UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Maestría en Docencia de la Matemática
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

APOE EN EL DISEÑO DE TAREAS CON FUNCIONES EXPONENCIALES: UNA EXPLORACIÓN CON FENÓMENOS BIOLÓGICOS

Autora

María Magdalena Oroa Roth

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

Diciembre, 2024

APOE EN EL DISEÑO DE TAREAS CON FUNCIONES EXPONENCIALES: UNA EXPLORACIÓN CON FENÓMENOS BIOLÓGICOS

Autora

María Magdalena Oroa Roth

Trabajo de grado para optar al título de:

Magíster en Docencia de la Matemática

Directora:

Dra. Jeannette Vargas Hernández

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

Diciembre, 2024

Agradecimiento

A Dios y la Santísima Virgen María, por ser mi guía y fortaleza en cada paso de este camino. A mi familia, cuyo cariño, paciencia y apoyo han sido mi mayor incentivo. Sin su compañía y su estímulo constante, este logro no habría sido posible.

Agradezco de manera especial a mi directora de tesis, la Dra. Jeannette Vargas Hernández, por su paciencia y apoyo, por sus valiosas orientaciones que han sido fundamentales durante todo el proceso de investigación y redacción de este trabajo. Extiendo también, mi gratitud a mis compañeros de maestría, por el apoyo mutuo a lo largo de este recorrido en tierras lejanas, por los momentos de reflexión y el deseo de buscar una mejor educación para nuestro querido Paraguay.

Asimismo, quiero agradecer a la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia y al plantel docente del programa de maestría en docencia de la matemática, por proporcionar un entorno académico desafiante y de alto nivel, por su contribución a mi crecimiento intelectual y profesional.

A mi querida nación paraguaya, por brindarme la oportunidad de realizar esta experiencia académica a través del Programa Nacional de Becas de Posgrado en el Exterior “Don Carlos Antonio López” (BECAL). Gracias a su apoyo financiero y confianza en mi persona, he podido lograr mi formación académica y profesional en este hermoso país, desarrollando una maestría en Didáctica de las Matemáticas, con el objetivo de contribuir a la mejora de la calidad educativa para los estudiantes paraguayos. Sin su valiosa ayuda, nada de esto habría sido posible.

Dedicatoria

A mi familia, por acompañarme en cada paso de este desafío de estudiar en el extranjero, por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia.

A mis profesores, quienes han sido una fuente de inspiración en mi formación académica.

A mis estudiantes, cuya curiosidad y entusiasmo son el motor de mi pasión por la enseñanza de las matemáticas.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN **1**

Capítulo 1. GENERALIDADES **6**

1.1. Inquietud pedagógica que motiva el trabajo **6**

1.2. Explorando las características del contexto **10**

1.3. Justificación **15**

1.4. Objetivos **18**

1.4.1. Objetivo general 18

1.4.2. Objetivos específicos 18

1.5. Aproximación de los antecedentes **18**

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO **34**

2.1. Red Conceptual del objeto matemático **34**

2.1.1. Red conceptual alrededor de las funciones exponenciales 34

2.1.2. Descripción de la red conceptual alrededor de las funciones exponenciales 35

2.2. Red para el diseño de tareas de las funciones exponenciales. **39**

2.2.1. Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) 40

2.2.2. Propuesta de descomposición genética de las funciones exponenciales 47

2.2.3. Un acercamiento desde la fenomenología 50

2.2.4. Recursos. Tecnologías digitales para el aula 52

Capítulo 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS **55**

3.1. Análisis teórico **55**

3.2. Diseño de la enseñanza **56**

3.3. Instrumentos e implementación **59**

Capítulo 4. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE TAREAS **62**

4.1. TAREA 0 .... **63**

4.1.1. Ficha descriptiva para el profesor 63

4.1.2. Presentación de la tarea en el Padlet 64

4.1.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios 65

4.1.4. Respuestas esperadas 65

4.2. TAREA 1 .... **66**

4.2.1. Ficha descriptiva para el profesor 66

4.2.2. Presentación de la tarea en el Padlet 67

4.2.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios. 70

4.2.4. Respuestas esperadas. 71

4.3. TAREA 2 .... **73**

4.3.1. Ficha descriptiva para el profesor 73
4.3.2. Presentación de la tarea en GeoGebra 74
4.3.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios 75
4.3.4. Respuestas esperadas 76

4.4. TAREA 3 .... **79**

4.4.1. Ficha descriptiva para el profesor 79
4.4.2. Presentación de la tarea en GeoGebra 80
4.4.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios 81
4.4.4. Respuestas esperadas 82

4.5. TAREA 4 .... **84**

4.5.1. Ficha descriptiva para el profesor 84
4.5.2. Presentación de la tarea en el Padlet 85
4.5.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios 89
4.5.4. Respuestas esperadas 90

Capítulo 5. CONSIDERACIONES FINALES **92**

5.1. Reflexiones acerca de los objetivos en este trabajo de grado **92**

5.2. Reflexión sobre cómo el desarrollo del trabajo de grado tuvo efecto en mí ser, saber y hacer **97**

REFERENCIAS **101**

Índice de Tablas

TABLA 1. CUADRO DE DEFICULTADES DE APRENDIZAJE CON LAS FUNC. EXPONENCIALES ... 22

TABLA 2. CUADRO DE DEFINICIONES DE ESTRUCTURAS MENTALES DE LA TEORIA APOE 41

TABLA 3. CUADRO DE DEFINICIONES DE ABSTRACIONES REFLEXIVAS DE LA TEORIA APOE ... 43

TABLA 4.DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR: ESTRUCTURAS MENTALES 49

TABLA 5. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR: ABSTRACCIONES REFLEXIVAS 50

TABLA 6. ORGANIZACIÓN Y ESTRUCTURAS DE LAS TAREAS PROPUESTAS 94

Índice de Cuadros

CUADRO 1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL 36

CUADRO 2. LEYES DE LOS EXPONENTES 37

CUADRO 3. TRANSFORMACIONES DE TIPO: TRASLACIÓN ESTIRAMIENTO Y REFLEXIÓN 38

CUADRO 4. ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES 45

CUADRO 5. PRERREQUISITOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO: FUNCIONES EXPONENCIALES 47

CUADRO 6. ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS PROPUESTAS 60

Índice de Imágenes

IMAGEN 1. GRÁFICA DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES EXPONENCIALES 38

IMAGEN 2. DISEÑO DE LA TAREA 0 EN EL PADLET 64

IMAGEN 3. DISEÑO DE LA TAREA 1 EN EL PADLET 67

IMAGEN 4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE PARES ORDENADOS 74

IMAGEN 5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES PARTICULARES ... 78

IMAGEN 6. ESTUDIO DE LA FUNC. EXPONENCIAL CRECIENTE Y LA FAMILIA DE FUNCIONES .. 80

IMAGEN 7. FAMILIA DE FUNCINES EXPONENCIALES 80

IMAGEN 8. EJERCICIO EXTRA-CLASE: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNC. EXPON. 83

IMAGEN 9. DISEÑO DE LA TAREA 4 EN PADLET 85

Índice de Mapas

MAPA 1. RED CONCEPTUAL DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES 35

MAPA 2. RED PARA EL DISEÑO DE LAS TAREAS 40

MAPA 3. TAREAS PROPUESTAS, TEMAS Y PROCESOS MENTALES QUE SE ABORDA 62

INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene su origen en la intención de continuar mi formación docente con horizontes más amplios, que me permitan tener conocimientos actualizados en educación matemática y de mayor profundidad en la planeación de mis clases y en la gestión en el aula. Con la proyección de plantearme de manera creativa y con soportes teóricos, retos que como profesora de matemáticas vivo actualmente y en el día a día en el trabajo académico en las aulas paraguayas.

Es así como este trabajo de grado se enmarca en la Maestría en Docencia de la Matemática, realizada en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, con el apoyo del Programa Nacional de Becas de Posgrado en el Exterior "Don Carlos Antonio López" (BECAL), un programa impulsado por el gobierno paraguayo para mejorar la calidad educativa del país mediante la formación especializada de los educadores.

Adicional a lo expuesto en los párrafos anteriores la inquietud pedagógica que motiva este trabajo surge de la observación de situaciones recurrentes en los estudiantes de primer año de la educación media, en Paraguay, cuando estudian y buscan comprender las funciones exponenciales. Estas inquietudes se observan en preguntas que susurran o dicen explícitamente los estudiantes, tales como: “¿Para qué sirve esto?”, “¿Dónde puedo utilizar esto?” y “¿Por qué estudiamos estas funciones tan difíciles de entender?

No son solo las preguntas, sino también las dificultades que exhiben los estudiantes al estudiar las funciones exponenciales, lo que afianza el interés y la necesidad de comprender algunas variables que hacen de la función exponencial un concepto difícil para los estudiantes y los educadores.

Entre los aspectos a considerar se pueden citar como ejemplos: en primer lugar, la confusión entre las diferentes funciones (lineales, cuadráticas y exponenciales), lo cual exhibe la dificultad que los estudiantes presentan para distinguir las características y el comportamiento analítico de estas funciones, tales como: dominio, rango, monotonía y asíntota. En segundo lugar, la enseñanza de las funciones exponenciales que se ha centrado en la mecanización de procedimientos, sin permitir a los estudiantes una construcción de significados de los conceptos y, en tercer lugar, la falta de una perspectiva interdisciplinaria que vincule las matemáticas con fenómenos reales, lo cual genera una desconexión entre el aprendizaje en el aula y su aplicabilidad en la vida diaria.

Las anteriores afirmaciones tienen su origen en experiencias en el aula y en el acercamiento a artículos y otras publicaciones especializadas que reportan resultados de investigaciones referidas tanto a la enseñanza y como al aprendizaje de las funciones exponenciales en la educación media, en diferentes países, lo que permite organizar unos antecedentes que sirven de base al estudio y al trabajo de grado que se presenta en este documento.

En virtud de lo anterior, se propone un diseño de tareas en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en la enseñanza de la función exponencial, que cumpla con los estándares académicos del currículo del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2022) y, al mismo tiempo, sea relevante, reflexivo y transformador para los estudiantes de la educación media de Paraguay. Esta propuesta se basa en tres elementos esenciales: una contextualización de la función exponencial en fenómenos de la biología, un uso de tecnologías digitales para el aula, como GeoGebra y Padlet, y el diseño de actividades, discusiones y ejercicios extra-clase que son coherentes con las estructuras y mecanismos mentales de construcción, de acuerdo con la teoría de aprendizaje APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas).

En correspondencia con lo expuesto, en el Capítulo 1, se presentan las generalidades del trabajo, donde el lector encontrará una explicación del contexto educativo paraguayo y las razones que motivaron este trabajo de grado. Además, se exponen los objetivos y los antecedentes teóricos que sustentan el diseño de las actividades propuestas.

En el Capítulo 2, se presenta la definición de las funciones exponenciales y los principios de la Teoría APOE, desde los cuales se diseña la adaptación de una descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales, para estudiantes de nivel medio (15 y 16 años). Además de describir las herramientas tecnológicas, tales como GeoGebra y Padlet, utilizadas para facilitar la enseñanza de estos conceptos matemáticos.

Posteriormente, en el Capítulo 3, se abordan los aspectos metodológicos del trabajo, en el cual se describen las fases que se siguen en el diseño de tareas; el análisis teórico que conlleva a la propuesta de descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales. Luego, el diseño de la enseñanza a partir del modelo de actividades, discusiones y ejercicios (ACE) que forma parte de las propuestas de las indagaciones del grupo de investigación en la Teoría de la construcción del conocimiento de matemáticas en el aula, APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas).

Por último, se mencionan los instrumentos que servirán para recoger información y transformarla en datos. Fase que se llevará a término, posterior a la implementación que no se contempla en esta propuesta teórica de diseño. Sin embargo, se proyecta desarrollarla en Paraguay para poder refinar la descomposición genética preliminar.

En el Capítulo 4, se presentan detalladamente las tareas que forman parte del diseño. Cada tarea incluye una ficha descriptiva que guía al profesor en su implementación, con sugerencias específicas, en función a la descomposición genética preliminar diseñada para ello.

Las tareas quedan constituidas por actividades, discusiones y ejercicios extra-clase. La tarea cero, involucra un espacio para la introducción y ambientación sobre el vínculo existente entre la biología y las matemáticas, a fin de preparar la curiosidad y el deseo de aprender de los estudiantes, además de iniciar el uso de las herramientas digitales para el aula que son utilizadas para abordar las demás tareas.

Dos de las tareas están diseñadas, específicamente para este trabajo de grado, desde artículos científicos que son segmentados para presentarlos a los estudiantes en forma de muro interactivo en unos llamativos Padlet, que permitirán el estudio del crecimiento de unas plantas específicas; el cardón y el tomate, fenómenos de crecimiento que responden al modelo exponencial en el cual la variable independiente cambia de manera aritmética y la función cambia de forma geométrica.

Las otras dos tareas incorporan el uso de GeoGebra para explorar a las funciones en conexión con las características establecidas en los fenómenos de crecimiento de las plantas y ampliar el estudio del comportamiento analítico de las funciones exponenciales a través de preguntas que han sido redactadas teniendo presente la conexión entre ellas y el referente que brinda la herramienta central de la teoría APOE, como lo es la descomposición genética presentada en el documento.

En el Capítulo 5, se presentan algunas reflexiones sobre dos aspectos, acerca de los logros de los objetivos trazados para este trabajo de grado en cuanto al diseño de tareas y sobre el impacto que causó en mí, este trabajo de profundización y la experiencia de estudiar una maestría en este país.

En definitiva, este trabajo de profundización marca un hito en mi historia como profesional de una manera favorable, pues no solo consistió en estudiar a los objetos matemáticos, diseñar tareas o aprender sobre la didáctica de la matemática, sino que esta experiencia académica, abarcó los ámbitos de mi ser, hacer y saber.

Así, se abrió un nuevo mundo de investigación y aprendizaje y la intención de contagiar e invitar a otros colegas a seguir descubriendo apasionadamente el mundo de la educación matemática y su belleza que nos envuelve.

Capítulo 1. GENERALIDADES

En este capítulo, se presentan cinco apartados que configuran este documento. El primero presenta la inquietud pedagógica que me motivó como profesora de matemáticas de la educación media paraguaya, para emprender una investigación que propenda por mejorar el aprendizaje de las funciones exponenciales. El segundo, corresponde a la justificación de pertinencia y alcance de este trabajo. Por su parte, en el tercer apartado se abordan los objetivos para este estudio. En el siguiente apartado se presenta la contextualización que corresponde a la caracterización de la población que será beneficiaria de esta propuesta. Finalmente, se presentan los antecedentes que da cuenta de algunas de las investigaciones previas relacionadas con los asuntos de interés, exhibidos en la inquietud pedagógica.

1.1. Inquietud pedagógica que motiva el trabajo

En mi práctica docente en matemáticas con estudiantes de primer año de bachillerato de la ciudad de Asunción, capital del Paraguay, he identificado una serie de dificultades en el aprendizaje, especialmente en lo que respecta a la comprensión de las funciones exponenciales.

Una de las dificultades que los estudiantes experimentan, es la confusión al analizar diferentes tipos de funciones matemáticas, como las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. A menudo, los estudiantes tienen dificultades para distinguir y comprender el comportamiento analítico, característico de cada una de estas funciones.

Otra dificultad de aprendizaje de los estudiantes es la falta de comprensión para diferenciar las variables y cómo estas se relacionan, para poder distinguirlas en variable dependiente e independiente. En el aula los alumnos reciben información sobre la función exponencial, referente a la expresión analítica y su representación gráfica, en ocasiones ellos pueden identificar algunas de las características de las funciones exponenciales, sin embargo, esto es poco suficiente para que los estudiantes puedan profundizar en el estudio de este objeto matemático desde contextos que despierten su interés.

En este sentido, Vargas (2019), menciona que la función exponencial es una función desconocida por los estudiantes que egresan de la educación obligatoria, esto a pesar de ser una de las funciones más utilizadas en diferentes ámbitos como el científico, económico, demográfico, lúdico… y según esta autora, una de las más atrayentes desde el punto de vista matemático.

Una tercera dificultad en el aprendizaje es que, aunque los estudiantes logran identificar el crecimiento de las funciones exponenciales, asociar su significado con una expresión algebraica e incluso representarlas gráficamente, sin embargo, no consiguen conectar ese conocimiento con las aplicaciones en otros ámbitos. Esta desconexión entre la teoría y la aplicación limita su capacidad para apreciar la utilidad de las funciones exponenciales en otras disciplinas.

En esta misma línea, Vargas (2019) señala que:

> La habilidad vinculada a establecer regularidades y examinar la variación es de gran ayuda en el estudio de las funciones en precálculo, sin embargo, son frecuentes las dificultades que presentan los estudiantes para usar estas destrezas en el análisis de datos que los son exhibidos. En el caso de las funciones exponenciales, en el análisis de los fenómenos a través de representaciones gráficas y tabulares, de valores de las variables independientes y dependientes, se ha encontrado que la tendencia de los estudiantes es forzar relaciones lineales. (p 25)

Finalmente, otra dificultad identificada en el aprendizaje de las funciones exponenciales es que los estudiantes de la secundaria tienden a depender excesivamente la mecanización de operaciones y de la memorización, lo que restringe su capacidad para transferir y aplicar el conocimiento en contextos nuevos y diversos.

La investigación sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, específicamente en la comprensión de las funciones exponenciales, revela que esta situación genera confusión y preguntas recurrentes entre los alumnos, que se comentaron en la introducción del trabajo, tales como: “¿Para qué sirve esto?”, “¿Dónde puedo utilizar esto?” y “¿Por qué estudiamos estas funciones tan difíciles de entender?”. Esta problemática representa un desafío para la enseñanza de este concepto matemático, destacando la necesidad de mejorar su visión tanto en el currículo como en las aulas.

Estas inquietudes no solo cuestionan el enfoque pedagógico actual, sino que también destacan la necesidad de proporcionar respuestas más satisfactorias, tanto para estudiantes como para profesores. Una perspectiva de aprendizaje más eficaz permitiría a los estudiantes comprender y apreciar mejor la relevancia de este concepto matemático, tanto en situaciones cotidianas como en contextos científicos.

Estas preguntas, además, me invitan como profesora a reflexionar sobre los desafíos de la enseñanza. Uno de los retos es la manera tradicional y descontextualizada con el que se aborda este concepto matemático, lo que limita su comprensión y aplicación en escenarios reales.

En esta línea de ideas, la inquietud pedagógica acoge otros aspectos relativos al uso de las tecnologías digitales para el aula, como los tratados por Camargo y Sandoval (2017, p. 184),

> no basta ser informado sobre las propiedades de un objeto para construir significado acerca de las mismas. Por el contrario, el aprendizaje depende de experimentar personalmente la variación de un atributo, diferenciar posibles valores del mismo (o

cualidades) e identificar en el objeto el valor específico invariante (o cualidad invariante).

Así, con el conocimiento sobre la importancia de este concepto y los aspectos señalados, en la búsqueda de una orientación y de un soporte para el diseño de tareas que responda a algunas de estas las inquietudes, se dirige la atención hacia las teorías de aprendizaje de las matemáticas. Entre ellas, se encuentran varias investigaciones con una mirada a la enseñanza de las funciones exponenciales utilizando la teoría de construcción del conocimiento matemático en el aula, desarrollada como Teoría APOE y el uso del software GeoGebra.

Por otra parte, un desafío de orden sistémico es la necesidad de mejorar los resultados en las evaluaciones estandarizadas. Como lo mencionan Mello y Giménez (2020), “el sistema educativo paraguayo se ha sometido a varias evaluaciones nacionales e internacionales en las últimas décadas y todas coinciden en el estado crítico del aprendizaje en matemáticas en todos los niveles de la educación formal” (p. 102). Por tanto, se hace necesario y de interés para este trabajo buscar la manera de transformar estas formas de aprendizaje y enseñanza de la matemática en general y en particular, se puede iniciar con la atención a problemáticas específicas como la concerniente a las funciones exponenciales.

Ante estos desafíos, el presente trabajo busca vincular el estudio de las funciones exponenciales con contextos reales y a partir de la experiencia de la profesora autora y su conocimiento sobre el currículo de Paraguay, se decide por un enfoque en fenómenos biológicos, para brindar un contexto de acercamiento y comprensión del significado de este objeto matemático a los estudiantes, mejorar la práctica de enseñanza y potenciar la mejora de los resultados de las pruebas estandarizadas; para ello se propone explorar sobre una perspectiva de enseñanza y aprendizaje, donde se centre en el estudiante y cómo aprende, cómo construye en su mente las acciones y procesos mentales. Por ello se escoge trabajar con la Teoría APOE, y diseñar tareas con la integración de tecnologías digitales, como GeoGebra y Padlet, para ayudar a los estudiantes a visualizar las gráficas de manera dinámica y versátil, a realizar análisis y comprender las funciones exponenciales, su comportamiento y sus características, y a comunicar sus ideas plasmándolas en el tablero virtual (Padlet).

Esta propuesta no solo pretende mejorar la comprensión teórica y la aplicación de las funciones exponenciales, sino también motivar a los estudiantes a percibir la matemática como una herramienta valiosa en su vida cotidiana y futura carrera profesional. Así, se aspira a reducir la brecha entre la teoría y la aplicación, también se espera cultivar un interés duradero en las matemáticas y de su uso en el mundo real.

1.2. Explorando las características del contexto

Se aborda la contextualización de este trabajo a través de tres aspectos: el nacional, el institucional y en el aula.

A nivel nacional, se explora el marco legal y educativo que define los principios de la educación paraguaya, destacando su relevancia como derecho fundamental y herramienta para el desarrollo social. En este sentido, la Constitución Nacional del Paraguay (1992) destaca la relevancia de la educación como un derecho fundamental y un medio para alcanzar altos ideales sociales. En este contexto, el Artículo 73 establece los fines de la educación paraguaya, definiéndolos como,

> “el desarrollo pleno de la personalidad humana y la promoción de la libertad, la paz, la justicia social, la solidaridad, la cooperación y la integración de los pueblos, el respeto a los derechos humanos y los principios democráticos, así como la afirmación del compromiso con la Patria, la identidad cultural y la formación

intelectual, moral y cívica, eliminando cualquier contenido educativo de carácter discriminatorio" (p. 15).

Esta idea determina a la educación como una herramienta clave para el desarrollo integral de los ciudadanos y la construcción de una sociedad más justa, solidaria y democrática.

En la Constitución Nacional del Paraguay (1992) se resalta la responsabilidad y las obligaciones del estado con relación a la educación, los principios fundamentales de la educación, como la igualdad de oportunidades, la libertad de enseñanza, la responsabilidad del Estado en asegurar este derecho, la calidad de la educación y el respeto a la diversidad cultural. Estos principios subrayan la centralidad de la educación en el desarrollo del país y su relevancia como un tema prioritario en la agenda nacional.

En 1998, se promulgó la Ley N.º 1264, Ley General de Educación, que establece los principios generales para la educación pública y privada del Paraguay. Esta ley otorga a la educación un rol prioritario para la consolidación de la democracia, la reducción de las desigualdades y la creación de nuevas oportunidades para todos los habitantes del país. Según esta normativa, se puede observar la intención del Gobierno paraguayo de promover una educación basada en la justicia social, donde todos los estudiantes puedan descubrir sus potencialidades y convertirse en agentes de cambio en el entorno.

Esta visión está en concordancia con Torres (2019) y Hernández (2022), quienes resaltan el papel transformador de la educación. Según el primer autor, "educar implica enseñar a ser personas críticas, reflexivas, creativas, no seres reproductores mecánicos de verdades de la autoridad" (p. 88). Por su parte Hernández (2022), señala que "el profesorado también se sitúa como un agente transformador, promoviendo las bases críticas, reflexivas, solidarias y plurales para asentar estructuras sociales justas" (s.p.).

En el contexto de una actualización de políticas, esto implica un análisis crítico de los contenidos y enfoques educativos para garantizar que las nuevas generaciones reciban una educación justa y de calidad. Esta revisión de las políticas del estado paraguayo responde a las demandas del siglo XXI y coincide con las ideas de Jaramillo (2011) y Torres (2019), quienes subrayan la importancia de adaptar el currículo a los retos contemporáneos.

El segundo aspecto de la contextualización se refiere al nivel institucional. En este marco, el Ministerio de Educación y Ciencias paraguayo, a través del Plan Nacional 2024, ha planteado como objetivo el "desarrollo de estudios e investigaciones curriculares que permitan evaluar el impacto en la calidad de los procesos y resultados de aprendizaje, así como fomentar la innovación permanente" (MEC, 2009, p. 30). Este proyecto de innovación en la enseñanza de las matemáticas se diseñó con el fin de contribuir a la mejora de la calidad educativa en Paraguay.

Motivada por esta perspectiva y por los desafíos que presenta la enseñanza de las matemáticas, decidí emprender el diseño de este proyecto de innovación. El objetivo es ampliar el horizonte del aprendizaje matemático en mi práctica docente, proponiendo una metodología que se alinee con los principios innovación permanente del Plan Nacional 2024 y que responda a las necesidades de mis estudiantes, fortaleciendo así el aprendizaje de las matemáticas a través de una propuesta dinámica y reflexiva.

A nivel institucional, vale la pena resaltar algunas diferencias que impactan en la posibilidad de establecer los logros y las intenciones de la Constitución Nacional (1992) y la ley general de la educación (1998). Es así como, tanto en instituciones privadas como públicas se pueden establecer distintas realidades de los estudiantes en ambos sectores. Mientras el currículo educativo es igual para todos los estudiantes paraguayos, los contextos en los que se desarrollan son marcadamente diferentes. Los estudiantes del sector privado, por su parte cuentan con mayor facilidad para contar con los recursos materiales, tales como, infraestructura, acceso a tecnologías y mayor movilidad, lo que les facilita una experiencia educativa más cercana. En contraste, los estudiantes del sector público enfrentan limitaciones, como la falta de infraestructura adecuada, acceso limitado a herramientas tecnológicas, dificultades socioeconómicas, que impactan su rendimiento académico.

El tercer aspecto de la contextualización se refiere al nivel de aula. En este sentido, durante el periodo escolar 2023 en una institución privada de la ciudad de Lambaré (Paraguay), se implementó una experiencia educativa orientada a conectar el aprendizaje matemático con la realidad circundante. En esta experiencia educativa, se involucraron diversas áreas del conocimiento científico, como matemática, física, química, biología y ciencias ambientales, dirigida a estudiantes de la educación media (15-16 años). La intención de aquella feria científica fue llevar la enseñanza de estas disciplinas al plano experimental, brindando a los estudiantes una experiencia de aprendizaje interdisciplinaria, tangible y relevante.

En la búsqueda de lograr este objetivo, inició con la lectura y recopilación de información, lo que llevó a combinar la matemática con el estudio de las plantas, específicamente las flores. Posteriormente la indagación, hizo encontrar y descubrir que el crecimiento de los pétalos en ciertas flores podía describirse mediante una función exponencial, conocida como fórmula floral.

A pesar de que esta fórmula requiere conceptos matemáticos y biológicos complejos, se logró adaptar su aplicación de manera accesible para los estudiantes de secundaria, utilizando el software de geometría dinámica, GeoGebra. Esto permitió a los estudiantes explorar y visualizar de manera concreta el comportamiento de las funciones exponenciales, vinculando la matemática con fenómenos naturales.

Esta integración interdisciplinaria entre la matemática y la biología no solo propició un ambiente de aprendizaje, sino que también despertó el asombro y la curiosidad en los estudiantes. Haciendo fuerza la reflexión de Mora (2018) en su conferencia *Somos lo que la educación hace de nosotros*, que destaca que generar entusiasmo y curiosidad en los estudiantes es clave para un aprendizaje constructivo y significativo.

La experiencia vivenciada con los profesores y estudiantes, en la Feria Científica mostró que el uso de herramientas tecnológicas y la colaboración entre distintas áreas del conocimiento puede transformar en los estudiantes su deseo y aproximación al aprendizaje.

Considerando los aspectos mencionados, tanto los lineamientos de la educación paraguaya, las reflexiones de los referentes e investigaciones leídas y estudiadas, así como también la valiosa guía de profesores investigadores de alto nivel que han compartido en este camino de formación, expertos tanto en el área de las matemáticas como en la didáctica de las matemáticas con quienes he enriquecido mi visión educativa y mi misión como educadora y dan una aproximación al perfeccionamiento de mi práctica docente, mi visión reflexiva y mi misión como educadora, para beneficio de mis estudiantes y de mi nación.

Sin duda alguna, esta experiencia de realizar una Maestría en Educación Matemática en la ciudad de Bogotá, mediante una beca otorgada a educadores, como parte de un convenio entre Paraguay y Colombia, dan pie a un reconstrucción en mi formación y un soporte para la transformación de mi saber ser y mi saber hacer en mi práctica como profesora.

1.3. Justificación

En esta sección, se reconoce la importancia, pertinencia y relevancia de estudiar y analizar el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales.

Desde la perspectiva del aprendizaje, es esencial que los estudiantes desarrollen los procesos mentales necesarios para comprender funciones exponenciales, realizar análisis, construir procesos, describir lo que observan y comunicar lo que descubren al trabajar con este objeto matemático. En este sentido, los objetivos de la educación paraguaya, definidos en el currículo nacional, están orientados desarrollar competencias generales en los estudiantes de educación media. Dentro de estas, se enfatiza el área de matemáticas, cuyo propósito es que los estudiantes "planteen y resuelvan problemas con una actitud crítica y ética, utilizando el pensamiento lógico y el lenguaje matemático, con el fin de formular, deducir y realizar inferencias que contribuyan tanto al desarrollo personal como social" (MEC, 2011, p. 18).

En este contexto, Vargas (2017) señala que la función exponencial es una de las herramientas más prácticas para modelar situaciones específicas. Estas incluyen el cálculo del crecimiento poblacional, el crecimiento bacteriano, el interés compuesto, la desintegración radiactiva, la concentración de alcohol en sangre y la duración de medicamentos en el cuerpo humano. A partir de esta premisa, Camargo y Sandoval (2017) destacan la importancia de: "delinear tareas en las que los estudiantes construyan, a partir de la evidencia obtenida por exploración empírica de situaciones de variación, enunciados relativos a fenómenos o hechos abordados en los que argumenten la relación de dependencia de las variables involucradas en ellos" (p.181).

Además, en mi experiencia profesional, he observado que las funciones exponenciales se pueden aplicar a fenómenos como la cantidad de pétalos en una flor (a través de la ecuación floral) e incluso la propagación del virus COVID-19 durante la pandemia de 2020. Esta aproximación, centrada en fenómenos biológicos a la función exponencial, no solo busca desarrollar habilidades matemáticas, sino también fomentar una actitud positiva hacia el aprendizaje.

En cuanto a la enseñanza, el objetivo es contribuir a la educación de los estudiantes de secundaria en consonancia con los fines de la educación paraguaya, establecidos en la Ley general de la educación (1998, p. 2). La propuesta busca potenciar el aprendizaje de las funciones exponenciales mediante los avances en la didáctica de las matemáticas, con un énfasis particular en la Teoría APOE.

En términos generales, la comunidad matemática reconoce la importancia de las funciones exponenciales por su capacidad para modelar fenómenos en áreas como la física, biología, química y economía. Sin embargo, desde la perspectiva docente, se observa que su enseñanza no recibe la atención adecuada en el currículo de matemáticas y que los estudiantes tienen dificultades para comprender su origen y su aplicación en diversos contextos.

En línea con lo mencionado anteriormente, este trabajo busca acercar a las funciones exponenciales a la realidad de los estudiantes de bachillerato (15-16 años) en las instituciones educativas, Colegio Nacional Santa Teresita del Niño Jesús y Colegio Técnico Carlos Antonio López, de la ciudad capital del Paraguay. Aunque ambas instituciones comparten un mismo plan de estudios dentro del currículo paraguayo, sus realidades socioeconómicas son diferentes, lo que impacta en el rendimiento y la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

En 2009, el Ministerio de Educación y Ciencias lanzó el Plan Educativo 2024, un marco de referencia orientado en mejorar la calidad educativa en Paraguay. Este plan establece que los estudiantes deben desarrollar la capacidad de resolver problemas con pensamiento crítico y ético, utilizando el lenguaje matemático para formular y deducir conclusiones que contribuyan al desarrollo personal y social. Este objetivo plantea un reto a los docentes, quienes deben implementar acciones innovadoras que beneficien a otros docentes enriqueciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A partir de estos argumentos, surge la necesidad de desarrollar nuevas estrategias didácticas, que mejoren el aprendizaje de los estudiantes, en las matemáticas, especialmente en lo que respecta, a las funciones exponenciales. Para ello, se propone profundizar en el proceso de construcción del conocimiento basado en la Teoría APOE.

En conclusión, este trabajo busca no solo una comprensión de las matemáticas, sino también la integración de tecnologías digitales para el aula y la contextualización en fenómenos reales que permitan a los estudiantes conectar los conceptos con ciertos fenómenos biológicos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar tareas, desde la teoría APOE, a partir de fenómenos de la biología, para estudiantes de educación media, de 15 y 16 años, proyectadas a la construcción del concepto funciones exponenciales como un proceso.

1.4.2. Objetivos específicos

Adaptar una descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales en el conjunto de los números reales, para el nivel medio, desde el análisis teórico de la metodología ACE, como herramienta en el diseño de tareas.

Diseñar tareas orientadas a generar espacios de discusión y reflexión, con la intención de potenciar las estructuras y mecanismos mentales de construcción, para la comprensión proceso de la función exponencial en el conjunto de los números reales.

1.5. Aproximación de los antecedentes

En este apartado se presenta el recorrido realizado por algunos antecedentes, organizados según los desafíos expuestos en la inquietud pedagógica, para ello se usaron los siguientes buscadores: investigaciones que abordan el aprendizaje de las funciones exponenciales; investigaciones que abordan la enseñanza de estas funciones; e investigaciones que abordan tareas y actividades relacionadas con este objeto matemático. En total se consultaron 90 investigaciones de las cuales, para estos antecedentes, se consideraron trece.

En relación con las investigaciones que abordaron con el aprendizaje de las funciones exponenciales se ubican cuatro documentos. El primero de ellos corresponde a la investigación desarrollada por Sureda (2012), quien ha diseñado tareas y experimentos que resaltan la importancia de las estructuras mentales y el desarrollo cognitivo de los estudiantes al enfrentarse a este concepto. Para ello, la autora describe, cómo empezar a estudiar las funciones exponenciales a partir de diferentes conceptos matemáticos y de algunas de sus propiedades, además enuncia las siete formas de empezar a estudiar las funciones exponenciales:

> (I) Estudiar la función exponencial a partir del estudio de una sucesión geométrica. (II) Estudiar la función exponencial como continua, que transforma las sumas en producto, la ecuación funcional. (III) Estudiar a la función exponencial como la inversa de la función logarítmica. (IV) Estudiar la función exponencial a partir de la búsqueda de una función continua cuyo factor de incremento entre "y" es independiente de "x". (VI) Estudiar la función exponencial buscando una función derivable que traduce la evolución de una magnitud cuyo índice de incremento le es proporcional, por la ecuación diferencial. (VII). Estudiar a la función exponencial como una serie de potencias en el campo real o complejo. (Sureda, 2012, p. 59)

La ruta propuesta por Sureda (2012), está vinculada con sistemas de representación que permiten a los estudiantes experimentar la necesidad de construir conocimientos. Esta investigadora, afirma en las conclusiones de su investigación, que es importante que "los estudiantes puedan tener un espacio donde puedan construir su aprendizaje, dando lugar a ensayos y errores, a la exploración, pensar por sí mismos y equivocarse" (p. 120). Lo anterior ayuda a favorecer el intercambio de pareceres entre pares y a hacerse preguntas que mueva a construir conocimiento y el significado del objeto matemático que se desea hacer comprender en ellos.

El segundo trabajo relacionado con el aprendizaje de las funciones exponenciales es el desarrollado por Sureda y Otero (2013), quienes analizaron las diferentes respuestas a las tareas propuestas a los estudiantes y con ello lograron identificar una caracterización para un proceso progresivo en la representación gráfica de las funciones, lo que les permite construir cinco sistemas de representación: Lineal, Parcialmente no lineal, No lineal, Parcialmente exponencial y Exponencial.

Para la clasificación anterior se recurre, entre otros, a los sistemas de representación que han sido nombrados como:

> Sistema de representación numérico (SRN), Sistema algebraico de primer orden (SRA1), Sistema algebraico de segundo orden (SRA2), Sistema analítico gráfico (SRG) y Sistema de representación verbal escrito (SRVE). Con esto, sugieren, que hay una conceptualización progresiva que va desde las intuitivas formas de entender las situaciones como lineales, hasta identificar las características de los crecimientos exponenciales. (Sudera y Otero, 2013, p.96)

Lo anterior hace referencia a cómo los estudiantes inician su aprendizaje sobre las funciones exponenciales, comienzan de manera intuitiva, con las relaciones lineales y a medida que avanzan, son capaces de identificar patrones más complejos, como el crecimiento exponencial. La clasificación de las respuestas en estos sistemas sugiere que el proceso de aprendizaje sigue un camino de conceptualización progresiva, donde los estudiantes pasan de ver las situaciones de forma más sencilla a tener una comprensión más compleja, especialmente cuando se enfrentan a crecimientos exponenciales. Este proceso de la conceptualización es fundamental para diseñar tareas didácticas que permitan a los estudiantes comprender las funciones exponenciales.

Sureda y Otero (2013) destacaron la importancia de incorporar tareas de verbalización en el proceso de aprendizaje, ya que estas permiten a los estudiantes construir y discutir sobre las relaciones, diferencias y características de las funciones exponenciales.

Estas autoras observaron que la verbalización, al permitir que los estudiantes expresen en palabras su proceso de razonamiento matemático, facilita la interpretación y conexión entre diferentes representaciones de las funciones exponenciales, como las gráficas, algebraicas y numéricas.

El tercer trabajo relacionado con el aprendizaje de las funciones exponenciales es el desarrollado por Reyes (2016), quien, en su investigación, refiere que los estudiantes suelen tener dificultades para aprender sobre las funciones matemáticas, en los siguientes casos:

> 1.Dificultades al graficar una función dado su forma algebraica, sin tomar en cuenta relevancia del dominio y recorrido de la función. 2. Dificultades al comparar más de una función con relación al cambio de variables en ellas, al momento de graficar una función dada 3. Dificultades al encontrar la forma algebraica de una función dependiendo de su gráfica. (Reyes, 2016, p. 16)

Esta autora, en las conclusiones de su investigación, identifica que los estudiantes presentan deficiencias importantes al realizar conversiones entre los registros algebraicos y gráficos, especialmente cuando deben graficar una función a partir de su expresión algebraica. Estas dificultades coinciden con otros estudios que también señalan problemas similares, indicando que los estudiantes no toman en cuenta elementos esenciales como el dominio y recorrido al realizar estos cambios.

Además, en los resultados obtenidos en su investigación, Reyes (2016) encontró que "los estudiantes se equivocaron al realizar la conversión entre registros gráfico – algebraico y no lograron identificar las funciones" (p. 52). Los estudiantes tienden a confundir las representaciones gráficas de funciones como la exponencial, logarítmica y raíz cuadrada, lo que evidencia una falta de comprensión conceptual sobre las características de cada tipo de función. Este estudio recomienda fortalecer los contenidos básicos de funciones matemáticas para mejorar la competencia en la conversión entre registros semióticos.

El cuarto trabajo relacionado con el aprendizaje de las funciones exponenciales, es el desarrollado por Vargas (2019), quien, a su vez, presenta una revisión de las dificultades que enfrentan los estudiantes al momento de aprender el concepto de funciones exponenciales, basándose en un estudio cronológico de revisiones anteriores, citando a diversos autores, tales como Bradie (1998), Baker, Hemenway y Trigueros (2001), Weber (2002a, 2002b), Lage y Trigueros (2006), Elstak (2007) y Sureda y Otero (2015). En la Tabla 1, se presentan estos hallazgos que subrayan la necesidad de fortalecer y potenciar, el aprendizaje de los estudiantes y esto a su vez, a poner atención a la manera de cómo se enseñanza este objeto matemático tan particular como lo son las funciones exponenciales.

Tabla 1

Cuadro de dificultades de aprendizaje con las funciones exponenciales

Autor	Dificultad	Descripción
Bradie (1998)	Reconocimiento de contextos de aplicación	Los estudiantes no desarrollan la habilidad de reconocer el uso de las funciones exponenciales en contextos variados, lo que impide su comprensión aplicada en fenómenos.
Baker, Hemenway y Trigueros (2001)	Dificultad con las transformaciones de funciones	Los estudiantes no logran interiorizar los procesos de transformación o encapsular los procesos en objetos, lo que les impide trabajar con confianza en problemas que involucran transformaciones.
Weber (2002a, 2002b)	Comprensión de la exponenciación como proceso	Algunos estudiantes solo entienden la exponenciación como una acción mecánica, reemplazando exponentes en expresiones simbólicas, sin lograr una comprensión del proceso. Esto impide que los estudiantes generalicen la noción de exponenciación más allá de casos simples con exponentes enteros positivos.
Weber (2002a)	Generalización de la exponenciación	Los estudiantes no logran generalizar la exponenciación de manera adecuada, lo que los lleva a dificultades cuando se enfrentan a exponentes racionales o negativos, tampoco pueden explicar funciones exponenciales específicas.
Lage y Trigueros (2006)	Comprensión de la función como objeto	Los estudiantes necesitan concebir la función como variable y realizar acciones sobre ella como objeto. Tienen dificultades con la noción de variable por lo que no pueden generalizar este concepto.
Elstak (2007)	Dificultad para establecer vínculos entre las definiciones de exponentes	Los estudiantes no logran conectar las definiciones de exponentes según su tipo (naturales, enteros, racionales, reales). No reconocen la relación entre exponente positivo y negativo, y

		el significado del exponente cero; lo que afecta su comprensión generalizada del concepto de exponente.
Sureda & Otero (2015)	Tendencia a reducir problemas a razonamientos lineales	Los estudiantes tienden a resolver problemas exponenciales con razonamientos lineales, lo que les impide avanzar hacia una conceptualización adecuada de las funciones exponenciales.

Nota. Elaboración propia con datos tomados de Vargas. (2019, pp. 67-77)

Ahora bien, en relación con los trabajos que abordaron la enseñanza de las funciones exponenciales se ubicaron tres trabajos. El primero de ellos corresponde a la investigación desarrollada por Campo-Meneses y García-García (2021), quienes enfocan su estudio en la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, utilizando las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) como marcos teóricos principales. Con esta investigación, los autores proponen un marco de referencia que permita evaluar y estudiar la comprensión matemática de los estudiantes, a través de la identificación de las conexiones matemáticas que establecen al resolver tareas específicas sobre estas funciones exponenciales.

Los resultados de su investigación revelaron que muchos estudiantes tienen dificultades para realizar conexiones matemáticas entre las representaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas, lo que afecta su comprensión. En este sentido los investigadores hacen énfasis en dos aspectos. El primero hace referencia que, "para que haya comprensión deben conectarse ideas, hechos y procedimientos y, que es necesario que los estudiantes empleen y conecten las diferentes formas de representar un objeto matemático" (Hiebert y Carpenter, 1992, citados en Campo-Meneses y García-García, 2021, p. 26). El segundo aspecto, hace referencia a la definición de las conexiones matemáticas, asumida por estos investigadores con base a otros autores (Businskas, 2008; García, 2018; García-García y Dolores-Flores, 2018; citados por Campo-Meneses y García-García, 2021), como:

> un proceso mediante el cual una persona establece una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones o teoremas entre sí, con otras disciplinas o con la vida real, y son exteriorizadas a través de los argumentos escritos, orales o gestuales que los estudiantes evidencian en el momento en que resuelven las tareas que se les han propuesto. (p. 27)

De lo anterior, Campo-Meneses y García-García (2021), reportan la importancia de las conexiones matemáticas pues:

> (1) establecerlas contribuye a la comprensión de un concepto por parte de un sujeto, además que le permite desarrollar otras habilidades matemáticas y, (2) estudiar las conexiones matemáticas que un sujeto establece permite inferir su nivel de comprensión, lo cual es clave en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (p.27)

El segundo trabajo relacionado con la enseñanza de las funciones exponenciales corresponde a la investigación desarrollada por Campo-Meneses et al. (2024), quienes abordan los criterios que orientan la práctica de un profesor al enseñar la función exponencial y logarítmica en el nivel de bachillerato. Según los autores, en las investigaciones relacionadas con las funciones exponenciales y logarítmicas,

> el foco de las clases es que los estudiantes aprendan a hacer una gráfica partiendo de la expresión simbólica, lo cual hizo que se propiciara la mecanización del proceso de pasar de un registro simbólico al gráfico, dejando de lado cuestiones importantes como algunas aplicaciones de las funciones, que permitirían trabajar mejor el significado de estas funciones como función y que propiciaran diversos procesos matemáticos. (p. 16)

De lo anterior, los autores resaltan que, la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica en el contexto de la investigación es limitada en cuanto a la promoción de una comprensión contextualizada y aunque el profesor, se esfuerce por utilizar recursos tecnológicos y fomentar la interacción de los estudiantes, su enfoque sigue siendo más instrumental que conceptual, lo que impide una mayor demanda cognitiva en los estudiantes (Campo-Meneses et al., 2024).

A pesar de utilizar herramientas como GeoGebra, el profesor sigue un camino tradicional y se enfoca principalmente en que los estudiantes aprendan a graficar a partir de la representación simbólica, lo que lleva a una mecanización del aprendizaje. Por lo que, según estos autores,

> Este panorama muestra la necesidad de seguir indagando al respecto, por los siguientes motivos: (1) al seguir existiendo dificultad en la comprensión de estas funciones es necesario proponer herramientas teóricas que se puedan usar en el diseño de actividades para el aula, de tal forma que se promueva la comprensión en los estudiantes y a su vez sirva para valorarla; (2) son escasos los trabajos que tienen como foco la comprensión de los estudiantes sobre estas funciones en nivel de bachillerato y, (3) son pocos los trabajos que abordan las funciones en conjunto priorizando la relación entre estas. (p. 26)

El tercer trabajo relacionado con la enseñanza de las funciones exponenciales es el desarrollado por Vargas (2017), quien en su investigación analizó casos en la enseñanza de las funciones exponenciales en el contexto universitario. Uno de los resultados de este estudio, muestra que los estudiantes suelen presentar dificultades al comprender las bases conceptuales de las funciones exponenciales, principalmente en relación con la noción de potencia, en especial cuando la base es un número real positivo y el exponente un número entero o racional.

Las conclusiones del trabajo de esta autora subrayan la necesidad de implementar estrategias didácticas que favorezcan una descomposición genética del concepto de función exponencial, permitiendo una construcción progresiva y consciente de los elementos esenciales de estas funciones en los estudiantes universitarios (Vargas, 2017).

En línea con lo anterior, la investigación realizada por esta autora se apoya en la Teoría APOE, refiriéndose a la modelación de mecanismos de construcción. Según Arnon et al. (2014 citado en Vargas, 2019), “la Teoría APOE se centra en los modelos que podrían estar sucediendo en la mente del estudiante cuando está tratando de aprender un concepto matemático” (p. 80).

Las investigaciones realizadas por Vargas (2017, 2019) aportan elementos fundamentales a este trabajo. En particular, de Vargas (2017) se retoma una propuesta de descomposición genética preliminar. Si bien la descomposición genética de la función exponencial presentada por la autora está orientada hacia estudiantes universitarios, en este trabajo se realiza una adaptación dirigida a estudiantes de secundaria. Por su parte, Vargas (2019) ofrece una revisión de investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, la cual también se incorpora para enriquecer el análisis.

Por otra parte, en relación con las investigaciones que abordan sobre los diseños de tareas con las funciones exponenciales, se ubican seis documentos. El primero de ellos corresponde a la investigación de Bocanegra et al. (2013), mencionan varios aspectos sobre el diseño de tareas centradas en las funciones exponenciales, tales como el uso de problemas contextualizados, el uso de gráficos, el uso de software matemático para graficar y visualizar, la importancia de explorar diferentes contextos y que los estudiantes no solo resuelvan problemas matemáticos. En particular, se destaca que la enseñanza de estas funciones se debe abordar a través de problemas contextualizados que ayuden a los estudiantes a relacionar los conceptos matemáticos con situaciones reales, lo cual permite que los estudiantes observen el comportamiento de la función exponencial en términos de su variación y la forma en que el exponente afecta el resultado final.

Otro aspecto relevante es el uso de gráficos para representar las funciones exponenciales. La representación visual permite a los estudiantes identificar más fácilmente los cambios en las variables y entender el comportamiento de la función a medida que se modifica la base o el exponente. Además, el uso de software matemático para graficar las funciones es una herramienta que facilita la comprensión de las diferencias entre las funciones exponenciales crecientes y decrecientes. En este sentido, los autores, destacan el uso de GeoGebra en el diseño de tareas, señalan que "permite al profesor una mayor interacción con los sistemas de representación" (Bocanegra et al., 2013, p. 94).

El segundo trabajo relacionado con el diseño de tareas es el desarrollado por Vargas (2017), quien realiza un análisis de las prácticas de profesores y las tareas que ellos proponen en el desarrollo de sus clases. Esta autora explora la enseñanza de las funciones exponenciales, enfocándose cómo los profesores se proponen construir la comprensión del concepto en el aula a través de diferentes actividades. Uno de los hallazgos de Vargas (2017), es la importancia de las actividades propuestas por los profesores analizados se enfocan en que los estudiantes interioricen la función a través de la variación de los exponentes, comenzando con exponentes naturales y progresando hasta exponentes fraccionarios y negativos. Un profesor en este estudio de caso incluye una tarea trasversal, como lo es el cálculo de interés compuesto continuo. Como aplicaciones se presentan situaciones de crecimiento y decrecimiento, en donde juegan los mecanismos de construcción con los elementos matemáticos que han expuesto en dicho trabajo.

Según Vargas (2017), otro aspecto importante en los hallazgos de las prácticas de los profesores es el caso de las aplicaciones de la función exponencial, recurriendo al estudio de los elementos del concepto y a la experiencia previa de la comparación de las funciones lineales y cuadráticas con los crecimientos de las funciones exponenciales. Estas actividades permiten su aplicación de las funciones exponenciales en contextos reales, como el crecimiento de poblaciones o el decaimiento radiactivo.

El tercer trabajo que tiene relación con el diseño de tareas que aborden las funciones exponenciales es el desarrollado por Córdova-Cornejo et al. (2024), analizan el diseño de tareas sobre funciones exponenciales basándose en los mecanismos mentales descritos por la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Este enfoque teórico permite modelar cómo los estudiantes construyen el concepto de función exponencial, abarcando desde la interiorización de operaciones simples hasta la encapsulación de procesos más complejos.

Uno de los ejemplos que se discute en el documento es el uso de tareas basadas en el cálculo del interés compuesto y la variación de parámetros para que los estudiantes puedan observar cómo un cambio en la base o el exponente afecta a la función. Este tipo de actividades promueve una comprensión de las funciones exponenciales al vincularlas con situaciones realistas, lo que facilita la transición de una comprensión procedimental a una conceptual. (Córdova-Cornejo et al., 2024)

Los autores, mencionan otro aspecto importante de las tareas diseñadas, es su orientación en la iteración de procesos y la multiplicación recursiva, lo cual ayuda a los estudiantes a interiorizar cómo pequeñas variaciones en los exponentes pueden generar grandes cambios en los resultados de las funciones. En esta línea, se destacan actividades como el uso de dobleces de papel para mostrar cómo las iteraciones sucesivas impactan en el crecimiento exponencial, reforzando la idea de cómo la exponenciación se comporta en situaciones del mundo real. Esto no solo contribuye a la comprensión teórica, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades de razonamiento lógico y matemático que son esenciales para el aprendizaje.

En definitiva, según Córdova-Cornejo et al. (2024), las tareas propuestas en su investigación se apoyan en el uso de representaciones gráficas y simbólicas para facilitar el aprendizaje. El uso de software como GeoGebra permite a los estudiantes manipular gráficamente las funciones y explorar cómo diferentes valores de los parámetros afectan las curvas. Esta combinación de representaciones ayuda a los estudiantes a coordinar distintos registros de representación matemática (gráfico, numérico y algebraico), promoviendo una visión más completa de las funciones exponenciales. Estas tareas no solo se enfocan en la resolución de problemas, sino en la comprensión de los conceptos subyacentes, asegurando que los estudiantes puedan aplicar lo aprendido en contextos más amplios.

El cuarto trabajo relacionado con el diseño de tareas que aborden las funciones exponenciales es el desarrollado por Mariño (2012), quien se propone una ruta que involucra una perspectiva sociocultural y filosófica, para desarrollar una actitud crítica y reflexiva en el aula por medio de la pregunta. Así mismo, hace referencia a que "el problema de la enseñanza en la actualidad se encuentra vinculado a la falta de sintonía entre el aprendizaje y la realidad" (p. 190).

En cuanto a la ruta propuesta, la autora, menciona que,

> Ver la práctica del profesor de matemáticas desde una perspectiva sociocultural implica dos cosas: (i) tener que identificar aquellos instrumentos que emplea el profesor en la realización de sus tareas (diseño de problemas, planificación y

> gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje); y (ii) caracterizar cómo el profesor los usa, es decir, su “implicación con la tecnología de la práctica diaria”, y cómo el uso de dichos instrumentos permiten definir la participación de profesores y estudiantes en las interacciones sociales y en la práctica generada. (Mariño, 2012, p. 116)

Por su parte en línea con esta idea, la investigadora Mariño (2012), considera que el profesor debe estar atento a las reacciones de los estudiantes y favorecer al dinamismo entre estudiante-profesor, como lo resalta en sus líneas:

> Así, el docente debe estar abierto a cualquier acontecimiento, pues necesita ser dinámico para aventurase junto con los estudiantes a lo desconocido, sentir curiosidad, asombro e incertidumbre frente al saber, cuestionar lo establecido, buscando diversos conceptos para apropiarse de ellos y tener un referente (una actitud crítica) que le permita comprender y relacionarse con el mundo contemporáneo. (Mariño, 2012, p. 197)

Al mismo tiempo, la autora resalta la importancia de generar espacio de aprendizaje, donde haya lugar a preguntas y al descubrimiento; menciona al respecto:

> Cuando en el aula existe la pregunta, se abre una puerta que nos indica que no todo está dicho, que no existen verdades absolutas. Se abre la posibilidad de revisar nuestros conocimientos, reflexionar sobre el mundo, hablar desde nuestras experiencias, desde lo sensible y lo vital, encontrando nuevas posibilidades y razones. (Mariño, 2012, p. 204)

Según la autora, el profesor junto con los estudiantes debe aventurarse a sentir curiosidad, a cuestionar y a buscar diversos conceptos para apropiarse de ellos y tener una actitud crítica que le permita comprender y relacionarse con el mundo contemporáneo.

El quinto trabajo relacionado con el diseño de tareas que abordan las funciones exponenciales es el desarrollado por Advíncula-Clemente (2010) propone una perspectiva para el diseño de tareas relacionadas con la enseñanza de la función exponencial, específicamente dirigido a estudiantes universitarios. Se diseñan situaciones donde los estudiantes construyen el concepto de función exponencial interactuando activamente con el conocimiento en un contexto que favorece la comprensión del tema. El diseño de las tareas se enfoca en que los estudiantes comprendan la función exponencial a través de la resolución de problemas que incluyen situaciones prácticas como la variación porcentual en medicamentos o el cálculo de interés compuesto. Estas tareas están organizadas en fases: acción, formulación, validación e institucionalización, lo que permite a los estudiantes no solo descubrir las propiedades de las funciones exponenciales, sino también validarlas y formalizarlas en un contexto matemático. Las actividades propuestas requieren que los estudiantes participen activamente y reflexionen sobre los conceptos subyacentes, fomentando un aprendizaje más profundo y significativo.

Por último, Advíncula-Clemente (2010), destaca que la experimentación de las tareas en el aula demuestra que los estudiantes son capaces de construir el concepto de función exponencial a partir de sus características propias, como la variación porcentual constante. Además, se observó que el diseño de tareas basado en la teoría de situaciones didácticas no solo favorece la comprensión del concepto, sino que también ayuda a los estudiantes a superar obstáculos epistemológicos y didácticos. El rediseño posterior de las tareas, basado en los comportamientos observados durante la experimentación, reafirma la efectividad para enseñar funciones exponenciales de manera contextualizada y aplicada.

El sexto trabajo relacionado con el diseño de tareas para abordar las funciones exponenciales es el desarrollado por Lucas y Aray (2023), quienes hacen referencia sobre el uso de GeoGebra como herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas, destacan su impacto en el aprendizaje de secciones cónicas, lo que proporciona un contexto aplicable a la enseñanza de las funciones exponenciales. En el estudio, los autores demostraron cómo la integración de GeoGebra puede mejorar la comprensión conceptual y gráfica de temas abstractos, como la relación entre ecuaciones algebraicas y sus representaciones visuales. Esta perspectiva, centrado en la tecnología, fomenta una mayor interacción de los estudiantes con el contenido, mejorando su capacidad para explorar y experimentar con diferentes escenarios matemáticos. Aplicando esta orientación al diseño de tareas relacionadas con funciones exponenciales, GeoGebra permite a los estudiantes visualizar el crecimiento y decrecimiento exponencial, así como la relación entre sus parámetros y gráficos.

Según Lucas y Aray (2023), las tareas diseñadas en torno a esta herramienta permiten a los estudiantes manipular las funciones directamente, observando cómo los cambios en la base o en el exponente afectan la forma de la curva, lo que refuerza la comprensión del comportamiento de las funciones exponenciales en distintos contextos matemáticos y reales. Además, el uso de GeoGebra promueve un aprendizaje más autónomo de los estudiantes, ya que los estudiantes pueden verificar sus respuestas y comprender sus errores al instante.

El estudio concluye que la utilización de herramientas tecnológicas como GeoGebra no solo mejora el rendimiento académico, sino que también aumenta la motivación y el compromiso de los estudiantes con las matemáticas, permitiéndoles aplicar estos conceptos en situaciones cotidianas y en otros campos del conocimiento (Lucas y Aray, 2023). Adoptar esta perspectiva resulta necesario para diseñar tareas efectivas que aborden funciones exponenciales de manera dinámica y participativa, para afrontar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes utilizando estrategias de enseñanza que fomenten en los estudiantes, la exploración y el descubrimiento de las propiedades que hacen que particular a las funciones exponenciales, en relación con las demás funciones matemáticas.

En conclusión, el análisis de los antecedentes sobre el aprendizaje, la enseñanza y el diseño de tareas relacionadas con las funciones exponenciales revela los diversos desafíos que enfrentan tanto los estudiantes como los docentes. Las investigaciones revisadas aportan perspectivas valiosas sobre las dificultades conceptuales y didácticas, subrayando la necesidad de desarrollar estrategias que favorezcan una comprensión de las funciones exponenciales. Asimismo, la relevancia de integrar herramientas tecnológicas en el aula como GeoGebra y enfoques teóricos como la Teoría APOE para optimizar las prácticas pedagógicas. Estos antecedentes constituyen una base para el diseño de tareas que se presentan en este trabajo.

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

En este segundo capítulo, se presentan tres secciones que configuran el marco teórico de este documento. La primera presenta la red conceptual alrededor del objeto de estudio de este trabajo y la descripción en torno a las funciones exponenciales. La segunda sección corresponde a la red de diseño de tareas, que incluye la descripción de la teoría APOE (Acciones-procesos-Objetos-Esquemas), modelo cognitivo en el que se enmarca este trabajo, seguida de la propuesta de descomposición genética para las funciones exponenciales sobre la cual gira el posterior diseño de tareas, que aborda la fenomenología como vínculo biológico para el aprendizaje de las funciones exponenciales y se cierra el capítulo con GeoGebra y Padlet, utilizados como tecnologías digitales para el aula.

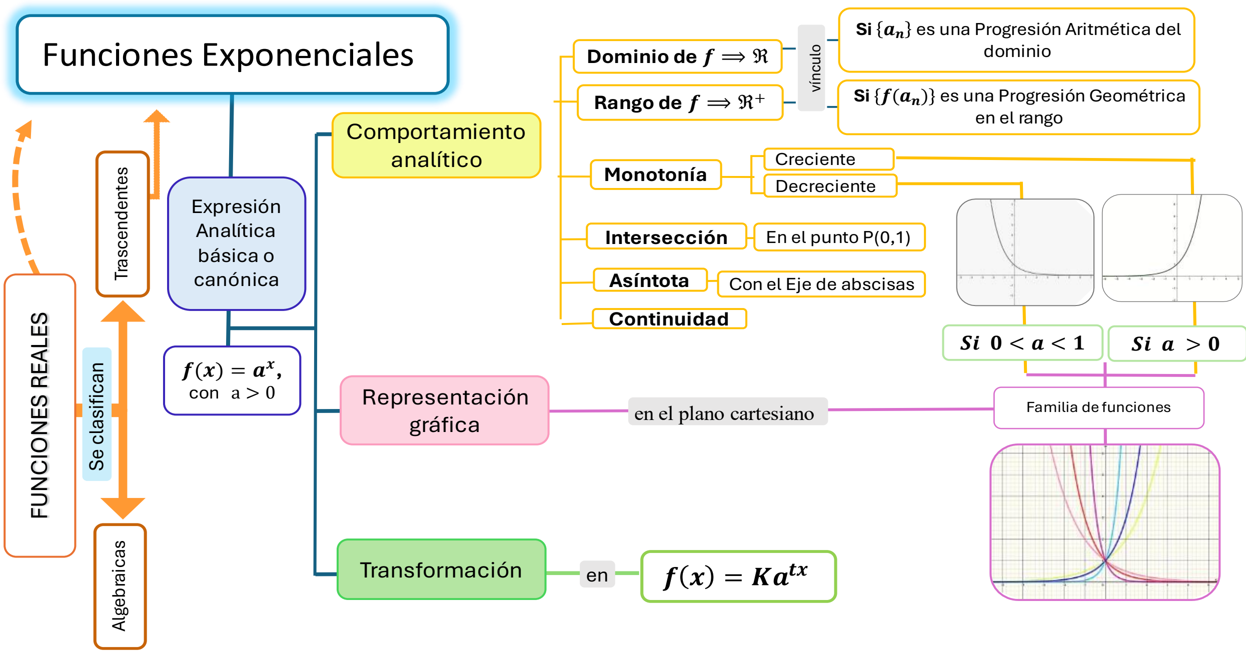
2.1. Red Conceptual del objeto matemático

2.1.1. Red conceptual alrededor de las funciones exponenciales

Se presenta una red conceptual en torno al objeto matemático de estudio: las funciones exponenciales. Esta red incluye los componentes y las relaciones que forman parte de la exploración matemática abordada en este trabajo, con una orientación específica para la educación secundaria, que son presentados en el Mapa 1. Posteriormente se realiza la descripción del mismo.

Mapa 1

Red conceptual de las funciones exponenciales



Nota. Elaboración propia.

2.1.2. Descripción de la red conceptual alrededor de las funciones exponenciales

La función exponencial real se sitúa como el eje central de la Red Conceptual que configura este estudio, clasificadas dentro de las funciones trascendentes. El análisis se centra en su expresión algebraica básica o canónica, su representación gráfica, su comportamiento analítico y las posibles transformaciones que pueden experimentar, las funciones exponenciales. A continuación, basados en Adams (2009), Larson (2010), Vargas et al. (2011), Stewart (2012), y Vargas (2019), se describen los aspectos que organizan el estudio del objeto matemático en este trabajo.

El primer aspecto que se distingue es lo relacionado a la categorización de las funciones reales en: funciones algebraicas y trascendentes. Estas últimas, las funciones trascendentes, se clasifican en dos, por un lado, las funciones trigonométricas, y por otro lado las funciones logarítmicas y exponenciales, es esta última, en la que este trabajo pone su foco de estudio; las funciones exponenciales.

El segundo aspecto, a considerar en el estudio de las funciones exponenciales, es su expresión analítica básica y su definición. En ese sentido Adams (2009, p. 200) ofrece una definición, describiéndola como:

> Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva y el exponente x es la variable. No hay que confundir estas funciones con las funciones potenciales como $f(x) = a^x$, en las que la base es variable y el exponente es constante.

La función exponencial a^x se puede definir para exponentes x enteros y racionales, de la siguiente forma (véase en el Cuadro 1):

Cuadro 1

Definición de funciones exponenciales

Definición
Si $a > 0$, entonces $a^0 = 1$ $a^n = \underbrace{a.a.a.a\ldots a}_{n \text{ factores}}$ si n=1, 2, 3… $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $n = 1, 2, 3 \ldots$ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ si $n = 1,2,3 \ldots$ y $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ En esta definición, $\sqrt[n]{a}$ es el número $b > 0$ que cumple que $b^n = a$. La función está definida para todos los números reales

Nota. Extraído de Adams (2009, p. 200)

Adicional a esta definición, cabe señalar que las funciones exponenciales, como lo menciona Adams (2009), cumplen varias identidades denominadas leyes de los exponentes, enmarcadas en el Cuadro 2.

Cuadro 2

Leyes de los exponentes

Leyes de los exponentes					
Sean $a > 0$ y $b > 0$, y, x e y dos números reales cualesquiera; entonces					
$a^0 = 1$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^{x+y} = a^x . a^y$	$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$(ab)^x = a^x . b^x$

Nota. Extraído de Adams (2009, p. 201)

De lo anterior, se pueden extraer algunas conclusiones sobre las leyes de las funciones exponenciales, sea $f(x) = a^{\mathrm{x}}$, con $a > 0$ y con $b > 0$, donde x e y dos números reales cualesquiera, tales como:

$$f(0) = 1 \ , \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)} \ , \quad f(x+y) = f(x).f(y)$$

En cuanto a lo relacionado al estudio del comportamiento de las funciones exponenciales, además se analiza la continuidad y la monotonía de la función, el dominio y el rango, el punto de intersección de la función con el eje *y*, y la asíntota.

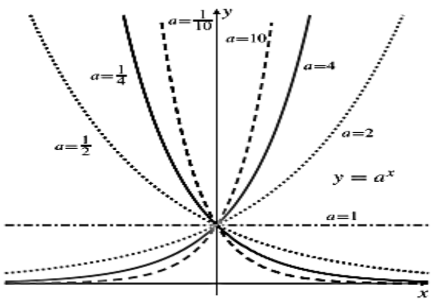
Con relación a lo anterior, Vargas (2019) hace referencia acerca de algunas de las características específicas de las funciones exponenciales de la forma básica $f(x) = a^x$, se enlistan de manera sintética, y ellas son: (I) la función es continua, (II) el dominio de la función es el conjunto de los números enteros reales ($D: \Re$), (III) el rango de la función es el conjunto de los números reales positivos ($R: \Re^+$) , (IV) el punto que interseca al eje y es P(0,1), (V) la asíntota horizontal es la recta $y = 0$, (VI) la monotonía de función es creciente o decreciente.

Con relación a lo anterior, Adams (2009), presenta una familia de funciones exponenciales cómo estas variaciones afectan sus características analíticas y gráficas, tal como se observa en la Imagen 1. Todas estas funciones exponenciales pasan por el punto

(0,1) ya que $a^0 = 1$ para todo $a > 0$. Obsérvese que $a^x > 0$ para todo $a > 0$ y para todo real x. Si $a = 1$, entonces $a^x = 1^x = 1$ para todo x. Si $a > 1$, entonces a^x es una función creciente de x. Si $0 < a < 1$, entonces a^x es una decreciente de x.

Imagen 1

Gráfica de una familia de funciones exponenciales



Nota. Extraído de Adams (2009, p. 202)

Otro aspecto para considerar en el estudio de las funciones exponenciales refiere a las trasformaciones que puede tener la expresión analítica de este objeto matemático. En este punto, Stewart (2012) señala que, "mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones" (p. 36). En este sentido, este autor, destaca tres tipos de transformaciones: traslaciones (desplazamientos vertical y horizontal), estiramiento (alargamiento y compresión) y reflexión. En el Cuadro 3, se muestran cómo ocurren las diferentes transformaciones.

Cuadro 3

Trasformaciones de tipo: Traslación, Estiramiento y Reflexión

Desplazamientos vertical y horizontal	**Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal**
Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de $y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$	Suponga que c>1. Para obtener la gráfica de y=$c.f(x)$ alargar verticalmente la gráfica de y=$f(x)$ por un factor de c.

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$ $y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$ $y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades hacia izquierda a la gráfica de $y = f(x)$	y=(1/c).$f(x)$, comprimir verticalmente la gráfica de y=$f(x)$ por un factor de c. y=$f(c.x)$, comprimir horizontalmente la gráfica de y=$f(x)$ por un factor de c. y=$f(x/c)$, alargar horizontalmente la gráfica de y=$f(x)$ por un factor de c. y=$-f(x)$, reflejar la gráfica de y=$f(x)$ sobre el eje x

Nota. Extraído de Stewart. (2012, pp. 36-37)

Con relación a este punto, cabe mencionar que, en las tareas propuestas en este trabajo no se abordan la transformación de las funciones exponenciales, pues se utiliza la matematización de fenómenos como punto de partida, que permite realizar el estudio y caracterización de las funciones exponenciales mediante su comportamiento grafico - analítico.

2.2. Red para el diseño de tareas de las funciones exponenciales.

En el Mapa 5 se presenta la red que incluye la descripción de la estructura que guía el diseño de las tareas relacionadas en torno a las funciones exponenciales, para estudiantes de la educación secundaria.

Este diseño de tareas se compone de tres elementos principales, el sustento de una teoría cognitiva, como lo es el modelo de aprendizaje APOE y la descomposición genética, la metodología de enseñanza que acompaña a esta teoría, que es el ciclo ACE, y sumado a esto, los aspectos vinculados el enfoque fenomenológico utilizando como medio a la biología y el uso de tecnologías digitales para el aula, como GeoGebra y Padlet.

Mapa 2

Red para el diseño de las tareas funciones exponenciales

Nota. Elaboración propia

En el sustento teórico se establece el enfoque cognitivo de la propuesta y también algunos de los aspectos pertinentes, que se exponen en el siguiente capítulo, referidos a la metodología que sigue este trabajo de grado.

2.2.1. Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas)

En esta sección, se describe la teoría APOE, la cual refiere a un modelo cognitivo creado por Ed Dubinsky en 1996 y desarrollado por su grupo de investigadores (RUMEC), "que describe cómo un estudiante puede aprender conceptos matemáticos" (Arnon et al., 2014, citado por Córdova – Cornejo et al., 2023).

La Teoría APOE debe su nombre al acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas**.** Esta teoría se basa en los principios de la psicología genética de Jean Piaget (Dubinsky, 1991). "En la Teoría APOE se hace una construcción, o modelo, para hablar únicamente de la manera en la que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos" (Trigueros, 2005, p. 7).

Con el fin de facilitar la comprensión del modelo cognitivo APOE, a continuación, se incluyen las definiciones de algunos términos involucrados. Teniendo presente que son dos los elementos principales de la teoría APOE, la descomposición genética y la abstracción reflexiva.

En primer lugar, para poder profundizar y conocer a la Teoría APOE, es importante mencionar lo que Dubinsky (1998, citado por González Arellano, 2013), señala acerca del conocimiento matemático y de cómo el individuo lo desarrolla:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos, y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones. (p. 3)

En segundo lugar, se debe comprender que desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por unas estructuras mentales, que son: acción, proceso, objeto y esquema. Es importante destacar que el paso por esas estructuras no es necesariamente secuencial (Trigueros, 2005). En relación con esto, la autora señala:

> Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por proceso en la teoría que cuando lo hace a nivel acción, y cuando lo hace a nivel objeto que cuando lo hace a nivel proceso. (p.7)

A continuación, se presenta en la Tabla 2, con las definiciones de las estructuras mentales, contrastadas con dos autores, Arnon et al. (2014) y Córdova-Cornejo et al. (2024).

Tabla 2

Cuadro de definiciones de las estructuras mentales de la Teoría APOE

Estructura mental	**Definición**	
	Según Arnon et al. (2014)	Según Córdova-Cornejo et al. (2024)
Acción	Es la manipulación externa y directa de un objeto matemático, normalmente siguiendo instrucciones o reglas que no se interiorizan como procesos mentales. (p. 20)	La acción es el primer paso en la construcción de un concepto, que implica la manipulación directa de objetos matemáticos de manera mecánica y repetitiva sin reflexionar internamente. (p. 11)
Proceso	Es la interiorización de una acción, lo que permite al estudiante repetir una	El proceso ocurre cuando el estudiante comienza a interiorizar las acciones, pudiendo repetirlas

	serie de acciones mentalmente para entender una operación matemática sin manipulación directa. (p. 22)	mentalmente sin necesidad de manipular objetos físicos. (p. 13)
Objeto	Es el producto de encapsular un proceso, permitiendo que el estudiante lo manipule mentalmente como un todo, en lugar de seguir paso a paso las acciones que lo componen. (p. 24)	Un objeto es el resultado de la encapsulación de un proceso, es decir, cuando el estudiante puede ver el proceso en su totalidad como una entidad única y operar con él como si fuera un objeto cognitivo estático. (p. 15)
Esquema	Es la organización coherente y estructurada de acciones, procesos y objetos que permite al estudiante operar de manera integrada y eficiente sobre diferentes conceptos matemáticos. (p. 26)	Un esquema es la estructura cognitiva que incluye múltiples acciones, procesos y objetos relacionados que el estudiante puede utilizar para resolver problemas de manera integrada y flexible. (p. 17)

Nota. Elaboración propia con datos tomados de Arnot et al. (2014) y Córdova-Cornejo et al. (2024)

En línea con lo anterior, según González Arellano (2013), refiere,

> cuando el estudiante reflexiona en las acciones puede construir un proceso. Si ahora hace esa reflexión más profunda, ve el proceso como un todo y es capaz de describir las acciones o procesos que realiza durante la transformación de un objeto en otro, entonces puede encapsular un proceso en un objeto y tener una concepción objeto del concepto en cuestión. (p. 11)

De las definiciones anteriores, se puede complementar lo que señala Trigueros (2005, citado por González Arellano, 2013) al respecto, refiriéndose a que:

> para pasar de una acción a un proceso el estudiante debe reflexionar en las acciones que está efectuando. Otra manera de construir un proceso es coordinando dos procesos existentes. Para construir un objeto existen dos maneras. Una es encapsular un proceso y pensar en éste como un todo, lo que significa es que el estudiante será capaz de realizar acciones sobre él. La otra es través de la tematización de un esquema en un objeto y pensar en éste como un todo. (p.12)

En tercer lugar, se reconoce que en la Teoría APOE contempla cinco abstracciones reflexivas**:** interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y reversión. En este sentido, Trigueros (2005) da cuenta que el mecanismo para poder construir el conocimiento matemático, mediante esta teoría es, la abstracción reflexiva, como lo llamaba Piaget.

Estas abstracciones, se denominan mecanismos mentales y sirven para construir un concepto (Córdova-Cornejo et al., 2024). Además, señala que de esas cinco abstracciones "los cuatro primeros mecanismos determinados por Piaget y el último agregado por Dubinsky, como caso particular para abordar la construcción de tópicos matemáticos específicos". (p. 5)

Por su parte, Kú, y Roa (2010) señalan que dentro de la teoría APOE, la abstracción reflexiva, consiste en "extraer de un sistema de acciones o de operaciones del nivel inferior". (p. 770)

A continuación, se presenta la Tabla 3, con las definiciones de estos mecanismos mentales, según dos autores Arnon et al. (2014) y Córdova-Cornejo et al. (2024). Estas definiciones facilitan un análisis comparativo desde la perspectiva de los autores mencionados.

Tabla 3

Cuadro de definiciones de las abstracciones reflexivas de la Teoría APOE

Abstracción Reflexiva	**Definición**	
	Según Arnon et al. (2014)	Según Córdova-Cornejo et al. (2024)
Interiorización	Transformar una acción externa en un proceso mental que puede ser manipulado sin realizar la acción de forma concreta. (p. 39)	Proceso en el cual una acción repetida es asimilada y comienza a realizarse mentalmente sin necesidad de ejecutarla físicamente. (p. 45)
Coordinación	Coordinación de dos o más procesos para generar un nuevo esquema cognitivo que engloba los elementos en una estructura unificada. (p. 40)	La capacidad de combinar varios procesos o acciones en una secuencia o simultáneamente, para comprender relaciones más complejas. (p. 46)
Encapsulación	Cuando un proceso es percibido como un objeto que puede ser operado y transformado como	Proceso mediante el cual un proceso se convierte en un objeto que puede ser manipulado mentalmente como una entidad completa. (p. 47)

	un todo en actividades posteriores. (p. 41)	
Desencapsulación	El proceso mediante el cual un objeto es descompuesto en sus procesos subyacentes para su estudio y manipulación en profundidad. (p. 42)	La capacidad de descomponer un objeto en los procesos y acciones que lo constituyen, para un análisis detallado de su estructura. (p. 48)
Reversión	Proceso mediante el cual un individuo es capaz de revertir un proceso mental, volviendo a su punto de partida o a una etapa previa. (p. 43)	Capacidad de invertir un proceso mental para volver al estado inicial o para explorar las propiedades inversas del proceso en cuestión. (p. 49)

Nota. Elaboración propia con datos tomados de Arnot et al. (2014) y Córdova-Cornejo et al. (2024).

Como lo señala Dubinsky et al. (2014, citado por Gómez Fontanel, 2018), haciendo referencia a la abstracción reflexiva:

> un elemento fundamental es la abstracción reflexiva ya que es el eje sobre el que se fundamenta la teoría APOE, esta les permite a los individuos formar conceptos a partir de experiencias con objetos mentales, es decir, cuando el individuo adquiere conocimiento de los objetos hace una abstracción simple y cuando adquiere dominio de las acciones que aplican sobre los objetos hace abstracción reflexiva; con esta herramienta describe conceptos matemáticos. (Gómez Fontanel, 2018, p. 65)

A partir de esta perspectiva, es posible analizar cómo la abstracción reflexiva facilita no solo la formación de conceptos matemáticos, sino también la transición entre las distintas estructuras mentales de la Teoría APOE. Esta transición es clave en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite al estudiante reorganizar y reconstruir su conocimiento a medida que enfrenta nuevas situaciones problemáticas.

En el Cuadro 6, se sintetizan los principales procesos de la Teoría APOE, destacando cómo las acciones, procesos y objetos interactúan a través de las diferentes abstracciones reflexivas. La interiorización transforma las acciones en procesos, mientras que la coordinación y reversión facilitan la manipulación y comprensión de los procesos. Por otro lado, la encapsulación permite convertir los procesos en objetos, y la desencapsulación permite descomponer los objetos en sus procesos subyacentes, todo ello dentro de un esquema mental que organiza estos elementos de manera estructurada.

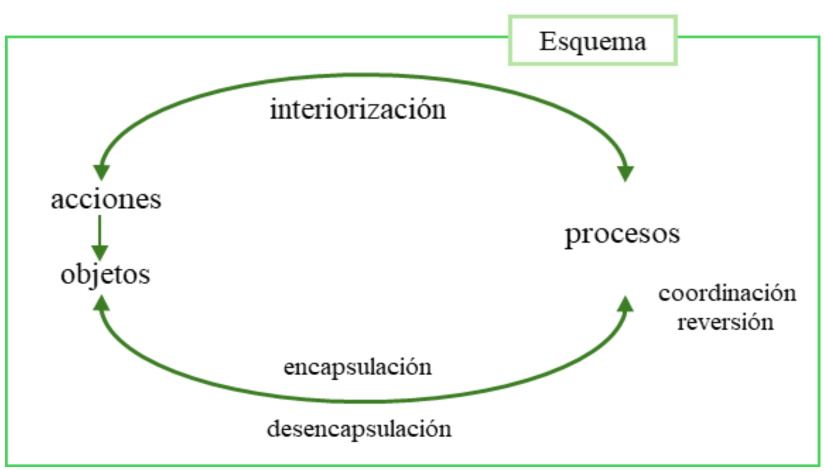
Otra herramienta por considerar en la teoría APOE es lo relacionado a la descomposición genética, como otro elemento indispensable en esta mirada a la construcción del conocimiento. Según Vargas et al. (2011), “una descomposición genética de un concepto es una propuesta hipotética de la secuencia de construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo” (p. 2).

Con relación a la descomposición genética, Betancur et al. (2021) señalan que,

> La descripción de las estructuras y mecanismos mentales asociados a un concepto particular se denomina en APOE como descomposición genética; esta corresponde a un modelo cognitivo sobre cómo un estudiante puede llegar a comprender una porción de conocimiento matemático y es considerada el corazón de la teoría. (p. 250)

Cuadro 4

Estructuras y mecanismos mentales



Nota. Extraído de Arnot et al. (2014, p.18)

Esta herramienta es utilizada para guiar el diseño de la instrucción y evaluar su efectividad (González Arellano, 2013).

Para realizar la descomposición genética de un concepto, se parte de la experiencia del profesor o de los investigadores, de las revisiones de los resultados de investigaciones previas de los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto. (Dubinsky y Lewin, 1986, citados por Vargas et al., 2011, p. 2)

Según Córdova – Cornejo et al. (2024, p. 7), citando a otros autores, señala que:

> La ruta cognitiva construida con base en estructuras y mecanismos mentales que guía la construcción de un concepto matemático se llama descomposición genética y es un modelo cognitivo que actúa como hipótesis en la investigación (Oktac, 2019; González y Roa, 2017; Rodríguez, Parraguez y Trigueros, 2018). Además, se destaca que la Descomposición Genética no es única, por tanto, necesita ser validada o refinada a través de la investigación (Borji, Martínez-Planell y Trigueros, 2022; Simg y Trigueros, 2022).

En la misma línea, González Arellano (2013), hace énfasis en el uso de la descomposición genética, para el diseño de la tarea, que hace demostrar el recorrido del estudiante:

> la tarea pedagógica que tenemos como docentes es mediante el diseño de actividades conducir al estudiante a construir acciones, procesos, objetos y en algunos casos esquemas relacionados con un concepto, a través de los mecanismos interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión (p.16)

De manera complementaria, Gómez Fontanel (2018, citando a Asiala et al., 1996) resalta que, “la Teoría APOE ha sido utilizada en diversas investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática para describir las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje de un concepto matemático, con resultados satisfactorios" (p. 68). Este camino destaca la importancia de guiar al estudiante a través de dichas construcciones, lo que conecta directamente con el uso de la descomposición genética como herramienta didáctica.

Al respecto, Arnot et al. (2014, citado por Jaimes et al., 2017), refiriéndose a la teoría APOE, destaca que “uno de los roles de esta teoría es ayudar a predecir qué podrían estar aprendiendo los estudiantes acerca de determinado concepto matemático”. (Jaimes et al., 2017, p.125)

2.2.2. Propuesta de descomposición genética de las funciones exponenciales

Como se menciona anteriormente, se toma como punto de partida, el trabajo realizado por Vargas (2017), y se realiza ajustes sobre la descomposición genética de la función exponencial para el nivel de secundaria, puesto que la descomposición genética de referencia para el nivel universitario.

Según Vargas (2017) se establecen unos prerrequisitos para luego describir cada uno de los mecanismos de construcción en dos grupos de registros de representación: el simbólico y el gráfico. Para este trabajo, se adapta lo que la autora describe, y estos prerrequisitos se concretan en el Cuadro 5.

Cuadro 5

Prerrequisitos para la construcción del concepto: funciones exponenciales

Prerrequisitos para la construcción del concepto Funciones Exponenciales para la descomposición genética
Representación gráfica de objetos matemáticos; puntos, rectas y curvas en un sistema de coordenadas cartesianas. La función como proceso matemático. El concepto de exponente natural mayor que uno. La existencia de la potencia que surge de la interacción entre base y exponente, como una acción de multiplicar de manera reiterada una misma

cantidad atendiendo a los requerimientos de economía en la escritura y en la sintaxis aritmética y algebraica. La noción de exponente entero y racionales. Las propiedades de los exponentes (leyes de los exponentes) El análisis de monotonía y la concavidad de la función. La continuidad de la función.

Nota. Extraído y adaptado de Vargas. (2017, p. 70)

Para la construcción de las funciones exponenciales, es necesario que los estudiantes recurran a otros procesos mentales, tales como la noción de función, función lineal, función cuadrática y la noción de continuidad.

A continuación, se presenta la descomposición genética basada en los elementos matemáticos que conforman el concepto de función exponencial y las relaciones matemáticas entre estos elementos, incluyendo las construcciones mentales específicas que los estudiantes desarrollan para comprenderlo.

En la construcción del concepto de la función exponencial, de acuerdo con la teoría APOE, se inicia con las acciones, transformaciones de objetos percibidas por el estudiante como externas. Se realiza en dos registros, el simbólico y el gráfico para los cuáles se desarrollan acciones con funciones exponenciales particulares con bases enteras.

Se utilizará el siguiente modo de marcación: (*) para indicar elementos transcritos directamente de la descomposición propuesta por Vargas (2017), (**) para aquellos elementos que han sido modificados o adaptados a partir de Vargas (2017), y (***) para los elementos que se han incorporado como nuevos en relación con la descomposición original.

Elemento matemático. Funciones exponenciales particulares.

A continuación, se enuncian las acciones y procesos, tanto en el registro simbólico como gráfico, que los estudiantes han de realizar, para la construcción del concepto de función exponencial (Tabla 4).

Tabla 4

Descomposición genética preliminar las funciones exponenciales

Descomposición genética preliminar las funciones exponenciales de las estructuras mentales: Acciones y Procesos			
ACCIONES (A)	Simbólico		Referencia
	A1	Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada	(*)
	A2	Acción de organizar valores de entrada y valores de la función en una tabla de datos	(***)
	A3	Acción de calcular las diferencias entre los valores consecutivos de la variable independiente.	(**)
	A4	Acción de calcular los cocientes entre los valores consecutivos de la variable dependiente.	(**)
	Gráfico		
	A5	Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente.	(**)
PROCESOS (P)	Simbólico		
	P1	Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno	(*)
	P2	Interiorización de las acciones para examinar la regularidad de las sucesiones numéricas, a través de la diferencia y cociente para establecer un valor que permanezca constante (razón).	(***)
	Gráfico		
	P3	Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función, sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.	(*)
	P4	Interiorización de las acciones de comparar el comportamiento de las curvas de las funciones de acuerdo con sus bases.	(***)
	P5	Interiorización de las acciones de ubicar el punto que corta al eje “y” (punto de corte o de intersección de la curva con el eje).	(***)
	P6	Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable “x” en la representación gráfica (Progresión Aritmética).	(***)
	P7	Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable “y” en la representación gráfica (Progresión Geométrica).	(***)

Nota. Adaptado de Vargas (2017, pp. 71-72)

Del elemento matemático funciones exponenciales particulares a una aproximación de la función exponencial básica: $\mathbf{f(x) = a^x}$

El mecanismo de coordinación entre diferentes procesos de las funciones exponenciales. Para este caso, la comparación de diferentes funciones particulares, en distintos modos de representación que permitan caracterizar a las funciones exponenciales en dos familias: funciones exponenciales crecientes y funciones exponenciales decrecientes (Tabla 5).

Esta descomposición genética de la función exponencial analiza las posibles construcciones mentales de los alumnos y sirve como herramienta para diseñar las actividades, discusiones y ejercicios que se llevarán como diseño para el aprendizaje en el aula.

Tabla 5

Descomposición genética preliminar las funciones exponenciales de la abstracción reflexiva

Descomposición genética preliminar las funciones exponenciales de la abstracción reflexiva: Coordinación			
COORDINACIÓN (C)	Simbólico		Referencia
	C1	Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar el crecimiento de funciones lineales y exponenciales	(**)
	C2	Comparación entre diferentes curvas de funciones exponenciales crecientes o decrecientes que permitan examinar la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, dependiendo de su base.	(**)
	C3	Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje x como asíntota, el corte de la función con el eje y.	(**)
	C4	Comparación de curvas exponenciales para establecer el dominio y el rango de las funciones exponenciales.	(**)

Nota. Adaptado de Vargas (2017, pp. 71-72)

2.2.3. Un acercamiento desde la fenomenología

Según la teoría de la fenomenología de Freudenthal (1973), el aprendizaje matemático debe estar conectado con fenómenos reales y experiencias concretas.

La propuesta de Freudenthal (1973) sugiere que, al enseñar la función exponencial, se debe integrar aplicaciones prácticas de áreas como la biología y la economía. Esta visión no solo enriquece la comprensión teórica del concepto, sino que también demuestra su relevancia y utilidad en el mundo real, alineándose con el objetivo de una educación matemática más conectada y aplicada (Freudenthal, 1973).

En nuestro caso, en biología, por ejemplo, la función exponencial puede ser usada y luego estudiada en el proceso de matematización, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.

Para González y Gómez (2018. p. 122), el proceso de matematización busca lograr las siguientes capacidades matemáticas fundamentales:

i. Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes al problema de mundo real y formular supuestos de modo que pueden utilizarse.
ii. Utilizar la comprensión del contexto para guiar el proceso de resolución matemático.
iii. Comprender el alcance y las limitaciones de una solución matemática, que son el resultado del modelo matemático utilizado

En cuanto a la enseñanza, según Gómez et al. (2018), la función del profesor es proporcionar a los estudiantes las oportunidades para que logren las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, planteadas al planificar e implementar la enseñanza, entregándole, facilitándole, transfiriéndole los conocimientos.

El objeto matemático que se desea abordar son las funciones reales exponenciales que, entre otros aspectos, conlleven a observar la forma que presenta una curva exponencial, poder diferenciarla de las otras funciones estudiadas previamente (funciones algebraicas polinómicas: lineal y cuadráticas), visualizar, analizar y conjeturar sobre las características de las curvas, cuándo es creciente o decreciente, observar la intersección con el eje y, localizar el punto de intersección y poder explorar qué valores puede tomar la variable independiente, distinguir el dominio y el rango, poder comprender que la curva no se interseca con el eje x, e introducir el vocablo de asíntotas.

En este trabajo de grado se desea que el estudiante, mediante el estudio de artículos científicos parta de la matematización, y con ello el estudiante pueda observar el comportamiento de la función exponencial en el contexto del crecimiento de las plantas, y desde allí reconocer la importancia de tener representaciones y entender las características que observa en la gráfica de un fenómeno para que se pueda referir a un crecimiento exponencial.

Además, en consonancia con Hiebert et al. (1997), consideran que las representaciones visuales ayudan a los estudiantes a establecer conexiones entre conceptos abstractos y sus aplicaciones prácticas. En este sentido, Duval (2006) enfatiza la importancia de los procesos de visualización, conjeturación y representación gráfica para desarrollar un pensamiento matemático profundo. Estos procesos permiten a los estudiantes hacer conjeturas informadas sobre el comportamiento de las funciones y verificar visualmente sus hipótesis.

2.2.4. Recursos. Tecnologías digitales para el aula

Como un recurso para aprender sobre las funciones exponenciales en este trabajo, se utilizarán dos recursos, el software dinámico GeoGebra y los tableros virtuales de Padlet.

Con el software GeoGebra, perteneciente al grupo de Geometría Dinámica, los estudiantes podrán lograr procesos como la visualización (del comportamiento analítico de la gráfica en el plano cartesiano) y la generalización (pasando por acciones y procesos) para conjeturar, explorar y comunicar lo que observa sobre el comportamiento de la función exponencial, en el plano cartesiano y con expresiones analíticas.

Por su parte, Padlet es una plataforma en línea que permite a los usuarios crear tableros virtuales colaborativos, donde se puede organizar y compartir contenido de forma visual e interactiva. Los tableros pueden incluir textos, imágenes, videos, enlaces y archivos, y están diseñados para fomentar la colaboración en tiempo real o de manera asincrónica. Gracias a su accesibilidad desde dispositivos móviles y computadoras, sin necesidad de instalación, Padlet brinda una herramienta flexible para la enseñanza y el aprendizaje, facilitando la participación continua en entornos educativos.

Una característica destacada del Padlet, es su facilidad para personalizar y, que permite a los estudiantes agregar colores, íconos y fondos a sus tableros, haciendo que la experiencia de aprendizaje sea más atractiva. De acuerdo con Pardo-Cueva et al. (2020), esta plataforma también facilita la edición simultánea, el almacenamiento de contenido diverso y su posterior distribución entre los usuarios. El uso del Padlet como tecnología educativa, constituye una innovación que permite el trabajo cooperativo en las aulas de clase, incrementando, el interés de las generaciones jóvenes.

En el contexto educativo, Vargas (2024) señala lo atrayente de la utilización del Padlet, con base en dos experiencias, una investigación en formación de formadores, en el estudio de las prácticas matemáticas de identificación de regularidades y patrones, recurriendo a esta herramienta de trabajo colaborativo para que los profesores de preescolar diseñen su plan de trabajo, durante un curso de piloto de formación continuada de maestros en ejercicio de Costa Rica y Colombia (Vargas, et al., 2021).

Alanya (2021) en su experiencia en el uso del Padlet en sus clases de matemáticas, demostró cómo esta herramienta tecnológica, que no tiene costo y es de uso sencillo tanto para el profesor como para el estudiante, puede potenciar la participación de los estudiantes, mejorar la retroalimentación en clase y apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Este autor, señala aspectos que hacen que la clase de matemáticas se favorezca con el uso del Padlet, estos son: “motivar a los estudiantes a participar activamente, valorar los avances de los ejercicios resueltos por los estudiantes, retroalimentar de manera activa durante el desarrollo de los ejercicios y verificar lo aprendido, inclusive, por los estudiantes que falten a clase" (Alanya, 2021, s.p.).

Capítulo 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el marco metodológico de esta investigación, el diseño de tareas adquiere un papel fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el estudio de las funciones exponenciales. El enfoque metodológico se basa en el Ciclo ACE, una estrategia pedagógica desarrollada a partir de los trabajos de Dubinsky en los años 80, que organiza la instrucción en tres fases: Actividades, Discusión en clase y Ejercicios.

El ciclo ACE forma parte del proceso de investigación que los expertos en la teoría APOE proponen para las indagaciones que se llevan a término en el campo de la construcción de los conceptos matemáticos. Dicho proceso consta de varias componentes como lo son: un análisis teórico, el diseño de la enseñanza, la implementación, instrumentos y evaluación.

3.1. Análisis teórico

Para aplicar la teoría APOE en el diseño de actividades que nos permitan, en esta propuesta de innovación, potenciar las construcciones de los estudiantes, se requiere de un modelo teórico que es conocido como la descomposición genética.

Con el interés de apropiar una descomposición genética, en el proceso de este trabajo de grado, se estudian algunas propuestas de investigadores relativas al *modelo hipotético que describe las estructura y mecanismos mentales que un estudiante puede necesitar para construir un concepto matemático específico* (Arnon et al., 2014, p.27). En este caso, se recurre a descomposiciones genéticas preliminares de la función exponencial creadas en propuestas de investigación para diversos grados de escolaridad.

Así, se procedió a seleccionar la descomposición genética propuesta por Vargas (2017) sumado a la investigación realizada por Vargas et al. (2011), retomando el análisis teórico preliminar del concepto, aspectos del desarrollo histórico de éste, junto con las descripciones matemáticas del concepto y las dificultades que se reportan en el aprendizaje de las funciones exponenciales. Se llevan a término algunas adaptaciones a dicha descomposición genética, la cual fue presentada en el capítulo 2 bajo el título *Propuesta de descomposición genética para las funciones exponenciales*.

La descomposición genética que se presenta es el resultado del diseño de la primera componente del Ciclo de indagación.

3.2. Diseño de la enseñanza

Atendiendo a lo descrito, se conoce que la teoría APOE cuenta con un modelo de enseñanza conocido como el ciclo ACE. Este ciclo tiene el diseño de actividades, discusiones y ejercicios que se crean con base en la descomposición genética preliminar del concepto, para la implementación posterior en el aula.

Las tareas buscan promover acciones, la interiorización de las acciones en procesos mentales y la coordinación de procesos. Ello, en este trabajo de grado, desde el estudio de problemas contextualizados, que parten de la matematización de algunos fenómenos biológicos, que permiten estudiar e identificar el comportamiento analítico de las funciones exponenciales.

Así, el diseño de la enseñanza se fundamenta en el ciclo ACE (por sus siglas en inglés) propuesto por la teoría APOE para la instrucción en el aula. Los estudiantes trabajarán en las tareas diseñadas en la secuencia de instrucción (A), abordarán preguntas en pequeños grupos que pretenden generar interés y discusiones (C), la profesora las orientará con la intensión de favorecer la construcción del nuevo conocimiento. Luego para apoyar y fortalecer las nuevas construcciones se entregarán a los estudiantes otras tareas

(E), algunas para realizar fuera del tiempo de clase, las cuales se propone sean retomadas en el siguiente encuentro con el grupo (Arnon et al., 2014).

Este ciclo nace en la década de los 80 del siglo XX, a partir de los trabajos investigativos de Ed Dubinsky (1986). De otro lado, como lo señala Sarango Jumbo (2024, citando Arnon et al., 2014), para especificar de que se trata el Ciclo de enseñanza ACE:

> Se trata de una estrategia pedagógica que se alinea estrechamente con la visión APOE del aprendizaje matemático. Esta estrategia implica la implementación de actividades diseñadas para estimular a los estudiantes a realizar construcciones mentales y promover discusiones en el aula. El objetivo es facilitar a los estudiantes la aplicación de sus estructuras mentales recién desarrolladas a conceptos y ejercicios matemáticos. De esta manera, se consolida el aprendizaje matemático en la mente de los estudiantes y se ponen de relieve las ideas para futuros aprendizajes. (p. 27)

En concordancia a lo anterior, Ledezma et al. (2018), explora la construcción cognitiva de las funciones exponenciales utilizando el ciclo de enseñanza ACE dentro del marco de la teoría APOE. Esta herramienta es utilizada para guiar el diseño de la instrucción y evaluar su efectividad (González Arellano, 2013).

Sintetizando, el ciclo ACE es una metodología de enseñanza basada en la descomposición genética de un concepto matemático y se considera constituido por (A) Actividades, (C) Discusión en clase y (E) Ejercicios.

Las tareas que se presentan en este trabajo incluyen este ciclo ACE, por lo tanto, en su estructura general se encontrarán estos tres elementos:

ACTIVIDADES: refieren a la primera parte del ciclo. Allí los estudiantes trabajan cooperativamente en equipos con tareas diseñadas que ayudarán a potenciar las construcciones propuestas en la descomposición genética (Arnon et al., 2014).

Los estudiantes deben trabajar en las actividades que fueron organizadas y planificadas con un orden lógico, como parte de su aprendizaje (Sarango, 2024, p 60).

En este trabajo, las tareas se enfocan en promover una abstracción reflexiva, mediante el trabajo en pequeños grupos, fomentando la discusión, la reflexión, propiciando con las preguntas, lograr obtener respuestas de los estudiantes, que las orientaciones que el profesor puede brindar a los estudiantes lograr así, las construcciones y estructuras mentales. Se utiliza, además, el espacio del muro virtual del Padlet, para generar los espacios de reflexión y de comunicación de ideas, y el software de geometría dinámica GeoGebra para la exploración gráfica y analítica de las funciones exponenciales.

DISCUSIÓN EN CLASE: para ello la organización de la clase se realiza en grupos pequeños en la cual la discusión es dirigida por el maestro. Dichas discusiones en clase y trabajos en clase deben de dar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado y particularmente lo realizado en el laboratorio.

Para el caso de este trabajo de grado, las actividades en dos sesiones se realizan con los documentos científicos presentados en los Padlet o con las tablas de datos y construcciones en GeoGebra. Se espera que allí, en el espacio para comunicación, se consoliden unas coordinaciones entre procesos que generen nuevos procesos mentales. En esta fase como el profesor es quien guía la discusión, él o ella pueden proporcionar definiciones, explicaciones o presentar una conexión entre lo que los estudiantes están pensando y trabajando (Arnon et al., 2014).

EJERCICIOS: esta tercera parte del ciclo consiste en problemas diseñados para reforzar las actividades de la computadora y la discusión en el aula o fuera de ella. Los ejercicios ayudan al desarrollo continuo de las construcciones mentales sugeridas en la descomposición genética preliminar. También ayuda a los estudiantes a aplicar lo que han aprendido y tener en cuenta ideas matemáticas relacionadas (Arnon et al., 2014).

Es de tener presente que las actividades y las discusiones en clase se deben retroalimentar entre sí, de modo que las primeras (actividades) son la componente principal de las discusiones y ellas a su vez son favorecedoras de reflexiones de los estudiantes sobre lo hecho en las actividades. Los ejercicios son coherentes con las actividades como con las discusiones.

La pertinencia de esta metodología se sustenta en la necesidad imperiosa de transformar la percepción de las matemáticas y de evitar que los estudiantes se sientan excluidos en el aula. Por el contrario, se busca que los estudiantes se adhieran a la construcción de sus conocimientos, creando un espacio de novedad y curiosidad (Mora, 2013). Estos aspectos son importantes considerar, para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

3.3. Instrumentos e implementación

Los instrumentos para el desarrollo de este trabajo corresponden a las tareas diseñadas para la instrucción y a las rúbricas para el seguimiento de la participación y evaluación de las respuestas por escrito incluidas en los Padlet.

En este documento del trabajo de grado las tareas diseñadas buscan abordar aspectos fundamentales de la función exponencial, como su representación gráfica y comportamiento analítico, utilizando fenómenos biológicos como contexto para el aprendizaje. Las tareas que fueron diseñadas y presentadas en esta trayectoria, son tareas de aprendizaje, pues son diseñadas por la profesora (autora de esta tesis) que serán propuestas para los estudiantes, de secundaria en Paraguay (de 15 a 16 años), con el propósito de contribuir a la comprensión del objeto matemático involucrado: la función exponencial, en un contexto vinculado con la naturaleza, en específico con la biología, y donde los estudiantes puedan superar sus limitaciones de aprendizaje, así como lo enuncia Gómez, et. al. (2018), con relación a las tareas de aprendizaje.

En el Cuadro 6, se presenta la estructura de tareas para la enseñanza de funciones exponenciales, integrando orientación pedagógica y tecnología. Contiene una ficha descriptiva para el profesor con el tema, elementos matemáticos que se aborda, aprendizajes esperados, orientaciones y recursos digitales (Padlet o GeoGebra). La tarea se organiza según la metodología ACE, que incluye actividades en parejas, discusión en clase y ejercicios extra-clase. Además, se describen las respuestas esperadas de los estudiantes que potencien los procesos mentales de acciones y procesos, transitando por los mecanismos de construcción de interiorización y coordinación.

Cuadro 6

Organización y estructura de las tareas propuestas

Ficha descriptiva para el profesor	Presentación de la tarea para el estudiante	Respuestas esperadas
TAREA #	Momentos de la clase Metodología ACE	Teoría APOE Estructuras mentales y Mecanismos de construcción
Tema Específico Elementos matemáticos Estructuras y mecanismos mentales de construcción Orientaciones para el profesor	A Actividades C Discusión en Clase (en grupo) E Ejercicios (Extra clase)	Acciones Interiorización Procesos Coordinación Procesos
Tecnologías digitales para el aula Enlace (link de acceso)	padlet	GeoGebra

Nota. Elaboración propia.

En cuanto a la implementación y la evaluación. Inicialmente se recomienda tener presente que cada tarea diseñada está enfocada en detalles esenciales que no deben ser descuidados en su implementación, los cuales están indicados en el capítulo 4. Para el caso particular de la presente propuesta de innovación, esta será ejecutada al regreso de las actividades lectivas, con una planificación que contempla su implementación en Paraguay en el año 2025. La correcta aplicación de este diseño de tareas no solo implica una cuidadosa preparación, sino también una reflexión continua del profesor durante su desarrollo, y un seguimiento de los estudiantes con relación a los objetivos planteados que permitan elaborar una trayectoria del camino que siguen los estudiantes en la comprensión de las funciones exponenciales que logren los estudiantes.

Los análisis de datos derivados de la instrucción; tareas, rúbrica y Padlet respaldarán estructuras y mecanismos mentales que fueron considerados en la descomposición genética preliminar. La evidencia empírica mostrará qué modificaciones se deben realizar a la descomposición genética de las funciones exponenciales que fue propuesta, o qué tareas se deben modificar para potenciar las estructuras y los mecanismos mentales que se plantearon. Se espera así, al final del ciclo metodológico, que un paso posterior a la implementación de la propuesta sea el análisis de los datos que permitan esbozar una descomposición genética refinada.

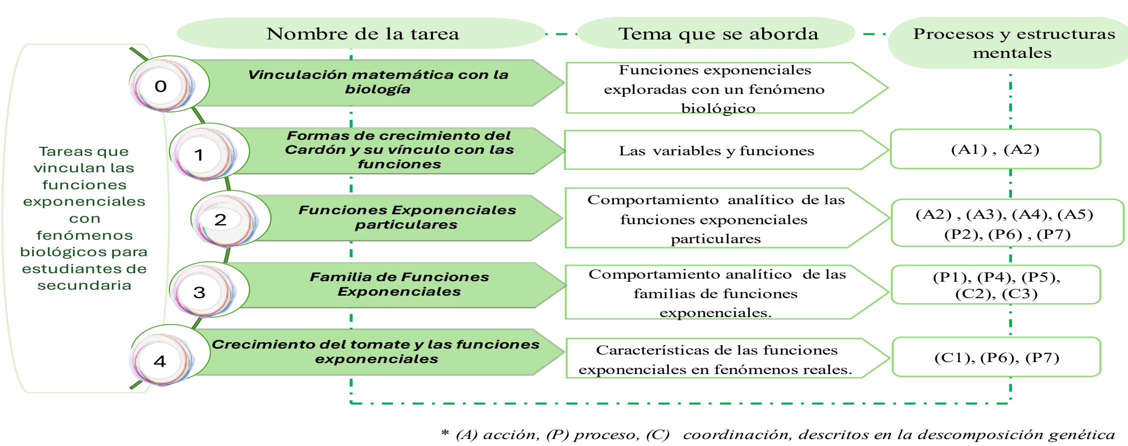
Capítulo 4. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE TAREAS

Este capítulo presenta la propuesta de diseño de tareas desarrolladas bajo el enfoque de la Teoría APOE, con el propósito de fortalecer la comprensión de las funciones exponenciales en estudiantes de secundaria. Las tareas se estructuran a partir de fenómenos biológicos reales, como el crecimiento del tomate en invernadero y del cardón, e integran el uso de herramientas digitales como GeoGebra y Padlet para promover la exploración y la discusión colaborativa. Además, se adopta el ciclo ACE como metodología de enseñanza, permitiendo una secuencia equilibrada de actividades, discusiones y ejercicios. Esta propuesta busca responder a las necesidades pedagógicas identificadas, ofreciendo un aprendizaje contextualizado e interdisciplinario que motive a los estudiantes a comprender las funciones exponenciales de manera significativa.

Se presentan cinco tareas que vinculan las funciones exponenciales con fenómenos biológicos, orientadas a favorecer la comprensión de este concepto en estudiantes de secundaria. En el Mapa 3, se presenta un esquema de las tareas diseñadas y los temas abordados en cada una de ellas.

Mapa 3

Tareas propuestas, los temas y procesos mentales que se abordan



Nota. Elaboración propia.

4.1. TAREA 0

4.1.1. Ficha descriptiva para el profesor

TAREA	**Explorando la biología**	**T 0**
Tema	Funciones exponenciales exploradas con un fenómeno biológico	Tiempo: 80 min
Objetos matemáticos	Matematización de fenómenos naturales	
Aprendizajes Esperados	• Relacionar el entorno cotidiano con el aprendizaje. • Reconocer el vínculo que existe entre las matemáticas y la naturaleza • Valorar la naturaleza como parte esencial de la vida humana y reconocer la responsabilidad de preservar su belleza y equilibrio.	
Orientaciones para el Profesor	Guiar a los estudiantes al trabajo cooperativo, al uso de esta herramienta digital, cual es el Padlet, y a familiarizarse para su uso en esta tarea y en las futuras clases. Lograr que los estudiantes, puedan adentrarse al uso de la biología, y asimilar su vínculo con las matemáticas. Facilitar la discusión en el Padlet, animando a los estudiantes a compartir sus observaciones y comentarios sobre con las preguntas que guiarán el trabajo de clase. El profesor debe guiar en todo momento la discusión y orientar a los estudiantes a que logren el objetivo de las preguntas. Se solicita a los estudiantes que compartan sus conclusiones en Padlet para consolidar lo trabajado.	
Tecnología digital para el aula	Padlet Enlace de acceso a la Tarea 0 https://padlet.com/magdaoroa/t_0_explorando-la-biolog-a-2556p9gysxq5b5x4	

4.1.2. Presentación de la tarea en el Padlet

La Imagen 2 es de referencia, se sugiere ingresar al Padlet en línea, mediante el enlace de acceso o el código QR (Ver Ficha descriptiva para el profesor) para una mejor apreciación y estudio de la Tarea.

Imagen 2

Diseño de la TAREA 0 en el Padlet

Nota. Elaboración propia

4.1.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios

Explorando la biología **T0**

Actividad

¡Bienvenidos estudiantes!
Con esta actividad nos adentraremos a explorar un poco de la biología y así prepararnos para la siguiente clase.
Invitación para hacer un recorrido virtual al jardín Botánico de Bogotá, haciendo clic en el siguiente enlace: **T_0_Explorando la biología (padlet.com)*

Ejercicio extra-clase

1. ¿Conoces el jardín Botánico de tu ciudad?
2. ¿Qué puedes comentar sobre el recorrido virtual del Jardín Botánico?¿Sabes qué es la botánica? ¿Te gustan estos temas?
3. ¿Crees que hay vínculos entre las matemáticas y la biología? ¿Cuáles? Da algunos ejemplos.
4. ¿Sabes a cuántos kilómetros de distancia están Bogotá y Asunción? ¿cuánto tiempo se demora uno, para llegar a esta ciudad en avión?
5. ¿Has observado plantas o flores en tu casa o en el colegio? Si es así, toma algunas fotos de ellas y compártelas. ¿Qué características interesantes observas en su crecimiento o forma?

padlet

Enlace de acceso a la Tarea 0
https://padlet.com/magdaoroa/t_0_explorando-la-biolog-a-2556p9gysxq5b5x4

4.1.4. Respuestas esperadas

Pregunta			Respuesta esperada T 0
E	1	¿Conoces el jardín Botánico de tu ciudad?	Si. Me parece un lindo lugar para conocer una variedad de plantas.
	2	¿Qué puedes comentar sobre el recorrido virtual del Jardín Botánico?¿Sabes qué es la botánica? ¿Te gustan estos temas?	Es interesante, es un lugar para aprender bastante sobre las plantas. Además, hay plantas y flores que no se ven en cualquier lugar y en el Jardín botánico se pueden conocer. Entiendo que la botánica estudia las plantas. Si me gustan, por la variedad de plantas que hay.
	3	¿Crees que hay vínculos entre las matemáticas y la biología? ¿Cuáles? Da algunos ejemplos.	Si. Por ejemplo: hay flores que tienen formas geométricas, sus hojas también tienen formas simétricas, y las medidas del crecimiento de plantas.
	4	¿Sabes a cuántos kilómetros de distancia están Bogotá y Asunción? ¿cuánto tiempo se demora uno, para llegar a esta ciudad en avión?	Son casi 6000 km de distancia y el tiempo de vuelo son aproximadamente 5 horas.
	5	¿Has observado plantas o flores en tu casa o en el colegio? Si es así, toma algunas fotos de ellas y compártelas. ¿Qué características interesantes observas en su crecimiento o forma?	Si existen varias plantas y flores. Hay plantas de diferentes tamaños, algunas tienen tallos gruesos y otras delgadas. Hay plantas que no tienen flores y otras sí. Hay plantas que tienen poco tiempo de vida.

4.2. TAREA 1

4.2.1. Ficha descriptiva para el profesor

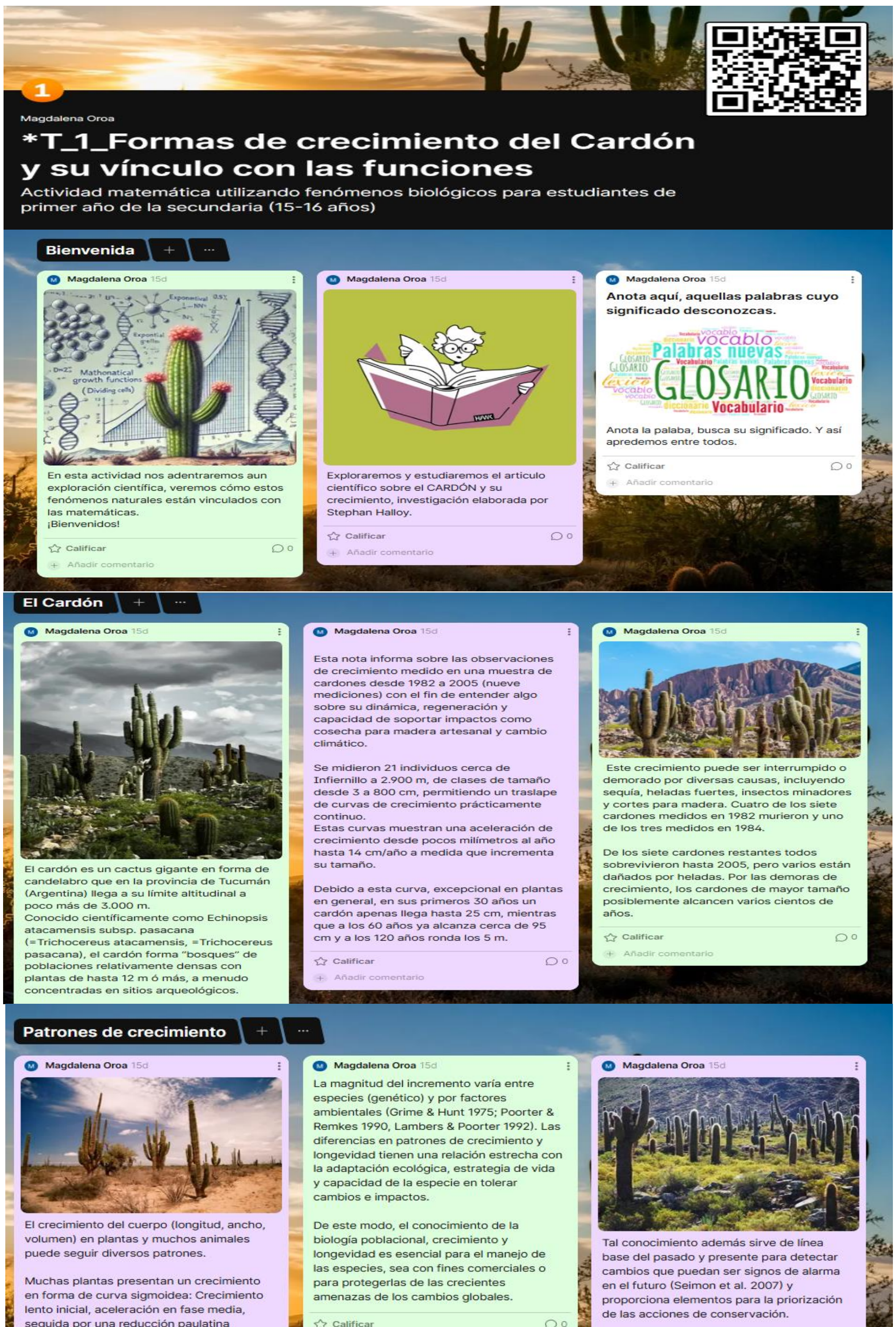
TAREA	**Formas de crecimiento del Cardón y su vínculo con las funciones**	**T 1**
Tema	Variables y funciones	Tiempo: 80 min
Elementos matemáticos	• Variables y constantes. • Relaciones entre variables. • Crecimiento exponencial.	Representación tabular. Representación gráfica.
Estructuras y mecanismos mentales de construcción	(A1) Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada. (A2) Acción de organizar valores de entrada y valores de la función en una tabla de datos. (Prerrequisito) Acción de identificar variables que intervienen en el fenómeno. (Prerrequisito) Acción de identificar relaciones entre las variables.	
Orientaciones para el Profesor	El profesor debe con anterioridad estudiar a profundidad el articulo científico completo, de igual manera es importante que conozca el uso y diseño del Padlet, como herramienta de trabajo cooperativo. Se recomienda al maestro, revisar las preguntas propuestas en la tarea y las posibles respuestas esperadas de los estudiantes. Es importante que el profesor conozca y tenga en cuenta que se han diseñado la tarea con momentos para actividades en equipo, para las discusiones y socializaciones, al igual que existe un ejercicio extra-clase para que los estudiantes indaguen y retomen lo aprendido. Las discusiones en clase al ser guiadas por el profesor deben propender por generar un ambiente en el que se favorezca mecanismos de construcción. Así, favorecer la participación de los estudiantes, la escucha activa de los estudiantes a las intervenciones de sus compañeros y el intercambio de ideas. Además de favorecer la observación, la interpretación y la habilidad de hacerse preguntas frente a la lectura del artículo. El profesor debe guiar en todo momento la discusión y orientar a los estudiantes a que logren respuestas a las preguntas. Se solicita a los estudiantes que compartan sus conclusiones en Padlet para consolidar lo trabajado.	
Tecnología digital para el aula	Padlet Enlace de acceso a la Tarea 1 https://padlet.com/magdaoroa/t_1_formas-de-crecimiento-del-card-n-y-su-v-nculo-con-las-fu-qtp1qmkxzwf32ivc	

4.2.2. Presentación de la tarea en el Padlet

La Imagen 3 es de referencia, se sugiere ingresar al Padlet en línea, mediante el enlace de acceso o el código QR (Ver Ficha descriptiva para el profesor) para una mejor apreciación y estudio de la Tarea.

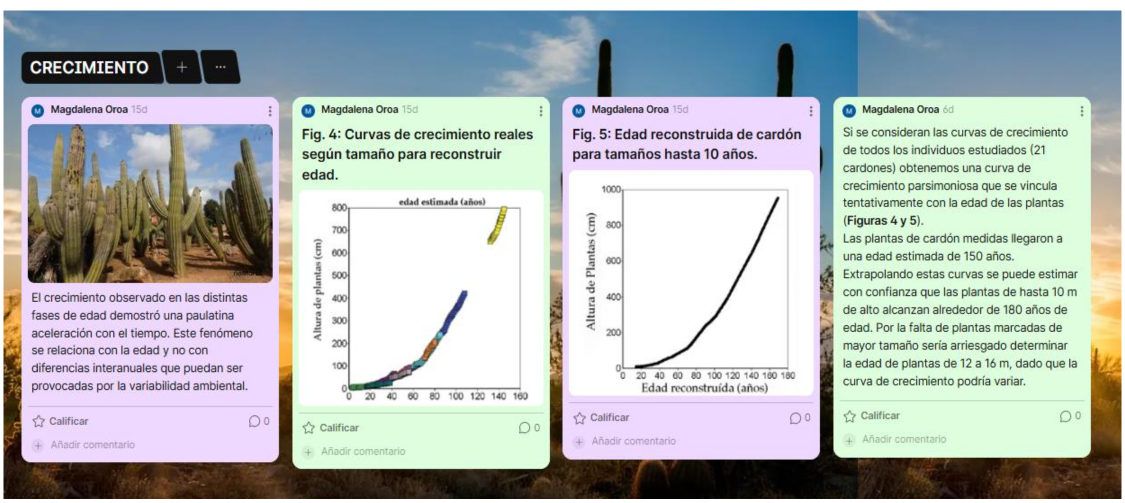
Imagen 3

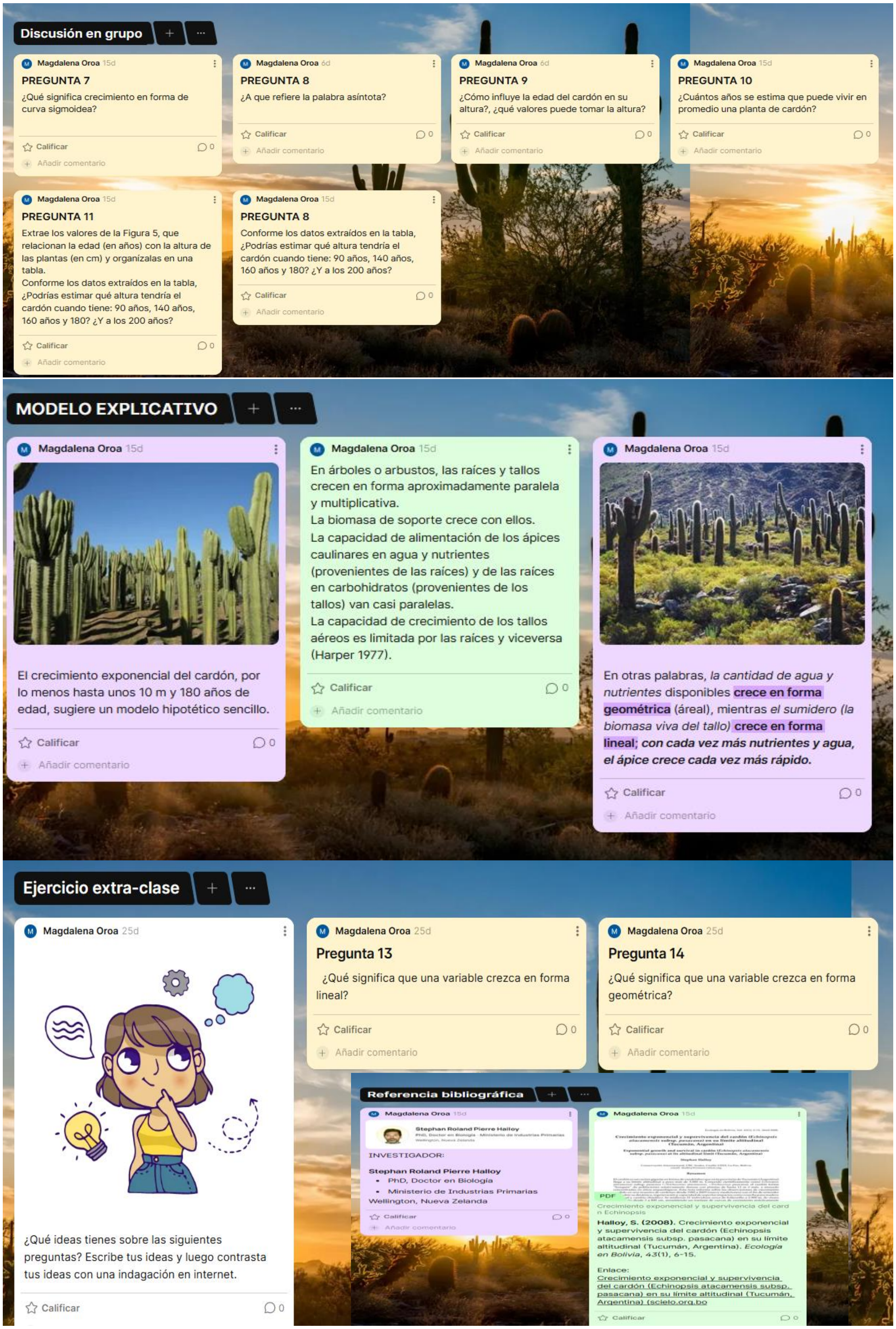
Diseño de la TAREA 1 en el Padlet




Lugar de estudio
Magdalena Oroa 15d
Mapa de Argentina
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
Fig. 1 : Ubicación del sitio de estudio. Cumbres Calchaquíes. Tucumán - Argentina
San Miguel de Tucumán
Ubicación del sitio de estudio en las Cumbres Calchaquíes, noroeste de Argentina (izquierda) y en el contexto topográfico (derecha, círculo blanco). Mapa modificado de Chiozza & Figueira (1981).
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
El lugar de estudio se encuentra encima del km 96 de la ruta provincial 307, entre Tafí del Valle y Amaicha (Figura 1).
Se ubica en la falda oeste de las Cumbres Calchaquíes, al norte del paso El Infiernillo a 3.042 m que comunica estas cumbres con la Sierra del Aconquija.
Calificar
Añadir comentario


Discusión en parejas
Magdalena Oroa 15d
PREGUNTA 1
¿Dónde se encuentra el lugar de estudio y cuáles son las características geográficas del área, según el artículo?
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
PREGUNTA 2
¿Para qué es importante conocer los patrones de crecimiento y longevidad del cardón?
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
PREGUNTA 3
¿Cuáles son los factores que pueden afectan el crecimiento del cardón según el artículo?
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
PREGUNTA 4
Establece en una tabla el registro de crecimiento del cardón a los 30 años, 60 años, y 120 años.
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 6d
PREGUNTA 5
¿Es constante el crecimiento de estas plantas?
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 6d
PREGUNTA 6
La representación gráfica presentada en la Figura 4, muestra la curva de crecimiento. Explica que representa esta curva y cómo se vinculan con la edad del cardón.
Calificar
Añadir comentario


CRECIMIENTO
Magdalena Oroa 15d
El crecimiento observado en las distintas fases de edad demostró una paulatina aceleración con el tiempo. Este fenómeno se relaciona con la edad y no con diferencias interanuales que puedan ser provocadas por la variabilidad ambiental.
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
Fig. 4: Curvas de crecimiento reales según tamaño para reconstruir edad.
edad estimada (años)
Altura de plantas (cm)
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 15d
Fig. 5: Edad reconstruida de cardón para tamaños hasta 10 años.
Altura de Plantas (cm)
Edad reconstruida (años)
Calificar
Añadir comentario
Magdalena Oroa 6d
Si se consideran las curvas de crecimiento de todos los individuos estudiados (21 cardones) obtenemos una curva de crecimiento parsimoniosa que se vincula tentativamente con la edad de las plantas (Figuras 4 y 5).
Las plantas de cardón medidas llegaron a una edad estimada de 150 años. Extrapolando estas curvas se puede estimar con confianza que las plantas de hasta 10 m de alto alcanzan alrededor de 180 años de edad. Por la falta de plantas marcadas de mayor tamaño sería arriesgado determinar la edad de plantas de 12 a 16 m, dado que la curva de crecimiento podría variar.
Calificar
Añadir comentario



Nota. Elaboración propia

4.2.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios.

Formas de crecimiento del cardón y su vínculo con las funciones T1

Actividad

Exploraremos y estudiaremos el artículo científico sobre el CARDÓN y su crecimiento, investigación elaborada por Stephan Halloy (2008). Luego analizaremos y respondemos estas preguntas:

1. ¿Dónde se encuentra el lugar de estudio y cuáles son las características geográficas del área, según el artículo?
2. ¿Para qué es importante conocer los patrones de crecimiento y longevidad del cardón?
3. ¿Cuáles son los factores que pueden afectan el crecimiento del cardón según el artículo?
4. Establece en una tabla el registro de crecimiento del cardón a los 30 años, 60 años, y 120 años.
5. ¿Es constante el crecimiento de estas plantas?
6. La representación gráfica presentada en la Figura 4, muestra la curva de crecimiento. Explica que representa esta curva y cómo se vinculan con la edad del cardón.

Discusión

7. ¿Qué significa crecimiento en forma de curva sigmoidea?
8. ¿A que refiere la palabra asíntota?
9. ¿Cómo influye la edad del cardón en su altura?, ¿qué valores puede tomar la altura?
10. ¿Cuántos años se estima que puede vivir en promedio una planta de cardón?
11. Extrae los valores de la Figura 5, que relacionan la edad (en años) con la altura de las plantas (en cm) y organízalas en una tabla.
12. Conforme los datos extraídos en la tabla, ¿Podrías estimar qué altura tendría el cardón cuando tiene: 90 años, 140 años, 160 años y 180? ¿Y a los 200 años?

Ejercicio extra-clase

13. ¿Qué significa que una variable crezca en forma lineal?
14. ¿Qué significa que una variable crezca en forma geométrica?

Referencia del artículo:
Halloy, S. (2008). Crecimiento exponencial y supervivencia del cardón (Echinopsis atacamensis subsp. pasacana) en su límite altitudinal (Tucumán, Argentina). Ecología en Bolivia, 43(1), 6-15.
Enlace de acceso al artículo científico*:* *Crecimiento exponencial y supervivencia del cardón (Echinopsis atacamensis subsp. pasacana) en su límite altitudinal (Tucumán, Argentina)*

Enlace de acceso a la Tarea 1
https://padlet.com/magdaoroa/t_1_formas-de-crecimiento-del-card-n-y-su-v-nculo-con-las-fu-qtp1qmkxzwf32ivc

4.2.4. *Respuestas esperadas.*

Pregunta			Respuesta esperada T1
A	1	¿Dónde se encuentra el lugar de estudio y cuáles son las características geográficas del área según el artículo?	En Tucumán, Argentina. Es una zona altitudinal con clima árido y montañoso, suelos rocosos y poca vegetación.
	2	¿Para qué es importante conocer los patrones de crecimiento y longevidad del cardón?	Conocer los patrones de crecimiento y longevidad, sirven para conocer qué acciones ayudan a la conservación de la especie de la planta, a entender su adaptación y prever su respuesta al cambio climático.
	3	¿Cuáles son los factores que pueden afectar el crecimiento del cardón según el artículo?	Os factores que pueden afectar son: Altitud del suelo, agua, temperatura, exposición solar, suelo; son los factores que hacen variar el crecimiento de los cardones.
	4	Establece en una tabla el registro de crecimiento del cardón a los 30 años, 60 años y 120 años.	Edad (años): 30, 60, 120 Altura aprox. (cm): 25, 95, 500
	5	¿Es constante el crecimiento de estas plantas?	No, el crecimiento es rápido al principio y se desacelera con la edad.
	6	La representación gráfica presentada en la Figura 4, muestra la curva de crecimiento. Explica que representa esta curva y cómo se vinculan con la edad del cardón.	En la gráfica muestra el crecimiento del cardón, que al principio crece rápidamente. Luego, disminuye el crecimiento cuando el cardón es más viejo. La gráfica muestra un corte entre la edad de 120 y 140 años, esto indica que no hay reportes de cardones que tengan esa edad, en este estudio.
C	7	¿Qué significa crecimiento en forma de curva sigmoidea?	Crecimiento lento inicial, aceleración en la fase media del crecimiento, y luego una reducción paulatina acercándose a una asíntota a medida que la planta envejece.
	8	¿A que refiere la palabra asíntota?	En términos matemáticos, una asíntota es una línea que una curva se aproxima indefinidamente, pero nunca llega a tocar. Aplicado al crecimiento de las plantas, significa que, aunque el crecimiento continúe, este se va volviendo tan lento que, en la práctica, parece detenerse cerca de un límite (por ejemplo, un tamaño o altura máxima).
	9	¿Cómo influye la edad del cardón en su altura?, ¿qué valores puede tomar la altura?	Influye, pues crecen más cuando son pequeños y a medida que pasan los años, los cardones crecen menos. La altura de los cardones puede ser entre 0 cm y 500 cm aproximadamente.
	10	¿Cuántos años se estima que puede vivir en promedio una planta de cardón?	Se estima que pueden llegar a una edad aproximada de 150 años.
	11	Extrae los valores de la Figura 5, que relacionan la edad (en años) con la altura de las plantas (en cm) y organízalas en una tabla.	Los estudiantes extraen los valores aproximados según se indica en la gráfica de la figura 5 y organizan en una tabla.

Tabla construida a partir de la gráfica, por estimaciones y aproximaciones.

Edad (años)	Altura aprox. (cm)
10	12
30	25
60	95
90	300
120	500
140	600
160	800
170	900
180	1000

	12	Conforme los datos extraídos en la tabla, ¿Podrías estimar qué altura tendría el cardón cuando tiene: 90 años, 140 años, 160 años y 180? ¿Y a los 200 años?	A los 90 años tendría 300 cm aprox. A los 140 años tendría 600 cm aprox. A los 160 años tendría 800 cm aprox. A los 180 años tendría 1000 cm aprox. (el articulo lo menciona). A los 200 años, tendría cerca 1100 cm aprox. (aunque se podría calcular la estimación, no sería real, puesto que según el estudio el cardón solo vive hasta 180 años)
E	13	¿Qué significa que una variable crezca en forma lineal?	El crecimiento lineal es constante. Aumenta con adición.
	14	¿Qué significa que una variable crezca en forma geométrica?	El crecimiento geométrico es de forma multiplicativa. Aumenta con multiplicación.

4.3. TAREA 2

4.3.1. Ficha descriptiva para el profesor

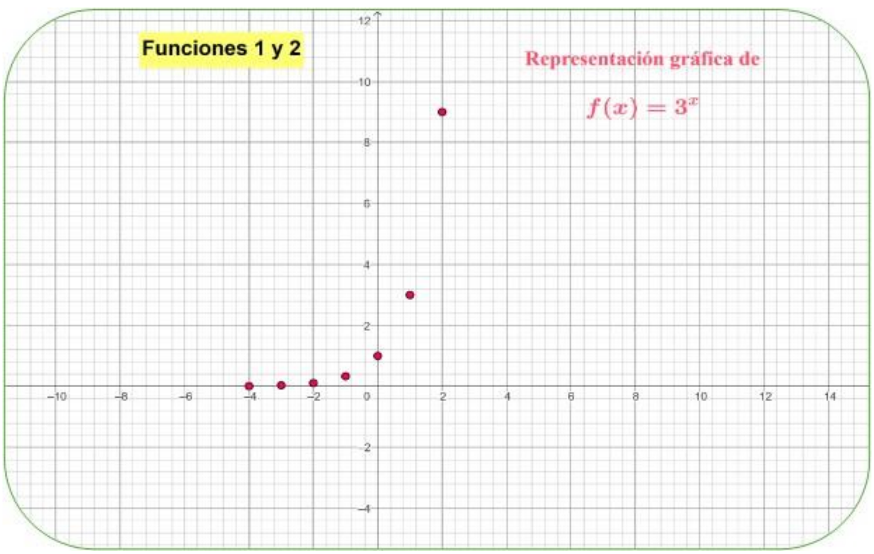
TAREA	**Funciones exponenciales particulares**	**T2**
Tema	Comportamiento análitico de las funciones exponenciales particulares	Tiempo: 80 min
Elementos matemáticos	• Funciones exponenciales particulares. • Representación gráfica y tabular de la función exponencial. • Dominio y rango de la función exponencial (estudio de las variables) Vinculación de la progresión aritmética y la progresión geométrica con la función exponencial Expresión analítica de la función exponencial.	
Estructuras y mecanismos mentales de construcción	(A2) Acción de organizar valores de entrada y valores de la función en una tabla de datos (A3) Acción de calcular las diferencias entre los valores consecutivos de la variable independiente. (A4) Acción de calcular los cocientes entre los valores consecutivos de la variable dependiente. (A5) Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente. (P2) Interiorización de las acciones para examinar la regularidad de las sucesiones numéricas, a través de la diferencia y cociente para establecer un valor que permanezca constante (razón). (P6) Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable x en la representación gráfica (Progresión Aritmética). (P7) Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable y en la representación gráfica (Progresión Geométrica).	
Orientaciones para el Profesor	Las actividades se presentan usando GeoGebra y no parten de la función exponencial genérica sino del estudio de funciones exponenciales particulares Es preciso que el profesor se asegure previamente que los estudiantes comprendan cómo utilizar GeoGebra para graficar funciones y construir tablas El profesor explorará las herramientas disponibles en GeoGebra para asegurarse de que los enlaces proporcionados sean accesibles. También debe configurar previamente las actividades en la plataforma para verificar que los estudiantes tengan acceso sin dificultades. Es indispensable que vincule el ejercicio extra-clase de la tarea 1, con el desarrollo de la tarea 2. De igual manera se recomienda respetar los tiempos de trabajo cooperativo correspondientes a actividades, discusión y ejercicio extra-clase. Se debe enfatizar en los estudiantes, la observación del cambio variacional: las diferencias entre los valores de la variable x son constantes (se comporta como una progresión aritmética) y el cociente entre los valores consecutivos de la variable y es constante (se comporta como una progresión geométrica). Se recomienda dividir a los estudiantes en parejas o grupos para fomentar el trabajo cooperativo y promover el análisis conjunto de las gráficas generadas. Durante este proceso, el profesor debe escuchar a los alumnos en lo concerniente a sus comentarios e interpretaciones sobre el crecimiento de las funciones particulares. También debe guiar discusiones para la identificación del dominio y rango de las funciones exponenciales. Como parte del ejercicio extra-clase, los alumnos deberán elaborar su propia tabla de datos y graficar la función en GeoGebra, utilizando base 10 y 0.5 y responder a una serie de preguntas que el profesor les plantea.	

	Es importante que el profesor revise la respuesta del ejercicio extra-clase con el fin de establecer si los estudiantes han podido vincular las actividades y discusiones hechas en clase (las tablas, diferencias y cocientes) con la comparación del crecimiento del cardón.
Tecnología digital para el aula	GeoGebra
	Enlace de acceso a la Tarea 2 1. Actividad para la clase: Funciones 1 y 2: https://www.geogebra.org/classic/mysexcb8 2. Ejercicio extra-clase: Función exponencial con base: 2;10 y 0.5: https://www.geogebra.org/classic/dpsgwqbw

4.3.2. Presentación de la tarea en GeoGebra

Imagen 4

Representación gráfica de pares ordenados



Nota. Elaboración propia

4.3.3. *Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios*

Funciones exponenciales particulares **T2**

Actividad

Ubica los pares ordenados en una tabla y luego en el plano cartesiano. Puedes realizar el primer ejercicio en papel y luego en GeoGebra.
Examina qué ocurre con cada función real que está representada.
Parejas ordenadas de la primera función: (-2, 1/9), (-1, 1/3), (0,1), (1,3), (2,9), (3,27), (4,81)
Esta primera función se puede escribir como $f(x) = 3^x$, prueba si los valores de las parejas cumplen esa condición.
Ingresa en GeoGebra la función para obtener la gráfica.
Parejas ordenadas de la segunda función: (-3, 1/125), (-2, 1/25), (-1, 1/5), (0,1), (1,5), (2,25), (3, 125), (4, 625)
Has un cuadro donde puedas organizar las respuestas a estas preguntas, para cada conjunto de parejas de cada función real.

1. Organiza los valores en una tabla y examina cómo cambian los valores de cada una de las variables. Procede de la siguiente manera:
    a. Calcula las diferencias entre los valores consecutivos de x. ¿Cuánto da la diferencia? ¿es siempre la misma?
    b. Calcula los cocientes entre los valores consecutivos de y.¿Cuánto da el cociente? ¿Es siempre el mismo?
2. En la función $\mathrm{f(x)} = 3^{\mathrm{x}}$ y la $\mathrm{f(x)} = 5^{\mathrm{x}}$, ¿en qué se diferencian y en qué se parecen estas dos funciones?
3. En la función $f(x) = 3^x$, calcula el valor de y cuando x toma el valor de 10.
4. En la función $f(x) = 3^x$, calcula el valor de y cuando x toma el valor de -5
5. Describe el comportamiento de y cuando x aumenta.

Discusión

6. ¿Cuál sería la expresión matemática que describa a la segunda función? ¿En qué te basas para decir que esa puede ser la expresión para la función?
7. ¿Cómo podrías verificar si esta expresión es correcta?
8. Ingresa la expresión analítica a GeoGebra y revisa si pasa por los puntos que tienes marcados.
9. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable x en la función?
10. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la función y?

Ejercicio extra-clase

11. Conforme a la última tarea y a lo trabajado con el artículo del CARDÓN (en la Figura 5 del artículo, que se encuentra en el Padlet de la tarea 1). En el último fragmento refería que "la cantidad de agua y nutrientes en la planta crece en forma geométrica mientras que la biomasa viva del tallo crece en forma lineal". ¿Cómo se relaciona esta conclusión del articulo científico con lo que examinaste en clase, en las tablas de datos, mediante las diferencias y los cocientes calculados?

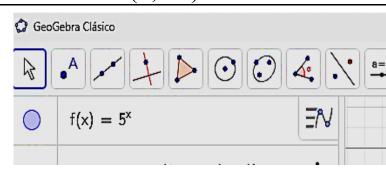
GeoGebra

Enlace de acceso a la Tarea 2
1. Actividad para la clase: Funciones 1 y 2: https://www.geogebra.org/classic/mysexcb8
2. Ejercicio extra-clase: Función exponencial con base: 2;10 y 0.5: https://www.geogebra.org/classic/dpsgwqbw

4.3.4. *Respuestas esperadas*

Se espera que los estudiantes puedan ubicar los puntos en plano cartesiano, y luego esbozar la curva correspondiente a cada pareja ordenada, como se muestra en la Imagen 5.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Pregunta</th><th colspan="2">Respuesta esperada T2</th></tr>
<tr><th>Primera función</th><th>Segunda función</th></tr>
<tr><td rowspan="9">A</td><td>1</td><td>Organiza los valores en una tabla y examina cómo cambian los valores de cada una de las variables. Procede de la siguiente manera</td><td rowspan="3">
<table>
<tr><th colspan="4">$f(x) = 3^x$</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>diferencia</th><th>cociente</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>0..0123</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-3</td><td>0.037</td><td>-3-(-4)=1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>0.111</td><td>-2-(-1)=1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0.333</td><td>-2-(-1)=1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0-(-1)=1</td><td>1/0.33= 3.03…</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1-0=1</td><td>3/1=3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>9</td><td>2-1=1</td><td>9/3=3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>27</td><td>3-2=1</td><td>27/9=3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>81</td><td>4-3=1</td><td>81/27=3</td></tr>
</table>
a. La diferencia siempre es 1.
b.El cociente siempre es 3.
Se obtiene una constante.</td><td rowspan="3">
<table>
<tr><th colspan="4">$f(x) = 5^x$</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>diferencia</th><th>cociente</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>0.0016</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-3</td><td>0.008</td><td>-3-(-4)=1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>0.04</td><td>-2-(-1)=1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0.20</td><td>-2-(-1)=1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0-(-1)=1</td><td>1/0.20=5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>1-0=1</td><td>5/1=5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25</td><td>2-1=1</td><td>25/5=5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>125</td><td>3-2=1</td><td>125/25=5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>625</td><td>4-3=1</td><td>625/125=5</td></tr>
</table>
a. La diferencia siempre es 1.
b. El cociente siempre es 5
Se obtiene una constante.</td></tr>
<tr><td>a</td><td>Calcula las diferencias entre los valores consecutivos de x. ¿Cuánto da la diferencia? ¿es siempre la misma?</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Calcula los cocientes entre los valores consecutivos de y. ¿Cuánto da el cociente? ¿Es siempre el mismo?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">En la función $f(x) = 3^x$ y la $f(x) = 5^x$, ¿en qué se diferencian y en qué se parecen estas dos funciones?</td><td>La curva crece así:
La variable *x* cambia de uno en uno. Mientras que, la variable *y* cambia multiplicándose sucesivamente por 3.
La *x* cambia de uno en uno
La *y* cambia multiplicándose por 3</td><td>La curva crece así:
La variable *x* cambia de uno en uno. Mientras que, la variable *y* cambia multiplicándose sucesivamente por 5.
La *x* cambia de uno en uno
La *y* cambia multiplicándose por 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es decir: Se parecen en que la *x* cambia de uno en uno. Se diferencian en que la *y* cambia multiplicándose por 3 y en la otra por 5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>En la función $f(x) = 3^x$, calcula el valor de y cuando x toma el valor de 10.</td><td colspan="2">$f(10) = 3^{10}$
3.3.3.3.3.3.3.3.3.3= 59.049
.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>En la función $f(x) = 3^x$, calcula el valor de *y* cuando *x* toma el valor de -5</td><td colspan="2">$f(-5) = 3^{-5}$
$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3.3.3.3.3} = \frac{1}{243}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Describe el comportamiento de</td><td colspan="2">Cuando los valores de *x* aumentan los valores de *y* también aumentan</td></tr>
</table>

		y cuando x aumenta.		
C	6	¿Cuál sería la expresión matemática que describa a la segunda función? ¿En qué te basas para decir que esa puede ser la expresión para la función?		La expresión matemática que describe es: $f(x) = 5^x$ Porque la función va cambiando, multiplicándose por 5 en los valores que corresponden a y.
	7	¿Cómo podrías verificar si esta expresión es correcta?	Sustituyendo valores para *x,* para encontrar los valores en *y*. Luego comparar con la gráfica o con los datos que están en las tablas. Ejemplo: $y = 3^x$; $y = 3^2$; $y = 9$ Entonces: (2, 9)	Sustituyendo valores para *x*, para encontrar los valores en *y*. Luego comparar con la gráfica o con los datos que están en las tablas. Ejemplo: $y = 5^x$; $y = 5^2$; $y = 25$ Entonces: (2, 25)
	8	Ingresa la expresión analítica a GeoGebra y revisa si pasa por los puntos que tienes marcados.		
	9	¿Cuáles son los valores que puede tomar *x* en la función?	Los valores que puede tomar *x* en la gráfica son: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Aunque en realidad, *x* puede tomar cualquier valor, tanto positivos como negativos, y puede extenderse indefinidamente. Es decir, los valores de *x* pueden ser todos los reales.	Los valores que puede tomar *x* en la gráfica son: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Aunque en realidad, *x* puede tomar cualquier valor, tanto positivos como negativos, y puede extenderse indefinidamente. Es decir, los valores de *x* pueden ser todos los reales.
	10	¿Cuáles son los valores que puede tomar la función *y*?	Los valores de y son: 0.01, 0.04, 0.11, 0.33, 1, 3, 9, 27, 81. Aunque en realidad, y puede tomar cualquier valor positivo y puede extenderse indefinidamente. Es decir, los valores de y pueden ser todos los reales positivos ($y > 0$).	Los valores de y son: 0.0016, 0.08, 0.04, 0.20, 1, 5, 25, 125, 625. Aunque en realidad, y puede tomar cualquier valor positivo y puede extenderse indefinidamente. Es decir, los valores de y pueden ser todos los reales positivos ($y > 0$).
	11	¿Qué sucede con los valores de y cuando $x = 0$?	Cuando *x=0*, el valor de es *y = 1.*	Cuando *x=0*, el valor de es *y = 1*
	12	Conforme a lo trabajado con el artículo del CARDÓN (figura 5 de la tarea 1), en el último fragmento que refería “la planta crece en forma geométrica (el áreal) mientras	En el crecimiento del cardón, la curva exponencial cambia debido a los recursos disponibles (agua, luz, nutrientes). La planta crece geométricamente porque su tamaño se multiplica, pero a medida que crece más, la curva se aplana porque los recursos limitan su crecimiento.	

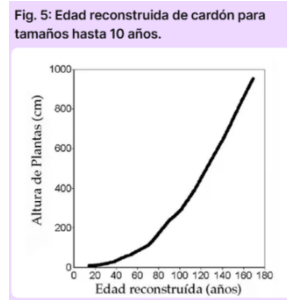
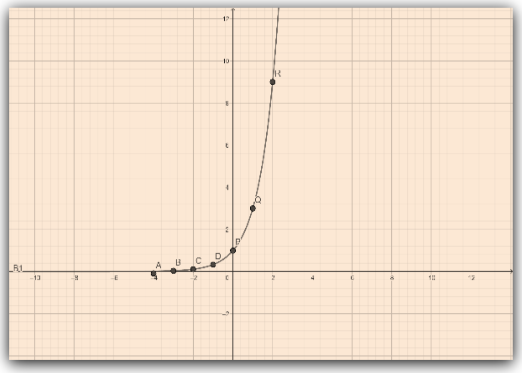
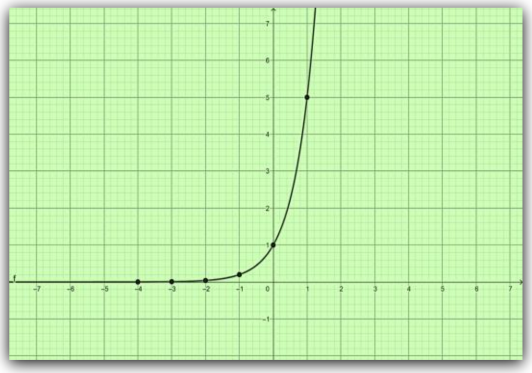
	que el sumidero en forma lineal”. ¿Qué factores o elementos hacen que modifique la forma de la curva exponencial?	*Figura 5 del artículo, que se encuentra en el Padlet de la tarea 1*	

Imagen 5

Representación gráfica de funciones exponenciales particulares

Representación gráfica de $f(x) = 3^x$	Representación gráfica de $f(x) = 5^x$
	

Nota. Elaboración propia

4.4. TAREA 3

4.4.1. Ficha descriptiva para el profesor

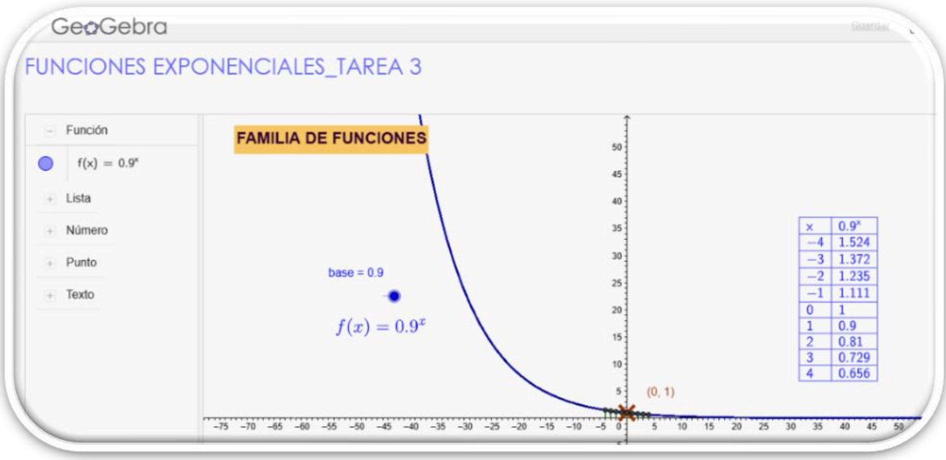
TAREA	**Familia de Funciones Exponenciales**	**T3**
Tema	Comportamiento analítico de las familias de funciones exponenciales	Tiempo: 80 min
Elementos matemáticos	• Funciones exponenciales particulares y la familia de funciones • Curva exponencial creciente y decreciente (estudio de la base). • Punto de corte de la gráfica de la función con el eje y. • Asíntota de la función exponencial	
Estructuras y mecanismos mentales de construcción	(P1) Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno (P4) Interiorización de las acciones de comparar el comportamiento de las curvas de las funciones de acuerdo con sus bases (P5) Interiorización de las acciones de ubicar el punto que corta al eje *y* (punto de corte o de intersección de la curva con el eje). (C2) Comparación entre diferentes curvas de funciones exponenciales crecientes o decrecientes que permitan examinar la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, dependiendo de su base. (C3) Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje *x* como asíntota, el corte de la función con el eje *y*.	
Orientaciones para el Profesor	El profesor debe cerciorarse que los estudiantes puedan tener acceso y manejo de GeoGebra para graficar funciones y construir tablas. El profesor explorará las herramientas disponibles en GeoGebra para asegurarse de que los enlaces proporcionados sean accesibles. También debe configurar previamente las actividades en la plataforma para verificar que los estudiantes tengan acceso sin dificultades. El profesor acompañará tanto con preguntas a los estudiantes como escuchando sus intervenciones durante el desarrollo de las actividades en el análisis del comportamiento de las funciones exponenciales. Además, propiciará que los estudiantes escuchen a sus compañeros y opinen sobre lo expresado por ellos en la construcción de conceptos como la monotonía de las funciones; favoreciendo las acciones y procesos mentales. En el momento de las discusiones generales el profesor puede lanzar a la discusión, preguntas de mayor profundidad. Es importante que el profesor revise la respuesta del ejercicio extra-clase de la Tarea 2 con el fin de establecer si los estudiantes han podido vincular las actividades y discusiones hechas en clase (las tablas, diferencias y cocientes) con la comparación del crecimiento del cardón Adicionalmente se sugiere que el profesor este atento a las dificultades y diferencias que los estudiantes manifiestan al utilizar las notaciones $f(x) = b^x$ o $y = b^x$. Es indispensable que vincule el ejercicio extra-clase de la tarea 2, con el desarrollo de la tarea 3. De igual manera se recomienda respetar los tiempos de trabajo cooperativo correspondientes a actividades, discusión y ejercicio extra-clase. Con ayuda de GeoGebra puede invitar a los estudiantes a explorar las funciones particulares y las familias de las funciones exponenciales.	
Tecnología digital para el aula	GeoGebra Enlace de acceso a la Tarea 3: Familia de funciones https://www.geogebra.org/classic/bxwtp9fm	

4.4.2. Presentación de la tarea en GeoGebra

Los estudiantes podrán acceder al documento de GeoGebra (Imagen 6) y manipular el deslizador, de tal manera a poder explorar y estudiar a las familias de funciones exponenciales (Imagen 7).

Imagen 6

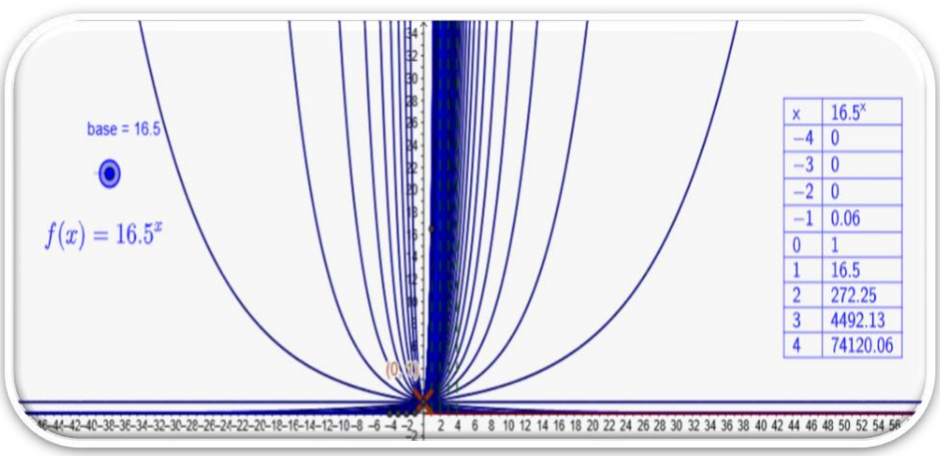
Estudio de la función exponencial creciente y la familia de las funciones



Nota. Elaboración propia

Imagen 7

Familia de funciones esponenciales



Nota. Elaboración propia

4.4.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios

Familia de funciones exponenciales **T3**

Actividad

Exploraremos en GeoGebra la función dada y analicemos el comportamiento gráfico de la curva de una función particular y su familia de funciones.
La curva que se presenta es una función cuya expresión analítica es $f(x) = 0.9^x$, donde la base es 0.9 y los valores de y varían dependiendo de los valores de x. Con ayuda del deslizador de GeoGebra, examina otras funciones y responde a las respuestas a las preguntas que se presentan a continuación.

1. Escribe al menos tres funciones que observas al desplazar el deslizador.
2. Con el deslizador has logrado una familia de funciones, son estás funciones decrecientes. Explica.
3. Ahora realiza una modificación en los valores del deslizador (vas a trabajar con la base mayor que 1 y menor que 10).
    a. Escribe al menos tres funciones que observas al desplazar el deslizador.
    b. ¿Será posible que la base puede ser un valor mayor que 10?.

Discusión

4. ¿Hay alguna función exponencial con base 0? ¿Qué pasa con la función $f(x) = 0^x$?
5. ¿Existe una función exponencial con base 1? Escribe una explicación.
6. ¿Qué sucede con la curva en la función exponencial, si la base es mayor que 1?

Ejercicio extra-clase

7. Realiza la gráfica de la función exponencial, cuando la base sea 10, con la base 2 y una gráfica cuando sea 0,5; es decir, $\mathrm{f(x)} = 10^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{f(x)} = 2^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{f(x)} = 0.5^{\mathrm{x}}$
8. Consulta cuándo una función se llama creciente y cuándo se la llama decreciente. Escribe si las funciones crecientes y decrecientes tienen alguna relación con las familias de funciones que hiciste

Enlace de acceso a la Tarea 3:
Familia de funciones https://www.geogebra.org/classic/bxwtp9fm

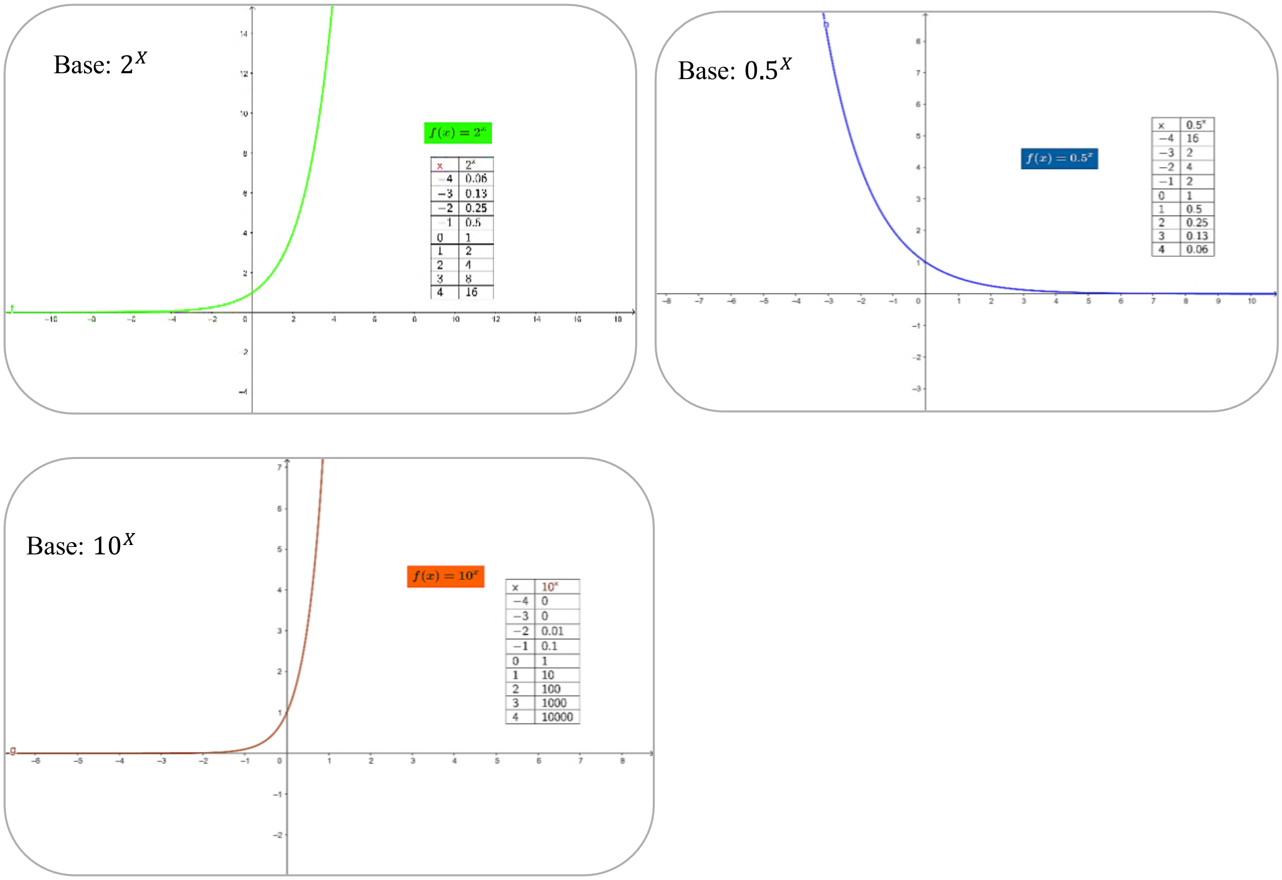
4.4.4. *Respuestas esperadas*

Pregunta			Respuesta esperada T3
A	1	Escribe al menos tres funciones que observas al desplazar el deslizador.	Se observa las siguientes funciones: $f(x) = 0.9^x$; $f(x) = 0.8^x$; $f(x) = 0.7^x$; $f(x) = 0.6^x$; $f(x) = 0.5^x$: $f(x) = 0.4^x$; $f(x) = 0.3^x$; $f(x) = 0.2^x$; $f(x) = 0.1^x$
	2	Con el deslizador has logrado una familia de funciones, son estas funciones decrecientes. Explica acudiendo a la tabla de datos y a la gráfica.	Sí, las funciones con bases menores que 1 son decrecientes.
	3	Ahora realiza una modificación en los valores del deslizador (vas a trabajar con la base mayor que 1 y menor que 10). (a) Escribe al menos tres funciones que observas al desplazar el deslizador (b) ¿Será posible que la base puede ser un valor mayor que 10?	(a) Se observa las siguientes funciones (por citar algunas): $f(x) = 1.1^x$; $f(x) = 1.2^x$; $f(x) = 1.3^x$; $f(x) = 1.4^x$; $f(x) = 3^x$; $f(x) = 4^x$, $f(x) = 5^x$; $f(x) = 6^x$; $f(x) = 8^x$; $f(x) = 9^x$ (b) Si, la función existe. La gráfica se puede seguir trazando, y la tabla con parejas ordenadas se puede obtener porque al asignarle un valor a *x*, siempre hay un único resultado para *y*
C	4	¿Hay alguna función exponencial con base 0? ¿Qué pasa con la función $f(x) = 0^x$?	No, no existe una función exponencial con base 0. Siempre que x es un número real positivo da cero. Además, la gráfica sería una línea horizontal en *y = 0.* Mientras que cuando la *x* es un número real negativo se obtiene una división por cero, por lo que no está definido. A su vez cuando el exponente es cero, el valor no está definido.
	5	¿Existe una función exponencial con base 1? Escribe una explicación	Existe una función real, pero no es una función exponencial. Si la base es 1, la función no crece ni decrece, es constante. Si se eleva 1 a cualquier valor real siempre da 1. Por lo tanto, la gráfica sería una línea horizontal en *y=1*
	6	¿Qué sucede con la curva en la función exponencial, si la base es mayor que 1?	Si, las funciones con bases mayores que 1 son crecientes. Cuando el valor de *x* aumenta, el valor de *y* también aumenta. Se observa en la tabla y en la gráfica: por ejemplo, para $f(x) = 9^x$, a medida que *x* aumenta, *y* se aleja de 0. Mientras que, si x disminuye, y se acerca a 0
E	7	Realiza la gráfica de la función exponencial, cuando la base sea 10, con la base 2 y una gráfica cuando sea 0,5 o sea $\mathrm{f(x)} = 10^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{f(x)} = 2^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{f(x)} = 0.5^{\mathrm{x}}$	En la Imagen 8, se muestran las tablas y gráficas que se espera que los estudiantes realicen están al final de este cuadro. Acceso en GeoGebra: https://www.geogebra.org/classic/z63pdhgs
	8	Consulta ¿cuándo una función se llama creciente? y ¿cuándo se la llama decreciente? Escribe si las funciones crecientes y decrecientes tienen alguna relación con las familias de funciones que hiciste.	La función exponencial será decreciente, si la base $0 < b < 1$ (números reales entre 0 y 1, sin que valga 0 ni 1). La función exponencial será creciente, si la base $b > 1$ (números reales mayores que 1).

En la Imagen 8, se muestra las gráficas solicitadas en los ejercicios extra-clase.

Imagen 8

Ejercicio extra-clase: Representación gráfica de funciones exponenciales



Nota. Elaboración propia

4.5. TAREA 4

4.5.1. Ficha descriptiva para el profesor

TAREA	**Crecimiento del tomate y las funciones exponenciales**	**T4**
Tema	Características de las funciones exponenciales en fenómenos reales.	Tiempo: 80 min
Elementos matemáticos	• Expresión analítica de la función exponencial y sus elementos. • Variable: dependiente e independiente. • Dominio y rango de la función exponencial. • Monotonía de la función exponencial; creciente y decreciente. • Asíntota	
Estructuras y mecanismos mentales de construcción	(C1) Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar el crecimiento de funciones lineales y exponenciales (P6) Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable x en la representación gráfica (Progresión Aritmética) (P7) Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable y en la representación gráfica (Progresión Geométrica).	
Orientaciones para el Profesor	Es importante que el profesor reconozca el hilo conductor entre el ejercicio extra-clase 1 con el ejercicio extra-clase 2 y las actividades de la Tarea 2. Dado que en ellas se caracteriza a la función exponencial por su cambio aritmético en la variable independiente y su cambio geométrico en la variable dependiente. Atendiendo a la observación anterior, el profesor encontrará que, en el segundo artículo científico, trabajado en esta tarea, no se presenta de manea explicita cómo cambian las variables en el fenómeno, sino que directamente se establece una etapa de crecimiento exponencial, característica que se debe explorar con los estudiantes. Se debe lograr que los estudiantes aborden los elementos matemáticos estudiados e incorporen el uso de lenguaje matemático (dominio, rango, variables, constantes, función exponencial creciente, decreciente, función lineal, función exponencial). El profesor debe fomentar el uso de lenguaje matemático preciso en las discusiones y conclusiones. En esta tarea 4, el profesor, encontrará las actividades para la clase, presentadas en un Padlet, donde ya están seleccionados segmentos que les permitirán a los estudiantes entender el fenómeno del crecimiento del tomate en invernadero Este artículo permite retomar, para su comparación, procesos mentales relativos a la función lineal (objeto estudiado y trabajado previamente en el aula) con los procesos concernientes a la función exponencial, dado que ambas funciones forman parte de la descripción comportamiento del cultivo del tomate. También se encontrará con preguntas para el trabajo en pequeños grupos y la discusión en grandes grupos para conversar sobre variables, dominio y rango de esa función concerniente al crecimiento del tomate. Las actividades de esta Tarea se presentan en el Padlet, su uso es para potenciar el trabajo cooperativo de los estudiantes, permitiendo así que compartan sus hallazgos y construyan su conocimiento. El profesor debe ubicar al estudiante en todo momento en la escucha activa, la discusión y así reorientar a los estudiantes a que logren el objetivo con las conversaciones alrededor de las preguntas.	
Tecnología digital para el aula	Padlet Enlace de acceso a la Tarea 4: https://padlet.com/magdaoroa/t_4_crecimiento-del-tomate-y-las-funciones-exponenciales-fz8w83pum06wgg1o Enlace de acceso al artículo científico: Análisis de crecimiento del cultivo de tomate en invernadero	

4.5.2. Presentación de la tarea en el Padlet

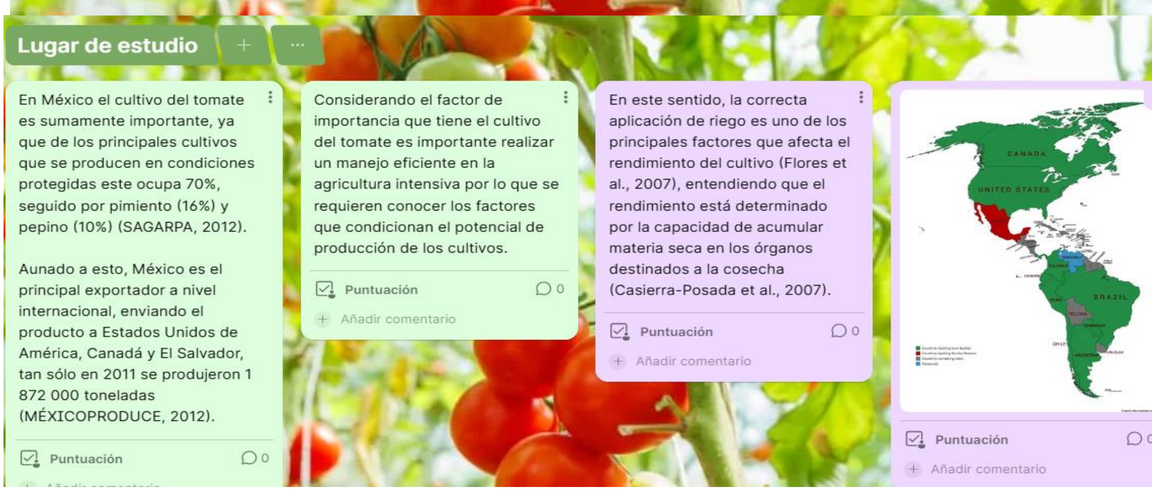
La Imagen 9 es de referencia, se sugiere ingresar al Padlet en línea, mediante el enlace de acceso o el código QR (Ver Ficha descriptiva para el profesor) para una mejor apreciación y estudio de la Tarea.

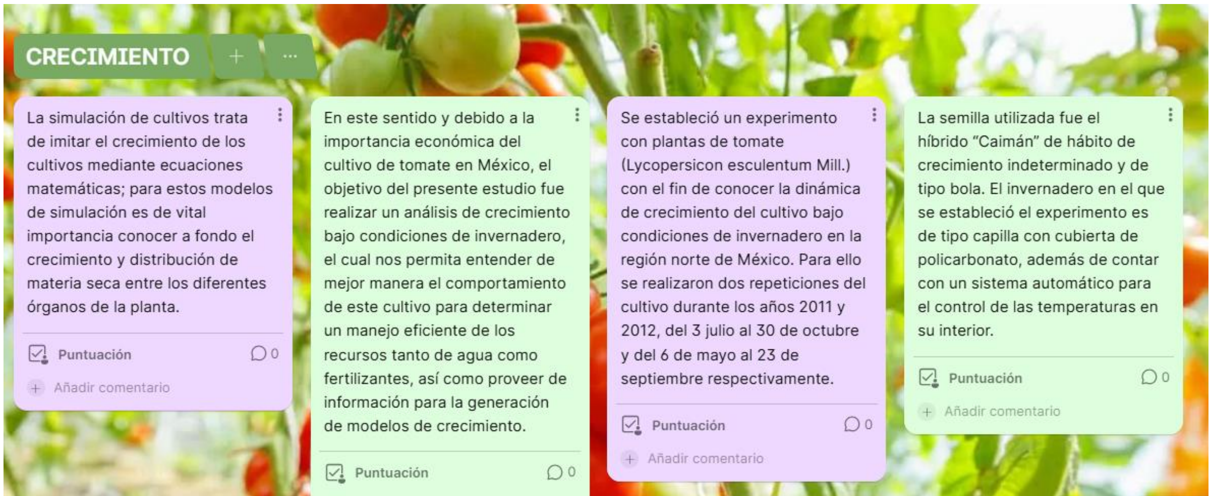
Imagen 9

Diseño de la TAREA 4 en Padlet


Discusión en parejas
PREGUNTA 1
¿Cómo se presenta el crecimiento de las plantas del tomate?
Puntuación
0
Añadir comentario
PREGUNTA 2
¿Qué variables de la función exponencial identificas en el análisis del crecimiento del tomate?
Puntuación
0
Añadir comentario
PREGUNTA 3
¿Cuáles son los factores que influyen en el crecimiento del tomate? y ¿Cómo se relacionan con los factores climáticos en el invernadero?
Puntuación
0
Añadir comentario
PREGUNTA 4
¿Cuál es la variable independiente en el modelo de crecimiento del tomate? Explica por qué. Y ¿cuál es la variable dependiente?
Puntuación
0
Añadir comentario
PREGUNTA 5
¿Qué ocurre con el crecimiento de la planta de tomate, en las semanas 15-21? ¿cómo se entiende matemáticamente este cambio?
Puntuación
0
Añadir comentario


Patrones de crecimiento
La producción de cultivos en invernaderos es de suma importancia ya que nos da una ventaja sobre la producción a cielo abierto porque se establece una barrera entre el ambiente externo y el cultivo, creando un microclima interno que permite proteger el cultivo de condiciones adversas (viento, granizo, plagas, etc.) y controlar factores como la temperatura, radiación, concentración de CO2, humedad relativa, etc
Puntuación
0
Añadir comentario
En México, el uso de invernaderos para la producción de hortalizas ha aumentado rápidamente, de 721 ha en 1999 a 3 200 ha en 2005 (Ocaña- Romo, 2008), la cual en 2009 se extendió a una superficie de 10 000 ha (Perea, 2009).
Los datos más recientes muestran que en 2012 se llegó a 12 000 ha de invernaderos.
Puntuación
0
Añadir comentario
La magnitud del incremento varía entre especies (genético) y por factores ambientales (Grime & Hunt 1975; Poorter & Remkes 1990, Lambers & Poorter 1992). Las diferencias en patrones de crecimiento y longevidad tienen una relación estrecha con la adaptación ecológica, estrategia de vida y capacidad de la especie en tolerar cambios e impactos.
Puntuación
0
Añadir comentario
Tal conocimiento además sirve de línea base del pasado y presente para detectar cambios que puedan ser signos de alarma en el futuro (Seimon et al. 2007) y proporciona elementos para la priorización de las acciones de conservación.
Puntuación
0
Añadir comentario


Lugar de estudio
En México el cultivo del tomate es sumamente importante, ya que de los principales cultivos que se producen en condiciones protegidas este ocupa 70%, seguido por pimiento (16%) y pepino (10%) (SAGARPA, 2012).
Aunado a esto, México es el principal exportador a nivel internacional, enviando el producto a Estados Unidos de América, Canadá y El Salvador, tan sólo en 2011 se produjeron 1 872 000 toneladas (MÉXICOPRODUCE, 2012).
Puntuación
0
Considerando el factor de importancia que tiene el cultivo del tomate es importante realizar un manejo eficiente en la agricultura intensiva por lo que se requieren conocer los factores que condicionan el potencial de producción de los cultivos.
Puntuación
0
Añadir comentario
En este sentido, la correcta aplicación de riego es uno de los principales factores que afecta el rendimiento del cultivo (Flores et al., 2007), entendiendo que el rendimiento está determinado por la capacidad de acumular materia seca en los órganos destinados a la cosecha (Casierra-Posada et al., 2007).
Puntuación
0
Añadir comentario
CANADA
UNITED STATES
BRAZIL
Puntuación
0
Añadir comentario



CRECIMIENTO

La simulación de cultivos trata de imitar el crecimiento de los cultivos mediante ecuaciones matemáticas; para estos modelos de simulación es de vital importancia conocer a fondo el crecimiento y distribución de materia seca entre los diferentes órganos de la planta.

Puntuación 0

Añadir comentario

En este sentido y debido a la importancia económica del cultivo de tomate en México, el objetivo del presente estudio fue realizar un análisis de crecimiento bajo condiciones de invernadero, el cual nos permita entender de mejor manera el comportamiento de este cultivo para determinar un manejo eficiente de los recursos tanto de agua como fertilizantes, así como proveer de información para la generación de modelos de crecimiento.

Puntuación 0

Se estableció un experimento con plantas de tomate (Lycopersicon esculentum Mill.) con el fin de conocer la dinámica de crecimiento del cultivo bajo condiciones de invernadero en la región norte de México. Para ello se realizaron dos repeticiones del cultivo durante los años 2011 y 2012, del 3 julio al 30 de octubre y del 6 de mayo al 23 de septiembre respectivamente.

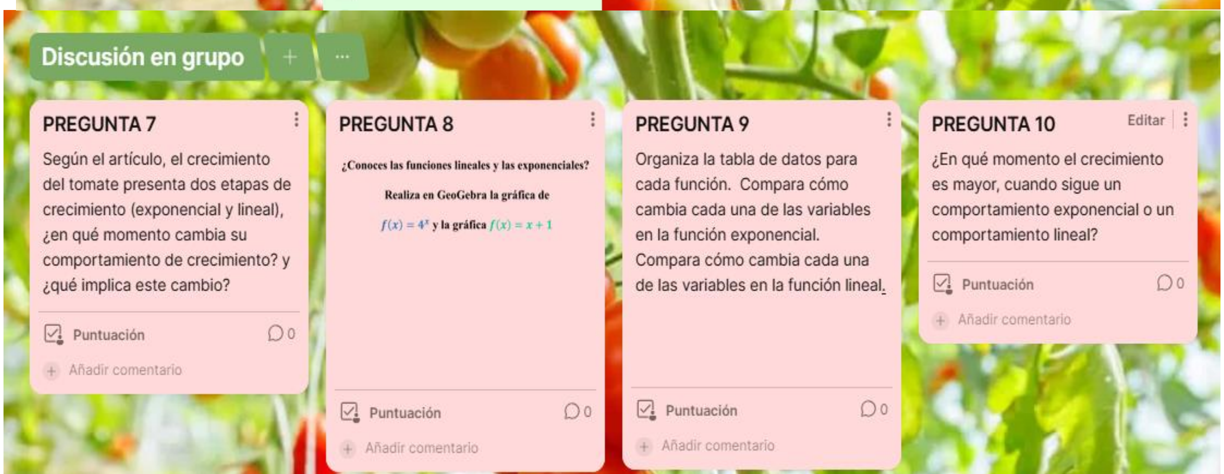
Puntuación 0

Añadir comentario

La semilla utilizada fue el híbrido "Caimán" de hábito de crecimiento indeterminado y de tipo bola. El invernadero en el que se estableció el experimento es de tipo capilla con cubierta de policarbonato, además de contar con un sistema automático para el control de las temperaturas en su interior.

Puntuación 0

Añadir comentario



Discusión en grupo

PREGUNTA 7

Según el artículo, el crecimiento del tomate presenta dos etapas de crecimiento (exponencial y lineal), ¿en qué momento cambia su comportamiento de crecimiento? y ¿qué implica este cambio?

Puntuación 0

Añadir comentario

PREGUNTA 8

¿Conoces las funciones lineales y las exponenciales?

Realiza en GeoGebra la gráfica de

$f(x) = 4^x$ y la gráfica $f(x) = x + 1$

Puntuación 0

Añadir comentario

PREGUNTA 9

Organiza la tabla de datos para cada función. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función exponencial. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función lineal.

Puntuación 0

Añadir comentario

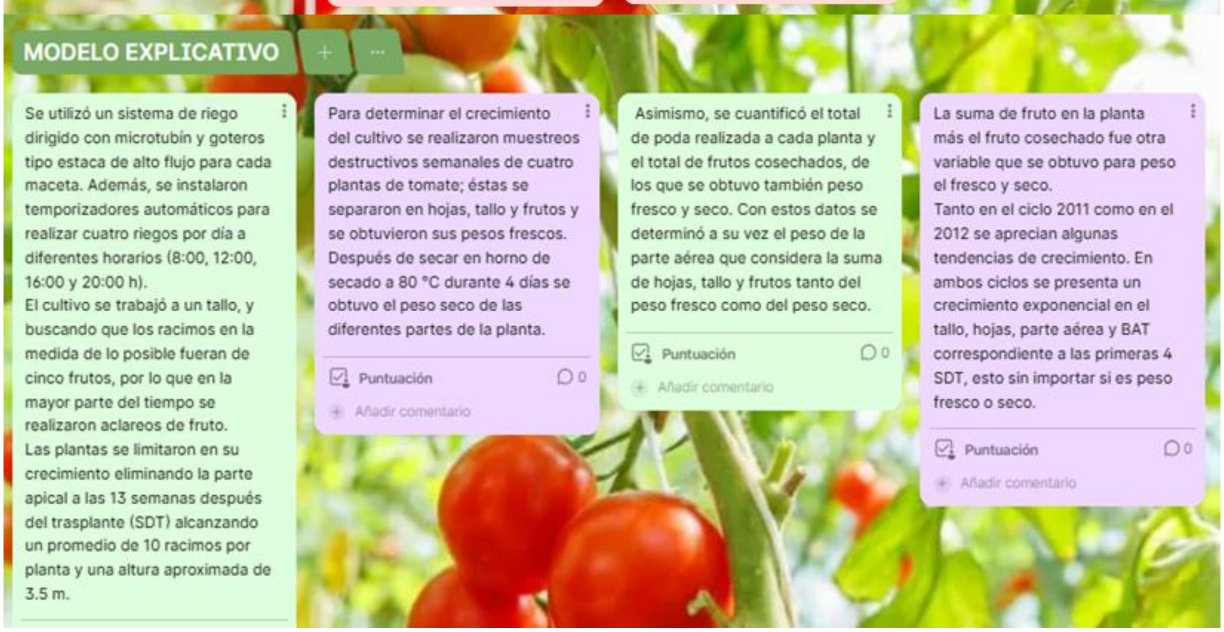
PREGUNTA 10

Editar

¿En qué momento el crecimiento es mayor, cuando sigue un comportamiento exponencial o un comportamiento lineal?

Puntuación 0

Añadir comentario



MODELO EXPLICATIVO

Se utilizó un sistema de riego dirigido con microtubín y goteros tipo estaca de alto flujo para cada maceta. Además, se instalaron temporizadores automáticos para realizar cuatro riegos por día a diferentes horarios (8:00, 12:00, 16:00 y 20:00 h).
El cultivo se trabajó a un tallo, y buscando que los racimos en la medida de lo posible fueran de cinco frutos, por lo que en la mayor parte del tiempo se realizaron aclareos de fruto.
Las plantas se limitaron en su crecimiento eliminando la parte apical a las 13 semanas después del trasplante (SDT) alcanzando un promedio de 10 racimos por planta y una altura aproximada de 3.5 m.

Para determinar el crecimiento del cultivo se realizaron muestreos destructivos semanales de cuatro plantas de tomate; éstas se separaron en hojas, tallo y frutos y se obtuvieron sus pesos frescos. Después de secar en horno de secado a 80 °C durante 4 días se obtuvo el peso seco de las diferentes partes de la planta.

Puntuación 0

Añadir comentario

Asimismo, se cuantificó el total de poda realizada a cada planta y el total de frutos cosechados, de los que se obtuvo también peso fresco y seco. Con estos datos se determinó a su vez el peso de la parte aérea que considera la suma de hojas, tallo y frutos tanto del peso fresco como del peso seco.

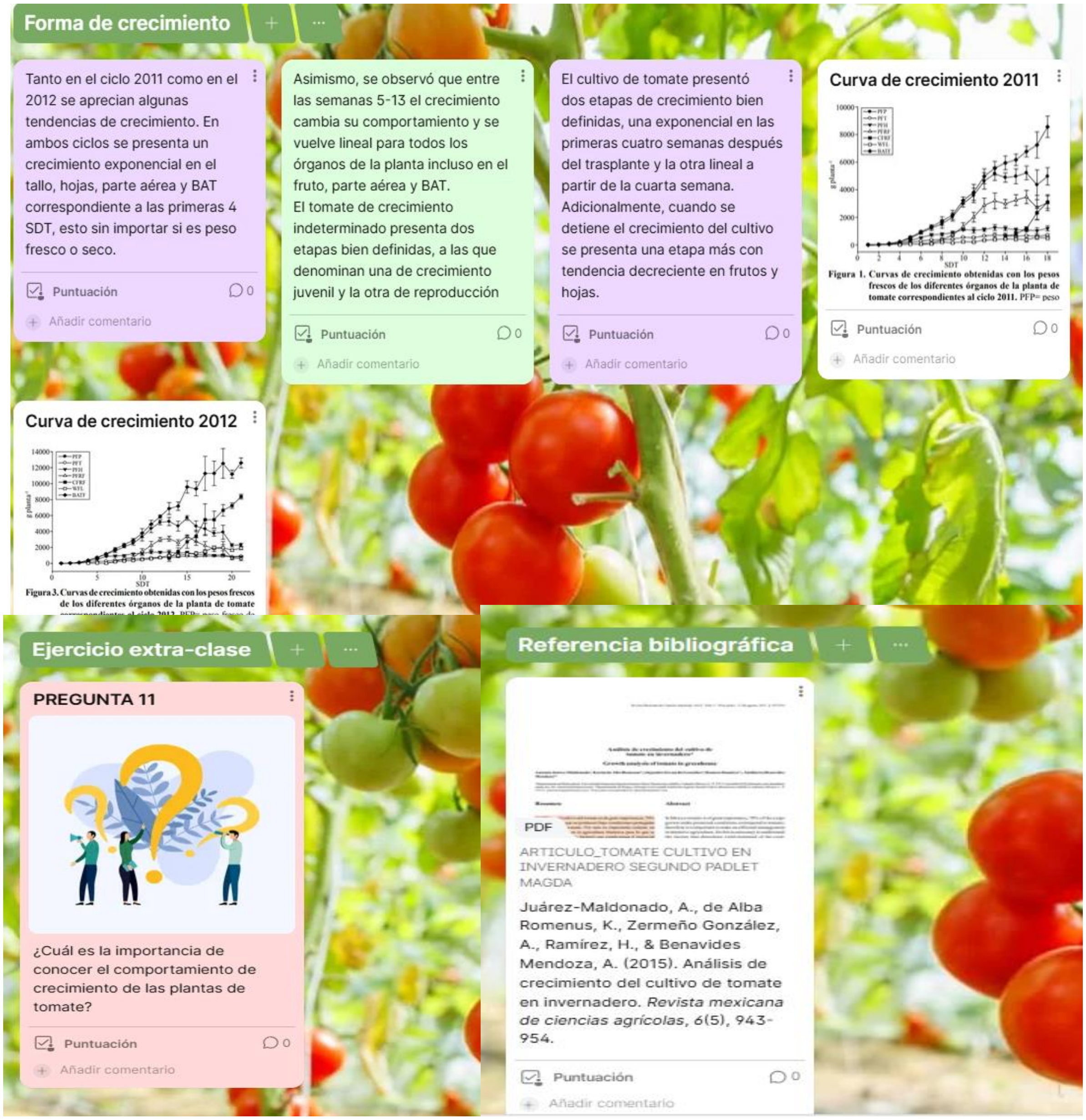
Puntuación 0

Añadir comentario

La suma de fruto en la planta más el fruto cosechado fue otra variable que se obtuvo para peso el fresco y seco.
Tanto en el ciclo 2011 como en el 2012 se aprecian algunas tendencias de crecimiento. En ambos ciclos se presenta un crecimiento exponencial en el tallo, hojas, parte aérea y BAT correspondiente a las primeras 4 SDT, esto sin importar si es peso fresco o seco.

Puntuación 0

Añadir comentario



Nota. Elaboración propia

4.5.3. Transcripción de Actividades, Discusión y Ejercicios

Crecimiento del tomate y las funciones exponenciales	**T4**

Actividad

Ahora que ya conocemos un poco más acerca de la función exponencial y sus características, examinaremos el artículo científico sobre el crecimiento del TOMATE en invernadero, una investigación realizada por Juárez- Maldonado y otros investigadores en México (2015). Luego respondemos las preguntas presentadas.

1. ¿Cómo se presenta el crecimiento de las plantas del tomate?
2. ¿Qué variables del crecimiento de las plantas de tomate identificas en el análisis presentado en el artículo científico?
3. ¿Cuáles son los factores que influyen en el crecimiento del tomate? y ¿cómo se relacionan con los factores climáticos en el invernadero?
4. ¿Cuál es la variable independiente en el modelo de crecimiento del tomate? Explica por qué y ¿cuál es la variable dependiente?
5. ¿Qué ocurre con el crecimiento de la planta de tomate, en las semanas 15-21? ¿Cómo se entiende matemáticamente este cambio?
6. ¿Cuál es el dominio y el rango de la función que describe el crecimiento del tomate?

Discusión

7. Según el artículo, el crecimiento del tomate presenta dos etapas de crecimiento (exponencial y lineal), ¿en qué momento cambia su comportamiento de crecimiento? y ¿qué implica este cambio?
8. ¿Conoces las funciones lineales y las exponenciales? Realiza en GeoGebra la gráfica de $f(x) = 4^x$ y la gráfica $f(x) = x + 1$
9. Organiza la tabla de datos para cada función. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función exponencial. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función lineal.
10. ¿En qué momento el crecimiento es mayor, cuando sigue un comportamiento exponencial o un comportamiento lineal?

Ejercicio extra-clase

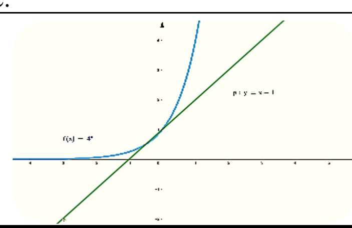
11. ¿Cuál es la importancia de conocer el comportamiento de crecimiento de las plantas de tomate?

padlet

Acceso a Tarea 4:
https://padlet.com/magdaoroa/t_4_crecimiento-del-tomate-y-las-funciones-exponenciales-fz8w83pum06wgg1o

Enlace de acceso al artículo científico:
Análisis de crecimiento del cultivo de tomate en invernadero

4.5.4. Respuestas esperadas

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta</th><th>Respuesta esperada</th><th>T4</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>¿Cómo se presenta el crecimiento de las plantas del tomate?</td><td colspan="2">El crecimiento del tomate es exponencial al inicio y luego se estabiliza de forma lineal cuando los recursos comienzan a limitarse.</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>¿Qué variables del crecimiento de las plantas de tomate identificas en el análisis presentado en el artículo científico?</td><td colspan="2">Las variables son x (tiempo, en semanas) y la variable y (altura del tomate).</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>¿Cuáles son los factores que influyen en el crecimiento del tomate? Y ¿Cómo se relacionan con los factores climáticos en el invernadero?</td><td colspan="2">Los principales factores que influyen en el crecimiento del tomate incluyen la temperatura, la humedad, la disponibilidad de agua, la luz solar, la calidad del suelo y los nutrientes. Estos factores afectan directamente la velocidad de crecimiento y el potencial de producción de la planta.</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>¿Cuál es la variable independiente en el modelo de crecimiento del tomate? Explica por qué. Y ¿cuál es la variable dependiente?</td><td colspan="2">La variable independiente es el tiempo (medido en semanas), ya que es el factor que no depende de las demás variables, pero que afecta el crecimiento de la planta a lo largo de su ciclo.
La variable dependiente es la altura de la planta del tomate.</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>¿Qué ocurre con el crecimiento de la planta de tomate, en las semanas 15-21? ¿cómo se entiende matemáticamente este cambio?</td><td colspan="2">En las semanas 15-21, la parte aérea, hojas y frutos mostraron una tendencia lineal decreciente. Esto se entiende que el crecimiento es más lento, y lineal.</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>¿Cuál es el dominio y el rango de la función que describe el crecimiento del tomate?</td><td colspan="2">El dominio son todas las semanas de vida que tiene desde que se planta el tomate , es decir se puede escribir $D: [0; 12]$
El rango son todas las alturas posibles del tomate, que empiezan desde 0 cm y siguen creciendo, es decir se puede escribir R: $[0; 150]$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>7</td><td>Según el artículo, el crecimiento del tomate presenta dos etapas de crecimiento (exponencial y lineal), ¿en qué momento cambia su comportamiento de crecimiento? y ¿qué implica este cambio?</td><td colspan="2">Entre la semana 5-13, el crecimiento cambia su comportamiento y se vuelve lineal.
Matemáticamente, el cambio de crecimiento de exponencial a lineal en el tomate ocurre cuando la tasa de crecimiento deja de multiplicarse de manera constante y se estabiliza, el tomate deja de crecer rápidamente porque los recursos comienzan a ser limitados. Al principio, sigue una curva exponencial pero después de varias semanas, el crecimiento se estabiliza y sigue una función lineal f, donde el aumento de altura es más constante.</td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>¿Conoces las funciones lineales y las exponenciales? Realiza en GeoGebra la gráfica de $f(x) = 4^x$ y la gráfica $f(x) = x + 1$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>9</td><td>Organiza la tabla de datos para cada función. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función exponencial. Compara cómo cambia cada una de las variables en la función lineal</td><td colspan="2"><table><tr><th>x</th><th>-3</th><th>-2</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr><tr><td>$f(x) = 4^x$</td><td>1/64= 0,015</td><td>1/16= 0,062</td><td>1/4= 0,25</td><td>1</td><td>4</td><td>16</td><td>64</td></tr><tr><td>$f(x) = x + 1$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
</table>

			En la función expoenencial, el valor de *f(x)* crece de forma geométrica (multiplicativa), mienstras que en la función lineal, aumenta de manera aritmética (aditiva).
	10	¿En qué momento el crecimiento es mayor, cuando sigue un comportamiento exponencial o un comportamiento lineal?	El crecimiento es mayor cuando sigue un comportamiento exponencial, ya que a medida que el tiempo o el valor de x aumenta, el valor de y= f(x) se incrementa multiplicativamente, lo que provoca que crezca mucho más rápido que una función lineal, la cual crece de forma aditiva.
E	11	¿Cuál es la importancia de conocer el comportamiento de crecimiento de las plantas de tomate?	La importancia económica del cultivo de tomate en México, el objetivo del presente estudio fue realizar un análisis de crecimiento bajo condiciones de invernadero, el cual permite entender de mejor manera el comportamiento de este cultivo para determinar un manejo eficiente de los recursos tanto de agua como fertilizantes, así como proveer de información para la generación de modelos de crecimiento.

Capítulo 5. CONSIDERACIONES FINALES

Este capítulo presenta las consideraciones del trabajo de grado enfocadas en los objetivos propuestos. Se destaca el diseño de tareas desde la Teoría APOE, integrando fenómenos biológicos para contextualizar a los estudiantes de secundaria, en uno de los campos de aplicación de las funciones exponenciales. Además, para el diseño se realiza la adaptación de una descomposición genética orientada al contexto escolar y se adopta el uso de herramientas digitales, como GeoGebra y Padlet, para enriquecer el aprendizaje en el aula. Finalmente, se reflexiona sobre cómo esta experiencia ha transformado mi práctica docente, brindándome nuevas perspectivas y estrategias que contribuirán al desarrollo académico de mis estudiantes y al mejoramiento de mi labor educativa.

5.1. Reflexiones acerca de los objetivos en este trabajo de grado

Concerniente a la descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales en el conjunto de los números reales, se acudió a fuentes como el conocimiento que se tiene sobre el aprendizaje de estas funciones a nivel secundario, el cual se recopila de las investigaciones en educación matemática. Desde la literatura en didáctica de la matemática se estudiaron dos descomposiciones genéticas; la primera diseñada para el aprendizaje en la secundaria y la otra vinculada con los primeros semestres universitarios. Se realizaron adaptaciones desde la descomposición diseñada por Vargas (2017). En esta adaptación también se tuvo presente, desde el desarrollo histórico de estas funciones, su vínculo con el estudio de relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, además de los conocimientos de los profesores implicados en esta indagación.

Con relación al primer objetivo específico, ¨Adaptar una descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales en el conjunto de los números reales, para el nivel medio, desde el análisis teórico de la metodología ACE, como herramienta en el diseño de tareas", se concluye que se logró diseñar una descomposición genética preliminar de las funciones exponenciales pensado para estudiantes del nivel medio.

En coherencia con la Teoría APOE, este trabajo ha buscado potenciar en los estudiantes del nivel medio las acciones y procesos como estructuras mentales, fundamentales en el aprendizaje de las funciones exponenciales. La descomposición genética preliminar se ha empleado como una herramienta para diseñar las tareas, orientando las actividades hacia abstracciones reflexivas en la comprensión de la función exponencial como un proceso. En necesario señalar que, dicha descomposición genética preliminar deberá pasar por un refinamiento, como lo señala el análisis teórico de la metodología ACE, tras los resultados de la implementación del diseño propuesto.

La coherencia entre las tareas diseñadas y las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar permitió una integración sólida entre teoría y el diseño que se propone, para la posterior implementación.

Con relación al segundo objetivo específico "Diseñar tareas orientadas a generar espacios de discusión y reflexión, con la intención de potenciar las estructuras y mecanismos mentales de construcción, para la comprensión proceso de la función exponencial en el sistema de los números reales", se logró coherentemente en la propuesta de tareas diseñadas, incluir ejercicios y preguntas, así como trabajo individual y grupal que se enfoca en cada una de las estructuras y mecanismos mentales identificados en la descomposición genética preliminar.

A continuación, en la Tabla 6 se enlista cada estructura mental: Acción (A) y Proceso (P), y de construcción mental: Coordinación (C), que se abordó en cada tarea.

Tabla 6

Revisión del cumplimiento de las tareas conforme a la descomposición genética diseñada

Estructuras y construcciones mentales abordadas en las tareas		Tareas T 1	T 2	T 3	T 4
A1	Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada	X	X		
A2	Acción de organizar valores de entrada y valores de la función en una tabla de datos	X	X		
A3	Acción de calcular las diferencias entre los valores consecutivos de la variable independiente.		X		
A4	Acción de calcular los cocientes entre los valores consecutivos de la variable dependiente.		X		
A5	Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente.		X		
P1	Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno			X	
P2	Interiorización de las acciones para examinar la regularidad de las sucesiones numéricas, a través de la diferencia y cociente para establecer un valor que permanezca constante (razón).		X		
P3	Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función, sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.		X		
P4	Interiorización de las acciones de comparar el comportamiento de las curvas de las funciones de acuerdo con sus bases.			X	
P5	Interiorización de las acciones de ubicar el punto que corta al eje “y” (punto de corte o de intersección de la curva con el eje).			X	
P6	Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable “x” en la representación gráfica (Progresión Aritmética).		X		X
P7	Interiorización de las acciones de examinar regularidad del cambio de la variable “y” en la representación gráfica (Progresión Geométrica).		X	X	X
C1	Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar el crecimiento de funciones lineales y exponenciales				X
C2	Comparación entre diferentes curvas de funciones exponenciales crecientes o decrecientes que permitan examinar la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, dependiendo de su base.			X	
C3	Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje x como asíntota, el corte de la función con el eje y.			X	
C4	Comparación de curvas exponenciales para establecer el dominio y el rango de las funciones exponenciales.		X		

Nota. Elaboración propia

Con esta estructura y con en esta Tabla 6, se muestra que efectivamente se tuvo en cuenta la descomposición genética para el diseño de las tareas, y se da cuenta con ello el cumplimiento de este objetivo.

Con relación al tercer objetivo específico, “Elaborar actividades dirigidas a estudiantes, de 15 a 16 años, que contemplen acciones y procesos mentales, enfocadas en el análisis de ciertos fenómenos biológicos para identificar el comportamiento analítico de las funciones exponenciales a través de tecnologías digitales para el aula”, se concluye que se cumplió. Con un ingrediente interdisciplinario desde la riqueza de las tareas diseñadas ya que proporcionan una selección, no habitual, a través de dos contextos matematizados mediante funciones exponenciales.

Dado el contexto paraguayo en el que se desarrollará la implementación de las tareas presentadas y el diseño completo, fue importante atender la necesidad de ofrecer situaciones de aprendizaje contextualizadas. En ese sentido, esta investigación buscó y seleccionó una conexión significativa entre las funciones exponenciales y fenómenos biológicos. La identificación de dos artículos científicos -uno sobre el crecimiento del cardón y otro sobre el desarrollo del tomate- resultó crucial, pues estos describen de manera ejemplar el comportamiento exponencial. Estos recursos permitieron integrar la biología con la enseñanza de las funciones exponenciales, logrando una vinculación interdisciplinaria armoniosa entre matemáticas y ciencias naturales.

El trabajo también incorporó herramientas tecnológicas innovadoras, como Padlet, cuyo uso fue orientado por Vargas (2021 y 2024) en experiencias con estudiantes universitarios y profesores. Esta plataforma digital demostró ser útil para la creación de tareas que promueven la discusión cooperativa en un entorno virtual, facilitando la participación simultánea e interactiva. Padlet no solo actúa como un espacio de comunicación, sino que también ofrece una forma atractiva y visualmente estimulante de presentar contenidos, alineado con los intereses de los estudiantes contemporáneos, quienes se sienten naturalmente atraídos por las pantallas.

En el proceso de diseñar las tareas con Padlet, el tiempo y esfuerzo dedicados a explorar las funciones y el potencial de esta herramienta resultaron valiosos al momento de organizar las actividades que respondan a la metodología ACE de la Teoría APOE. Esta herramienta facilitó una integración fluida de actividades, discusiones y ejercicios en el aula, enriqueciendo la dinámica de las tareas

Así, se diseñan actividades dirigidas a través de preguntas, discusiones y ejercicio extra-clase que establezca un hilo conductor entre una tarea y otra, para llegar a conclusiones sobre el comportamiento de familias de funciones exponenciales.

En la organización de la tarea se busca estar acorde a la metodología ACE; espacios de actividades tanto individuales, como con sus pares en pequeños equipos y en grupos más grandes, donde se genere un ambiente de discusión y debate, para luego comunicar ideas, conjeturar y llegar a conclusiones, además de pensar una forma de evaluación donde los estudiantes puedan internalizar y ejercitarse extra-clase y verificar su aprendizaje.

Las actividades propuestas potencian procesos mentales en los estudiantes al ayudarlos a construir la comprensión del concepto de función exponencial en un contexto real. Se responde así a una inquietud pedagógica identificada, relacionada con la dificultad de los estudiantes para encontrar vinculación entre las matemáticas y su entorno. Para abordar esta necesidad, se trabajó con artículos científicos que permitieron evidenciar cómo biología y matemáticas se integran, sirviendo esta última en la toma de decisiones en aspectos que tienen un vínculo muy íntimo con la economía de los países y con el bienestar y cuidado ambiental, tal como lo establece el currículo paraguayo.

Es indispensable reconocer la limitación especial que le confiere a este trabajo el no poder realizar la implementación y por lo tanto la descomposición genética refinada; hubiera sido deseable presentar una serie de sugerencias respecto a la recolección de información, a la transformación de ésta en datos y los parámetros a tener presente para validar y ajustar la descomposición genética preliminar. Lo anterior debido a los tiempos asignados por la beca como estudiante de Paraguay, que no permitieron realizar una proyección basada, por ejemplo, en lo planteado en Farabello y Trigueros (2023).

5.2. Reflexión sobre cómo el desarrollo del trabajo de grado tuvo efecto en mí ser, saber y hacer.

La formación recibida en la Maestría en Docencia de la Matemática ha transformado no solo lo que sé cómo educadora, sino también cómo soy y cómo hago mi trabajo en el aula. Este proceso me brindó herramientas y conocimientos nuevos, pero lo más valioso ha sido la manera en que ha redefinido mi perspectiva sobre la enseñanza, ampliando mi visión para explorar estrategias que motiven a los estudiantes y mejoren su aprendizaje. El haber cursado esta maestría no solo me ha permitido avanzar en conceptos matemáticos, sino también desarrollar una visión crítica y reflexiva sobre cómo aplicar estos saberes en el contexto educativo paraguayo.

En cuanto al saber, la maestría me proporcionó conocimientos fundamentales sobre teorías y metodologías que antes no había explorado en detalle. La Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) fue esencial para entender cómo los estudiantes construyen su conocimiento de manera progresiva, pasando de acciones concretas a procesos abstractos. Esta teoría me permitió diseñar tareas didácticas más efectivas, centradas en la reflexión y aplicación de conceptos en situaciones reales. Además, el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Padlet resultó indispensable para dinamizar mi enseñanza.

Estas tecnologías no solo facilitaron la comprensión de conceptos complejos, sino que también transformaron la manera en que los estudiantes interactúan con el conocimiento.

En cuanto al hacer, la maestría ha cambiado profundamente mi forma de diseñar e implementar tareas en el aula. El desarrollo de este trabajo exigió una revisión exhaustiva de los borradores y la reformulación de preguntas, asegurando que las actividades se alinearan con las metas cognitivas y favorecieran la exploración activa del conocimiento. Además, me he comprometido a aplicar lo aprendido en mi aula, introduciendo nuevas dinámicas que promuevan un aprendizaje más activo y cooperativo, y haciendo uso de herramientas como GeoGebra y Padlet para facilitar la visualización gráfica y el trabajo colaborativo. Esta nueva forma de hacer enseñanza busca que mis estudiantes no solo adquieran conocimientos, sino que los descubran y se maravillen con ellos, convirtiendo el aula en un espacio de exploración y disfrute del aprendizaje.

Finalmente, en cuanto al ser, esta experiencia ha transformado mi identidad como educadora. Ya no concibo la enseñanza de la misma manera que antes. He aprendido a ver el aula como un espacio donde los estudiantes no solo aprenden, sino también se construyen a sí mismos. Ahora entiendo mi rol como una guía que facilita el descubrimiento del conocimiento, fomentando en los estudiantes la autonomía y la capacidad de reflexionar por sí mismos. Esto ha despertado en mí un renovado entusiasmo por la enseñanza, un deseo de continuar creciendo y mejorando, y una firme convicción de que mi papel no se limita a la transmisión de información, sino que también incluye la responsabilidad de inspirar y motivar a mis estudiantes.

Al regresar a Paraguay, me comprometo a aplicar lo aprendido en mi aula a corto plazo. Introduciré nuevas dinámicas que promuevan un aprendizaje más activo y cooperativo, haciendo uso de las herramientas tecnológicas que descubrí durante la maestría. Además, me propongo evaluar constantemente los resultados de estas nuevas metodologías para asegurar que mis estudiantes realmente se beneficien de ellas.

A mediano plazo, mi objetivo es compartir lo aprendido con mis colegas, fomentando el trabajo conjunto para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Estoy convencida de que la mejora educativa no puede ser un esfuerzo individual, sino colectivo. Por ello, buscaré crear espacios donde podamos intercambiar ideas, estrategias y experiencias que contribuyan al crecimiento profesional de todos.

A largo plazo, mi compromiso es con el sistema educativo paraguayo. Mi meta es involucrarme en proyectos que promuevan la innovación en la formación de educadores, especialmente en el uso de tecnologías aplicadas a la enseñanza. Además, me gustaría colaborar en programas de formación continua que permitan a los educadores mantenerse actualizados y mejorar sus prácticas pedagógicas.

Aunque he adquirido una sólida base teórica y práctica durante esta maestría, soy consciente de que queda mucho por aprender. Me gustaría profundizar en la investigación educativa y explorar cómo las tecnologías emergentes pueden seguir transformando la enseñanza. Este proceso de aprendizaje es continuo, y me comprometo a seguir perfeccionando mi ser, hacer y saber cómo educadora, siempre en busca de mejorar mi práctica y contribuir al desarrollo de mis estudiantes.

En resumen, esta maestría ha sido una experiencia invaluable que me ha permitido crecer en todos los sentidos. Los conocimientos adquiridos, las habilidades desarrolladas y las herramientas pedagógicas que ahora poseo no solo impactarán mi trabajo diario en el aula, sino que también contribuirán a largo plazo al mejoramiento del sistema educativo en Paraguay. Con estos aprendizajes, estoy lista para seguir contribuyendo a una enseñanza de las matemáticas más cercana, interactiva y valiosa para mis estudiantes, y así continuar mi labor con un compromiso renovado hacia la mejora educativa.

REFERENCIAS

Advíncula-Clemente, E. M. (2010). Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de Humanidades [Tesis de maestría enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú] PUCP. tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4717/ADVINCULA_CLEMENTE_ELIZABETH_SITUACION_EXPONENCIAL.pdf?sequence=1

Adams, R. (2009). *Cálculo*. Pearson Educación.

Alanya, J. E. (2021). *Padlet como herramienta de participación y retroalimentación activa*. Concurso de Experiencias de Aprendizaje Digital, categoría Experimentador. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC). Disponible en: https://innovacioneducativa.upc.edu.pe/wp-content/uploads/2021/12/Participante-3_Experimentador.pdf

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.**org**/10.1007/978-1-4614-7966-6

Betancur Sánchez, A., Roa Fuentes, S., & Ballesteros, S. J. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *24*(3), 245-276.

Bishop, A. J. (1987). *Matemáticas educativas y contextos culturales*. Cambridge University Press.

Bocanegra, I., Romero, O. D., Galeano, H. V., y Huérfano, H. V. (2013). Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemática utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial. [Tesis de maestría en docencia de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio institucional UPN.

Camargo Uribe, L., y Sandoval, I. T. (2017). Acceso equitativo al razonamiento científico mediante la tecnología. *Revista Colombiana De Educación,* (73), 179.211. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce177.209

Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. *PNA* 16(1), 25-56. DOI:10.30827/pna.v16i1.15817

Campo-Meneses, K. G., Moll, V. F., y García-García, J. (2024). Criterios que orientan la práctica de un profesor al enseñar las funciones exponencial y logarítmica. *Educação e Pesquisa, 50*, e267455. Epub 22 de maio de 2024. https://doi.org/10.1590/s1678-4634202450267455es

Córdova-Cornejo, V., Aravena-Díaz, M., y Parraguez-González, M. (2024). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de la función exponencial en contexto escolar. *Uniciencia, 38*(1), 117-137.

Constitución Nacional de la República del Paraguay [CN]. (1992). *Constitución Nacional de la República del Paraguay*. Asamblea Nacional Constituyente. https://www.bacn.gov.py/leyes-paraguayas/9580/constitucion-nacional-

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Springer.

Farabello, S. P., & Trigueros, M. (2023). Niveles de comprensión del concepto de función en estudiantes universitarios. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 19(67).

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel.

Gómez Fontanel, C. (2018). Propuesta del uso de la teoría APOE como una aproximación teórica metodológica para la asimilación del lenguaje algebraico en estudiantes de primer año de secundaria. [Tesis de Maestría en Ciencias en Metodología de la Ciencia. Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional.

Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. In P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos técnicos curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes.

González Arellano, Y. K. (2013). *Panorama de investigaciones que usa como marco teórico a la teoría APOE* [Tesis para grado obtener el grado de maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa] CINVESTAV.

González, G. (2022). Teorías socioculturales en la educación matemática. Editorial Académica.

González, M y Gómez, P. (2018). Capítulo 4: Análisis cognitivo. Universidad de los Andes. Disponible en: http://hdl.handle.net/1992/31952

Halloy, S. (2008). Crecimiento exponencial y supervivencia del cardón (Echinopsis atacamensis subsp. pasacana) en su límite altitudinal (Tucumán, Argentina). *Ecología en Bolivia*, *43*(1), 6-15.

Hernández, M. (2022). Función e importancia del profesorado desde la justicia social y la justicia curricular. *Sophia*, 18(1).

DOI: https://doi.org/10.18634/sophiaj.18v.1i.1044

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Human, P., Murray, H., y Wearne, D. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann.

Jaimes Contreras, L. A., Chaves Escobar, R. F., y Vargas Hernández, J. (2017). La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática. Revista Boletín Redipe, 6(9), 73-78.

Jaramillo, D. (2011). *Educación y cambio social*. Editorial Siglo XXI.

Juárez-Maldonado, A., de Alba Romenus, K., Zermeño González, A., Ramírez, H., & Benavides Mendoza, A. (2015). Análisis de crecimiento del cultivo de tomate en invernadero. *Revista mexicana de ciencias agrícolas*, *6*(5), 943-954.

Kú, D., y Roa, S. (2010). La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 767-773.

Larrosa, J. (2019). *La escuela es la casa del estudio*. Editorial Gedisa.

Larson, R. (2010). *Precálculo* (9ª ed.). Cengage Learning.

Ledezma, C. A., Rodríguez, M. A., y Parraguez, M. (2018). Construcción cognitiva de la función exponencial desde el ciclo de enseñanza ACE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*(1), 188-191.

Ley N°. 1264, Ley General de Educación. (1998). *Ley General de Educación*. Congreso

Lucas, G. y Aray, C. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 5(5), 386–400. https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747

Mariño Díaz, L. A. (2012). La educación filosófica como experiencia y posibilidad. *Praxis & Saber, 3*(5), 187-207. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=477248389009

Mello Román, J. D., y Giménez Amarilla, S. (2020). Una perspectiva de la educación matemática en Paraguay. *Revista Paraguaya de Educación, 9*(1).

Ministerio de Educación y Ciencias (MEC). (2009). Plan Nacional de Educación 2024: Hacia el centenario de la Escuela Nueva de Ramón Indalecio Cardozo. MEC.

Ministerio de Educación y Ciencias del Paraguay (MEC). (2011). *Programa de estudios: Nivel medio*. MEC https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/9657

Mora, F. N. (2013). Solo se puede aprender aquello que se ama. *Madrid: Alianza Editorial*.

Mora, F. (2018). Somos lo que la educación hace de nosotros [Conferencia virtual julio 09]. *Aprendemos juntos*. https://youtu.be/ETagN9TDZJI?si=iBOhV6A-X-3gylqC

Pardo-Cueva, M., Chamba-Rueda, L. M., Gómez, Á. H., y Jaramillo-Campoverde, B. G. (2020). Las TIC y rendimiento académico en la educación superior: Una relación potenciada por el uso del Padlet. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, (E28), 934-944.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7ma ed.). International Thomson Editores.

Sureda, D. (2012). *Enseñanza de las funciones exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos*. [Tesis doctoral. Universidad Nacional de la Provincia de Buenos Aires]. RIDAA.

Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación matemática*, *25*(2), 89-118.

Reyes Espinoza, M. (2016). Contraste entre percepciones de estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa en relación con sus aprendizajes sobre el contenido de funciones con sus resultados en una evaluación exploratoria, en una universidad privada no selectiva de Santiago de Chile: un estudio de casos. [Tesis de licenciatura en educación y para obtener el título de profesor de educación media en matemáticas e informática educativa. Universidad Católica Silva Henríquez]. DIBRI.

Torres, J. (2011). La justicia curricular: el caballo de Troya de la cultura escolar. Morata.

Torres, J. (2019). La justicia curricular y la formación del profesorado. *Revista Asociación de enseñantes con Gitanos*, *30*, 85-94.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5-31.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Diseño de tareas en la teoría APOS. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 55.

Vargas, J. (2017). Análisis de la práctica docente universitario de precálculo: Estudio de casos en la enseñanza de la función exponencial. [Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca]. Repositorio documental Credos.

Vargas, J. (2019). Enseñanza de la función exponencial: investigación y práctica en el aula de la básica al precálculo en la Universidad. Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vargas, J. (2024). (Comunicación personal, febrero, 02, 2024 y agosto, 06, 2024).

Vargas, J., Vargas, N., y Hidalgo, R. (2021). El desarrollo humano en prácticas de identificación de patrones en la Educación preescolar: Información y análisis de conocimiento especializado de profesores. *Revolución en la formación y la capacitación para el siglo XXI*, 339-348.

Vargas, J., González, M., y Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. In *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil*.