



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

Facultad de ciencia y tecnología

Departamento de física

Monografía de pregrado:

TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

**Introducción a la concepción de entropía de acuerdo con la
segunda ley generalizada.**

Documento de monografía para optar por el título de licenciado en física

Autor:

Juan Sebastián Arenas Beltrán

Dirigido por:

Yesid Javier Cruz

Bogotá, Septiembre de 2014

—

*”Si arrojaras esta rosa a las brasas, creerías que ha sido consumida y que la ceniza es verdadera.
Te digo que la rosa es eterna y que sólo su apariencia puede cambiar.
Me bastaría una palabra para que la vieras de nuevo.”*

—Jorge Luis Borges, *La rosa de Paracelso*


Dedicatoría

DEDICADO A
A MI FAMILIA, POR SU CONSTANTE APOYO Y FÉ
Y A MI LENA CON AMOR, MUCHAS GRACIAS POR CREER EN MÍ Y ESTAR SIEMPRE A MI
LADO.

Agradecimientos

Se agradece al departamento de física por la formación y apoyo que recibí durante los años de estudio en la carrera y a mis profesores, por toda la enseñanza que me proporcionaron y las invaluable lecciones que recibí de ellos para crecer como persona y profesional. Sin ellos no hubiese sido posible encaminar mi pasión hacia el conocimiento y la enseñanza.


Agradezco profundamente a mi familia por toda la ayuda que he obtenido; a mi madre, por su apoyo desinteresado durante toda mi formación y a mi abuela, por ser el pilar de mi crianza durante toda mi vida. A todos ellos, deseo siempre llenarlos de constante alegría y orgullo con mis logros. espero jamás decepcionarlos.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 5	


1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Termodinámica de agujeros negros: Introducción a la concepción de entropía de acuerdo con la segunda ley generalizada.
Autor(es)	Arenas Beltrán, Juan Sebastián
Director	Cruz, Yesid Javier
Publicación	Bogotá, Universidad pedagógica Nacional, 2014. 45p.
Unidad Patrocinante	Departamento de física, Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Agujeros negros, termodinámica, relatividad general.

2. Descripción
<p>La investigación teórica acerca de los agujeros negros y su relación con la termodinámica han logrado plantear toda una rama de las ciencias que no podría ser desapercibida, no solo por su impresionante formulación, sino por sus impactantes resultados teóricos tales como: la entropía de los agujeros negros, la radiación de Hawking y la inquietante relación con la teoría de la información, entre otros. Al ser la termodinámica una visión física del universo, las connotaciones ya conocidas acerca de esta y de sus leyes fundamentales pueden ser entendidas de manera profunda y alternativa con un ejemplo físicamente extremo: los agujeros negros; regiones particulares del espacio-tiempo en donde la gravedad es tan intensa, que ni siquiera la luz puede escapar de allí. En el presente trabajo se abordan e identifican de manera introductoria, las relaciones termodinámicas en la relatividad general, en particular, los agujeros negros.</p>

3. Fuentes
<p>[1] Schwarzschild, K., "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 189-196, 1916.</p> <p>[2] Dinverno, R., Introducing Einstein's Relativity. 5 ed.: Oxford University Press, 1998.</p> <p>[3] Weinberg, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The general Theory of Gravity. 1 ed.: John Wiley & Sons, Inc., 1972.</p> <p>[4] Misner, W., Thorne S., Wheeler A., Gravitation. 3 ed.: Freeman and Company, 1973.</p> <p>[5] Wald, R., General Relativity 1 ed.: The University of Chicago Press, 1984.</p> <p>[6] Eddington, A.S., The Mathematical Theory of Relativity 1 ed.: Cambrish University Press, 1924.</p> <p>[7] Mammadov, G., Reissner-Nordström metric Replacement project for the final exam of the adv. electromagnetic theory II, Syracuse University NY. May 04 2009 [http://gmammado.mysite.syr.edu/notes/RN_Metric.pdf]</p> <p>[8] Hawking, S., Ellis, G., The large scale structure of space-time 12 ed.: Cambrish University Press, 1994.</p> <p>[9] McMahon, D., General Relativity Demystified 1 ed.: Mc Graw-Hill Inc., 2006.</p> <p>[10] Chandrasekhar, S., The Mathematical Theory of Black Holes 1 ed.: Oxford University Press, NY, 1983.</p> <p>[11] W. Rindler, "Kruskal space and the uniformly accelerating frame," Am. J. Phys. 34, 1174-8 (1966).</p> <p>[12] A. S. Eddington, "A comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae," Nature 113, 192 (1924).</p> <p>[13] D. Finkelstein, "Past future asymmetry of the gravitational field of a point particle," Phys. Rev. 110, 965 (1958).</p> <p>[14] M. D. Kruskal, "Maximal Extension Of Schwarzschild Metric," Phys. Rev. 119, 1743 (1960). 56</p> <p>[15] G. Szekeres, "On the singularities of a Riemannian manifold," Publ. Mat. Debrecen 7, 285-301, (1960).</p> <p>[16] H. Reissner, "Über die Eigengravitation des elektrischen Felds nach den Einsteinschen Theorie," Ann. Phys. bf 50, 106-120 (1916).</p>


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 5	

- [17] G. Nordström, On the energy of the gravitational field in Einstein's theory," Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 1238-1245 (1918).
- [18] R. P. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).
- [19] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, \Maximal analytic extension of the Kerr metric," J. Math. Phys. 8, 265-281, (1967).
- [20] E. T. Newman and A.I. Janis, \Note on the Kerr Spinning-Particle Metric," J. Math. Phys. 6, 915-7 (1965).
- [21] R. C. Henry, Kretschman Scalar for a Kerr-Newman Black Hole," The Astrophysical Journal, (1999).
<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9912320v1>
- [22] J. Lense and H. Thirring, The Influence of the Self-Rotation of Central Bodies on the Movemens of the Planets and the Moon According to Einsteins Theory of Gravitation" Physicalische Zeitschrift, 19, 156-163, (1918).
- [23] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence Metric of a rotating charged mass," J. Math. Phys. 6, 918-9 (1965).
- [24] R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities," Phys. Rev. Lett. 57, 57-59 (1965)
- [25] R. Penrose, Gravitational collapse: the role of general relativity," Riv. Nuo. Cim. Numero speciale I, 257 (1969) reprinted in Gen. Rel. and Grav. 34, 1141 (2002).
- [26] S. Hawking, R. Penrose, The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology,"Proc. Roy. Soc. Lond. A. 314, 529-48 (1970)
- [27] R. Penrose and R. M. Floyd, Extraction of rotational energy from a black hole," Nature, Phys. Schi. 229, 177-179 (1971).
- [28] D. Christodoulou, Reversible and irreversible transformations in black hole physics,"Phys. Rev. Lett. 25, 1596-7 (1970).
- [29] D. Christodoulou and R. Ruffini, Reversible transformations of a charged black hole,"Phys. Rev. D 4, 3552-5 (1971).
- [30] S. W. Hawking, Gravitational radiation from colliding black holes," Phys. Rev. Lett. 26, 1344-6 (1971).
- [31] J. D. Bekenstein Black holes and the second law," Lett. Nuo. Cim. 4, 737-740 (1972).
- [32] L. Smarr, Mass Formula for Kerr Black Holes," Phys. Rev. Lett. 30, 71-3 (1973).
- [33] A. Curir, M. Francaviglia Isoareal Transformations of the Kerr-Newman Black Holes,"Acta Physica Polonica B9, (1978).
- [34] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, The Four laws of black hole mechanics,"Commun. Math. Phys. 31, 161 (1973).
- [35] Reif, F., Fundamentals of Statistical and Thermal Physics Students ed.: Mc Graw-Hill Inc., 1965.
- [36] Adkins, C.J., Equilibrium Thermodynamics 3 ed.: Cambrish University Press, 1988.
- [37] Hawking, S. W., Israel, W., Three Hundred Years of Gravitation 1 ed.: Cambrish University Press, 1989.
- [38] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Course of Theoretical Physics vol. 5: Statistical Physics 2 ed.: Pergamon Press, 1970.
- [39] J. D. Bekenstein Black holes and Entropy," Phys. Rev. D 7, 2333-46 (1973).
- [40] C. E. Shannon \A Mathematical Theory of Communication," The Bell System Technical Journal 27-I, 379-423 (1948).
- [41] Brillouin, L., Science and Information Theory 2 ed.: Academic Press, New York,1962.
- [42] J. D. Bekenstein Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-Hole Physics,"Phys. Rev. D 9, 3292-3300 (1974).
- [43] S. W. Hawking, Black Hole Explosions?" Nature 248, 30-31(1974).
- [44] S. W. Hawking, Particle creation by black holes," Commun. Math. Phys. 43, 199-220 (1975).
- [45] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, \Action integrals and partition functions in quantum gravity," Phys. Rev. D 15, 2752 (1977).
- [46] P. C. W. Davies, Thermodynamics of Black Holes," Rep. Prog. Phys. 41, 1313-55 (1978).
- [47] S. W. Hawking Black Holes and Thermodynamics," Phys. Rev. D 13, 191-7 (1976).
- [48] J. D. Bekenstein Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems," Phys. Rev. D 23, 287-298 (1981).
- [49] J. D. Bekenstein Energy Cost of Information Transfer," Phys. Rev. Lett. 46, 623-6 (1981).
- [50] Schutz, B., Gravity from the Ground up 1 ed.: Cambridge University Press, 2003.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 5	


4. Contenidos
<p>1. Relatividad General: La métrica de Schwarzschild</p> <p>Se introducen las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales constituyen una teoría de gravitación en la que se introduce el concepto de curvatura del espacio-tiempo. Con esto se inicia el estudio que da lugar a la física de agujeros negros y que constituye la base del estudio de los posibles escenarios que localmente reproducen la geometría alrededor de aquellos cuerpos. Se presenta por completo solo la deducción de la primera solución, con el fin de iniciar con una apropiada matematización de los conceptos básicos de la relatividad general. La primera solución a las ecuaciones de campo de A. Einstein, fue desarrollada por Karl Schwarzschild en 1916. Aquella solución representa el “campo gravitacional” circundante a una masa que se considera puntual, y está situada en un origen de coordenadas.</p> <p>2. Agujeros negros</p> <p>Este capítulo está dedicado, especialmente, a las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein; en él se pretende enseñar detenidamente y sin embargo, de manera global, los tres casos restantes en cuanto a la geometría proporcionada por cuerpos que podemos considerar agujeros negros desde el punto de vista físico de la relatividad general. Anteriormente, se expusieron las cualidades geométricas y físicas de la solución de Schwarzschild, la cual puede ser asociada con un agujero negro estático y de simetría axial; y aquí se introducirán los diferentes tipos de agujeros negros, sus soluciones y propiedades generales. Se realiza la clasificación correspondiente para agujeros negros estáticos (Schwarzschild), con carga eléctrica (Reissner-Nordström) y agujeros rotantes (Kerr-Newman), con sus respectivas propiedades.</p> <p>3. Termodinámica de agujeros negros</p> <p>Se estudian las características generales de la mecánica de los agujeros negros y sus leyes. En este capítulo se introducen los conceptos de similitud entre el formalismo de la teoría de los agujeros negros con la de la termodinámica al enunciar y compilar las cuatro leyes consideradas clásicas desde la base de las investigaciones históricas en el tema.</p> <p>4. Análisis de la termodinámica en agujeros negros</p> <p>Para este capítulo se inicia formalmente con las comparaciones entre termodinámica y agujeros negros, haciendo las comparaciones correspondientes para cada una de las leyes estudiadas desde el marco de cada disciplina. Se introduce la segunda ley generalizada de la termodinámica y su concepción de entropía desde la teoría de la información para los agujeros negros. Se finaliza con la explicación de la temperatura de radiación de Hawking y los respectivos cálculos obtenidos para las magnitudes termodinámicas de los agujeros negros.</p>

5. Metodología
<p>El conjunto de procedimientos que se utilizan para obtener conocimientos científicos, es conocido como “método científico”. Puesto que este método, no es particularmente definido para cualquier investigación, existe una manera específica de estudiar dichos procedimientos con el fin de dar coherencia a lo que se quiere investigar. Esta labor es la que cumple la metodología en las ciencias naturales.</p> <p>Para la realización del presente trabajo, es necesario definir qué tipo de metodología es la más apropiada para lograr los objetivos propuestos. Esta metodología tiene que ser parte de un proceso hipotético-deductivo que cumpla con las actividades de:</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 5	

<ul style="list-style-type: none"> • Revisión de las teorías existentes • Propuesta de una o varias hipótesis • Sustentación mediante el diseño de investigación adecuado • Confirmación o refutación <p>Estos procesos se ajustan de manera más consistente con la metodología de tipo cuantitativa y dentro de esta, específicamente la no-experimental (ex-post-facto). En este tipo de metodología no se tiene control sobre las variables independientes, debido a que los fenómenos ya han ocurrido o no pueden ser reproducidos y se proporcionan técnicas para describir la realidad, analizar relaciones, categorizar, simplificar y organizar las variables que configuran el objeto de estudio. El propósito es realizar inferencias sobre la relación entre las variables, sin dar una intervención directa.</p> <p>Finalmente, se presentan las fases que siguen de manera consistente el objeto de la metodología estudiada y presentada con anterioridad, las cuales fueron la guía y estructura del trabajo realizado:</p> <ul style="list-style-type: none"> •Recopilación de información acerca del fenómeno (o campo fenoménico) a estudiar. •Identificación del problema teórico a investigar y planteamiento de objetivos acerca de lo que se pretende obtener. •Establecimiento de un marco teórico suficientemente delimitado y consecuente con los antecedentes (históricos) sobre el tema. •Conclusiones del trabajo investigativo.
--

6. Conclusiones
<ol style="list-style-type: none"> 1. Al ir paulatinamente por el estudio de la relatividad general, los agujeros negros parecen ser los cuerpos más simples en el cosmos denidos por tan solo tres parámetros (masa, carga y momento angular); el estudio de estas propiedades demuestra que se puede desarrollar una formalización adecuada para el estudio especializado de los agujeros y que, además, existe un conjunto de leyes asociadas que son similares -o equivalentes a las de la termodinámica. 2. La entropía del agujero negro y su temperatura, pueden ser asociados con el área de su horizonte de eventos y gravedad superficial, respectivamente. Pese a que existe una conexión establecida entre la termodinámica y los agujeros negros, la naturaleza de las cantidades mencionadas se desconoce a nivel fundamental (estadístico) y por lo tanto, el estatus de la teoría permanece como algo especulativo que requeriría de una presunta teoría de gravedad cuántica para dar cuenta de los aspectos envueltos; como la radiación de Hawking, entre otros. 3. El usar un análisis semi-clásico de los agujeros negros permite dar una primera aproximación a la concepción de entropía en los agujeros negros. Aunque se desconocen por completo los grados de libertad adicionales que dan lugar a un valor de entropía tan enorme para aquellos cuerpos, se relaciona a esta con el carácter de irreversibilidad que posee la pérdida de información (como el aumento de la incertidumbre acerca de la configuración interna de un cuerpo que ha caído al agujero) que se ve reflejada en el incremento de la entropía del agujero negro, y en su aumento de tamaño (área). Dado que siempre existe una compensación entre la entropía de los agujeros negros y la del resto del universo, se asume que la segunda ley de la termodinámica es generalizada por medio de esta teoría. 4. La obtención del resumen de las leyes de la termodinámica para los agujeros negros sugiere que el marco disciplinar de la termodinámica es aún vigente para los aspectos relevantes de la física, debido a que su contundente formulación no ha encontrado ninguna falsación hasta el momento. De una buena manera, este trabajo ha rescatado una parte clásica de la física -de la termodinámica de máquinas de vapor o procesos químicos- para trasladarla a la relatividad general en el campo de eventos astrofísicos como la mecánica de agujeros negros, y además, desde este formalismo algunos aspectos de estos cuerpos pueden ser tomados como ejemplos extremos no muy conocidos de la termodinámica: calor específico negativo, evaporación de Hawking y entropía de Bekenstein, entre otros.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO		
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01		
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 5		

- | |
|---|
| <p>5. El trabajo realizado se constituye por completo como un aporte introductorio hacia temas no muy conocidos dentro del ámbito de la física contemporánea, los cuales pueden ser trabajados y/o estudiados a partir de conceptos previos en las áreas trabajadas en el pregrado en física.</p> <p>6. La recopilación de fuentes históricas de autores originales han sido una gran base teórica para la ardua elaboración del texto, que se pretende como una fuente confiable de conocimientos básicos en las respectivas áreas trabajadas.</p> |
|---|

Elaborado por:	Juan Sebastián Arenas Beltrán
Revisado por:	Yesid Javier Cruz

Fecha de elaboración del Resumen:	01	09	2014
--	----	----	------

Índice general

Introducción	XI
1. Relatividad General: La métrica de Schwarzschild	1
1.1. Solución	2
1.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	5
1.3. Singularidades y horizontes	8
1.4. Simetrías y vectores de Killing	11
1.4.1. Isometrías	11
1.4.2. Vectores de Killing y relatividad general	12
2. Agujeros negros	14
2.1. Solución de Reissner-Nordström	14
2.1.1. Horizontes y singularidad	16
2.2. Métrica de Kerr: Agujeros negros rotantes	18
2.2.1. Singularidad, horizontes y ergosfera	19
2.2.2. Comportamiento asintótico	21
2.2.3. Velocidad angular y límite estacionario	22
2.3. Métrica de Kerr-Newman	23
3. Termodinámica de agujeros negros	26
3.1. Extracción energética y fórmula de masa	27
3.2. Leyes de la mecánica de agujeros negros	29
3.2.1. La Primera ley	29
3.2.2. La segunda ley	30
3.2.3. La tercera ley	31
4. Análisis de la termodinámica en agujeros negros	33
4.1. La entropía del agujero negro	35
4.2. La radiación de Hawking	37
4.3. Relaciones termodinámicas	41
5. Conclusiones	44
A. Solución de Reissner-Nordström	46

B. Solución de Kerr-(Newman)	50
B.1. Tétradas Nulas	50
B.2. Construcción de la tetrada	51
B.3. Algoritmo de Newman-Janis	53
B.4. Coordenadas de Boyer-Lindquist	55

Introducción

La investigación teórica acerca de los agujeros negros y su relación con la termodinámica han logrado plantear toda una rama de las ciencias que no podría ser desapercibida, no solo por su impresionante formulación, sino por sus impactantes resultados teóricos tales como: la entropía de los agujeros negros, la radiación de Hawking y la inquietante relación con la teoría de la información, entre otros. Al ser la termodinámica una visión física del universo, las connotaciones ya conocidas acerca de esta y de sus leyes fundamentales pueden ser entendidas de manera profunda y alternativa con un ejemplo físicamente extremo: **los agujeros negros**; regiones particulares del espacio-tiempo en donde la gravedad es tan intensa, que siquiera la luz puede escapar de allí. Aquellos agujeros astrofísicos tienen como origen particular el colapso de una estrella en sí misma, en la generalidad de los casos.

Agujeros negros: Origen e historia

En 1915, después de un prolongado y árduo trabajo de aproximadamente diez años, A. Einstein finalmente publicó un artículo definitivo sobre la relatividad general en el cual introdujo, de manera consistente, las ecuaciones de campo que llegarían posteriormente a redefinir la gravitación¹. No mucho tiempo después de este suceso, en 1916, el alemán Karl Schwarzschild -quien servía en la primera guerra mundial para el ejército de Alemania- halló la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein. Schwarzschild murió poco después de desarrollar su solución, no sin antes dejar para la historia su famoso artículo: “*Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein’schen Theorie*”². En aquel artículo, se describe la geometría del espacio-tiempo circundante a una masa, la cual se considera puntual.

Otras numerosas soluciones a las ecuaciones de campo surgieron durante las primeras décadas después del desarrollo de la teoría general de la relatividad; claro está, que tan solo cuatro soluciones exactas se conocen a partir de la primera (Schwarzschild). El orden de dos de estas soluciones aparece cronológicamente mucho después de 1916, aunque el desarrollo de las dos primeras aparece casi simultáneamente en el mismo año. La segunda de estas soluciones se conoce como la solución de Reissner-Nordström, y es en esta en donde se introduce la carga eléctrica a las ecuaciones de campo. Sería de importancia histórica el

¹Einstein, Albert, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften: 844 - 847 (1915)

²K. Schwarzschild, “*Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*”, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1 (1916)

mencionar aquí, que en realidad el trabajo del Alemán Hans Reissner³ fue desarrollado tan solo dos meses después del de Schwarzschild, y además, incluía la generalidad de los aspectos de una solución para cargas puntuales; sin embargo, fue hasta 1918 cuando el Finlandés Gunnar Nordström logró generalizar el trabajo para los cuerpos cargados eléctricamente^{4 5}.

El gran “hiato” que se predijo en esta introducción se estableció entre el tiempo anterior a la década de los sesentas (No se podría decir, por supuesto, que en todo este tiempo la actividad relacionada con la relatividad general fue cesante; se podrían mencionar numerosos trabajos, pero el objetivo de lo propuesto en esta contextualización histórica desenvocará, para propósitos prácticos, en el establecimiento de la teoría de los agujeros negros). Durante estos años y especialmente en 1963, renació el interés en las soluciones locales a las ecuaciones de campo de Einstein, con Roy Kerr; un físico Neozelandés, quien logró establecer por primera vez la solución exacta de la geometría producida en el vacío por una masa rotante⁶. Muy poco tiempo después de este apremiante desarrollo, en 1965 Ted Newman y A. Janis refinan lo encontrado por Kerr e introducen unos muy sofisticados argumentos, no solo físicos, sino también matemáticos para concluir que la solución del cuerpo rotante era, en realidad y según ellos, aquella de un anillo de masa rotante; finalmente, para ratificar sus suposiciones, Newman y Janis desarrollan mediante un ingenioso algoritmo una nueva solución a las ecuaciones de campo: La solución para un cuerpo (anillo) rotante y cargado eléctricamente^{7 8}.

Todas las soluciones anteriormente mencionadas fueron estudiadas minuciosamente en su tiempo como los casos generales de cuerpos que contribuyen a la alteración del espacio-tiempo localmente; pero hasta estos momentos no se ha mencionado nada acerca del concepto de agujeros negros, ¿por qué? No sería del todo acertado anticiparse a ese concepto ya que, durante la primera mitad del siglo XX persistía un fuerte debate acerca de la posibilidad de que una estrella se viera colapsada por su propia gravedad, en un destino inevitable que llevara a su completa inobservabilidad, de hecho, fue durante una conferencia en 1967 que el científico norteamericano John Archibald Wheeler acuñó el término de **agujero negro**; sin embargo, durante una entrevista, John Wheeler aseguró que aquel término fue sugerido a él por alguien de la audiencia, y eventualmente terminaría por usar aquella frase para

³Reissner, H., *Über der Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik, 50 - (106); Marzo 20 de 1916.

⁴Nordström, G., *Een en ander over de energie van het zwaarte krachsveld Volgens de Theorie van Einstein*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis- en Natuurkundige Afdeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen 26 (1917 - 18): 1201 - 1208

⁵Se puede mencionar que la manera estándar en la que se presenta esta solución ha sido principalmente difundida por el trabajo realizado independientemente por el inglés G. Jeffrey en 1920. En el artículo publicado por él, se menciona una prueba alternativa a la de Nordström referida a el campo gravitacional de un electrón; Jeffrey toma salvedad para su trabajo mencionando que no fue notificado hasta la publicación de su artículo del trabajo de Nordström. Ref.: Jeffrey, G.B., *The Field of an Electron on Einstein's Theory of Gravitation*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character Vol. 99, No. 697 (May 2, 1921), pp. 123-134

⁶Kerr, R., *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, *Physical Review Letters*; vol. 11, No. 5, 1 Sep. 1963

⁷Newman, E. & Janis, A., *Note on the Kerr Spinning-Particle Metric*, *Journal of Mathematical Physics*; vol. 6, No. 6, Jun. 1965

⁸Newman, E. & Janis, A., *Metric of a Rotating, Charged Mass*, *Journal of Mathematical Physics*; vol. 6, No. 6, Jun. 1965

describir a lo que en aquel entonces se conocía como *estrellas colapsadas completamente por la gravitación*⁹. Sin el ánimo de ignorar el asunto, pero con la determinación de introducir propiamente al concepto de agujero negro, será más apropiado iniciar con el colapso estelar con el fin de entrar de lleno al objeto de este estudio.

El colapso estelar

La historia de las ideas acerca de cuerpos completamente colapsados por su gravedad se remonta a casi doscientos años de antigüedad. Curiosamente, no sería inicialmente el mismo Pierre Simone de Laplace quien hablaría de esto -como lo expuso en su libro de 1796: *Exposition du système du Monde*¹⁰ -, sino un geólogo y amigo del mismo Henry Cavendish de nombre John Michell de la universidad de Cambridge. Michel expresó en 1783 a su amigo, aquella inquietud acerca de la extrema gravedad suponiendo que la misma luz se viera afectada por esta¹¹ :

If the semi-diameter of a sphere of the same density as the Sun were to exceed that of the Sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it would have acquired at its surface greater velocity than that of light, and consequently supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it by its own proper gravity.

Si el semi-diámetro de una esfera de la misma densidad que el Sol excediera la de aquel en una proporción de 500 a 1, un cuerpo cayendo de una altura infinita hacia éste habría adquirido en su superficie una mayor velocidad que la de la luz, y en consecuencia, suponiendo que la luz fuera atraída por la misma fuerza en proporción a su vis inertiae (inercia), junto con otros cuerpos, toda la luz emitida por tal cuerpo regresaría hacia éste por su propia gravedad.

Eventualmente, la existencia de tales *estrellas oscuras* fue abandonada debido al auge de la teoría ondulatoria de la luz, en la cual esta no es más que una onda sin masa (la cual, obviamente, no podría interactuar con la gravedad de un cuerpo desde la teoría Newtoniana). Por supuesto, el devenir en el siglo XX de la teoría de la relatividad general revivió el interés por el estudio de estos enigmáticos cuerpos, debido a cierta característica que parecía inevitable desde la solución de Schwarzschild: la existencia de singularidades matemáticas

⁹Tomado de un artículo para el diario *The New York Times* titulado: *John A. Wheeler, Physicist Who Coined the Term Black Hole, Is Dead at 96*; por Dennis Overbye, del 14 de abril de 2008.

¹⁰De hecho, los cálculos realizados por el marqués de Laplace muestran que la intención de él era la de demostrar que ciertos cuerpos lo suficientemente masivos podrían “re-atraer” gravitatoriamente los corpúsculos de luz emitidos después de cierta altura. Laplace calculó por medio de la mecánica de Newton la velocidad de escape de los corpúsculos de luz, sin embargo, jamás se mencionó concepto alguno sobre la imposibilidad de observar o no la luz irradiada

¹¹Hawking, S., Israel, W. *Three Hundred Years of Gravitation*, 1 ed., Cambridge University Press; 1987

en la métrica; puesto en otras palabras, la métrica de Schwarzschild mostraba un comportamiento anómalo y discontinuo para valores de la coordenada radial cercanos a $r = 0$ y $r = 2m$, con m como la masa del cuerpo en cuestión. Aquellas discontinuidades fueron las que motivaron en 1924 al célebre astrofísico inglés, Sir Arthur Eddington, a llevar un estudio más a fondo, con lo cual logró manipular la solución para demostrar que el radio $r = 2m$ (o también llamado *radio de Schwarzschild*) era tan solo una singularidad matemática la cual podría ser removida; no obstante, todo parecía señalar que existía una singularidad intrínseca la cual inquietaba a los contemporáneos en este estudio, puesto que suponía algo físicamente improbable para la época: un punto singular de materia infinitamente condensada.

Para mediados de la década de los veinte, el estudio acerca de las propiedades geométricas de la solución de Schwarzschild había sido profundamente estudiado, al igual que la naturaleza de la constitución de las estrellas según la relatividad general. Para 1930, Subramanyan Chandrasekhar, Un joven estudiante de física de la universidad de Cambridge de diecinueve años de edad, de ascendencia India, propuso de una manera matemáticamente avanzada lo que podría llegar a ser el destino final de una estrella tipo *enana blanca*. Por medio de la relatividad general y la mecánica cuántica, Chandrasekhar calculó el límite de estabilidad de una estrella de materia electrónica degenerada, y lo ubicó en 0.92 masas solares¹² (cálculos más refinados sientan este límite en 1.44 masas solares^{13 14}). Según Chandra, después de este límite la materia colapsaría debido a su inestabilidad. Irónicamente, la única persona que defendió a *capa y espada* la teoría de gravitación de Einstein ante la *Royal Astronomical Society* de Londres, no sería esta vez quien apoyara la revolucionaria idea del joven Chandra. Eddington rechazó desde el principio la teoría del colapso puesto que esto implicaría algo sin sentido físico, y además, daría por hecha la existencia de esos extraños cuerpos oscuros (agujeros negros) en el universo.

A pesar de que el asunto de los agujeros negros tendría que esperar algunas décadas más para ser considerado seriamente después del descubrimiento de Chandrasekhar, el estudio del colapso estelar ya estaba generando una gran inquietud en algunos contemporáneos. En 1939, Robert Oppenheimer -quien fuese el director del controversial proyecto Manhattan para el desarrollo de la bomba atómica-, en colaboración con George Volkoff, y basándose en anteriores trabajos de Richard Tolman¹⁵, trabajó de manera similar a Chandrasekhar un nuevo caso de colapso estelar. Según lo que se presumía acerca de la evolución termonuclear de las estrellas, cuando el material fisible que sirve de combustible para estas se agota, bien se podría tener el caso de una enana blanca o, si la masa excedía el límite de Chandrasekhar, se estaría frente otra situación en la cual la estrella quedaría conformada principalmente de neutrones en un gas de Fermi degenerado; tal comol en el caso estudiado por Chandra. Oppenheimer *et al.* modelaron el material estelar para tal gas de neutrones y concluyeron que

¹²Chandrasekhar, S., *Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass*, Nature; Feb. 1931

¹³Jeffries, R.D., *On the Initial-final Maximum Mass of White Dwarf Progenitors*; Royal notes of the Royal Astronomic Society - 288 (1997)

¹⁴Mazzali, P., Röpke, F., Benetti, S., Hillebrandt, W., *A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae*; Science - 315 (2007)

¹⁵Tolman, Richard., *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*; Physical Review 55 (1939)

la estabilidad de dicha estrella estaría justo en el límite de 0.7 masas solares¹⁶; nuevamente, algunos cálculos realizados recientemente ubican más precisamente este límite entre 1.5 y 3 masas solares¹⁷ ¹⁸. Este gran descubrimiento puso otra vez sobre la mesa la vieja cuestión acerca de si el destino final de una estrella masiva llevaría al colapso en un punto singular, ya que más allá del límite de TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) nada prevendría, en teoría, este suceso. Para 1969, estas ahora llamadas *estrellas de neutrones* serían confirmadas experimentalmente y, además, identificadas con las fuentes pulsantes conocidas como *púlsares*.¹⁹

Los trabajos realizados en el campo de la astrofísica dieron la pauta para tomar la noción de "las estrellas congeladas" por el colapso, como una posibilidad plausible y tal vez, real. Oppenheimer llamó a los precursores de los agujeros negros como estrellas congeladas en una publicación de septiembre de 1939, -tan solo siete meses después de sentar el límite para las estrellas de neutrones- la razón para esto, es que una vez alcanzado un punto en el que el equilibrio de una estrella compactante se vuelve inestable, la luz proveniente de la estrella se atenúa cada vez más para los observadores externos. Según Oppenheimer y compañía, en cierto momento del colapso de la estrella la luz tardaría tanto tiempo en llegar a un observador externo, que parecería congelada en el tiempo²⁰.

El destino final: Singularidades

Durante los años anteriores a la década de los sesentas el colapso estelar fue estudiado exhaustivamente (y aún sigue siendo una fuerte área de trabajo) de manera conjunta con el análisis de la solución de Schwarzschild. Por un lado, se analizaban las soluciones *internas* que pudieran arrojar las ecuaciones de Einstein cuando se usaban con una fuente de materia, tal como el fluido perfecto que se usa para modelar una estrella; por el otro lado, se estudiaban profundamente las características geométricas de la solución de Schwarzschild y la relación que tendría esta solución *exterior* con el colapso estelar²¹. Después de múltiples interpretaciones de las singularidades en la métrica, David Finkelstein concretó la más favorable descripción, para su época, de este problema: logró extender analíticamente la solución de Schwarzschild para definir el radio $r = 2m$ como una superficie o membrana unidireccional,

¹⁶R. Oppenheimer, G. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*; Physical Review, July 1939

¹⁷Timmes, F., Woosley, S., Weaver, T., *The Neutron Star and Black Hole Initial Mass Function*; The Astrophysical Journal - 457 (1996)

¹⁸I., Bombaci, *The Maximum Mass of a Neutron Star*; Astronomy and Astrophysics - 305 (1996)

¹⁹Realmente, el orden de los sucesos se dió de manera inversa. Jocelyn Bell, una astrofísica irlandesa, descubrió el primer púlsar en la nebulosa del *cangrejo*, cuyo nombre se deriva de la composición en inglés *pulsating star*; y posteriormente, otros autores trabajaron en identificar estas fuentes pulsantes, como estrellas de neutrones. Según los cálculos realizados en épocas posteriores, y algunas otras observaciones acerca de la frecuencia de rotación, los púlsares serían estrellas de neutrones y no enanas blancas. Véase:

Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1ed. John Wiley & Sons Inc., 1972

²⁰R. Oppenheimer, H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*; Physical Review, Sep. 1939

²¹Para 1923, el teorema de Birkhoff (establecido por el físico David Birkhoff y también conocido como *Teorema ergódico*) ya explicaba la intrínseca relación entre una solución interna de un modelo de material esféricamente simétrico y estático, con la métrica de Schwarzschild. La conexión definitiva se daría por Oppenheimer y Snyder, como fue antes mencionado.

por donde toda influencia puede entrar, pero no salir²². Aquella descripción sería el punto de partida para más sofisticadas interpretaciones, y para la década de los sesentas, se requería de una demostración definitiva de que la singularidad $r = 0$ era físicamente intrínseca; esto sería llevado a cabo por Roger Penrose a mediados de la década²³, y puesto de manifiesto en 1970, en un trabajo sobre singularidades realizado en conjunto con Stephen Hawking²⁴.

Los trabajos sobre singularidades de finales de la década de los sesentas pondrían la última pieza en la construcción del concepto de *agujero negro* (ésto junto con el uso del término por J. Wheeler). Según estos teoremas, una vez que una estrella colapsa, no importa el material del que esté hecha ni la forma que haya tenido, esta terminará por comprimirse en una singularidad después de formarse un horizonte de eventos, o en términos más técnicos, una *superficie atrapada*²³; sin lugar a dudas, esto implica que las singularidades ya se imponían como una característica física del universo de la cual se podría presuponer su inevitabilidad en el colapso estelar y en el mismo *Big-Bang*.

²²D., Finkelstein, *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle*; Physical Review, Vol. 110 No. 4; May. 15, 1958

²³S., Hawking & G., Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*; Cambridge University Press, 11a. edición, 1994

²⁴S.,. Hawking & R., Penrose. *The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology*; Proc. R. Soc. Lond. A (1970) - 314

Capítulo 1

Relatividad General: La métrica de Schwarzschild

En las siguientes secciones se introducirán las soluciones exactas que se conocen a las ecuaciones de campo; con esto se inicia el estudio que da lugar a la física de agujeros negros y que constituye la base del estudio de los posibles escenarios que localmente reproducen la geometría alrededor de aquellos cuerpos. Por asuntos de simplicidad y brevedad, será suficiente presentar por completo solo la deducción de la primera solución, con el fin de iniciar con una apropiada matematización de los conceptos básicos de la relatividad general.

La primera solución a las ecuaciones de campo de A. Einstein, fue desarrollada por Karl Schwarzschild en 1916[1]. Aquella solución representa el “campo gravitacional” circundante a una masa que se considera puntual, y está situada en un origen de coordenadas. Según la presunción original para esta solución, Schwarzschild toma en cuenta algunas indicaciones de las cuales se destacan las siguientes:

1. El cuerpo en cuestión permanece sin cambiar en el tiempo (estático) y por lo tanto también lo hacen las coordenadas de su elemento de línea.
2. La métrica es espacialmente simétrica, y por lo tanto es invariante ante rotaciones (axisimétrica).
3. La solución se reduce a la de un espacio-tiempo de Minkowsky en el infinito, es decir cuando $r \rightarrow \infty$ (asintóticamente plana).

Teniendo en cuenta las indicaciones, se puede proceder en una dirección particular (esto, con el ánimo de evitar una derivación larga y dar una más simple deducción) que tenga en cuenta solo los detalles sencillos que den a la solución de las ecuaciones de campo. En el documento original que Schwarzschild presentó a Einstein, se tienen en cuenta poderosos y sofisticados argumentos para la elección del elemento de línea apropiado para representar la geometría del cuerpo a estudiar; sin embargo, se procederá a continuación con el establecimiento del siguiente elemento de línea en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = A(r, t)dt^2 - B(r, t)dr^2 - C(r, t)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

La anterior se conoce como la manera “estándar”¹ del elemento de línea. En una inspección preliminar, los coeficientes A, B y C son funciones que dependen de la coordenada radial y del tiempo; no obstante, teniendo en cuenta la presunción (1), estos coeficientes no deberían depender del tiempo. Además de lo anterior, usando (2) se supondría que la métrica no es modificada sustancialmente en su simetría esférica y por lo tanto $C = 1$. Finalmente y teniendo en cuenta la última indicación $A = B = 1$ cuando $r \rightarrow \infty$. El elemento de línea ya tendría para nosotros la siguiente forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

Ahora, se sigue de la condición número (3) que los coeficientes deben tener una particular forma para recuperar la métrica de Minkowsky en el infinito. Aparentemente, la única función que cumpliría con la propiedad necesaria en los límites mencionados, es la función exponencial.

A continuación se introducen las siguientes sustituciones:

$$A = e^\nu \qquad B = e^\lambda \quad (1.3)$$

En donde claramente, $\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$ y se debería cumplir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = 0$$

Con lo anterior ya es posible construir un elemento de línea que contenga las propiedades discutidas:[2]

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.4)$$

1.1. Solución

A partir de este momento, se tendrán en cuenta de manera breve las principales herramientas que se necesitan con el fin de hallar una solución a las ecuaciones de campo (sin constante cosmológica)[3] con las propiedades discutidas anteriormente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

El tensor $R_{\mu\nu}$ se conoce como *tensor de Ricci*, el cual constituye la única contracción del tensor de curvatura de Riemman y muestra el grado de curvatura del espacio-tiempo en las vecindades de una masa puntual, fuente de campo gravitacional[4]. La siguiente cantidad en la izquierda es el escalar de curvatura R y en la parte derecha de la expresión se encuentra el tensor *estrés-energía* que simboliza la cantidad de materia-energía presente. Sin embargo, el problema de hallar el “campo gravitacional” alrededor de una masa, corresponde al problema

¹En épocas recientes se ha dado un debate acerca del origen de la forma de la métrica de Schwarzschild, tal y como se presenta en los libros de texto; se denomina “estándar” a la forma presentada de acuerdo con los trabajos de H. Weyl, Hilbert y J. Droste, sin embargo, la solución original de K. Schwarzschild difiere de la que se presenta ocasionalmente y en este trabajo. Véase: Corda, Christian *A clarification on the debate on the original Schwarzschild solution*, *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 8 No. 25 (2011).

de hallar una solución a las ecuaciones de campo **en el vacío** (es decir, $T_{\mu\nu} = 0$). Esto implica que la expresión anterior se transforma en una forma más simplificada (invirtiendo la ecuación 1.5):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \\ R_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

El tensor de Ricci se expresa en componentes de la siguiente manera[5]:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} \quad (1.7)$$

y los símbolos de Christoffel a partir del tensor métrico[5],

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \quad (1.8)$$

con las siguientes componentes métricas, según el elemento de línea de la ecuación (1.4)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Puesto que la forma en la que se presenta la matriz de las componentes del tensor métrico es diagonal, es fácil determinar las componentes covariantes por medio de la inversa $g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1}$. Debido a la misma propiedad de la métrica, es posible hallar las componentes de los símbolos de Christoffel a partir de las siguientes fórmulas[6] (no se aplica sumatoria):

$$\Gamma_{bc}^a = 0 \quad (1.10)$$

$$\Gamma_{ab}^a = \Gamma_{ba}^a = \frac{1}{2}g^{aa} \frac{\partial g_{aa}}{\partial x^b} \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{bb}^a = -\frac{1}{2}g^{aa} \frac{\partial g_{bb}}{\partial x^a} \quad (1.12)$$

$$\Gamma_{aa}^a = \frac{1}{2}g^{aa} \frac{\partial g_{aa}}{\partial x^a} \quad (1.13)$$

Así, las componentes no nulas resultan ser

$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}$	$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\lambda'$
$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}\nu'$	$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta$
$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2\theta e^{-\lambda}$
$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}$	$\Gamma_{23}^3 = \cot\theta$

en donde la prima (') denota derivada parcial con respecto a la coordenada radial y se usa adicionalmente la propiedad de simetría de los símbolos con respecto al par de subíndices $\Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$.

Con los símbolos de Christoffel ya en las manos, se prosigue al cálculo de las componentes no nulas del tensor de Ricci. Esta actividad puede ser prolongada y dispendiosa, por lo cual se recomienda revisar la literatura habitual (ver Bibliografía) en caso de querer profundizar en estas demostraciones.

Al reemplazar los símbolos hallados en la expresión (1.7) para el tensor de Ricci, se obtiene lo siguiente[2].

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[-\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\nu' \right] \quad (1.14)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\lambda' \quad (1.15)$$

$$R_{22} = \left(\frac{1}{2}r\nu' - \frac{1}{2}r\lambda' + 1 \right) e^{-\lambda} - 1 \quad (1.16)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (1.17)$$

Se requiere tener en cuenta la geometría que experimentaría una masa de prueba puntual en las cercanías del cuerpo fuente de campo gravitacional, por lo tanto se tiene en cuenta la expresión (1.6) para una solución en el vacío. La condición a seguir sugiere que cada una de las componentes halladas sea igual a cero independientemente. Si se tiene en cuenta el desvanecimiento de la primera componente R_{00} (1.14) se encuentra que solamente la expresión entre corchetes puede ser igual a cero. Para finalizar, se suma la anterior expresión con la componente R_{11} (1.15) y se encuentra el importante resultado:

$$-\frac{1}{r}(\nu' + \lambda') = 0 \quad (1.18)$$

el cual solo puede ser cierto si

$$(\nu + \lambda)' = 0 \quad (1.19)$$

Si se integra directamente la ecuación anterior, se obtiene al lado derecho una constante de integración arbitraria; sin embargo, una de las primeras conjeturas acerca de lo que se esperaría de la solución sugería que las dos funciones se desvanecieran igualmente en el límite cuando se tiende al infinito. Se tiene, entonces, una solución específica (particular) la cual puede tomar como constante un simple cero sin pérdida alguna de generalidad. Matemáticamente:

$$\begin{aligned} \nu + \lambda &= 0 \\ \nu &= -\lambda \end{aligned} \quad (1.20)$$

A Continuación, se propone realizar la anulación de la componente R_{22} usando lo encontrado

en (1.20) para obtener una última expresión

$$(rv' + 1)e^\nu = 1 \quad (1.21)$$

Una revisión cuidadosa[2], muestra que lo anterior se puede re-organizar en una ecuación diferencial más simple de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dr}(re^\nu) = 1 \quad (1.22)$$

Lo cual puede ser integrado fácilmente para llegar a

$$re^\nu = r + cte. \quad (1.23)$$

La constante de integración se toma por conveniencia para ser $-2m$; esto se debe a que en una aproximación de “campo débil”² se tiende a recuperar el potencial Newtoniano [2][3] $\phi = -\frac{MG}{r}$. En este caso, se toman siempre unidades geometrizadas con $c = G = 1^3$ y la masa geometrizada de la fuente se puede reestablecer como $m \rightarrow GM/c^2$.

A partir de las indicaciones, las funciones propuestas son halladas.

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (1.24)$$

Se finaliza la demostración presentado el elemento de línea completo:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.25)$$

esta es la famosa solución de Schwarzschild en su forma estándar con la cual ya se puede iniciar formalmente el estudio matemático de los agujeros negros, como se verá en posteriores capítulos.

1.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

En la presente sección se enseñará un sistema de coordenadas que proporcione un manejo mucho más adecuado a la de la solución de Schwarzschild, tal y como se verá más adelante. Las propiedades geométricas relevantes y la base a partir de la cual se emprende a la búsqueda de la solución de Kerr-(Newman), son de mayor entendimiento a partir las coordenadas de Eddington-Finkelstein[12][13].

²Esta aproximación consiste en asumir una geometría casi plana con una ligera perturbación en orden inferior de la manera $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, en donde $\eta_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica de Minkowsky. A través de la aproximación se puede concluir el valor de la componente $g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2$.

³Las unidades geometrizadas son un conjunto preferencial de unidades en las que la constante gravitacional G , la velocidad de la luz c , la constante de Coulomb y la constante de Biot-Savart toman como valor la unidad. Este sistema hace que las constantes usadas en las ecuaciones de campo adquieran unidades de longitud. Por supuesto, siempre es posible reestablecer al sistema común SI obedeciendo los adecuados factores de conversión. Para mayores detalles véase: *Wald, Robert. “General Relativity”, Apéndice F.*

Antes de iniciar con la transformación de coordenadas, se deben tener en cuenta las trayectorias de la luz circundante según la métrica de Schwarzschild; a estas trayectorias se les conoce como “*geodésicas*” y se hallan teniendo en cuenta los intervalos relativistas que recorre la luz, los cuales deben obedecer la siguiente condición:

$$ds^2 = 0 \quad (1.26)$$

Si ahora utilizamos el elemento de línea de Schwarzschild, y dividimos toda la expresión (1.26) entre un parámetro el cual es escogido como el tiempo propio de una partícula de prueba e igualamos a cero para un intervalo luminoso; es decir $(\frac{ds}{d\tau})^2 = 0$.

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 0 \quad (1.27)$$

en donde el punto ($\dot{}$) denota derivada con respecto al parámetro afín τ . Es importante asumir ahora, que los rayos de luz se muevan en dirección radial únicamente lo cual implicaría naturalmente que $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. De esa manera se puede ahora tener una expresión resumida en una sola ecuación diferencial:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0 \quad (1.28)$$

de donde se obtiene lo siguiente

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (1.29)$$

o de manera equivalente,

$$\frac{dt}{dr} = \pm\left(\frac{r}{r - 2m}\right) \quad (1.30)$$

la expresión anterior nos muestra cómo se vería un diagrama espacio-tiempo de aquellos rayos de luz en las vecindades esta geometría. Primero podemos notar que existen dos tipos de soluciones a la ecuación diferencial anterior: por una lado se tienen una serie de geodésicas salientes cuando el signo de la ecuación es positivo y por el otro lado, geodésicas entrantes con el signo negativo. Además de lo anterior, aparentemente se recupera la geometría de Minkowsky en tanto se toma una distancia muy lejana el infinito y esto se evidencia por el ángulo de las geodésicas:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{dr} = 1$$

en donde claramente se tiene una familia de líneas rectas que simbolizan las trayectorias de la luz al no ser afectadas por la curvatura del espacio-tiempo. Analizando el punto central de la métrica en $r = 0$, se puede evidenciar que en este régimen las trayectorias de la luz convergen para cualquier tiempo sean entrantes o salientes, como si no pudieran salir; finalmente, aparece un comportamiento anómalo que sugiere un valor asintotal cuando $r = 2m$. Se podría pensar que no hay retorno tampoco en aquella región, sin embargo, es el propósito de la transformación de coordenadas el corregir y esclarecer aquella región conocida como

radio de Schwarzschild. Más adelante se analizarán de manera más detallada las regiones especiales de la métrica, sus singularidades y horizontes.

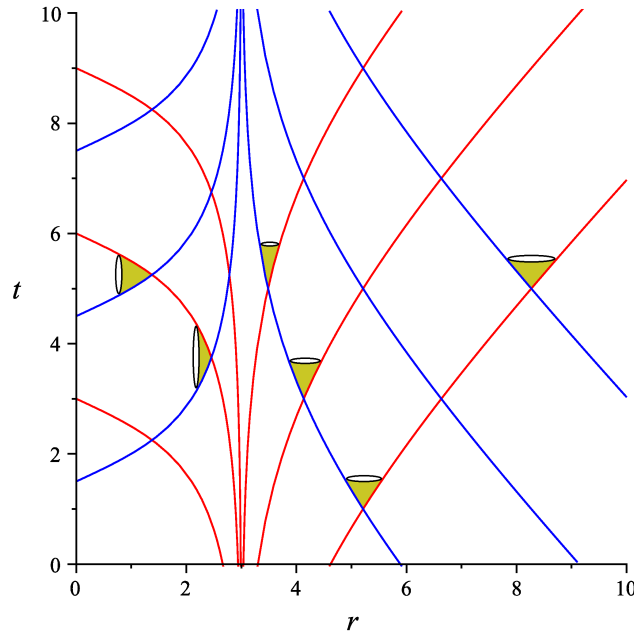


Figura 1.1: Diagrama de trayectorias de la luz en coordenadas de Schwarzschild. Los conos de luz en amarillo se inclinan indicando la entrada y salida de rayos con un carácter asintótico en las proximidades del horizonte de eventos $r = 2m$. En el punto $r = 0$ los conos de luz se inclinan completamente mostrando la caída irremediable de los rayos de luz hacia la singularidad.

En la gráfica se pueden observar las trayectorias de la luz en un diagrama simplificado para geodésicas radiales; al solucionar la ecuación (1.30) es posible obtener un conjunto de funciones $t(r)$ tanto como para geodésicas *entrantes*, como para geodésicas *salientes*.

$$\int dt = \int \left(\frac{r}{r-2m} \right) dr \quad (1.31)$$

lo cual se soluciona de manera sencilla para ofrecer los siguientes dos casos [2]:

$$t = r + 2m \ln |r - 2m| + cte. \quad (1.32)$$

$$t = -(r + 2m \ln |r - 2m| + cte.) \quad (1.33)$$

es claro que ambas funciones no están definidas para $r = 0$ ni para $r = 2m$, como se verá más adelante, solo la segunda condición puede ser corregida para dar lugar a trayectorias más completas.

La transformación de coordenadas de Eddington-Finkelstein inicia asumiendo un nuevo sistema en el cual las trayectorias geodésicas aparezcan como líneas rectas, es decir que se deben asumir dos nuevas coordenadas correspondientes a las trayectorias entrantes y

salientes, respectivamente [4]:

$$u = \bar{t} + r \qquad v = t^* - r \qquad (1.34)$$

En donde se han utilizado dos nuevas coordenadas temporales, siendo estas,

$$\bar{t} = t + 2m \ln |r - 2m| \qquad t^* = t - 2m \ln |r - 2m| \qquad (1.35)$$

las cuales transforman el sistema de coordenadas a uno en el cual se tiene un nuevo *parámetro avanzado* (u) y otro *parámetro retardado* (v) [2][4]. Para el primer caso, reemplazando en la métrica de Schwarzschild, se tiene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 - 2dudr - r^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \qquad (1.36)$$

Las cuales son nuestras nuevas ***coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein***, y corresponden a una extensión analítica de la solución de Schwarzschild que serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

Claramente, la métrica en las nuevas coordenadas aparece continuamente analítica en la región $r = 2m$, lo cual permite realizar un mejor diagrama de las trayectorias geodésicas completas. Es de esta manera que originalmente se dedujo que la aparente singularidad en el radio de Schwarzschild no era más que una discontinuidad corregible y removible de la solución; lo opuesto ocurre para el punto $r = 0$, pero esto será tratado en la siguiente sección.

Con ayuda del mismo tratamiento realizado en (1.29) y suprimiendo la parte angular se hallan, para este caso, las trayectorias (radiales) completas de la luz; teniendo en cuenta las dos posibles soluciones para $ds^2 = 0$:

$$\frac{du}{dr} = 0 \qquad (1.37)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2m}{r}} \qquad (1.38)$$

Ahora es posible visualizar en la figura 1.1 que, a pesar de que las trayectorias representadas por la ecuación (1.38) son similares a las de (1.31), ya es posible continuar analíticamente un conjunto de soluciones pertenecientes a la primera ecuación (1.37); estas rectas representan las partículas o rayos de luz entrantes en la región $r = 2m$.

1.3. Singularidades y horizontes

La esencia del trabajo acerca de los agujeros negros reposa físicamente en el establecimiento de los conceptos de “*singularidad*” y “*horizonte*”. En la anterior sección fueron analizadas de manera breve las propiedades geométricas de la solución de Schwarzschild en cuanto a las trayectorias de la luz (geodésicas); el caso puede extenderse, en efecto, para

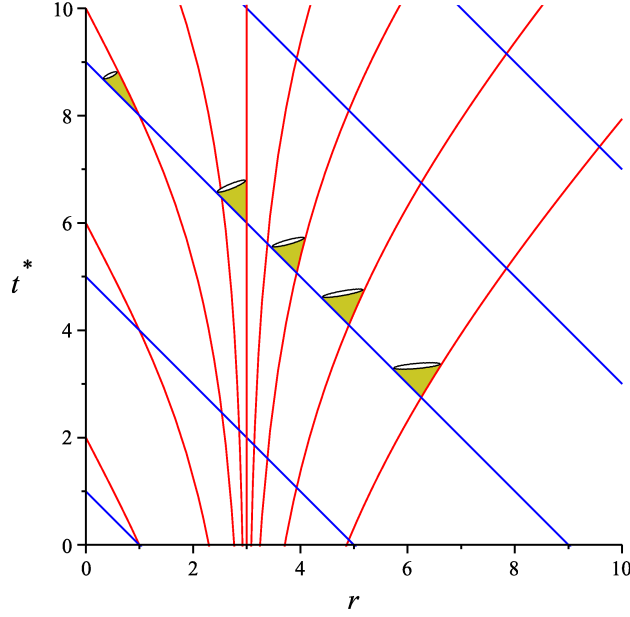


Figura 1.2: Diagrama de Eddington-Finkelstein para la solución de Schwarzschild. Los rayos de luz tienen permitido pasar el horizonte de eventos, sin embargo, la singularidad persiste en el origen de coordenadas.

partículas materiales con consecuencias similares. Las principales conclusiones que se pueden extraer de la observación de los diagramas de EF (Eddington-Finkelstein) señalan la existencia de una región desde la cual el paso de cuerpos cualesquiera es posible, pero su retorno o salida no lo es; hablamos entonces de la región señalada para $r = 2m$ la cual es conocida como **Radio de Schwarzschild** y expresa lo que se conoce como *horizonte de eventos* [11], denominado así debido al carácter de membrana unidireccional que presenta. [13][14][15]

¿Qué es entonces el horizonte de eventos de un agujero negro? con un análisis sencillo, observaremos la naturaleza geométrica de esta región, primero hallando el volumen [4] del horizonte en el agujero negro de Schwarzschild:

$$\begin{aligned}
 V_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sqrt{g_{tt}g_{\phi\phi}g_{\theta\theta}})_{r=2m} dt d\phi d\theta & (1.39) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) r^4 \sin^2 \theta} \right)_{r=2m} dt d\phi d\theta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sqrt{r^4 - 2mr^3})_{r=2m} \sin \theta dt d\phi d\theta \\
 &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{r^4 - 2mr^3})_{r=2m} dt = 0
 \end{aligned}$$

Es claro que no se hace necesario evaluar la última integral debido a que el integrando se anula cuando se evalúa en el horizonte, esto significa que la región en cuestión no corresponde a un volumen (tridimensional), sino a una superficie para todo tiempo percibido por

un observador externo.

Teniendo en cuenta la propiedad de simetría esférica de la solución de Schwarzschild, es posible definir el área de la superficie sin necesidad de un cálculo complicado; el área de una “esfera” [4][10] correspondería de mejor manera a la región exterior del agujero negro:

$$A_s = 4\pi r_s^2 = 16\pi m^2 \quad (1.40)$$

con $r_s = 2m$ como el radio de Schwarzschild.

Con lo anterior se puede concluir que la región conocida como *horizonte de eventos* se puede considerar como una *hipersuperficie* o membrana unidireccional; es decir, aquella por la cual toda influencia puede entrar, más no salir. Lo anterior sería confirmado por David Finkelstein en 1958 [13] al realizar la extensión analítica de la solución de Schwarzschild.

Por último, queda revisar -como se mencionó con anterioridad- el punto indefinido $r = 0$ de la métrica; la solución deja de ser regular y continua en aquel punto. Al igual que en las secciones anteriores, se podría sugerir un cambio de coordenadas que corrija aquella incómoda discontinuidad; no obstante, tenemos la oportunidad de ahorrar tiempo en cálculos innecesarios si acudiésemos a una simple manipulación matemática. Existen múltiples (como innumerables) transformaciones de coordenadas para la solución de Schwarzschild, pero tendríamos que recordar una propiedad indiscutible en la relatividad general de Einstein: las ecuaciones físicas deben tener la misma forma independientemente del sistema de coordenadas que se elija. Para lograr visualizar aquella afirmación mas claramente, se debe recordar que en el tratamiento de los tensores existen siempre cantidades que permanecen sin cambio alguno, aún con transformaciones de coordenadas; estas cantidades se denominan *invariantes*. Entonces, ¿qué clase de invariante podríamos escoger en este caso? la elección se hace más simple de lo que parece. La solución de Schwarzschild está definida por el tensor de Ricci, y con más generalidad, por el tensor de Riemann; si la métrica es solución de las ecuaciones de campo, entonces sin importar el cambio de coordenadas, existe un invariante asociado al tensor de Riemann y aquel es más conocido como el *invariante escalar de Kretschmann* [2][4]:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48m^2}{r^6} \quad (1.41)$$

Este invariante cuadrático esclarece la situación por completo; no importa las coordenadas que se escojan para la métrica de Schwarzschild, esta siempre va a presentar una discontinuidad en $r = 0$ la cual se conoce como *singularidad*: un punto de infinita densidad el cual representa el destino final de todo lo que entra en el agujero negro.

No sería de menor importancia añadir que los teoremas de singularidad sugieren que el colapso total de una estrella, solo es posible después de formarse una *superficie atrapada* [8] dentro de la cual la estrella seguirá colpsando eternamente y por lo tanto, la existencia de una singularidad *desnuda* [8][24], visible a observadores externos sería imposible según la hipótesis de Penrose conocida como *el censor cósmico* [8][24][25]. Los detalles acerca de lo anterior serán explicados en mayor detalle posteriormente.

1.4. Simetrías y vectores de Killing

En la presente sección se procederá a demostrar las propiedades geométricas esenciales que se pueden asumir desde la relatividad general definiendo, eventualmente, una herramienta de especial importancia para la matemática de la teoría; esta se conoce como *campo vectorial de Killing* y está íntimamente relacionado con las propiedades métricas, y con las simetrías en determinada geometría; como en la euclideana, donde las relaciones métricas que determinan las distancias en los objetos, son invariantes con respecto a traslaciones o rotaciones; sin embargo, tal grado de simetría no se posee desde la relatividad general para los campos gravitacionales. No obstante, éstos admiten algunos grupos de transformaciones simétricas.

Una transformación de coordenadas que mantenga la métrica invariante define y da información acerca de las simetrías existentes en una variedad Riemmaniana. Desde el lenguaje covariante, es posible prescindir de una descripción explícita de la métrica (conocerla) para definir simetrías en la misma las cuales no dependen de una elección particular de un sistema de coordenadas.[3]

1.4.1. Isometrías

Una métrica es *invariante de forma* bajo una transformación de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a$, si se cumple que [3][5]

$$g'_{ab} = g_{ab}$$

Para todas las coordenadas x^a .

Una transformación de este tipo que mantenga la métrica en su forma original es denominada *isometría*. Las reglas de transformación para un tensor covariante permiten definir cada una de éstas si se usa la condición de invarianza. [2]

$$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g_{cd} \quad (1.42)$$

Todo el conjunto de isometrías debe cumplir con la anterior condición. Por supuesto, esta es una generalización complicada, pero puede ser simplificada mediante una transformación infinitesimal de coordenadas del tipo:[3]

$$x'^a = x^a + \epsilon X^a \quad (1.43)$$

En donde ϵ es una cantidad muy pequeña (infinitesimal) y X^a es un campo vectorial. Si se diferencia la ecuación (1.43) y se introduce en (1.42) tomando solamente términos de primer orden, se obtiene:

$$g_{ab} = g_{ab} + \epsilon[X^e(\partial_e g_{ab}) + g_{ad}(\partial_b X^d) + g_{cb}(\partial_a X^c)] \quad (1.44)$$

Lo cual implica que la expresión entre llaves es igual a cero. Al reemplazar las derivadas parciales con derivadas covariantes y recordando que la derivada covariante del tensor métrico es cero, se obtiene finalmente la condición general:

$$g_{ad}(\nabla_b X^d) + g_{cb}(\nabla_a X^c) = 0 \quad (1.45)$$

bajando los índices:

$$\nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 0 \quad (1.46)$$

La anterior es conocida como la *ecuación de Killing* [2][3][5]. Un campo vectorial que satisfaga esta ecuación es conocido como un campo de Killing.

Finalmente, se reduce el problema de encontrar todo el conjunto de isometrías de una métrica determinada por medio de la simple identificación de sus vectores de Killing.[2][9]

1.4.2. Vectores de Killing y relatividad general

Los vectores de Killing, nombrados así en honor al matemático alemán Wilhelm Killing (1847 - 1923)⁴, son generadores infinitesimales de isometrías que preservan la métrica en una variedad Riemmaniana. El flujo de un campo de Killing genera simetrías, tales que mover cada punto en un objeto a una misma distancia a lo largo (en la misma dirección) de un vector de Killing no afecta (distorsiona) las distancias de dicho objeto. [9]

Existen numerosos efectos prácticos a nivel geométrico, pero para la discusión a presentar, se verán a continuación única y principalmente aquellos que tienen su lugar en las simetrías del espacio-tiempo generado por una fuente de campo gravitacional desde la relatividad general.

Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild puede ser sometida a un análisis breve acerca de sus simetrías con respecto a sus vectores de Killing. Como se observó en las secciones anteriores, el elemento de línea de esta métrica en coordenadas esféricas se expresa como:[4]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.47)$$

La no dependencia de las coordenadas temporal (t) y azimutal (ϕ) en la métrica de Schwarzschild identifican a ésta como una solución *estacionaria* y *axisimétrica* [2][4]. Es decir, que es invariante mediante una transformación del tipo $t \rightarrow -t$ o $\phi \rightarrow -\phi$, lo cual implica la

⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Killing_vector_field

existencia de dos vectores de Killing:

$$k_\mu = \partial_t = \delta_\mu^0, \quad m_\mu = \partial_\phi = \delta_\mu^3 \quad (1.48)$$

Desde ahora, es importante definir un horizonte de Killing como aquella región en la que la norma de un vector de Killing se desvanece determinando una *híper-superficie* nula [8]. Si se toma esta condición de nulidad para el vector de translación temporal (k^a), se obtiene el siguiente resultado:[2][9]

$$k^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu = g_{00} \quad (1.49)$$

Lo cual solo puede ser cero, si $r = 2m$. Este resultado es evidentemente el radio de Schwarzschild e implica a su vez, que *en una solución estacionaria, un horizonte de Killing coincide con un horizonte de eventos* [8]. En los próximos capítulos se hará uso de los vectores de Killing con el fin de hallar de manera más sencilla algunas propiedades asociadas a los horizontes de eventos en los diferentes tipos de agujeros negros, evitando así posibles ambigüedades en cuanto a la identificación de aquellos horizontes.

Capítulo 2

Agujeros negros

Este capítulo está dedicado, especialmente, a las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein; en él se pretende enseñar detenidamente y sin embargo, de manera global, los tres casos restantes en cuanto a la geometría proporcionada por cuerpos que podemos considerar agujeros negros desde el punto de vista físico de la relatividad general. Anteriormente, se expusieron las cualidades geométricas y físicas de la solución de Schwarzschild, la cual puede ser asociada con un agujero negro estático y de simetría axial; a continuación se introducirán los diferentes tipos de agujeros negros, sus soluciones y propiedades generales.

2.1. Solución de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström provee una asociación geométrica de un objeto puntual que no solo posee masa, sino también carga eléctrica. La primera síntesis de esta solución fue proporcionada por H. Reissner [16] y complementada por G. Nordström [17] en un intento exitoso por involucrar el electro-magnetismo con la teoría general de la relatividad; aquella solución es exacta y pertenece a un grupo más extenso de soluciones de las llamadas ecuaciones de *Einstein-Maxwell*. [2][9]

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell se expresan a partir de las ecuaciones de campo originales, pero con un contenido energético diferente, es decir, el tensor de estrés-energía toma una forma ya conocida desde la teoría electro-magnética de Maxwell. Al tomar las ecuaciones de campo en forma invertida con respecto al tensor de Ricci, se obtiene la siguiente expresión (en unidades geometrizadas)¹

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (2.1)$$

en donde el tensor $T_{\mu\nu}$ toma la forma del tensor de estrés-energía de la teoría de Maxwell en

¹Al tomar este tipo de unidades, se asume que las constantes de Coulomb, en el caso electrostático, y de Biot-Savart para el caso magnético equivalen a uno y por lo tanto se pueden expresar las constantes de permitividad y permeabilidad en términos de estas anteriores como: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ y $\mu_0 = 4\pi$.

espacio curvo: [2][4]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) \quad (2.2)$$

también se puede verificar con facilidad que el tensor mostrado es libre de traza y su contracción con la métrica es nula, es decir $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$. Finalmente, introduciendo (2.2) en (2.1) se obtienen las ecuaciones de Einstein-Maxwell: [4]

$$R_{\mu\nu} = 2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

en donde $F_{\mu\nu}$ corresponde al tensor electro-magnético. Para este caso, se supone que la carga es puntual y posee un campo eléctrico radial; siguiendo las convenciones, las únicas componentes del tensor electro-magnético que sobreviven (recordando que el tensor es anti-simétrico) son $F_{01} = -F_{10} = E_r$ [2]. Finalmente, se aplica una última restricción acerca del primer par de ecuaciones de Maxwell para el espacio libre en forma covariante $\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ [7] y se obtiene la solución requerida (ver apéndice A):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2 \quad (2.4)$$

en donde la constante Q es identificada con la carga eléctrica de la fuente y la sección $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es el ángulo sólido de una 2-esfera. La anterior se conoce como la solución de un agujero negro con carga eléctrica y corresponde a la segunda solución local y exacta de las ecuaciones de campo de Einstein. Se puede observar claramente que en el caso $Q = 0$ se recupera la solución de Schwarzschild con masa geométrica m .

Por supuesto, al igual que con la métrica de Schwarzschild es posible transformar la métrica a coordenadas *avanzadas* de EF de acuerdo con lo mostrado en la sección 1.2; así se adquiere el elemento de línea, [2]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)du^2 - 2dudr - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

con el cual se procederá a analizar de manera breve las propiedades geométricas de la solución.

Al solucionar la métrica para las trayectorias geodésicas radiales ($ds^2 = 0$), se llega a un par de ecuaciones diferenciales análogas a las de la sección anterior

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \quad (2.7)$$

Las trayectorias entrantes de la luz, en este caso, pueden ir directamente hacia la singularidad o aproximarse asintotalmente hacia alguna de las dos nuevas regiones que aparecen, como se muestra en la figura 2.1. En oposición al caso de Schwarzschild, esto señala que la

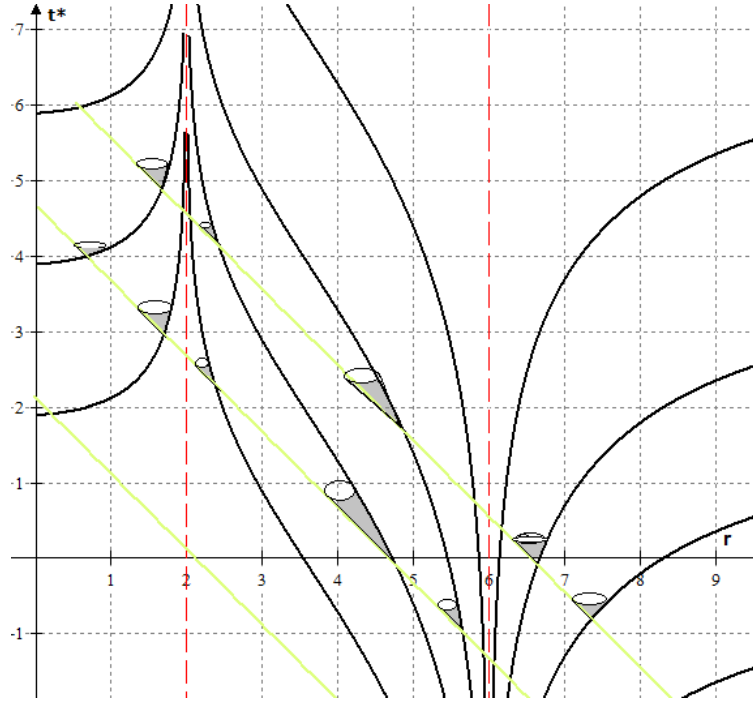


Figura 2.1: Diagrama espacio-tiempo para la solución de Reissner-Nordström con trayectorias entrantes y salientes de los horizontes de eventos $r_+ = 6$ y $r_- = 2$. Las líneas rectas corresponden a las trayectorias que sigue la luz directamente hacia $r = 0$.

solución de Reissner-Nordström contiene dos horizontes de sucesos los cuales serán tratados a continuación.

2.1.1. Horizontes y singularidad

Retomando la sección anterior, en la ecuación (2.4) se observa que la métrica posee un comportamiento singular cuando el denominador de la componente g_{11} se tiende a cero; por supuesto, esta singularidad no es más que un comportamiento proveniente de la elección particular del tipo de coordenadas lo cual es corregible desde el sistema de EF. Al igual que en el capítulo anterior, se puede tomar una dirección diferente para hallar el horizonte de eventos correspondiente al agujero negro de Reissner-Nordström por medio del uso de los vectores de Killing: si se encuentra una región en la cual el flujo vectorial de Killing sea nulo, se estará frente a un horizonte de Killing; el cual coincide, en este caso, con el horizonte de sucesos [2],

$$k^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 \quad (2.8)$$

$$g_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu = g_{00} = 0 \quad (2.9)$$

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \quad (2.10)$$

reacomodando la expresión, lo anterior es igual a

$$r^2 - 2mr + Q^2 = 0 \quad (2.11)$$

Lo cual es corresponde a una ecuación cuadrática con dos raíces reales para el caso $m^2 > Q^2$:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2} \quad (2.12)$$

Según lo visto en el diagrama de Eddington-Finkelstein, estos dos horizontes aparecen como un par de superficies que evitan la salida de partículas y actúan como membranas de separación entre el interior del agujero negro y cualquier observador externo. La región r_- se conoce en la literatura como *horizonte de Cauchy* [7], sin embargo, sus implicaciones no se discutirán a profundidad en este trabajo; debido a eso nos limitaremos a asumir que la región r_+ es el horizonte de sucesos.

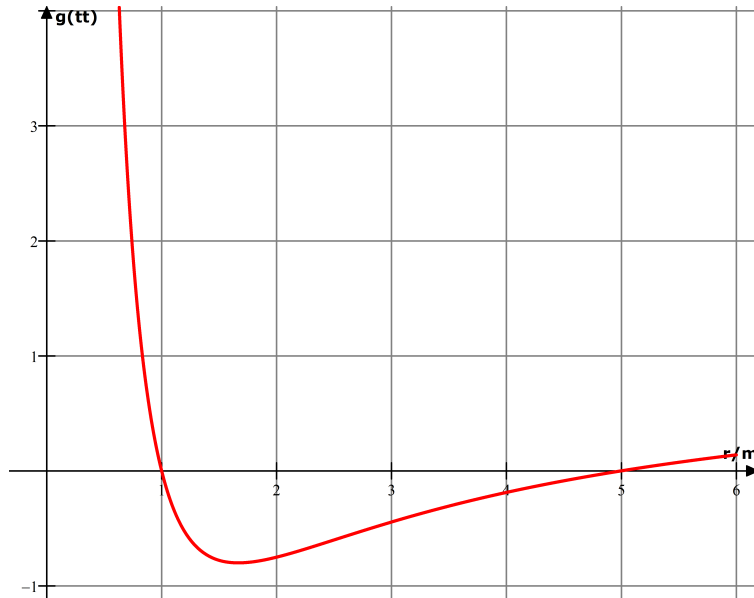


Figura 2.2: Gráfica de la componente g_{tt} en función de la coordenada radial r para la solución de Reissner-Nordström. Las raíces (cortes) en $r = m$ y $r = 5m$ representan la presencia de los dos horizontes de eventos para un agujero negro con carga eléctrica. En este caso $m = 3$ y $Q^2 = 5$.

Aparentemente, las partículas eléctricamente neutras que entran en el agujero negro, llegarán a experimentar fuerzas de repulsión de Coulomb (figura 2.1) permitiéndoles evitar la singularidad, siempre y cuando posean la velocidad y trayectorias adecuadas; con respecto al capítulo anterior, se puede mencionar igualmente, que aquel punto $r = 0$ corresponde a una singularidad intrínseca de la solución con propiedades similares a las de la métrica de Schwarzschild. Algunas propiedades con respecto a la contribución de carga eléctrica y sus consecuencias energéticas se darán a fondo en las secciones posteriores.

2.2. Métrica de Kerr: Agujeros negros rotantes

En las presentes secciones se introducirán las soluciones de las ecuaciones de campo correspondientes a la geometría de los agujeros negros rotantes y se inicia con la presentación de la **métrica de Kerr**, hallada por primera vez por el Neozelandés Roy Kerr en 1963.[18] La particularidad de esta solución radica en que no puede ser obtenida por medio de los métodos estándar trabajados anteriormente, sino que proviene de una deducción basada en múltiples análisis complejos realizados durante aquella década correspondientes al conjunto de soluciones de *simetría axial*. Por brevedad, es suficiente con exponer la solución en su forma más predeterminada en coordenadas de **Boyer-Lindquist**:²

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left((r^2 + a^2) + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.13)$$

Con el propósito de hacer explícitas las coordenadas contravariantes de la métrica, se procede a mostrar en forma matricial la solución en componentes del tensor métrico:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & \frac{2mra}{\rho^2 \Delta} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{2mra}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

en donde

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.15)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (2.16)$$

Adicionalmente, se observa que esta métrica posee términos por fuera de la diagonal de la matriz del tensor métrico, los cuales tienen implicaciones físicas importantes en el agujero negro de Kerr en cuanto a la posibilidad de arrastre del espacio-tiempo en sus cercanías debido al efecto de rotación.

²Las coordenadas de Boyer-Lindquist [19] (1967) se deducen a partir de una transformación realizada de la forma EF de la solución. Esta forma de la métrica hace más evidente la geometría *pseudo-esferoidal* del agujero negro de Kerr y reduce considerablemente los cálculos realizados con respecto a su dinámica y propiedades adicionales. (Ver apéndices B.4)

2.2.1. Singularidad, horizontes y ergosfera

Una inspección sencilla de la métrica de Kerr, revela una discontinuidad cuando $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$. La igualdad anterior, se cumple solo si $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ y se tiene que esto corresponde a un *anillo* en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) [2]-[9][18][20]

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0 \quad (2.17)$$

Un cálculo del invariante de Kretschmann³ $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, revela que esta discontinuidad en la métrica no es otra cosa que una singularidad intrínseca de la solución.

Análogo al caso de Schwarzschild, el desvanecimiento de la componente g^{rr} de la métrica anticipa la existencia de un horizonte de eventos cuando: [2]

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\rho^2} = 0$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0 \quad (2.18)$$

lo que es una ecuación cuadrática similar al caso de Reissner-Nordström cuyas soluciones son las raíces

$$r_{H\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (2.19)$$

con un horizonte de eventos en $r = r_{H+}$ (y un horizonte de Cauchy en $r = r_{H-}$)

La no dependencia de las coordenadas temporal (t) y azimutal (ϕ) en la métrica de Kerr, identifican a ésta como una solución *estacionaria* y *axisimétrica* [2]. Es decir, que la métrica es invariante mediante una transformación del tipo $t \rightarrow -t$ o $\phi \rightarrow -\phi$, lo cual implica la existencia de dos vectores de Killing: [2][5]

$$k_\mu = \partial_t = \delta_\mu^0, \quad m_\mu = \partial_\phi = \delta_\mu^3 \quad (2.20)$$

En el caso de Schwarzschild, el vector de Killing de translación temporal k_a se hace nulo en el horizonte de eventos $r = 2m$ (1.49), y de hecho, coincide con un horizonte de Killing (entendiéndose a éste simplemente como la región en donde la norma de un vector de Killing se hace cero); sin embargo, Hawking y Ellis [8] demostraron que esta no es una condición general en los agujeros negros rotantes. Si se toma la condición de nulidad para el vector de translación temporal, se obtiene el siguiente resultado: [2][8]

$$k^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu = g_{00} \quad (2.21)$$

y usando la forma (2.13) de Boyer-Lindquist, esto implica que

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2m}{\rho^2}\right) = 0$$

$$r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (2.22)$$

³El resultado, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)[(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}$, es demasiado riguroso como para ser comprobado en este trabajo, sin embargo, puede ser verificado en [21]

Las solución de la anterior ecuación cuadrática arrojan ahora como resultado las raíces:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.23)$$

las cuales claramente no se identifican con un horizonte de eventos debido a que sus valores son variables dependientes del ángulo ecuatorial θ que exceden la distancia desde el horizonte hallado en (2.19). En su lugar, estas fronteras identifican dos *híper-superficies nulas* [10] que tocan el horizonte en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ en donde el corrimiento al rojo de la luz para un observador externo se hace infinito [2][10]. La raíz r_+ , corresponde al denominado **límite estacionario** y la región comprendida entre este límite y el horizonte de eventos se conoce como **ergosfera** [2]-[9], cuyas implicaciones se explicarán posteriormente.

Es útil desde ahora, definir el área del Horizonte [10] antes de determinar otras propiedades

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}})_{r=r_{H+}} d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (\sqrt{((r^2 + a^2)\rho^2 + 2mra^2 \sin^2 \theta)})_{r=r_{H+}} \sin \theta d\theta \\ &= 4\pi (\sqrt{\Delta + (r^2 + a^2 - \Delta)(r^2 + a^2)})_{r=r_{H+}} \end{aligned}$$

como se mostró con anterioridad (2.18), en el horizonte $\Delta = 0$

$$A = 4\pi(r_{H+}^2 + a^2) = 8\pi m(m + \sqrt{m^2 + a^2}) = 8\pi m r_{H+} \quad (2.24)$$

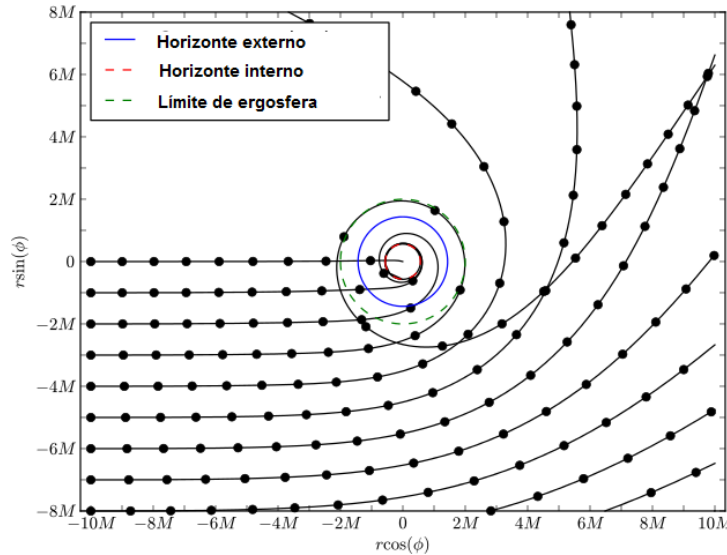


Figura 2.3: Gráfica de las trayectorias geodésicas para la solución de Kerr en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

2.2.2. Comportamiento asintótico

A diferencia del caso de Schwarzschild, la métrica de Kerr no cumple el teorema de Birkhoff⁴, esto significa que la métrica de un cuerpo esférico rotante (tal como una estrella o un planeta), no es parte de la métrica de Kerr en el exterior. Sin embargo, es posible analizar el comportamiento en el infinito de la solución para vislumbrar importantes características. Expandiendo la métrica en potencias de $1/r$ y considerando $r \gg a$ y $r \gg m$, se obtiene: [2][10][18]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + O[r^{-3}]\right)dt^2 + \left(\frac{4ma \sin^2 \theta}{r} + O[r^{-3}]\right)dt d\phi - \left(1 + O[r^{-1}]\right)dr^2 - \left(r^2 + O[r^{-3}]\right)d\theta^2 - \left(r^2 + O[r^{-3}]\right)\sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.25)$$

Esta aproximación, demuestra que la métrica no solo es asintóticamente plana, sino que también corresponde a la métrica de Lense-Thirring⁵ para distancias muy lejanas a la fuente. La comparación, sin duda alguna identifica a a proporcional al momento angular

$$a \propto L$$

y en efecto [18][20]

$$L = ma$$

Es decir, que el agujero negro está rotando. En una primera observación, Kerr definió la métrica como la descripción de una masa (esférica) rotante [18], pero en oposición y bajo argumentos sofisticados, Newman reinterpretó la solución como la métrica perteneciente a un anillo de masa rotante.[20] Ahora es más acertado enunciar el siguiente teorema: *toda descripción de un cuerpo rotante hace parte de la solución de Kerr, solo asintóticamente.*[2][4][10]

⁴Por D. Birkhoff (1923), este teorema establece que si existe una solución a las ecuaciones de campo para un cuerpo de simetría esférica, esta debe ser estática y plana asintóticamente; es decir, la geometría externa de un cuerpo esférico es la solución de Schwarzschild. Este teorema puede ser ampliado para tomar una definición similar con respecto a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, cuya solución externa con una fuente de simetría esférica es necesariamente la métrica de Reissner-Nordström. Usualmente, la incompatibilidad de una solución interna con la métrica de Kerr se relaciona con el denominado teorema de *no-Birkhoff*, el cual no es más que la constatación de que la solución no cumple con el teorema en cuestión. Ver: *T. Misner y J. Wheeler, "Gravitation". Sec. 32.2[4]*

⁵La métrica descubierta en 1918 por Josef Lense y Hans Thirring [22] corresponde a la solución de las ecuaciones de campo para una masa rotante; de acuerdo con el trabajo de los autores, el "campo gravitacional" en aquella situación debería repercutir en otros cuerpos de prueba situados alrededor (efecto LT) tal y como fue detectado en el año 2004 por la sonda espacial Gravity Probe B (*Nature* No. 431, 958-960, 2004). La métrica de Lense-Thirring tiene la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left[\frac{4m(r^2\omega) \sin^2 \theta}{r}\right]dt d\phi - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

en donde ω es la velocidad angular de la fuente y el producto $mr^2\omega$ se identifica con el momento angular.

2.2.3. Velocidad angular y límite estacionario

Anteriormente se comprobó que la solución de Kerr, reproduce la geometría de un cuerpo rotante. Debido a esto, es posible encontrar la velocidad angular correspondiente por medio de presunciones sencillas. Primero se debe considerar el elemento de línea en la forma de Boyer-Lindquist y asociarlo a las trayectorias que recorre la luz y además considerar el movimiento a una distancia radial constante con $dr = 0$ y $d\theta = 0$, es decir, igualando a cero la expresión (2.13) y dividiendo todo entre dt^2 se obtiene:[4]

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 = 0 \quad (2.26)$$

$$g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi}\dot{\phi} + g_{tt} = 0 \quad (2.27)$$

donde $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$

Ahora, solucionando para $\dot{\phi}$, se encuentra la velocidad angular:

$$\dot{\phi} = \Omega_{\pm} = \left| \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right| \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (2.28)$$

Podemos recordar que la híper-superficie r_+ , es nula debido entre otras cosas, a que la componente g_{tt} se hace cero en dicha región. Se puede identificar el signo positivo de la velocidad angular, con el giro que realiza un cuerpo en el sentido en el que gira el mismo agujero negro[2][4] y respectivamente, el signo negativo corresponde a un movimiento en dirección opuesta. Con esto se obtiene un importante resultado:

$$\Omega_+ = 2\omega, \quad \Omega_- = 0 \quad (2.29)$$

con

$$\omega = \left| \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right| = \frac{2mra}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2mra^2 \sin^2 \theta}$$

Es evidente que el movimiento retrógrada alrededor de dicha órbita no es posible. Este impresionante resultado sugiere que no importa que tanto se propulsione un cuerpo en la dirección contraria de rotación, éste siempre girará en el mismo sentido de rotación del agujero negro. Por otro lado, esto implica que un cuerpo en la zona $r = r_+$ no puede permanecer en reposo, por lo cual dicha zona se denomina el *límite estacionario*, en donde el espacio-tiempo sufre de un *arrastre* por parte de la rotación del agujero negro.

Finalmente, a pesar de que la métrica de Kerr no parece tener un claro horizonte de Killing, en realidad si lo posee; si se observa detenidamente la ecuación de Killing (1.46) parece claro que esta es de carácter lineal y por lo tanto, si un vector de Killing cualquiera obedece dicha ecuación, también lo hará una combinación lineal de tales vectores[8]. El mejor ajuste que correspondería a los vectores pretenecientes a la métrica de Kerr (2.20) es encontrado por conveniencia como[4][8]

$$\xi^\mu = k^\mu + \Omega_H m^\mu \quad (2.30)$$

en donde Ω_H es una constante que se identifica con la velocidad angular del horizonte de sucesos del agujero negro. Retomando la condición (1.49) para un horizonte de Killing se encuentra la expresión

$$\xi^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = g_{\mu\nu} (k^\mu + \Omega_H m^\mu) (k^\nu + \Omega_H m^\nu) = 0 \quad (2.31)$$

Al realizar las correspondientes operaciones y contracciones provenientes de la definición de los vectores involucrados (2.30) se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$g_{33} \Omega_H^2 + 2g_{03} \Omega_H + g_{00} = 0 \quad (2.32)$$

siendo esta idéntica a la hallada en (2.27) y cuya solución es la velocidad angular del horizonte de eventos.

2.3. Métrica de Kerr-Newman

Para finalizar el presente capítulo, se presenta la última de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo en el vacío. Hallada en 1964 por E. Newman *et al.*[23], esta métrica fue producto de un trabajo que buscaba complementar la solución de Kerr a una forma definitiva incluyendo la carga eléctrica y que fuera, por supuesto, solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell de manera análoga al caso de Reissner-Nordström. La manera en la que fue establecida la métrica de Kerr-Newman simplifica los cálculos obtenidos por Kerr al usar un algoritmo simplificado por medio del uso de *tétradas nulas* (ver Apéndice B). Sin dar mayor preámbulo, la métrica de Kerr-Newman es expresada en coordenadas de Boyer-Lindquist:[2, 4, 5, 9, 10]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2mr - Q^2}{\rho^2} 2a \sin^2 \theta dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - ((r^2 + a^2) + \frac{2mr - Q^2}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.33)$$

en donde

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + Q^2 \quad (2.34)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.35)$$

Se identifica a “ Q ” y “ a ” con la carga eléctrica y el momento angular por unidad de masa, respectivamente. Se observa a simple vista, que por su similitud, la métrica de Kerr-Newman posee propiedades muy similares a las de la de Kerr. Por motivación a resumir la presente sección y dar lugar a los capítulos posteriores, se presentará el sumario de las características principales de la métrica como sigue a continuación:

- Debido a que los coeficientes son independientes del tiempo y la coordenada angular ϕ , la solución se identifica como *estacionaria y axisimétrica*, por lo tanto contiene dos vectores de Killing asociados $k_\mu = \partial_t$ y $m_\mu = \partial_\phi$. [4][5]

- La solución posee un horizonte (se omite el de Cauchy) cuando $\Delta = 0$

$$r_H = m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2} \quad (2.36)$$

Similar a la solución de Reissner-Nordström, se contempla el caso extremo cuando $m^2 = a^2 + Q^2$

- Existe una hiper-superficie nula cuando $g_{tt} = 0$ localizada en:

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.37)$$

De nuevo, la región comprendida entre el *límite estacionario* y el horizonte de eventos es la ***ergosfera*** (figura 2.4).

- Al igual que con la métrica de Kerr, el desvanecimiento del vector de Killing combinado $\xi^\mu = k^\mu + \Omega_H m^\mu$ señala el horizonte de Killing que coincide con el de eventos; además, también se muestra la existencia de un límite estacionario y una velocidad angular en el horizonte ($\theta = [0, \pi]$) cuando $\xi^\mu \xi_\mu = 0$. Para simplificar, se expresará directamente el valor de Ω_H en la siguiente forma:[4][5]

$$\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2} = \frac{a}{2mr_H} \quad (2.38)$$

- El área superficial del agujero negro de Kerr-Newman es muy similar a la del precursor agujero de Kerr

$$A = 4\pi(r_H^2 + a^2) = 4\pi(2mr_H - Q^2) \quad (2.39)$$

La última expresión de la derecha se muestra a propósito de constatar que se puede reducir la solución de Kerr-Newman a la de Kerr, cuando $Q = 0$.

- Existe un *cuadri-potencial* electromagnético asociado a la carga Q : [4, 5]

$$A_\mu = \frac{Qr}{\rho^2}(1, 0, 0, a \sin^2 \theta) \quad (2.40)$$

El cual se reduce en el horizonte de eventos, cuando $r \rightarrow r_H$ y $\theta = [0, \pi]$, a la siguiente fórmula para el potencial eléctrico:

$$A_t = \Phi = \frac{Qr_H}{r_H^2 + a^2} \quad (2.41)$$

Para finalizar, al observar la métrica de Kerr-Newman en su forma de Boyer-Lindquist (2.33) es evidente que también posee una singularidad intrínseca cuando $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$; la singularidad también posee forma de anillo, como era de esperarse.[23]

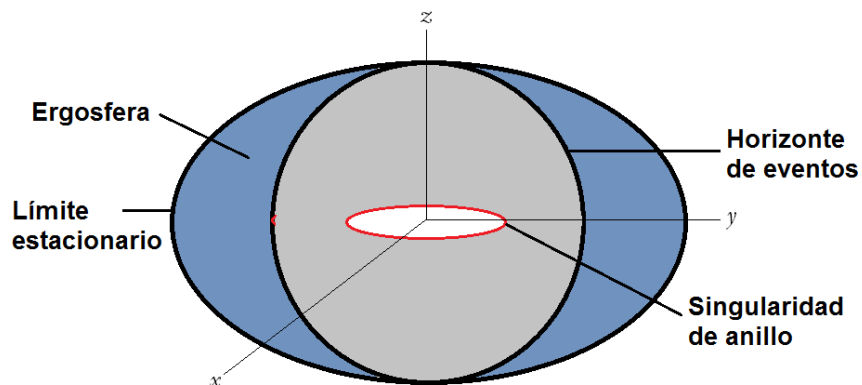


Figura 2.4: Figura esquematizada de un agujero negro rotante con sus respectivas regiones especiales y singularidad.

Con el anterior resumen de las propiedades básicas de los agujeros negros estamos en condiciones de proceder en una dirección más definida en cuanto al estudio. Se cierra este capítulo con la descripción breve de las cuatro soluciones exactas de las ecuaciones de campo para los posibles casos de agujeros negros, con las cuales se puede llevar a cabo el estudio de las propiedades generales y especiales que llevan a relacionar a estos cuerpos masivos con una formulación física generalizada como se verá en el siguiente capítulo.

	$Q=0$	$Q \neq 0$
$L=0$	Schwarzschild	Reissner-Nordström
$L \neq 0$	Kerr	Kerr-Newman

Cuadro 2.1: Tabla comparativa entre los diferentes modelos de agujeros negros según su carga eléctrica y momento angular.

Capítulo 3

Termodinámica de agujeros negros

Antes de comenzar directamente con la parte central del tema de este capítulo, es importante iniciar con una generalización de la teoría de los agujeros negros. Como se vió en los capítulos anteriores, los agujeros negros poseen características bien definidas, dotando a estos cuerpos de una elegante simplicidad, no obstante, de compleja interpretación; desde una primera observación acerca del colapso estelar, parece interesante el hecho de que los agujeros negros ya conformados (estacionarios) no ostentan las propiedades ni características de sus precursoras estrellas colapsantes; es como si todo lo que hacía parte de la estrella -su forma, su temperatura, su composición material, etc.- haya sido barrido por completo para dejar un agujero negro únicamente definido por las restantes características de **masa, carga eléctrica y moméntum angular** (m, Q, L); es decir que, aun cuando la estrella se encoja hasta una singularidad, su masa, carga y rotación anteriores serán los únicos parámetros observables que harán parte del recién nacido agujero negro. Lo anterior fue denominado de manera metafórica por J. Wheeler como cierta “*pérdida de pelo*” de los agujeros negros en un teorema que hoy se conoce como ***el teorema sin-pelo*** (*no-hair theorem*).[4]

En el capítulo anterior se estudiaron brevemente las características generales de los agujeros negros rotantes en cuanto a sus horizontes, singularidades y la existencia de una región denominada *ergosfera*; sin embargo, hasta este punto no se ha explicado la naturaleza de dicha región. La ergosfera, como se vió anteriormente, es la zona delimitada entre el horizonte de sucesos y el límite estacionario en un agujero negro rotante; como su nombre lo sugiere (*ergosfera*, del griego *ergon*=“energía”), esta superficie tiene propiedades interesantes en cuanto a la posibilidad de extracción de energía como fue sugerido por Roger Penrose en los sesentas con los denominados ***procesos de Penrose***¹[27], en los cuales una fracción de energía puede ser retirada de una agujero negro a expensas de la disminución en su rotación. Según el modelo de Penrose, las partículas con rotación retrógada pueden decaer en pares *partícula-antipartícula* resultando en la extracción eficiente de energía por parte de

¹Similar a la propuesta de Penrose, existe otro modelo de extracción de energía en un agujero rotante de Kerr-Newman establecido por Blandford y Znajek en 1977; la extracción energética se basa en la acreación de materia alrededor del agujero negro, la cual genera intensos campos magnéticos los cuales drenarían energía de rotación y carga por producción de pares partícula-antipartícula en chorros posiblemente medibles como fuentes de ondas de radio. Ref.: R. Blandford & R. Znajek, *Electromagnetic Extraction of Energy From Kerr Black Holes*, Mon. Not. R. astr. Soc. 179, 433-456 (1977)

una partícula fugada de la ergosfera. A continuación se mostrarán los límites máximos de extracción de energía sin ahondar en los detalles del proceso de Penrose, lo cual está fuera del objetivo de este trabajo.

3.1. Extracción energética y fórmula de masa

Al considerar los múltiples posibles escenarios en los cuales se podría retirar energía de un agujero negro, surge la inquietud acerca de los límites de eficiencia y las emergentes restricciones que aparecerían dados los procesos de Penrose o cualquier otro. Inicialmente, D. Christodoulou -uno de los estudiantes de John Wheeler- propuso en 1970 un límite máximo para la extracción de energía de un agujero negro rotante e introdujo un concepto interesante y fundamental para la teoría: **la masa irreductible**[28], como aquella que nunca disminuye sin importar el proceso que se efectúe para sacar energía y la cual, a su vez, representa el remanente de un agujero negro de Schwarzschild después de que toda la energía de un agujero negro, rotante o con carga eléctrica, haya sido retirada. Para hacernos una idea más general acerca de lo anterior, se recurrirá a un enfoque ligeramente distinto al original con el uso de los conceptos básicos obtenidos en las secciones anteriores. Consideremos el enunciado de D. Christodoulou en forma matemática:[4][10][28]

$$\delta m_{ir} \geq 0 \quad (3.1)$$

en donde la igualdad se mantiene solo para procesos reversibles, definidos como aquellos en los cuales el área del horizonte de sucesos no cambia y pueden ser revertidos por medio de la adición de carga eléctrica o momento angular opuestos (Christodoulou-Ruffini, 1971)[29]; entonces, si se asume que la última configuración a la que puede llegar un agujero negro, pese a que toda su energía rotacional y carga eléctrica han sido menguadas, es la de Schwarzschild; se puede equiparar aquella masa irreductible con aquella que tendría si se espera que su tamaño no haya disminuído. Tomando como ejemplo un agujero de Kerr-Newman, se puede expresar el área de éste a partir de su masa irreductible

$$A = 4\pi(2m_{ir})^2 = 16\pi m_{ir}^2 \quad (3.2)$$

es útil invertir la relación para mostrar lo siguiente:

$$m_{ir} = \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (3.3)$$

y recordando el área de un agujero de Kerr-Newman (2.39) se tiene

$$m_{ir}^2 = \frac{1}{2} \left(mr_H - \frac{Q^2}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$2m_{ir}^2 = m^2 + m\sqrt{m^2 - Q^2 - a^2} - Q^2 \quad (3.5)$$

Despejando la última expresión para m y recordando que $a = L/M$ se halla la siguiente ecuación:

$$m^2 = \frac{L^2}{4m_{ir}^2} + m_{ir}^2 + \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{16m_{ir}^2} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow m^2 = \left(m_{ir} + \frac{Q^2}{4m_{ir}}\right)^2 + \left(\frac{L}{2m_{ir}}\right)^2 \quad (3.7)$$

La última expresión es la famosa **fórmula de masa de Christodoulou-Ruffini**[29] hallada en 1971 para demostrar aquellos procesos reversibles e irreversibles en un agujero negro de Kerr-Newman. Al retirar la carga eléctrica de aquella expresión, se obtiene la fórmula original de Christodoulou y se puede observar claramente, que si se retirase por completo la energía de rotación y carga eléctrica del agujero negro, la masa total restante proviene únicamente de la masa irreductible; se infiere que un agujero de Schwarzschild no tiene energía libre ($m - m_{ir}$) para extraer debido a que toda su masa es irreductible.

Adicionalmente, se tiene que para la métrica de Kerr Newman se debe cumplir que $Q^2 + a^2 \leq m^2$, y al reemplazar la fórmula (3.7) en la desigualdad se obtiene[29]:

$$\frac{L^2}{4m_{ir}^4} + \frac{Q^2}{16m_{ir}^4} \leq 1 \quad (3.8)$$

vemos de esta expresión que siempre que el área se mantenga constante, los procesos a los que se tiene lugar en el rango de la igualdad son reversibles; a estos procesos se les denomina *isoareales*[33]. Al mismo tiempo, la desigualdad (3.8) sugiere una región parametrizada en un plano L-Q dentro del cual se permite la existencia de agujeros negros.

En cuanto a la máxima extracción de energía, inicialmente podríamos suponer que un agujero negro cargado de Reissner-Nordström se encuentra en su configuración **extrema**; es decir, cuando su contribución energética de carga se encuentra en una magnitud equiparable con su contribución de masa ($m^2 = Q^2$). Para este caso se pueden modelar según la expresión (3.1) las configuraciones al principio y al final de la extracción (la cual se puede pensar como la neutralización por medio de una carga opuesta bajada lentamente desde el infinito hasta el horizonte de eventos[27]) de la energía por medio de la masa irreductible en función del área (3.3)

$$m_{ir(i)}^2 = \frac{A_i}{16\pi} \quad m_{ir(f)}^2 = \frac{A_f}{16\pi} \quad (3.9)$$

con $A_i = 4\pi m_i^2$ y, suponiendo que el proceso se realiza hasta que el agujero negro queda completamente descargado, su área final sería $A_f = 16\pi m_f^2$. Ahora se puede expresar la desigualdad (3.1) en terminos más familiares

$$m_{ir(f)}^2 \geq m_{ir(i)}^2 \quad (3.10)$$

$$m_f \geq \frac{1}{2}m_i \quad (3.11)$$

Ahora se procede a hallar el máximo de energía en este proceso teniendo en cuenta esta energía como su equivalente en masa $\Delta m = m_i - m_f$:

$$m_i - m_f \leq m_i - \frac{1}{2}m_i \quad (3.12)$$

$$\Delta m \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)m_i = 0,50m_i \quad (3.13)$$

es decir, ¡se puede extraer hasta un 50% de la energía de un agujero negro cargado eléctricamente![29]. Si se aplica el mismo procedimiento a un agujero negro rotante de Kerr, el límite máximo de extracción es ahora $\Delta m \simeq 0,29m_i$, lo cual implica aproximadamente hasta un 30% de la energía inicial.[27]

3.2. Leyes de la mecánica de agujeros negros

Para la presente sección es conveniente tomar una dirección ligeramente desviada en la cronología de sucesos que dieron origen a los descubrimientos históricos a exponer, y dando continuidad a la sección anterior se presentarán las leyes clásicas de los agujeros negros las cuales fueron compiladas inicialmente por Bardeen, Carter y Hawking (1973).[34]

3.2.1. La Primera ley

Anteriormente vimos que, según los trabajos de Christodoulou y Ruffini, existe una relación limitante (3.1) en los procesos que involucran la extracción energética o transformaciones isoareales de los agujeros negros; además, los parámetros involucrados en cada proceso siempre están bien definidos en un determinado rango (3.8) y la masa irreductible (3.4) aparece como una cantidad no degradable que se conserva a lo largo del tiempo. Si se toma la fórmula de masa en (3.6) y se reemplaza la masa irreductible en términos del área (3.3), se tiene para un agujero negro de Kerr-Newman la siguiente ecuación (Smarr, 1973)[32]:

$$m^2 = \frac{A}{16\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{A} + \frac{4\pi L^2}{A} \quad (3.14)$$

de esta expresión se puede partir derivando implícitamente todos los términos y despejando m para obtener:

$$dm = \frac{r_H - m}{8\pi(r_H^2 + a^2)}dA + \frac{a}{r_H^2 + a^2}dL + \frac{Qr_H}{r_H^2 + a^2}dQ \quad (3.15)$$

Es importante separar cada una de las expresiones involucradas en la relación para poder identificarlas:

$$\kappa = \frac{r_H - m}{r_H^2 + a^2} = \frac{\sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2} \quad (3.16)$$

- Esta cantidad se reconoce como la llamada **gravedad superficial** del agujero negro; aunque su derivación es complicada y requiere el uso de herramientas matemáticas más complejas, se puede dar una definición aproximada: *la gravedad superficial se entiende*

como la fuerza (por unidad de masa) que se requiere ejercer desde una posición alejada al infinito para mantener una partícula lo más próximo al horizonte de eventos como le sea posible[5]. Desde esta definición, se puede deducir que se está hablando de alguna clase de “aceleración gravitacional”, sin embargo, esta noción no está bien definida para los agujeros negros debido a la inmensa (infinita) gravedad que ejercen en el horizonte de sucesos[11]. Para el caso de Schwarzschild ($a = 0$ y $Q = 0$) la gravedad superficial toma un valor, evaluado en el horizonte, de $k = 1/4m$; este valor es evidentemente constante teniendo algunas repercusiones adicionales que se estudiarán más adelante.

$$\Omega_{\text{H}} = \frac{a}{r_{\text{H}}^2 + a^2} = \frac{a}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2} \quad (3.17)$$

- Tal y como se vio con anterioridad (2.38), esto no es más que la **velocidad angular** en el horizonte.

$$\Phi = \frac{Qr_{\text{H}}}{r_{\text{H}}^2 + a^2} = \frac{Q(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2})}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2} \quad (3.18)$$

- A esta última cantidad se le identifica con el **potencial eléctrico** (hallado anteriormente en 2.41) en el horizonte del agujero negro medido desde el infinito.

Ahora poniendo todo junto en su lugar, la ecuación (3.15) adquiere su forma general:

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_{\text{H}}dL + \Phi dQ \quad (3.19)$$

De esta última manera se obtiene la **ecuación de estado fundamental** de los agujeros negros y su puede enunciar que: *en un agujero negro estacionario, la energía (masa) total permanece constante y únicamente se transforma en función del cambio en sus parámetros externos (L, Q); en todo caso, una vez que el agujero negro se mantenga en su configuración estacionaria más estable, la gravedad superficial será constante a lo largo de todo el horizonte de eventos. La anterior definición se aplica dentro de esta sección como la **ley cero de la mecánica de agujeros negros**. Desde este punto ya empieza a parecer más familiar la teoría de los agujeros negros con aquella formulación perteneciente a la termodinámica si se considera, además, la variación de parámetros externos como un “trabajo hecho hacia el agujero”.*

La formula de masa de Christodoulou no solo es el punto de partida de la primera ley de esta teoría; su definición sobre la irreductibilidad de la masa es una base fundamental para la siguiente ley.

3.2.2. La segunda ley

En la primera sección (3.1) vimos como la conclusión de Christodoulou podía llevar a resultados importantes en cuanto a la evolución temporal de los procesos en los agujeros negros. Por supuesto, la masa irreductible de Christodoulou está relacionada con el área (3.3) del horizonte de eventos y, en ese mismo orden de ideas, parece ser que dicha área tampoco puede disminuir en los diferentes procesos; sin embargo aquello no fue generalizado

a la ligera en primera instancia hasta que Hawking (1971) poco tiempo después realizara una demostración al respecto. Valiéndose de poderosos teoremas en los cuales había trabajado previamente con Penrose, Hawking desarrollo la demostración de que el área del horizonte de eventos de un agujero negro no disminuía en el tiempo, considerando que la expansión de un agujero fuese positiva y eso estaba de acuerdo con las condiciones energéticas para acreación de materia con densidad no-negativa; además de esto, el teorema de Hawking implicaba que la colisión de más agujeros negros daría como resultado uno nuevo con un área inclusive mayor que la suma de sus predecesores. El enunciado de Hawking se puede considerar de manera sencilla con la expresión[30]

$$\delta A \geq 0 \tag{3.20}$$

y de nuevo, la igualdad se mantiene para procesos reversibles.

Desde luego, esta propiedad de los agujeros negros ya empezaba a desconcertar a los contemporáneos, especialmente a Jacob Bekenstein de Princeton quien sostenía que era demasiado sospechoso que esto se asemejara tanto con una ya conocida ley de la física: *la segunda ley de la termodinámica*; sin embargo, Hawking era renuente al respecto y en eso se basó esencialmente para producir junto con Bardeen y Carter su compendio de leyes (clásicas) de la mecánica de agujeros negros.

3.2.3. La tercera ley

Vimos a lo largo de esta sección que al deducir la primera ley de la mecánica de agujeros negros apareció una cantidad conocida como *gravedad superficial* (3.16); dado un valor constante de esta cantidad en el horizonte de eventos, se estará frente a un agujero negro estacionario. Pero, ¿qué sucede en el caso de un agujero negro extremo?; para el caso de Kerr-Newman tenemos aquella situación si se aumentara progresivamente la carga y rotación del agujero negro hasta llegar al límite $m^2 = a^2 + Q^2$, en este punto se puede observar de la ecuación (3.16) que la gravedad superficial se hace cero (sin embargo el área no desaparece) y además, si se pudiera continuar el proceso hasta lograr, tan solo infinitesimalmente, que $m^2 < a^2 + Q^2$ el horizonte de eventos desaparecería y se enfrentaría la indeseable aparición de una *singularidad desnuda*. Desde luego, esta situación es tan indeseable para la física de los agujeros negros, que motivó a R. Penrose a desarrollar una conjetura conocida como *hipótesis de censura cósmica* (Penrose, 1969)[25]; según esta, la aparición de un agujero negro a partir del colapso estelar solo puede ser posible si antes se ha desarrollado una *superficie atrapada* para contener la singularidad ². Los detalles para soportar las afirmaciones de Penrose serían

²Aunque los teoremas desarrollados por Penrose y Hawking fueron lo suficientemente contundentes para probar la necesidad de horizontes de eventos en los agujeros negros, la hipótesis de Penrose no desechaba la posibilidad de singularidades desnudas. A favor de Penrose, en 1991 Hawking apostó junto con Kip Thorne y John Preskill, del Caltech, a que la hipótesis era cierta y la apuesta fue firmada con la recompensa de “ropa para vestir la desnudez del ganador”. En 1997 Hawking tuvo que admitir su derrota (parcialmente) ante el descubrimiento de Christodoulou con simulaciones computarizadas de Matthew Choptuik de que existía una posibilidad teórica; no obstante, el descubrimiento resultaba en algo físicamente improbable que requería de condiciones muy especiales como infactibles, y debido a esto la apuesta se redefinió con la condición de que no hubiera ninguna ambigüedad. (A Bet on a Cosmic Scale, And a Concession, Sort Of By Malcolm W. Browne The New York Times February 12, 1997)

desarrollados al siguiente año en colaboración de Hawking con un tratado riguroso y sin precedentes sobre singularidades, el cual incluiría aspectos generales y contundentes acerca del colapso estelar y los horizontes de eventos (Hawking y Penrose, 1970)[26].

Con base en las anteriores observaciones sobre singularidades y su relación con la gravedad superficial, una tercera ley de la mecánica de agujeros negros se puede enunciar concretamente como sigue: *bajo ningún proceso, por idealizado que sea este, se puede reducir la gravedad superficial de un agujero negro a cero en un número finito de pasos* (Hawking y Bardeen, 1973)[34]. Aunque hasta este momento no se tienen herramientas suficientes para probar aquella aseveración, la hipótesis de censura cósmica proporciona una de las bases para creer fuertemente en que esta ley se cumple. En las siguientes secciones se dará una demostración simple para corroborarla.

Por último, queda por mencionar que el recorrido a través de las leyes que definen la mecánica de los agujeros negros deja varias inquietudes formales acerca de la relación aparente que se tiene con las ya conocidas leyes de la termodinámica, como fue explicado a lo largo de este capítulo. Hasta este punto, la teoría de agujeros negros ha sido establecida con un formalismo simple y bien definido por simples parámetros, sin embargo, parece ser necesario armar tentativamente un puente que relacione a aquellas dos teorías. En el siguiente capítulo se darán los análisis correspondientes para mostrar la conexión definitiva entre termodinámica y agujeros negros, además de unas correspondientes analogías.

Capítulo 4

Análisis de la termodinámica en agujeros negros

La física de los agujeros negros parece ofrecer una formalización bastante elegante y consistente junto con unas leyes bien definidas. Como se vió durante el capítulo anterior, las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros parecen tener una relación con las leyes de la termodinámica, aunque esto en realidad desde una perspectiva puramente clásica es tan solo una coincidencia si consideramos lo siguiente:

- En la formulación de la ley cero de los agujeros negros se habla de la gravedad superficial (3.16) como un parámetro que siempre acompaña a los que ya son estacionarios; en analogía con eso, la ley cero de la termodinámica también ofrece un parámetro constante a lo largo de todo sistema que ya está en equilibrio y se conoce como *temperatura absoluta*. Entonces, sería inocentemente justo asociar la gravedad superficial de un agujero negro con la medida de su temperatura, pero aquí ya surge un problema: ¿Qué temperatura tiene un agujero negro? se supone que aquellos cuerpos son aislados por poseer un horizonte de eventos y que jamás interactúan con el exterior; térmicamente estarían tan fríos como el cero absoluto, es decir, sin temperatura alguna proveniente de intercambios de calor. Por otra parte, ¿cómo sera posible asociar una cantidad termodinámica como la temperatura con la gravedad superficial cuyas unidades son las de aceleración? El problema dimensional aparece como un asunto esencial a ser tratado por la teoría de los agujeros negros y está basado en la naturaleza de las magnitudes que se pretenden relacionar.
- Al formular la primera ley de los agujeros negros se evidenció que su masa total como equivalente a su energía es una función de sus parámetros externos y posee, además, una ecuación fundamental (3.19) que se cumple inclusive para cambios infinitesimales; la comparación es inmediata con la primera ley de la termodinámica en la cual se enuncia según el principio de conservación de la energía, *que en un sistema en equilibrio la energía interna se conserva y solo se transforma por medio de una interacción térmica pura o por la variación de sus parámetros externos*. Adicionalmente, esta ley admite una ecuación de estado fundamental (Reiff, 1965)[35]

$$dE = TdS - pdV \tag{4.1}$$

en la cual la segunda cantidad de la parte derecha representa el trabajo *hecho por el sistema* y se mantiene también para cambios infinitesimales *cuasi-estáticos*¹. Si se le permite al sistema intercambiar energía únicamente por medio de la interacción térmica pura (flujo de calor), no habrá variación de los parámetros externos que contribuya en la energía interna[36] y se llegaría a la relación (Adkins, 1983)

$$dE \equiv dQ = TdS \tag{4.2}$$

entonces, el calor se toma como una forma de energía y el parámetro de equilibrio definido para el sistema es la temperatura absoluta T y la cantidad dS es la *entropía* del sistema. En comparación con la expresión (3.19) para agujeros negros, se podría asumir que existe una íntima relación entre el producto $(\kappa/8\pi)dA$ y la expresión termodinámica; se podría pensar de nuevo que la gravedad superficial es una medida de temperatura e inclusive, que el área del agujero negro es una medida de la entropía en éste. Para continuar, la discusión sobre esta última similitud nos lleva inmediatamente a la siguiente consideración.

- Al enunciar la segunda ley de la sección 3.2.2. como (3.20) que *bajo ningún proceso el área de un agujero negro puede disminuir en el tiempo*[10], se encuentra una similitud importante con respecto a la segunda ley de la termodinámica en donde *un sistema aislado que en el tiempo tienda al equilibrio térmico siempre va acompañado de un incremento en su entropía*[35], y la relación $\delta S \geq 0$ se mantiene, donde la igualdad pertenece a procesos reversibles; además, si el sistema varía sus parámetros infinitesimalmente de manera cuasi-estática, la relación entre la interacción térmica y su entropía obedece la expresión (4.2). Hasta ahora la comparación entre el área del horizonte y la entropía es puramente superficial en forma y posee algunos problemas; en particular, se ve a simple vista que las dimensiones no se ajustan debido a que la entropía es adimensional y el área tiene unidades de longitud al cuadrado y además, parecería que en los agujeros negros se trasciende o viola la segunda ley de la termodinámica. Con respecto a la posibilidad de que un agujero negro pudiera tener entropía, R. Geroch manifestó durante un coloquio de Princeton en 1971 un problema donde aparentemente se podría obtener trabajo a partir del calor con eficiencia del 100 %, lo cual está prohibido por la termodinámica. Según Geroch, al hacer descender lentamente una caja sin peso, con entropía en forma de radiación, a las proximidades de un agujero negro, se podría obtener trabajo eficiente al retirar la caja después de haber vaciado toda la radiación dentro del agujero negro sin producir cambio alguno en su área o masa; es decir, el agujero negro engulle la entropía y esta se pierde por completo del exterior (Hawking & Israel, 1987)[37]. Aquella idea fue retenida y enfatizada por Hawking en el mismo trabajo al que es referido este capítulo sobre las leyes de los agujeros negros, para argüir que en realidad la segunda ley de la termodinámica no se mantiene si se considera que el área no es una medida de la entropía.
- Con base en los anteriores hechos, la tercera ley de los agujeros negros de la sección

¹Los procesos cuasi-estáticos son aquellos en los cuales se procede a efectuar un trabajo variando lentamente los parámetros externos del sistema en cuestión; esto asegura que el sistema se encuentre en equilibrio durante todas las etapas del proceso.

3.2.3. también posee en su definición similitudes con aquella de la termodinámica: *es imposible llevar y mantener un sistema a una temperatura de cero absoluto en un número finito de procesos* (Adkins, 1983)[36] y de manera adicional se cumple que *en el límite cuando $T \rightarrow 0$ la entropía del sistema tiende a un valor constante (cero)* (Landau, 1969)[38]. Desde luego, el problema de estas comparaciones se mantiene si no se definen una temperatura o entropía para un agujero negro. Con relación a las discusiones presentadas durante aquella época y en contra de los argumentos de Geroch, Jakob Bekenstein -otro de los estudiantes graduados de John Wheeler- decidió dar un giro crucial a los acontecimientos para redefinir las posturas de sus contemporáneos y dar luces a una formalización de la termodinámica en los agujeros negros como se mostrará detalladamente a continuación.

4.1. La entropía del agujero negro

La propuesta de Bekenstein[31, 39] para confrontar los argumentos de Geroch y Hawking tendría que ser lo suficientemente contundente como para definir la entropía del agujero negro de manera consistente, tanto dimensionalmente como físicamente. Para iniciar la deducción de la mencionada entropía, primero hay que definir a qué se refiere dicha cantidad; para Bekenstein, la idea más apropiada era considerar la teoría de la información como base fundamental. Según la teoría de la información, la entropía de un sistema es una magnitud que define la cantidad de información que se desconoce o se llega a perder en el tiempo[40, 41]. La primera identificación dice que una vez que algo entra en un agujero negro, la incertidumbre aumenta en forma de un incremento en la entropía de éste; sin embargo, la información anterior sobre el sistema se desaparece:

$$\Delta S = -\Delta I \quad (4.3)$$

Entonces, ya se identifica la entropía como la pérdida de información; como ejemplo en analogía con un gas ideal, se puede considerar el caso en el cual se deja desplazar un gas de un contenedor a otro por medio de una válvula, al alcanzar el equilibrio y ocupar un volumen mayor, el gas se encuentra en igual probabilidad de ocupar cualquiera de los *micro-estados* accesibles (Reiff, 1965) y se pierde información sobre su configuración inicial o la localización de sus moléculas. El uso de la teoría de la información se hace entonces pertinente y se puede iniciar de manera formal con la entropía de Shannon (Shannon, 1949)[40]:

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n \quad (4.4)$$

la expresión es adimensional y contiene todas las probabilidades p_n de encontrar el sistema en alguno de sus posibles estados. Pero, si se ha de encontrar una relación entre la entropía y el área de sucesos, se debe incluir una consideración más: buscar la mínima entropía que se puede obtener y relacionarla con el mínimo aumento de área en ese proceso. En la teoría de la información, la mínima cantidad de entropía que se puede obtener sobre un evento es aquella proveniente de la resolución de una pregunta con *si o no*. Una pregunta de ese estilo, como en el lanzamiento de una moneda a *cara y cruz* siempre tiene dos posibles respuestas y

la probabilidad de cada una es del 50 %; la cantidad de información asociada se conoce con el nombre de *bit* (1 bit = ln 2). De la misma manera, se tiene que la captura de una partícula por un agujero negro contiene la misma información con una respuesta dependiente de si hay, o no, captura. En este último proceso el área del agujero negro debe aumentar y si se tiene claridad de la relación con la entropía, entonces habrá una cantidad mínima que los asocie solo si se conoce la expresión (función) adecuada que conecte las dos cantidades.

Haciendo unas indagaciones breves, la función que defina la entropía debería ser una que dependa crecientemente del área, y por proceso de descarte la mejor opción es aquella que obedezca una relación lineal:[39]

$$S_{bh} = \gamma \frac{A}{4\pi} \quad (4.5)$$

con γ como una constante y el factor 4π aparece debido a que la gravedad superficial se separa de esa cantidad.

Lo siguiente sería definir correctamente las unidades de la constante en cuestión; estas son (*longitud*)⁻². La idea de Bekenstein[31, 39] fue apelar a la física cuántica y definir la constante como inverso de la *longitud de Planck*² ($l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33} \text{cm}$) al cuadrado. Al pasar la longitud de Planck a nuestro sistema geometrizado, la constante es simplemente \hbar^{-1} y ya se puede expresar la función (3.25) como:

$$S_{bh} = \eta \hbar^{-1} \frac{A}{4\pi} \quad (4.6)$$

Basándose en previos cálculos de Carter y Christodoulou (1966-1970), Bekenstein halló el aumento mínimo del área por captura de partícula en unidades geometrizadas como (Bekenstein, 1973-1974)

$$\Delta A = 8\pi m_o b \quad (4.7)$$

en donde m_o es la masa en reposo de la partícula y b es su radio propio. Ahora, ¿qué tan pequeño puede llegar a ser b ? Si se acota el valor del radio de la partícula entre la *longitud de Compton* \hbar/m_o y el radio gravitacional $2m_o$, se puede calcular un valor mínimo para el aumento del área situado en

$$(\Delta A)_{min} = 8\pi \hbar \quad (4.8)$$

Ahora, si se compara la entropía mínima por captura de partícula con la pérdida de información mínima en este proceso se obtiene la solución:

$$(\Delta S)_{min} = (\eta/\hbar) \frac{\Delta A_{min}}{4\pi} = \ln 2 \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (4.10)$$

²Las unidades de Planck se basan en un sistema preferencial en donde además de tener la velocidad de la luz y la constante gravitacional de valor unitario, se aplica la misma condición para la constante de Planck ($\hbar = 1$) y de Boltzmann. Al igual que con las unidades geometrizadas, se pueden reestablecer todas las cantidades involucradas a unidades ordinarias, siguiendo los debidos factores de conversión. Ver la referencia [5]

Con esto ha quedado plenamente identificada la constante η y la entropía del agujero negro queda definida (en unidades SI)[39]:

$$S_{bh} = \left(\frac{\ln 2}{8\pi}\right) \frac{kc^3}{\hbar G} A \quad (4.11)$$

en donde k es la constante de Boltzmann $\sim 1,4 \times 10^{-23} m^2 kg/s^2 K$.

La segunda ley generalizada

Una vez se tiene la entropía del agujero negro en las manos, aparece una explicación más plausible al problema propuesto por Geroch. Según la propuesta de Bekenstein, no se puede atribuir la pérdida irremediable de entropía al agujero negro simplemente por ser lanzada a éste de manera paulatina; si bien, la entropía de un sistema -y por tanto la información acerca de éste- desaparecen del universo al entrar a un agujero negro, no hay violación a la segunda ley debido a que el agujero ya contiene entropía desde un principio. La regla implícita en la deducción de la entropía de Bekenstein dice que a pesar de que la información acerca de un cuerpo desaparece al entrar en un agujero, -viéndose esta pérdida como una variación en la entropía común del cuerpo $-S_c$ - éste más que compensa esa pérdida con un aumento en su área y por ende, un aumento en su misma entropía; se espera que la segunda ley pueda ser generalizada teniendo en cuenta que la contribución del agujero negro a la entropía del universo es real:

$$\Delta S_{bh} + \Delta S_c = \Delta(S_{bh} + S_c) \geq 0 \quad (4.12)$$

Lo anterior se puede enunciar concretamente: *La entropía común al exterior del agujero negro mas la entropía del agujero negro jamás disminuye*[31, 39, 42]. Aquella ley se conoce como *la segunda ley generalizada* y conecta de manera contundente la segunda ley de la termodinámica con los agujeros negros; no obstante, aún quedan asuntos pendientes con respecto a una formalización definitiva en cuanto a una termodinámica en los agujeros negros: la temperatura. Si bien, se puede obtener un valor provicional para cierta “temperatura”, no sería prudente teniendo en cuenta los argumentos al inicio de la sección 3.3. La pieza faltante en este rompecabezas sería el sorprendente descubrimiento de S. Hawking, cuyo trabajo en la teoría de los agujeros negros sería de crucial importancia en la física contemporánea.

4.2. La radiación de Hawking

Durante los meses posteriores al descubrimiento de Bekenstein acerca de que la entropía existente en el agujero negro es típicamente su área, Stephen Hawking de Cambridge demostró desacuerdo hacia las comparaciones de entropía con área que se sugería como una mala interpretación a su teorema del área (3.20). Eventualmente fue sugerida a él la idea de que los agujeros negros rotantes podrían emitir partículas y tras una visita a los físicos soviéticos Zel’dovich y Starobinsky, Hawking descubrió que inclusive los agujeros negros no-rotantes podrían emitir partículas (Hawking & Israel, 1987). Los resultados fueron publi-

cados en 1974 para la revista *Nature* bajo el nombre de “Black hole explosions?” [43]; aunque rechazado categóricamente al principio, la segunda publicación de 1975 denominada “Particle creation by black holes” [44] resultó ser el hallazgo más importante de la década. Según el descubrimiento de Hawking, los agujeros negros deberían emitir partículas -a expensas de la absorción de antipartículas generadas en el horizonte de eventos- en una radiación termal con una temperatura proporcional a la gravedad superficial, tal y como se sospechaba.

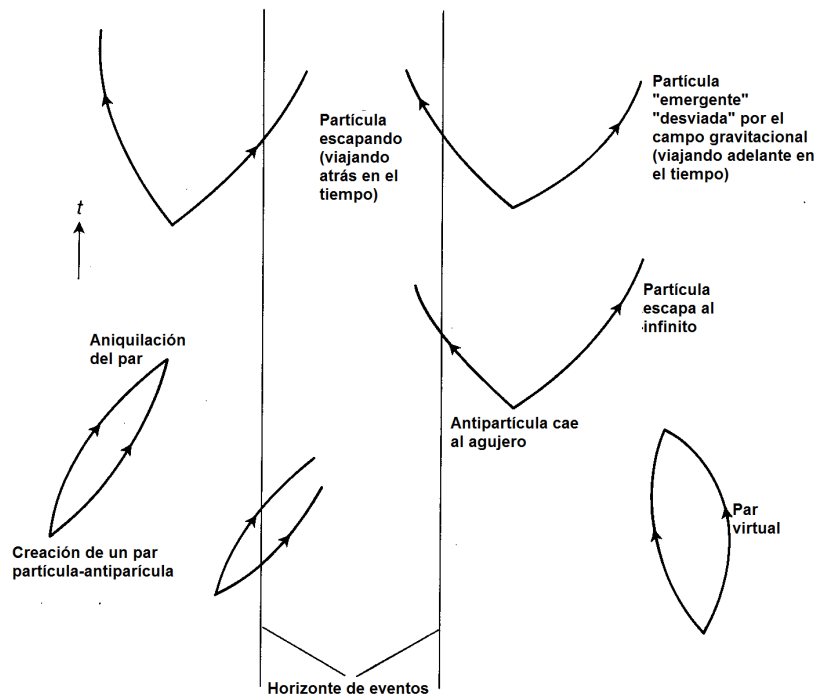


Figura 4.1: Esquema del mecanismo de radiación de Hawking. Los pares virtuales de partículas y antipartículas formados fuera del horizonte de eventos contribuyen en la pérdida de masa del agujero negro y en su eventual evaporación. Se observa que el evento de captura de una antipartícula es equivalente al escape de una partícula que viaja atrás en el tiempo. (Adaptado de *R. D Inverno, "Introducing Einstein's Relativity"*. Ver referencia [2])

Aunque la derivación de la radiación térmica de Hawking resulta ser altamente complicada de obtener, debido al uso de teoría cuántica de campos en espacios curvos, se puede proceder de manera heurística a indagar acerca de la forma que se esperaría encontrar del espectro de temperatura de la emisión de partículas. Si se supone que las partículas que serían emitidas por un agujero negro son de distinta gama, también se esperaría obtener una radiación electromagnética (emisión de fotones) proveniente del horizonte de eventos. Uno puede imaginar los agujeros como cuerpos negros casi perfectos, esto significa que un agujero negro puede emitir casi toda la radiación que recibe en forma de calor; por supuesto, no toda la radiación puede ser absorbida por el agujero negro: algunos fotones con longitud de onda mayor al radio gravitacional estarían altamente deslocalizados como para entrar al horizonte. Consideremos un fotón de energía $E = hc/\lambda$ el cual tiene puede tener una longitud de onda equivalente al radio de Schwarzschild $\lambda \simeq 2MG/c^2$ (durante esta sección se usarán las unidades convencionales) para a un agujero negro estático (Davies 1978)[46]. Ahora se

puede escoger la energía térmica de esa radiación como aquella de un espectro planckiano (Reiff, 1965):

$$\frac{hc}{\lambda} \simeq kT \quad (4.13)$$

$$\frac{hc^3}{2MG} = \xi kT \quad (4.14)$$

$$T = \frac{\pi \hbar c^3}{\xi kGM} \quad (4.15)$$

Con ξ siendo una constante que se esperaría obtener a partir del tratamiento cuántico completamente adecuado (recordando que $\hbar = h/2\pi$). La expresión para la temperatura en (4.15) de un agujero de Schwarzschild sugiere que el agujero puede evaporarse eventualmente por la disminución en su masa, aumentando la temperatura cada vez más hasta desaparecer en una dramática explosión (Hawking 1975). Recordando que la gravedad superficial (3.16) es $\kappa = c^4/4GM$, se tiene una expresión equivalente y general[43, 44, 46]:

$$T_{bh} = \frac{4\pi \hbar}{\xi kc} \kappa \quad (4.16)$$

Lo anterior demuestra la dependencia (equivalencia) de la temperatura con la gravedad superficial, tal y como se esperaba con las suposiciones expuestas en la sección 3.3. Al realizar el ajuste completo con los resultados obtenidos por Hawking, la constante asociada resulta tener el valor correcto de $\xi = 8\pi^2$ y la temperatura corregida se ajusta con la emisión termal $T = \frac{\hbar}{2\pi kc} \kappa \sim 10^{-6}(M_\odot/M)K$ (Hawking 1976), lo cual significa que un agujero negro que pueda tener la masa del sol ($M_\odot = 2 \times 10^{30}kg$)[43, 44] apenas tendría una temperatura de $10^{-6}K$; sin duda alguna, una temperatura imperceptible a nivel astrofísico y no detectada hasta la fecha.

Desde luego, el descubrimiento de Hawking no solo pone de manifiesto la capacidad de irradiancia de un agujero negro, sino que también señala un paso enorme en cuanto a la gravedad cuántica cuya teoría correcta debería predecir la radiación de Hawking. Ahora, si también se tiene la temperatura de la radiación de partículas, se puede hallar la entropía asociada al equilibrio térmico con el respectivo espectro; primero, reescribiendo la expresión (3.19) en una forma termodinámicamente más adecuada[5, 46, 47]:

$$dm = TdS + \Omega_H dL + \Phi dQ \quad (4.17)$$

Para un agujero negro sin carga y no rotante, la ecuación puede ser escrita de manera más simplificada

$$dm = TdS \quad (4.18)$$

Al integrar directamente, teniendo en cuenta el valor (4.15) para la temperatura y haciendo la corrección de Hawking, se halla la entropía

$$S_{bh} = \frac{kc^3}{4\hbar G} A \quad (4.19)$$

De nuevo, si se asume un agujero negro de una masa solar, la entropía adquiere un valor $S \sim 10^{71} J/K$; un valor tan excesivamente alto en comparación con la entropía termodinámica del sol, que lo supera en un factor de 10^{20} veces (Bekenstein 1981)[48]. Esto significa que la entropía de un agujero negro llega a simbolizar el máximo valor permitido por las leyes de la física (Bekenstein 1973-1981). Claramente, con la correcta interpretación cuántica, el valor de la constante de Bekenstein toma el valor $\eta = 1/4$; además, la ecuación se puede simplificar en unidades de planck para obtener la fórmula $S_{bh} = A/4l_p^2$, cuyo carácter de cuantización queda evidenciado en áreas de Planck.

	Termodinámica	Agujeros negros
Ley Zero	Temperatura constante en un sistema en equilibrio térmico	Gravedad superficial constante a lo largo del horizonte de eventos
Primera Ley	$dE = TdS - pdV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \Omega_H dL + \Phi dQ$
Segunda Ley	$\delta S \geq 0$	$\delta A \geq 0$
Tercera Ley	Imposibilidad de acceder a una temperatura de cero absoluto bajo una cantidad finita de procesos	Imposibilidad de alcanzar una gravedad superficial de cero en una cantidad finita de procesos

Cuadro 4.1: Resumen comparativo entre las leyes de la mecánica de agujeros negros y las leyes de la termodinámica.

4.3. Relaciones termodinámicas

Una revisión rápida a partir de los descubrimientos de Hawking y Bekenstein nos permite encontrar las relaciones termodinámicas sencillas que se pueden aplicar a los agujeros negros. La ecuación de masa (3.14) puede ser reescrita en términos de la entropía $S = A/4$ (Davis 1978):

$$m = \left(\frac{S}{4\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{4S} + \frac{\pi L^2}{S} \right)^{1/2} \quad (4.20)$$

Igualmente, de la ecuación (4.17) se observa que la energía total del agujero negro es una función dependiente de la entropía y los parámetros externos (S, L, Q), lo cual implica que se puede reexpresar como una *diferencial exacta*[36, 35, 46] de la forma

$$dm = \left(\frac{\partial m}{\partial S} \right) dS + \left(\frac{\partial m}{\partial L} \right) dL + \left(\frac{\partial m}{\partial Q} \right) dQ \quad (4.21)$$

y con ésto ya se pueden definir por derivación las cantidades involucradas:

$$T = \left(\frac{\partial m}{\partial S} \right)_{Q,L} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{8\pi} - \frac{\pi Q^4}{8S^2} - \frac{\pi L^2}{2S^2} \right) \quad (4.22)$$

$$\Omega_H = \left(\frac{\partial m}{\partial L} \right)_{S,Q} = \frac{\pi L}{mS} \quad (4.23)$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial m}{\partial Q} \right)_{S,L} = \frac{1}{m} \left(\frac{Q}{2} + \frac{\pi Q^3}{2S} \right) \quad (4.24)$$

Las cuales son muy similares a las encontradas por Smarr en 1973[32]. Adicionalmente, se puede hallar la *capacidad calorífica* correspondiente por medio de la relación[36]:

$$C_{L,Q} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{L,Q} = \frac{dm}{dT} \quad (4.25)$$

Cuya definición se puede interpretar como la capacidad de aumentar en una unidad la temperatura del agujero negro manteniendo sus parámetros constantes; hace referencia al calor absorbido por el agujero cuando cambia su variable de estado (temperatura). Para propósitos demostrativos, será suficiente con mostrar las propiedades que se desenvuelven a nivel básico para un agujero negro estático de Schwarzschild. Usando la expresión (4.15) se infiere que para este caso, la temperatura sería dada por la simple relación:

$$T = \frac{1}{8\pi m} \quad (4.26)$$

de donde se obtiene la capacidad calorífica

$$C = \frac{dm}{dT} = -\frac{1}{8\pi T^2} = -8\pi m^2 \quad (4.27)$$

Debido a que lo anterior corresponde a un valor negativo, se puede evidenciar que el agujero se va calentando a medida de que pierde masa por su proceso de evaporación. Por cuenta

del mecanismo de radiación del Hawking, se asume que el agujero negro obedece la ley de Steffan-Boltzmann en cuanto a su luminosidad[50] (en unidades convencionales)

$$L = \sigma AT^4 \sim 10^{-32} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 W \quad (4.28)$$

en donde σ es la constante de Steffan-Boltzmann $\sim 10^{-18} W m^{-2} K^{-4}$.

Es evidente que un agujero posee una luminosidad muy baja (no en vano, son cuerpos negros en el sentido literal de la palabra); inclusive, un agujero negro de unas diez masas solares tendría una luminosidad de apenas $10^{-34} W$, prácticamente obscuro a cualquier observador y/o detector. Por otra parte, debido a que la luminosidad es, realmente, la potencia disipada por cuenta de la radiación del agujero negro; se puede obtener por integración el tiempo de vida que tomaría tal agujero en evaporarse por completo:

$$L = -\frac{dE}{dt} \quad (4.29)$$

$$t_{ev} = -c^2 \int_m^0 \frac{dM}{L} = -\alpha \int_m^0 \frac{dM}{AT^4} \quad (4.30)$$

$$t_{ev} = \alpha \int_0^m M^2 dM \quad (4.31)$$

Con α como una constante.

La integral demuestra que el agujero negro se evapora por completo en un tiempo finito siguiendo la relación $t_{ev} \sim m^3$ y en efecto, $t_{ev} \sim 10^{63} (M/M_{\odot})^3 s$. Es decir, que un agujero negro de apenas una masa solar tardaría aproximadamente $10^{67} años$ [5] en evaporarse por completo. Sin lugar a dudas, un tiempo descomunal considerando que la edad del universo es de unos $10^{10} años$ [5, 44, 50]; de hecho y en teoría, un agujero negro que haya surgido en los primeros momentos después del big-bang, con una masa de apenas $10^{12} kg$, podría ser visto evaporándose para este momento; a tales cuerpos Hawking los denominó *agujeros negros primordiales*[5, 44, 50].

Con respecto al capítulo anterior, ya parece haber una manera de demostrar la tercera ley de la termodinámica de agujeros negros trabajada en 3.2.3. Recordamos que esta ley nos previene de alcanzar una gravedad superficial de cero en un proceso físico finito; sin embargo, hay que tener en cuenta que la gravedad superficial de un agujero negro es un equivalente de la temperatura de éste, por lo tanto se esperaría que, al realizar un proceso que logré llevar un agujero a su configuración extrema, se haga cada vez más complicado continuar la operación. Si se considera un agujero rotante para simplificar, una posible manera de reducir su gravedad superficial, además de agregar energía, podría ser el mismo proceso de evaporación que terminaría por llevar la masa del agujero negro cada vez más cerca de la configuración $m^2 = a^2$. Si se observa detenidamente la ecuación (4.30), el tiempo de evaporación depende la luminosidad (4.28) y esta última, de la temperatura del agujero negro. En (4.16) se pudo ver que la temperatura y la gravedad superficial están íntimamente relacionadas, y por eso,

podría esperarse que el tiempo de evaporación obedezca una relación del tipo:

$$t_{ev} = -c^2 \int_{m=a}^m \frac{dM}{L(m)} = -\alpha \int_{m=a}^m \frac{dM}{Ak^4} \quad (4.32)$$

$$t_{ev} \sim \int_m^{m=a} \frac{8M^3(M + \sqrt{M^2 - a^2})}{(M^2 - a^2)^2} dM \quad (4.33)$$

Esta aterrorizante integral puede ser efectuada con técnicas habituales, sin embargo y por inmensa fortuna, se ha tenido la oportunidad de ahorrar tiempo en ésto con la ayuda de *WolframAlpha*[®]:

$$t_{ev} \sim \left[\frac{4M^4 + 3a^2M^2 - 26a^4}{3\sqrt{M^2 - a^2}} + \frac{4}{3}M^3 + 5a^2M + \frac{1}{2} \frac{a^4}{a^2 - M^2} - \frac{11}{2}a^3 \tanh^{-1} \left(\frac{M}{a} \right) \right]_m^{m=a} \quad (4.34)$$

No se hace necesario evaluar explícitamente el resultado para notar que, en el límite extremo $m = a$, la integral diverge. Como se esperaba, el proceso de evaporación toma un tiempo ilimitado y por lo tanto, se asume que no parece existir un proceso físico que pueda llevar la gravedad superficial (o temperatura) de un agujero negro a cero.

Con esta última demostración y, ya obtenidas las relaciones y análisis básicos de la termodinámica de agujeros negros, se concluye este capítulo para proseguir con las conclusiones y discusiones finales a propósito de este trabajo.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha concluído el trabajo correspondiente al estudio básico de los agujeros negros y su termodinámica con algunas observaciones de carácter práctico, como las mostradas en este último capítulo con respecto al análisis. Aunque no se tiene mayor espacio para cubrir todos los aspectos de la física de agujeros negros, se ha dado una aproximación introductoria y satisfactoria del estudio, del cual se infieren los siguientes apartados concluyentes:

- Al ir paulatinamente por el estudio de la relatividad general, los agujeros negros parecen ser los cuerpos más simples en el cosmos definidos por tan solo tres parámetros (masa, carga y momento angular); el estudio de estas propiedades demuestra que se puede desarrollar una formalización adecuada para el estudio especializado de los agujeros y que, además, existe un conjunto de leyes asociadas que son similares -o equivalentes- a las de la termodinámica.
- La entropía del agujero negro y su temperatura, pueden ser asociados con el área de su horizonte de eventos y gravedad superficial, respectivamente. Pese a que existe una conexión establecida entre la termodinámica y los agujeros negros, la naturaleza de las cantidades mencionadas se desconoce a nivel fundamental (estadístico) y por lo tanto, el estatus de la teoría permanece como algo especulativo que requeriría de una presunta teoría de gravedad cuántica para dar cuenta de los aspectos envueltos; como la radiación de Hawking, entre otros.
- El realizar un análisis *semi-clásico* de los agujeros negros permite dar una primera aproximación a la concepción de entropía en los agujeros negros. Aunque se desconocen por completo los grados de libertad adicionales que dan lugar a un valor de entropía tan enorme para aquellos cuerpos, se relaciona a esta con el carácter de irreversibilidad que posee la pérdida de información (como el aumento de la incertidumbre acerca de la configuración interna de un cuerpo que ha caído al agujero) que se ve reflejada en el incremento de la entropía del agujero negro, y en su aumento de tamaño (área). Dado que siempre existe una compensación entre la entropía de los agujeros negros y la del resto del universo, se asume que la segunda ley de la termodinámica es generalizada por medio de esta teoría.
- La obtención de las leyes de la termodinámica para los agujeros negros sugiere que el marco disciplinar de la termodinámica es aun vigente para los aspectos relevantes de

la física, debido a que su contundente formulación no ha encontrado ninguna falsación hasta el momento. De una buena manera, este trabajo ha rescatado una parte clásica de la física -de la termodinámica de máquinas de vapor o procesos químicos- para trasladarla a la relatividad general en el campo de eventos astrofísicos como la mecánica de agujeros negros, y además, desde este formalismo algunos aspectos de estos cuerpos pueden ser tomados como ejemplos extremos no muy conocidos de la termodinámica: calor específico negativo, evaporación de Hawking y entropía de Bekenstein, entre otros.

Todo el trabajo realizado para esta monografía ha sido planeado para dar una visión introductoria de un tema particular de la física contemporánea, el cual se espera que constituya un aporte para la base de conocimientos en la licenciatura en física, y que sirva de sustento para futuras investigaciones o discusiones en cuanto a la formación de maestros licenciados. La recopilación de información basada en fuentes históricas originales ha constituido una compleja labor que tuvo como finalidad, mostrar los aspectos generales, desarrollos y conclusiones inferidas durante las primeras etapas en la investigación de la termodinámica de agujeros negros.

Apéndice A

Solución de Reissner-Nordström

Para solucionar las ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.3) en el vacío se inicia con la suposición de que la métrica corresponde a una fuente puntual de carga eléctrica que tenga como resultado una solución de simetría esférica y estática con un elemento de línea en la forma estándar (1.4):

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{A.1})$$

Las componentes del tensor de Ricci para este tipo de métrica fueron halladas anteriormente (1.14-1.17) y de aquellas se obtuvo la solución (1.20) con $\nu = -\lambda$. Apartir de lo obtenido en los primeros capítulos, se prosigue a solucionar las ecuaciones de campo en la ruta más sencilla usando únicamente la componente R_{22} (realmente, se hará al mismo tiempo un cálculo implícito de la misma componente del tensor electromagnético):

$$R_{22} = 2F_{2\alpha}F_2^\alpha - \frac{1}{2}g_{22}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2})$$

con $F_{\mu\nu}$ como el tensor electromagnético definido, en este caso, bajo la suposición de que exista únicamente un campo eléctrico en dirección radial procedente de la fuente [2]:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E(r) & 0 & 0 \\ E(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

se asume que el tensor en cuestión es antisimétrico, es decir que $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ [2, 4, 5, 7].

Dadas las componentes del tensor electromagnético, se hace evidente que el primer término en la componente R_{22} es cero y, para terminar de simplificar la expresión, se sigue hallando el invariante del segundo término en la derecha sumando sobre las únicas componentes existentes e iguales:

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{01}F_{01} + F^{10}F_{10} = 2F^{01}F_{01} \quad (\text{A.4})$$

Adems, se han tenido en cuenta las propiedades de antisimetría del tensor.

Para hacer explícito el cálculo, es necesario hacer gimnasia de índices para determinar la parte contravariante del tensor

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\sigma} g^{\rho\beta} F_{\sigma\rho} \quad (\text{A.5})$$

$$F^{01} = g^{0\sigma} g^{\rho 1} F_{\sigma\rho} = g^{00} g^{11} F_{01} \quad (\text{A.6})$$

y se introduce esta expresión en (A.4)

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2g^{00} g^{11} (F_{01})^2 = -2e^{-(\nu+\lambda)} E^2(r) \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, se pone todo junto en la componente del tensor de Ricci (A.2) y se obtiene la expresión simplificada:

$$R_{22} = -\frac{1}{2} g_{22} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -r^2 e^{-(\nu+\lambda)} E^2(r) \quad (\text{A.8})$$

A continuación, se debe tener en cuenta la contribución de curvatura del tensor de Ricci en la componente a trabajar, la cual está dada por la expresión hallada en (1.16) para ser igualada con (A.7) en la forma:

$$R_{22} = \left(\frac{1}{2} r\nu' - \frac{1}{2} r\lambda' + 1 \right) e^{-\lambda} - 1 = -r^2 e^{-(\nu+\lambda)} E^2(r) \quad (\text{A.9})$$

Se usa la condición (1.20) para reemplazar $\nu = -\lambda$ obteniendo la siguiente ecuación diferencial simplificada

$$(r\nu' + 1)e^\nu = 1 - r^2 E^2(r) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dr}(r e^\nu) = 1 - r^2 E^2(r) \quad (\text{A.11})$$

Esta última ecuación se puede solucionar de manera sencilla, no sin antes conocer la función $E(r)$ que debe corresponder al campo eléctrico de la fuente y para la cual se deben solucionar las ecuaciones de Maxwell covariantes $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Se procede a continuación a hallar la derivada covariante de manera explícita:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu F^{\mu\alpha} \quad (\text{A.12})$$

Para simplificar los cálculos, es útil usar una fórmula para los símbolos de Christoffel [6] de una métrica diagonal, tal y como se mostró en el primer capítulo (1.10 - 1.13) que será reemplazada en la derivada covariante; de manera concisa:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} \quad (\text{A.13})$$

con $g = -r^4 \sin^2 \theta e^{(\mu+\lambda)}$ como el determinante del tensor métrico y el signo negativo aparece para obtener una expresión positiva en la raíz.

Reemplazando la fórmula (A.13) en la derivada covariante y expandiendo la parte simétrica

de la última expresión se tiene[7]:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\alpha}(\sqrt{-g})F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}(F^{\mu\alpha} + F^{\alpha\mu}) \quad (\text{A.14})$$

$$= \partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g})F^{\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) \quad (\text{A.16})$$

La última parte de la derecha en (A.14) se hace cero debido a que el tensor electromagnético es antisimétrico y además, la característica de una conexión *libre de torsión*[3, 4, 5, 9] que caracteriza a los símbolos de Christoffel hace posible que un intercambio en sus índices inferiores no afecte la sumatoria. Por otra parte, la ecuación (A.16) puede ser verificada como una simple regla del producto de la derivada en (A.15).

Para finalizar, se procede a solucionar la componente radial de las ecuaciones de Maxwell usando la expresión simplificada en (A.16). Usando la única componente posible en el tensor electromagnético y, teniendo en cuenta la condición (1.20) en el determinante del tensor métrico, se obtiene:

$$\nabla_1 F^{1\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_1(\sqrt{-g}F^{1\nu}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta}\partial_r(r^2 \sin \theta F^{10}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

Apartir de lo anterior se puede llegar a la siguiente ecuación diferencial ordinaria la cual puede ser integrada directamente

$$\frac{d}{dr}(r^2 E(r)) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$r^2 E(r) = cte. \quad (\text{A.21})$$

$$E(r) = \frac{Q}{r^2} \quad (\text{A.22})$$

Se concluye así el cálculo de la función $E(r)$ y la constante de integración se escoge como la carga eléctrica Q de la fuente para obedecer el teorema de Gauss (que el flujo de campo eléctrico sea únicamente proporcional a la carga atrapada)[7].

Por último, se reemplaza la función obtenida (A.22) en la ecuación (A.11) y se soluciona:

$$\frac{d}{dr}(re^\nu) = 1 - r^2\left(\frac{Q}{r^2}\right)^2 \quad (\text{A.23})$$

$$re^\nu = \int \left(1 - \frac{Q^2}{r^2}\right) dr = r + \frac{Q^2}{r} + cte. \quad (\text{A.24})$$

$$e^\nu = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \quad (\text{A.25})$$

De nuevo, la constante de integración es $-2m$ con el fin de reestablecer la solución de Schwarzschild cuando $Q = 0$.

Se concluye con el elemento de línea (A.1) en su forma definitiva, obteniendo así la prometida solución de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.26})$$

Q.E.D.

Apéndice B

Solución de Kerr-(Newman)

B.1. Tétradas Nulas

Para iniciar con la obtención de la métrica para un agujero negro rotante es necesario hacer uso de una herramienta de uso muy generalizado dentro del formalismo matemático de la relatividad general. Trabajado originalmente en conjunto por Newman y Penrose durante los sesentas¹, este formalismo hace uso de las llamadas *tétradas nulas*, las cuales consisten en un conjunto de vectores linealmente independientes en el 4-espacio (se denominan *Vierbein=cuatro-patas* en alemán) que funcionan reproduciendo la métrica del espacio-tiempo desde un sistema de coordenadas fijo a un observador o evento determinado. La tétroda en cuestión consiste en cuatro vectores etiquetados como: $(e_0^a, e_1^a, e_2^a, e_3^a) = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ con \bar{m}^a como el complejo conjugado de m^a .

Por definición [2][9], la tétroda consta de un vector de tiempo y otros cuatro de espacio que se definen a partir de las siguientes combinaciones:

$$e_0^a = l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^a + i^a) \quad (\text{B.1})$$

$$e_1^a = n^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^a - i^a) \quad (\text{B.2})$$

Como se mencionó con anterioridad, este conjunto de vectores es nulo, es decir, cumplen con las siguientes condiciones de normalización:

$$l^a l_a = n^a n_a = m^a m_a = 0 \quad (\text{B.3})$$

Ahora, se puede proceder a incluir el último par de vectores complejos para finalizar la

¹Newman E & Penrose R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J. Math. Phys. 3:566-78, 1962

tétrada:

$$e_2^a = m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^a + ik^a) \quad (\text{B.4})$$

$$e_3^a = \bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^a - ik^a) \quad (\text{B.5})$$

y además

$$l^a n_a = 1, m^a \bar{m}_a = -1 \quad (\text{B.6})$$

Puesto que los vectores nulos de la tétrada definen por sí mismos una base ortonormal, es posible construir a partir de ellos una métrica g_{IJ} del marco de referencia comóvil a partir del producto interior de estos vectores con respecto al tensor métrico del espacio-tiempo global (g_{ab}):

$$g_{IJ} = g_{ab} e_I^a e_J^b \quad (\text{B.7})$$

La relación se puede invertir fácilmente para obtener la métrica del espacio-tiempo en términos de la tétrada:

$$g_{ab} = g_{IJ} e_a^I e_b^J \quad (\text{B.8})$$

Teniendo en cuenta las condiciones de normalización (B.3 y B.6), es posible constatar que la métrica comóvil está dada por:

$$g_{IJ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Usando la expresión (B.8) se obtiene finalmente la métrica de manera explícita y en términos de la tétrada:

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b - m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a \quad (\text{B.10})$$

y de la misma manera se tienen las componentes contravariantes

$$g^{ab} = l^a n^b + n^a l^b - m^a \bar{m}^b - m^b \bar{m}^a \quad (\text{B.11})$$

B.2. Construcción de la tétrada

La construcción de la tétrada que sirve de base para la obtención de la solución de Kerr puede ser escogida por medio de los vectores tangentes provenientes de las trayectorias geodésicas radiales en la solución de Schwarzschild con coordenadas de Eddington (1.36). Usando un parámetro afín (λ) a lo largo de las geodésicas se tiene -a partir de la condición $ds^2 = 0$ para un intervalo luminoso- la siguiente relación:

$$\frac{du}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{du}{d\lambda} - \frac{dr}{d\lambda} \right] = 0 \quad (\text{B.12})$$

cuyas dos posibles soluciones determinan el primer par de vectores nulos adaptados a las geodésicas radiales, siendo éstos:

$$l_\mu = (-1, 0, 0, 0) \quad n_\nu = \left(-\frac{1}{2}(1 - 2m/r), 1, 0, 0 \right) \quad (\text{B.13})$$

Las coordenadas han sido enumeradas como $x^a = (u, r, \theta, \phi)$

El siguiente paso para la obtención del siguiente par de vectores de la tétrada consiste en una sencilla inspección por medio del uso explícito del tensor métrico en una base ortonormal de 1-formas diferenciales [4][9]. En esta base, el tensor métrico sigue siendo el producto interno de los elementos de una base simplificada:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\text{B.14})$$

$$ds^2 = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \omega^{\hat{\mu}} \otimes \omega^{\hat{\nu}} \quad (\text{B.15})$$

Con “ \otimes ” definido explícitamente como el producto tensorial y $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ es la métrica de Minkowsky que establece el producto entre las 1-formas ($\omega^{\hat{a}}$). En este caso, el elemento de línea que define la métrica es aquel de Eddington-Finkelstein (1.36)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 - 2dudr - r^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{B.16})$$

Al expandir (B.15) se tiene para las coordenadas de Eddington:

$$ds^2 = \omega^{\hat{u}} \otimes \omega^{\hat{u}} - \omega^{\hat{r}} \otimes \omega^{\hat{r}} - \omega^{\hat{\theta}} \otimes \omega^{\hat{\theta}} - \omega^{\hat{\phi}} \otimes \omega^{\hat{\phi}} \quad (\text{B.17})$$

Al comparar (B.16) con (B.17) directamente, se observa con facilidad cuáles son las formas que se necesitan para completar la tétrada:

$$-\omega^{\hat{\theta}} = r d\theta, \quad -\omega^{\hat{\phi}} = r \sin \theta d\phi \quad (\text{B.18})$$

Para finalizar, se procede a obtener el último par de vectores (complejos) nulos a partir de las definiciones (B.4) y (B.5) reemplazando los vectores unitarios j^a y k^a con nuestras formas diferenciales (B.18)

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\hat{\theta}} + i\omega^{\hat{\phi}}) = -\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta + i \sin \theta d\phi) \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^{\hat{\theta}} - i\omega^{\hat{\phi}}) = -\frac{r}{\sqrt{2}}(d\theta - i \sin \theta d\phi) \quad (\text{B.20})$$

y de manera explícita, se concluye:

$$m_\mu = -\frac{r}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, i \sin \theta) \quad \bar{m}_\mu = -\frac{r}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i \sin \theta) \quad (\text{B.21})$$

B.3. Algoritmo de Newman-Janis

Para la obtención definitiva de la métrica de Kerr, es de gran utilidad aplicar el algoritmo propuesto en 1965 por Newman y Janis [20] establecido desde el marco del mismo formalismo de tétradas nulas visto con anterioridad. Inicialmente, es necesario expresar los vectores nulos obtenidos en (B.13) y (B.21) de forma contravariante por medio de una elevación de índices con el tensor métrico inverso g^{ab} :

$$g^{11} = -(1 - 2m/r), \quad g^{01} = -1, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -1/r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{B.22})$$

Para el primer vector l^a , se tienen las componentes contravariantes:

$$l^a = g^{ab} l_b \quad (\text{B.23})$$

$$l^1 = g^{10} l_0 + g^{11} l_1 = g^{10} l_0 = 1 \quad (\text{B.24})$$

y se verifica directamente que $l^0 = l^2 = l^3 = 0$

Para n^a se tienen las siguientes componentes:

$$n^0 = g^{00} n_0 + g^{01} n_1 = g^{01} n_1 = -1 \quad (\text{B.25})$$

$$n^1 = g^{10} n_0 + g^{11} n_1 = g^{01} n_1 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (\text{B.26})$$

$$n^2 = n^3 = 0 \quad (\text{B.27})$$

finalmente, para los vectores complejos m^a

$$m^2 = g^{22} m_2 = \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \quad (\text{B.28})$$

$$m^3 = g^{33} m_3 = \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \left(-\frac{ir \sin \theta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{i \csc \theta}{\sqrt{2}r} \quad (\text{B.29})$$

$$m^0 = m^1 = 0 \quad (\text{B.30})$$

Siendo \bar{m}^a el complejo conjugado de m^a , se agrupan los vectores nulos contravariantes obtenidos:

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (\text{B.31})$$

$$n^\mu = \left(0, -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right) \quad (\text{B.32})$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, i \csc \theta) \quad (\text{B.33})$$

El algoritmo de Newman-Janis inicia formalmente al permitir que la coordenada radial r tome valores complejos, sin embargo, los vectores l^μ y n^μ deben permanecer reales como se

muestra a continuación:

$$l^\mu = \delta_1^\mu \quad (\text{B.34})$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \delta_1^\mu \quad (\text{B.35})$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} (\delta_2^\mu + i \csc \theta \delta_3^\mu) \quad (\text{B.36})$$

En donde \bar{r} , es el complejo conjugado de r

La transformación hasta ahora no parece afectar de momento la métrica, no obstante, la esencia de la derivación se basa en realizar una última transformación compleja de coordenadas en la forma:

$$r' = r + ia \cos \theta, \quad u' = u - ia \cos \theta, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi \quad (\text{B.37})$$

la cual se introduce en la tétrada para obtener:

$$l'^\mu = \delta_1^\mu \quad (\text{B.38})$$

$$n'^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{2mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \right] \delta_1^\mu \quad (\text{B.39})$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta)} [ia \sin \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + i \csc \theta \delta_3^\mu] \quad (\text{B.40})$$

Finalmente, por medio de la ecuación (B.11) se pueden tener las componentes contravariantes de la métrica de Kerr. Una a una, las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} g'^{00} &= -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g'^{11} &= -\frac{r'^2 + 2mr' - a^2}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g'^{22} &= -\frac{1}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ g'^{33} &= -\frac{\csc^2 \theta}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g'^{01} &= g'^{10} = \frac{r'^2 + a^2}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} & g'^{03} &= g'^{30} = -\frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ & & g'^{13} &= g'^{31} = \frac{a}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

lo cual se puede expresar mejor en su forma matricial (desechando las primas), haciendo $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} & -\frac{r^2 + 2mr - a^2}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{a}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & 0 & -\frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

Las componentes covariantes pueden ser obtenidas de la inversa de la matriz (no obstante, esta demostración puede llegar a ser altamente compleja y tediosa).²

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2mr}{\rho^2} & -1 & 0 & \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} & -a \sin^2 \theta & 0 & -\sin^2 \theta ((r^2 + a^2) + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

Con todo ésto, queda por concluir la demostración con el elemento de línea de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) du^2 - 2dudr + \frac{4mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta dud\phi - \rho^2 d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\phi - \left((r^2 + a^2) + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

B.4. Coordenadas de Boyer-Lindquist

Se puede realizar ahora una transformación de coordenadas para obtener el elemento de línea en la forma mostrada en el capítulo 2. La transformación, sigue de la forma:

$$u = t_{BL} + \int \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2mr + a^2} dr \quad (\text{B.44})$$

$$\phi = \phi_{BL} + \int \frac{a}{r^2 - 2mr + a^2} dr \quad (\text{B.45})$$

O usando diferenciales

$$du = dt_{BL} + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \quad (\text{B.46})$$

$$d\phi = d\phi_{BL} + \frac{a}{\Delta} dr \quad (\text{B.47})$$

En donde $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$

Realizando las operaciones, es posible obtener el elemento de línea en coordenadas de Boyer-Lindquist de (2.13) haciendo $t_{BL} \rightarrow t$.

²Los procedimientos habituales para esta operación requieren de la expresión convencional $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$, o del método de la matriz adjunta $g^{ab} = \frac{1}{|g|} \text{Adj}(g_{ab})$; sin embargo, el uso de software matemático como Maple[®] o Wolfram[®] hacen de esta tarea algo más simple en cuestión de algunos segundos.

Bibliografía

- [1] SCHWARZSCHILD, K., *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 189-196, 1916.
- [2] DINVERNO, R., *Introducing Einstein's Relativity*. 5 ed. : Oxford University Press, 1998.
- [3] WEINBERG, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The general Theory of Gravity*. 1 ed.: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [4] MISNER, W., THORNE S., WHEELER A., *Gravitation*. 3 ed. : Freeman and Company, 1973.
- [5] WALD, R., *General Relativity* 1 ed. : The University of Chicago Press, 1984.
- [6] EDDINGTON, A.S., *The Mathematical Theory of Relativity* 1 ed. : Cambrish University Press, 1924.
- [7] MAMMADOV, G., *Reissner-Nordström metric* Replacement project for the final exam of the adv. electromagnetic theory II, Syracuse University NY. May 04 2009 [http://gmammado.mysite.syr.edu/notes/RN_Metric.pdf]
- [8] HAWKING, S., ELLIS, G., *The large scale structure of space-time* 12 ed. : Cambrish University Press, 1994.
- [9] MCMAHON, D., *General Relativity Demystified* 1 ed. : Mc Graw-Hill Inc., 2006.
- [10] CHANDRASEKHAR, S., *The Mathematical Theory of Black Holes* 1 ed.: Oxford University Press, NY, 1983.
- [11] W. Rindler, "Kruskal space and the uniformly accelerating frame," Am. J. Phys. **34**, 1174-8 (1966).
- [12] A. S. Eddington, "A comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae," Nature **113**, 192 (1924).
- [13] D. Finkelstein, "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
- [14] M. D. Kruskal, "Maximal Extension Of Schwarzschild Metric," Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).

- [15] G. Szekeres, "On the singularities of a Riemannian manifold," *Publ. Mat. Debrecen* **7**, 285-301, (1960).
- [16] H. Reissner, "Über die Eigengravitation des elektrischen Felds nach den Einsteinschen Theorie," *Ann. Phys.* **50**, 106-120 (1916).
- [17] G. Nordström, "On the energy of the gravitational field in Einstein's theory," *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238-1245 (1918).
- [18] R. P. Kerr, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
- [19] R. H. Boyer and R. W. Lindquist, "Maximal analytic extension of the Kerr metric," *J. Math. Phys.* **8**, 265-281, (1967).
- [20] E. T. Newman and A.I. Janis, "Note on the Kerr Spinning-Particle Metric," *J. Math. Phys.* **6**, 915-7 (1965).
- [21] R. C. Henry, "Kretschman Scalar for a Kerr-Newman Black Hole," *The Astrophysical Journal*, (1999). [<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9912320v1>]
- [22] J. Lense and H. Thirring, "The Influence of the Self-Rotation of Central Bodies on the Movemens of the Planets and the Moon According to Einsteins Theory of Gravitation" *Physicalische Zeitschrift*, **19**, 156-163, (1918).
- [23] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence "Metric of a rotating charged mass," *J. Math. Phys.* **6**, 918-9 (1965).
- [24] R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 57-59 (1965)
- [25] R. Penrose, "Gravitational collapse: the role of general relativity," *Riv. Nuo. Cim. numero speciale I*, 257 (1969) reprinted in *Gen. Rel. and Grav.* **34**, 1141 (2002).
- [26] S. Hawking, R. Penrose, "The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology," *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* **314**, 529-48 (1970)
- [27] R. Penrose and R. M. Floyd, "Extraction of rotational energy from a black hole," *Nature, Phys. Schi.* **229**, 177-179 (1971).
- [28] D. Christodoulou, "Reversible and irreversible transformations in black hole physics," *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1596-7 (1970).
- [29] D. Christodoulou and R. Ruffini, "Reversible transformations of a charged black hole," *Phys. Rev. D* **4**, 3552-5 (1971).
- [30] S. W. Hawking, "Gravitational radiation from colliding black holes," *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344-6 (1971).
- [31] J. D. Bekenstein "Black holes and the second law," *Lett. Nuo. Cim.* **4**, 737-740 (1972).

- [32] L. Smarr, "Mass Formula for Kerr Black Holes," *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71-3 (1973).
- [33] A. Curir, M. Francaviglia "Isoareal Transformations of the Kerr-Newman Black Holes," *Acta Physica Polonica* **B9**, (1978).
- [34] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, "The Four laws of black hole mechanics," *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [35] REIF, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* Students ed.: Mc Graw-Hill Inc., 1965.
- [36] ADKINS, C.J., *Equilibrium Thermodynamics* 3 ed.: Cambrish University Press, 1988.
- [37] HAWKING, S. W., ISRAEL, W., *Three Hundred Years of Gravitation* 1 ed.: Cambrish University Press, 1989.
- [38] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M., *Course of Theoretical Physics vol. 5: Statistical Physics* 2 ed.: Pergamon Press, 1970.
- [39] J. D. Bekenstein "Black holes and Entropy," *Phys. Rev. D* **7**, 2333-46 (1973).
- [40] C. E. Shannon "A Mathematical Theory of Communication," *The Bell System Technical Journal* **27-I**, 379-423 (1948).
- [41] BRILLOUIN, L., *Science and Information Theory* 2 ed.: Academic Press, New York, 1962.
- [42] J. D. Bekenstein "Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-Hole Physics," *Phys. Rev. D* **9**, 3292-3300 (1974).
- [43] S. W. Hawking, "Black Hole Explosions?," *Nature* **248**, 30-31(1974).
- [44] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes," *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975).
- [45] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Action integrals and partition functions in quantum gravity," *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [46] P. C. W. Davies, "Thermodynamics of Black Holes," *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1313-55 (1978).
- [47] S. W. Hawking "Black Holes and Thermodynamics," *Phys. Rev. D* **13**, 191-7 (1976).
- [48] J. D. Bekenstein "Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems," *Phys. Rev. D* **23**, 287-298 (1981).
- [49] J. D. Bekenstein "Energy Cost of Information Transfer," *Phys. Rev. Lett.* **46**, 623-6 (1981).
- [50] SCHUTZ, B., *Gravity from the Ground up* 1 ed.: Cambridge University Press, 2003.