $\tilde{2}$ para un grafo con 9 vértices

0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabla 5-30: $\tilde{2}$ para un grafo con 11 vértices

Si se continua con el mismo análisis que se hizo con $\tilde{1}$ se puede observar que para $\tilde{2}$ la cantidad de ceros es igual a $n - 5$ donde n es la cantidad de vértices del grafo.

Por lo anterior, para cualquier grafo con n vértices donde n es impar se tiene que:

1. Número vértices n
2. Cantidad de ceros ($\check{0}_2$): $\check{0}_2 = n - 5$

Para la representación de $\tilde{2}$ se necesita saber la cantidad de ceros que hay entre los 1 por lo que le restamos 5 a la cantidad de vértices que tiene el grafo.

2. Movimiento entre filas:

En las matrices de adyacencia, además de la representación de la secuencia de vértices en las filas se pueden observar **movimientos** por ejemplo, si se toma la primera fila de la matriz 5-15 se tienen conexiones en las posiciones (1,2) y (1,5) como se ve continuación:

0	1	0	0	1
---	---	---	---	---

Tabla 5-31: Ciclos de vértices 2

El **movimiento** correspondiente a esa fila sería el siguiente:

Se le suma 1 a todas las posiciones de la fila 1 quedando la primera conexión (1,2) en la

posición (2,3) y la segunda conexión (1,5) en la posición (2,1), notando que la matriz de adyacencia es de 5x5 por lo que la segunda conexión pasaría del 5 al 1 quedando de la siguiente forma:

0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

Tabla 5-32: Ciclos de vértices 2

Siendo la segunda fila el **movimiento** de la primera, lo cual se definirá como **corrimientos**.

Definición 38 (corrimientos) . Un corrimiento ∂ de una fila en una matriz de adyacencia (n, n) es un ciclo de orden n con $i \neq j$ y $i, j \in N$ tal que si $i, j \neq n$ entonces $(i, j)\partial = (i + 1, j + 1)$ o si $j = n$ entonces $(i, n)\partial = (i + 1, 1)$ o si $i = n$ entonces $(n, j)\partial = (1, j + 1)$

Con las secuencias de vértices previamente definidas, el estudio se adentra en aquellos ciclos hamiltonianos que carecen de tales secuencias, como por ejemplo:

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2$$

Cuya matriz es:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	1	0	0
X_2	1	0	0	1	0
X_3	1	0	0	0	1
X_4	0	1	0	0	1
X_5	0	0	1	1	0

Tabla 5-33: Matriz de adyacencia

Dado que este ciclo hamiltoniano no tiene secuencia de vértices, se comenzará a comparar las matrices de adyacencia de $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ con el nuevo ciclo hamiltoniano.

Al comparar dichas matrices evidenciamos las siguientes características:

1. Corrimientos:

En la matriz de adyacencia del ciclo hamiltoniano 5-33 se puede observar que se compone de los corrimientos de $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ de la siguiente forma:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	1	0	0
X_2	1	0	0	1	0
X_3	1	0	0	0	1
X_4	0	1	0	0	1
X_5	0	0	1	1	0

Tabla 5-34: Matriz de adyacencia

Notemos que las filas **rojas** corresponden a corrimientos de $\tilde{2}$ y las filas **azules** corresponden a corrimientos de $\tilde{1}$.

2. Ciclo de vértices:

En la matriz de adyacencia del ciclo hamiltoniano 5-34 se observan tanto $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$

Por lo que se propone el siguiente teorema:

Teorema 4 (Composición de ciclos) *Dado C_n , su correspondiente $A(C_n)$ esta compuesta por combinaciones de F_b según su cantidad de vértices y sus respectivos corrimientos.*

Demostración 3 (Composición de ciclos) *Sean F_A , todas las filas de $A(C_n)$. Sea $f_i \in F_A$ tal que $f_i \in F_b$, con F_b una fila de la matriz base. La demostración se sigue por contradicción. Suponga que $f_i \in F_A$, pero $f_i \notin F_b$, recordando la Definición 36 y la Definición 38, se sabe que un ciclo de vértices se puede expresar de la siguiente forma: $x_1 \rightarrow x_{1+i} \rightarrow x_{1+2i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$ y si se combina las filas de las matrices base para obtener un nuevo ciclo se tendría:*

$$x_1 \rightarrow x_{1+5i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow x_{1+i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{1+8i} \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$$

Entonces para algún x_n que representa f_i se tendría:

$$x_1 \rightarrow x_{1+5i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow \dots \rightarrow x_{1+8i} \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$$

Sea x_w y x_t tal que estos son vértices adyacentes a x_n :

$$x_1 \rightarrow x_{1+5i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_w \rightarrow x_n \rightarrow x_t \rightarrow \dots \rightarrow x_{1+8i} \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$$

Se tiene que w y t son la posición de los uno en la matriz de adyacencia y por la Definición 38 tenemos que f_i no puede ser corrimiento de las matrices base dado que $f_i \notin F_B$, entonces:

$$t, w \neq (i, j)\partial \rightarrow t, w \neq (i + 1, j + 1)$$

$$t, w \neq (i, n)\partial \rightarrow t, w \neq (i + 1, 1)$$

$$t, w \neq (n, j)\partial \rightarrow t, w \neq (1, j + 1)$$

Como $i, j \in N$ la única forma que t, w sean diferentes es que $t, w \notin N$ por lo que contradice que t y w son naturales.

Con las características y objetos definidos se puede comprender mejor el proceso que se llevó a cabo para encontrar estas características y el algoritmo que se explicara a continuación.

5.1.3. Algoritmo

Para este algoritmo, que tiene como objetivo encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo de orden n se debe tener en cuenta que n debe ser impar, se debe cumplir el teorema de existencia de camino hamiltoniano y ningún vértice puede tener lazos. además se tomará como guía las matrices bases de $\tilde{1}$ y $\tilde{2}$ las cuales serán las siguientes respectivamente:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Tabla 5-35: Matriz base $\tilde{1}$

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Tabla 5-36: Matriz base $\tilde{2}$

Tomemos ahora un grafo cualquiera que cumpla las condiciones anteriormente dichas, por ejemplo:

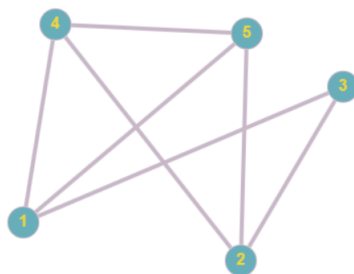


Figura 5-9: Grafo

Se representa el arreglo correspondiente de la siguiente forma:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	1
X_2	0	0	1	1	1
X_3	1	1	0	0	0
X_4	1	1	0	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Tabla 5-37: Matriz de adyacencia

Se inicia con la primera fila del arreglo y en ella eliminaremos aristas (1) de tal forma que en dicha fila se forme alguna de las filas de las matrices base (matrices de $\tilde{1}$ o $\tilde{2}$). Se hará el mismo proceso con las demás filas de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1. la matriz no puede tener filas repetidas.
2. no se puede agregar aristas al grafo(cambiar los ceros por unos)
3. se debe cumplir la simetría de la matriz de adyacencia.
4. cada vértice debe ser de grado 2 o mayor.

El algoritmo termina cuando todos los vértices queden de grado 2.

Con estas condiciones se comienza a modificar el arreglo del grafo de la siguiente manera.

Los arreglos que se encuentran a la izquierda son las matrices bases (matrices de $\tilde{1}$ o $\tilde{2}$) y el arreglo de la derecha es la matriz que se están modificando.

Matriz base $\tilde{1}$

vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Matriz base $\tilde{2}$

vertices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	1	1
X_2	0	0	1	1	1
X_3	0	1	0	0	0
X_4	1	1	0	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Al eliminar la arista en la posición (1,3) notemos que formamos la fila 2 de la matriz base de $\tilde{2}$ pero al revisar las demás filas se observa que la fila 3 tiene una sola arista por lo que x_3 quedaría de grado uno y no cumple con la condición 4 explicitadas anteriormente por lo que se debe realizar otro cambio.

Como no fue posible eliminar la arista en la posición (1,3) porque no cumplía con las condiciones se intenta eliminar la arista en la posición (1,4) obteniendo la fila 4 de la matriz base $\tilde{1}$.

Matriz base $\tilde{1}$

vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Matriz base $\tilde{2}$

vertices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	0	1
X_2	0	0	1	1	1
X_3	1	1	0	0	0
X_4	0	1	0	0	1
X_5	1	1	0	1	0

Se continua con la siguiente fila, por lo que se mira las posibles filas de las matrices base que pueden ir, como por ejemplo la fila 4 de la matriz base $\tilde{1}$ y las filas 1,2 de la matriz base $\tilde{2}$, pero por la condición uno la cual dice que no podemos repetir filas por lo que descartamos la fila 4 de la matriz base $\tilde{1}$ por lo que ya esta en la primera fila. Por lo que se continua por la fila 1 de la matriz base $\tilde{2}$ quedando:

Matriz base $\tilde{1}$

vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Matriz base $\tilde{2}$

vertices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	0	1
X_2	0	0	1	1	0
X_3	1	1	0	0	0
X_4	0	1	0	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Y así obteniendo todos los vértices de grado dos y con ello el ciclo hamiltoniano.

Ilustremos con otro ejemplo. Se tomará el siguiente grafo y su correspondiente arreglo:

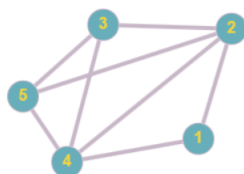


Figura 5-10: Grafo de 5 vértices

se representa el arreglo correspondiente de la siguiente forma:

Matriz base $\tilde{1}$

vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Matriz base $\tilde{2}$

vertices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	1	0
X_2	1	0	1	1	1
X_3	0	1	0	1	1
X_4	1	1	1	0	1
X_5	0	1	1	1	0

Notemos que la primera fila ya corresponde a la fila 3 de la matriz base $\tilde{1}$ por lo que se comienza por la segunda mirando las posibles filas que pueden ir que son las filas 2 y 5 de la matriz base $\tilde{1}$ y la fila 3 de la matriz base $\tilde{2}$. Se tomará la fila 2 de la matriz base $\tilde{1}$ quedando de la siguiente forma:

Matriz base $\tilde{1}$

vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	0	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Matriz base $\tilde{2}$

vertices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	1	1	0
X_2	0	0	0	1	1
X_3	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	0

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	1	0
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	1	1
X_4	1	0	1	0	1
X_5	0	0	1	1	0

Verificando que se cumplan todas las condiciones y si es así continuamos con la siguiente fila,

en este caso la fila 3 y las posibles filas son 1 y 3 de la matriz base $\tilde{1}$ y la fila 5 de la matriz base $\tilde{2}$. Como la fila 1 corresponde a la fila 3 de la matriz base $\tilde{1}$ no se toma esa opción por lo que se toma la fila 1 de la matriz base $\tilde{1}$ quedando:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	1	0
X_2	1	0	1	0	0
X_3	0	1	0	0	1
X_4	1	0	0	0	1
X_5	0	0	1	1	0

Tabla 5-38: Matriz de adyacencia

Como todos los vértices quedaron de grado 2 se termina el proceso obteniendo así el ciclo hamiltoniano.

Para un grafo con 7 vértices se debe tener las siguientes matrices bases:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	1	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1
X_7	1	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-39: Matriz de adyacencia $\tilde{1}$

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	0	1	0	0	1	0
X_2	0	0	0	1	0	0	1
X_3	1	0	0	0	1	0	0
X_4	0	1	0	0	0	1	0
X_5	0	0	1	0	0	0	1
X_6	1	0	0	1	0	0	0
X_7	0	1	0	0	1	0	0

Tabla 5-40: Matriz de adyacencia $\tilde{2}$

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	0	0	1	1	0	0
X_2	0	0	0	0	1	1	0
X_3	0	0	0	0	0	1	1
X_4	1	0	0	0	0	0	1
X_5	1	1	0	0	0	0	0
X_6	0	1	1	0	0	0	0
X_7	0	0	1	1	0	0	0

Tabla 5-41: Matriz de adyacencia $\tilde{3}$

5.2. Grafos de orden par

Ya se ha estudiado los grafos de orden impar, allí se encontró una definición fundamental acerca de los Ciclos de vértices, esta se cumple para aquellos grafos que tengan una cantidad de vértices impar, ahora se estudiará lo que ocurre con los grafos de orden par, aquí se notará que existen dichos ciclos si y solo si el ciclo es un primo relativo con respecto a la cantidad de vértices del grafo.

5.2.1. Exploración y Generalidades

Tomando el siguiente grafo de orden 8:

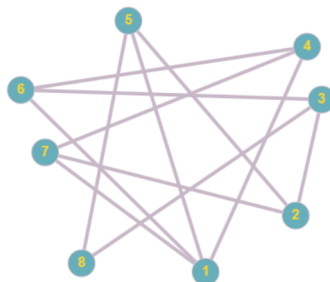


Figura 5-11: Grafo de orden 8

A partir de la definición de \tilde{s} se puede comenzar a analizar el grafo anterior para saber sus posibles \tilde{s} por lo que al analizarla y hacer el procedimiento establecido en la sección anterior se llega a que existe $\tilde{1}$, ya que se puede hacer la siguiente configuración:

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow x_8$$

A el ciclo anterior se le puede asociar el siguiente arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	1	0	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1	0
X_7	0	0	0	0	0	1	0	1
X_8	1	0	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-42: Matriz de adyacencia $\tilde{1}$

Por lo que es posible crear un ciclo hamiltoniano con ese ciclo de vértices. Si se intenta realizar $\tilde{2}$ en un grafo con 8 vértices, se obtiene la siguiente secuencia:

$$x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow x_7 \rightarrow x_1$$

Aquí se evidencia que el ciclo se cierra, pero no considera algunos vértices, debido a esto no es posible definirlo como ciclo hamiltoniano por lo que podemos decir que $\tilde{2}$ no existe para los grafos con 8 vértices.

Si se realiza $\tilde{3}$ se puede obtener la siguiente secuencia:

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_7 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_8 \rightarrow x_3 \rightarrow x_6$$

En esta se cierra el ciclo considerando todos los vértices, por ende este si se considera un ciclo hamiltoniano además se le puede asociar el siguiente arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	0	1	0	1	0	0
X_2	0	0	0	0	1	0	1	0
X_3	0	0	0	0	0	1	0	1
X_4	1	0	0	0	0	0	1	0
X_5	0	1	0	0	0	0	0	1
X_6	1	0	1	0	0	0	0	0
X_7	0	1	0	1	0	0	0	0
X_8	0	0	1	0	1	0	0	0

Tabla 5-43: Matriz de adyacencia $\tilde{3}$

Ahora bien, al intentar construir el ciclo con $\tilde{4}$ se puede notar que no es posible por la misma razón que con $\tilde{2}$, quedando la secuencia:

$$x_1 \rightarrow x_5$$

Cuyo grafo queda de la siguiente forma:

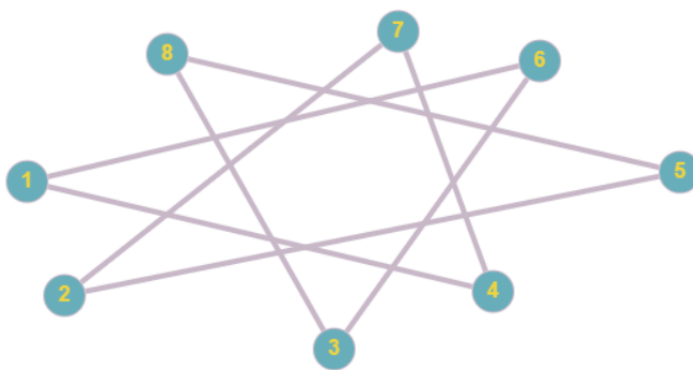


Figura 5-12: Grafo

Al construir el ciclo con $\tilde{5}$ se puede obtener un ciclo que se cierra considerando todos los vértices:

$$x_1 \rightarrow x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow x_8 \rightarrow x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow x_7 \rightarrow x_4$$

A este ciclo hamiltoniano se le puede asociar el siguiente arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	0	1	0	1	0	0
X_2	0	0	0	0	1	0	1	0
X_3	0	0	0	0	0	1	0	1
X_4	1	0	0	0	0	0	1	0
X_5	0	1	0	0	0	0	0	1
X_6	1	0	1	0	0	0	0	0
X_7	0	1	0	1	0	0	0	0
X_8	0	0	1	0	1	0	0	0

Tabla 5-44: Matriz de adyacencia $\tilde{5}$

Si se observa el arreglo de $\tilde{5}$ es igual a $\tilde{3}$ por lo que por definición de matriz de adyacencia se puede afirmar que son el mismo ciclo hamiltoniano.

Al intentar construir el ciclo con $\tilde{6}$ no es posible ya que quedan faltando vértices por conectar obteniendo:

$$x_1 \rightarrow x_7 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3$$

Ahora para el ciclo con $\tilde{7}$ obtenemos el siguiente ciclo hamiltoniano:

$$x_1 \rightarrow x_8 \rightarrow x_7 \rightarrow x_6 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$$

A el ciclo anterior se le puede asociar el siguiente arreglo:

Vértices	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	1	0	0	0	0	0	1
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0
X_3	0	1	0	1	0	0	0	0
X_4	0	0	1	0	1	0	0	0
X_5	0	0	0	1	0	1	0	0
X_6	0	0	0	0	1	0	1	0
X_7	0	0	0	0	0	1	0	1
X_8	1	0	0	0	0	0	1	0

Tabla 5-45: Matriz de adyacencia $\tilde{7}$

Se observa que el arreglo de $\tilde{1}$ es igual a $\tilde{7}$ por lo que podemos afirmar que es el mismo ciclo hamiltoniano.

Se concluyó que para el grafo con 8 vértices existen $\tilde{1}, \tilde{3}, \tilde{5}$ y $\tilde{7}$

Con un proceso analogo se puede determinar los ciclos de vértices (\tilde{s}) que existen en grafos con n siendo $n = 2k$ y $s < n$ por ejemplo para un grafo de 10 vértices existen:

$\tilde{1}$ quedando el ciclo hamiltoniano:

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow x_8 \rightarrow x_9 \rightarrow x_{10}$$

$\tilde{3}$ obteniendo:

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_7 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_3 \rightarrow x_6 \rightarrow x_9 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_8$$

$\tilde{7}$ obteniendo:

$$x_1 \rightarrow x_8 \rightarrow x_5 \rightarrow x_2 \rightarrow x_9 \rightarrow x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_7 \rightarrow x_4$$

$\tilde{9}$ obteniendo:

$$x_1 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_9 \rightarrow x_8 \rightarrow x_7 \rightarrow x_6 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$$

Para un grafo de 12 vértices existen $\tilde{1}, \tilde{5}, \tilde{7}$ y $\tilde{11}$

Siguiendo el estudio de esa forma y observando los ciclos de vértices que existen se puede concluir que para un grafo de n vertices donde n es par, existe \tilde{s} donde s es primo relativo de n y $s < n$.

Teorema 5 (Existencia ciclo de vértices en orden par) Dado C_n con $n = 2k$ tal que $k \in N$, existe \tilde{s} si y solo si s es primo relativo con n .

Demostración 4 (Existencia ciclo de vértices en orden par) La demostración se dará en dos parte:

(\rightarrow): Si existe \tilde{s} en G , entonces s es primo relativo con n .

Sea C_n y \tilde{s} una secuencia del ciclo, por la Definición 36 se tiene $s < n$, además $i, j \in N$, de modo que $x_1 \rightarrow x_{1+i} \rightarrow x_{1+2i} \rightarrow x_{1+3i} \rightarrow \dots \rightarrow x_{(1+ji) \bmod(n)}$ con $i = s$. La demostración se sigue por contradicción. Suponga que $MCD(s, n) \neq 1$ como no son primos relativos se tiene que:

$$s \mid n \rightarrow n = st, t \in N \tag{5-1}$$

Por la Definición 16 y Definición 36 \tilde{s} debe pasar por todos los vértices y n se puede expresar de las siguientes formas:

$$1 + ji = n \quad (5-2)$$

o

$$(1 + ji) \bmod(n) = n \quad (5-3)$$

Para 5-3 significa que el residuo de $(1 + ji)$ entre n es n . Ya que el residuo de una división siempre es menor que el divisor 5-3 no valida.

Ahora si se considera 5-2, 5-1 y además $i = s$, por la Definición 36 tenemos $1 + js = st$, despenjando j tenemos $js = st - 1$ $j = \frac{st}{s} - \frac{1}{s}$ entonces $j = t - \frac{1}{s}$.

La unica forma que j sea entero es que $s = 1$ pero s no puede tomar ese valor ya que 1 es primo relativo de todos los números enteros. Con lo que se contradice que j es entero en la Definición 36

(\leftarrow): Si s es primo relativo con n , entonces existe \tilde{s}

Se supone que s es primo relativo con n , sin perdida de generalidad, iniciamos en x_1 y construimos la secuencia con s de la siguiente manera:

$$x_1 \rightarrow x_{1+1s} \rightarrow x_{1+2s} \rightarrow \dots \rightarrow x_{1+js} \bmod(n) \quad (5-4)$$

Dado que s y n son primos relativos, la secuencia pasara por todos los vértices ya que no existe ningún factor común entre s y n .

6 Conclusiones y Trabajos a futuro

6.1. Conclusiones

1. Los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado están en concordancia con los objetivos establecidos. Se ha logrado el reconocimiento y la caracterización de propiedades en las matrices de adyacencia de los ciclos Hamiltonianos.
2. Se categorizaron los grafos en función de su orden, distinguiendo entre grafos de orden impar y grafos de orden par. Esta distinción fue esencial para analizar y entender las propiedades específicas de estos dos tipos de grafos.
3. A partir de la caracterización, tal como se evidencia en los resultados de este estudio, se logró exitosamente generalizar las propiedades de las matrices de adyacencia de los ciclos Hamiltonianos. Esta generalización permitió identificar patrones de comportamiento que, a su vez, posibilitaron la definición de objetos significativos en el contexto de este trabajo, y que tienen el potencial de ser relevantes para investigaciones futuras.
4. Los objetos definidos y los teoremas demostrados, tal como se evidencia en los resultados de este trabajo, han facilitado y se han convertido en una herramienta fundamental para la visualización de las matrices de adyacencia y los ciclos Hamiltonianos, así como para el trabajo con estos.
5. Gracias a los logros mencionados anteriormente, se ha logrado desarrollar un algoritmo que posibilita la identificación de ciclos Hamiltonianos en grafos de orden impar. Este nuevo algoritmo representa una herramienta fundamental y novedosa para la identificación de ciclos Hamiltonianos diferentes a los ya establecidos, demostrando su utilidad en este campo de estudio.
6. Estas conclusiones representan contribuciones significativas a la comprensión de la estructura de grafos y caminos Hamiltonianos a partir de las matrices de adyacencia. Estos resultados ofrecen una base sólida para futuras investigaciones en este campo, lo que puede tener aplicaciones en diversas áreas.
7. Los resultados evidencian que el enfoque de estudio de los grafos a través del análisis de las matrices de adyacencia conlleva beneficios significativos para la comprensión y construcción de relaciones dentro de estos grafos.

8. La formación durante la realización de este trabajo brindó a los autores una valiosa experiencia en investigación y análisis matemático.

6.2. Trabajos a futuro

Una de las recomendaciones principales que se ofrecen es la continuación de la búsqueda de generalidades en las matrices de adyacencia de los grafos de orden par. Por ejemplo, se investiga el comportamiento de la representación de los ciclos de vértices en las matrices bases en función de la cantidad de vértices en el grafo. Además, identificar todos los posibles ciclos hamiltonianos en un grafo a partir de permutaciones de las filas de las matrices base. Por otro lado, intentar optimizar el algoritmo propuesto para la búsqueda de ciclos hamiltonianos y finalmente hacer propuestas de una unidad didáctica con el enfoque de los niveles de Van Hiele para la enseñanza y aprendizaje de la teoría de grafos.

Referencias

- [1] Acosta Carvajal, B. E., & Montoya Conde, L. M. (2018). Elementos de la teoría de grafos y la conjetura de evasividad. Ibagué: Universidad del Tolima, 2018.
- [2] Byrkit, D., & Pettofrezzo, A. (1972). Introducción a la teoría de Números. Editorial Prentice Hall International. New Jersey.
- [3] Cioabă, S. M., & Murty, M. R. (2009). *A first course in graph theory and combinatorics*. Springer.
- [4] Franco Galvín, F. J. (2016). Aspectos algebraicos en Teoría de Grafos.
- [5] Muñoz, J. (2012). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia.
- [6] Ombita, L., Mahecha, N., & Beltrán, P. (2017). Caracterización de sólidos redondos por medio de grafos y matrices de adyacencia. Universidad Pedagógica Nacional.
- [7] Ponzoni, I. (2001). Aplicación de teoría de grafos al desarrollo de algoritmos para clasificación de variables.
- [8] Rodríguez Prieto, M. (2019). Teoría espectral de grafos en la formación de redes: mínimo valor propio. *Universidad del Rosario*.
- [9] Rodríguez, J. (2008). Teoría de unión al HLA clase II: teoría de probabilidad, combinatoria y entropía aplicadas a secuencias peptídicas. *Inmunología*, 27(4), 151-166. Elsevier.
- [10] Rincón, F., Henao, N., & Beltrán, P. (2017). De los sólidos platónicos a los arquimedianos: un estudio desde las matrices de adyacencia. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- [11] Fernández Caicedo, J. A. (2016). Conteo en la teoría de grafos. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- [12] Noguera Cuenca, I. (2012). Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos. *UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA*
- [13] Cabezas, S., Curia, L., Itovich, G., & Perini, A. (1996). Desarrollo de un Algoritmo de Etiquetamiento para la Resolución de Redes de Distribución Hidráulica, Mediante Teoría de Grafos. *Mecánica Computacional*, 16(1), 43-52. *U.N. Comahue*

- [14] Estrada-Jiménez, P. M., Leyva-Regalón, J. A., & Brown-Grandales, H. T. (2017). APLICACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA EN LAS RELACIONES DE EQUIVALENCIA (Revisión). Redel. Revista Granmense de Desarrollo Local, 1(2), 163-173.