Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina,
Leonor Camargo, Armando Echeverry

Felipe Fernández, Luisa Andrade,
Benjamín Sarmiento

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

ciup

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

iup

Catalogación en la fuente - Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística. Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. Grupo Educación Estadística. / Patricia Perry. Felipe Fernández… [et al.] -- 1ª. ed. -- Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, CIUP, 2013
172 p.

Incluye bibliografía

ISBN: 978-958-8650-54-8 (Impreso)
ISBN: 978-958-8650-81-4 (Digital)

1. Educación – Investigaciones. 2. Formación profesional de maestros. 3. Geometría – Enseñanza. 4. Geometría – Aprendizaje. 5. Estadística – Enseñanza. 6. Estadística – Aprendizaje. 7. Planificación curricular. I. Perry, Patricia. II. Samper, Carmen. III. Molina, Óscar. IV. Camargo, Leonor. V. Echeverry, Armando. VI. Fernández, Felipe. VII. Andrade, Luisa. VIII. Sarmiento, Benjamín. IX. Tit.

370.7 cd. 21 ed.

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina, Leonor Camargo, Armando Echeverry

Felipe Fernández, Luisa Andrade, Benjamín Sarmiento

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

iup

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

© Universidad Pedagógica Nacional
ISBN: 978-958-8650-54-8 (Impreso)
ISBN: 978-958-8650-81-4 (Digital)
Primera edición, Bogotá, D.C., noviembre 2013

Autores:
Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría
Patricia Perry
Carmen Samper
Óscar Molina
Leonor Camargo
Armando Echeverry

Grupo Educación Estadística
Felipe Fernández
Luisa Andrade
Benjamín Sarmiento

Hecho el depósito legal que ordena la Ley 44 de 1993 y decreto reglamentario 460 de 1995.

Fecha de evaluación: abril de 2013
Fecha de aprobación: mayo de 2013

Preparación Editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Fondo Editorial
Calle 72 Nº 11 - 86
Tel.: 347 1190 y 594 1894
editorial.pedagogica.edu.co

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Margarita Misas Avella
Corrección de estilo

Juan Manuel Martínez Restrepo
Fotografía de portada

Johny Adrián Díaz Espitia
Diseño de carátula y diagramación

Impreso y hecho en Colombia
Grupo Dao Digital
Bogotá, Colombia, 2013

Tabla de contenido

Los Autores

Carmen Samper

Matemática de la Universidad de Ottawa (Canadá) y Magíster en Matemáticas de la Universidad de Maryland (EE. UU.). Profesora titular de la Universidad Pedagógica Nacional, en la cual ha laborado desde 1975, con una interrupción de 10 años, tiempo durante el cual fue profesora del Colegio Nueva Granada. Coautora de las series de textos escolares Alfa, Espiral y Delta, y autora del texto escolar *Geometría* de la Editorial Norma. Coautora de 3 libros y de 4 capítulos que reportan resultados de investigación y de 21 artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos ellos en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Coautora del texto *Elementos de Geometría*, publicado por la Universidad Pedagógica Nacional. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de dicha universidad.

Óscar Molina

Licenciado en Matemáticas con Énfasis en Computación y Magíster en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional. En 2004 trabajó como profesor de secundaria. Desde 2005 es profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, los últimos cinco años como profesor de planta. En 2008 fue profesor ocasional en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ha publicado alrededor de 26 artículos, cuatro de ellos en revistas nacionales (*Revista TED* y *Revista Integración*), tres en revistas internacionales (*Enseñanza de las Ciencias*, *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *Revista Educación Matemática*) y los demás en memorias de eventos nacionales e internacionales sobre temas de cálculo, teoría de conjuntos, trigonometría y didáctica de la geometría. Coautor del libro *Elementos de Geometría*. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional.

Felipe Fernández

Matemático de la Universidad de los Andes (Colombia) y Magíster en Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional desde 2005 hasta la fecha. También fue profesor investigador de la Universidad de los Andes, en el centro de educación e investigación "una empresa docente", desde 1988 hasta 2003. Ha sido coautor de varios libros, capítulos de libros y artículos, relacionados con el ámbito de la Educación Matemática y la Estadística, y editor de la *Revista EMA*. Actualmente es el coordinador del grupo de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional. Algunos de los textos universitarios publicados de los que es coautor son: *Matemáticas, Azar, Sociedad: Conceptos básicos de estadística y Estadística descriptiva. Introducción al análisis de datos.*

Benjamín Sarmiento

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional, en la cual ha laborado desde 2003. Coautor de los libros *Los tres problemas clásicos de la Geometría* y *Estadística Descriptiva con una introducción al análisis de datos.* También se ha desempeñado como docente de otras universidades de Bogotá, como la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito ECI, Universidad Autónoma de Colombia, la Universidad Sergio Arboleda, Escuela de Administración de Negocios EAN y Universidad Incca de Colombia. Ha participado como profesor investigador en varios proyectos relacionados con Estadística y Tecnología en la enseñanza de las matemáticas. A nivel postgradual ha desarrollado varios cursos y dirigido varias tesis de maestría en la Especialización en Educación Matemática y en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

Luisa Andrade

Matemática de la Universidad Javeriana. Profesora catedrática e investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional desde 1994. Profesora e investigadora del centro de educación e investigación "una empresa docente" de la Universidad de los Andes durante 12 años. Coautora de libros, capítulos y artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos relativos a resultados de proyectos e investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática y la Estadística. Editora de la *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, durante varios años; también editora y traductora de algunos libros en el campo. Actualmente hace parte del grupo de investigación Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional.

Leonor Camargo

Licenciada en Matemáticas y Química de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) y Doctora en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia (España). Profesora asociada e investigadora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional desde 1994. Coautora de las series de textos escolares Alfa y Espiral. Coautora de 2 libros y de 4 capítulos que reportan resultados de investigación y de 21 artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos ellos en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de dicha universidad.

Patricia Perry

Licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Desde 2003 hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional. Fue profesora e investigadora del centro de educación e investigación “una empresa docente” de la Universidad de los Andes entre 1988 y 2003. Coautora de libros, capítulos y artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos relativos a resultados de estudios de investigación en diversos campos de la educación matemática: diseño y desarrollo curricular, desarrollo profesional de profesores de matemáticas, enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría. Primera editora de la *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, y también editora y traductora de algunos libros en el campo.

Armando Echeverry

Licenciado en matemáticas y física (Universidad del Tolima) Especialista en educación matemática (Universidad Pedagógica Nacional) y Magíster en Docencia de la Matemática del la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). En la actualidad es profesor de la Secretaria de Educación Distrital (Bogotá), catedrático de las universidades Pedagógica Nacional y Jorge Tadeo Lozano. Miembro del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ · G) desde 2006 hasta 2011, con el cual participó como coautor de ponencias nacionales e internacionales, así como de artículos en revistas especializadas de carácter nacional e internacional, un libro de texto para los estudiantes de licenciatura en matemáticas y un libro de investigaciones en didáctica de la geometría.

Presentación

El presente libro está dirigido a personas interesadas en la investigación en Educación Matemática, profesores y estudiantes de doctorado y de maestría. Con él se pretende contribuir a suplir una deficiencia de bibliografía de referencia que oriente procesos investigativos en la comunidad educativa de habla hispana. Para ello, se presentan dos investigaciones realizadas: una por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, y otra por el grupo Educación Estadística, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) en 2010 y 2011, con el apoyo del Centro de Investigaciones de dicha universidad, CIUP. Ambos equipos centraron su mirada investigativa en la formación inicial de profesores con la convicción de que, al reconocer que la geometría y la probabilidad son frágiles en la matemática escolar, es necesario incidir en la formación matemática de los próximos profesores para fortalecer, a futuro, estos dominios en la escuela.

El libro lo conforman dos partes; en cada una de ellas se encuentran elementos que contribuyen a entender diversos aspectos que inciden en una investigación. Se presenta la síntesis de la investigación que encapsula un informe completo del estudio, incluyendo componentes centrales del desarrollo de esta como son el marco teórico, la metodología, los análisis y los resultados. Se identifica, en cada parte, un recuento de la experiencia investigativa, que incluye el señalamiento de logros y dificultades, lo que posibilita la recreación del proceso vivido y la comprensión de la dinámica de la actividad investigativa. Además, se exponen los productos de la investigación que se pone a consideración de la comunidad para su discusión y difusión, esperando así que estos se constituyan en el germen para otras investigaciones.

La primera parte del libro corresponde a una investigación en educación geométrica y es un estudio de la producción de conjeturas en el aula y la organización del contenido temático de una clase de Geometría Plana a partir de estas. La intención, que ha guiado la trayectoria investigativa del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, ha sido profundizar en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría. En particular, el foco del estudio que se reporta en este libro es la actividad instrumentada con el artefacto Cabri y la mediación semiótica del profesor en torno a las conjeturas propuestas por los estudiantes, con el propósito de construir los teoremas que conformarán el sistema teórico de la clase.

La segunda parte describe una investigación en educación estadística, en la que se aborda la enseñanza de la variable aleatoria. La investigación, siguiendo la perspectiva metodológica de los experimentos de enseñanza, propone una trayectoria hipotética de aprendizaje que se va afinando en el proceso de implementación de las tareas propuestas. Los resultados de la investigación sugieren que el desarrollo de razonamiento estadístico alrededor del trabajo con la variable aleatoria, se ve limitado por dificultades de los estudiantes que conciernen a conceptos básicos de la probabilidad, tales como experimento aleatorio y espacio muestral. La indagación de tales dificultades pone de relieve la problemática de la enseñanza al respecto y la naturaleza compleja de la concepción de variable aleatoria. El trabajo realizado deja como aporte ideas para trabajar en torno a un aprendizaje interconectado y con sentido de los conceptos mencionados, y para establecer conexiones más explícitas entre el trabajo en estadística y el de probabilidad.

Parte I.
Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina,
Leonor Camargo y Armando Echeverry

Introducción

Los estudiantes participan de manera genuina, autónoma y relevante en la construcción del contenido geométrico que se estudia en el curso. Comienzan por formular, con el apoyo de un software de geometría dinámica, varias conjeturas al problema que les plantea el profesor y luego se involucran en una interacción orquestada por el profesor, a través de la cual las conjeturas formuladas se constituyen en organizador curricular del contenido.

La declaración anterior hace parte de nuestro relato al presentar el nuevo diseño curricular del curso Geometría Plana, que se ubica en el segundo semestre del programa de formación inicial de profesores de matemáticas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Y, la reacción de nuestro auditorio no se hace esperar: "¿varias conjeturas para un mismo problema?", "¿si nadie propone la conjetura que el profesor espera, le toca hacerlo a él?", "¿qué más cosas se pueden estudiar alrededor de una conjetura?", "¿qué hacer con las conjeturas que no son las esperadas por el profesor?", etc. Enfrentarnos a preguntas como las mencionadas nos permitió ver la pertinencia de enfocar nuestra mirada investigativa en el proceso de conjeturación y en el trabajo posterior que se hace en el aula con las conjeturas propuestas por los estudiantes, hasta llegar a decidir si son candidatas para entrar en un proceso de validación.

Durante los años 2010 y 2011 hicimos nuestra primera aproximación al estudio[1] metódico de la producción de conjeturas en el aula y de la organización del contenido a partir de las conjeturas producidas. Este esfuerzo académico se suma al que hemos venido haciendo desde 2004 para profundizar en asuntos de interés relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría, en el nivel universitario. En el estudio documentamos el proceso a través del cual las conjeturas que producen los estudiantes -apoyados en el software de geometría dinámica Cabri,

1 Estudio que recibió apoyo financiero del Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional –CIUP–.

usado en la resolución de problemas geométricos que se les proponen en clase- se constituyen en un organizador curricular en el aula. Para ello, primero nos enfocamos en caracterizar la actividad instrumentada de los estudiantes, recurriendo a esquemas de utilización; y luego describimos la gestión del profesor, mediante la cual las ideas que producen los estudiantes se constituyen en elementos clave de la construcción de conocimiento.

En esta parte del libro se pretende exponer los detalles de nuestra actividad investigativa. Primero, se presenta el marco teórico que incluye, por un lado, dos referentes teóricos en los que se fundamentan los análisis: la aproximación instrumental y la mediación semiótica del profesor; y, por otro, precisiones sobre el sentido dado a la expresión "organizador curricular". En segundo lugar, se expone la metodología de la investigación; en particular, se ubica el estudio dentro de la metodología conocida como "experimento de enseñanza", se precisa información sobre los participantes en la investigación, el dispositivo experimental donde detallamos de dónde proviene la información analizada y cómo fue su tratamiento previo al análisis. Además, al exponer el dispositivo analítico, se dan detalles del proceso vivido para llegar a tener las categorías de análisis, tanto para estudiar la actividad instrumentada de los estudiantes como la mediación semiótica del profesor. En tercer lugar, se exponen las categorías de análisis construidas para analizar la actividad instrumentada de los estudiantes y la actividad mediadora del profesor. En cuarto lugar, se presenta el uso de tales categorías para analizar una situación particular. Por último, se discuten los alcances y la proyección del estudio.

Capítulo 1. Marco teórico

Es importante comenzar por articular dos referentes teóricos útiles para ahondar en asuntos del aprendizaje y la enseñanza de la demostración: la aproximación instrumental, que sirve de lente para informar sobre el uso de la geometría dinámica como un instrumento influyente en la producción de conjeturas por parte de los estudiantes; y la mediación semiótica del profesor, útil a la hora de referirse al papel del profesor cuando trabaja para hacer evolucionar las producciones de los estudiantes, de significados personales a significados matemáticos propios de la cultura matemática de referencia.

En el estudio realizado se emplearon los referentes teóricos en dos momentos. Uno, cuando parejas de estudiantes se enfrentaron a la resolución de un problema de geometría y, haciendo uso de Cabri, exploraron, anticiparon posibles resultados, formularon conjeturas y las verificaron hasta tener la versión que propusieron. Además de analizar el uso del programa de geometría dinámica (esquemas de utilización) por parte de los estudiantes, se identificaron los signos que produjeron (figuras geométricas o enunciados de contenido matemático relacionados con las conjeturas) durante la actividad o como fruto de ella. Para analizar ese proceso se recurrió a la aproximación instrumental. El segundo momento se dio cuando la profesora dirigió la actividad colectiva en el aula, tendiente a que las conjeturas evolucionaran hasta convertirse en formulaciones aceptadas como conocimiento matemático institucionalizado en la clase. Para analizar este proceso se empleó la teoría de la mediación semiótica.

A continuación se precisa la conceptualización asumida para algunos de los constructos de las teorías anteriormente mencionadas.

Actividad instrumentada

Se parte del supuesto, ampliamente aceptado, de que el aprendizaje está mediado por artefactos. Haciendo eco a Rabardel (1995, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008), se entiende por *artefacto* cualquier objeto material o simbólico creado por el hombre con fines específicos; son ejemplos de este un utensilio de cocina, una herramienta para afilar un cuchillo, un texto escrito que se somete a la crítica, un discurso oral para argumentar a favor de algo, el registro de un gesto de saludo. Desde nuestro punto de vista, los artefactos, como producto de la actividad humana, son perceptibles, se pueden analizar y tienen existencia física independiente de la situación que les dio origen, ya sea como un objeto mismo o a través de un registro.

Para que un artefacto pueda intervenir en la generación de conocimiento debe constituirse en instrumento para quien aprende. En la teoría de Rabardel, la noción de *instrumento* incluye un artefacto (o parte de un artefacto o varios) junto con *esquemas de utilización*, es decir, la interpretación por un observador de acciones "relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto" (p. 171), o que son "medio de realización" de una tarea (Rabardel, 1995/2011, p. 171). Según el investigador hacer del artefacto un instrumento no es un asunto inmediato, pues requiere la articulación de dos procesos, en una evolución que denomina *génesis instrumental*. Tales procesos son: (i) de *instrumentalización* o reconocimiento progresivo de las posibilidades y limitaciones propias del artefacto y de sus diferentes componentes; y (ii) de *instrumentación* o surgimiento y desarrollo de esquemas de utilización. Por ejemplo, cuando los estudiantes usan el artefacto "función de arrastre" de un programa de geometría dinámica para mover objetos de una construcción en busca de invariantes, es posible identificar dos tipos de acciones, cada una de las cuales obedece a uno de los procesos, respectivamente: primero, de reconocimiento de las posibilidades que tiene el arrastre de ciertos objetos al notar que se mueven en el universo en el que fueron creados (como un punto construido en un rayo); y, segundo, de análisis para determinar si un objeto se comporta siempre igual al arrastrarlo (ubicándolo en posiciones extremas, mirando unos pocos casos o haciendo un barrido por todo el campo de posibilidades).

Rabardel (1995, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008) señala que en el proceso de génesis instrumental se puede llegar a emplear el artefacto con fines distintos a los que motivaron su creación. En ese sentido, un esquema de utilización puede corresponderse o no con esquemas previstos en el diseño del artefacto, se puede enseñar y está sujeto a la experiencia personal. Los programas Excel y Cabri ilustran bien lo dicho: son artefactos diseñados como hoja de cálculo para apoyar tareas en el sector financiero y como graficador dinámico, respectivamente; pero se utilizan, por ejemplo, el primero para la enseñanza de procedimientos de generalización aritmética y el segundo para identificar dependencias entre propiedades. Así que el instrumento es una construcción individual, puesto que el sujeto emplea un artefacto de manera idiosincrática en una tarea particular.

Nuestro interés en la teoría de la actividad instrumentada radica en que los esquemas de utilización pueden verse como señales de actividad matemática que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas, apoyados en Cabri, y proponen conjeturas a partir del trabajo realizado. Entonces proveen información sobre las experiencias personales y contextualizadas (por la tarea y por el uso del instrumento) con las que los estudiantes, de un lado, dan significado al enunciado del problema y a los objetos involucrados en la situación; y, de otro, proponen una estrategia para resolver el problema. Al usar el artefacto se producen signos variados que capturan (encapsulan) las acciones de la actividad instrumentada y las ideas que surgen durante ellas o asociadas a ellas. Estos signos pueden evidenciar los significados personales, con los cuales el profesor puede llevar a cabo la mediación semiótica del contenido geométrico que se quiere que los estudiantes entiendan y aprendan.

Mediación semiótica del profesor

En nuestro estudio, el análisis de la mediación semiótica del profesor se concentra en el tratamiento de signos derivados del uso del artefacto Cabri en la resolución de problemas abiertos, para los cuales tienen que producir una conjetura. Dichos signos incluyen figuras geométricas en Cabri y enunciados de contenido matemático, relacionados con la conjetura, producidos por los estudiantes. Como ya se mencionó, los signos son entidades que encapsulan la experiencia personal, hacen parte del bagaje cultural y, al final, se espera que transciendan la idiosincrasia, constituyéndose así en un referente para construir significados matemáticos. En ese sentido, se dice que los signos se consideran entidades que representan algo para alguien. Radford (2000) puntualiza que los signos son entidades con doble vida, por cuanto reflejan el proceso cognitivo interno y son herramientas de la mente para hacer tareas particulares.

Según Mariotti (2009) la característica principal de los signos derivados del uso de un artefacto, en el ámbito de la educación matemática, es su fuerte vínculo con las acciones que se realizan con él. Se reconoce, por tanto, que los artefactos tienen *potencial semiótico* (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008), que se evidencia en la medida en que se usen intencionalmente *los esquemas de utilización* y *los signos* para la mediación. La mediación semiótica del profesor se basa en el provecho que este puede sacar de los signos producidos por los estudiantes para propiciar, fomentar y afectar la relación entre los alumnos y su saber matemático. Para Bartolini Bussi y Mariotti (2008), en el curso de la resolución de problemas con un artefacto, los estudiantes pueden generar tres tipos de signos:

1. *Signos del artefacto:* son signos estrechamente relacionados con la experiencia del sujeto al usar el artefacto; los significados asociados son personales y subjetivos. Generalmente tales signos hacen referencia explícita a alguna acción instrumentada de la que emergen. Están muy relacionados con los 'signos situados' de Noss y Hoyles (1996, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008) que se refieren a las ideas matemáticas que construyen los estudiantes al hacer configuraciones en un escenario particular, el cual da forma a las ideas que expresan. Es posible que en el aula los signos personales surgidos de una actividad instrumentada no conlleven a significados compartidos; sin embargo, la referencia directa a la experiencia común posibilita formar un significado compartido mediante la negociación.

2. *Signos matemáticos:* son signos asociados al contexto matemático, que guardan alguna relación con el universo teórico que corporeiza el artefacto. Están vinculados a los significados matemáticos compartidos en la clase y se expresan de acuerdo a los estándares compartidos por la comunidad. Son parte de la herencia cultural y constituyen la meta de la mediación semiótica orquestada por el profesor.

3. *Signos pivote:* son signos de carácter bidireccional, pues relacionan el dominio matemático con la experiencia del sujeto con el artefacto. La característica principal de estos signos es su polisemia, es decir, que ellos pueden referirse a la actividad instrumentada, pero también al dominio matemático. Por eso favorecen el tránsito entre los signos del artefacto y los signos matemáticos. El profesor puede aprovechar los signos pivote para construir una cadena semiótica que vincule signos del artefacto con signos matemáticos.

Específicamente, el potencial semiótico del artefacto se refiere a la capacidad que este tiene de propiciar la generación de signos pivote, porque explicita esa posible doble relación asociada a su uso: con los significados matemáticos subyacentes y con los significados personales que se generan. En la medida en que el profesor identifique esquemas de uso y conozca los signos, y ambos se discutan en la clase, el potencial semiótico del artefacto se convierte en elemento importante de la mediación semiótica. Su importancia para la mediación semiótica estriba en que, tan pronto adquieren una forma de representación externa, se pueden compartir socialmente y pueden evolucionar hacia signos matemáticos propios de un marco teórico de referencia.

Bajo esta perspectiva, como *mediador cultural*, el profesor favorece, con sus acciones de mediación semiótica, la evolución de signos del artefacto hacia signos matemáticos. Para ello, es responsable de diseñar estrategias que conecten las perspectivas individuales con las sociales y, a su vez, de actuar en los niveles cognitivo y metacognitivo.

De acuerdo con Bartolini Bussi y Mariotti (2008) se considera que el proceso de mediación semiótica es complejo y requiere, además de reconocer el papel de los signos que se producen en una clase, identificar si estos son producto o medio en la construcción de conocimiento, y enfocarse en la articulación que puede establecerse entre artefactos y signos desde una perspectiva educativa. En relación con esto último, tanto para las investigadoras como para nosotros, son de interés los siguientes asuntos: cómo hacer que los estudiantes tomen consciencia de los significados que surgen del uso de un artefacto y cómo hacer que tales significados se relacionen explícitamente con las matemáticas.

Desde el punto de vista investigativo, en Bartolini Bussi y Mariotti (2008) y Mariotti (2009) se determinan unas categorías para identificar, describir y explicar la mediación semiótica y para favorecerla. Las autoras proponen analizar tanto la producción individual como la producción colectiva de signos en secuencias de actividades que comienzan con tareas, en cuya realización los estudiantes usan el artefacto, continúan con tareas en las que se pide la producción individual de signos y terminan con actividades colectivas en las que el profesor se responsabiliza de hacer evolucionar los signos. Para esto último, este solicita elaborar una síntesis del proceso seguido y focaliza la discusión en el uso del artefacto.

Nosotros hemos previsto que la mediación semiótica, relacionada con la producción de conjeturas en la actividad demostrativa, se puede evidenciar en actividades como:

- Retomar el trabajo con el artefacto para permitir que los estudiantes se sitúen en contexto y relaten su experiencia.
- Desencapsular las acciones y observaciones de los alumnos para analizar el uso del artefacto, la información emergente de la exploración y posibilitar un

proceso empírico de validación o invalidación del signo.

- Focalizar aspectos matemáticos sujetos al artefacto o a una teoría, que apuntan hacia la conjetura y a la demostración del hecho geométrico.
- Impulsar la apropiación del discurso matemático, como género, en: el uso de términos y expresiones propias, el sentido de generalidad de las conjeturas y la estructura de los enunciados condicionales.

En todo caso, el proceso de mediación semiótica del profesor se apoya en la experiencia vivida por los estudiantes, en sus propias observaciones y formulaciones, para darles sentido a los enunciados matemáticos que emergen.

Problemas-conjeturas-sistema teórico como organizador curricular

Hace ya quince años, el investigador español Luis Rico (1997) introdujo la noción de *organizador curricular* para referirse a “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). Rico, por supuesto, reconoce las diferentes disciplinas matemáticas y, dentro de ellas, los conceptos y procedimientos como organizadores curriculares de muy frecuente uso, que “no agotan las necesidades organizativas del currículo de matemáticas” (p. 46), razón por la cual identifica otros que amplían las posibilidades de trabajo didáctico en el aula: los errores y dificultades de los estudiantes con respecto a los diferentes temas que se estudian; la diversidad de representaciones para cada sistema conceptual y modelizaciones usuales de conceptos; la fenomenología de los conocimientos implicados; la diversidad de materiales y recursos para apoyar el aprendizaje de cada tema; y la evolución histórica de cada campo e incluso de cada concepto.

Según Rico (1997):

> Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción del conocimiento

> matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión... (pp. 45-46)

En nuestro enfoque metodológico para la enseñanza de la demostración en el nivel universitario, se ha usado un compuesto de tres elementos como organizador del currículo. Para caracterizar el organizador, al que podemos designar *problemas-conjeturas-sistema teórico*, se ha de comenzar por detallar sus elementos y las relaciones entre ellos.

El sistema teórico tiene como directrices el modelo de Birkhoff (1932) para la geometría euclidiana, en el que "se introducen los hechos encarnados en la regla y el transportador" (p. 2) y la propuesta curricular de Moise y Downs (1986) presentada en su texto *Geometría Moderna*, que concuerda básicamente con dicho modelo. Los problemas son de índole geométrica; su resolución, por una parte, requiere hacer exploración empírica, para lo cual se acepta el uso de la geometría dinámica y, por otra parte, exige de manera explícita formular una conjetura: a cada problema subyacen uno o más posibles teoremas del sistema teórico.

Es importante precisar que los problemas propuestos a los estudiantes son de dos tipos: de *construcción sugerida* y de *construcción creativa.* En los problemas del primer tipo, la representación de la situación que describen se basa exclusivamente en la construcción de objetos que cumplan las condiciones dadas en el problema mismo y la búsqueda de invariantes se basa en la exploración directa de los objetos representados (construidos). Los problemas del segundo tipo exigen construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas necesarias para determinar, con la exploración, la existencia de un objeto (genérico o específico). Así, la representación de la situación en este tipo de problemas no se basa sólo en la construcción de objetos que cumplan las condiciones dadas en el problema mismo, sino en otras que permitan solucionar el problema.

Las conjeturas que formulan los estudiantes provienen de explorar la situación planteada en el problema, con el apoyo de la geometría dinámica, que corporeiza la geometría euclidiana, y en ese sentido se cuenta con una probabilidad muy alta de obtener propuestas aceptables desde el punto de vista del contenido. El sistema teórico enmarca la resolución del problema, es decir, el problema se puede representar y abordar con el contenido geométrico disponible. Las conjeturas provenientes de resolver el problema permiten extender el sistema teórico, en la medida en que entren en calidad de teoremas.

Dada la descripción anterior, es relativamente fácil advertir que en el compuesto problemas-conjeturas-sistema teórico el contenido geométrico ocupa un papel preponderante, y es natural llegar a pensar que si se usa como organizador curricular no tiene novedad alguna con respecto a la manera tradicional de presentar y estudiar el contenido matemático. Frente a tal consideración conviene tener en cuenta la distinción entre currículo formal y currículo implementado; el primero hace referencia a planes, mientras que el segundo a lo realizado en la marcha, es decir, como respuesta o reacción a los sucesos situados en un lugar y tiempo específicos. Así, distinguiendo entre organizador del currículo formal y organizador del currículo implementado, se ve que nuestra propuesta es la de un organizador para el currículo implementado; un rasgo que lo diferencia de otros organizadores es la importancia que se le da a la voz de los estudiantes al centrar el trabajo en la clase, en el estudio colectivo de las conjeturas propuestas por ellos, cuando resuelven problemas de un cierto tipo planteados por el profesor dentro de un marco bien definido como lo es un sistema teórico de referencia.

¿En qué sentido el compuesto problemas-conjeturas-sistema teórico es un organizador del currículo implementado? Para responder esta pregunta es importante aclarar que aunque el profesor, el orquestador del discurso de la clase, tiene en mente un sistema de referencia que delimita en gran medida el contenido geométrico que se estudia y, en ese sentido, desde la perspectiva de un experto, el espacio para construir nuevo conocimiento a partir de las conjeturas es limitado, la perspectiva de los estudiantes es muy distinta: al no tener el conocimiento de lo que se va a tratar en clase, la consideración de las conjeturas producidas por ellos realmente abre la oportunidad para que se sientan co-partícipes de la construcción genuina de conocimiento. El compuesto problemas-conjeturas-sistema teórico organiza el currículo implementado, pues permite la estructuración del contenido matemático en el sistema teórico que se está conformando, impulsa la realización de procesos matemáticos propios de la actividad demostrativa y propicia la discusión sobre asuntos como la consistencia y funcionamiento de un sistema teórico, los planes, estrategias y metas propuestos para resolver el problema y su validez dentro del sistema, y la forma de comunicar las ideas.

Capítulo 2. Metodología de la investigación

Las acciones investigativas se orientaron de acuerdo con los dos marcos de referencia que fundamentan los análisis. Así, se diseñaron estrategias metodológicas que permitieron, de un lado, informar sobre la acción instrumentada de los estudiantes con Cabri, cuando resolvían un problema que requería la formulación de una conjetura; y, de otro lado, analizar la mediación semiótica del profesor, cuando socializaba las conjeturas propuestas y dirigía un trabajo colectivo para hacer evolucionar dichas conjeturas hacia la producción de teoremas que amplían el sistema teórico que estaba en construcción.

Para precisar la metodología de la investigación se comenzará por enmarcar el estudio en una perspectiva investigativa. Luego, se hará referencia a los sujetos que participaron en el estudio, haciendo una caracterización básica de su experiencia académica. En seguida, se describirá el dispositivo experimental que permitió recoger la información para el análisis, indicando las técnicas de recolección de la información y el tratamiento dado a esta para convertirla en datos de la investigación. Posteriormente, se detallará el dispositivo analítico con el cual se interpretaron y analizaron los datos, señalando el procedimiento empleado para constituir categorías emergentes, usarlas en los análisis e identificar relaciones o patrones para hacer inferencias, en las que se basan las conclusiones del estudio.

Perspectiva investigativa

Nuestro estudio investigativo se enmarca, de manera general, en la metodología ‘experimento de enseñanza’ (Cobb, 2000), con la cual se analizan ciertos eventos de una enseñanza experimental a la luz de un referente teórico, con el propósito de identificar fenómenos de interés para la investigación en un campo particular. Los eventos se consideran casos representativos del fenómeno.

Según Steffe y Thompson (2000), un *experimento de enseñanza* en el ámbito de la educación matemática se basa en una secuencia de clases que involucran un profesor –comprometido en promover la interacción social entre sus estudiantes, la negociación de significados y formas cada vez más sofisticadas de actuar matemáticamente–, unos estudiantes –activamente comprometidos en interacciones comunicativas–, y uno o más observadores que registran aspectos de los sucesos de la clase. Por ello, el diseño y el desarrollo del curso sirven como contexto investigativo y, a su vez, los análisis realizados informan sobre los efectos resultantes con el fin de apoyar nuevos diseños.

Esta aproximación investigativa busca recoger información directa de la experiencia matemática de los estudiantes y es particularmente útil cuando se reconoce la naturaleza sociocultural del aprendizaje de las matemáticas; así lo plantean Ball (2000) y Cobb (2000). Quiere decir esto, que contribuye a construir un puente entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje, atendiendo cuestiones de investigación actualmente relevantes.

De igual forma, es relevante tener en cuenta que, por lo regular, un *experimento de enseñanza* tiene tres fases: diseño y planeación de la enseñanza, análisis durante el curso de los eventos de la clase y análisis retrospectivo. Las dos primeras fases se relacionan estrechamente con la meta de apoyar el progreso matemático de los estudiantes participantes, mientras que el análisis retrospectivo se ocupa de aspectos estructurales de la enseñanza que permiten configurar un modelo del aprendizaje. Puesto que se disponía de la información recogida en una investigación previa (Camargo, 2010), el presente estudio se enfocó en la tercera fase: indagar sobre los sucesos de la clase para identificar y describir, por una parte, la acción instrumentada que da lugar a la producción de signos personales de los estudiantes y, por la otra, la mediación semiótica del profesor para hacer evolucionar dichos signos hacia signos institucionales, cuando propicia y fomenta la participación de los estudiantes en la construcción de una porción de un sistema teórico de geometría euclidiana plana.

Por dicha construcción previa se entiende la actividad de buscar regularidades para reportar invariantes, a manera de conjetura, y de justificar la validez de aquellas conjeturas que se consideran plausibles dentro del sistema teórico que se tiene en el momento. Es decir, se pone en juego el organizador curricular problemas-conjeturas-sistema teórico.

Participantes en el estudio

El diseño investigativo tomó como punto de partida las trascripciones de algunas sesiones de clase del curso Geometría Plana, desarrollado el primer semestre de 2007. Fueron dieciocho los estudiantes que registraron la asignatura y culminaron el semestre académico. Todos ellos habían tomado y aprobado un curso previo, llamado Elementos de Geometría, en el que se hizo un acercamiento informal a algunas definiciones y teoremas elementales de geometría euclidiana plana, con el objetivo de desarrollar habilidades de visualización, lenguaje y argumentación útiles para enfrentar el curso Geometría Plana. En este último, se hizo un acercamiento deductivo a la geometría, impulsando la construcción colectiva de una porción de un sistema teórico de geometría euclidiana plana. Además, en este curso, los estudiantes aprendieron a usar Cabri, es decir, no tenían experiencia previa con programas similares de geometría dinámica, ni de su uso para descubrir propiedades.

En este curso se desarrolló un experimento de enseñanza con el fin de favorecer el aprendizaje de la demostración, al involucrar a los estudiantes en situaciones problema que favorecían su actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013) y les permitían participar de manera genuina en la construcción colectiva de la porción del sistema teórico. Tal como lo señala Camargo (2010), este grupo avanzó considerablemente en la constitución de una comunidad de práctica.

La profesora del curso tenía una amplia trayectoria como docente; en particular, había desarrollado ya seis versiones del curso Geometría Plana, en el marco de una innovación curricular que concibe el aprendizaje de las matemáticas como participación de los estudiantes en actividad matemática. Era y continúa siendo miembro del grupo de investigación que ha guiado y apoyado la innovación mencionada.

Dispositivo experimental

Para la tesis doctoral (Camargo, 2010) –centrada en la evolución de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa, como indicador de la generación de una comunidad de práctica–, la investigadora trascribió todos los registros de audio del curso Geometría Plana desarrollado, como ya se dijo, el primer semestre de 2007. Así, logró tener información primaria de las interacciones de los integrantes de tres parejas de estudiantes –cuando resolvían problemas asignados, con ayuda de Cabri–

y de las interacciones entre profesora y estudiantes –cuando la profesora dirigía el intercambio comunicativo entre todos los miembros de la clase-. También contaba con registros de video.

Para el presente estudio, del mencionado corpus se seleccionaron las trascripciones correspondientes al trabajo en torno a tres problemas propuestos a los estudiantes en dos momentos del semestre. Además de resolver los problemas, los estudiantes tenían que formular conjeturas y discutirlas con sus compañeros en una interacción dirigida por la profesora. Para seleccionar los problemas cuyas trascripciones se analizaron, tuvimos en cuenta que: primero, se hubieran asignado en momentos distintos del desarrollo del curso, hacia el principio y el final, para captar, si fuera posible, regularidades y diferencias en la acción instrumentada de los estudiantes y en la mediación semiótica del profesor; segundo, se dispusiera de un buen registro de la actividad instrumentada de tres parejas de estudiantes para poder hacer un seguimiento detallado de tal actividad; y, tercero, se dispusiera de la discusión posterior dirigida por la profesora y que aquélla fuera representativa de la mediación semiótica desplegada por ella.

Cabe señalar que aunque se escogieron tres de los problemas cuyas transcripciones eran las mejores, esto no significa perfección en la toma de datos, pues el hecho de registrar la información en el ambiente natural de la clase dificulta en ocasiones el registro claro de audio y en algunos momentos el registro de video. A continuación se presentan los enunciados de dichas situaciones.

Problema 1. Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de $\angle KBE$ y $\angle ABK$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición de $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? (Problema de construcción sugerida).

Problema 2. Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BD}$ otro rayo. ¿Existe un punto E en el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$ en donde está D tal que $\angle CBE$ y $\angle DBA$ sean complementarios? (Problema de construcción creativa).

Problema 3. Dada una recta m y un punto P que no está en ella. a) Para R que pertenece a m, halle Q en el semiplano opuesto a aquel en el que está P tal que QR es igual a PR. b) Repita el mismo proceso con tres puntos más de la recta. c) ¿Existe un punto X en ese semiplano para el cual su distancia a cualquier punto Y de la recta es igual a la distancia de ese punto a P? Si es el caso, caracterice a X. (Problema de construcción creativa).

Una vez seleccionados los problemas y las transcripciones del trabajo de tres parejas de estudiantes, se cotejaron con las grabaciones de audio y video para enriquecerlas con la descripción detallada de acciones específicas en Cabri y con algunas figuras ilustrativas de la construcción o la exploración que se estaba haciendo. La intención era disponer de descripciones más completas que permitieran inferir los esquemas de utilización, producto del uso del programa de geometría dinámica y detectar los signos generados.

Después de enriquecer las transcripciones con información relevante se delimitaron segmentos de interacción, para organizar las intervenciones por fases de la resolución del problema, suprimiendo líneas en las que no se estuviera haciendo o diciendo algo con relación al problema o su solución. Las transcripciones de la interacción entre la profesora y todo el grupo para discutir las conjeturas, se sometieron a un proceso de depuración para eliminar información irrelevante y dividir el material por fragmentos, de acuerdo al asunto tratado.

El proceso de edición, depuración y organización de la información de las transcripciones conlleva en sí mismo un nivel de análisis e interpretación, hecho que es connatural a los estudios cualitativos. De hecho, el registro mismo de la información está influido por decisiones relativas al interés de capturar ciertos fenómenos. Sin embargo, el análisis en profundidad correspondiente a este estudio se centró en la actividad instrumentada y en la mediación semiótica, tal como se describe en la siguiente sección.

Dispositivo analítico

El dispositivo analítico para estudiar las transcripciones fue diferente de acuerdo con el asunto de interés: la actividad instrumentada o la mediación semiótica. A continuación se describe en detalle el procedimiento con el que se abordó el análisis de la información en cada caso.

Para abordar el análisis de la actividad instrumentada

Para estudiar la actividad instrumentada con Cabri, se identificaron, en las intervenciones de los estudiantes, asuntos que se constituyeron en categorías previas de análisis (véase Tabla 1).

Tabla 1. Definición de categorías para analizar la actividad instrumentada

Categoría	Definición
Instrumentalización	Acciones relativas al proceso de reconocimiento progresivo de las posibilidades y limitaciones propias del artefacto y de sus diferentes componentes.
Instrumentación	Acciones relativas al proceso de surgimiento y desarrollo de esquemas de utilización, es decir, acciones típicamente realizadas con el instrumento para resolver una tarea.
Potencial semiótico del artefacto	Características del artefacto, ligadas a lo matemático, que permiten establecer relaciones entre esquemas de utilización e imágenes conceptuales, significados personales y conocimiento.
Signos-Figuras geométricas	Figuras geométricas construidas con Cabri que ponen en evidencia información usada por los estudiantes para formular la conjetura.
Signos-Afirmaciones	Oraciones o frases de índole matemática relacionadas con las conjeturas.

Tal como se señaló en el marco teórico, en el proceso de *génesis instrumental* para convertir un artefacto en un instrumento se articulan acciones de instrumentalización e instrumentación, y el artefacto se usa de manera peculiar o específica en la resolución del problema. El considerable conocimiento práctico del programa y el conocimiento relativamente amplio, basado en la observación frecuente, de las actuaciones de los estudiantes cuando usan Cabri para resolver problemas, permitió disponer *a priori* de un conjunto de esquemas de utilización relativos a construcciones de objetos y al uso de la función arrastre, con los cuales se comenzó el análisis.

Sin embargo, a medida que se fue analizando el trabajo realizado por los tres grupos, se infirieron otros esquemas, estrechamente relacionados con los problemas específicos. A continuación se presentan en las Tablas 2 y 3, los esquemas para construcción, exploración y verificación, tomados de la lista definitiva de esquemas, que se identificaron en el análisis de los fragmentos del Problema 2, con el que se ilustró la interpretación de los datos.

Tabla 2. Descripción de esquemas de utilización para construcciones

Construcción de rayo	C5	Usan la opción Rayo, hacen clic en dos lugares distintos de la pantalla y determinan un punto sobre el rayo.

Construcción de rayos opuestos	C7	Construyen una recta, usan la opción Rayo y construyen dos rayos opuestos con origen en un mismo punto de la recta.
	C11	Construyen dos rayos en sentido opuesto que perceptualmente parecen colineales.
Construcción de ángulo complementario a uno dado	C18	Miden el ángulo inicial, calculan la diferencia entre esa medida y 90, construyen un rayo y lo rotan alrededor del extremo según la diferencia calculada.

Tabla 3. Descripción de esquemas de utilización para explorar o verificar

AET	Se arrastra un punto o un objeto para hacer un barrido más o menos completo y explorar.
AVCX	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones extremas y verificar la construcción realizada.
AVCE	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones especiales y verificar la construcción realizada.

Nota: Si el arrastre es de un punto o de un objeto, se agrega al final del código P u O respectivamente. Si se toma medida, se agrega al final del código M.

A continuación se explicita el procedimiento de análisis del material:

- Las trascripciones correspondientes al primer problema se distribuyeron entre los miembros del grupo investigador para hacer de manera individual una primera revisión. Se propuso identificar inicialmente los procesos de instrumentalización, los esquemas de utilización y los signos –oraciones o frases de los estudiantes-, procurando identificar relaciones entre los esquemas y los signos.

- Se realizó una primera discusión sobre el trabajo individual. En esta se revisaron los esquemas de utilización, incluyendo algunos nuevos a la lista, y, a su vez, se acordaron las descripciones de estos. Fue evidente la necesidad de entrever, en los esquemas identificados, las imágenes conceptuales de los estudiantes sobre los objetos geométricos involucrados en la conjetura que se buscaba o su interpretación del problema. De otra forma, no era claro cómo establecer el nexo entre los esquemas y los signos producidos.

- Se llevó a cabo una nueva revisión del material, esta vez en parejas, incluyendo, por una parte, la identificación de construcciones en Cabri de figuras geométricas relevantes para la solución del problema (signos) y, por otra, nuestra interpretación de las imágenes conceptuales subyacentes en los esquemas de utilización. Esta asociación entre imágenes conceptuales y esquemas de utilización condujo a reconocer el potencial semiótico de Cabri.

- En una reunión general del equipo de investigación, se socializó el trabajo realizado por las parejas, se tipificaron los signos identificados usando la clasificación sugerida por Bartolini Bussi y Mariotti (2008): signos del artefacto, signos pivote y signos matemáticos. Se unificó el estilo del informe del análisis realizado. Esta reunión sirvió para revisar las descripciones de algunos esquemas y llegar a un consenso sobre la clasificación de los signos.

- Se analizaron las transcripciones del segundo problema, inicialmente en parejas y después en una discusión de todo el equipo. El proceso realizado fue similar al seguido con las transcripciones del primer problema, salvo que no se hizo una primera ronda de trabajo individual.

- Se analizaron las trascripciones del tercer problema, de manera individual. En este caso, los esquemas de utilización de construcción que se tenían, tanto los determinados *a priori* como los que surgieron a partir del análisis de los dos primeros problemas, no fueron muy útiles, pues no hubo evidencia del uso de casi ninguno de dichos esquemas, salvo algunos de arrastre. Esto llevó a examinar las diferencias entre los enunciados de los problemas, identificar más esquemas emergentes y hacer una propuesta de clasificación de los esquemas de utilización que se discuten en los resultados de la investigación.

- Cuando se comenzó el análisis de la mediación semiótica, se identificó la necesidad de revisar la categoría "Potencial semiótico del artefacto" y redefinirla, puesto que el foco de interés era la mediación del profesor y no solamente la mediación del artefacto (Tabla 4).

Tabla 4. Distinción entre potencial semiótico del artefacto y el usado en la mediación

Potencial semiótico del artefacto	Potencial semiótico usado en la mediación
Características del artefacto ligadas a lo matemático que permiten establecer relaciones entre esquemas de utilización e imágenes conceptuales.	Esquemas de utilización o signos (figuras o afirmaciones que surgen en el curso de la resolución del problema) producidos por los estudiantes, utilizables en la mediación semiótica del profesor.

Para abordar el análisis de la mediación semiótica del profesor

Con el objetivo de llevar a cabo el estudio de la mediación semiótica del profesor en el tratamiento dado a las conjeturas en clase, y por esta vía documentar el proceso mediante el cual las ideas que producen los estudiantes se constituyen en elementos clave de la construcción de conocimiento, se desarrolló el siguiente proceso:

- Un miembro del equipo de investigación, que no era la profesora del curso, asumió la tarea de leer la trascripción correspondiente a la socialización de conjeturas del Problema 1 y hacer una codificación de la interacción, con base en la categorización sugerida por Mariotti (2009). En ese sentido, su mirada se centró en identificar las siguientes acciones de la profesora: pedir que se retome la tarea, focalizar en ciertos aspectos del uso del artefacto, solicitar y proveer una síntesis.

- Al discutir la codificación se evidenció que, en el caso de este estudio, tal categorización era insuficiente para interpretar la mediación semiótica de la profesora, porque obedecía a una estructura particular de clase que se diferenciaba de la implementada en nuestro experimento de enseñanza, sujeta al organizador curricular problemas-conjeturas-sistema teórico; además tal codificación carecía de indicadores específicos (i. e., acciones del profesor) para cada categoría, que permitieran identificar e interpretar la mediación semiótica del profesor.

  Se debe tener claro que Mariotti (2009) propone su categorización de mediación semiótica a partir de clases en las que es central el informe escrito, elaborado por las parejas de estudiantes sobre el trabajo realizado con el artefacto. Desde su punto de vista, las categorías apuntan a abordar las intervenciones del profesor, las cuales buscan promover el despliegue del potencial semiótico del artefacto; la construcción de signos individuales comunes; y hacer que los signos superen el punto de vista individual para adquirir la generalidad propia de signos, que podrían ser aceptados por la comunidad matemática.

  En el caso de este estudio, la gestión de la profesora se basaba en las conjeturas formuladas por los estudiantes y en sus verbalizaciones acerca del proceso realizado para poder formular la conjetura. En ese sentido, aunque la mediación semiótica de la profesora buscaba explicitar los signos producidos por los estudiantes durante el trabajo con el artefacto, para hacerlos evolucionar; también apuntaba a la reconstrucción del proceso mismo, pues solo se disponía de la formulación escrita de las conjeturas propuestas. Esto llevó a los investigadores a generar una codificación emergente, en la que se incluyó como elementos las categorías sugeridas por Mariotti (2009) y algunas acciones del profesor, que se habían propuesto ya en Samper, Camargo y Perry (2006).

- La integrante del equipo de investigación que fue la profesora del curso, retomó la codificación de la trascripción para complementarla con nuevas acciones que fue proponiendo a medida que revisaba el material. En algunos casos empleó la evocación y el recuerdo de los sucesos de la clase para interpretar algunas de sus acciones. El desarrollo de la codificación emergente dio como resultado un listado inicial de códigos y sus descripciones.

- A medida que el análisis del primer problema avanzaba, la lista de acciones fue aumentando. En varias socializaciones del proceso se comenzó a hacer evidente que algunas acciones marcadas con códigos estaban centradas en favorecer el intercambio comunicativo, aspecto central para garantizar la mediación semiótica, pero no propiamente reconocido como mediador. Este hecho llevó a suprimir códigos, aunque se agruparon las acciones descritas en ellos para referirse a las normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996), que permiten generar un ambiente propicio para la mediación semiótica.

- Nuevas revisiones a la lista de códigos que agrupaban acciones específicas de mediación semiótica de la profesora, en las que se hacía evidente el papel que ella cumplía en la evolución de las conjeturas de los estudiantes hacia signos matemáticos, que cumplían las normas establecidas en clase para formular un teorema o una definición, permitieron identificar una posible organización de los códigos según el asunto central de la mediación: los objetos y las relaciones de índole geométrica involucrados en el problema, la conjetura que da solución al problema, el enunciado condicional como forma usual de presentar una conjetura, el teorema al que se esperaba llegaran los estudiantes, y asuntos matemáticos propios de la conformación de un sistema teórico. Se agruparon los códigos en categorías correspondientes a los asuntos mencionados, aunque algunos códigos correspondían a más de una categoría.

- Tras varias revisiones de la codificación hecha a partir del primer problema, la investigadora-profesora realizó el análisis de las interacciones relativas al segundo problema, tarea que condujo a algunos cambios en el listado de códigos, principalmente para incluir acciones de una categoría en otra.

- Analizadas las trascripciones de los dos primeros problemas, el equipo se concentró en revisar las descripciones de los códigos y las palabras clave con las cuales se mencionarían. El listado definitivo de categorías y sus acciones con sus respectivos códigos se recogen más adelante en las Tablas 5 a 9.

- El análisis adelantado hasta el momento llevó a revisar los signos que fueron objeto de la discusión y, especialmente, a establecer una tipificación de los que se habían denominado *signos matemáticos*, porque se veían diferencias entre ellos derivadas de: (i) si el signo matemático responde al problema o si es el teorema el que se quiere introducir al sistema teórico; (ii) si el signo está más o menos próximo a una formulación sintética y económica; (iii) si el signo está completo con relación a las partes que constituyen la condicional en la formulación de la conjetura; y, (iv) si son formulaciones correctas o erróneas.

- Con la organización de códigos tal como aparece en las Tablas 5 a 9, se realizó el análisis de las interacciones correspondientes al Problema 3. Este análisis lo hizo la investigadora-profesora y lo discutió con los demás miembros del equipo.

Códigos para analizar la mediación semiótica del profesor

Tabla 5. Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la conceptualización de objetos y relaciones

I. Conceptualización de objetos y relaciones	
1.	(concepción-artefacto) Provocar concepción sobre objetos matemáticos, a través de lo hecho con el artefacto, para detectar imágenes conceptuales reducidas o deficientes, para que entiendan qué propiedades se requieren para que la figura represente el objeto que se quiere, construir buena definiciones.
2.	(enunciado sintético) Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado, para que la proposición se asemeje en su forma a la que es usual en la matemática; debe usarse el sistema teórico para ello, las proposiciones deben ser sintéticas y económicas.
3.	(ubicación objetos) Explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se afirma. Interpretación del profesor para mostrar que los objetos involucrados en la proposición tienen un lugar en el sistema teórico, para legitimar la afirmación. Control teórico de objetos involucrados en la afirmación.
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) para impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso de la comunidad de la clase.
5.	(construcción-sistema teórico) Promover que las representaciones hechas con el artefacto se supediten al sistema teórico disponible para hacer ostensivas las propiedades dadas en las definiciones, postulados y teoremas.
22.	(significado personal-concepto) Indagar acerca del significado personal de un concepto. Preguntar por el significado personal de un objeto o relación de índole geométrica con el propósito de determinar su correspondencia con la solución del problema.

Tabla 6. Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la comprensión y el uso del enunciado condicional

II. Comprensión y uso del enunciado condicional como objeto	
6.	(artefacto-antecedente y consecuente) Revisar o pedir revisión del uso del artefacto en las construcciones que se relatan, como referencia para determinar si en el enunciado condicional propuesto, el antecedente se corresponde con lo construido –directamente o con el arrastre–, y el consecuente con lo obtenido.

7.	(identificación-antecedente y/o consecuente) Identificar o solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas, paso previo para determinar si en el enunciado condicional propuesto, el antecedente se corresponde con lo construido –directamente o con el arrastre–, y el consecuente con lo obtenido.
8.	(dependencia-conjetura) Utilizar lo hecho y obtenido con el artefacto como referencia para evaluar si la conjetura expresa la dependencia que el artefacto hace ostensiva.
9.	(conjetura-condicional) Pedir el uso o usar expresión de conjeturas en formato condicional para explicitar la relación de dependencia y con qué se cuenta para comenzar la demostración y qué es lo que se debe demostrar.
10.	(condicional-ejemplos y contraejemplos) Destacar elementos fundamentales que caracterizan una proposición condicional y una bicondicional, y destacar cómo se pueden aprovechar para producir ejemplos o contraejemplos, y cómo se modifica la hipótesis de la condicional para poder hacer una demostración por contradicción.
11.	(enriquecer signos) Enriquecer signos con recursos gráficos o icónicos para favorecer la interpretación del significado de lo que establece una proposición condicional.

Tabla 7. Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la conjetura como solución al problema propuesto

III. El problema y su solución (la tarea y la conjetura como solución al problema)	
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) e impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso matemático.
11.	(enriquecer signos) Enriquecer signos con recursos gráficos o icónicos para favorecer la interpretación de soluciones que se dan al problema.
12.	(problema-control teórico) Controlar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos, que subyacen a las propuestas de solución del problema, estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
13.	(síntesis-foco de atención) Sintetizar o recoger ideas que establecen el foco de atención para destacar de los signos de los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
14.	(indagar sobre signos) Indagar sobre los signos producidos por los estudiantes para rescatar elementos útiles para la producción de la conjetura, o para favorecer que los estudiantes revisen y modifiquen sus ideas e interpreten las de los demás.
15.	(modelo de actuación) Proveer un modelo para enfrentar la resolución matemática de un problema (en el análisis, en la formulación de conjetura) con el fin de favorecer la emergencia de signos que conduzcan a la conjetura que soluciona el problema.
16.	(elementos-enunciado) Destacar de las conjeturas de los estudiantes elementos que son parte del enunciado al que se quiere llegar.
17.	(proposición-operacional) Promover que las proposiciones se transformen para hacer operacional la demostración.

Tabla 8. Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en el teorema al que se quiere llegar

IV. Teorema (enunciado, demostración, marco teórico) al que se quiere llegar	
2.	(enunciado sintético) Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética, usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado, para que la proposición se asemeje en su forma a la que es usual en la matemática; debe usarse el sistema teórico para ello, las proposiciones deben ser sintéticas y económicas.
4.	(abordar imprecisiones) Abordar (suprimir o destacar) imprecisiones matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablado) para impulsar la apropiación de términos y expresiones convenidas para el discurso de la comunidad de la clase.
12.	(problema-control teórico) Controlar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos que subyacen a las propuestas del teorema al que se quiere llegar estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
13.	(síntesis-foco de atención) Sintetizar o recoger ideas que establecen el foco de atención para destacar de los signos de los estudiantes elementos útiles para la producción de la conjetura.
16.	(elementos-enunciado) Destacar de los signos de los estudiantes elementos que son parte del enunciado al que se quiere llegar.
17.	(proposición-operacional) Promover que las proposiciones se transformen para hacer operacional la demostración.
18.	(nuevo elemento del sistema) Explicitar la necesidad de introducir un elemento al sistema teórico para poder sustentar un paso de la construcción.

Tabla 9. Acciones de mediación semiótica del profesor centradas en la formación de nociones de teorema, postulado, definición

V. Nociones de teorema, postulado, definición	
19.	(exigencias enunciado matemático) Hacer referencia a que el enunciado de una proposición matemática debe construirse de manera sintética, económica y general, usando el término asignado dentro del sistema teórico desarrollado.
20.	(requisitos-teorema) Señalar requisitos desde la matemática para que un enunciado sea teorema.
21.	(asuntos especiales) Mencionar asuntos especiales relacionados con la demostración (tipos de teoremas, unicidad, existencia, proceso; en qué consiste una definición, un postulado, un teorema, cómo se hace una demostración).

Análisis de la interacción de Ignacio[2] y Nancy (Grupo E), al resolver un problema

Para ilustrar cómo se hizo el análisis, se presenta a continuación lo que hicieron Nancy e Ignacio al resolver el Problema 2. El problema, que es de *construcción creativa*, pide dilucidar si dados un ángulo y el rayo opuesto a uno de sus lados, existe un punto, en el mismo semiplano en el que está contenido el otro lado del ángulo dado, que determine un lado de otro ángulo, complementario con el dado, siendo el otro lado de dicho ángulo el rayo mencionado. El teorema que se quiere obtener como consecuencia de este problema es la existencia de la perpendicular a una recta por un punto dado de esta. Este teorema surge no como conjetura que resuelve el problema sino como necesidad teórica para realizar la construcción del ángulo complementario y, por ende, justificar su existencia.

El problema incentiva la exploración de una situación específica. Si bien una exploración basada solo en la toma de medidas y en el arrastre es útil para percatarse de que el punto E existe, lo esperado para dicha situación va mucho más allá de precisar dicha existencia. Los estudiantes deben caracterizar geométricamente el punto. Para ello, es necesario hacer construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas suficientes para determinar la existencia de un objeto (genérico o específico). Así, la representación de la situación en este tipo de problemas no se basa solo en la construcción de objetos que cumplan las condiciones dadas en el problema mismo, sino en otras que permitan solucionar el problema. Se espera que los estudiantes reporten dicha caracterización en la conjetura que formulan.

Construyen rayos opuestos

Al empezar a leer el enunciado del problema, Ignacio observa que en este se ven involucrados rayos opuestos. Por esta razón, detiene su lectura para construirlos en la calculadora.

1.	Ignacio:	[Lee el enunciado.] Sean AB y AC rayos opuestos... Entonces, la recta, borre la recta como el chavo. F2...
2.	Nancy:	¿No puedes hacer rayo y rayo opuesto?

2 Se han cambiado los nombres de los estudiantes para proteger su identidad.

3.	Ignacio:	No. Toca hacer la recta y en base a un punto hacemos los otros...
4.	Nancy:	¿Sí?
5.	Ignacio:	Más fácil... Listo. Entonces aquí tenemos recta. [Construye una recta.] Semirrecta, ¿cierto? [Selecciona la opción semirrecta. Cuando lo hace se le borra la recta.] ¿Por qué se borra?
6.	Nancy:	Porque no le habías dado enter.
7.	Ignacio:	Sí, yo le había dado enter. [Vuelve a construir la recta.] [Elige la opción semirrecta.]
8.	Nancy:	En el mismo puntico. [Refiriéndose al punto con el cual construyeron la recta.]
9.	Ignacio:	No, porque de pronto para el arrastre... Recuerdas lo que nos pasó ayer en el arrastre.
10.	Nancy:	Ponle *A* y *B*. Bueno.
11.	Ignacio:	[Construye el $\overrightarrow{AB}$.] ¿*A*, *B*? ¿Le pongo *A*, *B*? [Etiqueta.]
12.	Nancy:	Ajá. Y hacia el otro lado es *AC*.
13.	Ignacio:	[Construye el $\overrightarrow{AC}$ sobre la recta.]
14.	Nancy:	*C*.

Para la construcción de los rayos opuestos, Nancy sugiere hacer “rayo y rayo opuesto” [2], es decir, propone el esquema C11 consistente en construir dos rayos que perceptualmente sean opuestos. Ignacio no acepta y, en cambio, pone en juego el esquema de utilización C7, ya que construye cada uno de los rayos sobre la misma recta y, posteriormente, etiqueta los puntos que determinó para construir cada uno de los rayos. Estas dos propuestas para la misma construcción evidencian diferencias en el grado de instrumentalización de los dos integrantes del grupo. Ignacio parece estar más consciente de que las construcciones en Cabri generan dependencias y que no hacer una construcción sujeta a ciertas normas genera una dificultad al momento de arrastrar [9].

La frase “más fácil”, proferida por Ignacio en la intervención [5], lleva a plantear dos posibles interpretaciones para las razones por las que realizan la construcción de rayos opuestos como lo hicieron. Una, la construcción pudo estar guiada por la definición de rayos opuestos. Dos, puede que ni Nancy ni Ignacio vean como condición indispensable el hecho de que los rayos se construyan sobre la misma recta, y más bien se trate de una decisión guiada por la comodidad o la facilidad para realizar la construcción y la exploración, habida cuenta que ellos ya tuvieron la experiencia de una construcción de rayos opuestos mal realizada.

Los esquemas de utilización para construir los rayos opuestos se constituyen en un potencial semiótico para indagar sobre la imagen conceptual y la definición de rayos opuestos que tienen los estudiantes.

Construyen el $\overrightarrow{AD}$

Ignacio retoma la lectura del problema y se detiene para construir el $\overrightarrow{AD}$.

21.	Ignacio:	Listo. Entonces dice: y *AD* otro rayo. Entonces... enter... [Construye un rayo tomando como origen el punto *A* y haciendo clic en el semiplano superior de la recta.] Punto sobre objeto. [Coloca un punto sobre el rayo.]
22.	Nancy:	¿Cómo se hace para que queden corticas?
23.	Ignacio:	No sé.
24.	Nancy:	Dale *D*.

Para la construcción del $\overrightarrow{AD}$, Ignacio recurre al esquema de utilización C5, es decir, con la herramienta semirrecta activada, hace clic en el punto *A*, luego en el semiplano superior y, finalmente, coloca un punto sobre el rayo al que designa *D*.

La expresión proferida por Nancy en [22] puede referirse a la intención de que los rayos construidos en la calculadora queden de tal forma que la representación coincida con la que habitualmente se realiza en lápiz y papel. Esta tendencia aporta evidencia del nivel de instrumentalización de Nancy. El esquema de utilización tiene potencial para discutir la representación de rayo y, por ende, la conceptualización del mismo.

Arrastran el $\overrightarrow{AD}$ para explorar

Después de construir el $\overrightarrow{AD}$, Ignacio finaliza la lectura del enunciado del problema y realiza una exploración en la calculadora.

20.	Nancy:	[Lee el enunciado del problema.] ¿Es posible determinar un punto *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*, para el que el ángulo *BAD* sea complementario con el ángulo *CAE*?
		[...]
29.	Ignacio:	[Arrastra el $\overrightarrow{AD}$ por todo el semiplano superior.] Sí, y sé cuál punto es. ¡Jaja! Ven.
30.	Nancy:	Pero, no. Complementario es ¿hasta dónde?, ¿hasta noventa?
31.	Ignacio:	Noventa.
32.	Nancy:	Sí, como que no es así de fácil.

Para explorar, Ignacio arrastra el $\overrightarrow{AD}$ por todo el semiplano superior, es decir, hace uso del esquema de utilización AETO. Esta acción le permite observar que existe un punto que cumple con la condición solicitada en el enunciado del problema, aunque no cae en cuenta de la restricción que debe tener la medida del $\angle BAD$. Este esquema tiene un potencial para indagar acerca de la conceptualización de ángulos complementarios.

Construyen el $\angle EAC$

Nancy propone una forma de construir el $\angle EAC$ e Ignacio realiza esta construcción en la calculadora.

34.	Nancy:	Pero, ¿ahí no hay eso de calcular?
		[...]
36.	Nancy:	Pues para que le haga un rayito de una vez con la medida que es. Y ya.
		[...]
41.	Ignacio:	¡Ah! Hacer, hacer otra semirrecta acá. [Señala el interior del ángulo *CDA*.] Y ponerle acá noventa menos... ¡Ah! entonces, ¿en tabular es? ¿En? [Elige la opción calcular.] ¿Cómo era?
42.	Nancy:	¡Ah! Pero es que primero toca sacarle la medida al ángulo *BAD*.
43.	Ignacio:	Sí. Entonces no nos sirve todavía. ¿Cómo es? [Pausa.] [Mide el ángulo *BAD*].
		[...]

45. Ignacio: Entonces aquí le damos... Hacemos otra semirrecta y ponemos el rayo [*AE*] para que dé noventa, ¿cierto? Para que la suma de este ángulo [*BAD*] más... dé noventa.

46. Nancy: Es *CAE*.

[...]

59. Ignacio: [Construye una semirrecta con origen en *A*. Aún no elige el otro punto.] Sí. Entonces aquí este punto, ¿cierto?

[...]

70. Nancy: En cualquier parte [del $\overrightarrow{AC}$].

71. Ignacio: Listo. Entonces, transferencia de medidas, ¿cierto? No. Calcular a...

72. Nancy: Noventa...

73. Ignacio: Noventa menos *a* [*a* es la medida del $\angle BAD$] Listo. Enter, ¿cierto?

74. Nancy: Sí. Entonces ahora, girar, rotar, mover.

[...]

77. Ignacio: [Observando el menú.] ¿Traslación? ¿Giro?

78. Nancy: Giro.

[...]

81. Ignacio: [Con la opción rotación activada, selecciona el rayo *AC*, la medida calculada y el punto *A*.] Listo. Mira.

[...]

84. Nancy: Ahora hallar *E*.

85. Ignacio: Este. [Señala un punto de la semirrecta que surge como producto de la rotación y despliega varios menús buscando la herramienta que permite etiquetar el punto.]

[...]

90. Nancy: *E*.

La construcción del $\angle EAC$ propuesta por Nancy, y realizada por Ignacio, se corresponde con el esquema de utilización C18, ya que para la construcción del ángulo complementario al $\angle BAD$, toman la medida de este último [43], construyen un rayo sobre $\overrightarrow{AC}$ [59 y 70], calculan la diferencia entre noventa y la medida de $\angle BAD$ [73], aplican la herramienta rotación al rayo construido [81] y etiquetan el punto *E* sobre este rayo

[90]. Este esquema es una evidencia del uso de la definición del complemento de un ángulo para la resolución del problema.

Nancy muestra un mejor proceso de instrumentalización, ya que indica claramente las etapas del proceso que le permite realizar la construcción en Cabri de un ángulo dada la medida, mientras que Ignacio cree que puede utilizar el mismo procedimiento que se utiliza para construir un segmento congruente a otro, es decir, la transferencia de medidas. La propuesta de Nancy tiene potencial semiótico para destacar la fundamentación teórica de la construcción en Cabri de un ángulo con una medida específica.

La mención a la "transferencia de medidas"[3] [71] cuando quiere construir un ángulo de medida dada, parece ser un signo pivote por cuanto se refiere a una herramienta del programa que quizá asocia a un elemento del sistema teórico (i.e., al Postulado de la construcción de ángulo[4]); cabe aclarar que el estudiante confunde el nombre de la herramienta del software a la que está aludiendo (i.e., rotación), lo que ratifica el hecho de que los estudiantes están en un proceso de instrumentalización del software.

Arrastran el $\overrightarrow{AD}$ para verificar la construcción

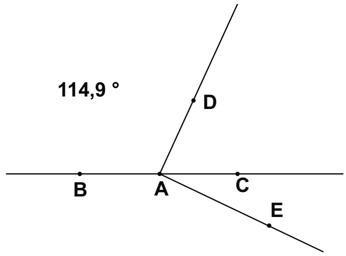
Una vez han realizado la construcción del $\angle CAE$, proceden a utilizar el arrastre para verificar que este ángulo siempre es complementario con el $\angle BAD$.

91.	Ignacio:	Listo. Y cumple con la prueba del arrastre. Sí. Arrastrémoslo, ¿cierto?
92.	Nancy:	Arrastra *D*.
93.	Ignacio:	¿*D*? ¡Ah! Sí. Porque *E* es el dependiente. [Arrastra el $\overrightarrow{AD}$ acercándolo al $\overrightarrow{AB}$.]
94.	Nancy:	Hágalo más de noventa [refiriéndose a la medida del $\angle BAD$.]

3 Herramienta de Cabri que permite localizar un punto a una distancia dada de otro.

4 Postulado Construcción de ángulos: sea el $\overrightarrow{AB}$, un rayo de la arista de un semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$, con $P \in H$, tal que $m\angle PAB = r$.

95. Ignacio: [Gira el $\overrightarrow{AD}$ en sentido negativo, de tal forma que el $\overrightarrow{AE}$ queda en el otro semiplano.]



96. Nancy: Tan retramposo. ¡Jajaja!

Inicialmente, el arrastre realizado por Ignacio corresponde al esquema de utilización AVCXMO, ya que arrastra el $\overrightarrow{AD}$ hasta posiciones cercanas al $\overrightarrow{AB}$ [93]. Posteriormente, a solicitud de su compañera, arrastra el rayo hasta una posición en la cual la medida del $\angle BAD$ es mayor a noventa, es decir, considera una posición especial y, por tanto, el esquema utilizado concuerda con el AVCEMO [95]. No se dan cuenta de que al arrastrar de esta manera, el punto E queda en un semiplano diferente a donde está el punto D, hecho que desconoce lo que dice el enunciado del problema. Ellos aún no han comprendido las condiciones del problema, si se tiene en cuenta la amplitud del arrastre que los lleva a considerar posibles ángulos DAB que no son agudos. El esquema de utilización empleado tiene potencial para indagar sobre la conceptualización de ángulos complementarios.

En el fragmento se puede observar que la etapa de instrumentalización en la que se encuentran Nancy e Ignacio les permite reconocer con facilidad los puntos dependientes e independientes de la construcción. Además, la intervención realizada por Ignacio "Y cumple con la prueba del arrastre" [91] es una evidencia más de su nivel de instrumentalización.

Escriben la conjetura

La exploración realizada por Ignacio y Nancy los llevó a descubrir que existe un punto E que cumple la condición requerida en el enunciado del problema. Posteriormente, Nancy, con la ayuda de Ignacio, se preocupa por formular la conjetura de la mejor manera posible.

97. Ignacio: Listo. Ya tenemos la construcción y ya sabemos que está bien hecha. ¿Cierto? ¿Cuál es nuestra conjetura?

98. Nancy: Que si todo esto...

[...]

103. Ignacio: No, que si *AB* y *AC* son rayos opuestos...

104. Nancy: Por eso, sí este pedazo.

[...]

108. Nancy: Sí. Dice que si es posible determinar otro ángulo... Con la estructura.

109. Ignacio: Un punto *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*.

110. Nancy: Cuya medida sea el complemento de la otra... Entonces toca decir que ese ángulo dado tiene que ser menor de noventa

111. Ignacio: ¡Ah! Claro.

[...]

114. Nancy: [Escribe la conjetura: Si se tiene *AB* y *AC* rayos opuestos y *AD* un rayo que determina un ángulo...] Se tiene el rayo *AB*...

115. Ignacio: Y *AC* opuestos.

[...]

118. Nancy: ¡Ah! Bueno. Y el rayo *AD* otro rayo que... ¿Determina?

[...]

124. Nancy: Que determina un ángulo, un ángulo. No, pongámosle tal que... ¿Cuál ángulo? Tal que el ángulo *BAD* es menor... No...

125. Ignacio: Es agudo. Agudo es menor que noventa.

[...]

129. Ignacio: Existe un ángulo *EAC*.

130. Nancy: ¿Entonces existe? Sí, no. Entonces existe, se puede construir, es posible determinar un punto. Pues sí, podemos poner existe. Entonces existe...

131. Ignacio: Un punto E que pertenece al mismo semiplano...

[...]

134. Nancy: [Escribe.] Existe el ángulo *CAE* con *E* perteneciente... No, con *E* que está en el mismo semiplano... ¿con *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*?...

135. Ignacio: Sí.

136. Nancy: Con *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*...

137. Ignacio: Pero ahí que conjetura podemos sacar. Existen dos ángulos complementarios, entonces el otro ángulo... No, que se tiene un par lineal. No.

138. Nancy: Espérame... [Lee lo que ha escrito.] Si se tiene blablabla entonces existe el ángulo *CAE* con *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*... ¿Cómo ponemos ahí? ¿Ahí? Espere.

139. Ignacio: La conclusión es que dos ángulos y el otro formado es un ángulo recto. Lógico.

[...]

143. Nancy: Tal que el ángulo *CAD*, no. Tal que el ángulo es complementario.

144. Ignacio: ¿Complementario?

145. Nancy: Sí.

146. Ignacio: No. Tal que la medida de *DAE*...

147. Nancy: No. Tal que...

148. Ignacio: Sí. La medida de *DAE*... Mire, mire...

149. Nancy: No.

[...]

160. Nancy: Pues es que si dos ángulos son complementarios entonces el otro es noventa.

En la interacción de Nancy e Ignacio para escribir la conjetura, el grupo investigador reconoce un signo matemático en la expresión de Nancy, "Cuya medida sea el complemento de la otra... Entonces toca decir que ese ángulo dado tiene que ser menor de noventa" [110]. Al mencionar que los ángulos son complementarios, Nancy tiene en cuenta que la medida de cada uno es menor que noventa y se preocupa por hacer esto evidente en su conjetura.

Por otra parte, en la intervención de Ignacio: "Es agudo. Agudo es menor que noventa" [125] también se evidencia un signo matemático; con él reinterpreta la información suministrada por Nancy respecto a la condición que debe cumplir el ángulo inicial, con base en la teoría.

Las siguientes intervenciones de Ignacio: "No, que se tiene un par lineal. No." [137] y "La conclusión es que dos ángulos y el otro formado es un ángulo recto. Lógico" [139], permiten pensar que es posible que Ignacio haya llegado a esa conclusión basándose en lo que vio en Cabri o que haya hecho un proceso de razonamiento deductivo, esto debido a que la palabra "lógico" puede indicar eso. En ambos casos se tiene un signo matemático, aunque está lejos de lo que se esperaba que ellos formularan como conjetura.

La alusión a que el ángulo debe ser agudo para poder tener un complemento tiene potencial semiótico para revisar el concepto de ángulos complementarios, puesto que la definición usual exige que se formule como teorema que los ángulos deben ser agudos, o si se usa una definición no económica debería incluir tal propiedad. Por otro lado, la expresión "Lógico" tiene potencial semiótico respecto al argumento deductivo no proferido que sustenta la conclusión de Ignacio.

Análisis de la mediación semiótica de la profesora en el estudio de las conjeturas provenientes del problema

Para analizar el recuento de la profesora sobre las conjeturas producidas por los estudiantes y los comentarios que ella hace al respecto, se fragmentó su intervención. Para cada fragmento especificamos la intención que se vislumbra o que ella explicita, y también las acciones mediante las cuales gestiona sus intenciones.

La profesora comienza la sesión de análisis de conjeturas aludiendo a una norma social de su aula: las conjeturas, aun cuando no estén en el formato deseado o tengan errores, son valiosas. No dice explícitamente por qué lo son, pero en lo que sigue se ve que ella encontrará en cada conjetura formulada algún elemento merecedor del análisis que aportará algo para la comprensión, ya sea de la situación misma o de algún elemento teórico asociado.

Fragmento 1

La profesora ha organizado las conjeturas y va a examinar cada una de ellas. No dice qué criterio usó para la organización.

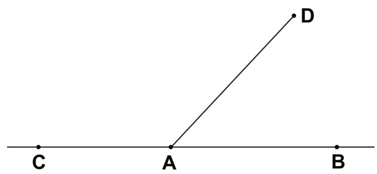
1. Profesora: [...] Los del Grupo C... ¿dónde están? Los del Grupo C me escribieron una cosa que descubrieron casi todos ustedes. Digo casi todos, porque hay un grupo del que no estoy completamente segura. Y es que el ejercicio, recuerden que teníamos dos rayos opuestos, otro rayo, y se preguntaba si podría encontrarse un punto E en el mismo semiplano en el cual estaba el rayo [*AD*], para que se cumpliera la condición. Y muchos, casi todos ustedes, contestaron lo que dice el Grupo C, por ejemplo: sí es posible siempre y cuando la medida del ángulo *BAD*, que es el ángulo dado, sea menor que noventa [Ha escrito en el tablero: $m\angle BAD < 90$], ¿sí? Bueno. Es lo único en que tal vez todos estábamos de acuerdo. [...]

Al solicitarle al Grupo C que se presente, la profesora está reconociendo a un grupo de personas identificables la autoría del aporte que analizará; destaca la afirmación que proponen (*signo matemático*) en relación a la meta por ella establecida: extraer el conocimiento matemático que subyace a la situación que se analiza. Inmediatamente, la profesora les recuerda a los estudiantes de qué se trata el problema cuyas conjeturas van a analizar, presentándoles una *síntesis* (13-III) de este. Acto seguido, al leer el escrito del Grupo C, la profesora *explicita el elemento teórico que este incluye* (3-I), al indicar bajo qué condiciones puede existir un ángulo complementario al dado. La profesora menciona que "todos los grupos concluyeron la misma relación" (16-III) proferida por el Grupo C: solo los ángulos agudos tienen complemento.

Fragmento 2

La profesora pasa ahora a examinar otra conjetura, y destaca lo que esta aportará al contexto matemático que está emergiendo.

1. Profesora: [...] El Grupo I... ¿dónde está el Grupo I? El Grupo I me escribe lo siguiente... Pongamos atención porque les voy a preguntar qué está diciendo ese grupo a ver si ustedes están de acuerdo conmigo. El Grupo I dice: Si tenemos el ángulo *BAD*... Voy a hacer la ilustración con eso pueden mirarla. Tenemos *A*, *B* y *C*, y el rayo *AD* [hace una figura en el tablero a la vez que habla].



Dicen: si tenemos el ángulo *BAD* y su medida es menos de noventa, lo mismo que había dicho el Grupo C, el número real correspondiente a la diferencia entre noventa y la medida... y la medida del ángulo, corresponde a la medida del ángulo complementario al ángulo *BAD*. [Repite sin interrupción lo que afirma el Grupo I.] Si tenemos el ángulo *BAD* y su medida es menos de noventa, el número real correspondiente a la diferencia entre noventa y la medida del ángulo corresponde a la medida del ángulo complementario al ángulo *BAD*.

Yo digo que lo que han establecido los del Grupo I es la definición de ángulos complementarios, ¿sí? Tengo un ángulo, tomo su medida, su medida es menos de noventa, entonces la medida del ángulo complementario es noventa menos *x*. Entonces eso fue lo único que lograron, en la forma como lo escribieron. [...]

A diferencia de lo que sucedió en el primer fragmento, la profesora ilustra lo que dice reproduciendo el signo (representación gráfica) que construyeron los estudiantes para analizar la situación; es decir, emplea el *recurso gráfico para favorecer la compren-*

sión (11-III) y *sintetizar* (13-III). Al leer la hipótesis de la conjetura que formulan los estudiantes del Grupo I (*signo pivote dado que la afirmación reconstruye una acción para encontrar el ángulo complementario*), la profesora recuerda que el Grupo C también había mencionado la necesidad de que el ángulo dado fuera agudo, haciendo explícita la relación entre lo logrado por los dos grupos.

Al presentar a los estudiantes la información que ella extrae de la conjetura formulada por el Grupo I, la profesora saca a la luz el *elemento del sistema teórico que están usando* (3-I): la definición de ángulos complementarios, para encontrar la medida del ángulo cuya existencia se quiere determinar. La relación que establece entre el signo que producen los estudiantes, en cuanto a la medida del ángulo, y la definición de ángulos complementarios pretende propiciar la evolución hacia el *signo matemático* asociado a esa definición.

Fragmento 3

La profesora pasa a analizar otra conjetura.

1. Profesora: [...] El Grupo F dice [leyendo]: Si el ángulo *A* y el ángulo *B* forman par lineal y la medida del ángulo *A* o la del ángulo *B* es menos de noventa, entonces existe un ángulo *C* en el mismo semiplano, tal que *A* y *C* son complementarios o *B* y *C* son complementarios.

   O sea, de nuevo, tenemos un ángulo, su medida es menos de noventa... pero ellos dicen: tenemos dos ángulos que forman par lineal, uno de ellos con medida menos de noventa, entonces existe otro ángulo complementario. Entonces, para mí, de nuevo, están diciendo la definición. Un poco menos fuerte que la otra porque dice existe el complementario, pero los otros por lo menos dicen: mire, busque un ángulo cuya medida es noventa menos *x*; estos no me dicen qué buscar. Pero además, ponen una condición para que exista el ángulo complementario. Y es que se forme un par lineal con otro ángulo... condición innecesaria, ¿sí? Entonces, en pocas palabras, la conjetura que establecen más o menos tiene que ver con la definición, pero es una definición errónea porque le ponen una condición que no se exige. [...]

Al parafrasear la conjetura (*signo pivote porque hacen alusión a la situación representada en Cabri*) del Grupo F, después de leerla, la profesora favorece la apropiación del discurso que se está desarrollando pues la expresa de manera general, *desprovista de nombres particulares* (2-I); con ello busca precisar para todos el enunciado que está considerando. Explicita la relación entre los aportes de los grupos I y F, destacando que el primero dice cómo encontrar el ángulo solicitado y el otro asegura la existencia de ese ángulo. Con ello muestra, aun cuando no de forma totalmente explícita, que los diferentes asuntos matemáticos, existencia y procedimiento, aportan a la solución del problema, y que cada uno enriquece el sentido de la situación matemática presente (21-V). Así mismo, la profesora impulsa la evolución de un *signo pivote* hacia el *signo matemático* configurado por la definición de ángulos complementarios (4-I), cuando califica de errónea la "definición" que impone la condición de ser par lineal a los ángulos para que sean complementarios.

Fragmento 4

La profesora escoge otra de las conjeturas formuladas para comentar las diferencias y semejanzas con las anteriores.

1. Profesora: [...] El Grupo H dice: si *AB* y *AC* son rayos opuestos, y *AD* otro rayo tal que la medida de [ángulo] *DAB* es menos de noventa... Hasta ahí vamos bien; se están estableciendo las condiciones. Miren que el problema era una pregunta: ¿existe o no? Y, todos nos dimos cuenta de que existe, pero con unas condiciones, no solamente las que usted dio [dirigiéndose al grupo F], sino una más. Entonces la están incluyendo en la hipótesis. Entonces, existe un punto *E* en el semiplano donde está *D*, tal que la suma de las medidas de los ángulos *DAB* y *CAE* es noventa [ha escrito en el tablero: $m\angle DAB + m\angle CAE = 90$]. La conjetura del Grupo H es: si *AB* y *AC* son rayos opuestos, y *AD* otro rayo tal que la medida de [ángulo] *DAB* es menos de noventa, entonces existe un punto *E* en el semiplano donde está *D*, tal que la suma de las medidas de los ángulos *DAB* y *CAE* es noventa.

   Esta conjetura establece la existencia de algo. En matemáticas, hay muchas ocasiones en donde vamos a estar interesados en saber si existe o no algo. Y habrá muchas ocasiones en las que vamos a poder decir: existe, pero no vamos a poder decir cómo encontrarlo. Eso es de las cosas terribles que a veces pasan en matemáticas. Pero resulta que en este caso, sí hay cómo encontrarlo. Entonces, en este caso, este grupo solo estableció una existencia, mas no estableció cómo encontrar ese punto ¿sí? [...]

La profesora relaciona el trabajo de los Grupos H y F al hacer referencia a las condiciones que el primer grupo establece para determinar la existencia de lo solicitado en el problema, y destacar que ellos en su conjetura (*signo matemático*) incluyen una condición que no mencionaron los del Grupo F, la existencia del rayo *AD*. También menciona que esas condiciones conforman la hipótesis de la conjetura, con lo cual destaca elementos que caracterizan una condicional (10-II). Finalmente, al mencionar que el problema está inmerso en una circunstancia propia de la construcción de la matemática: determinar la existencia de un objeto matemático, la profesora enfoca asuntos de un nivel metamatemático (21-V). Con ello, está sacando a la luz que los miembros de la clase se están preocupando por asuntos que son de interés para la comunidad matemática.

Fragmento 5

Por primera vez, el análisis de la conjetura propuesta por un grupo se hace teniendo en cuenta el proceso realizado por los estudiantes con la geometría dinámica. También, en este momento, la profesora hace explícito el objetivo que tuvo para la presentación de las conjeturas.

1.	Profesora:	[...] Vamos a mirar, ahora sí... el Grupo A, ¿en dónde está el grupo A? Conectamos, por favor, la calculadora que usaron. Mientras la conectan, miren: esta es la tarea que generalmente voy a realizar con estos problemas; voy a coger las conjeturas y las voy a organizar, para que ustedes vean pues... como un desarrollo de las ideas que están presentando. Bien, el Grupo A dice [leyendo]: si *AB* y *AC* son opuestos y sea el rayo *AD*, entonces existe un punto *E* en el semiplano en el cual está *D*, tal que la medida del ángulo *EAD* es noventa y *EAC* y *DAB* son complementarios. Voy a escribirla, ¿saben? [Escribe la conjetura: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos, entonces existe un punto *E* en el semiplano en el cual está *D* tal que $m\angle EAD = 90$ *y* $\angle EAC$ *y* $\angle DAB$ son complementarios]. Esta es la conjetura del Grupo A. Bueno, mi pregunta es: ¿qué construcción hicieron ustedes?

2. - 12. Profesora: [En los siguientes cinco minutos, Juan recuenta el proceso de construcción y de exploración apoyándose en la proyección de la figura construida en la calculadora]. Ya escucharon lo que ellos hicieron. Ellos construyeron el ángulo, tomaron la medida, encontraron la diferencia que necesitaban encontrar, y construyeron otro ángulo. Esta [señala lo que ha escrito en el tablero: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos, entonces existe un punto E en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ en el cual está D tal que m$\angle EAD = 90$ *y* $\angle EAC$ *y* $\angle DAB$ son complementarios] es la conjetura que ellos me reportan.

13. Profesora: [...] Mi pregunta es si la conjetura concuerda con la construcción que hacen. Bueno, vamos a ver. Si construyeron rayos opuestos, ¿cierto?... Y construyeron... Bueno, les faltó poner... ¡Ah, no! Me faltó fue a mí, ellos sí lo pusieron: sea el rayo *AD* [hace la corrección pertinente en el tablero], **entonces**... [recalca la voz] o sea que lo que viene antes de la palabra "entonces" es lo que ellos supuestamente construyeron, y lo que viene después de la palabra "entonces" es lo que resulta... ¿sí? Entonces, al haber construido estas dos cosas y esto [$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$] **entonces** [recalca la voz], encuentran E, tal que se cumple esto y se cumple esto [m$\angle EAD = 90$ *y* $\angle EAC$ *y* $\angle DAB$ son complementarios]. ¿Es correcta la conjetura con respecto a lo que ellos hicieron?

La profesora le solicita a Juan que *retome el trabajo con el artefacto* (6-II) con la intención de que relate la experiencia que vivieron para resolver el problema *propuesto e identifique lo construido y lo explorado* (7-II). Cuando el estudiante termina su relato, la profesora *provee una síntesis* (13-III) de este con la intención de establecer el foco de atención para todo el grupo. La profesora *compara parte del proceso de construcción y exploración con la conjetura* (8-II). El análisis que la profesora hace del formato característico de una afirmación condicional se centra en *destacar elementos fundamentales de esta* (10-II). La profesora ha escrito en el tablero la conjetura (*signo matemático)* presentada por el Grupo A. Sobre lo escrito señala las partes de la conjetura que están en el antecedente y las que están en el consecuente, como *recurso para favorecer la comprensión* (11-II) de lo que hay que hacer cuando se pregunta si la conjetura corresponde a la construcción. No termina el *análisis de la conjetura respecto al proceso realizado en la calculadora,* pues les asigna esa tarea a los estudiantes (8-II).

Fragmento 6

Juan reacciona a la pregunta de la profesora y provee lo que cree es la respuesta.

14. [Juan acepta que su conjetura no es correcta. Al respecto le explica a la profesora que le faltó mencionar dos condiciones en el antecedente: que el $\overrightarrow{AD}$ no puede ser subconjunto de la $\overleftrightarrow{BC}$ y que m$\angle CAD \neq$ m$\angle DAB$.

21. Profesora: Tan pronto Juan termina de exponer su idea, [la profesora se dirige a todo el grupo.] ¿Ustedes qué dicen? Vuelvo otra vez a preguntar: ¿concuerda la conjetura que ellos escribieron con la construcción que hicieron?

La insistencia de la profesora en que revisen la conjetura presentada por el grupo de Juan y determinen si realmente informa sobre lo realizado en Cabri, hace que Juan reexamine la formulación de su conjetura y encuentre las condiciones que cree deben incluirse en la hipótesis de esta. Las dos condiciones que da Juan modifican el signo original, su conjetura. La profesora hubiera podido aprovechar la oportunidad para analizar el importante aporte de Juan y favorecer la comprensión de la situación. Es decir, el potencial semiótico de la intervención de Juan habría podido *promover la evolución* (14-III) de la conjetura contrastando la condición de que el $\angle DAB$ sea agudo con la propuesta de Juan.

A pesar de que se dirige al grupo para pedir su opinión sobre lo que dijo Juan, la profesora no da tiempo a los estudiantes para analizar el asunto. Inmediatamente repite la pregunta sobre la correspondencia entre el proceso de construcción y la formulación de la conjetura. Es evidente que la profesora está concentrada en el proceso de análisis y no quiere desviarse de ello.

Fragmento 7

Hasta el momento, la profesora ha dirigido las preguntas a todo el grupo. En esta ocasión, les pide explícitamente a ciertos estudiantes que respondan su pregunta.

23. Profesora: ¿Alguien va a decir algo? ¿Ana? Aquí tenemos que decir todo lo que se nos ocurra. [Nancy está hablando en voz baja con el compañero del lado.] ¿Nancy? ¿Tú tienes algo para decir?

		[Nancy expresa no tener claro si Juan está haciendo una demostración y la profesora indica que él está solo reportando lo que hizo.]
30.	Profesora:	Mi pregunta es si la conjetura concuerda con las condiciones que ellos colocaron en la construcción, para llegar a la conclusión que reportan.
		[Henry destaca que en la conjetura formulada por el grupo de Juan falta incluir información. La profesora indica que ese asunto se analizará más adelante].
34.	Profesora:	Estoy preguntando primero por las condiciones. ¿Qué condiciones colocaron ellos en su construcción que tenían que cumplirse?
		[Antonio menciona una inconsistencia que él ve en la forma como el grupo escribe la conjetura. La profesora dice que aclarará eso una vez hayan analizado lo que ella está pidiendo].
38.	Profesora:	Ellos construyeron esto [señala en la proyección $\angle EAC$] y después... y después hablaron del ángulo recto y no sé qué. Pero además, ellos construyeron un ángulo agudo y aquí no lo dicen.
		[...]
40.	Profesora:	O sea, las condiciones no están correctas. Aquí hay que reportar todo lo que hicimos, ¿sí? ...
		[...]
45.	Profesora	[...] Entonces la pregunta es: ¿será que esta condición de complementarios [en la conjetura escrita en el tablero señala $\angle EAC$ y $\angle DAB$] la construyeron ellos y después miraron que se formaba un ángulo recto? O ¿simplemente construyeron estas cosas [lo que nombraron antes del entonces], y ahí se dieron cuenta que había un ángulo recto y demás?
		Yo creo que esta es parte de la hipótesis [la complementariedad de los ángulos], porque creo que ustedes construyeron ese ángulo [EAC] y... la tesis es... pues... entonces faltó esa condición.

Desde la intervención [13], la profesora claramente tiene una intención: enfocarse en la condicional que formulan los estudiantes del Grupo A, específicamente, en las condiciones que deben establecer en el antecedente de esta de acuerdo al proceso realizado con Cabri (8-II). Hay tres intervenciones: la de Nancy, la de Henry y la de

Antonio, en las que los estudiantes dan ideas poco pertinentes para lo que la profesora está solicitando. Con las intervenciones [30, 34], la profesora vuelve a precisar la situación que deben analizar. Como los estudiantes no proveen la información que ella pide, la profesora indica [38, 45] cómo deben actuar ante este tipo de solicitud (15-III), y destaca lo que faltaba en el antecedente de la conjetura de acuerdo con lo que hicieron en Cabri (8-II). A través de sus preguntas, solicita a los estudiantes que identifiquen claramente lo que construyeron (7-II), pues las propiedades incluidas en la conclusión de la conjetura no pueden ser resultado de las condiciones dadas en el antecedente de la misma. Para apoyar el éxito de su comunicación, la profesora apunta a los elementos correspondientes en la conjetura escrita en el tablero (11-II). Indica que construir ángulos complementarios es algo que debía haberse incluido.

Fragmento 8

La profesora retoma las ideas expuestas por Henry y Antonio, dado que considera que es el momento oportuno, pues ya realizó el análisis de la relación entre conjetura y proceso de construcción.

40.	Profesora:	[...] Ahora, en cuanto a lo que dice Henry, el problema preguntaba: ¿hay algún punto para que se cumpla esto? Y la respuesta es... ¿qué? [Pausa] ¿Hay uno?
41.	Ignacio:	Muchos
42.	Profesora:	¿Cuántos?
43.	Ignacio:	Infinitos porque se pueden construir muchos ángulos que cumplan eso... que al sumar los dos...
44.	Melisa:	Es que podríamos tomar varios puntos que estén sobre el rayo *AE*.
45.	Profesora:	Claro, todos los puntos que están sobre ese rayo, satisfacen... son muchos. Sí. ¿Eso era lo que querías saber? [Se dirige a Henry.] Pero el problema preguntaba por uno... y bueno, sí hay uno.

Al pasarle al grupo la responsabilidad de analizar la idea planteada por Henry a través de una pregunta [40], la profesora indaga para favorecer la evolución de la conjetura (14-III). La profesora parafrasea la respuesta de Melisa [45] como muestra de aprobación, destacando así que eso hace parte de uno de los signos matemáticos que está en construcción (16-III): la conjetura que responde al problema.

Fragmento 9

La profesora propone analizar la conjetura de otro grupo de alumnos.

45. Profesora: [...] Bueno, ahora, el Grupo G... dice: si tenemos los rayos opuestos y el ángulo *BAD* es agudo y *E* no pertenece al interior del ángulo... voy a escribirla... si tenemos los rayos opuestos y el ángulo *BAD* es agudo y *E* no pertenece al interior del ángulo *BAD*, tal que la medida del ángulo *DAE* es noventa, entonces, *BAD* y el ángulo *CAE* son complementarios [en el tablero quedó escrito: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos, $\angle BAD$ es agudo y $E \notin$ int $\angle BAD$ tal que m$\angle DAE$ = 90 entonces $\angle BAD$ y $\angle CAE$ son complementarios.] ¡Ah! Lástima que borré la anterior, pero ustedes más o menos se acuerdan. Bueno, vamos a mirar esta. Ponen la condición que todos habíamos descubierto casi inmediatamente. Pregunta: ¿por qué *E* no puede estar en el interior? ¿Y quién es *E*?

46. Germán: [En el tablero, al frente del grupo, dice que tenían que colocar el punto *E* de tal forma que $\angle DAE$ fuera recto, como se indica en su conjetura, pero no pudo explicar por qué el punto *E* no podía estar en el interior del $\angle BAD$.]

47. - 53. [Antonio, miembro del grupo de Germán, pasa al tablero. Explica que ellos construyeron el $\angle BAD$ a partir de la rotación del $\overrightarrow{AD}$ alrededor de *A* y, para seguir con su explicación, decide darle una medida específica al $\angle BAD$ (80°) y mostrar que necesita un rayo, en el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AD}$ en el que no está *B*, para que el ángulo formado sea complemento del $\angle BAD$, y que por ello, *E* no puede estar en el interior del $\angle BAD$.]

54. Profesora: Bueno, pero mi pregunta es, ¿quién es *E*? porque según ustedes, *E* está dado. ¿Quién es *E*?

55. Antonio: Era un punto que pertenecía al semiplano de la recta *CB* donde está *D* [Señala en la figura a medida que habla.]

56. Profesora: Pero, ¿cualquier punto? O sea, si yo escojo cualquier punto en este semiplano, cualquier punto en este semiplano [sobre la figura que Antonio acaba de usar, marca un punto en el interior de $\angle CAD$ y lo designa *E*], yo después... [mira el enunciado de la conjetura que están analizando]. ¡Ah! tal que la medida de este ángulo [$\angle EAD$] sea noventa... Entonces... mi pregunta es que si la medida de este ángulo [en el enunciado escrito, indica hacia $\angle EAD$] es noventa, ¿va a estar *E*... posiblemente esté en el interior del ángulo *DAB*?

57. Germán: [Continúa en el tablero] No, no, no.

58. Profesora: No. O sea que esta condición yo no la entendía... esta condición que ponen acá [enmarca en el enunciado la condición: $E \notin$ int $\angle BAD$]. Porque, ¿quién es E? O sea, ustedes están dando: dos rayos opuestos, otro rayo, el rayo AD. Y después van a exigir que eso suceda... que la medida del ángulo EAD sea noventa, y E entonces es... un punto...

59. Germán: En el semiplano donde está D

60. Profesora: Sí. Pero esto [$E \notin$ int $\angle BAD$], en ningún momento lo tuve que usar. Porque si construyo un ángulo de noventa para acá [sobre la proyección hace ademán de rotación del $\overrightarrow{AD}$ en sentido positivo], me va a quedar en el otro semiplano porque DAB es agudo. Pero si construyo el ángulo de noventa [sobre la proyección hace ademán de rotación de $\overrightarrow{AD}$ en sentido negativo].

[...]

62. Profesora: me estoy alejando del interior de ese ángulo... Entonces esa condición no la tengo clara... ¿sí? Lo interesante de esta conjetura del Grupo G es que me están diciendo cómo encontrar a E, ¿sí? Me están diciendo cómo encontrar a E.

La profesora lee la conjetura del Grupo G; esta es un *signo matemático* en el que no hacen mención explícita al uso del artefacto, ni se ve referencia alguna a él. Incita al análisis de las condiciones del antecedente de la conjetura relacionadas con *E a través de preguntas* (14-III). Ella tiene dos intenciones: la primera, hacerlos caer en cuenta de que el orden en que colocan las condiciones en el antecedente implica que E es un punto que ya existe, puesto que debe cumplir una propiedad: no estar en el interior del $\angle BAD$ [54]. En pocas palabras, quiere *abordar la imprecisión que presenta la conjetura* (4-III). La segunda, determinar por qué colocan la condición respecto a la posición del punto E [56]. Con la ilustración que hace del movimiento de un rayo para construir un ángulo recto [60], muestra que de ninguna forma deja de darse esa condición. Es decir, trata de mostrar que incluir esa condición *se constituye en una imprecisión matemática* (4-III), pues es innecesaria debido a la cuarta condición que ponen en el antecedente: $m\angle EAD = 90$. El *ademán que hace con la mano sobre la proyección* en el tablero tiene como propósito favorecer la comprensión de lo inútil que es poner esa condición en el enunciado de la conjetura (11-III).

Fragmento 10

En lo que sigue, la profesora compara los resultados presentados por los grupos A, D y G.

64. Profesora: Porque, ¿qué era lo que yo quería? Estos dos ángulos, voy a llamarlos 1 y 2, complementarios [sobre la figura proyectada nombra con 1 a $\angle BAD$ y con 2 a $\angle EAC$]. Y la pregunta era si había una forma de lograr ángulos complementarios.

El Grupo A lo que me dijo es: pongo unas condiciones, rayos opuestos, otro rayo, y **entonces** existe. Tienen los elementos [Se refiere a la condición m$\angle EAD = 90$], pero están mal ubicados, digámoslo así. [La conjetura del Grupo A es: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos, entonces existe un punto E en el semiplano en el cual está D tal que m$\angle EAD = 90$, y $\angle EAC$ y $\angle DAB$ son complementarios].

El Grupo G sí me dice: mire, si quieren encontrar el punto E [sobre la figura proyectada, recorre con un dedo los dos rayos que forman el $\angle DAE$], necesitan aquí un ángulo de noventa.

El Grupo D, lo que tratan de decirme, un poco mal escrito, porque también me hablan del ángulo CAE antes de construirlo, es: otra forma de encontrarlo es construir, a partir de este rayo AC, un ángulo cuya medida es el complemento [sobre la figura proyectada, usando un marcador, simula la rotación de $\overrightarrow{AC}$ sobre A en sentido positivo hasta que coincide con $\overrightarrow{AE}$], y entonces ahí encontrarán a E.

Son dos formas de hacerlo, ¿sí? Que muchos de ustedes tal vez lo descubrieron. Entonces, el Grupo D no me escribe una conjetura. Fíjense que es distinto de otro grupo que dice que existe el punto, pero no me dice cómo encontrarlo. El Grupo D dice cómo encontrarlo, pero no dice: por lo tanto existe.

El Grupo G es el que más se acercó. Puso las condiciones, la condición que teníamos que añadir y **si**... –oigan porque esto es muy importante– y **si** hay un ángulo DAE con medida noventa, **entonces** logramos lo que usted quiere: dos ángulos complementarios. [...]

La profesora *sintetiza el resultado* del Grupo A, parafraseando la conjetura (13-III) y *destacando*, a la vez, *las imprecisiones matemáticas* que se presentan (4-III). La conjetura del Grupo G, la *sintetiza* para que recuerden de qué se trata (13-III), y para enfatizar la condición que quiere destacar de esta, sobre la proyección de la figura recorre con el dedo los rayos que conforman el ángulo recto. Con ello *enriquece el signo para favorecer la comprensión* (11-III). Como los estudiantes del Grupo D no escribieron una conjetura, la profesora describe lo que ellos reportan como su proceso de construcción y exploración, *destacando que cometen la misma imprecisión* que acaban de analizar (Fragmento 9) respecto a la conjetura del Grupo G, pues hablan del punto *E* sin haberlo creado antes (4-III).

En lo que sigue, la profesora destaca que hay dos formas para llegar a concluir la existencia del punto *E* y que una de estas debe ser una condición del antecedente de la conjetura: construir una perpendicular al $\overrightarrow{AD}$, o directamente el ángulo complementario al $\angle BAD$ solicitado. Es decir, *extrae de los signos de los estudiantes un elemento que debe ser parte del signo matemático al que se debe llegar* como resultado de la exploración de la situación (16-III); la conjetura debe incluir la condición $m\angle DAE = 90$.

Con el comentario "Fíjense que es distinto de otro grupo que dice que existe el punto, pero no me dice cómo encontrarlo. El Grupo D dice cómo encontrarlo, pero no dice: por lo tanto existe", la profesora muestra dos intenciones posibles detrás de un análisis matemático: la existencia y la determinación de un objeto. Esto es un *asunto de nivel metamatemático* relacionado con lo que ya había expresado en los Fragmentos 3 y 4 (21-V).

Fragmento 11

En seguida, la profesora transforma la conjetura del Grupo G y analiza las demás condiciones que se incluyen en la hipótesis de la conjetura transformada.

64. Profesora: [...] La gran pregunta es: ¿sí ahí habrá un ángulo de noventa? ¿El ángulo *EAD* existe? ¿Cuya medida sea noventa? Porque estas son las condiciones que ponen.

Entonces vuelvo al Grupo G. Entonces quito esto [de la formulación que hay en el tablero borra la frase: $E \notin$ int $\angle BAD$], si *AB* y *AC* son rayos opuestos, y *BAD* es agudo y, aquí sería... y existe un rayo tal que la medida del ángulo *DAE* es noventa, **entonces** los ángulos son complementarios. [La nueva formulación de la conjetura es: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\angle BAD$ es agudo y si existe un rayo tal que $m\angle DAE = 90$ entonces $\angle BAD$ y $\angle CAE$ son complementarios.]

Pero, todo esto depende. *AB* y *AC* opuestos, se los di. *BAD*, pues...

65.	Germán:	Está dado.
66.	Profesora:	Sí, digamos que va a estar dado. Pero, ¿cómo sé yo que esto [en la formulación reescrita recientemente, indica la alusión a la existencia de $\angle DAE$ recto] sucede? Porque si no sucede, el problema no tiene solución. [Pausa.] Porque lo que me está pidiendo el Grupo G, lo que nos está pidiendo el Grupo G es, precisamente... hacer ese ángulo, y entonces todos los puntos que están en ese rayo van a cumplir la condición, para que los ángulos sean complementarios. ¿Existe o no existe?
67. - 73.		[María asegura que existe el ángulo recto sin dar justificación. La profesora le aclara a Ana que quieren asegurar la existencia de un ángulo recto].
74.	Profesora:	[...] Entonces, la gran pregunta es: ¿es aceptable esto como hipótesis? ¿Puedo dar rayos opuestos? ¿Puedo construir un ángulo agudo? ¿Y sí puedo yo construir un ángulo para que tenga esto? [Pausa]

El análisis comienza cuestionando la existencia del $\angle DAE$ de medida noventa, condición requerida por la hipótesis de la conjetura (signo matemático). Es decir, *indaga sobre una condición de la conjetura para promover su evolución* (14-III). Sin esperar respuesta a sus preguntas, la profesora *modifica la conjetura* (4-III), quitando la condición respecto a la inclusión del punto E en el interior del $\angle BAD$, producto de la discusión del Fragmento 9. Inmediatamente, comienza un análisis de la validez de todas las condiciones mencionadas en la conjetura modificada como forma de *realizar el control teórico* (12-III). El proceso que ha iniciado la profesora se *constituye en un modelo de actuación matemática* (15-III) respecto al análisis que se debe llevar a cabo para asegurar que una afirmación obedece a la teoría en la que se está trabajando. Al destacar que la invalidez de la existencia de un ángulo recto afecta la posible veracidad de la conjetura propuesta [66] dentro del sistema teórico que se está conformando, la profesora hace el *control del universo teórico* (12-III) pero en torno a lo que podría ser un teorema en ese sistema teórico. Finaliza este fragmento *cuestionando sobre el sustento teórico* que tiene cada parte de la hipótesis (14-III).

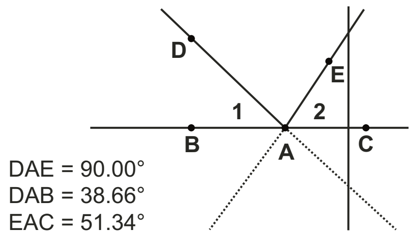
Fragmento 12

En lo que sigue, la profesora analiza la concordancia entre el proceso de construcción y la conjetura, utilizando la figura proyectada obtenida con Cabri.

76. Profesora: ¡Ah! [Dirigiéndose a Germán y a Antonio] ¿Ustedes qué hicieron? [Se refiere a la construcción con Cabri].

77. [Germán indica que construyó dos rayos opuestos, el otro rayo y luego el ángulo de noventa. La profesora duda de que ese haya sido el proceso realizado; cree que tal vez construyeron inicialmente el ángulo complementario].

86. Profesora: [Usa la función "Desocultar". La figura que se tiene es la siguiente]



[...]

88. Profesora: Ustedes construyeron este ángulo [señala el $\angle BAD$], le sacaron la medida, 38.66 [lee en la calculadora]. ¿Y después, qué hicieron?

89. Germán: Construimos el ángulo de noventa.

90. Profesora: ¿Cómo? [Pausa] Pregunta: Primer paso, construyen el ángulo *BAD*, agudo, ¿sí? En realidad este es el segundo paso. El primero es... los rayos opuestos. [Ha escrito en el tablero los dos pasos mencionados]

[...]

92. Profesora: Tomaron la medida.

93. Germán: Listo, pero como nosotros queríamos asignar esta característica especial [señala en la formulación del tablero], y teníamos conocimientos de antes: que cuando uno tiene ángulos rectos, generalmente las rectas que los conforman... las rectas en las cuales están contenidos los rayos que forman al ángulo, son perpendiculares... entonces, de ahí partimos. O sea, para darle la característica especial de que ese ángulo fuera de noventa grados trazamos rectas perpendiculares.

94. Profesora: Entonces, ustedes hicieron esto. Aquí está el ángulo *BAD* y ¿ustedes construyeron una perpendicular acá [Dibuja lo correspondiente a medida que habla]. Si eso es cierto, están reportándolo aquí. [Señala en la formulación escrita en el tablero].

Con el propósito de continuar el análisis de la hipótesis de la conjetura modificada, la profesora *solicita a los estudiantes relatar el proceso de construcción* (6-II). *Usa como recurso la imagen de la figura construida* (11-III) y desoculta los elementos para tener información que le ayude a determinar el orden en que hicieron la construcción. En la imagen proyectada se observa el esquema de construcción que posiblemente usaron para construir el $\overrightarrow{AD}$ (primero la recta, luego el rayo, y finalmente ocultan la recta) o para construir el $\overrightarrow{AE}$ perpendicular al $\overrightarrow{AD}$ (primero el $\overrightarrow{AD}$, luego la $\overleftrightarrow{AD}$, luego la $\overleftrightarrow{AE}$ perpendicular a la $\overleftrightarrow{AD}$, los rayos en cada recta y finalmente ocultar las rectas). Se habría podido aprovechar esa imagen para indagar sobre el esquema usado y a partir de ello sobre los conceptos involucrados. Con el comentario final [94], la profesora *aprueba la correspondencia que se evidencia entre el trabajo realizado con Cabri y la conjetura establecida* (8-II).

Fragmento 13

La profesora retoma la determinación de la validez de la existencia del ángulo recto.

98. Profesora: ¿Cuál es mi pregunta? ¿Qué es lo que estoy preguntando yo? [Pausa.]

99. Estudiante: Que si existe ese ángulo de noventa.

100. Profesora: Sí. Pero, fíjense que lo que estoy preguntando yo, es: dada una recta y un punto de la recta [Sobre la figura proyectada ha trazado $\overleftrightarrow{AD}$ y ha destacado el punto *A*], ¿existe una perpendicular por ese punto? Eso es lo que estoy preguntando. ¿Será cierto? Ellos usaron la herramienta.

Pero desde la teoría, ¿dada una recta, existe una perpendicular a ella por un punto de la recta? Desde la teoría. ¿Será o no será un teorema? [Escribe en el tablero a la vez que verbaliza lo siguiente]. Dada una recta *m* y un punto *A* de la recta, entonces existe una recta *l*, tal que *l* es perpendicular a *m*.

Si eso es cierto, entonces podemos aceptar el teorema de ellos [Germán y Antonio].

105.		[Germán indica que no usaron el término “rayos perpendiculares” porque no se había definido ese concepto en clase. La profesora le recuerda que sí se contaba con la definición de rectas perpendiculares y que en esencia es lo mismo. Termina dando la condición que se requiere para que dos rayos sean perpendiculares].
112.	Germán:	Desde ese punto de vista, el teorema que acaba de mencionar la profesora se cumpliría.
113.	Profesora:	¿Sí?
114.	Germán:	Sí. Creando... tomando el punto que pertenece a la recta *l* y... asignándole la medida de noventa grados, pues para que... [ríe] se cumpla la condición de que...
115.	Profesora:	O sea, construyendo con uno de los dos rayos un ángulo de noventa. ¿Y eso por qué lo podemos hacer? ¿Qué me permite, Ignacio, desde la teoría, hacer eso?
116.	Ignacio:	Postulado de la adición... no... Postulado de la construcción de ángulos.
117.	Profesora:	Postulado de la construcción de ángulos. Con el Postulado de la construcción de ángulos se demuestra este teorema en un dos por tres, ¿sí? Y... ya entonces... aquí [señala la formulación escrita en el tablero] ya no diríamos, “existe un rayo”, sino, “y sea el rayo *AE* tal que la medida del ángulo *DAE* es noventa”. Ya podría cambiar esto [en el tablero, modifica la conjetura de Germán. Ahora la formulación es: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo, y sea $\overrightarrow{AE}$ tal que $m\angle EAD = 90$ entonces $\angle DAB$ es complementario con $\angle EAC$.] porque ya este teorema me permite estar segura. Lo único que nos falta es averiguar si realmente *E* está en este semiplano, donde está *D*, y después demostrar que estos [señala $\angle DAB$ y $\angle EAC$] realmente son complementarios. Entonces esto lo dejamos de tarea: completar el teorema del Grupo G. Pero lo importante es que nos dio lugar a un teorema bastante importante de nuestro sistema axiomático: la existencia de una recta perpendicular a una recta dada, por un punto dado de la recta. Bien, gracias Germán.

> [Leyendo del tablero y revisando lo que está escrito] Entonces: si *AB* y *AC* son rayos opuestos y *DAB* es agudo. Sea el rayo *AE*, ¿en dónde? en el semiplano... ¿no? Y, en realidad... bueno, rayo... semirrecta, tocaría decir, ¿cierto? semirrecta en el semiplano determinado por... pero ahí sí me toca ver si esto es cierto... donde está *D* tal que se tiene esa medida [$m\angle EAD = 90$], entonces los ángulos son complementarios.
>
> Porque esto [la complementariedad de los ángulos] era lo que yo quería de tesis, probar que los ángulos son complementarios.

Volviendo a la cuestión en que se ha centrado desde el Fragmento 11, existencia del $\angle EAD$ recto, la profesora decide reformular su solicitud en otros términos sugiriendo con ello que el enunciado se puede convertir en una afirmación matemática que usa términos especializados [100]. Refiriéndose ahora a la existencia de una recta perpendicular a otra dada por un punto escogido en esta última, la profesora destaca que el hecho de haber usado la herramienta *Perpendicular* no significa que *en la teoría sea válida su existencia* (12-III). Cuando Germán provee una explicación de por qué existe la recta perpendicular, la cual no es muy clara [114], la profesora parafrasea ese aporte (signo matemático) con la intención de propiciar mayor comprensión entre los demás miembros de la clase. Al preguntarle a Ignacio, cuál elemento teórico sustenta lo que Germán propone, la profesora *ejerce el control teórico* (12-III), concluyendo así el proceso que comenzó al cuestionar la existencia de la recta perpendicular. Acto seguido, la profesora *modifica, de nuevo, la conjetura propuesta* por el Grupo G, para que el enunciado incluya el conocimiento matemático que ya se tiene (4-III). Transformar la frase "si existe un rayo tal que $m\angle DAE = 90$" por "sea $\overrightarrow{AE}$ tal que $m\angle EAD = 90$", a la vez justificando su actuación "porque ya este teorema me permite estar segura" [117] es insinuar un asunto de nivel diferente al del contenido geométrico que se está tratando, un asunto relativo a lo que es un teorema en un sistema teórico pues destaca que las condiciones dadas en la hipótesis de este deben ser ya verdaderas en el sistema teórico con el que se cuenta.

Por otra parte, la profesora le *comunica a los estudiantes que la formulación del "teorema del Grupo G" aún adolece de imprecisiones* (4-IV), pues falta asegurar que *E* está en el semiplano donde se encuentra *D*. A pesar de que originalmente deja como tarea a los estudiantes eliminar la imprecisión que menciona, antes de pasar al análisis de otra conjetura, la profesora retoma ese asunto y al proponer la condición que falta, ella misma *corrige las imprecisiones teóricas al cambiar la palabra "rayo AE" por la "semirrecta AE"* (4-IV), dado que esta debe ser subconjunto de un semiplano. Finalmente, al *usar el formato si-entonces de la condicional* (9-II) para volver a enunciar la conjetura formulada, incluyendo la condición requerida, y enfatizar qué es lo que se debe demostrar verdadero, la profesora le está apuntando a lo que representa una proposición condicional en un sistema teórico.

Cabe notar que la profesora, al referirse al "teorema del Grupo G", menciona que deben incluir en la afirmación la relación que debe tenerse para el punto E y decir que falta demostrar que la conclusión es verdadera, está usando el término "teorema" en el sentido de Mariotti (un enunciado acorde a un sistema teórico de referencia, el sistema mismo y su demostración); con ello, implícitamente está haciendo alusión al asunto metamatemático correspondiente. Finalmente, la profesora *destaca el aporte al sistema teórico* (18-IV) que el análisis de la conjetura del Grupo G proveyó: el teorema de la existencia de la recta perpendicular a una dada por un punto dado de esta.

Fragmento 14

A continuación, la profesora analiza las conjeturas de los dos grupos que faltan (B y E). En ese proceso va a destacar que ellos proponen una conjetura bien diferente a las que ya se han mencionado, pues la conclusión de esta no es la complementariedad de los ángulos sino la perpendicularidad de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.

117.	Profesora:	Bueno, pero no he hablado del Grupo B ni del Grupo E. El Grupo B dice [leyendo]: dados dos ángulos complementarios, coplanares, que comparten el vértice, y que uno de sus lados es rayo opuesto del lado del otro, entonces el ángulo que forman los otros dos rayos, es recto. ¿Qué relación tiene esta conjetura del Grupo B con la conjetura del Grupo G? Voy a leerla otra vez: dados dos ángulos complementarios coplanares, que comparten el vértice, y tal que dos pares de lados son rayos opuestos, entonces el ángulo que forman los otros dos rayos, es recto. [Dirige la mirada a María].
118.	María:	Básicamente hicimos el mismo procedimiento que hizo Jorge [Grupo A]. Trazamos rayos opuestos, trazamos un ángulo agudo, por el teorema de... dos ángulos complementarios son agudos.
119.	Profesora:	Sí.

120.	María:	Luego, nos obviamos esa parte y trazamos el segundo ángulo, el complementario. No pusimos los puntos.
		[...]
123.	María:	Exactamente. Asumimos que eran complementarios. Asumimos no, construimos los dos ángulos complementarios. Y luego, medimos el ángulo *EAD* y nos dio como resultado, la medida noventa.
124.	Profesora:	O sea que... su conjetura dice: dados dos ángulos complementarios coplanares, comparten el vértice, y uno de los lados es rayo opuesto del lado del otro, entonces forman, los otros dos rayos... el ángulo que forman los otros dos rayos es recto. Lo que tú me estás reportando es válido. Les faltó ¿qué?
125.	María:	Nos faltó decir que *E* está en el semiplano determinado por la recta *AB*, donde está *D*.
126.	Profesora:	[...] Sí, ustedes tendrían que decir que están en el mismo semiplano porque ustedes dan los dos ángulos y luego encuentran la medida de este [m$\angle EAD$ = 90]. ¿Cómo difiere con respecto a esto [la conjetura del Grupo G]? ¿Tiene la hipótesis de ellos, rayos opuestos? Sí. ¿Tienen un ángulo agudo? Sí. Tienen **dos** [resalta la voz] ángulos agudos porque ellos están exigiendo que los ángulos sean complementarios. Esto [la complementariedad de los ángulos] se convierte en parte de la hipótesis. Y esto [$\angle EAD$ es recto] es la tesis. O sea que es casi el recíproco de lo que yo quería, porque yo preguntaba cuándo son complementarios. Pero ellos reportaron una conjetura que concuerda con lo que hicieron. Y ahí, pues tocaría también demostrarlo. Es otro teorema. Si los construyo para que sean complementarios, entonces este tiene que ser recto. Que se parece un poco a lo que quería el Grupo A. Bueno, y el Grupo D dicen [leyendo]: Si se tienen *AB* y *AC* opuestos y *AD* otro rayo tal que la medida del ángulo *BAD* es agudo, y el ángulo *CAE*, en el mismo semiplano en el cual está *D*, tal que sean complementarios, entonces es recto. Lo mismo que el Grupo B. Habría que ver si están reportando su construcción. Pero este problema, como estaba formulado, quería que la tesis de la conjetura fuera: ángulos complementarios, ¿sí?

127.	Ignacio:	[Pasa al tablero y proyecta la figura que tiene en la pantalla de su calculadora. Señala sobre ella a medida que va hablando]. Nosotros construimos un ángulo, y con la herramienta calcular construimos el otro ángulo [para el] que la medida fuera noventa menos el ángulo inicial. Entonces nos dimos cuenta de que este ángulo era recto.

El recurso que usa la profesora para el análisis de las dos conjeturas es la comparación con la conjetura-teorema que ya se tiene como consecuencia del análisis de las demás conjeturas. Sin solicitar el relato de lo que hicieron los miembros del Grupo B con Cabri, tal vez debido a todo el proceso realizado con anterioridad, María e Ignacio proceden a hacerlo *motu proprio* [118-123 y 127]. La profesora indica que durante ese relato ha *identificado la concordancia entre lo construido y la conclusión con lo reportado en la conjetura* (7-II) y, a la vez, *realizó el control teórico* (12-III) en cuanto a la validez de las condiciones que reportan haber construido al decir [124] "Lo que tú me están reportando es válido". En seguida, *destaca que hay una imprecisión* (5-IV) en la conjetura sin indicar cuál es, cosa que no necesita María pues ella inmediatamente da la respuesta correcta [125]. El relato que hace María no se corresponde con lo que su grupo hizo. Por lo tanto, se concluye que el signo de María evolucionó tal vez por el proceso de mediación ya realizado por la profesora. María reconoce el dato que le hace falta incluir en su hipótesis. Enmascaró el desarrollo real que tuvieron en el grupo, situación que puede ser problemática para la acción de mediación del profesor, porque como no reportan los significados reales que tienen, no hay forma de que el profesor pueda ayudar a que se modifiquen.

La profesora comienza en ese momento el análisis comparando las condiciones expuestas en la hipótesis y tesis de las dos conjeturas, un recurso con el que pretende apoyar la comprensión de la diferencia entre las dos condicionales. Al indicar que se intercambia la tesis de la conjetura-teorema ya establecido con una de las condiciones de la hipótesis de esta, *destaca los elementos fundamentales de la condicional* (10-II). En torno a la frase "O sea que es casi el recíproco de lo que yo quería, porque yo preguntaba cuándo son complementarios" podría haberse hecho un análisis sobre lo que quiere decir cuasi recíproco de un enunciado condicional. Cataloga a la conjetura del Grupo B como un teorema que hay que demostrar, indicando con ello que aprueba que tanto el enunciado está reportando la dependencia evidenciada en Cabri como que este también reporta un resultado que puede ser demostrado en el sistema teórico que tienen a su disposición. Finalmente, destaca que los estudiantes del Grupo E sí formularon una conjetura en la que se *indican las propiedades encontradas y las construidas* (7-II).

Fragmento 15

Terminado el proceso de análisis de las conjeturas, la profesora expone una forma en que habría podido explorarse la situación y pregunta si alguno de los estudiantes procedió de esa forma.

128. Profesora: Bueno, mi pregunta es si a ninguno de ustedes se les ocurrió, simplemente, poner un punto E, en cualquier parte, construir el rayo AE, y mover ese rayo hasta que este ángulo [$\angle EAC$] fuera complementario con este [$\angle BAD$]. E estaba libre, construir el rayo, y moverlo hasta que diera complementario. Porque todos me reportan haber construido aquí el complemento, pero nadie me reporta haber arrastrado hasta... porque como la pregunta decía: ¿existe? Pues lo primero que uno se pregunta es si existe. Entonces yo haría eso, inicialmente, pues para estar segura de que existe. Porque si no existe, ¿para qué me pongo en más problemas? Entonces, parece que ninguno hizo eso con el arrastre, ¿no?

Con su intervención, la profesora *provee un relato de actuación matemática* (15-III). Indica que antes de determinar qué condiciones garantizan la existencia de un ángulo complementario al dado, cuando se tienen ángulos par lineal, usaría el potencial de Cabri para realizar el proceso de exploración con el fin de determinar esa existencia.

Capítulo 3. Resultados del estudio

La investigación que proporcionó los elementos para este capítulo estuvo guiada por dos objetivos: el primero, analizar la actividad de producción de conjeturas en la que se comprometen los estudiantes cuando resuelven problemas, así como su participación en la socialización de las mismas. El segundo, analizar el papel del profesor en la gestión de la discusión en torno a las conjeturas de los estudiantes, realizada con miras a que emerjan de ellas los elementos teóricos que subyacen a los problemas para incorporarlos al sistema teórico. Los resultados del estudio permiten confirmar que el compuesto *problemas-conjeturas-sistema teórico* sí es un organizador del currículo implementado y ratificar la importancia del papel de las conjeturas. A continuación, se destacan algunos resultados de la investigación.

Relación entre esquemas de utilización y signos personales

Describir, por una parte, los esquemas de utilización de Cabri, inferidos del uso del artefacto para resolver los tres problemas propuestos y, por otra, los signos personales producidos durante la resolución, son dos de nuestros intereses investigativos. Por ello, en este apartado se presentan, mediante tablas: (i) una lista de los esquemas de utilización identificados, de la lista completa que teníamos (ver Anexo 1) –colocando entre paréntesis la frecuencia de ocurrencia de cada uno-; (ii) un conteo del número de veces que los estudiantes produjeron signos personales (del artefacto, pivote y matemáticos) y, (iii) una caracterización general del tipo de signos producidos en cada caso. Producto del análisis realizado, el grupo investigador se dio cuenta de que existe una relación entre tales esquemas de utilización y los signos producidos. En ese sentido, se muestra, en las mismas tablas, los signos asociados a los esquemas identificados. Cabe precisar que en estas tablas se exponen todos los esquemas y signos identificados en el estudio original y se resalta en negrilla aquellos esquemas que se evidenciaron en el ejemplo analizado en este capítulo.

<table>
<tr><th>Esquemas de construcción</th><th colspan="2">Signos personales asociados a los esquemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">C1 (2), C4 (4), C5(2), C7 (3), C8 (1), C9 (2), C10 (1), C11 (1), C14 (2), C15 (1), C17 (1), C18 (3), C19 (3), C20 (2), C21 (1)</td><td>Signo del artefacto (1)</td><td rowspan="3">Figuras hechas en Cabri</td></tr>
<tr><td>Signo pivote (3)</td></tr>
<tr><td>Signo matemático (12)</td></tr>
</table>

Frecuencia de ocurrencia de esquemas de construcción y signos personales asociados

En general, se puede afirmar que se presentaron la mayoría de los esquemas de utilización para la construcción de recta, rayo, bisectriz, ángulos complementarios y mediatriz, que se habían previsto.

Los signos personales producidos por los estudiantes al hacer las construcciones son precisamente las figuras geométricas con las que modelan el problema. El potencial semiótico de Cabri, que está inmerso en el proceso de construcción de las figuras, puede ser aprovechado por un profesor para discutir con los estudiantes las definiciones de los objetos geométricos involucrados.

Aunque podría haberse previsto que los signos asociados a los esquemas de utilización de Cabri para la construcción iban a ser del artefacto o pivote, en su mayoría los signos producidos por los estudiantes fueron tipificados como matemáticos (12 signos matemáticos versus 4 signos de otro tipo –del artefacto o pivote). Se cree que esto se debe a la manera como se utiliza Cabri en la clase de geometría, pues se tiene como norma que debe poder justificarse cada paso de la construcción de cualquier representación que se haga en el programa. Entonces, este proceso está influido por el sistema teórico que se tiene a disposición. Así, por ejemplo, para representar rayos opuestos, la mayoría de los estudiantes parten de una recta, con lo cual garantizan la colinealidad, aspecto fundamental de la definición de rayos opuestos.

Solo un signo fue tipificado como del artefacto, dado que los estudiantes querían que el programa Cabri "reconociera" rayos opuestos, así como reconoce rectas o semirrectas. Por eso no les bastó con representar una recta y tres puntos *A, B, C* con *B* entre *A* y *C* para representar los rayos *BA* y *BC,* sino que construyeron dichos rayos sobre la recta, posiblemente con la expectativa de que visualmente los rayos quedaran más demarcados, o que al acercar el cursor a la figura apareciera un letrero haciendo mención a los rayos. Como las acciones de los estudiantes estaban dirigidas al funcionamiento de Cabri, se tipifica este signo como del artefacto.

Dos signos fueron tipificados como pivote. Por ejemplo, para el Problema 1, que pide encontrar la relación de las bisectrices de dos ángulos que forman un par lineal, cuando los estudiantes construyen las bisectrices, en su representación, dejan la recta bisectriz que genera Cabri e intentan ocultar la semirrecta externa al ángulo que se biseca para que quede el rayo bisectriz. Nuestra tipificación obedece a que el signo refleja la experiencia de los estudiantes con el artefacto, pero también el conocimiento matemático que tienen de la definición de bisectriz. El signo producido no conduce a los estudiantes a modificar su definición de bisectriz, sino a "olvidarse" de la semirrecta externa al ángulo, aunque no la oculten.

<table>
<tr><th>Esquemas de arrastre para explorar</th><th colspan="2">Signos personales asociados a los esquemas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">AETO (2), AETP (1), AETOM (1), AEXO (2), AECO (1), DEC(1), RE(1)</td><td>Signo del artefacto (2)</td><td rowspan="3">Enunciados de índole geométrico relativos a las conjeturas</td></tr>
<tr><td>Signo pivote (4)</td></tr>
<tr><td>Signo matemático (0)</td></tr>
</table>

Frecuencia de ocurrencia de esquemas de arrastre para explorar y signos personales

Los estudiantes pusieron en juego los esquemas de arrastre para explorar haciendo dos tipos de barrido: aquellos en donde este es más o menos completo, o aquellos en los que se ubican los objetos de la construcción en posiciones extremas. No se observó un tipo de arrastre en el que los estudiantes ubicaran los objetos en posiciones especiales, distintas a las extremas.

A medida que los estudiantes hacían la exploración por arrastre, formulaban algunos enunciados de índole geométrica relativos a las conjeturas. De ellos, dos fueron considerados como signos del artefacto y cuatro como signos pivote. Los signos del artefacto asociados al problema de las bisectrices mencionado anteriormente "entonces, no debe estar en ningún lado, pa' donde quede" y "esta es la posición máxima" son expresiones referidas a lo que están observando cuando arrastran, sin hacer una reflexión sobre las propiedades matemáticas subyacentes.

Cuatro signos fueron considerados como pivote. Para ejemplificar uno de tales signos, vale recordar, en el Problema 2, que fue el analizado en este capítulo, la construcción del $\angle EAC$ propuesta por Nancy y realizada por Ignacio. En ella, para la construcción del ángulo complementario al $\angle BAD$, toman la medida de este último, construyen un rayo sobre la recta AC, calculan la diferencia entre noventa y la medida del $\angle BAD$. Ignacio cree que puede utilizar un procedimiento análogo al que se utiliza para construir un segmento congruente a otro, es decir, hacer uso de una herramienta similar a la transferencia de medidas. La mención a la "transferencia de medidas[5]", parece ser un signo pivote, por cuanto se refiere a una herramienta del programa que quizá se asocia a un elemento del sistema teórico (para este caso, al Postulado de la construcción de ángulo[6]). En este caso, es clara la relación de la herramienta del artefacto utilizada para hacerla construcción con elementos del sistema teórico, i.e. Postulado de la construcción de ángulo. No se encuentran signos *matemáticos* asociados con el arrastre exploratorio, quizá porque consideraban muy prematuro aventurarse a formular alguna conjetura.

Esquemas de arrastre para verificar	**Signos personales asociados a los esquemas**	
AVCXMO (1), AVCEMO (1), AVJTO (1), AVJTP (1), AVJXOM (3), AVJEOM (1), AVJXPM (1), AVJTPM (1), AVJTOM (2), AVCTP(1)	Signo del artefacto (4)	Enunciados de índole geométrico relativos a las conjeturas
	Signo pivote (4)	
	Signo matemático (2)	

Frecuencia de ocurrencia de esquemas de arrastre para verificar y signos personales

A partir de una primera aproximación a la solución de los problemas, lograda con el arrastre exploratorio, se identifican esquemas de arrastre cuya intención se centra en corroborar una idea que los estudiantes tienen en mente, más que en detectar

5 Herramienta de Cabri que permite localizar un punto a una distancia dada de otro.

6 Postulado Construcción de ángulos: sea el $\overrightarrow{AB}$, un rayo de la arista de un semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$, con $P \in H$, tal que $m\angle PAB = r$.

propiedades. Se denomina a estos esquemas “arrastre para verificar”, pues con ellos los estudiantes buscan revisar alguna construcción hecha o si lo que sospechan es la conjetura que resuelve el problema. Con este arrastre, algunos grupos se dan cuenta de que han anticipado una solución incorrecta y cambian de idea. Los esquemas de arrastre para verificar incluyen un barrido más o menos completo, localización de objetos en posiciones especiales y ubicación de objetos en posiciones extremas. Algunos estudiantes se apoyan en la medida de algún ángulo para observar si varía o no durante el arrastre. El esquema que se observa más frecuentemente corresponde a la verificación de la posible conjetura, en la que se arrastra un rayo colocándolo en posiciones extremas para garantizar la invariancia de un ángulo.

Asociados a los esquemas de arrastre para verificar se encuentran cuatro signos del artefacto, cuatro signos pivote y dos signos matemáticos. A algunos los sorprende ver que sus expectativas no se cumplen y otros corroboran lo que están pensando, pero en ambos casos están dirigiendo la atención a lo que observan. Los signos pivote en este tipo de arrastre se asocian al Problema 1, quizá porque este es de construcción sugerida. En este caso, los estudiantes mencionan elementos de aquello que observan mientras se arrastra y del universo teórico en el que está inmerso el problema. De hecho, solo hasta que arrastraron para verificar lo que sospechaban, un grupo de estudiantes recordó que habían estudiado la propiedad a la que alude la conjetura, en un semestre anterior. Los signos matemáticos, asociados también al mismo problema, “Si se tienen dos ángulos que forman par lineal, entonces el ángulo determinado por las bisectrices de estos ángulos es recto” y “Dados dos ángulos complementarios coplanares que comparten el vértice y que uno de sus lados es rayo opuesto del otro entonces el ángulo que forman los otros rayos es recto”, son formulaciones que se constituyen en las primeras versiones de las conjeturas que se socializan en clase. Los estudiantes procuran usar un lenguaje general, desligándose del uso del artefacto.

Mediación semiótica del profesor

Anteriormente se ilustró el análisis detallado de los aspectos centrales de la mediación semiótica para el Problema 2, señalando las acciones de la profesora que posiblemente contribuyeron a la evolución de los signos personales de los estudiantes hacia signos matemáticos. En esta sección se resumió, con respecto a los tres problemas, el análisis de la mediación que se llevó a cabo o la que se habría podido hacer, y se hizo una reflexión sobre los elementos de la clase que favorecieron tal mediación.

Con respecto al Problema 1, la mediación semiótica se focalizó principalmente en transformar los signos de los estudiantes, tanto aquellos muy ligados al artefacto, como los más cercanos a lo matemático; es decir, al enunciado propio de la matemática, teorema al cual se quería llegar (4-IV una vez y 4-III tres veces). Un elemento de ese proceso fue cambiar la descripción de la relación entre los rayos por la palabra que la define –ángulos par lineal–, y pasar de establecer que la medida del ángulo se mantiene por decir que la medida es de noventa (2-I dos veces). Otro foco de la mediación del profesor estuvo en destacar que el signo matemático producido debía proveer elementos que fueran útiles para facilitar la demostración (17-III, dos veces). Se evidencia la intención de la profesora de establecer las características matemáticas que guiaron el proceso de transformación de signos (21-V, dos veces).

Con respecto al Problema 2, en cuanto a la conceptualización de objetos y relaciones, la mediación semiótica se hizo alrededor de la determinación de los elementos teóricos que están involucrados en los signos de los estudiantes (3-I, 2 veces), de la producción de un enunciado sintético (2-I), y de las imprecisiones matemáticas que surgieron (4-I, una vez). En el correspondiente proceso para los conceptos, no se hizo referencia a cuestiones relacionadas con el uso del artefacto (1-I, 5-I, 22-I), ni fue necesario solicitar que se expresara la conjetura de forma sintética ya que en esta tarea, como en la anterior, estaban involucrados rayos opuestos y otro rayo, situación que ya se había dicho describía un par lineal.

En cuanto a la condicional, en la mediación semiótica se realizaron todas las acciones de esta categoría, pues se abordaron problemas respecto a la especificación del antecedente y el consecuente de la condicional que expresa la conjetura, haciendo referencia al uso del artefacto (6-II, 2 veces; 7-II, 4 veces; 8-II, 5 veces; 11-II dos veces), y en la caracterización de las partes que componen una condicional (10-II, 3 veces). Además, se reiteró el formato de la condicional al reformular la conjetura final usando la estructura adecuada (9-II una vez).

La mediación semiótica en torno a la conjetura que resuelve el problema ocupó la mayor parte de las acciones de la profesora, dado que en total 30 de las 58 intervenciones se tipificaron en esta categoría. Dichas acciones estuvieron enfocadas en: abordar imprecisiones matemáticas en el signo (4-III, 6 veces), enriquecer las conjeturas con recursos gráficos (11-III, 4 veces), controlar el universo teórico (12-III, 5 veces), sintetizar para establecer el foco de atención (13-III, 5 veces), indagar sobre los signos de los estudiantes (14-III, 4 veces), proveer un modelo de actuación (15-III, 3 veces), y destacar elementos de las conjeturas que forman parte del teorema al que se quiere llegar (16-III, 3 veces). No se promovió la transformación de las conjeturas para hacer operacional la demostración (17-III).

En lo que se refiere al teorema al que se quiere llegar o a su demostración (IV), las acciones de mediación de la profesora se enfocaron en abordar imprecisiones (4-IV, 3 veces) y en explicitar la necesidad de introducir elementos al sistema teórico (18-IV, una vez).

Por último, solo se presentó una acción de mediación orientada a la formación de nociones de teorema, postulado y definición (V), la de mencionar el interés matemático por la existencia y determinación de un objeto (21-V, 3 veces).

La acción 4 (abordar imprecisiones matemáticas en los signos) es la que más se presenta, tanto con respecto a los conceptos (1 vez), como en las conjeturas que formulan (6 veces) y en el teorema que se quiere establecer (3 veces). Por otro lado, la profesora enriqueció explicaciones usando: las representaciones para favorecer la comprensión de las conjeturas (11-III, 4 veces) y las afirmaciones escritas en el tablero para aclarar las partes de una condicional (11-II, 2 veces).

En cuanto al Problema 3, lo relacionado con la conceptualización de objetos y relaciones, en este episodio, se centra principalmente en la ubicación de los objetos que mencionan los estudiantes en el sistema teórico (3-I, 2 veces). Además, se aborda que la construcción hecha en Cabri también debe responder al sistema teórico (5-I, una vez). Dado que los estudiantes deben identificar el objeto matemático de que trata el problema, entre las sugerencias mencionan la mediana, lo cual dio pie para indagar sobre la concepción que se tiene de esta (22-I, una vez).

En cuanto a lo que es una condicional, el trabajo de mediación se enfocó en determinar antecedente y consecuente solicitando una revisión de la construcción realizada con el artefacto (6-II, una vez) e identificando lo construido y lo obtenido, para relacionarlo con la parte correspondiente (7-II, 2 veces). Además, en tres ocasiones, la profesora solicitó expresar su conjetura en formato condicional (9-II, tres veces).

El proceso de mediación semiótica en este episodio se concentró primordialmente en el problema y su solución, dándose 18 de las 38 acciones en torno a esto. Se abordaron imprecisiones (4-III, 5 veces), y se hizo control teórico (12-III, 2 veces) de asuntos mencionados en las conjeturas. Se destaca que, con el fin de obtener elementos que harán parte de la conjetura a la que se quiere llegar, la profesora indagó sobre el significado que le asignan los estudiantes a frases incluidas en las conjeturas formuladas (signos) (14-III, 3 veces), destacó partes de estas (16-III, 3 veces), y sintetizó las ideas que establecieron (13-III, 1 vez).

Las acciones relacionadas con el teorema al que se quiere llegar o su demostración, se enfocaron, ante todo, en abordar imprecisiones matemáticas en el signo (4-IV, 4 veces), en buscar que se exprese el teorema de manera sintética, usando los términos matemáticos adecuados (2-IV, 3 veces), a la vez que se controla el universo teórico (12-IV, 1 vez). Fue necesario recoger las ideas que se habían extraído de las conjeturas formuladas por los estudiantes para conformar el teorema (13-IV, 1 vez) y destacar cuáles de ellas son elementos de este (16-IV, 1 vez).

La acción de mediación que tuvo mayor frecuencia fue abordar imprecisiones, tanto en las conjeturas que formularon los estudiantes (4-III) como en el teorema que se conformó a partir de ellas (4-IV).

Sin duda, la mediación semiótica de un profesor favorece la construcción de conocimiento. Estar atento para reconocer el significado personal que tiene un estudiante de un objeto o relación geométrica, a través de los signos que él produce o los esquemas que usa, permite que ello sea material de discusión en clase. Presentar las conjeturas producidas, para el desarrollo del contenido de la clase, ordenándolas de acuerdo a su cercanía al teorema o hecho geométrico que se quiere establecer y hacer el análisis de las conjeturas con el fin de extraer los elementos útiles para llegar a establecer dicho teorema o hecho geométrico, dan lugar a un proceso en el cual los estudiantes pueden ir modificando sus signos personales a un ritmo que favorece ese paso. Especialmente importante, es dar la autoría de cada producción al estudiante correspondiente, pues este estará atento a cómo contribuye su conjetura a la conformación del enunciado del teorema o hecho geométrico, y a participar en la evolución de su signo. Es decir, se incentiva a una participación crítica y constructiva.

Capítulo 4. Comentarios finales

Esta sección se centrará en dos asuntos que recogen los principales aportes del capítulo a la investigación en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, con los cuales se quiere aportar herramientas metodológicas y conceptuales a estudiantes y profesores interesados en la actividad investigativa. En primer lugar, se describe la experiencia investigativa propiamente dicha, señalando logros y dificultades. En segundo lugar, se hace referencia a los productos que se derivan de la investigación, los cuales se presentan a la comunidad de educadores matemáticos para su discusión.

Acerca de la experiencia investigativa

Se considera que los experimentos de enseñanza se constituyen en una estrategia metodológica pertinente para abordar, documentar y explicar los procesos que estudiantes y profesor llevan a cabo en el aula, cuando la mirada se centra en la actividad matemática apoyada por un instrumento específico de mediación. En particular, esta investigación pretendía revisar en detalle los esquemas de utilización que emergen en el proceso de resolución de tres problemas de Geometría Plana, cuando los estudiantes utilizan Cabri, identificar los signos que ellos producen a lo largo del proceso -especialmente las conjeturas- e indagar por la mediación semiótica del profesor relacionada con hacer evolucionar los signos personales hacia signos matemáticos.

En ese sentido, el estudio detallado de las transcripciones de la videograbación de tres grupos de estudiantes que participan en una clase de geometría, cuyo organizador curricular es el compuesto *problemas-conjeturas-sistema teórico,* es una estrategia metodológica útil, pues permitió describir y analizar las acciones de los estudiantes para solucionar los problemas y formular las conjeturas, inferir y categorizar esquemas de utilización relacionados con el artefacto Cabri que ponen en juego los estudiantes según el tipo de problema, identificar diferentes tipos de signos producidos por los estudiantes -ampliando la propuesta de Mariotti (2009)-, determinar el potencial semiótico del artefacto vía dichos esquemas y establecer una correlación entre los esquemas y los signos personales que producen los estudiantes a lo largo de la resolución de los problemas.

Adicionalmente, las transcripciones de las socializaciones que dirigió una profesora, comprometida con el organizador curricular, en las que se discuten las conjeturas acerca de los tres problemas, permitieron identificar las acciones de mediación semiótica de la profesora, tendientes a producir un signo matemático (enunciado del teorema) que se corresponda con el que se quiere demostrar e incluir en el sistema teórico. Además, se logró establecer una categorización y un conteo de frecuencia de las acciones de mediación semiótica del profesor según el objeto central de dicha mediación: conceptualización, condicional, solución al problema, teorema y nociones metamatemáticas.

Dos comentarios sobre limitaciones que se enfrentaron. Primero, se tenía planeado realizar una descripción del proceso de construcción de las organizaciones deductivas locales de elementos teóricos correspondientes a la gestión de las conjeturas, para darles relevancia como parte esencial del organizador curricular. Sin embargo, esto no se hizo puesto que el proceso de análisis descrito anteriormente fue más extenso y complejo de lo que se imaginaba. Segundo, se utilizaron datos que recogen los sucesos naturales de la clase, pero que no fueron tomados específicamente para esta investigación. No obstante haber sido útiles para nuestro interés investigativo, se tuvo que sortear algunas restricciones; por ejemplo, al no haber pedido a los estudiantes un informe escrito del proceso de construcción y exploración no se tenía información "objetiva" para inferir fundadamente sobre los conceptos que los estudiantes tienen de los objetos geométricos involucrados en los problemas. Además, el análisis de la interacción de los estudiantes permitió darse cuenta de la importancia que puede tener el disponer de antemano de tal tipo de informe, puesto que en este se puede identificar el potencial semiótico del artefacto, lo cual es un elemento más para la mediación que el profesor hace. También se notó que si el profesor investigador puede observar el proceso de representación con Cabri de la situación presentada en el problema, así como el proceso de exploración conducente a la conjetura, entonces puede detectar los esquemas de utilización y estos pueden constituirse en elementos para el proceso de mediación, aprovechando el potencial semiótico del artefacto.

Con las categorías de mediación semiótica que se propusieron, se aportó metodológicamente al estudio de esta cuando el profesor se centra en el contenido matemático derivado del proceso de resolución de problemas. Esta categorización es distinta a la propuesta por Mariotti (2009), pues la del autor se basa en las acciones realizadas con el artefacto. Además, el potencial semiótico del artefacto, vía los esquemas de utilización que se identificaron, también está muy cercano a lo matemático.

Así mismo, la categorización de los esquemas de utilización permitió definirlos y agruparlos en dos categorías: esquemas de construcción y esquemas de arrastre para exploración o verificación. Algunos de estos esquemas fueron establecidos previamente al primer análisis y otros emergieron durante el proceso de análisis. Un ejemplo de estos es haber incluido en el segundo grupo el esquema ocultar o des-ocultar objeto para verificar conjetura, pues es un procedimiento que se identificó en algunos análisis.

Los análisis realizados permitieron establecer nexos entre la teoría de mediación semiótica y la génesis instrumental, pero no fue posible aprovecharlos para ampliar dicha conexión, por limitaciones de tiempo. Por ello, se ve pertinente realizar un diseño experimental con estudiantes de educación básica, media o universitaria, teniendo en cuenta los resultados de esta investigación, para determinar si los productos que surgieron en esta son útiles para proponer un modelo que asegure el aprovechamiento del potencial semiótico del artefacto y la participación legítima de los estudiantes en la construcción de conocimiento durante el proceso de mediación semiótica del profesor.

Productos de la investigación

Los siguientes productos que se ponen a discusión de la comunidad son resultados indirectos de la investigación, en ellos se vislumbra un potencial uso investigativo. Ellos son vistos como el germen de conceptos didácticos que se espera poder validar en futuros estudios.

Distinción de los signos matemáticos

El análisis de los signos correspondientes a afirmaciones – tipo conjetura, producidos por los estudiantes al resolver los problemas, llevó a determinar que la clasificación de signos propuesta por Mariotti (i. e., signos del artefacto, signos pivote y signos matemáticos) debe ser enriquecida, particularmente en lo que tiene que ver con los signos matemáticos. A continuación se proponen tres aspectos que permiten describir la calidad de los signos matemáticos formulados por los estudiantes: (i) capacidad de responder al problema, (ii) formulación del enunciado si-entonces y (iii) presentación de la información.

(i) *Capacidad de responder al problema.* Se distingue entre signos correctos o erróneos en relación con la solución al problema o con un teorema de geometría. En cualquiera de los dos casos, si el signo enuncia algo que no se puede validar, no es pertinente para la solución del problema que se está resolviendo o lo responde parcialmente, se considera como signo erróneo. Por ejemplo, ante el Problema 3, Nancy e Ignacio, en un momento dado de su actividad, afirmaron que "para los puntos R y D de la recta m existen puntos Q y Q', respectivamente, en la recta perpendicular a m por P, de tal manera que $RQ = RP$, $DQ' = DP$ y $Q \neq Q'$". Tal signo no es correcto, pues Q y Q' deben ser el mismo punto.

(ii) *Formulación del enunciado si-entonces.* Se distingue entre signos de la forma si-entonces que contienen todas las condiciones impuestas en la construcción o exploración, de aquellos que no contienen todas las condiciones; también se hace diferencia entre signos cuyo consecuente presenta todas las propiedades que se derivan de las condiciones impuestas en la construcción o exploración, de aquellos que no incluyen todas las propiedades. Es decir, existen signos matemáticos que se consideran como parcialmente correctos, pero que no precisan o bien todas las condiciones del antecedente o bien todas la propiedades que de ellas se derivan. Por ejemplo, al resolver el problema mencionado en el literal (i), Nancy e Ignacio formulan como conjetura: "Se tiene una recta m y un punto P que no pertenece a m, y Y que pertenece a m, entonces existe X que no pertenece al semiplano determinado por m donde está P tal que $YX = XP$ y X pertenece a la recta perpendicular a m que contiene a P". La conjetura propuesta por los estudiantes es un signo matemático válido, pero no informa por completo sobre la construcción hecha, pues les faltó decir que $PT = TX$, siendo T el punto de intersección de la perpendicular con m, y explicitar el cuantificador universal que indica que Y es cualquier punto de la recta.

(iii) *Presentación de la información.* Se distingue entre signos que son próximos a una formulación sintética y económica, de aquellos que no lo son. Por ejemplo, al resolver el Problema 1, María y Efraín formularon como conjetura "Si el rayo BA y el rayo BE son rayos opuestos y K no pertenece a la recta BA, o a ninguno de esos dos rayos, entonces el ángulo KBA y el ángulo KBE forman par lineal y sus respectivas bisectrices forman un ángulo recto”. Se califica tal signo matemático como correcto pero no sintético ni económico, puesto que en el antecedente de su conjetura no mencionan el objeto par lineal, descrito como tal, y sí lo hacen en el consecuente como si eso se pudiera deducir. En contraste, Nancy e Ignacio formularon “Si se tienen dos ángulos que forman par lineal, entonces el ángulo determinado por las bisectrices de estos ángulos es recto”. Este es un signo sintético y correcto, por cuanto utilizan el término par lineal en el antecedente, en vez de la descripción de estos ángulos al referirse a los rayos opuestos y al punto *K*, como lo hacen María y Efraín.

Procedimientos para abordar problemas con Cabri

Con base en los análisis de la actividad instrumentada de los estudiantes cuando abordan la resolución de un problema, se sugiere una clasificación de procedimientos, centrados en el tipo de abordaje del problema usando Cabri.

Es relativamente fácil aceptar que diferentes tipos de problemas (los de *construcción sugerida* y los de *construcción creativa*) implican diferente abordaje con el artefacto Cabri y, por ende, se dan diversos procedimientos, específicamente en lo que tiene que ver con la exploración. A continuación se esboza una primera caracterización de esquemas asociados a cada tipo de problemas, alimentada por las discusiones del grupo investigador sobre las producciones analizadas y la experiencia de este como profesores de cursos de geometría que tienen un ambiente de clase similar al del curso que fue contexto de esta investigación.

Para los problemas de *construcción sugerida* se han identificado dos tipos de procedimientos. En ambos tipos, las acciones son las mismas: modelar la situación en Cabri y poner en juego el dinamismo del programa (mediante el arrastre). La diferencia está en el grado de generalidad que se le asigna a la figura resultante de la acción de modelar la situación.

En uno de los procedimientos, la figura se usa como representante de todos los objetos que cumplen con las condiciones construidas. Aunque en la exploración se tienen en cuenta casos particulares o especiales, ellos son considerados únicamente como casos que deben ser parte de una generalidad y no como casos particulares especiales donde se detecta o establece la característica invariante. El proceder de Ignacio y Nancy en la resolución del Problema 1 ejemplifica esto. Ellos hacen una modelación correcta de la situación, toman la medida del $\angle GBD$ y hacen un arrastre más o menos completo del $\overrightarrow{BK}$, para determinar el invariante.

En el otro tipo, el análisis de la situación se hace a través del estudio de representaciones de casos determinados por una característica agregada por quien explora. Los casos particulares se consideran para establecer invariantes, pero no necesariamente se ven como parte de una situación mucho más general. Es usual que la exploración se haga mediante ensayo y error, es decir, se proponga una hipótesis que se intuye es solución del problema y luego se ponga a prueba. Por ejemplo, para el Problema 1, los estudiantes habrían podido construir el $\overrightarrow{BK}$ en posiciones muy especiales, tal como, perpendicular a la $\overleftrightarrow{AB}$ o formando un ángulo de 45° con esta, y estudiar la situación para esos casos.

Para los problemas de *construcción creativa* se han identificado varios tipos de esquemas que se pueden clasificar con base en las fases de *modelación* y *exploración* de la resolución del problema.

Al centrarse en la modelación de la situación que plantea el enunciado del problema, se ha identificado dos procedimientos: de construcción deletreada y de construcción guiada por la teoría.

En el *procedimiento de construcción deletreada*, los objetos inmersos en la descripción de la situación se construyen robustamente; en cambio, el objeto que se pide caracterizar geométricamente se construye de manera blanda, es decir, con base en la medición y la función de arrastre hasta ajustar la representación a la condición solicitada. En este caso, los estudiantes no construyen objetos o relaciones geométricas que garanticen, aunque sea parcialmente, la condición (característica) geométrica que soluciona el problema. Claro, esta manera de modelar la situación afecta significativamente la etapa de exploración, y eventualmente, se podría decir, que esta forma de modelar se confunde con la fase de exploración. Es probable que al realizar las acciones para ajustar la representación que se tiene a la condición solicitada, se perciban características geométricas que solucionan el problema.

En el *procedimiento de construcción guiada por la teoría*, los objetos inmersos en la descripción de la situación se construyen robustamente y también se construyen objetos o relaciones geométricas que garantizan, aunque sea parcialmente, la condición (característica) geométrica que soluciona el problema. Para ello se recurre al conocimiento de elementos teóricos, sea que hagan o no parte de un sistema teórico de referencia. También en este esquema, la manera de modelar la situación afecta significativamente la etapa de exploración, puesto que es probable, que al hacer la construcción del objeto o relación, se considere las propiedades como parte de las características geométricas que solucionan el problema. Un ejemplo de esto sucede con los estudiantes Nancy e Ignacio quienes, para abordar el Problema 2, construyen un $\overrightarrow{BE}$ de manera tal que $m\angle CBE = 90 - m\angle DBA$. Ello como consecuencia de usar la definición de ángulos complementarios y usar la herramienta rotación de Cabri. La propuesta de los estudiantes soluciona el problema por completo. Otro ejemplo se tiene con María y Efraín en el Problema 3, pues ellos utilizan la característica geométrica de equidistancia que conocen de la circunferencia para construir puntos que guardan la misma distancia a R como P. Claro, los puntos que pertenecen a la circunferencia con centro R y radio PR tienen esa condición, pero no solucionan el problema por completo, solo parcialmente.

Al centrarse en la fase de exploración, cuyo objetivo es buscar la caracterización geométrica que finalmente soluciona el problema, se ha identificado dos procedimientos: de exploración por casos desconectados y de exploración centrada en un representante de una clase.

En el *procedimiento de exploración por casos desconectados* se estudian casos, considerados con o sin algún criterio, pero construidos con las mismas condiciones para determinar, con base en ellos, una generalidad. Quienes usualmente exploran de esta manera, no reconocen el carácter de variable que tiene los objetos cuando se construyen en Cabri. Así, aunque podría parecer que establecen una solución al problema para casos particulares, su manera de explorar (basada en particularidades) no les permite, en ocasiones, vislumbrar una característica general que solucione el problema. Ello porque para cada caso particular se ocultan objetos de la construcción, o no se usa el dinamismo del software. Este último hecho se corresponde con el no reconocimiento de la índole variable que tienen los objetos cuando se construyen en Cabri. Un ejemplo de este procedimiento sucede con la exploración hecha por María y Efraín para solucionar el Problema 3. Ellos, para varios puntos de la recta m, hacen una misma construcción, es decir, una circunferencia con centro en tales puntos que contiene al punto P y un punto Q en ella. Sin embargo, ocultan tales circunferencias y no se percatan de que tales circunferencias se intersecan en un único punto diferente de

P. Esta acción de ocultar las circunferencias no les permite vislumbrar que el punto *X* solicitado es dicho punto de intersección. Aunado a esto, los estudiantes no arrastran alguno de los puntos en la recta *m*, luego no los reconocen como puntos que representan a cualquier punto de la recta. De manera similar, no ven a los puntos *Q* que han construido como cualquier punto de dichas circunferencias.

En el *procedimiento de exploración centrada en un representante de una clase*, la exploración se realiza sobre un objeto que se reconoce como representante de una clase de objetos. Así, basta con realizar una construcción que cumpla con las características geométricas impuestas en las condiciones del problema y por el sujeto que explora. Enseguida se usa el dinamismo característico del software para hacer un arrastre intencionado y establecer la característica geométrica que soluciona el problema. Nótese que este procedimiento es bastante similar al esquema de construcción guiada por la teoría; la diferencia radica en que se utiliza el dinamismo del software para establecer un invariante. El caso de María y Efraín cuando abordan el Problema 2 ilustra también este procedimiento. El ejemplo relacionado con el Problema 3 aplicaría en este caso si los estudiantes hubieran arrastrado algún punto de la recta *m*, no ocultado la circunferencia correspondiente a dicho punto y activado la traza de dicha circunferencia. Sin embargo, esto no pasó en ninguno de los grupos cuya producción de analizó.

Bibliografía

Ball, D. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying teaching and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 365-402). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda edición revisada, pp. 746-805). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Birkhoff, G.D. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *The Annals of Mathematics, Second Series, 33* (2).

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Disertación doctoral no publicada, Universidad de Valencia, Valencia, España.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-326). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41* (4).

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría moderna.* Addison – Wesley Publishing Company.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013) Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C. y Molina, Ó. *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-36). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Rabardel, P. (1995/2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducción de *Les hommes & les technologies: Approch ecognitive des instruments contemporains*, realizada por Martín Acosta Gempeler. Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42* (3).

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE/Horsori.

Samper, C., Camargo, L. y Perry, P. (2006). *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Informe de investigación no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4).

Anexo

Esquemas para describir la acción instrumentada con Cabri

En las siguientes tablas se presenta el listado completo de esquemas de utilización con los que se pudo describir la actividad instrumentada de los estudiantes involucrados. La lista incluye los esquemas que se identificaron *a priori* y los que emergieron, estos últimos se destacan con una sombra gris.

Para construcción, exploración, verificación y justificación

Tabla 1. Descripción de los esquemas de utilización para construcciones

Construcción de recta	C1	Determinan dos puntos, usan la opción Recta y hacen clic en ambos puntos.
	C2	Usan la opción Recta, hacen clic dos veces.
	C3	Determinan un punto, usan la opción Recta, hacen clic en el punto y otro clic.
Construcción de rayo	C4	Parten de dos puntos, uno de ellos escogido como el origen, escogen la opción Rayo, hacen clic en ambos puntos, comenzando por el origen.
	C5	Usan la opción Rayo, hacen dos clics en un lugar de la pantalla, determinan un punto sobre el rayo.
	C6	Determinan un punto origen, usan la opción Rayo, hacen clic en el punto, hacen un nuevo clic.

Construcción de rayos opuestos	C7	Construyen una recta, usan la opción Rayo y construyen dos rayos opuestos con origen en un punto de la recta.
	C8	Construyen una recta, determinan dos puntos en ella, y un tercer punto para que se dé la interestancia, los rayos opuestos se identifican perceptualmente sin necesidad de remarcarlos.
	C9	Construyen una recta, determinan dos puntos en ella, y un tercer punto para que se dé la interestancia y construyen los rayos opuestos.
	C10	Usan opción Rayo para construir un rayo, usan la opción Recta para construir una recta usando el origen del rayo y un punto determinando en este, construyen el rayo opuesto usando el origen del primer rayo y un punto en la recta.
	C11	Construyen dos rayos en sentido opuesto, perceptualmente parecen colineales.
Construcción de bisectriz	C12	Usan la opción Rayo y construyen un rayo que perceptualmente es bisectriz del ángulo.
	C13	Usan la opción Bisectriz, construyen un rayo sobre la recta producto de Cabri con punto interior en el ángulo y ocultan la recta.
	C14	Construyen bisectriz Cabri, escogen un punto en la recta que está en el interior del ángulo, construyen un rayo sobre la recta producto de Cabri y ocultan la recta.
	C15	Construyen bisectriz Cabri, construyen rayo sobre la recta producto de Cabri con punto en el interior del ángulo.
	C16	Construyen bisectriz Cabri, escogen un punto en la recta que está en el interior del ángulo, construyen un rayo sobre la recta producto de Cabri.
	C17	Construyen bisectriz Cabri y escogen un punto en la recta de tal manera que el punto sea elemento del interior del ángulo.
Construcción de ángulo complementario	C18	Miden el ángulo, calculan la diferencia de esa medida a 90°, construyen un rayo y lo rotan según la diferencia calculada.

Construcción de segmentos congruentes	C19	Construir una circunferencia con centro en un extremo del segmento al cual se le quiere construir uno congruente, y radio del segmento dado.
	C20	Construir un rayo conveniente para el propósito que se desea, tomar la medida del segmento dado, seleccionar la herramienta Transferencia de medidas, hacer clic en la medida y luego en el rayo construido.
	C21	Tomar la medida del segmento dado, seleccionar la herramienta Transferencia de medidas, hacer clic en la medida, luego en un punto que será extremo del segmento nuevo y luego en un campo de la pantalla que convenga para el propósito que se desea.
	C22	Construir una circunferencia con centro en un extremo del segmento al cual se le quiere construir uno congruente, y radio del segmento dado, luego un arco sobre ella, escoger punto sobre circunferencia y redefinirlo para ubicar el punto en dicho arco.

Tabla 2. Descripción de los esquemas de utilización para explorar, verificar o justificar

AEX	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones extremas y explorar.
AVJX	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones extremas y verificar una conjetura.
AEE	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones especiales y explorar.
AVJE	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones especiales y verificar una conjetura.
AET	Se arrastra un punto o un objeto para hacer un barrido más o menos completo y explorar.
AVJT	Se arrastra un punto o un objeto para hacer un barrido más o menos completo y verificar una conjetura.
AVCX	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones extremas y verificar la construcción realizada.
AVCE	Se arrastra un punto o un objeto para ubicarlo en situaciones especiales y verificar la construcción realizada.
AVCT	Se arrastra un punto o un objeto para hacer un barrido más o menos completo y verificar la construcción realizada.
AJT	Se arrastra un punto o un objeto de manera más o menos completa para justificar la conjetura planteada.
MJJ	Se toma la medida de un objeto con el ánimo de justificar una conjetura sin necesidad de hacer arrastre.
MVJ	Se verifica una conjetura utilizando medida y no se hace arrastre.

MVC	Se verifica una construcción utilizando medida y no se hace arrastre.
DVC	Se oculta o desoculta objeto para verificar construcción.
DEC	Se oculta o desoculta objeto para explorar.
RE	Se redefine un punto construido para explorar.
Nota: Si el arrastre es de un punto o de un objeto, se agrega al final del código P u O respectivamente. Si se toma medida, se agrega al final del código M.	

Parte II. Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria

Felipe Fernández, Luisa Andrade
y Benjamín Sarmiento

Introducción

Es usual que la enseñanza en torno a la variable aleatoria se reduzca a su presentación a través de una definición y a la utilización de sus valores para calcular probabilidades con el fin de llegar a la construcción de la distribución de probabilidad. En otras palabras, más que los antecedentes que modelan y configuran la variable aleatoria, en la enseñanza se enfatiza en el desarrollo de destrezas procedimentales para manejar la distribución de probabilidad asociada.

En el proyecto de investigación *Variación y diseño de experimentos de enseñanza para la educación estadística*[7] que aquí se reporta, realizado por el grupo de investigación en Educación Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, la discusión en torno a situaciones de probabilidad condujo a que se estableciera la variable aleatoria como concepto que resalta precisamente por el poco sentido que tiene para los estudiantes, pero también por la ausencia de significación que al respecto los docentes muestran. Así pues, el proyecto estuvo dirigido al desarrollo de procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, mediante el diseño, elaboración e implementación de una secuencia de instrucción para la construcción de significado de la variable aleatoria, bajo la perspectiva de 'experimentos de enseñanza' según directrices de Steffe y Thompson (2000), Lesh y Kelly (2000) y Cobb (2000).

Este proyecto sigue la línea iniciada con un proyecto trabajado anteriormente (ver Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010), pero esta vez centrado en el contexto universitario, específicamente en el marco de los cursos de probabilidad y estadística que se imparten como parte de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

7 El proyecto identificado como DMA 203-10, fue financiado por el Centro de Investigaciones (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En esta parte del libro, se presentan resultados del trabajo en el proyecto tales como el proceso hipotético de aprendizaje formulado, junto con los talleres elaborados, el conjunto de indicadores construidos para darle significado al concepto de variable aleatoria enmarcados en los procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, algunas de las dificultades de los estudiantes y algunos de sus avances en la aproximación al concepto de variable aleatoria, percibidos en un mayor registro de indicadores de razonamiento estadístico. Se destaca también la comprensión conceptual ganada por el grupo de investigación acerca de la variable aleatoria y de su significativa relación con los conceptos de espacio muestral y experimento aleatorio.

Capítulo 1. Consideraciones metodológicas

Perspectiva de investigación

Bajo una perspectiva que enfatiza la relación reflexiva entre la teoría y la práctica, donde la primera emerge de la segunda y la realimenta para guiarla, hay hoy día una variedad de metodologías de investigación cuya característica principal, según Lesh y Kelly (2000) y Steffe y Thompson (2000), es ampliar el papel del investigador, al pasar a ser un observador directo del trabajo de los estudiantes, y del profesor, al colaborar en la creación de las estrategias que la investigación propone para su clase. Así, el investigador actúa también como profesor o estudiante, y el docente aporta con interpretaciones y datos relevantes.

En el proyecto se trabaja desde el enfoque metodológico de experimentos de enseñanza, el cual tiene como propósito principal mejorar, de manera dinámica, un diseño de instrucción al probar y modificar conjeturas hechas sobre el aprendizaje de los estudiantes en la clase (Brown, 1992; Cobb, 2001; Collins, 1999; Suter y Frechtling, 2000; citados en Cobb et al., 2003). En un experimento de enseñanza los investigadores implementan secuencias de instrucción en colaboración con un profesor, también miembro del equipo de investigación, y analizan el aprendizaje matemático de los estudiantes a medida que ocurre en la situación social de la clase o de grupos pequeños (Cobb, 1999; citado en Jones et al., 2001). Según Steffe y Thompson (2000), se tiene una experiencia de primera mano con respecto al aprendizaje y razonamiento matemático de los estudiantes, ya que durante un período de tiempo se captura y documenta el pensamiento de los estudiantes. En la misma dirección, Confrey y Lachance (2000) describen el experimento de enseñanza como una intervención planificada de clase que ocurre en un período de tiempo significativo, supera la perspectiva tradicional de enseñanza y sigue un curso continuo de instrucción. Además, dice Cobb (2000) que los experimentos de enseñanza proveen una manera de explorar los prospectos y las posibilidades de reformas a nivel de clase.

Experimentos de enseñanza en el proyecto

Durante el proyecto se llevaron a cabo tres experimentos de enseñanza a lo largo de varias semanas cada uno, en momentos distintos de tiempo y con grupos diferentes de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, con el fin de promover, documentar y analizar el aprendizaje en torno a la variable aleatoria. Para esto se indagaron nuevas estrategias de enseñanza que posibilitan la exploración por parte de los estudiantes, dirigida al descubrimiento y a la aproximación al conocimiento matemático. En las clases siempre se contó con la presencia de un investigador y dos o más observadores, también pertenecientes al grupo de investigación, en concordancia con las direcciones de Cobb (2000). Todos los integrantes del grupo de investigación participaron en la planeación de las sesiones de clase y en el análisis preliminar y retrospectivo de los datos.

De igual forma, se realizaron reuniones después de las clases, señaladas por Cobb (2000), para recoger impresiones sobre lo ocurrido y tomar decisiones para la siguiente clase, así como reuniones semanales con el equipo de investigación para interpretar lo que estaba sucediendo en clase, discutir y redefinir de manera constante los planes. Más que formular conjeturas sobre el aprendizaje, en el proyecto se establecieron trayectorias hipotéticas de aprendizaje[8] que delinearon la forma en que el aprendizaje de los estudiantes debía progresar, y guiaron el diseño de la secuencia de instrucción, así como su modificación posterior de forma dinámica. En este proyecto el marco interpretativo de trabajo, que según Cobb (2000) es la base para la interpretación de la información en un experimento de enseñanza, estuvo conformado por los indicadores construidos.

Para el diseño de los talleres que hacen parte de la secuencia de instrucción se indagó sobre el contenido matemático en torno a la variable aleatoria y su didáctica. La variable aleatoria en estos talleres se trata como relación funcional. En el primer experimento de enseñanza, la secuencia de instrucción se dirige a abordar variables aleatorias ligadas a los tipos de distribuciones más trabajadas en la enseñanza, a saber: las distribuciones binomial, hipergeométrica y geométrica, para lo cual se se-

8 Para Simon (1995), los procesos hipotéticos de aprendizaje en conjunto con las actividades diseñadas para los estudiantes y los objetivos de aprendizaje que se plantean, conforman las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. La formulación de una trayectoria hipotética de aprendizaje resalta la importancia de tener metas y fundamentos claros para las decisiones del profesor, y se basa en los supuestos de que en el aprendizaje de un individuo puede verse cierta regularidad, la actividad matemática en la clase con frecuencia ocurre de formas previsibles, y en una misma clase varios estudiantes pueden beneficiarse de la misma tarea matemática.

leccionaron contextos cotidianos donde estas distribuciones tienen sentido y donde se esperaba que el estudiante, mediante la exploración de situaciones con pocos datos, encontrara regularidades y se aproximara así a las fórmulas generales para los modelos en cuestión. Los resultados de este experimento de enseñanza muestran que el centro del aprendizaje alcanzado por los estudiantes sigue estando en los tipos de variables aleatorias y su caracterización, más que en la comprensión misma de la relación funcional y sus implicaciones en el cálculo de las probabilidades.

Se planificó luego, un segundo experimento de enseñanza para el que se escogió una tarea propuesta por Ruiz (2006) que alude a una rifa, que involucra de manera natural una variable aleatoria y que induce a su manejo intuitivo. Esta tarea constituye la base de la situación que se plantea en el principal taller de la secuencia de instrucción, la cual persigue objetivos de aprendizaje concernientes a diferentes aspectos de la comprensión del concepto de variable aleatoria (Fernández et al., 2011). Al intentar dar respuesta a la pregunta de la situación, se esperaba que el estudiante descubriera la variable aleatoria y sus propiedades como relación funcional. Los resultados de este experimento evidenciaron problemas de los estudiantes con nociones básicas de la probabilidad vinculadas estrechamente al concepto de variable aleatoria, que condujeron a profundizar la consulta de literatura y a realizar una reflexión prolongada que se reflejó en cambios en los talleres.

Así, posteriormente se programó y desarrolló el tercer experimento de enseñanza con base en las modificaciones hechas a la secuencia de instrucción. A lo largo de su realización y a medida que se iba analizando el aprendizaje, se detectó la necesidad de ir haciendo nuevos cambios a la secuencia de instrucción y, por lo tanto, a los talleres. En particular, se construyeron dos nuevos talleres: el primero pretende cuestionar en los estudiantes su concepción de 'experimento aleatorio' y 'espacio muestral' antes de comenzar con los talleres de la situación de la rifa; el segundo se implementa al final de la secuencia de instrucción para consolidar el conocimiento desarrollado sobre variable aleatoria.

La conducción de los experimentos de enseñanza en el proyecto progresó en los dos niveles relacionados entre sí, sugeridos por Cobb (2000): de un lado, la planeación y las hipótesis sobre el aprendizaje, y la implementación y revisión de lo ocurrido día a día; de otro lado, el examen de la secuencia de instrucción de forma global y el análisis retrospectivo de la información recolectada, guiados por el marco interpretativo que se trabajó.

Recolección y análisis de datos

Durante el proyecto se recogió gran cantidad de información mediante múltiples métodos, de acuerdo con las recomendaciones de Confrey y Lachance (2000), para observar el aprendizaje en distintos momentos, según lo señalan Steffe y Thompson (2000). Se contó con los escritos de los estudiantes producidos al desarrollar los talleres, la grabación en audio del trabajo de diferentes grupos durante las clases, la grabación en audio de las socializaciones, la toma de notas por parte de los observadores, los escritos realizados por los estudiantes fuera de clase, la información sobre lo ocurrido en clases discutida en las reuniones llevadas a cabo.

La secuencia de instrucción y lo ocurrido en clase, se revisaron y analizaron continuamente de acuerdo a los indicadores construidos, para informar y afinar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y, en especial las actividades siguientes, tal y como lo sugieren Confrey (2006, citado en Molina, 2006), Cobb (2000) y Steffe y Thompson (2000). También se llevó a cabo el análisis retrospectivo del que hablan estos autores, sobre el conjunto completo de la información recogida, con el objeto de detectar los cambios considerados como aprendizaje o evolución de los estudiantes, y sobre el experimento de enseñanza total. Las interpretaciones y afirmaciones consecuentes hechas con base en los indicadores, surgen de la consideración de todos los episodios de clase que hicieron parte de los experimentos de enseñanza, es decir, el análisis se ajusta al análisis establecido por Cobb et al. (2003), que se fundamenta en un marco interpretativo con la garantía de que las interpretaciones son dependientes unas de otras y no emergen de una sola situación.

Evaluación de los experimentos de enseñanza

La evaluación de los experimentos de enseñanza en este proyecto atiende a algunos de los criterios de validez que proponen Confrey y Lachance (2000) para evaluar el potencial de los resultados: la naturaleza convincente de la necesidad de cambio; la viabilidad de implementar los productos de la investigación, su utilidad en el aula y su adaptabilidad a múltiples contextos; la sostenibilidad de los productos y su impacto durante un período considerable de tiempo. En los primeros experimentos de enseñanza de este proyecto se ha puesto de manifiesto la necesidad de un aprendizaje de la estadística más comprensivo y dirigido al razonamiento estadístico; los resultados finales de los estudiantes dejan ver la pertinencia del cambio propuesto; la secuencia de instrucción construida junto con la trayectoria hipotética de aprendizaje se pueden implementar en distintos contextos escolares e incluso universitarios básicos, con el propósito de propiciar el desarrollo de razonamiento estadístico; los indicadores construidos que reflejan la comprensión ganada por el grupo de investigación, conforman un instrumento útil y válido para la planeación y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en cualquier contexto académico.

Capítulo 2. Marco teórico

Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico

Ya que la educación estadística y el desarrollo de razonamiento estadistico se constituyen en el foco central de este proyecto, es pertinente atender a las conceptualizaciones y avances acerca de lo que significa formarse como un ciudadano competente desde el punto de vista estadístico. En este sentido, tal y como se ha venido trabajando en proyectos anteriores (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010 y Fernández, Sarmiento y Soler, 2008), se considera la investigación reportada en los últimos años respecto a los llamados procesos de "alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico", o *statistical literacy, reasoning and thinking* como se les reconoce en la literatura en inglés.

La distinción entre estos procesos ha permitido a la investigación, aproximarse al abordaje de modelos de enseñanza centrados en la comprensión de conceptos estadísticos que pretenden superar enfoques tradicionales, cuyo foco es el dominio de habilidades, procedimientos y computaciones numéricas, y que no necesariamente favorecen en los estudiantes los procesos de "razonar" y "pensar" de un modo estadístico.

La precisión acerca del significado de las ideas de alfabetización, razonamiento y pensamiento para la educación estadística es trabajada por diversos autores (ver por ejemplo Ben-Zvi y Garfield (2004), delMas (2002), Garfield (2002) y Chance (2002), entre otros). En primer lugar, la alfabetización estadística, vista como proceso básico de formación ciudadana, debe tener en cuenta aspectos como la toma de decisiones con base en el tratamiento de información. Se asevera que ser alfabetizado estadísticamente es fundamental para la sociedad actual y que los ciudadanos necesitan de una sólida comprensión de la estadística básica para tomar decisiones informadas. Con base en la idea de alfabetización estadística se ha pretendido responder a la pregunta respecto a cuál es el nivel mínimo de conocimiento estadístico requerido para un ciudadano. En general, se afirma que una persona alfabetizada en estadistica debe saber leer, interpretar, organizar, evaluar criticamente y apreciar información estadística relacionada con contextos sociales con los cuales se relaciona (Batanero, 2002; Ben-Zvi y Garfield, 2004; Gal, 2002, 2000). Desde la alfabetización estadística estas acciones dan lugar a diferentes y variadas competencias básicas que debe desarrollar un profesor de matemáticas en sus estudiantes.

En cuanto a los procesos de razonamiento estadístico, el usuario de la estadística, o el profesional de esta disciplina, debe comprender el contexto en el que trabaja, y encontrar formas de resumir y representar los datos para darles sentido y expresar la variabilidad. Por ello, el trabajo de los analistas de datos requiere del conocimiento sofisticado de métodos de estadística como: diseñar preguntas y experimentos; recoger datos y analizarlos con procedimientos estadísticos formales; obtener conclusiones apropiadas del análisis. Este tipo de conocimiento es abordado en la Educación Estadística mediante el desarroyo de procesos de razonamiento estadístico.

Finalmente, y si se tienen en cuenta las características que autoras como Chance (2002) le imponen al pensamiento estadístico, se distingue este constructo de los otros dos, alfabetización y razonamiento estadístico, en el sentido de que involucra aplicar la alfabetización estadística y el razonamiento estadístico en contextos específicos y reales. En otras palabras, el pensamiento estadístico es promovido cuando en la enseñanza o en los contextos en que trabaja un profesional, sus acciones trascienden a cuestionar, criticar y evaluar el diseño y las conclusiones asociados a los problemas enfrentados, o a generalizar el conocimiento derivado de las situaciones nuevas o novedosas, consideradas.

Conceptualización acerca de variable aleatoria

La complejidad que subyace a la conceptualización de la variable aleatoria ha sido explicitada por Ruiz (2006) y Ruiz, Albert y Batanero (2006), quienes dan cuenta tanto de aspectos disciplinares e históricos de corte epistemológico relevantes para su comprensión, como del estudio de dificultades de los estudiantes al respecto.

Desde el campo disciplinar se reconoce el papel dual que juega la variable aleatoria. Por un lado, sobre la variable aleatoria la atención se puede centrar de manera casi que exclusiva en sus valores como base para cuantificar las probabilidades de los eventos posibles del experimento aleatorio, es decir, en la función de distribución de probabilidad que toma como dominio los valores de la variable aleatoria. Sin embargo, por otra parte, la variable aleatoria se puede asumir desde su interpretación de carácter funcional al relacionar eventos asociados a un experimento aleatorio con valores numéricos; parafraseando a Ruiz (2006), este sería el estrato donde la variable aleatoria actúa como 'modelo matemático', pues vincula un fenómeno aleatorio con una estructura matemática; y se define así como función, tomando como dominio el espacio muestral del experimento y como recorrido un conjunto numérico.

Con base en una revisión histórica, Ruiz (2006) explicita varios momentos históricos en la conceptualización de la variable aleatoria que la llevan a identificar diferentes saltos cualitativos en su comprensión. Así, se puede observar cómo la variable aleatoria en principio se trabajó de manera intuitiva y solo con el pasar de los años fue adquiriendo importancia su estudio, junto con la axiomatización asociada a esta, por parte de la comunidad científica (ver por ejemplo a Kolmogorov, 1956; Levy, 1936; Petrov, 2002; Parzen, 1957; citados en Ruiz, 2006).

En particular, esta autora destaca dos paradigmas que pueden distinguirse en la evolución histórica del concepto, coincidentes con el doble papel mencionado anteriormente: el de "magnitudes aleatorias" que restringe y concibe a la variable aleatoria como un fenómeno aleatorio de resultados numéricos y el de "variables aleatorias" en el que emerge el carácter funcional de la variable aleatoria; sugiere así que la subsistencia actual de estos dos paradigmas aporta elementos para explicar y poner de manifiesto, algunas de las dificultades que enfrentan estudiantes y profesores al abordar el aprendizaje y la enseñanza de la variable aleatoria.

En la literatura se advierte también acerca de dificultades que conlleva el traslado del carácter discreto al carácter continuo de una variable aleatoria. En el caso discreto es claro que la finitud o la infinitud enumerable de los valores que asume la variable aleatoria permite una asociación más transparente entre los elementos del espacio muestral, que no necesariamente es un conjunto de números, con valores numéricos; en el caso continuo no hay tal transparencia. Para reflexionar acerca de lo que se afirma, un ejemplo objeto de discusión en el interior del grupo de investigación, es el del experimento aleatorio en donde se selecciona una muestra de bombillas para medir su tiempo de vida útil, medida que corresponde a una variable aleatoria continua. Las posibles respuestas a la pregunta "¿cuál es el espacio muestral o el dominio de la variable aleatoria asociada a este experimento aleatorio?", cómo "las bombillas seleccionadas" o "los intervalos de tiempo de duración de cada una de las bombillas seleccionadas", permiten vislumbrar algunos de las complicaciones subyacentes a la variable aleatoria continua.

La variable aleatoria en textos universitarios

De manera similar a lo ocurrido en el desarrollo histórico de la variable aleatoria, su tratamiento en la enseñanza y el aprendizaje usualmente ocurre de forma tácita, tanto que muchas veces ni siquiera los estudiantes se percatan de su existencia.

Miller (1998, citado en Ruiz, 2006) afirma que en los libros de introducción a la estadística casi no se desarrolla la idea de variable aleatoria y que cuando se hace, frecuentemente es de forma errónea lo que acarrea problemas en temas posteriores.

La revisión de algunos textos universitarios de probabilidad y estadística posibilita catalogarlos en dos clases: los que presentan de manera explícita el concepto de variable aleatoria y los que lo presentan de manera tácita que, según Ortiz (2002), son la mayoría. En el primer caso, cuando se hace referencia expresa a la variable aleatoria, los textos le dedican por lo menos un capítulo al desarrollo de este concepto (ver por ejemplo a Walpole, 1992 y Parzen, 1960), pero no contemplan todos los aspectos que le pueden dar sentido y significado, ya que se trabaja la variable aleatoria sin importar cómo se obtuvieron los valores de ésta, y se aborda algorítmicamente en ejercicios y teoremas sin utilizarla como modelo matemático en el sentido sugerido por Ruiz (2006), teniendo como meta el uso instrumental de la distribución de probabilidades asociada a la variable aleatoria.

En los libros de texto del otro tipo, se trabaja el concepto sin nombrar la variable aleatoria ni hacer referencia a ella. Por ejemplo en el texto de bioestadística de Schefler (1981), la variable aleatoria ni siquiera es mencionada dentro de los temas propuestos y puede parecer un tanto sorprendente que se proponga el estudio de conceptos y modelos de distribuciones de probabilidad sin definirla.

En los textos universitarios que analizaron Oseguera (1994, citado en Ruiz, 2006) y Tauber (2001, citado en Ruiz, 2006) encontraron que no siempre hay una conexión entre el estudio del modelo probabilístico y el análisis de los datos empíricos, pues se olvida el contexto en el que surgen los valores de la variable aleatoria, y por lo tanto el sentido de está. Por otra parte, la consulta de bibliografía que realizó el grupo de investigación conduce a notar que muchas veces los espacios muestrales finitos considerados en los libros de texto para las diferentes situaciones, corresponden a los conjuntos de valores que toman las posibles variables aleatorias o seudo aleatorias[9].

Noción de espacio muestral

Como consecuencia de la revisión anterior de textos, se considera conveniente distinguir entre lo que se decide denominar como espacio muestral 'de base' u 'original', que corresponde al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y la colección de todos los eventos simples que se identifican de acuerdo a la observación que es de interés llevar a cabo en la realización del experimento; esta última colección comúnmente se adopta como espacio muestral para las tareas propuestas en los libros de texto (ver Larson, 1995) y por consiguiente en el proyecto se decide denominar como espacio muestral 'adoptado'. La distinción planteada ha sido ya presentada en Andrade, Fernández y Sarmiento (2013), y puede ser ilustrada por medio de los siguientes ejemplos de experimentos aleatorios relativos al lanzamiento de un dado.

Experimento aleatorio 1. Se lanza un dado normal y se anota el número que resulta en la cara superior.

Experimento aleatorio 2. Se lanza un dado normal y se anota 'SÍ' si el número que resulta es divisible por 3, o se anota 'NO' si no es divisible por 3.

El espacio muestral del primer experimento aleatorio es el conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y no hay ambigüedad con respecto al posible espacio muestral 'adoptado' pues ambos espacios muestrales, el 'original' y el 'adoptado', son el mismo. En el segundo experimento aleatorio el espacio muestral que suele encontrarse en textos de probabilidad es $S_2 = \{SI, NO\}$. Se nota en consecuencia, que S_2 corresponde a lo que se ha denominado como espacio muestral 'adoptado', mientras que el espacio muestral 'original' en este experimento, es S_1.

9 Algunas de las variables involucradas en una situación ligada a un experimento aleatorio pueden tener características similares a una variable aleatoria, en el sentido de que dan lugar a una partición del espacio muestral y, por lo tanto, a una relación funcional entre el espacio muestral y un conjunto, pero dado que este no es numérico no se consideran variables aleatorias. Estas variables se han llamado en el proyecto 'seudo aleatorias'.

Otras situaciones usuales en los libros de texto muestran como el espacio muestral establecido, es en realidad el espacio muestral 'adoptado'. Por ejemplo en el experimento aleatorio establecido como lanzar tres monedas al aire donde el número de caras constituye una variable aleatoria, se encuentra que los valores de ésta se consideran como el espacio muestral S = {0, 1, 2, 3}, cuando en realidad el espacio muestral 'original' es S = {CCC, SSS, CCS, CSS, SCC, SSC, CSC, SCS}. Igualmente sucede en experimentos aleatorios que dan lugar a variables no numéricas, que se han llamado aquí variables seudo aleatorias como el lanzamiento de un dado de seis caras para determinar si el número que sale es par o impar; comúnmente se toma como espacio muestral S_4 = {PAR, IMPAR}, que en realidad es el espacio muestral 'adoptado', pues el espacio muestral 'original' es S_5 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

La consideración de los valores de las variables aleatorias como puntos muestrales en algunas situaciones, es decir, como los elementos del espacio muestral, motiva a que con frecuencia se admita la coexistencia de varios espacios muestrales para el mismo experimento aleatorio. De esta manera en libros de texto se encuentran referencias a que el espacio muestral de un experimento aleatorio no es único y así un experimento aleatorio puede constar de varios espacios muestrales (ver a Larson, 1995; Wisniewski y Bali, 1998; y Montgomery y Runger, 2004).

Ruiz (2006, p. 127) argumenta que la falta de distinción entre el espacio muestral y los conjuntos de valores de las variables aleatorias que se ha señalado, puede ser explicada para los experimentos aleatorios cuyos resultados son numéricos, pues en esos casos "las variables aleatorias están ya implícitas en los puntos muestrales", es decir, los valores de una variable aleatoria hacen parte del espacio muestral, por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en observar el tiempo de espera a un autobús. En este caso, y como se vio en el ejemplo del primer experimento aleatorio expuesto antes, no hay confusión, ya que el espacio muestral y el conjunto de valores de la variable aleatoria son el mismo.

También en libros de texto se señala la pregunta central de la situación, que se quiere responder o solucionar, como el factor del que depende la determinación del espacio muestral (ver a Wisniewski y Bali, 1998). Así, Freund y Walpole (1990, p. 29) indican que el espacio muestral apropiado "depende del problema que se tenga en mano", para sustentar la selección a conveniencia del espacio muestral.

Indicadores para la enseñanza de la variable aleatoria

En consonancia con lo señalado en la metodología, se construyen indicadores del aprendizaje diferenciados de acuerdo con el proceso de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico al que aluden. Estos indicadores tienen la intención no solo de contribuir al analisis del aprendizaje sino que han ayudado en la formulación de la trayecoria del aprendizaje y de las tareas incluidas en los talleres. La tabla siguiente presenta tales indicadores.

Los indicadores se numeran con las letras a, r y p, segun el proceso al que corresponden y con números para indicar que hacen referencia a aprendizajes relacionados.

Tabla 1. Indicadores para procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico asociados a la variable aleatoria

Proceso	Indicadores
Alfabetización	Reconocer en la realización de un experimento si es determinista o aleatorio (a1.1) Reconocer un experimento aleatorio como la realización repetida o secuencial de experimentos aleatorios más sencillos (a1.2)
Razonamiento	Explicar características de los experimentos deterministas y aleatorios (r1)
Pensamiento	Especificar los experimentos aleatorios y determinísticos implícitos en situaciones cotidianas, y caracterizar cada uno de estos. (p1.1) En una situación de la vida real, rica en información, precisar cuál es el experimento aleatorio asociado (p1.2)
Alfabetización	Identificar los posibles resultados de un experimento (aleatorio) (a2.1) Reconocer que los posibles resultados de un experimento aleatorio dado son los que precisamente conforman un espacio muestral (a2.2) Reconocer espacios muestrales compuestos por n-uplas que corresponden a la realización repetida o secuencial de experimentos más sencillos (a2.3) Reconocer espacios muestrales compuestos por arreglos de valores de variables (a2.4)
Razonamiento	Explicar con base en una estrategia sistemática, como se forman los posibles resultados que configuran un experimento aleatorio (r2.1) Explicar por qué algunos conjuntos también llamados espacios muestrales no corresponden realmente a espacios muestrales sino a valores de variables (r2.2)
Pensamiento	Proponer y/o diseñar y caracterizar variedad de experimentos aleatorios que tengan espacios muestrales de diferentes tipos (finitos, discretos, infinitos numerables e infinitos continuos) (p2)

Proceso	Indicadores
Alfabetización	Identificar la cantidad de posibles resultados en espacios muestrales sencillos y en eventos asociados a estos (a3)
Razonamiento	Encontrar regularidades entre la cantidad de posibles resultados de un experimento aleatorio cuando el experimento se realiza repetidamente. (r3)
Pensamiento	Generalizar y utilizar fórmulas de conteo combinatorio para determinar tamaños de espacios muestrales y de eventos asociados (p3)
Alfabetización	Reconocer en espacios muestrales finitos la posibilidad de asumir la condición de equiprobabilidad (a4.1) Reconocer si eventos simples o compuestos tienen probabilidades iguales o diferentes, teniendo en cuenta la equiprobabilidad del espacio muestral (a4.2)
Razonamiento	Explicar, teniendo en cuenta el espacio muestral, por qué se satisface o no la condición de equiprobabilidad en la asignación de probabilidades a eventos (r4)
Pensamiento	Caracterizar y proponer situaciones que requieran el uso de diferentes técnicas de conteo y de principios combinatorios para asignar probabilidades. (p4)
Alfabetización	Reconocer variables involucradas en una situación dada (a5)
Razonamiento	Precisar las variables y sus posibles valores; determinar si es de tipo cualitativo o cuantitativo (r5)
Pensamiento	Expresar conclusiones acerca de un estudio relacionando varias de las variables involucradas (p5).
Alfabetización	Reconocer el carácter finito o infinito de un espacio muestral (a6)
Razonamiento	Explicar por qué el espacio muestral puede efectivamente ser finito o infinito (r6)
Pensamiento	Proponer ejemplos de experimentos en los que el espacio muestral sea infinito y/o en los que las técnicas de conteo no sean suficientes para determinar la probabilidad de eventos (p6)
Alfabetización	Reconocer subconjuntos del espacio muestral que conforman eventos (a7)
Razonamiento	Explicar, a través de cualquier tipo de representación, cómo distintas agrupaciones de subconjuntos disyuntos del espacio muestral forman particiones (r7)
Pensamiento	Proponer criterios pertinentes a la situación que generen particiones del espacio muestral (p7)
Alfabetización	Reconocer que se pueden definir funciones a partir de conjuntos no numéricos (a8)
Razonamiento	Darse cuenta que las variables involucradas en una situación definen particiones de un espacio muestral y generan relaciones (r8.1) Caracterizar las relaciones entre espacios muestrales y conjuntos como funciones (r8.2) Explicar, a través de cualquier tipo de representación, que las funciones cuyo dominio es un espacio muestral y el recorrido es numérico se consideran variables aleatorias (r8.3)
Pensamiento	Proponer variables aleatorias relevantes a una situación (p8)

Proceso	Indicadores
Alfabetización	Identificar subconjuntos de un espacio muestral asociados a valores de una variable aleatoria (a9)
Razonamiento	Explicar que los subconjuntos asociados a los valores de la variable aleatoria conforman una partición del espacio muestral del experimento aleatorio (r9)
Pensamiento	Evaluar particiones de un conjunto como posibles formadoras de una variable aleatoria
Alfabetización	Cuantificar los resultados favorables asociados a un evento (a10.1) Calcular la probabilidad de un evento, al realizar el cociente entre la cantidad de resultados favorables y el número total de resultados (a10.2)
Razonamiento	Explicar que la cantidad de resultados favorables corresponde al número de posibles resultados incluidos en cada parte de la partición (r10.1) Precisar el espacio muestral que origina el número total de resultados (r10.2) Explicar que el número total de resultados, que corresponden a cada conjunto de la partición del espacio muestral en relación con el total de repeticiones del experimento realizado, puede servir para definir una probabilidad (r10.3) Explicar por qué es razonable esperar que los valores de las probabilidades a posteriori se aproximen a los valores de las probabilidades a priori en situaciones donde aplique (r10.4)
Pensamiento	Considerar la cantidad de resultados favorables como la frecuencia de cada valor de la variable aleatoria (p10.1) Determinar en una situación dada si es posible establecer probabilidades a priori o a posteriori (p10.2) Proponer situaciones en donde sea posible determinar probabilidades a priori y/o a posteriori (p10.3) Determinar frecuencias hipotéticas de repetición de un resultado particular (p10.4) Sugerir mecanismos para evaluar si las probabilidades a posteriori se aproximan a los valores de las probabilidades a priori en situaciones donde aplique (p10.5)
Alfabetización	Calcular la probabilidad de un evento con base en probabilidades de otros eventos (a11)
Razonamiento	Explicar cómo el cálculo de la probabilidad de una combinación de eventos depende de si los eventos que la componen son excluyentes o independientes (r11)
Pensamiento	Generalizar la manera como se calcula la probabilidad de una unión de tres o más eventos (p11)

Proceso	Indicadores
Alfabetización	Notar la coherencia de las probabilidades calculadas con el posible espacio muestral asociado al experimento aleatorio (a12).
Razonamiento	Establecer la relación entre los elementos de la partición y las probabilidades de los eventos (r12.1) Establecer la existencia de una relación funcional entre el recorrido de la variable aleatoria y las probabilidades de los eventos (r12.2) Explicar que se puede definir una variable aleatoria en cualquier situación de experimentos aleatorios (r12.3) Darse cuenta y explicar el sentido de la variable aleatoria en el cálculo de probabilidades (r12.4)
Pensamiento	Proponer situaciones que involucren relaciones funcionales entre el recorrido de variables aleatorias y el intervalo [0,1], que representen funciones de probabilidad (p12).
Alfabetización	Calcular probabilidades de eventos conjuntos (a13)
Razonamiento	Darse cuenta que la estimación de probabilidades de eventos marginales se puede establecer no solo para valores puntuales sino para grupos de valores de variables (r13.1) Darse cuenta que la identificación de probabilidades máximas de eventos marginales no necesariamente corresponden a las probabilidades máximas de eventos conjuntos (r13.2)
Pensamiento	Evaluar probabilidades de diferentes eventos con base en tablas de contingencia (p13)
Alfabetización	Calcular la probabilidad de eventos en experimentos que se repiten (a14.1) Calcular probabilidades de variables aleatorias de distribuciones binomiales, hipergeométricas, entre otras, recurriendo a sus fórmulas (a14.2)
Razonamiento	Caracterizar experimentos aleatorios de tipo binomial, geométrico, hipergeométrico, etc. (r14)
Pensamiento	Generalizar en situaciones de experimentos binomiales, hipergeométricos y otros, la manera de calcular probabilidades (p14.1) Proponer situaciones en donde tenga sentido el uso de variables aleatorias de diferentes tipos y sus respectivas funciones de probabilidad (binomial, hipergeométrica, geométrica) (p14.2)

Capítulo 3. Trayectoria hipotética de aprendizaje

La trayectoria hipotética de aprendizaje elaborada, abarca los componentes establecidos por Simon (1995), es decir, el objetivo de aprendizaje, el proceso hipotetico de aprendizaje, y los talleres con las tareas para clase que se consignan en los talleres construidos.

Objetivo de aprendizaje

Propiciar una aproximación a la definición de variable aleatoria, entendida como una relacional funcional entre eventos simples, asociados al espacio muestral de un experimento aleatorio, y valores numéricos, y discutir aspectos relacionados con su definición, tales como: el reconocimiento del espacio muestral 'original' y su diferenciación con el conjunto de valores de la variable aleatoria; la generación de una partición en el espacio muestral de un experimento aleatorio; la identificación de variables aleatorias discretas; la determinación de una función de probabilidad asociada a una variable aleatoria; la utilización de la función de probabilidad como herramienta de análisis para tomar decisiones ante situaciones de incertidumbre; y la aplicación de la conceptualización de variable aleatoria en un problema específico.

Proceso hipotético de aprendizaje

Inicialmente en el taller del espacio muestral, los estudiantes después de calcular probabilidades en situaciones de juegos de azar que les son familiares utilizando combinatoria, determinan el conjunto que consideran corresponde al espacio muestral. Se confronta entonces la escogencia de este conjunto con la definición conocida de espacio muestral, con el fin de que el estudiante note que está haciendo referencia al conjunto de valores de la variable aleatoria y determine cuál es en realidad el conjunto que está por detrás de los cálculos.

En el principal taller de la secuencia de instrucción, se plantea una situación donde el estudiante debe asumir el papel de asesor administrador de los gastos asociados a la realización de una rifa para los empleados de un centro comercial. En la primera parte de este taller se espera que los estudiantes, por un lado, identifiquen el experimento aleatorio implicado en la situación, así como cuáles y cuántos son los resultados del experimento que conforman los elementos del espacio muestral asociado; por otro lado, se desea que reconozcan el número de personas del núcleo familiar y el lugar de destino preferido, como las dos variables más relevantes en la toma de la decisión en juego; además, se pretende generar la necesidad de considerar tales variables como relaciones funcionales. Para la segunda de estas variables se espera que el estudiante note que la relación funcional incluye un conjunto no numérico y por lo tanto que no encaja en la definición usual de variable aleatoria, sino en la que se ha denominado variable seudo aleatoria[10].

Enseguida en el taller se suministra una base de datos con información concreta acerca de las variables consideradas (personas del núcleo familiar y lugar de preferencia), para facilitar la tarea de precisar las particiones del espacio muestral por parte de los estudiantes o en su defecto, para ayudar a replantear en una dirección más atinada las particiones que se hayan sugerido. En particular, se desea que los estudiantes, al comprobar si se satisfacen las propiedades de una partición (intersección vacía entre pares de subconjuntos diferentes de la partición y unión colectivamente exhaustiva de todos los subconjuntos que la componen), verifiquen la concordancia de sus respuestas con las que previamente han dado, bien sea para confirmarlas o bien para mejorar sus respuestas.

Las tareas de la tercera parte están orientadas a formalizar, a través de la situación trabajada, la definición de variable aleatoria como una relación funcional que tiene como dominio el espacio muestral asociado a los resultados de un experimento aleatorio, y como recorrido un conjunto numérico.

En la cuarta parte del taller hay lugar para la identificación de variables aleatorias en cinco casos distintos. En el primer y cuarto caso se explicita una valoración cuantitativa

10 Se considera como "variable seudo aleatoria", pues aunque el conjunto constituido por los tres lugares de preferencia (Londres, Paris y Roma) no es conjunto numérico, sí propicia una partición del espacio muestral que permite definir una relación funcional entre el conjunto de las ciudades dadas y el intervalo [0, 1] que satisface las propiedades de una asignación de probabilidad.

del fenómeno estocástico en cuestión, que puede contribuir a que en estos dos casos sean reconocidas las variables aleatorias. En el segundo y tercero, se presentan casos de experimentos aleatorios que no tienen una valoración cuantitativa; así, aunque en estos dos casos no existe variable aleatoria, se espera que sí se reconozca la posibilidad de enunciar asignaciones numéricas, que permita concretar una variable aleatoria; el ejemplo propuesto en el quinto caso se prevé como el más problemático: por un lado, la definición de la relación sugerida (anotar el resultado que más se repite entre cara y sello) no es funcional y, por otro lado, el codominio o conjunto de llegada considerado no es numérico.

La quinta parte traslada la discusión acerca de la variable aleatoria al asunto de la definición de su función de probabilidad y a la manera como se caracteriza y se distingue de la definición de la variable aleatoria. En otras palabras, se abre espacio para la discusión de las relaciones funcionales que se constituyen entre el espacio muestral, el recorrido de la variable aleatoria y el intervalo [0, 1] de los números reales. Se hace un énfasis deliberado en distinguir la definición de la variable aleatoria como tal, de la de su función de probabilidad, con base en la composición de la función de probabilidad y la variable aleatoria.

Para la sexta parte del taller se considera el asunto contextual de concluir con algún tipo de recomendación acerca del número de tiquetes por comprar y a dónde, que ayude a dar respuesta a las preguntas de la situación. Se espera que las tareas allí propuestas generen discusión en torno a la aplicabilidad del cálculo de probabilidades. Además de identificar el número de integrantes del núcleo familiar con mayor probabilidad y hacer una recomendación, se pretende que el estudiante llegue a una conclusión a partir del análisis de tablas de doble entrada, donde se espera que el estudiante pueda discernir entre dos situaciones diferenciadas: una, en la que los valores de las variables de la doble opción conjunta de máxima probabilidad coincide con los valores de las opciones marginales de máxima probabilidad, y el otro caso, en la que este hecho no se da.

Se finaliza con un caso ficticio de tráfico de drogas, en el que se espera que el estudiante haga uso implícito de la variable aleatoria y pueda calcular unas probabilidades asociadas al caso expuesto, para que luego a través de una pregunta cuestionadora sea capaz de identificar o explicitar cómo es que está presente, en el caso dado, el uso de una variable aleatoria.

Taller del espacio muestral

Parte 1. Cálculo de probabilidades

1. Resuelva las siguientes situaciones:

   a) Se lanza una moneda normal tres veces, calcular la probabilidad de que salgan dos caras.

   b) Se selecciona una bola de una urna, que contiene 3 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas, calcular la probabilidad de que salga verde.

2. Compare y discuta sus respuestas con su compañero hasta llegar a un consenso sobre cuáles son las adecuadas; escríbalas.
3. En cada situación determine y describa el experimento aleatorio que se realiza y explique por qué es aleatorio.
4. En cada situación reconstruya el proceso que siguió al calcular las probabilidades pedidas, y escríbalo paso a paso en palabras.

Parte 2. Experimento aleatorio y espacio muestral

1. Note que al calcular las probabilidades tuvo necesidad de tener en cuenta la cantidad total de los posibles resultados del experimento. Queremos ahora que no solo considere cuántos resultados son sino además cuáles son. Identifíquelos y escríbalos.
2. Para cada situación y utilizando una notación apropiada, exprese estos resultados como un conjunto de elementos. ¿Cómo se llama este conjunto en la teoría de probabilidad?
3. Para cada situación, calcule las probabilidades pedidas en el ítem 1, con base en los espacios muestrales encontrados.
4. Compare las respuestas anteriores encontradas en los ítems 1-a y 1-b, y si son diferentes, revise el espacio muestral para verificar si tuvo en cuenta todos los posibles resultados. De ser posible, escriba el espacio muestral de una manera diferente.
5. Con base en el trabajo realizado en los ítems anteriores, identifique cual es el experimento aleatorio y los posibles resultados que conforman el espacio muestral del experimento, en las siguientes situaciones:

Situación 1. Se selecciona al azar, un computador de la sala del B224 (que tiene 25 computadores) para verificar el funcionamiento de su sistema operacional.

Situación 2. De un listado de 8 estudiantes del primer semestre de matemáticas de 2011-1 se eligen al azar 2 estudiantes para ayudar en la organización de la semana del educador matemático.

Taller de variable aleatoria

Parte 1. Selección de un empleado

Para motivar a los trabajadores del Centro Comercial "Centro Zeta", el Departamento de Recursos Humanos va a seleccionar a uno de sus 120 empleados por medio de una rifa para adjudicarle un premio.

1. Describa en qué consiste el experimento aleatorio de la situación y argumente por qué es aleatorio.
2. Describa los posibles resultados del experimento aleatorio, es decir, explicite cuál es el espacio muestral.
3. Con base en el espacio muestral sugerido antes, ¿cuál es la probabilidad de que gane un empleado específico?
4. Dada la respuesta anterior, precise cuáles y cuántos son los posibles resultados del experimento, es decir, escriba el espacio muestral.

El premio consiste en un viaje familiar a Europa y de cada empleado se tiene información sobre el número de personas que componen su núcleo familiar y la ciudad que más preferiría visitar entre Londres, Roma o París. Antes de realizar la selección del empleado, los organizadores deben tomar una decisión sobre la compra de los tiquetes y el destino, ya que si compran más tiquetes, y el núcleo familiar del empleado es pequeño, perderán dinero; y viceversa, si el núcleo familiar del empleado seleccionado está compuesto por muchas personas y no compran suficientes tiquetes, los organizadores no cumplirán con lo ofrecido.

5. Identifique las variables con base en las cuales los organizadores deben tomar la decisión.
6. Si la base de datos de la empresa tiene la siguiente presentación

Nº	Nombre del empleado	Personas del núcleo familiar	Lugar de preferencia
1	E1	0	Roma
2	E2	1	París
3	E3	9	Roma
...	...	...	...

Considere el espacio muestral que usted identificó anteriormente, ¿es posible identificar alguna de las columnas como la que conforma tal espacio muestral? Explique.

7. a) De acuerdo con la base de datos anterior, y para cada variable considerada, indique cómo se pueden agrupar en subconjuntos los resultados del experimento consignados en el espacio muestral. Escriba dichos subconjuntos por comprensión.

   b) Describa los subconjuntos anteriores de manera verbal.

Socialización 1

Parte 2. Análisis de la base de datos de los empleados participantes

Tabla de datos de los empleados participantes en la rifa[11]

Nº	Nombre del empleado	Nº de hijos	Preferencia	Nº	Nombre del empleado	Nº de hijos	Preferencia
1	E1	0	Roma	61	E61	2	Roma
2	E2	1	París	62	E62	3	Roma
...	...	...	...	...	...	...	...

La matriz de la base de datos entregada presenta los datos recogidos acerca de los 120 empleados. Con base en esta información responda lo siguiente:

8. Calcule la probabilidad de que el núcleo familiar del empleado elegido esté constituido por tres personas.

9. Exprese como un conjunto por extensión, el evento con base en el cual calculó la probabilidad anterior.

10. Verifique si este conjunto es equivalente a alguno de los subconjuntos que escribió en el ítem 7(b). Si no es así, reelabore los subconjuntos del espacio muestral para las variables consideradas en la situación.

11 Aquí se presenta la misma tabla de datos que se presentó en el taller de la primera versión.

11. Considere todos los subconjuntos del espacio muestral que construyó para las variables "personas del núcleo familiar" y "lugar de preferencia", y compruebe si es cierto que:

    a) Para cada par de subconjuntos diferentes la intersección es vacía y,

    b) La unión de todos estos subconjuntos es el espacio muestral.

    En caso de que al menos una de las condiciones anteriores no se cumpla, haga una partición del espacio muestral según cada variable, que tenga sentido para determinar la compra de tiquetes. *Nota: recuerde que una partición del espacio muestral es una clasificación de sus elementos en subconjuntos cuya unión es el mismo espacio muestral y cuyas intersecciones entre pares de subconjuntos es vacía.*

12. Represente las particiones realizadas de dos maneras diferentes. Note que lo que se está pidiendo **no** es elaborar tablas de frecuencias sino esquemas gráficos o tabulares donde se evidencie la partición relacionada con los valores de la variable. Considere que una de las representaciones sea la sagital.

13. Dé ejemplos de probabilidades que sea posible calcular a partir de los otros subconjuntos del espacio muestral para la variable "personas del núcleo familiar".

14. Dé ejemplos de probabilidades que sea posible calcular a partir de los subconjuntos del espacio muestral para la variable "lugar de preferencia".

Socialización 2

Parte 3. Variable aleatoria

Considere el espacio muestral conformado por los 120 empleados elegibles.

15. Para el caso de cada partición elaborada en la parte anterior, al observar las representaciones sagitales presentadas en la socialización 2, discuta con su compañero si en ellas es posible reconocer relaciones y en caso afirmativo descríbalas en palabras.

16. De las relaciones identificadas antes, ¿algunas son funciones? Determine el dominio y el codominio de las que son funciones.

17. Las relaciones funcionales en donde el dominio corresponde a un espacio muestral y el codominio es numérico, se llaman variables aleatorias. Identifique cuáles de las relaciones consideradas son variables aleatorias.

Socialización 3

Parte 4. Situaciones sobre variables aleatorias

18. De las situaciones que se describen a continuación, establezca cuáles pueden ser variables aleatorias. Descríbalas en palabras e indique sus respectivos dominio y codominio.

    - Lanzar dos dados para determinar el valor absoluto de la diferencia de los resultados.
    - Tomar un artículo de un lote de 20 artículos de una fábrica, para determinar si está o no defectuoso.
    - Seleccionar al azar un estudiante de primer semestre de matemáticas para determinar la localidad de Bogotá en donde vive.
    - En una mano de 5 cartas tomadas de un mazo de 52 cartas, se cuenta la cantidad de picas.
    - Lanzar una moneda 4 veces y anotar el resultado que más se repite entre cara y sello.

Socialización 4

Parte 5. Función de probabilidad

A partir de la manipulación de la base de datos de los registros de los 120 empleados participantes en la rifa se pueden elaborar las siguientes tablas:

Tabla 1. Conjuntos de empleados y personas del núcleo familiar

Conjuntos de empleados	E1, E24, E28, E32, E68, E72, E8, E83, E90	E2, E43, E50, E55, E66, E79, E85, E88, E94, E101, E109, E112, E116	E4, E21, E34, E38, E42, E46, E51, E61, E64, E69, E70, E75, E80, E87, E93, E99, E100, E102, E107, E111	E5, E6, E7, E15, E16, E17, E18, E19, E23, E25, E26, E27, E29, E30, E31, E33, E41, E62, E63, E65, E76, E77, E78, E81, E84, E86, E91, E92	E9, E20, E35, E36, E40, E44, E47, E49, E53, E57, E59, E60, E67, E95, E96, E97, E115, E117, E118, E120	E10, E37, E39, E58, E74, E98, E104, E105, E106, E108, E110, E114	E11, E45, E54, E71, E73, E103, E113	E12, E48, E52, E56, E119	E13, E14, E82, E89	E3, E22
Personas del núcleo familiar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

19. Si se elige un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el núcleo familiar esté constituido por 5 personas? ¿por 4 personas? Determine todas las probabilidades de este tipo.

20. Para calcular las probabilidades anteriores usted debió considerar relaciones entre los conjuntos de empleados, el número de personas del núcleo familiar y las probabilidades. Explicite qué relaciones hay entre: los empleados que conforman el espacio muestral, el número de personas del núcleo familiar, y las probabilidades encontradas. Sugerencia: haga un gráfico que ilustre estas relaciones.

21. Señale y nombre en el gráfico anterior la relación funcional que identificó en la parte 3. Además, conjeture cuál es la relación funcional que se conoce como función de probabilidad y determine cuál es su dominio.

22. Un requisito necesario para que una función de probabilidad esté bien definida es que su dominio sea numérico. Verifique si el dominio de la función conjeturada es numérico, y en caso contrario revise su conjetura.

23. ¿Cuál es la relación entre la variable aleatoria establecida en la parte 3 y la función de probabilidad conjeturada?

Tabla 2. Conjuntos de empleados y lugar de preferencia

Conjuntos de empleados	E10, E102, E108, E111, E112, E14, E16, E19, E23, E27, E3, E32, E33, E40, E42, E44, E46, E48, E5, E50, E52, E53, E56, E57, E58, E60, E65, E66, E67, E70, E73, E76, E77, E8, E80, E81, E84, E85, E86, E89, E92, E96, E97, E98	E104, E106, E107, E11, E114, E115, E116, E118, E12, E15, E17, E18, E2, E20, E21, E28, E29, E31, E34, E35, E36, E37, E38, E43, E45, E47, E51, E6, E61, E69, E7, E71, E74, E79, E88, E9, E90, E91, E95, E99	E1, E100, E101, E103, E105, E109, E110, E113, E117, E119, E120, E13, E22, E24, E25, E26, E30, E39, E4, E41, E49, E54, E55, E59, E62, E63, E64, E68, E72, E75, E78, E82, E83, E87, E93, E94
Lugar de preferencia	París	Londres	Roma

24. Si se elige a un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera visitar París? Determine todas las probabilidades de este tipo.

25. Para calcular las probabilidades anteriores usted debió considerar relaciones entre los conjuntos de empleados, el lugar de preferencia y las probabilidades. Explicite qué relaciones hay entre: los empleados que conforman el espacio muestral, el lugar de preferencia y las probabilidades encontradas.

26. Determine si las relaciones que se pidió identificar en el punto 25 son funcionales y especifique cuáles son los dominios y recorridos de cada caso.

27. Determine si en este caso su puede definir una función de probabilidad y justifique por qué.

Socialización 5

Parte 6. Uso de las funciones de probabilidad

28. Ahora, con base en la información de las probabilidades encontradas en la parte anterior, explique cómo determinar:

- número de personas del núcleo familiar que es más probable que ocurra,
- lugar de preferencia que es más probable que ocurra.

29. Determine las siguientes probabilidades:

    - el núcleo familiar del empleado elegido tiene a lo más 3 personas,
    - el núcleo familiar del empleado elegido tiene lo más 4 personas,
    - el núcleo familiar del empleado elegido tiene a lo más 5 personas.

    ¿Cuál es el número mínimo de tiquetes por comprar que asegura, con una probabilidad superior al 60%, que le alcanzan al ganador de la rifa para todos sus integrantes?

30. Complete la siguiente tabla de frecuencias conjuntas y marginales, y a partir de esta, construya la respectiva tabla de probabilidades conjuntas y marginales.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Londres		5	8	8	8	5		1	0		40
París	2	4	6		8		1		2		44
Roma				7		3	3	1			36
Total	**9**	**13**	**20**	**28**	**20**	**12**	**7**	**5**	**4**	**2**	**120**

31. Verifique si los eventos con máxima probabilidad que encontró en el ítem 28, corresponden al evento conjunto con máxima probabilidad que se puede determinar en la tabla.

32. Concluya, con base en las probabilidades determinadas en esta parte, qué recomendación le daría a los organizadores de la rifa acerca del número de tiquetes por comprar y el lugar de preferencia por elegir.

33. Considere ahora una población de empleados en esta empresa tomada en otro momento, que se distribuye según la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Londres	1	2	7	11	12	5	2	1	0	0	41
París	0	2	2	7	10	10	7	4	2	0	44
Roma	4	3	3	10	4	3	3	1	2	2	35
Total	**5**	**7**	**12**	**28**	**26**	**18**	**12**	**6**	**4**	**2**	**120**

Verifique si también se cumple para esta tabla, lo que ocurrió con la tabla del punto 30, es decir, que las probabilidades marginales máximas se corresponden con su respectiva probabilidad conjunta. Explique qué recomendación daría en este caso y compárela con la recomendación dada para la primera población.

Socialización 6

Parte 7. Una aplicación

Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 4 cápsulas de cocaína en un frasco que contiene 14 cápsulas más de vitamina con similar apariencia. El procedimiento que usa el oficial de aduana para hacer un control antidroga es tomar una muestra aleatoria de 3 cápsulas para analizarlas.

Algunas de las probabilidades de que el oficial de aduana seleccione "x" número de cápsulas con cocaína se presentan en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3
Pr(x)	0,446078431	0,446078431	0,102941176	0,004901961

1. Determine la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos y explique los detalles del procedimiento seguido para dar su respuesta.
2. En el procedimiento anterior se requiere utilizar el concepto de variable aleatoria. Explique cómo y en qué momento lo utiliza.

Capítulo 4. Resultados

El análisis de los resultados encontrados en el trabajo de los estudiantes en el segundo y tercer experimento de enseñanza, se organiza en tablas, que incluyen los indicadores que atañen al trabajo propuesto, presentados en filas independientes, y respuestas textuales dadas por los estudiantes, con su respectiva interpretación, al lado. En la segunda tabla se ha utilizado la notación con mayusculas P1, P2, P3, etc., para identificar la pregunta del taller a la que corresponden las respuestas presentadas.

Análisis de respuestas de estudiantes en el segundo experimento de enseñanza

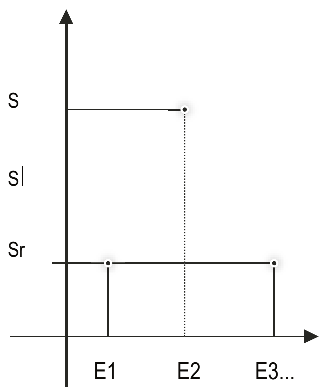
Reconocer que los posibles resultados de un experimento aleatorio dado son los que precisamente conforman un espacio muestral (a2.2)	
"Determinar cuántos tiquetes de viaje y gastos de hotel a un destino hay que comprar antes de la rifa"	Establecen el experimento aleatorio como la cantidad de tiquetes y gastos que debe conocer la empresa. Al parecer los estudiantes asignan mayor importancia al hecho mismo de los premios para el ganador y no al acto de escogencia en la rifa.
"Escoger 1 de los 120 empleados , el cual va a ser el ganador del premio"	Consideran el experimento como la escogencia del ganador entre los 120 empleados, pero no lo nombran como la rifa.
En una situación de la vida real, rica en información, precisar cuál es el experimento aleatorio asociado (p1.2)	
"El experimento consiste en escoger un empleado de 120 por medio de una rifa"	Identifican de manera explícita el experimento aleatorio en la situación de la rifa que es rica en información.

Reconocer el experimento aleatorio en una situación dada (a3)	
"El experimento consiste en determinar cuáles son las posibilidades de escoger al empleado, la cantidad de familiares y la ciudad que desea conocer"	No identifican el experimento. Parece que la información dada inicialmente es extensa y por ello es difícil discriminar lo que es relevante de la que no es.
"El experimento consiste en escoger un empleado de 120, por medio de una rifa para que se vaya de viaje con su familia (cónyuge e hijos) al destino que prefiera (Londres, Roma, París)"	Mencionan que el experimento es la escogencia de uno de los 120 empleados. Sin embargo, se incluye información de la ciudad de destino y la cantidad de miembros de la familia
Identificar los posibles resultados de un experimento (a2.1)	
"El espacio muestral son 120 personas. El tipo de resultados posibles es $\{G_1, P_1, P... P_{119}\}$, es decir, que alguien gane y el resto pierda"	Afirman que el espacio muestral son los 120 empleados. No hacen referencia a los posibles resultados, excepto un grupo que afirma que los posibles resultados es un ganador y el resto sean perdedores.
"El espacio muestral son los 120 empleados"	No representan el espacio con una notación adecuada, (algebraicamente) muestran incoherencias. Algunos estudiantes lo representan como un ganador y el resto de perdedores.
"S=Ganadores: todos los empleados"	No representan el espacio con una notación adecuada, (algebraicamente) muestran incoherencias. Algunos estudiantes lo representan como un ganador y el resto de perdedores.
"Dos espacios muestrales posibles: gana o pierde S={empleados} Los 120 empleados"	Representan el espacio muestral como un ganador y el resto de perdedores.

<table>
<tr><td>"S = {el empleado, su esposa e hijos}"

"S = {(E), (E, M), (E, M, H1), (E, M, H1, H2), (E, M, H1, H2, ..., HN), (E, H1), (E, H1, H2), ..., (E, H1, H2, ...,HN)} donde E = empleado, M = esposa si la tiene, H = hijos(as)"</td><td>Utilizan gran parte de la información contenida en el texto del problema, generando una "ampliación" de los posibles resultados del espacio muestral. Por otro lado, algunos consideran el espacio muestral dicotómico (ganar o perder), lo que podría ser consecuencia de la no identificación del experimento aleatorio y su independencia de las "seudo variables aleatorias"</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reconocer que los posibles resultados de un experimento aleatorio dado son los que precisamente conforman un espacio muestral (a2.2)</td></tr>
<tr><td>"Los posibles son uno por cada empleado, es decir, que un empleado gane, o sea son 120 posibles resultados"</td><td>No representan el espacio con una notación adecuada, (algebraicamente)</td></tr>
<tr><td>"El espacio muestral S es:

$S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_{119}, P_{120}\}$"</td><td>Los estudiantes afirman que el espacio muestral son los 120 empleados.</td></tr>
<tr><td>$S = \left(\frac{120}{1}\right)$</td><td>Representan el espacio muestral como una cantidad, y no con sus elementos constituyentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explicar con base en una estrategia sistemática, cómo se forman los posibles resultados que configuran el espacio muestral. (r2.1)</td></tr>
<tr><td>"El ganar o perder se refiere a que cada empleado tiene un 0.5 de probabilidad de ganar y un 0.5 de probabilidad de perder"</td><td rowspan="3">Dan descripciones de la situación propuesta, pero no presentan argumentos que la expliquen.</td></tr>
<tr><td>"Posibles ganadores: todos tienen la misma probabilidad de ganar 1/120 (apoyamos esta)"</td></tr>
<tr><td>"Único resultado: ganador. Se asume que para todos los empleados la probabilidad de ganar es 1"</td></tr>
</table>

Identificar la cantidad de posibles resultados en espacios muestrales sencillos y en eventos asociados a estos (a3)	
“A: Evento en donde la familia se compone de un integrante B: Evento en donde la familia se compone de dos integrantes C: Evento en donde la familia se compone de tres integrantes D: Evento en donde la familia se compone de cuatro integrantes .... I: Evento en donde la familia se compone de nueve integrantes”	Identifican los posibles resultados basados en la definición de espacio muestral. De la misma manera, algunos reconocen los posibles eventos, después de observar la tabla reconocen para la variable personas del núcleo familiar un total de 9 eventos.
“Posibles resultados: {gpp... p, pgpp... p, ...}” Número de elementos: $\frac{120!}{1!119!} = 120$	Establecen que los posibles resultados son un ganador y 119 perdedores. Plantean el número de elementos del espacio muestral en términos de una fórmula combinatoria.
Reconocer subconjuntos del espacio muestral que conforman eventos (a7)	
“Definimos 9 eventos como A, B, C, D, E, F, H, I..., donde: A: es el evento donde la familia se compone de un integrante B: es el evento donde la familia se compone de dos integrantes...”	Explicitan particiones del espacio muestral. En particular, reconocen particiones de acuerdo al número de hijos.
Darse cuenta que las variables involucradas en una situación definen particiones de un espacio muestral y generan relaciones (r8.1)	
“Con Sp = París Sl = Londres Sr = Roma”  	Realizan agrupaciones, pero no alcanzan a ver que estas generan una partición del espacio muestral. Una de las dificultades que probablemente se hace evidente en la obtención de los subconjuntos que conforman las particiones, se debe a que los estudiantes relacionan la palabra agrupar en estadística con frecuencias a través del conteo de los elementos que cumplen una característica particular.

<table>
<tr>
<td>

“a. Organización a partir de la variable “Nombre del empleado”, se puede organizar alfabéticamente.

b. Organización por “# de integrantes”, se organiza en orden de mayor a menor cantidad de familiares.

c. “Destino deseado”, se propone organizar de la siguiente manera: primero todos los que desean ir a Roma, luego los que desean ir a París y por último todos los que desean ir a Londres”.

</td>
<td>Relacionan la palabra agrupar con organizar, e indican cómo ordenar. No reconocen que a partir de las variables se generan agrupaciones que permiten construir particiones del espacio muestral.</td>
</tr>
<tr>
<td>

“Se puede agrupar con respecto a:

- El destino
- Intervalos en donde se relacione la cantidad de hijos + el cónyuge”

</td>
<td>Relacionan las agrupaciones con la frecuencia de los datos, mas no como la partición de los espacios muestrales.</td>
</tr>
<tr>
<td>

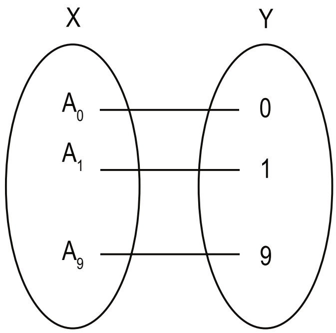
“Roma $\{E_1, E_3, E_{13}, E_{24}, E_{29}, E_{30}, E_{37}, E_{40}, ..., E_{116}\}$

Paris $\{E_2, E_6, E_7, E_{10}, E_{12}, E_{14}, E_{15}, E_{19}, ..., E_{112}\}$

Londres $\{E_4, E_5, E_9, E_{11}, E_{16}, E_{17}, E_{18}, E_{23}, ..., E_{120}\}$”

<table>
<tr><td>0</td><td>$E_1, E_8, E_{24}, E_{32}, E_{40}, E_{83}, E_{72}, E_{68}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$E_2, E_{43}, E_{50}, E_{55}, E_{116}, E_{112}, ..., E_{66}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$E_4, E_{21}, E_{34}, E_{38}, E_{42}, E_{46}, ..., E_{111}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$E_5, E_6, E_7, E_{15}, E_{16}, E_{17}, E_{18}, ..., E_{92}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
</table>

</td>
<td>Agrupan de acuerdo al número de hijos y luego de acuerdo a la ciudad que prefiere el empleado. Se están generando particiones del espacio muestral; nombran cada empleado en un grupo. Logran identificar las particiones.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Proponer variables aleatorias relevantes a una situación (p8)</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

En algunos casos asignan números a los empleados, entre 1 y 120, otros estudiantes asignan letras con subíndices numéricos entre 1 y 120.

La asociación se hace del subíndice del empleado al número correspondiente, quizás inducida por la formación de los subconjuntos del espacio muestral y la indicación de que cada persona puede tener a lo más 9 integrantes en la familia

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Explicar que el número de resultados obtenidos en la realización del experimento que corresponden a cada elemento de la partición del espacio muestral en relación con el total de repeticiones del experimento realizado puede servir para definir una probabilidad. (r10.3)</th></tr>
<tr><td>“La probabilidad de escoger alguno de tres destinos es de $\frac{1}{3}$

La probabilidad de establecer la cantidad de personas que viajan, se establece de acuerdo al número de intervalos que se hagan”</td><td>Asumen la equiprobabilidad del espacio muestral, pero en las preguntas posteriores debe asumir la no equiprobabilidad.

Al ver que hay tres destinos para la rifa, hallan la probabilidad sin tener en cuenta las veces que se repite cada una de las ciudades de destino.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Calcular la probabilidad de un evento al realizar el cociente entre la cantidad de resultados favorables y el número total de resultados (a10.2)</th></tr>
<tr><td>“Definimos 9 eventos como A, B, C, D, E, F, H, I y la probabilidad de cada evento es:

$P(A)=\frac{\#A}{120}, P(B)=\frac{\#B}{120}$

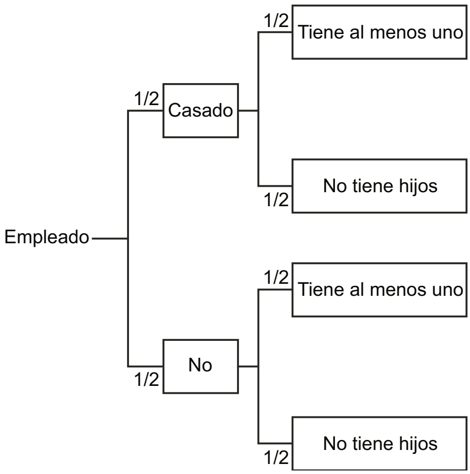
$P(C)=\frac{\#C}{120}, P(D)=\frac{\#D}{120}$

$P(A)=\frac{\#A}{120}, P(B)=\frac{\#B}{120}$ ...

A: es el evento donde la familia se compone de un integrante

B: es el evento donde la familia se compone de dos integrantes

C: es el evento donde la familia se compone de tres integrantes...”</td><td>Reconocen y especifican los eventos del experimento dado aunque las particiones no se expresan explícitamente; calculan la probabilidad desde una visión clásica.</td></tr>
</table>

 “P: es casado P^c: no es casado”	Calculan las probabilidades por medio de diagramas de árbol. Consideran probabilidades como ½ el ser o no casado, información que no es pertinente para la situación. Plantean las probabilidades de eventos que consideran relevantes, dejando de lado otros eventos.

Los estudiantes manifiestan dificultades al identificar el experimento aleatorio de la situación de la rifa y lo determinan como alguno de los sucesos de la situación, relacionado con los datos relevantes para responder la pregunta que se pide contestar. Aunque hay evidencias de que los estudiantes tienen una idea de experimento aleatorio acorde con definiciones de los libros de texto, esta idea parece limitada al tipo de tareas que han trabajado, que están constituidas por un enunciado corto donde se describe el experimento de manera concisa y se señala la observación que se debe hacer; en contraste la situación propuesta no es habitual en la enseñanza, y, por lo tanto, no se ha establecido explícitamente como un fenómeno aleatorio, y además es rica en información.

El reconocimiento del experimento aleatorio parece no garantizar la determinación del espacio muestral, pues aunque algunos estudiantes sí señalan la situación de la rifa como el experimento aleatorio, de alguna manera intentan encajar el espacio muestral dentro de las características de los espacios muestrales que han trabajo con mayor énfasis, es decir, situaciones que corresponden a juegos de azar. Esta confusión parece motivada por la rifa como un suceso familiar de la vida cotidiana, pero que no se ha trabajado matemáticamente, pues aunque hay evidentemente solo dos posibles resultados para un participante, ganar o perder, el espacio muestral no está constituido por dos puntos muestrales. La tendencia a confundir los resultados de la observación mediada por el propósito del experimento con los resultados de la observación de la acción aleatoria misma, y proponer espacios muestrales en términos de dos resultados como 'si' y 'no', 'falso' y 'verdadero', '0' y '1', puede estar fundamentada también en el foco de la enseñanza en las tareas relativas a distribuciones binomiales.

Aún después de puntualizar los posibles resultados del experimento aleatorio, al momento de expresar el espacio muestral varios estudiantes no lo reconocen como el conjunto conformado por ellos. Aquí de nuevo parece incidir el trabajo usual donde el espacio muestral se piensa ligado a la observación solicitada, es decir, en términos de la característica que interesa observar. Entonces, en el espacio muestral estos estudiantes reflejan información del enunciado que coincide con los valores de las variables, ya sean variables aleatorias o no, o con combinaciones de esos valores.

También los estudiantes muestran problemas al expresar el espacio muestral de manera formal, es decir, utilizando notación de conjunto para explicitarlo por comprensión o por extensión. A veces los estudiantes expresan el cardinal del espacio muestral, notado como conjunto, es decir, el número de posibles resultados más no los resultados. Concerniente a este número de puntos muestrales del espacio muestral, cabe resaltar que los estudiantes emplean las fórmulas conocidas para llegar a dicha cantidad, a pesar de que a simple vista pueda establecerse.

A través de los errores cometidos por los estudiantes al explicitar los puntos muestrales, se detectan dificultades relativas a cómo se forman éstos, si es por medio de permutaciones o combinaciones y si la repetición o no-repetición de elementos es relevante. De nuevo aquí parece que el hecho de que la situación sea ajena a los experimentos aleatorios regularmente presentados en los libros de texto, lleva a los estudiantes a asociar la situación con una ya trabajada como la de establecer el número de ordenaciones con elementos repetidos. Al respecto, en libros de texto en el proyecto se han identificado inconsistencias en el uso de la notación al denotar, por ejemplo, en forma de parejas ordenadas configuraciones de elementos que corresponden a combinaciones donde el orden no es relevante (ver Wisniewski y Bali, 1998).

Las respuestas de los estudiantes dejan ver que para el cálculo de las probabilidades tienen en cuenta las particiones que han hecho del espacio muestral de acuerdo a los valores de las variables y, por consiguiente, consideran los subconjuntos del espacio muestral que establecieron, y reconocen relaciones entre conjuntos numéricos y no numéricos, algunas como funciones. No obstante, aunque se hayan aproximado a la comprensión de la variable aleatoria como relación funcional y a sus implicaciones en el cálculo de las probabilidades, no hay evidencia de que el trabajo realizado sea distinto de lo que hubieran llevado a cabo previamente a su participación en el experimento de enseñanza. Algo diferente podría verse si los estudiantes indicaran las probabilidades para todos los eventos posibles generados por los valores de las variables.

Las posibles dificultades que subyacen a los errores evidenciados en los estudiantes, llaman la atención, pues pese a ellas, los estudiantes tienen éxito al resolver tareas que implican emplear diagramas y fórmulas combinatorias para calcular probabilidades.

Análisis de respuestas de estudiantes en el tercer experimento de enseñanza

Respuestas de los estudiantes	Interpretación
Reconocer en la realización de un experimento si es determinista o aleatorio (a1.1)	
"Es aleatorio, ya que no conocemos cuál de los 120 individuos sean seleccionados con certeza" P1	Reconocen que el experimento es aleatorio, al justificar la afirmación que se plantea en el taller indicando que es una rifa, o al explicar por qué es aleatorio.
"El experimento aleatorio consiste en adjudicarle un premio a un empleado por medio de una rifa" P1	
Explicar características de los experimentos deterministas y aleatorios (r1)	
"El experimento es aleatorio porque al realizar el experimento bajo las mismas condiciones se pueden obtener diferentes resultados" P1	Explican por qué el experimento es aleatorio con base en las definiciones que presentan los libros de texto. Sin embargo, las características expuestas no están dadas en términos del contexto de la situación de la rifa.
"Es aleatorio porque es posible describir el conjunto de posibles resultados" P1	
"Es aleatorio porque a medida que se realiza el experimento, nos podemos acercar a un patrón o regularidad" P1	
"Es aleatorio porque es posible repetir indefinidamente el mismo experimento, sin cambiar las condiciones" P1	

Dividir el enunciado de la situación de la rifa y aislar la acción que constituye el experimento aleatorio, permite que los estudiantes fácilmente reconozcan el experimento aleatorio, e incluso den explicaciones de por qué es aleatorio. A pesar de que situaciones como la de la rifa no son habituales en la enseñanza, si es claro para los estudiantes por ser una rifa una circunstancia común a la vida diaria, que esta conforma una acción que es aleatoria. Aunque lo ideal hubiera sido que los estudiantes pudieran en un enunciado no usual en la enseñanza y rico en información, identificar el experimento aleatorio, dividirlo pudo ayudar también a que los estudiantes comenzaran a familiarizarse con otro tipo de experimentos aleatorios desde las matemáticas.

<table>
<tr><th colspan="2">Identificar los posibles resultados de un experimento (aleatorio) (a2.1)</th></tr>
<tr><td>“El espacio muestral S está conformado por 120 puntos muestrales” P4</td><td rowspan="3">Identifican los posibles resultados de la rifa, y los asocian al espacio muestral; algunos estudiantes los presentan notación de conjunto, y además señalan la cantidad de elementos del espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>“Los posibles resultados del experimento son 120 y serían
$S = \{E_1, E_2, E_3, ..., E_{120}\}$” P4</td></tr>
<tr><td>“Sea S el espacio muestral y E_j el i-ésimo empleado, entonces $S = \{E_1, E_2, E_3, ...E_{120}\}$” P2</td></tr>
<tr><td>“S_n= {1 empleado, 2 empleados, ... 120 empleados}” P4</td><td rowspan="4">Expresan de manera confusa los posibles resultados de la rifa, pero si los asocian al espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>“El espacio muestral se podría definir con los números del 1 al 120 si asignamos un número diferente a cada empleado” P2</td></tr>
<tr><td>“El espacio muestral es cada uno de los 120 empleados” P2</td></tr>
<tr><td>“Personas = $\{P_1, P_2, P_3, ... P_{120}\}$
Eventos posibles
• se elige P1
• se elige P_2
Entonces elegir una sola persona de las 120” P2</td></tr>
</table>

"Primero determinamos todas las combinaciones que de las 18 cápsulas puede escoger 3, es decir; $\binom{18}{3} = 816$" P7.1	Identifican la forma y la cantidad de los posibles resultados del experimento aleatorio, al realizar conteos combinatorios.
Reconocer que los posibles resultados de un experimento aleatorio dado son los que precisamente conforman un espacio muestral (a2.2)	
"Tomando como dominio el espacio muestral compuesto por todas las combinaciones de tríos que se pueden formar con las cápsulas" P7.1	Explican cómos se forman los posibles resultados del experimento aleatorio, y reconocen que el espacio muestral está conformado esos resultados.
Identificar la cantidad de posibles resultados en espacios muestrales sencillos y en eventos asociados a estos (a3)	
"S_n= {120 empleados}; Espacio muestral 120 empleados" P2	Identifican la cantidad de elementos del espacio muestral. Algunos estudiantes evidencian problemas en la notación de conjunto.
"El espacio muestral S está conformado por 120 puntos muestrales" P4	
"Asignamos a cada persona con un número, bajo ninguna condición, solo que a cada uno le corresponde un número natural entre 1 y 120. El espacio muestral es: S = E_1, E_2, ..., E_{120}" P4	
"Determinamos todas las combinaciones, que de las 18 cápsulas puede escoger 3, es decir; $\binom{18}{3} = 816$" P7.1	

De manera similar, el cambio a las preguntas del taller con respecto a los posibles resultados del experimento aleatorio y el espacio muestral, identificándolos explícitamente, lleva a que los estudiantes no presenten problemas al establecer el espacio muestral como el conjunto de los posibles resultados. A pesar de que esta modificación podría considerarse demasiado dirigida, se optó por ella al comprobar que los estudiantes son capaces de recitar adecuadamente la definición de espacio muestral como el conjunto de los posibles resultados, pero en un enunciado con información diversa, intentan encajar el espacio muestral que consideran algo formal de las matemáticas, en términos de los espacios muestrales ya abordados e incluir dicha información en los puntos muestrales.

Es de anotar que este avance de los estudiantes también tiene fundamento en el taller de espacios muestrales que se realizó inmediatamente antes de poner en práctica esta versión del taller de variable aleatoria. Dicho taller condujo a que los estudiantes se dieron cuenta de que en algunas situaciones el espacio muestral es distinto al que inicialmente ellos consideraron. Vieron entonces que con frecuencia el espacio muestral que se emplea o se presenta en las tareas, es el que se ha llamado 'adoptado', es decir, es el conjunto de valores de la variable aleatoria en cuestión.

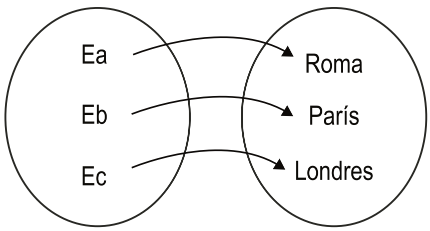
<table>
<tr><th colspan="2">Reconocer variables involucradas en una situación dada (a5)</th></tr>
<tr><td>"Las variables en la toma de la decisión por parte de los organizadores son "destino" y "cantidad de personas" que componen el grupo familiar" P5</td><td rowspan="5">Reconocen las variables involucradas en la situación. Algunos estudiantes notan las variables con las letras X y Y como en los cursos de cálculo.</td></tr>
<tr><td>"Las variables que se deben tener en cuenta son el número de personas del núcleo familiar y el destino al que quieren ir" P5</td></tr>
<tr><td>"X (Número de personas del núcleo familiar).

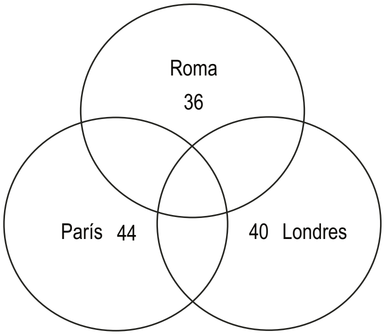
Y (ciudad de preferencia)" P5</td></tr>
<tr><td>"Variables:
Número de personas que componen el núcleo familiar de cada empleado.
Lugar de preferencia de cada empleado para visitar" P5</td></tr>
<tr><td>"Variables=: Número de personas de cada núcleo familiar. Destino de preferencia, entre Roma, Londres, París" P5</td></tr>
<tr><td>"Empleado
Número de personas que conforman el núcleo familiar.
Lugar de preferencia" P5</td><td>Reconocen las variables involucradas en la situación, pero se asumen los elementos mismos del espacio muestral, es decir los empleados, como una variable.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Pr(x)</td><td>0,446078</td><td>0,4460</td><td>0,102941176</td><td>0,004901961</td></tr></table>P7.1</td><td>Reconocen implícitamente a través de la observación de la tabla que la variable involucrada en esta situación es el número de cápsulas de cocaína que puede sacar el viajero.</td></tr>
</table>

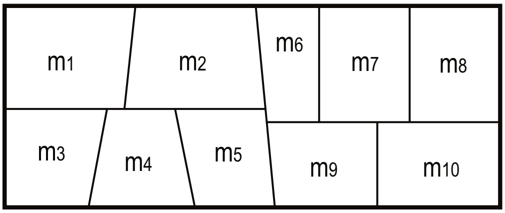
Reconocer subconjuntos del espacio muestral que conforman eventos (a7)	
"Para la variable Y, hay tres subconjuntos: A = {Londres} B = {Paris} C = {Roma} Para la variable X hay diez subconjuntos (tomando que hay 10 personas por máximo en el núcleo familiar) M_i, 1 < i < 10" P7	Reconocen subconjuntos determinados por valores de las variables. No indican los elementos de los subconjuntos.
"S = {En}, Donde 0 < n ≤ 120, $n \in Z$ T= {An}, Donde $n \in Z$, tal que 0 < n ≤ 3 A1 Roma A2 París A3 Londres B = {n}, donde $n \in N$" P10	
"Núcleo del empleado elegido = 3 F3 = {E4, E21, E34, E38, E42, E46, E51, E61, E64, E68, E70, E75, E80, E87, E93, E99, E100, E102, E107, E111}" P9 (f5)	Reconocen subconjuntos del espacio muestral determinados por valores de las variables, e indican los elementos de tales subconjuntos al expresarlos por extensión. Algunos estudiantes identifican estos subconjuntos como eventos.
"El conjunto expresado por extensión es : Evento = {E4, E21, E34, E38, E42, E46, E51, E61, E64, E68, E70, E75, E80, E87, E93, E99, E100, E102, E107, E111} Donde E_i es el empleado cuyo núcleo familiar está conformado por tres personas" P9	
"Nk = Subconjuntos N1 = {E1, E8, E24, E28, E32, E68, E70, E72, E83, E90} N2 = {E2, E43, E50, E55, E66, E79, E85, E94, E101, E109, E112, E116} ... N10 = {E3, E22}" P10	
"Para la variable *xi* los subconjuntos son: $\|M_1\|$ = 9 $\|M_2\|$ = 13 ... $\|M_{10}\|$ = 2 $\|M_1\|$ Es el cardinal del subconjunto que cumple las características M_i mencionados en el punto 7" P10	Reconocen subconjuntos del espacio muestral determinados por valores de las variables, al diferenciar el cardinal de los subconjuntos. Expresan los subconjuntos por comprensión.

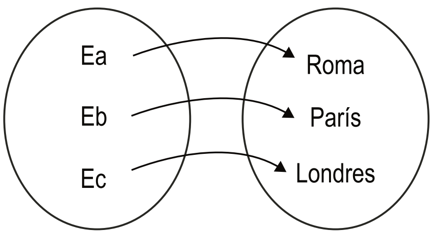
“$m_1 \longrightarrow 1$ $m_2 \longrightarrow 2$ … $m_{10} \longrightarrow 10$” P15	Reconocen subconjuntos del espacio muestral determinados por valores de las variables, al establecer relaciones.
“El conjunto de los destinos hacia el conjunto determinado por grupos de empleados con ese destino” P15	

Los estudiantes identifican las variables involucradas en las situaciones, reconocen que sus valores determinan particiones del espacio muestral y que los subconjuntos que las constituyen son eventos.

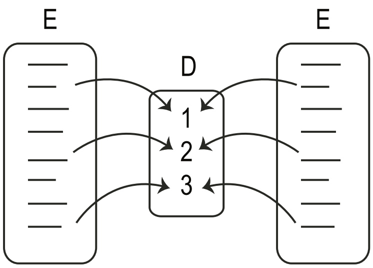
Explicar, a través de cualquier tipo de representación, cómo distintas agrupaciones de subconjuntos disyuntos del espacio muestral, forman particiones (r7)	
“Dominio: El conjunto de cardinales del número de familiares, el Codominio: El conjunto de subconjuntos de empleados que tienen igual número de familiares” P15	Muestran a través del lenguaje natural y diagramas sagitales, subconjuntos del espacio muestral. Aunque no indican explícitamente que sean disyuntos, se puede asumir que los estudiantes se dan cuenta que no tienen elementos en común porque la correspondencia que establecen es uno a uno. Falta sin embargo, información para determinar si la unión de los subconjuntos es el espacio muestral y, por lo tanto, forman una partición.
 P15 (f4)	

<table>
<tr>
<td>

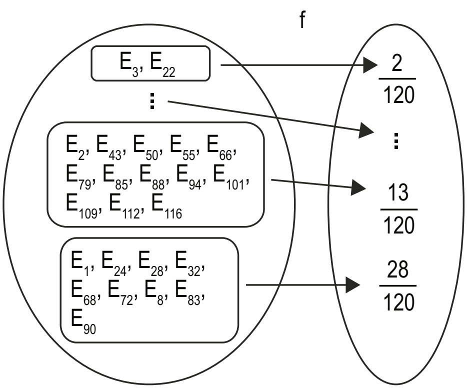
P15 (f1)</td>
<td rowspan="2">Muestran a través de diagramas de Venn y figuras geométricas, subconjuntos del espacio muestral. Se puede asumir que los estudiantes se dan cuenta de que no tiene elementos en común, que la unión de los subconjuntos es el espacio muestral y que, por lo tanto, forman una partición, porque en los dibujos las intersecciones son vacías y los subconjuntos abarcan todo el espacio muestral.</td>
</tr>
<tr>
<td>

“m_i subconjuntos de empleados con núcleo familiar” P15</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Reconocer que se pueden definir funciones a partir de conjuntos no numéricos (a8)</td>
</tr>
<tr>
<td>“E_A, E_B, E_C: Dominio; París, Roma, Londres: Codominio” P16</td>
<td rowspan="3">Reconocen relaciones a partir de conjuntos no numéricos. Se puede asumir que los estudiantes se dan cuenta que es una función porque establecen una correspondencia donde a cada elemento del dominio le corresponde solo un elemento del recorrido. Cabe notar que en las respuestas de algunos estudiantes, los elementos del dominio son subconjuntos, es decir, el dominio es una partición del espacio muestral y no el espacio muestral.</td>
</tr>
<tr>
<td>

“Dominio: conjunto de empleados. Codominio: lugar de preferencia” P16</td>
</tr>
<tr>
<td>“m_1, m_2, m_3, ... m_{10}: Dominio; 1, 2, 3, 4 ...10: Codominio” P16</td>
</tr>
</table>

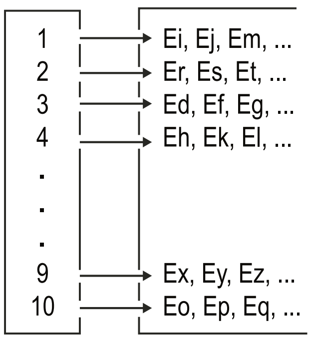
<table>
<tr><td>

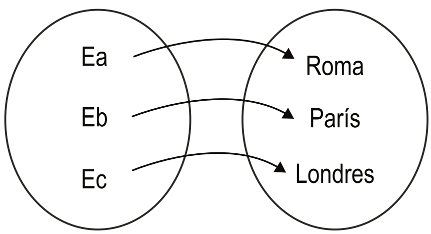
“Dom f: el conjunto de todos los empleados

Codom f: el conjunto de los destinos independientemente del conjunto de codominio, si es numérico, es una variable aleatoria; el dominio es el espacio muestral” P16 y P17</td><td></td></tr>
<tr><td>“Dominio: conjunto de empleados; Codominio: cantidad de personas del núcleo familiar” P16</td><td rowspan="5">Reconocen relaciones a partir de conjuntos no numéricos. Se puede asumir que los estudiantes se dan cuenta que es una función porque establecen una correspondencia donde a cada elemento del dominio le corresponde solo un elemento del recorrido. Cabe notar que en las respuestas de algunos estudiantes, los elementos del dominio son subconjuntos, es decir, el dominio es una partición del espacio muestral y no el espacio muestral.</td></tr>
<tr><td>“Dominio: las distintas formas en que pueden salir las 3 cápsulas $\binom{18}{3}$; Codominio: 0, 1, 2, y 3 ...” P7.2</td></tr>
<tr><td>

P20</td></tr>
<tr><td>“Lo identificamos tomando como domino el espacio muestral compuesto por todas las combinación de tríos que se pueden forman con las cápsulas y el rango como la probabilidad que se le puede dar a los subconjuntos que tienen 0, 1, 2, 3 cápsulas de cocaína” P7.2</td></tr>
<tr><td>“El dominio corresponde a las capsulas que hay en el frasco, y el codominio corresponde a las probabilidades de sacar 0, 1, 2, ó 3 capsulas de cocaína” P7.2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>"E_1, E_2, E_3, ..., E_{120}: Dominio;

Roma, París, Londres: Codominio" P16</td><td>Reconocen una relación a partir de conjuntos no numéricos pero no es evidente si la ven como función.</td></tr>
<tr><td>"Es una relación funcional donde el dominio es el espacio muestral del evento y su codominio es un conjunto numérico..." P7.2</td><td>Reconocen una relación funcional a partir de conjuntos no numéricos pero hay un error de lenguaje.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Darse cuenta que las variables involucradas en una situación definen particiones de un espacio muestral y generan relaciones (r8.1)</td></tr>
<tr><td>

"El conjunto de cardinales del número de familiares se relaciona con el conjunto de subconjuntos de empleados que tienen igual número de familiares" P15</td><td rowspan="3">Notan que los valores de las variables determinan subconjuntos del espacio muestral. Establecen la relación entre dichos subconjuntos y los valores. Para algunos estudiantes esta relación puede darse en cualquiera de los dos sentidos. Puede asumirse que los estudiantes se dan cuenta de que estos subconjuntos no tienen elementos en común por la correspondencia que establecen, que es uno a uno. No se aclara si el dominio de la relación es el espacio muestral o la partición.</td></tr>
<tr><td>"El conjunto de los destinos hacia el conjunto determinado por grupos de empleados con ese destino... conjunto por grupos de empleados hacia el conjunto de los destinos" P15</td></tr>
<tr><td>"Se reconoce la relación de empleado con destino ($E_m\ RL_u$)"


P15 (f2)</td></tr>
</table>

“m_i subconjuntos de empleados con núcleo familiar i $m_1 \longrightarrow 9$ $m_2 \longrightarrow 13$ $m_3 \longrightarrow 20$ ... $m_9 \longrightarrow 4$ $m_{10} \longrightarrow$ 12” P15 (f1)	Identifican subconjuntos determinados por los valores de la variable ‘número de familiares’. Puede asumirse que los estudiantes se dan cuenta de que estos subconjuntos no tienen elementos en común por la correspondencia que establecen, que es uno a uno. La relación que muestran es entre dichos subconjuntos y su cardinal.
“La variable aleatoria que nosotros definimos fue la siguiente: Dominio: las distintas formas en que pueden salir las 3 cápsulas $\binom{18}{3}$ Codominio: 0, 1, 2, y 3 en donde 0 = 3 vitaminas 1 = 2 vitaminas y 1 drogas 2 = 1 vitaminas y 2 drogas 3 = 0 vitaminas y 3 drogas” P7.2	Identifican una variable y notan que sus valores determinan subconjuntos del espacio muestral. Definen una relación al señalar el espacio muestral como dominio y el conjunto de valores de la variable, como codominio, que parece que consideran como función al indicar que es una variable aleatoria.

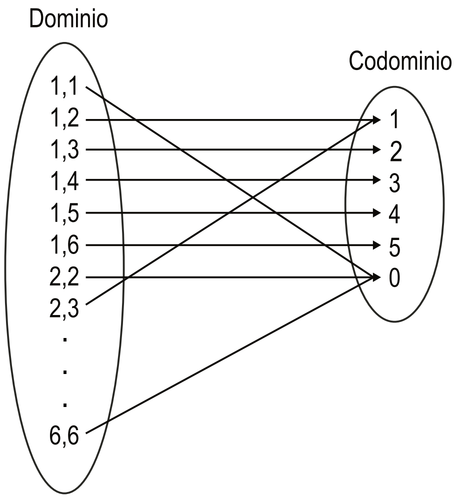
Los estudiantes establecen la relación de los subconjuntos del espacio muestral con los valores de las variables y la expresan haciendo uso de diferentes representaciones como diagramas sagitales, diagramas de torta y lenguaje natural, entre otros. Sin embargo, no siempre se dan cuenta que las relaciones son funciones.

Explicar, a través de cualquier tipo de representación, que las funciones cuyo dominio es un espacio muestral y el recorrido es numérico se consideran variables aleatorias (r8.3)	
“Las relaciones consideradas son variables aleatorias: Dominio: conjunto de empleados (espacio muestral); Codominio: cantidad de personas del núcleo familiar (numérico)” P17	

<table>
<tr>
<td>“Lanzar dos dados para determinar el valor absoluto de la diferencia de los resultados, sí es una variable aleatoria, pues se parten de los posibles resultados del lanzamiento de los dos dados y se determina el valor absoluto de la diferencia de los resultados, lo cual sería unos valores numéricos. De aquí el Dominio de f será:

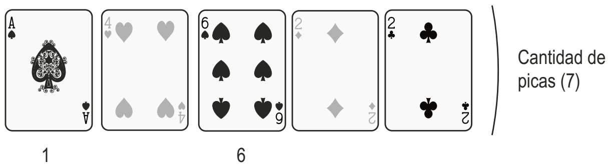
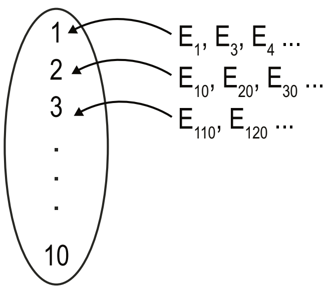
Dom f = S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), ... (2, 5), (2, 6),
... ...
(6, 1), ... (6, 5), (6, 6)}

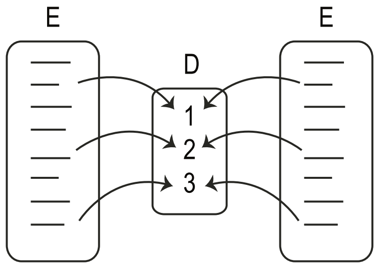
y el codominio, es decir, los valores numéricos del valor absoluto de la diferencia Codom f = {0, 1, 2, 3, 4, 5}” P18.a</td>
<td rowspan="3">Explican a través de diagramas sagitales y lenguaje natural, que las funciones cuyo dominio es un espacio muestral, conjuntos de empleados, parejas ordenadas, arreglos de números, y el codominio es numérico, son variables aleatorias. Cuando el codominio es no numérico, asignan a cada valor un número, para poder considerar esta relación funcional como variable aleatoria.</td>
</tr>
<tr>
<td>“Lanzar dos dados para determinar el valor absoluto de los resultados:



El espacio muestral de este experimento son los resultados posibles de lanzar dos dados, y es variable aleatoria porque su dominio corresponde al espacio muestral y el codominio es el conjuntos compuesto por los valores {0, 1, 2, 3, 4, 5}” P18.a</td>
</tr>
<tr>
<td>“En una mano de 5 cartas tomadas de un mazo de 52 cartas, se cuenta la cantidad de picas, sí es una variable aleatoria

Dominio: 52 cartas, Codominio: el número de picas, de la mano de 5 cartas” P18.d</td>
</tr>
</table>

“Dominio= Todas las posibles combinaciones que se hacen con 5 cartas de las 52 que hay Codominio = El enunciado se interpreta de dos formas Cantidad de cartas que tienen picas {0, 1, 2, 3, 4, 5} Cantidad de picas que se encuentran en cada carta {0, 1, 2, ...40}  Por lo tanto, sí es una variable aleatoria” P18.d	Explican a través de diagramas sagitales y lenguaje natural, que las funciones cuyo dominio es un espacio muestral, conjuntos de empleados, parejas ordenadas, arreglos de números, y el codominio es numérico, son variables aleatorias. Cuando el codominio es no numérico, asignan a cada valor un número, para poder considerar esta relación funcional como variable aleatoria.
“La única representación sagital que se acomoda a la situación del numeral 17 es:  Dominio: Empleados Rango: número de personas en el núcleo familiar” P17	Por otra parte, algunos estudiantes expresan la relación funcional que representa la variable aleatoria, pero no es del todo claro si el dominio corresponde al espacio muestral o a una partición.

<table>
<tr>
<td>


“Es función, pues a cada uno de los empleados se le asigna un único destino.

(...) independientemente del conjunto de codominio, si es numérico, es una variable aleatoria, pues el dominio es el espacio muestral” P17
</td>
<td rowspan="2">
Evidencian la definición de variable aleatoria, al resaltar en sus respuestas la necesidad de que el dominio de esta sea el espacio muestral y que el codominio sea un conjunto numérico.

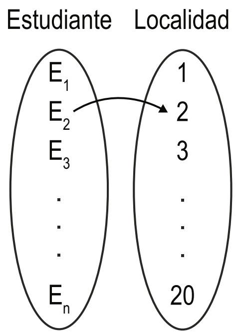
Proponen convertir el codominio no numérico de una relación funcional, asignando a cada valor de la variable seudo aleatoria un número, de manera que la variable sea aleatoria.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
“Si es una variable aleatoria escogemos uno de los 20 artículos al azar y determinamos si está defectuoso o no, lo cual puede ser relacionado con un valor numérico, que ya depende de la situación, en nuestro caso tomamos como defectuoso al (0) cero y no defectuoso al (1) uno. De aquí el Dominio de f:

Dominio f = S = $\{A_1, A_2, A_3, ...A_{19}, A_{20}\}$ y el codominio: Codominio f = {0, 1} Si no adoptáramos la convención de 1 y 0 para la relación de no defectuoso y defectuoso respectivamente, entonces no sería variable aleatoria, pues su codominio no sería numérico” P18.b
</td>
</tr>
</table>

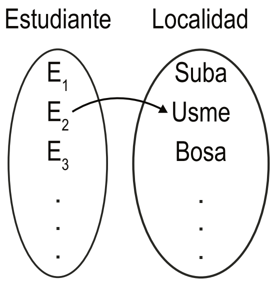
"Depende de la representación que se le dé sería una variable aleatoria con la siguiente representación:

Dominio: Estudiantes de primer semestre

Codominio: Número de la localidad



No sería una variable aleatoria con la siguiente representación"

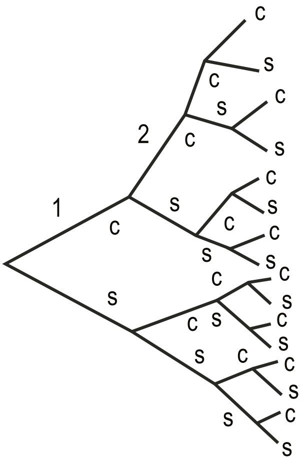


P18.c

Evidencian la definición de variable aleatoria, al resaltar en sus respuestas la necesidad de que el dominio de esta sea el espacio muestral y que el codominio sea un conjunto numérico.

Proponen convertir el codominio no numérico de una relación funcional, asignando a cada valor de la variable seudo aleatoria un número, de manera que la variable sea aleatoria.

"Dominio =



(cccc)	(sccc)
(cccs)	(sccs)
(ccsc)	(scsc)
(ccss)	(scss)
(cscc)	(sscc)
(cscs)	(sscs)
(cssc)	(sssc)
(csss)	(ssss)

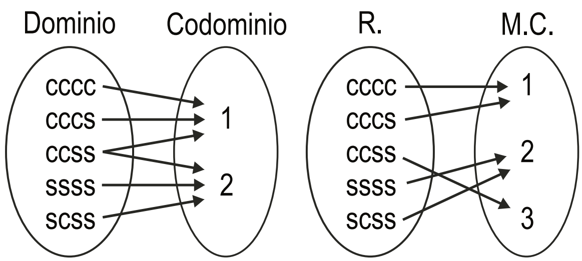
Codominio = - Si es de forma cualitativa es (cara) y sello), donde si salen dos y dos se escribe cara y sello, ej: (ccss) (cscs). No es variable aleatoria.

- {2, 3, 4} Es variable aleatoria

(CCSS) (CSSS)

(SSCC) (CCCS)

(SCSC) (SSSC)" P18.e (f2)



"No es variable aleatoria:

Mayor cantidad de caras = 1

Mayor cantidad de sellos = 2

No sería una variable aleatoria, ya que en el diagrama vemos que a un elemento del dominio le pertenecen 2 del codominio y así deja de ser función.

Es una variable aleatoria si asignamos:

Mayor cantidad de caras = 1

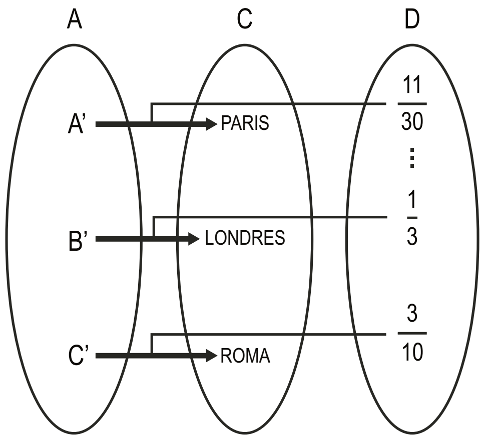
Mayor cantidad de sellos = 2

Igual cantidad de caras y sellos = 3 Dominio: resultado

Codominio: mayor cantidad de caras o de sellos" P18.e

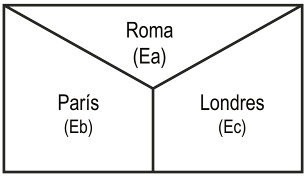
Notan que la relación que se establece con los valores de la variable no cumple con la definición de función. En estas respuestas se evidencia que para que una variable sea aleatoria, no solo se necesita el espacio muestral como dominio y conjunto numérico como codominio, sino que también la relación sea función.

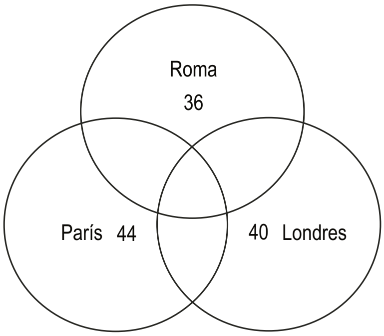
Agregan un número al codominio para que la correspondencia entre los valores del dominio y del codominio sea inyectiva, y de esta manera posibilitar que esta relación sea una variable aleatoria.

"La relación funcional... corresponde a variable aleatoria, específicamente en la relación 1 espacio muestral (120 empleados), con el número de personas que conforman el núcleo familiar, su dominio es el espacio muestral aquí relacionado" P21	Exponen que la relación entre espacio muestral y número de personas que conforman el núcleo familiar es funcional.
"Variable aleatoria ⟶ Dominio: espacio muestral - (120 empleados) Codominio: destino(asignando un número a cada lugar)" P26	Expresan en lenguaje verbal que la variable aleatoria que tiene como dominio el conjunto de los 120 empleados y como recorrido el lugar de preferencia; advierten la necesidad de asignarle un número a cada lugar, para que sea un conjunto numérico. Muestran relaciones a través de un diagrama sagital. La relación entre los elementos del conjunto A y los del conjunto C podría considerarse una función, pero no una variable aleatoria, pues el recorrido no es numérico y el dominio parece ser una partición y no el espacio muestral. No es precisa la relación que establecen con las probabilidades.
 "A' = Conjunto de empleados que prefieren ir a París B' = Conjunto de empleados que prefieren ir a Londres C' = Conjunto de empleados que prefieren ir a Roma" P25	
"La variable aleatoria que nosotros definimos fue la siguiente: Dominio: las distintas formas en que pueden salir las 3 cápsulas $\binom{18}{3}$ Codominio: 0, 1, 2, y 3 ..." P7.2	Entienden y aclaran que la variable aleatoria es una relación funcional con un dominio que es el espacio muestral y el codominio que son valores numéricos que se le asignan a cada uno de los posibles resultados.

<table>
<tr><th colspan="2">Identificar subconjuntos de un espacio muestral asociados a valores de una variable aleatoria (a9)</th></tr>
<tr><td>“El conjunto de los destinos hacia el conjunto determinado por grupos de empleados con ese destino... el conjunto por grupos de empleados hacia el conjunto de los destinos” P15</td><td rowspan="4">Reconocen como espacio muestral el conjunto de empleados y determinan subconjuntos de este a partir de los valores de la variable aleatoria número de familiares y la variable seudo aleatoria destino de preferencia.</td></tr>
<tr><td>“$m_1 \longrightarrow 1$
$m_2 \longrightarrow 2$
...
$m_{10} \longrightarrow 10$” P15</td></tr>
<tr><td>“Dominio = {E_A, E_B, E_C} y Codominio = {Roma, París, Londres}” P15</td></tr>
<tr><td>“Dominio: empleados, Codominio: lugar o destino de preferencia, cada subconjunto del dominio se relaciona con uno de los destinos de preferencia, ubicados en el codominio” P15</td></tr>
<tr><td>“...este concepto lo identificamos cuando el espacio muestral de 3 de las 18 cápsulas, le asignamos a cada una de ellas un valor entre (0, 1, 2 y 3), que relacionaban el # de cocaínas en la combinación” P7.3</td><td rowspan="2">Del espacio muestral conformado por ternas los estudiantes reconocen que le pueden asignar un valor numérico que corresponde al número de capsulas de cocaína que se pueden encontrar al tomar tres de las 18 cápsulas que se encuentran en el frasco.</td></tr>
<tr><td>“Dominio: las distintas formas en que pueden salir las 3 cápsulas $\binom{18}{3}$

Codominio: 0, 1, 2, y 3 en donde
0 = 3 vitaminas
1 = 2 vitaminas y 1 drogas
2 = 1 vitaminas y 2 drogas
3 = 0 vitaminas y 3 drogas” P7.2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Explicar que los subconjuntos asociados a los valores de la variable aleatoria conforman una partición del espacio muestral del experimento aleatorio. (r9)</th></tr>
<tr><td>

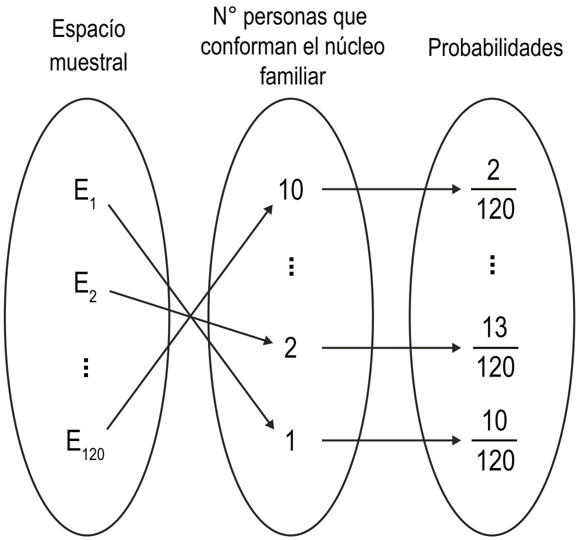
P15</td><td rowspan="2">Explican a través de figuras geométricas que los valores de la variable aleatoria número de familiares y de la variable seudo aleatoria destino de preferencia, determinan una partición del espacio muestral, donde se evidencia la disyunción entre los subconjuntos y la conjunción de ellos conforma el espacio muestral de los empleados.</td></tr>
<tr><td>

P15</td></tr>
<tr><td>“Conjunto por grupos de empleados hacia el conjunto de los destinos” P15</td><td rowspan="3">Muestran subconjuntos del espacio muestral que podrían conformar una partición, pero no explicitan que así sea.</td></tr>
<tr><td>“$m_1, m_2, m_3, \dots m_{10}$: Dominio; 1, 2, 3, 4 ...10: Codominio” P15</td></tr>
<tr><td>“Dominio: Empleados, codominio: lugar o destino de preferencia, cada subconjunto del dominio se relaciona con uno de los destinos de preferencia, ubicados en el codominio; siempre y cuando EA, EB y EC sean los subconjuntos correspondientes” P15</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cuantificar los resultados favorables asociados a un evento (a10.1)</th></tr>
<tr><td>“Primero contamos la cantidad de empleados cuyo núcleo familiar se compone por tres personas, encontramos que el número fue 20, lo que significa que la probabilidad es: $\frac{20\{\text{Empleado con 3 familiares}\}}{120\{\text{Total de empleados}\}} = \frac{1}{6}$” P8</td><td rowspan="2">Cuentan los elementos de los conjuntos o subconjuntos mencionados anteriormente para el cálculo de la probabilidad. Además los estudiantes nombran los conjuntos o subconjuntos necesarios para el cálculo de la probabilidad pedida en la situación dada.</td></tr>
<tr><td>“Según los datos entregados (Datos de los empleados participantes en la rifa), la probabilidad de que el núcleo familiar del empleado elegido esté constituido por tres personas es : $P(E) = \frac{\#\,\text{evento}_1}{\#\,\text{Espacio muestral}_1} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$
Cardinal del conjunto de posibilidades que sucede el evento1
Cardinal del conjunto del espacio muestral” P8</td></tr>
</table>

“Probabilidad clásica. El número de subconjuntos de cardinal 3 es igual a 20. Sea A el evento: el núcleo familiar está conformado por tres personas, entonces su probabilidad es: $P(A)=\frac{20}{120}=0{,}16$” P8	Establecen el número de elementos del evento. Además, explican y justifican el proceso realizado para el cálculo de la probabilidad utilizando la fórmula de probabilidad clásica.
“La probabilidad de que el núcleo familiar esté constituido por 3 personas: $\frac{19}{120}$” P8	Hacen el conteo de los casos favorables para aplicar la fórmula de la probabilidad clásica, y a diferencia de otros casos de respuestas no presentan más explicaciones.
“Probabilidad de que el núcleo familiar del empleado esté conformado por 3 personas: $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$” P8	
“Constituido por 5 personas son 20 entonces $\frac{20}{120}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ Constituido por 4 personas son 28 entonces $\frac{28}{120}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$ Constituido por 3 personas son 20 entonces $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$”	Determinan el número de empleados cuyo núcleo familiar está constituido por 1, 2, ..., o, 10 personas, es decir, el número de resultados favorables de cada evento. Aunque algunos grupos no expresan en lenguaje natural el número de resultados favorables asociados a un evento, se puede considerar que si lo identifican, en vista que al hallar la probabilidad a través de la fórmula, sustituyen adecuadamente el dato correspondiente a casos favorables.
“De 4 personas $\longrightarrow \frac{28}{120}$ De 1 persona $\longrightarrow \frac{9}{120}$ De 2 personas $\longrightarrow \frac{13}{120}$ De 3 personas $\longrightarrow \frac{13}{120}$” P19	
“París: 44 empleados entonces $\frac{44}{120}=\frac{22}{60}=\frac{11}{30}$ Londres: 40 empleados $\frac{40}{120}=\frac{20}{60}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ Roma: 36 empleados $\frac{36}{120}=\frac{18}{60}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$” P24	Expresan el número de empleados que prefiere visitar algunas de las 3 ciudades, es decir, el número de resultados favorables de un evento.

<table>
<tr><th colspan="2">Calcular la probabilidad de un evento al realizar el cociente entre la cantidad de resultados favorables y el número total de resultados (a10.2)</th></tr>
<tr><td>“Probabilidad de que el núcleo familiar del empleado esté conformado por 3 personas:
$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$” P8</td><td rowspan="5">Calculan, respecto a diferentes preguntas la probabilidad de un evento al realizar la división entre la cantidad de elementos del evento favorable, sobre el total de casos posibles. Se nota que en general la respuesta se deja expresada como un cociente; solo en pocas respuestas después de expresar la probabilidad como un cociente se agrega su resultado en representación decimal.</td></tr>
<tr><td>“Probabilidad evento: $\frac{1}{120}$ = 0,00083 (Probabilidad Clásica)” P3 (f3)</td></tr>
<tr><td>“Dentro del espacio muestral para la variable personas del núcleo familiar podemos calcular las siguientes probabilidades:
Núcleo familiar conformado por una persona. $P = \frac{9}{120}$
Núcleo familiar conformado por dos personas. $P = \frac{13}{120}$
Núcleo familiar conformado por tres personas. $P = \frac{120}{120}$
Núcleo familiar conformado por cuatro personas. $P = \frac{28}{120}$” P13</td></tr>
<tr><td>“¿Qué probabilidad existe de que el empleado elegido, desee ir a Londres?
Encontramos que son 39 empleados que lo satisface, entonces la probabilidad es: $\frac{39}{120} = \frac{13}{40}$
¿Qué probabilidad existe en que el empleado elegido desee ir a Roma y a París?
Encontramos que son 81 empleados que lo satisface, entonces la probabilidad es: $\frac{81}{120} = \frac{27}{40}$” P14</td></tr>
<tr><td>“Ejemplos :
¿Qué probabilidad hay que la persona elegida tenga 4 personas en su núcleo familiar? $P = \frac{47}{120}$ = 0,3916
¿Qué probabilidad hay de que el empleado seleccionado tenga menos de 5 personas en su núcleo familiar? $P = \frac{90}{120}$ = 0,75
¿Qué probabilidad existe para que el trabajador escogido tenga exactamente 6 personas en el núcleo familiar? $P = \frac{11}{120}$ = 0,0916” P13</td></tr>
</table>

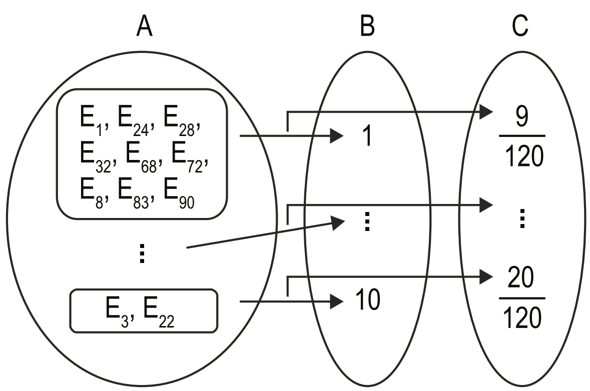
"$P(A_i)$: es la probabilidad de que el núcleo familiar esté constituido por i personas $P(A_1) = \frac{9}{120} = 0{,}075$ $\quad P(A_2) = \frac{13}{120} = 0{,}108$ $P(A_3) = \frac{20}{120} = 0{,}166$ $\quad P(A_4) = \frac{28}{120} = 0{,}23$ $P(A_5) = \frac{20}{120} = 0{,}166$ $\quad P(A_6) = \frac{12}{120} = 0{,}1$ $P(A_7) = \frac{7}{120} = 0{,}058$ $\quad P(A_8) = \frac{5}{120} = 0{,}041$ $P(A_9) = \frac{4}{120} = 0{,}033$ $\quad P(A_7) = \frac{2}{120} = 0{,}016$" P19	Hallan la probabilidad a partir de la fórmula: $P(A) = \frac{n}{N}$ *n:* número de resultados favorables *N:* número total de resultados. Expresan la probabilidad con la notación P(A) y con A denotan el evento
"Conformado por 5 personas $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ Conformado por 4 personas $\frac{28}{120} = \frac{7}{30}$" P19	Expresan las probabilidades solamente con la fracción.
"$\mathrm{Pr}(1) + \mathrm{Pr}(2) + \mathrm{Pr}(3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{14}{12}}{\binom{18}{3}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{14}{1}}{\binom{18}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{18}{3}}$ $= \frac{364+84+4}{816} = \frac{452}{816} \approx 0{,}554$" P7.1	En la tabla se dan dos valores de las probabilidades; sin embargo, usan técnicas de conteo para hallar y verificar las probabilidades, al usar estas técnicas encuentran los casos favorables de los eventos, pero no se puede saber si lo reconocen o no, sino simplemente lo hacen usando la fórmula.
"$\frac{(14\,C\,0)\mathrm{x}(4\,C\,3)}{18\,C\,3} = \frac{1}{204} = 0{,}004901$" P7.1	

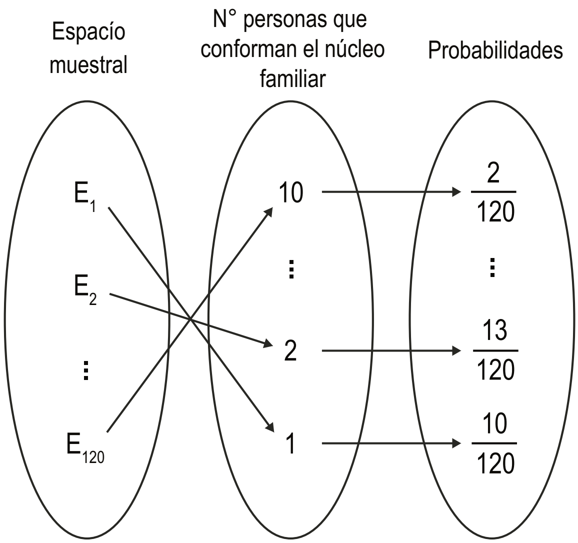
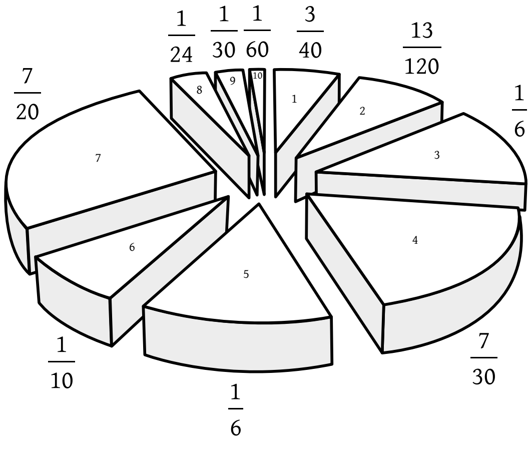
<table>
<tr><td colspan="2">Precisar el espacio muestral que origina el número total de resultados (r10.2)</td></tr>
<tr><td>

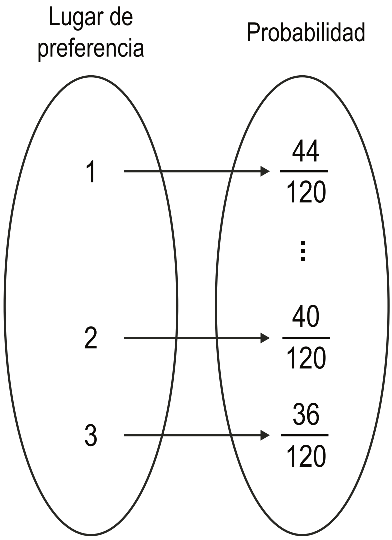
P20</td><td>Establecen el espacio muestral a través del diagrama sagital, colocando explícitamente que este conjunto tiene 120 empleados, que es el número total de resultados que se usa para el cálculo de las probabilidades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcular la probabilidad de un evento con base en probabilidades de otros eventos (a11)</td></tr>
<tr><td>“El núcleo familiar del empleado elegido tiene a lo más de tres personas
$P(A_1) = \frac{4}{120} = 0{,}075$ $\quad$ $P(A_2) = \frac{13}{120} = 0{,}108$
$P(A_3) = \frac{20}{120} = 0{,}166$
La probabilidad de que sea a lo más 3
$P[1, 3] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{7}{20} = 0{,}35$” P29</td><td rowspan="2">Calculan la probabilidad de un evento compuesto a través de la suma de las probabilidades de los eventos simples disyuntos que lo conforman.

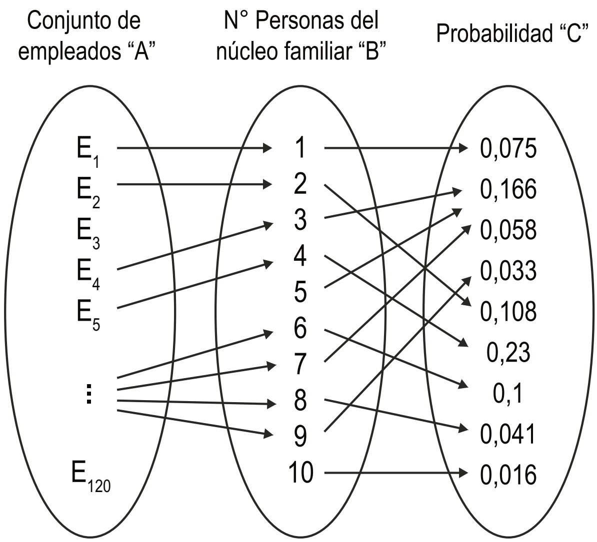
Expresan la probabilidad con la notación P(A) y con A denotan el evento.

Expresan la probabilidad solamente con las fracciones.</td></tr>
<tr><td>“Sumemos las probabilidades de que el núcleo familiar sea a lo más tres, cuatro o cinco:
$\left.\frac{9}{120}+\frac{13}{120}+\frac{20}{120}=\frac{42}{120}=\frac{7}{20}\right\}$ Probabilidad para que el núcleo familiar del empleado sea a lo más de 3 personas
$\left.\frac{42}{120}+\frac{28}{120}=\frac{7}{12}\right\}$ Probabilidad para que el núcleo familiar del empleado sea a lo más de 4 personas” P29</td></tr>
</table>

"Se deberán sumar las primeras probabilidades hasta completar una probabilidad de 60% $\frac{9}{120}+\frac{13}{120}+\frac{20}{120}+\frac{28}{120}+\frac{20}{120}=\frac{90}{120}=0{,}75=75\%$ Luego el número mínimo de tiquetes será de 5" P29	Calculan la probabilidad de un evento compuesto a partir de las probabilidades de eventos simples disyuntos para establecer el número mínimo de tiquetes por comprar, y así ofrecer una solución al problema planteado.
Establecer la existencia de una relación funcional entre el recorrido de la variable aleatoria y las probabilidades de los eventos (r12.2)	
"La función está definida por f: $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ A es el espacio muestral de empleado, B representa el número de personas del núcleo familiar y C es la probabilidad de que el núcleo familiar esté constituido por uno de los elementos de B. La función de probabilidad está definida por f: $B \longrightarrow C$ P21	Definen las posibles relaciones entre el espacio muestral (número de empleados), los números de personas que conforman el núcleo familiar y las probabilidades asociadas. Al especificar por separado la relación funcional entre el recorrido de la variable aleatoria y las probabilidades de los eventos, utilizan la misma letra para denotar la función, con lo cual podrían crearse confusiones.
La función de probabilidad que podemos identificar es: la relación entre el número de personas que conforman el núcleo familiar y las probabilidades obtenidas" P21	
 "A cada conjunto determinado de empleados le pertenece un único número de personas en su núcleo familiar y una única probabilidad" P20	Expresan en lenguaje natural relaciones funcionales; pero en el diagrama sagital no es precisa la relación que establecen entre los subconjuntos de empleados determinados según el lugar de preferencia con sus probabilidades.

 “Relación 1. Espacio muestral – N° personas del núcleo familiar A cada empleado le corresponde un único número de personas que conforman el núcleo familiar 2. Espacio muestral, N° personas del núcleo familiar – Probabilidades A cada relación espacio muestral – N° personas núcleo familiar le corresponde una única probabilidad” P20	Muestran en el diagrama sagital las posibles relaciones funcionales entre el espacio muestral, el recorrido de la variable aleatoria y las probabilidades. Verbalmente los estudiantes describen la relación que constituye la variable aleatoria, pero luego describen la relación 2, que se ajusta a la función compuesta y no a la función de probabilidades.
 P20	Plantean la relación que existe entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades a través de un diagrama de torta, lo cual permite ilustrar el evento de mayor probabilidad en términos de la sección de mayor volumen, sin necesidad de recurrir a los números. Parece que los estudiantes consideran la relación como funcional por el hecho de asociar a cada valor una sola probabilidad.

<table>
<tr>
<td>


"Lugar de preferencia – probabilidad" P27
</td>
<td>Reconocen que el recorrido de la variable aleatoria son los tres destinos posibles considerados como números, determinando la relación funcional entre destino posible y su respectiva probabilidad.</td>
</tr>
<tr>
<td>


"Las relaciones establecidas tienen el siguiente orden:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

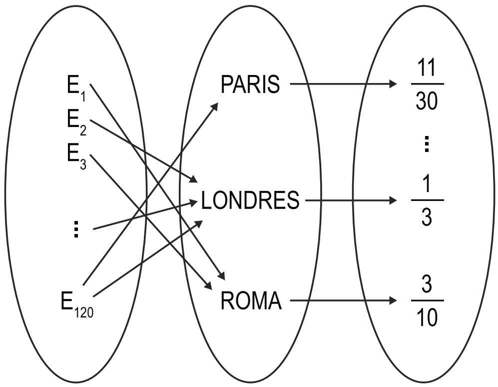
La función de probabilidad está definida por $f: B \longrightarrow C$" P20
</td>
<td>Presentan las relaciones funcionales existentes entre el espacio muestral, el número de personas del núcleo familiar y la probabilidad; las probabilidades están dadas no como fracciones sino como números decimales en el intervalo [0,1].</td>
</tr>
</table>

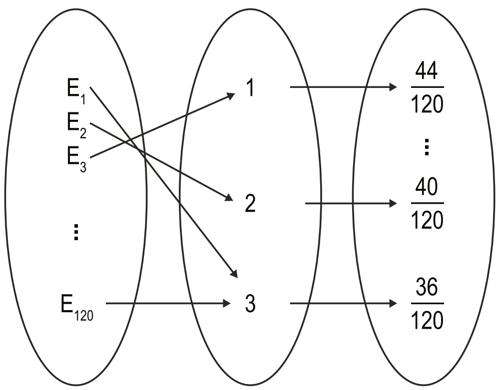
<table>
<tr>
<td>“Todas son relaciones funcionales

1) dominio: {E1, ..., E120} codominio: {París, Roma, Londres}

2) dominio: {E1, ..., E120} codominio $\left\{\frac{3}{20},\frac{1}{3},\frac{11}{30}\right\}$

3) dominio: {París, Roma, Londres} codominio $\left\{\frac{3}{20},\frac{1}{3},\frac{11}{30}\right\}$” P26</td>
<td rowspan="2">Establecen relaciones entre: el número de empleados y los lugares de destino; entre empleados y las probabilidades de cada evento determinado por cada lugar de destino; además las representan a través de diagramas sagitales.

La función entre el lugar de preferencia no la consideran una función de probabilidad por no tener un dominio numérico.</td>
</tr>
<tr>
<td>

“No se puede definir una función de probabilidad ya que el dominio no es numérico” P27</td>
</tr>
<tr>
<td>

“En este caso se puede definir una función de probabilidad, ya que asignamos un valor numérico a cada lugar, teniendo en cuenta este aspecto el dominio de la función determinada es numérico y el codominio es la probabilidad.

Función de probabilidad Dominio: destino (asignando un número a cada lugar; Codominio: probabilidad” P27</td>
<td>Representan a través de diagramas sagitales la relación lugar de preferencia y su probabilidad, asignando a cada lugar un número para poder definir la función de probabilidad donde el dominio es el recorrido de la variable aleatoria (numérico) y su recorrido las probabilidades de cada evento.</td>
</tr>
</table>

Calcular probabilidades de eventos conjuntos (a13)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Londres	$\frac{2}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{8}{120}$	$\frac{8}{120}$	$\frac{8}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{0}{120}$	$\frac{0}{120}$	$\frac{40}{120}$
París	$\frac{2}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{13}{120}$	$\frac{8}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{44}{120}$
Roma	$\frac{5}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{36}{120}$
Total	$\frac{9}{120}$	$\frac{13}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{28}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{120}{120}$

P30

"$P(L, 1) = \frac{2}{120} \approx 0{,}0166$ $\quad$ $P(P, 2) = \frac{4}{120} \approx 0{,}033$

$P(R, 4) = \frac{7}{120} \approx 0{,}058$

$P(L, i)$

L = Londres, P = París, R = Roma, i = N° personas núcleo familiar"
P30

Hallan las probabilidades del evento conjunto, cuyas variables son número de personas que conforman el núcleo familiar y lugar de preferencia, determinando primero las frecuencias conjuntas.

<table>
<tr>
<td>“Ahora determinamos las posibilidades de que algunas de esas tres sean cocaína, es decir;

$$\underbrace{\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{14}{2}\right)}_{\substack{\text{Posibilidades}\\ \text{que dos sean}\\ \text{vitamina y}\\ \text{una cocaina}}}+\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{14}{1}\right)}_{\substack{\text{Posibilidades}\\ \text{que una sea}\\ \text{vitamina y}\\ \text{dos cocaina}}}+\underbrace{\left(\frac{14}{0}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}_{\substack{\text{Posibilidades}\\ \text{que todas tres}\\ \text{sean cocaina}}}=452$$

Las anteriores son probabilidades de que le encuentren cocaína, luego la probabilidad de que el viajero sea arrestado por narcóticos es:

$\frac{452}{816}$ = 0,5539215686” P7.1</td>
<td>Hallan la probabilidad de que el viajero sea arrestado teniendo en cuenta las probabilidades de los eventos que habían encontrado previamente.

Consideran como evento conjunto la unión de tres eventos que se forman cuando el agente de la aduana saca 3 cápsulas del frasco y entre estas una, dos o tres cápsulas son de cocaína; los estudiantes asocian las probabilidades calculadas de los eventos nombrados anteriormente y las suman para hallar la probabilidad de que el viajero sea arrestado.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Darse cuenta que la identificación de probabilidades máximas de eventos marginales no necesariamente corresponden a las probabilidades máximas de eventos conjuntos (r13.2)</td>
</tr>
<tr>
<td>“Probabilidades marginales máximas $\frac{44}{120}$ y $\frac{28}{120}$

Probabilidades conjuntas máximas $\frac{12}{120}$

En este caso no ocurre lo sucedido en el ítem anterior. Entonces les da a los organizadores que comprarán 4 tiquetes a París basándome en las probabilidades marginales” P33</td>
<td rowspan="2">Notan que las probabilidades máximas de eventos marginales no necesariamente corresponden a las probabilidades máximas de eventos conjuntos.

Destacan que las probabilidades máximas de eventos marginales se corresponden a las probabilidades máximas de eventos conjuntos. Manifiestan que la recomendación la realizan basándose en probabilidades marginales.

Expresan su recomendación basados en las probabilidades conjuntas</td>
</tr>
<tr>
<td>“Observamos que no se cumple, pues las probabilidades marginales máximas no corresponden con su respectiva probabilidad conjunta. Teniendo en cuenta las probabilidades conjuntas recomendamos que compre 5 tiquetes con destino a Londres. pues nos parece que es más representativa las probabilidades conjuntas que las marginales” P33</td>
</tr>
</table>

En este experimento de enseñanza las respuestas que evidencian el trabajo con la variable aleatoria como relación funcional son más notorias, a pesar de que en muchas de las relaciones que establecen los estudiantes, no es claro si el dominio es en sí mismo el espacio muestral o la partición, es decir, el conjunto de subconjuntos de puntos muestrales. Los estudiantes establecen la relación que constituye la variable aleatoria en el sentido adecuado, hacia el conjunto de valores de la variable, y la muestran como inyectiva. Cuando los valores no son numéricos asignan un número a cada valor, lo que evidencia la consideración de la afirmación hecha en el taller al respecto del recorrido de la variable aleatoria debe ser numérico.

No pasa desapercibido que en los avances de los estudiantes pudo influir la intensidad de las instrucciones y preguntas que se plantearon en esta versión del taller. No obstante, en los desarrollos de los estudiantes se percibe que además de calcular las probabilidades para todos los eventos determinados por los valores de las variables, establecen, mediante diagramas, las relaciones entre la variable aleatoria como función y la función de probabilidad, lo que de alguna manera puede ser reflejo de su comprensión de la conexión entre los números implicados en el cálculo de las probabilidades y el espacio muestral ligado a los valores de la variable. Es decir, hay indicios de comprensión en torno a la variable aleatoria como relación funcional, que igualmente se puede apreciar en las gráficas de las relaciones que exhiben.

El trabajo de los estudiantes también muestra que asumen la equiprobabilidad del espacio muestral 'de base', y que en algunas ocasiones el cálculo de las probabilidades se fundamenta en operaciones con las probabilidades iguales y no en el conteo.

Sin embargo, cuando el espacio muestral es grande, dado que establecer la partición no tiene sentido, el trabajo que se ve en los estudiantes está centrado en los conteos por combinatoria para el cálculo de las probabilidades y no se percibe en las respuestas la comprensión ganada sobre la variable aleatoria.

Los estudiantes en el desarrollo de las últimas partes del taller se cuestionaron el hecho de que las probabilidades marginales sean siempre las que indican adecuadamente una mayor posibilidad de ocurrencia de un evento no simple, al encontrar las probabilidades conjuntas como una opción de mayor aparición, y notaron que probabilidades marginales y conjuntas no siempre se corresponden.

Capítulo 5. Conclusiones

Acerca del trabajo de los estudiantes

A lo largo de los experimentos de enseñanza en los resultados encontrados sobre la comprensión de los estudiantes, hay más evidencias correspondientes a indicadores de alfabetización que de razonamiento. Los resultados no arrojan indicios de indicadores relativos a pensamiento, pero esto se origina primordialmente en las tareas incluidas en los talleres, que no lo propician.

Sin embargo, es claro que en el último experimento de enseñanza hay un aumento de la cantidad de indicadores de razonamiento, con respecto a los involucrados en los resultados de los experimentos de enseñanza previos. Dado que cada experimento de enseñanza tuvo estudiantes distintos no es posible hablar de evolución del pensamiento de los estudiantes a lo largo de los tres experimentos de enseñanza. Aunque dicho incremento es sintomático del progreso y maduración del diseño de la secuencia de instrucción y de los talleres, los cuales parecen atender cada vez más a promover el razonamiento estadístico, también es representativo de alcances en la comprensión del concepto de variable aleatoria como relación funcional, y de nociones relacionadas.

Acerca de la comprensión ganada

En concordancia con los estudios de índole epistemológica reportados en Ruiz (2006), que destacan los dos paradigmas sobre la variable aleatoria, como magnitud y como relación funcional, los resultados de los estudiantes en los primeros experimentos de enseñanza confirman esta dualidad conceptual sobre la variable aleatoria, ligada a la noción de espacio muestral y de experimento aleatorio que se ponga en juego. En particular, los resultados sugieren que cuando se trabaja con espacios muestrales finitos, detrás de la escogencia como espacio muestral del llamado espacio 'adoptado', subyace la concepción de variable aleatoria como magnitud, ya que se advierte que implícitamente se evade establecer la relación funcional, y se desconoce la existencia del espacio muestral 'original' que constituye el dominio de la relación; además, dicho espacio muestral 'adoptado', no se considera como recorrido. Esto aplica incluso en casos cuando el espacio muestral adoptado no es numérico, en donde tiene sentido aplicar la idea de variable seudo aleatoria. Conviene señalar también que si para la asignación de probabilidades se asume una perspectiva clásica, la no remisión explícita a un espacio muestral 'original' equiprobable, puede llevar a errores en los cálculos cuando estos se basan en conteos del espacio muestral 'adoptado'.

Igualmente, el hecho de que los estudiantes resuelvan situaciones de probabilidad que implican el uso de variables aleatorias con nombre propio como la binomial o la hipergeométrica, propicia la concepción de la variable aleatoria como magnitud pues no hay necesidad de abordar la variable aleatoria como relación funcional; se posibilita así el surgimiento de un posible obstáculo epistemológico al respecto, que no impide tener éxito en la solución de problemas típicos de probabilidad, pero que no ayuda a los estudiantes en el trabajo con situaciones no tan comunes en los libros de texto, como las que surgen en contextos de muestreo estadístico, similares a la del taller de variable aleatoria planteado en este proyecto, donde el trabajo requiere poner en juego la concepción de variable aleatoria como relación funcional.

Cabe destacar además, unas reflexiones que están todavía sobre la mesa para ser discutidas y profundizadas. La comprensión alcanzada por los estudiantes acerca de la variable aleatoria no parece llevarlos a ver la necesidad de considerarla como una relación funcional ni de determinar el espacio muestral 'original'; alegan que para resolver los ejercicios y tareas propuestas en la enseñanza, basta con mirarla como el conjunto de valores numéricos, pues al calcular probabilidades el centro está en encontrar la cantidad de resultados favorables y el total de posibles resultados, o emplear fórmulas de combinatoria sin considerar de dónde salen estos números. De cierta forma, se podría entender que consideran el trabajo realizado como poco relevante. A diferencia de esto, los estudiantes que participaron en el proyecto como monitores de investigación y como practicantes reconocen explícitamente su ampliación del conocimiento conceptual, la cual valoran para su futura labor docente.

Algunas de las dificultades de los estudiantes en las situaciones de probabilidad, pueden deberse a dos asuntos que se fueron esclareciendo en el desarrollo de esta investigación. Por un lado, está el carácter de población estadística, más que de espacio muestral, que tienen los posibles resultados de los experimentos aleatorios ligados a algunas de las situaciones planteadas en los talleres; y, por otro lado, el hecho de que proponer contextos como los de tales situaciones puede llevar a una confusión entre las llamadas asignaciones clásica y frecuencial de la probabilidad.

Respecto al primer asunto, las situaciones de probabilidad que no son comunes en los libros de texto, donde aparece una población o un conjunto de referencia que considera entes que asumen el papel de unidades muestrales, son más usuales en escenarios de muestreo, en donde se hace la distinción entre una población objetivo y varias poblaciones de datos de acuerdo al número de variables o características que se pretenda observar. Cabe advertir que en este tipo de situaciones, muy típica de los análisis de encuestas, por dar un ejemplo, el espacio muestral 'original' lo constituye la población objetivo, mientras que las poblaciones de datos se pueden asimilar con espacios muestrales 'adoptados'.

Y respecto al segundo asunto, si se considera el contexto de la rifa presentado en el taller de variable aleatoria trabajado en el proyecto, se debe señalar que dado que la probabilidad de que un empleado elija por ejemplo, como lugar de destino la ciudad de París, es el cociente entre la cantidad de empleados que eligen París y el total de empleados, se genera la idea errada de que esta es una asignación de probabilidad de tipo frecuencial y no clásica, pues cuando se hace el conteo de empleados que satisfacen el evento, se habla también de la frecuencia de elementos que satisfacen el evento; en realidad, el verdadero tipo de asignación, la clásica en este caso, puede confundirse con la frecuencial. Por supuesto, debe tenerse presente que una verdadera asignación de tipo frecuencial supone la repetición reiterada del experimento aleatorio, que en el caso de un problema de muestreo, implica no la recolección de una muestra sino de muchísimas muestras de la misma población. En suma, se podría decir que la situación que se proponía no se asimilaba de manera transparente con una situación de probabilidad, aunque tampoco se tratara de una situación de muestreo probabilístico.

Se consolida en este proyecto la aproximación adoptada para dirigir y adelantar la educación estocástica, que pone como telón de fondo los procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, la cual permitió identificar distintos niveles de complejidad y desarrollo de la comprensión estocástica alrededor de la variable aleatoria. No obstante, se requiere ahondar en la construcción de indicadores que precisen el desarrollo de pensamiento estadístico, y modificar la secuencia de instrucción para fomentarlo. Quizás, como se sugiere en literatura sobre educación estadística, para el desarrollo de pensamiento estadístico es más procedente considerar otras estrategias de trabajo curricular como la de involucrar a los estudiantes en proyectos de recolección, análisis y presentación de resultados que sean motivados por intereses de los estudiantes mismos.

La experiencia pedagógica vivida en los experimentos de enseñanza llevados a cabo, confirma que una concepción bien desarrollada de la didáctica de las matemáticas es tan importante para los profesores de matemáticas, como lo es una bien desarrollada concepción de las matemáticas; a lo largo de trabajo no solo los estudiantes, sino también los profesores investigadores, se dieron cuenta que había nociones de la teoría de la probabilidad que era necesario revisar. Un ejemplo concreto es la conceptualización de la idea de espacio muestral, tal y como se expuso anteriormente.

Bibliografía

Andrade, L., Fernández, F. y Sarmiento, B. (2013). La búsqueda del espacio 'original': una necesidad para la enseñanza. En A. Salcedo (Ed.), *Educación estadística en América Latina: tendencias y perspectivas.* Venezuela: Programa de Cooperación Interfacultades, Universidad Central de Venezuela.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* [Conferencia inaugural]. Buenos Aires.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-16). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction, and assessment. *Journal of Statistics Education, 10* (3). (http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html).

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction*, *21* (1).

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

DelMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. *Journal of Statistics Education, 10* (3). (http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html).

Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N. (2008). *Estadística y probabilidad en la escuela secundaria*. Bogotá: CIUP-Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2010). *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, F., Andrade, L., Montañez, B., Zamora, S., y Beltrán, J. (2011). Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. En *Memorias del XIII CIAEM-IACME.* Recife, Brasil.

Freund, J.E. y Walpole, R. (1990). *Estadística Matemática con aplicaciones.* México: Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A.

Gal, I. (2000). *Adult numeracy development: Theory, research, practice*. Cresskill, NJ: Hampton Press.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistics Review, 70.*

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *The American Statistical Reasoning Journal or Statistics Education*, *10* (3). (http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html).

Goldberg, S. (1974). *Cálculo de probabilidades*. Bilbao: Ediciones Urmo S.A..

Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., Mooney, E., Wares, A., Jones, M.R., Perry, B., Putt, I.J. y Nisbet, S. (2001). Using students' statistical thinking to inform instruction. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*.

Larson, H. (1995). *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística*. México: Limusa.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (pp. 261-290). [Tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. (http://0hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf).

Montgomery, D. y Runger, G. (2004) *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería.* México: Limusa Wiley.

Ortiz, J. (2002) *La probabilidad en los libros de texto.* [Tesis doctoral]. España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Parzen, E. (1960). *Modern probability theory and its applications.* New York: Wiley.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* [Tesis de maestría]. México: Instituto Politécnico Nacional.

Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). *An exploratory study of students' difficulties with random variables.* México: ICOTS 7.

Schefler, W. (1981). *Bioestadística.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2* (26).

Steffe, L.P. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiments methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Walpole, R. (1992). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería.* McGraw-Hill.

Wisniewski, P. y Bali, G. (1998). *Ejercicios y problemas de Teoría de las probabilidades.* México: Editorial Trillas.

Impreso en el mes de mayo de 2014
en los Talleres del Grupo Dao Digital

Bogotá 2014. Colombia

ISBN: 978-958-8650-54-8

El presente libro está dirigido a personas interesadas en la investigación en Educación Matemática, profesores y estudiantes de doctorado y de maestría. Con él se pretende contribuir a suplir una deficiencia de bibliografía de referencia que oriente procesos investigativos en la comunidad educativa de habla hispana. Para ello, se presentan dos investigaciones realizadas: una por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, y otra por el grupo Educación Estadística, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) en 2010 y 2011, con el apoyo del Centro de Investigaciones de dicha universidad, CIUP. Ambos equipos centraron su mirada investigativa en la formación inicial de profesores con la convicción de que, al reconocer que la geometría y la probabilidad son frágiles en la matemática escolar, es necesario incidir en la formación matemática de los próximos profesores para fortalecer, a futuro, estos dominios en la escuela.

Colección: Memorias y entramados
educativos y culturales