Solución al problema de la radiación del cuerpo negro: Planck y Poincaré

Juan Camilo Gómez Arias

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de física

Bogotá D.C

2020

Solución al problema de la radiación del cuerpo negro: Planck y Poincaré

Juan Camilo Gómez Arias

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Física

Asesor: Yecid Cruz Bonilla

Línea de investigación: La enseñanza de la física y la relación física matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de física

Bogotá D.C

2020

Agradecimientos

A la Universidad Pedagógica Nacional que me dio la oportunidad de ser un profesional de la educación. A todas las personas que contribuyeron en mi crecimiento personal durante mi paso por la universidad. Al profesor Yesid Javier Cruz que me ha inspirado con su filosofía de vida y me enseñó tantas cosas. A mis padres que me apoyaron en todo momento.

Siempre he considerado la búsqueda del absoluto como la meta más elevada de toda la actividad científica… y me puse a trabajar con pasión. M. Planck.

Índice general

Contexto problema

Las investigaciones de los espectros atómicos de absorción y emisión condujeron a que el físico Gustav Kirchhoff, considerara un objeto ideal que absorbiera o emitiera toda la radiación llamado cuerpo negro llegando a preguntarse cómo era la relación de la energía radiada por este entre su frecuencia y temperatura. Más tarde físicos como Otto Lummer y Rubens Pringsheim encontraron experimentalmente la gráfica que describía la distribución de radiación de un cuerpo negro llamando la atención de otros como Steffan, Wien, Boltzmann, Rayleigh y Jeans que desarrollaron incompletamente la función que describe las curvas en dicha gráfica en un intento por resolver la incógnita que había dejado Kirchhoff. Por un lado, la temperatura de un cuerpo está relacionada inversamente con la longitud de onda que es radiada por este, esto se conoce como ley de desplazamiento de Wien. Más tarde los físicos Rayleigh y Jeans dedujeron una ley usando el teorema de equipartición analizando los osciladores dentro de una cavidad negra con una temperatura en equilibrio, sin embargo, la ley no cumplía la conservación de la energía dado que cuando la longitud de onda era muy pequeña (ultravioleta) la energía tendía a infinito. Este hecho histórico se conoce como catástrofe ultravioleta, singularmente porque la ecuación de Wien predecía los valores esperados de la emisión de radiación de cuerpo negro para frecuencias altas, pero fallaba en las frecuencias bajas.

Planck inició la búsqueda de una solución al problema desde la termodinámica y, a pesar de haber encontrado una ley que explicara la radiación del cuerpo negro usando la entropía que debía estar asociada a los osciladores en la cavidad, dicha ley estaba distante de los resultados experimentales. Cuando Hertz hacia 1888 logró el descubrimiento de las ondas electromagnéticas, los físicos empezaban ya a sospechar que la radiación térmica no era más que otra manifestación de la radiación electromagnética. Planck entonces recurre a la electrodinámica, replantea sus análisis y parte desde las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, en la teoría electromagnética no había forma de involucrar la energía radiada con su frecuencia asociada, frecuencia que era igual a la frecuencia de oscilación que presentaban las cargas en las paredes de la cavidad negra.

Dado que el problema era de singular naturaleza, Planck recurrió "*en un acto de desesperación*" al análisis probabilístico que Boltzmann algunos años antes había realizado encontrando así la llamada ley de Planck en la cual, se recurría a la hipótesis de que la energía de los osciladores fuese discreta, hipótesis que no recibió mayor importancia física y consideró más un ardid matemático. Por esto mismo pasó desapercibida inicialmente pero no tardaría en cobrar interés cuando Einstein la retomara para explicar el efecto fotoeléctrico y evidenciara una falla en el teorema de equipartición que no daba cuenta de los calores específicos de los sólidos cuando se encontraban a temperaturas muy bajas.

Estas y algunas consideraciones posteriores consternaron a los físicos de principios del siglo XX que se enfrentaban a la renuncia de la continuidad de la materia y la incapacidad de la mecánica clásica por explicarla. La física estaba en crisis. Tanto así que el primer congreso de Solvay radicaba principalmente en el entendimiento de lo que sería llamado entonces la teoría cuántica. En ese congreso los físicos acordaron la necesidad de encontrar una alternativa diferente que prescindiera de la hipótesis de cuanto, y que condujera a la ley de radiación de Planck, de forma tal que la mecánica clásica no se viera afectada.

Poincaré apenas descubría la hipótesis cuántica y también descubrió la urgencia que emergía por prescindir de ella, un mes después del congreso, en su artículo *la teoría de los cuantos,* Poincaré logró demostrar y definir matemáticamente los elementos que eran necesarios para explicar el acierto que Planck había logrado al proponer la hipótesis del cuanto para explicar la ley de radiación de cuerpo negro, añadiendo además, que dicha hipótesis era única y necesaria, es decir, era imposible resolverlo por otro camino que no involucrara la discontinuidad, no había hipótesis clásicas que derivaran en la ley de Planck (Poincaré, 1911).

De acuerdo con lo anterior, surge entonces la siguiente pregunta problema:

Pregunta problema

¿Por qué un modelo físico matemático que toma la energía continua es insuficiente para llevar a cabo la explicación de la emisión de radiación de cuerpo negro?

Objetivo general

Analizar desde un enfoque físico matemático que no es posible derivar la ley de Planck a partir del paradigma de la física clásica.

Objetivos específicos

1. Describir el contexto en el que se encontraba Max Planck durante su trayectoria a la solución del problema de la radiación de cuerpo negro.

2. Abordar el concepto de cuerpo negro y los distintos aportes que intentaron dar respuesta a la radiación del cuerpo negro.
3. Realizar la demostración de la ley de Planck a partir de los artículos *on the theory of the energy distribution law of the normal spectrum* y *on the law of the energy distribution in the normal spectrum.*
4. Analizar el artículo *sur la théorie des quanta* mostrando los razonamientos que realiza Poincaré para encontrar la forma en que está particionada la energía en un sistema de resonadores y átomos.
5. Comentar las deducciones que muestran que la ley de Planck es la única para solucionar el problema de la radiación de cuerpo negro.

Capítulo 1

El segundo principio de la termodinámica.

El funcionamiento de los motores está basado en la extracción de calor de un cuerpo más caliente hacia uno más frío que lo utiliza para realizar un trabajo. Con el desarrollo y mejora de las máquinas térmicas como los motores de Stirling, de Diesel, de combustión, de vapor, entre otros, se presentó un aspecto de carácter universal que urgía ser estudiado en términos de la eficiencia que presentaban las máquinas y que no era nada más que la imposibilidad de convertir todo el calor absorbido por una máquina en trabajo con un rendimiento térmico del 100%. (Zemansky pág. 145-157).

Cuando se estudia la evolución de un sistema, este se encuentra en un estado inicial de desequilibrio y tiende hacia un estado final de equilibrio termodinámico debido a la interacción que tiene con un entorno inmediato cediendo o extrayendo energía de este. Suponiendo además que la evolución del sistema se da a través de procesos cuasiestáticos, está permitida la reversibilidad de un estado final a uno inicial sin ingresos de energía externos, sin que se vea afectado el resto del universo. (Zemansky pág. 169-185). Tal como lo describió Lord Kelvin con su *principio de la degradación de la energía*, las máquinas térmicas fueron las primeras en poseer una característica de *no reversibilidad.* Este principio está inmerso en los procesos naturales debido a la presencia de fuerzas disipativas como la fricción o la viscosidad que están presentes en el medio, además de los rápidos cambios que experimentan de un estado a otro; es decir, los procesos naturales en su mayoría son casi inmediatos. El físico alemán Rudolf Clausius atento a esta problemática, introdujo una expresión que permitiera explicar este comportamiento haciendo uso de una función llamada entropía. Generalmente, se puede entender como[1]:

---

[1] No es necesario numerar todas las ecuaciones, por ello, a juicio personal solo serán numeradas aquellas ecuaciones que sean mas valiosas en desarrollos matemáticos posteriores.

$$ds = \frac{\delta Q_R}{T}$$

Clausius describió un diferencial de entropía ds a lo largo de un proceso *reversible* R en el que un sistema ganaba o cedía una cantidad de calor δQ cuando se encontrara en un estado inicial de equilibrio a una temperatura absoluta T. A partir de esta ecuación, se puede encontrar la variación de entropía desde un estado inicial a uno final independientemente del proceso por el que evolucione el sistema siempre y cuando sea reversible de tal forma que:

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

Y también que un sistema puede realizar un ciclo reversible $R1$ y luego devolverse a través de un ciclo reversible $R2$ de tal forma que no haya un cambio en la entropía:

$$\oint_R \frac{\delta Q}{T} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} + \int_f^i \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Es decir,

$$\oint_R \frac{\delta Q}{T} = 0$$

que es llamado teorema de Clausius.

Planck retomó el trabajo de Clausius y hacia 1879 describió en su tesis doctoral un principio del aumento de la entropía que ocurría en todos los procesos naturales, dotándolos de un sentido tal que la variación de la entropía que experimentaran siempre sería positiva o en casos más extremos de sistemas aislados, la variación sería igual a cero; se puede describir lo anterior a través de la ecuación:

$$s' - s \geq 0$$

Esto restringe el intercambio de calor de un cuerpo frío a uno más caliente y la posibilidad de que cualquier proceso sea reversible. Estas ideas se condensan en el segundo principio de la termodinámica[2], estableciendo el uso que se le puede dar a la energía mientras que el primer principio describe los procesos de transformación que sufre. Sin embargo, el segundo principio de la termodinámica propuesto por Planck era incompatible con las leyes de la mecánica que sí eran irreversibles, es decir, ofrecían una interpretación matemática en la que si se intercambiaba el tiempo t por -t las ecuaciones seguían siendo válidas (Feynmann, 1963). A esta problemática se sumaría otra que se deriva de las nuevas teorías que comenzaron a nacer después de mitad del siglo XX.

Interpretaciones estadísticas de la física clásica.

Hacia 1885 la teoría de los gases ideales comenzaba a adentrarse en la física gracias a Ludwig Boltzmann y a Rudolf Clausius. La idea comienza en que los gases están compuestos de partículas (átomos o moléculas) que no pierden su individualidad. Esta teoría encontró su gran aprobación en los trabajos de Boltzmann quien fue uno de los primeros que estableció los fundamentos de la mecánica estadística y que la seguiría usando para construir una interpretación estadística de la entropía. En este punto surgieron dos argumentos en contra del segundo principio de la termodinámica dados por James Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann desde la mecánica estadística.

Inicialmente desde Austria, Boltzmann encontraría una ecuación que relacionaba la entropía con el número de microestados asociados a un sistema, ecuación que está dada por

$$s = k\ ln(\Omega) \tag{1}$$

De donde Ω es el número de microestados posibles en que se puede encontrar el sistema en un estado cualquiera. Por otro lado, en Inglaterra se difundió *el demonio de Maxwell*, experimento mental que consiste en un ser lo suficientemente pequeño vigilando una compuerta que conecta dos sistemas en desequilibrio termodinámico, y es abierta por el, siempre que se aproxime una partícula con una velocidad muy grande, agrupándose

[2] Kelvin también había planteado un segundo principio de la termodinámica con anterioridad a Planck. El de este último estuvo vigente hasta 1909 cuando Constantin Carathéodory terminó por definirlo a partir de unas variables y conceptos físicos y matemáticos más precisos.

entonces las partículas más veloces de un lado y las menos veloces del otro lado. Como estos microestados definen el estado macro de los dos sistemas, se percibirá un aumento de temperatura en el sistema más caliente, y una disminución en el más frío.

Estas dos posturas no fueron suficientes para cambiar la opinión de Planck sobre el carácter absoluto del segundo principio. Su reticencia al creer en una entropía estadística radicaba en su desconfianza de que haciendo uso único de la probabilidad se pudiera conocer la evolución de un sistema ya que esta tarea solo podía hacerla la mecánica. (Kuhn, 1987).

El problema de la radiación de cuerpo negro.

La espectroscopía nació como una ciencia que estudiaba la absorción y emisión de la luz sobre los cuerpos celestes, a través de ella, se descubrieron las líneas de Joseph Von Fraunhofer que terminaron demostrando la caracterización de cada elemento químico a través de un espectro único que sería su "huella digital". Gustav Kirchhoff describió con mayor detalle el proceso de emisión y absorción de radiación sobre la materia. En general se puede mencionar que la emisividad y la absortividad son iguales en equilibrio térmico y que la emisividad es menor que uno debido a las leyes de conservación de la energía.

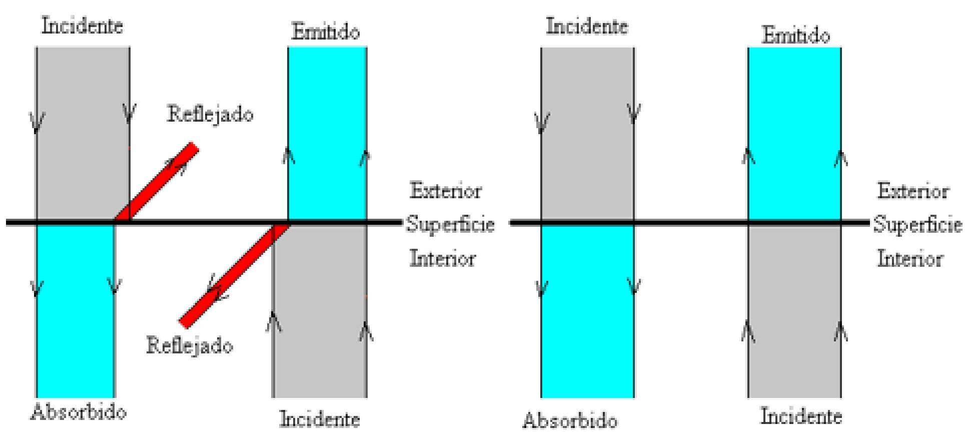

Imagen 1. Procesos de emisión y absorción de radiación sobre la superficie de un cuerpo cualquiera (izquierda). Procesos de emisión y absorción de radiación sobre la superficie de un cuerpo negro (derecha) Tomado y editado de

https://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/EMC/trabajos_02_03/RADIOASTRONOMIA/web/Indice/R_n/I_r_n/2_a/C_negro_C.htm

La imagen 1 muestra a la derecha cómo la radiación incidente o emitida sobre la superficie de un cuerpo nunca se da de manera total ya que una pequeña parte se refleja. Por otro lado, la imagen 1 muestra a la izquierda la naturaleza de un cuerpo negro ideal que puede emitir o absorber toda la radiación que sobre el incidiera. Kirchhoff estaba interesado en encontrar una función que describiera como radiaba energía un cuerpo negro, es decir, un cuerpo que lograra emitir toda la radiación a una temperatura absoluta en equilibrio térmico. Se pueden mencionar muy someramente las contribuciones más significativas a este problema empezando con la curva obtenida por los experimentos de Otto Lummer y Rubben Pringsheim en 1899.

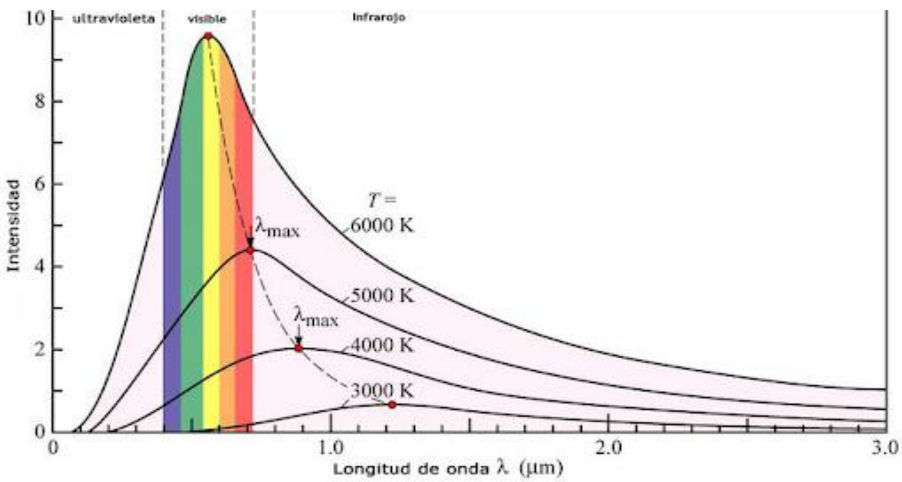

Imagen 2. Distribución espectral de energía radiada por un cuerpo negro. Tomado de http://www.quimicafisica.com/radiacion-cuerpo-negro-hipotesis-planck.html

Como se puede observar en la imagen 2, en un cuerpo que se encuentre a una temperatura constante cualquiera, la intensidad de energía radiada aumenta a medida que la longitud de onda aumenta hasta llegar a un máximo desde el que comienza a disminuir aun cuando la longitud de onda sigue creciendo y tiende a cero para valores infinitamente grandes de lamba. Ya que la integral bajo la curva da como resultado la energía emitida, en los años 1879 y 1884 se encontró empíricamente la ley de Stefan- Boltzmann que establece que un cuerpo negro emite una potencia de radiación térmica proporcional a la cuarta potencia de su temperatura:

$$E = \sigma T^4$$

En la imagen 2 también se observa que la máxima intensidad alcanzada está relacionada con una longitud de onda y usando esta información se puede establecer la ley de desplazamiento de Wien que relaciona la longitud de onda máxima con su temperatura[3]:

$$\lambda_{max} = \frac{c_1}{T}$$

Con c_1 una constante. La ley de desplazamiento de Wien fue una de las primeras que logró estar de acuerdo parcialmente con las mediciones experimentales en la zona que corresponde al espectro de longitudes de onda cortas (en los anexos se encuentra la deducción de esta ley desde la ley de Planck). Todas estas contribuciones por lo menos intentaron acercar a los científicos a la compresión sobre la radiación de cuerpo negro.

En el año de 1887 Planck se interesó en el problema ya que lo podía abordar desde la termodinámica, y mucho mejor aún, desde la entropía; era la oportunidad de demostrar que el segundo principio de la termodinámica era absoluto y no estadístico. A pesar de que se puede encontrar una gran cantidad de información respecto a intentar resolver el problema desde un modelo de osciladores armónicos, lo cierto es que Planck prescindió de estos pues los vinculaba a las ecuaciones de Maxwell y estas eran reversibles; desacuerdo fatal teniendo en cuenta que el planteamiento involucraba una distribución de energía inyectada a cuerpo negro mientras alcanzaba el equilibrio termodinámico, proceso *irreversible.*

A continuación, se presentan algunos de los razonamientos de Planck para resolver el problema de la radiación de cuerpo negro[4].

Comenzando se debe mencionar que Planck intentó explicar el problema de la radiación de cuerpo negro desde 1897 a 1900 pues estuvo reformulando el segundo principio de la termodinámica, evadiendo los nuevos trabajos en física estadística de Maxwell y

[3] Wien fue quien propuso la idea de utilizar un horno con un pequeño orificio como una buena aproximación para el cuerpo negro ideal.
[4] De 1859 a 1900 aproximadamente, hubo una cuantiosa contribución al problema de la radiación del cuerpo negro cuya mención escapa de este trabajo.

Boltzmann, además del surgimiento de la teoría de los gases ideales y las contribuciones a la existencia del átomo y por lo tanto a la discontinuidad de la materia; no sería sino hasta el mismo año de 1900 en que todos esos años de esfuerzo eclipsarían con sus intentos y se atrevería *en un acto de desesperación* a utilizar algunas ideas de la física estadística junto con la interpretación estadística de la entropía de Boltzmann. Para ello, se enfocó en encontrar una expresión que le permitiera calcular la entropía de un resonador monocromático de acuerdo con la temperatura del cuerpo negro.

La forma en que Planck resuelve el problema de la radiación del cuerpo negro será abordada a continuación con base en los artículos de Planck *on the theory of the energy distribution law of the normal spectrum* (1900b) y *on the law of the energy distribution in the normal spectrum* (1900c)

Considerar un gran número de resonadores monocromáticos N cuya frecuencia es v, N' de frecuencia v', v', N'' de frecuencia v'' y así sucesivamente. La energía total U_T almacenada en un cuerpo de paredes reflectantes será la energía de los resonadores junto con la energía propagada por el medio. Cada grupo de resonadores posee una energía total U para los resonadores N, U' para los N' y así sucesivamente con lo que:

$$U + U' + U'' + \cdots = U_O$$

Con U_O la energía de todos los resonadores, que es menor a la energía total U_T y U_T-U_o es la energía propagada en el medio. Suponiendo que la energía total de un grupo de resonadores es divisible por una cantidad infinita de números, se pueden encontrar infinitas formas de distribuirla en cada grupo. Empero Planck supone que hay un elemento de energía en que se puede dividir la energía total para cada grupo de resonadores dado por la relación $\varepsilon = h\upsilon$, y de aquí, dividiendo U entre el elemento de energía ε se obtienen P formas de distribuir esa energía, a esto le llama complexión.

Por ejemplo, si se tuviera N=10 y P=100, es decir, cien elementos ε que repartir en diez resonadores se podría escribir la siguiente complexión de manera gráfica:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Tabla 1. Complexión aleatoria. Tomado de Planck (1900).

De la teoría de las permutaciones el número de todas las complexiones posibles para N resonadores y P elementos ε es:

$$\Re = \frac{N.(N+1)(N+2)\ldots(N+P-1)}{1.2.3\ldots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$$

Siguiendo a Stirling (ver anexos):

$$N! = N^N$$

Se obtiene la siguiente aproximación:

$$\Re = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

Si se realiza el mismo procedimiento para los demás grupos de resonadores N', N'', …, se obtiene otro número de complexiones $\Re'$, $\Re''$, …, y multiplicando todos estos números se obtiene el número $\Re_O$ de todas las complexiones posibles para la distribución de energía. A continuación, se usa la ecuación de Boltzmann para la entropía:

$$S = k\ln(\Re_O)$$

No hay ninguna complexión privilegiada, todas son igualmente probables de ocurrir en el sistema y ya que la entropía total del sistema es $S_N = NS$ donde S es la entropía de un solo resonador, entonces se puede aplicar la ecuación de Boltzmann como sigue:

$$S_N = k\ln(\Re) = k\{(N+P)ln(N+P) - Nln(N) - PLn(P)\}$$

También como $U = P\varepsilon$ es la energía total para un resonador se tiene

$$S_N = kN\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\ln\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)\right\}$$

Y de acuerdo con la ecuación $S_N = NS$ entonces la entropía de un resonador es

$$S = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} ln\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)\right\} \tag{2}$$

Por otro lado, la expresión de Wien es[5]:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU} \tag{3}$$

Derivando la ecuación (2) con respecto a *U* y reemplazando en (3) se obtiene:

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{h\nu} ln\left(1+\frac{h\upsilon}{U}\right)$$

Despejando *U*

$$U = \frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$$

Por último, la densidad espacial de radiación de energía viene dada por[6]:

$$\boldsymbol{u} = \frac{8\pi I}{c} \tag{4}$$

Utilizando la ecuación de Planck de intensidad de un rayo monocromático sobre una superficie[7]:

$$I = \frac{\upsilon^2}{c^2} U$$

Nos da la relación al reemplazarla en (4):

---

[5] En busca de una mejora para la ley de Wien. Planck, (1900a)
[6] On the law of the energy distribution in the normal spectrum. Planck (1900c)
[7] Eight lectures on theoretical physics. Planck, (1909)

$$\boldsymbol{u} = \frac{8\pi\upsilon^2}{c^3} U \tag{5}$$

Y reemplazando U en (5) se obtiene:

$$\boldsymbol{u} = \frac{8\pi h\upsilon^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$$

Que es la ley de Planck.

En 1905 Lord Rayleigh y Sir James Jeans presentaron una ley conocida como la ley de Rayleigh-Jeans. Esta ley fue deducida de un cubo en cuyo interior se encontraban osciladores acotados en los extremos que radiaban energía y cuya radiación se describía utilizando las ecuaciones de Maxwell. Lograba predecir aproximadamente bien los valores de energía radiada en el espectro de longitudes de onda larga, sin embargo, a medida que la longitud de onda disminuye los valores de energía tienden al infinito entrando así en conflicto con las leyes de conservación de la energía. Ya que la ley falla desde el ultravioleta, este error sería considerado en la historia como la catástrofe ultravioleta. En la imagen 3 se pueden apreciar las aproximaciones de la ley de Wien (azul) y la ley de Rayleigh-Jeans (rojo) comparadas con la ley de Planck (negro).

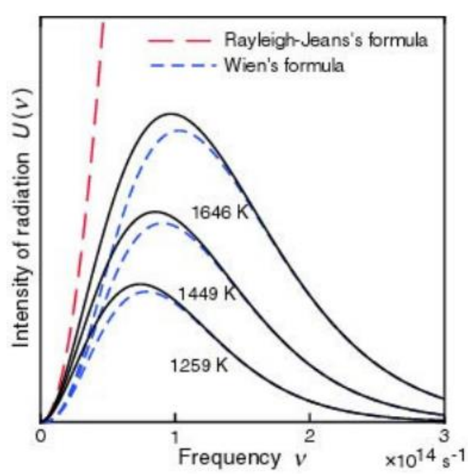

Imagen 3. Ley de Wien y Ley de Rayleigh- Jeans comparadas con la Ley de Planck. (M. Cid, 2011)

Capítulo 2

Planck no dio valor significativo a la hipótesis cuántica, es decir, la cuantización de la energía radiada por un cuerpo negro ideal o en otros términos, la naturaleza discontinua de la energía radiada, pero sería la causa de una nueva física que comenzaría a emerger poco a poco de acuerdo con las evidencias experimentales que imposibilitaron a la física clásica de explicar algunos fenómenos que preocupaban entonces. Dos de ellas de gran importancia fueron la ley de Dulong-Petit y el efecto fotoeléctrico, ambos resueltos por Albert Einstein usando la hipótesis; esta contribución llevada de la mano con el problema de la discontinuidad de la materia que comenzó a hacer eco desde el descubrimiento del electrón y las cada vez más buscadas explicaciones a la estabilidad de la materia a través de un modelo del átomo hizo que los físicos Ernst y Planck convocaran a un congreso en Bruselas en el año de 1911. Por ese entonces Poincaré desconocía todo lo referido a la teoría cuántica y sin embargo sería el más entusiasta en dicho encuentro; Lorentz concluyó que la hipótesis cuántica estaba en el ojo más importante de la época y urgía encontrar una solución distinta a esta que permitiera explicar la emisión de radiación de energía de los cuerpos. Un mes después Poincaré entregó un trabajo en el que demostraba la imposibilidad de resolver el problema de la radiación de cuerpo negro haciendo uso de la física clásica junto con la necesidad y suficiencia de la hipótesis cuántica (es decir, era la única solución del problema) y la existencia de una discontinuidad cuántica.

Al resolver el problema de la radiación de cuerpo negro Planck parte del equilibrio termodinámico del sistema, hace uso del concepto de entropía y de algunas consideraciones estadísticas; el modelo que plantea es el de un grupo de resonadores que intercambian y emiten energía en términos de un cuanto generando el espectro observado. El intercambio existía, pues de no ser así el sistema jamás alcanzaría un estado de equilibrio termodinámico, pero Poincaré necesitaba mostrar cómo era el mecanismo interno que permitía esto pues al hacerlo le brindaría la posibilidad de encontrar una explicación a la hipótesis cuántica. También prescindió de los demás conceptos termodinámicos que utilizó Planck, solo tuvo en cuenta que los átomos están relacionados con la temperatura macroscópica del sistema y que la descripción del resonador de Planck puede ser aceptada sin problema.

En la siguiente recontextualización del artículo de Poincaré *sur le theorie des quanta* con ayuda de otros dos artículos que hablan del mismo tema, se mencionan algunos de los elementos más importantes que rodearon a la hipótesis cuántica y los esfuerzos por evadirla.

Inicialmente las ideas de Poincaré muestran cual es conflicto en términos físicos y matemáticos que hay alrededor de la hipótesis cuántica. Como la energía se distribuye en paquetes discretos esto implica que poseen masa[8], sin embargo, las leyes de la mecánica clásica que se utilizan normalmente para describir el movimiento de cualquier cuerpo o partícula por medio de ecuaciones diferenciales no son posibles de aplicar a estos paquetes debido a que su movimiento no puede ser descrito utilizando funciones analíticas continuas.

Algunas consideraciones de la física clásica

Como preámbulo al desarrollo que presta mayor interés, primero se considera una descripción del espacio de fases. En este espacio n-dimensional el estado de un sistema puede ser descrito por el punto cuyas coordenadas generalizadas son $q_1, q_2, \ldots, q_n$ y las ecuaciones diferenciales que permiten conocer su variación en el tiempo vienen dadas por:

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$$

La densidad de probabilidad de que este punto se encuentre en un volumen dz es $\int_V Wdz$ donde W es función de dichas coordenadas, aunque desde otro punto de vista W

[8] Incluso se sugiere que la masa depende de la velocidad y la aceleración para evitar la discontinuidad de la energía.

es proporcional a la probabilidad de que el punto se encuentre en un intervalo de tiempo cualquiera del sistema durante su evolución temporal. Además de esto, las ecuaciones de movimiento en los sistemas clásicos se deben cumplir la ecuación:

$$\sum \frac{\partial (W q_i)}{\partial q_i} = 0 \tag{6}$$

Donde W será llamado un multiplicador. En el caso de la mecánica clásica estas ecuaciones diferenciales son las de Hamilton:

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

De donde se tiene aplicando la ecuación (6):

$$\sum \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0$$

De esta igualdad se puede encontrar que W=1 por lo que la función densidad de probabilidad asociada a todos los estados dinámicos en cualquier sistema físico clásico son igualmente probables de ocurrir. Esta idea es puramente clásica. En breve se presentará atención a la interpretación física y matemática que se le debe dar a un W distinto de 1.

Partición de la energía de Poincaré.

Considere un sistema de dos resonadores, un átomo clásico con un periodo de oscilación largo y un resonador cuántico con un periodo de oscilación corto. Para el primero su energía vendrá dada por *U* y para el segundo por *E*. Ambos intercambian energía a través de los choques[9]. Las consideraciones necesarias que se hagan van a girar en torno a una función W que contiene toda la información estadística-dinámica del sistema. Por último, el átomo es descrito como un oscilador con movimiento rectilíneo uniforme de tal forma que puede ser estudiado a partir de las leyes de la mecánica conocidas, especialmente por la ley

[9] No hay interés en los términos adicionales que aparecen con estos ni tampoco en la forma específica de sus ecuaciones sino en la probabilidad de cada estado del sistema.

de Rayleigh-Jeans que predice correctamente las emisiones de energía asociadas a resonadores de longitud de onda larga, por lo tanto, cualquier descripción del movimiento que sea desconocida provendrá del resonador cuántico, con lo que la función W solo depende de la energía de este. La tarea es encontrar la partición de la energía, es decir, cuáles serán los valores medios de E y U, valores que llamaremos X e Y, y cómo están relacionados.

La función densidad de probabilidad permite calcular la probabilidad de que un valor en un conjunto dado *caiga.* La densidad de probabilidad de obtener un valor de energía M en un intervalo cualquiera de este sistema propuesto corresponde a la integral de W:

$$MdH = \int WdEdU \tag{7}$$

En este caso los límites de integración están de acuerdo con $E > 0, U > 0$ y $H < E + U < H + dH$.

La esperanza matemática formaliza la idea de valor medio; consiste en calcular la media de los valores probables que puede tomar un sistema. Por ejemplo, una variable con función densidad de probabilidad $f(x)$ que toma valores x de un conjunto X en un intervalo $[a, b]$ tendrá una esperanza matemática dada por:

$$E[X] = \int_a^b xf(x)dx$$

Como se busca la energía media de los resonadores y los átomos, se utiliza la esperanza matemática, es decir, si los valores probables de energía de los resonadores son E y los de los átomos son U los valores esperados vendrían dados por la ecuación:

$$MYdH = \int EWdEdU \qquad MXdH = \int UWdEdU \tag{8}$$

Como la función W solo depende de la energía del resonador cuántico, es decir, de E, se pueden reescribir las expresiones anteriores (8) de acuerdo con la conservación de la energía

$$E + U = H$$

Obteniendo entonces para (7) y (8):

$$M = \int_0^H W(E)dE \qquad MX = \int_0^H (H-E)W(E)dE \qquad MY = \int_0^H EW(E)dE \tag{9}$$

Recordando que en física clásica en el intervalo [0, *H*] la función densidad de probabilidad es W=1 de las ecuaciones (9) se concluye al resolver las integrales que X + Y = *H*, es decir que los valores medios de energía cumplirán con la conservación de la energía. Más importante aún es la relación *MY/MX* de (9) pues da como resultado Y=X que expresa el hecho clásico de que la energía total del sistema está particionada igualmente entre sus constituyentes grados de libertad, de manera que la energía media de los resonadores Y es igual a la energía media de los átomos X. De aquí se deriva el teorema de equipartición pues este se enuncia como:

$$K = \frac{3}{2}k.T$$

Donde *K* es la energía cinética de un sistema de partículas, k es la constante de Boltzmann y *T* es la temperatura absoluta en la que se encuentra el sistema. Claramente se observa que la relación que hay entre la energía y la temperatura es lineal.

El caso en el que el número de resonadores y átomos es más grande lleva a concluir que $\sum E + \sum U = H$ y que la densidad de probabilidad W del sistema será el producto de las densidades de probabilidad *w* de cada resonador dada por la expresión:

$$\mathrm{W} = w(\mathrm{U}_1)\ldots w(\mathrm{U}_p)w(\mathrm{E}_1)\ldots w(\mathrm{E}_n)$$

En este caso se tiene en cuenta que la función densidad de probabilidad solo depende de la energía de los resonadores cuánticos y que la función para los valores que dependen de la energía de los átomos valen uno debido a que se consideran clásicos:

$$\mathrm{W} = w(\mathrm{E}_1)\ldots w(\mathrm{E}_n)$$

Y la expresión general de la densidad de probabilidad (7) viene siendo entonces:

$$\mathrm{M} = \int_0^H w(E_1)\ldots w(E_n)dE_1\ldots dE_n dU_1\ldots dU_p \tag{10}$$

Ahora al examinar los valores medios de energía para los resonadores se tiene la ecuación:

$$MY = \frac{1}{n}\int_0^H (E_1 + \cdots E_n) w(E_1) \dots w(E_n) dE_1 \dots dE_n dU_1 \dots dU_p \tag{11}$$

Donde la integral (11) corresponde a la energía total de los resonadores y n al número de resonadores. Y también los valores medios de los átomos:

$$MX = \frac{1}{p}\int_0^H (U_1 + \cdots U_n) w(E_1) \dots w(E_n) dE_1 \dots dE_n dU_1 \dots dU_p \tag{12}$$

Donde la integral (12) corresponde a la energía total de los átomos y p al número de átomos.

La integral que se puede resolver de acuerdo con lo que se conoce es:

$$\int_U^{U+dU} dU_1 \dots dU_p = \frac{U^{p-1}}{(p-1)!} dU \tag{13}$$

La integral

$$\int_{\mathrm{E}}^{\mathrm{E+dE}} w(\mathrm{E}_1) \dots w(\mathrm{E}_n)\, d\mathrm{E}_1 \dots d\mathrm{E}_p = \varphi(E,n) d\mathrm{E} \tag{14}$$

no será determinada debido a que la densidad de probabilidad $W(E) = w(\mathrm{E}_1) \dots w(\mathrm{E}_n)$ no ha sido considerada clásica, sino cuántica, por lo tanto, como depende de estos valores de densidad de probabilidad desconocidos $w(\mathrm{E}_1) \dots w(\mathrm{E}_n)$ no se puede calcular. Tomando las ecuaciones (13) y (14) y reemplazándolas en (10), (11) y (12) se pueden escribir los nuevos valores medios como:

$$M = c\int_0^H \varphi(E,n)(H-E)^{p-1} dE \tag{15}$$

$$MY = \frac{c}{n}\int_0^H \varphi(E,n)(H-E)^{p-1} E dE \qquad MX = \frac{c}{p}\int_0^H \varphi(E,n)(H-E)^{p} dE \tag{16}$$

Estas serán las ecuaciones clave que permitirán conocer la relación entre X e Y pudiendo entonces buscar una función Y(X) que describa cómo esta particionada la energía en este modelo. Igualmente, en estas ecuaciones está inmersa la información macroscópica que se puede obtener del sistema, lo que correspondería a la distribución de energía total entre un número de átomos y resonadores o más precisamente la curva espectral que se obtiene experimentalmente al medir los distintos valores de energía radiada de un cuerpo; pero además, se encuentra también la información microscópica del sistema asociada a φ que proporciona la información estadística/dinámica del movimiento de los resonadores.

Para finalizar si se asume que

$$\int_{\mathrm{E}}^{\mathrm{E}+d\mathrm{E}} w(\mathrm{E}_1) \dots w(\mathrm{E}_n)\, d\mathrm{E}_1 \dots d\mathrm{E}_p = \varphi(E,n) d\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}^{n-1}}{(n-1)!} dE$$

es decir, tomando la densidad de probabilidad asociada a los resonadores de forma clásica en lugar de cuántica, las ecuaciones (16) toman la forma

$$MY = \frac{c}{n}\int_0^H \frac{\mathrm{E}^{n-1}}{(n-1)!}(H-E)^{p-1} E dE \qquad MX = \frac{c}{p}\int_0^H \frac{\mathrm{E}^{n-1}}{(n-1)!}(H-E)^{p} dE$$

Y buscando la partición de la energía a través del cociente *MY/MX* se encuentra

$$\frac{Y}{X} = \frac{p}{n}\frac{\int_0^H E\, dE}{\int_0^H (H-E) dE}$$

Con lo que al resolver las integrales tenemos finalmente

$$\frac{Y}{X} = \frac{p}{n}$$

Se recupera la partición de energía clásica entre los átomos y los resonadores.

Primer método: Función escalón $\left(\frac{E}{n}\right)$:

A continuación, Poincaré se propone encontrar cómo esta particionada la energía de un sistema de átomos considerados clásicos y resonadores considerados cuánticos y para ello de manera intuitiva escoge el siguiente funcional como el mejor para describir la nueva densidad de probabilidad del sistema:

$$\varphi_n(E,n) = ZNF^n\left(\frac{E}{n}\right)G\left(\frac{E}{n}\right) \tag{17}$$

En este funcional *Z* tiende a 1 cuando n tiende a infinito y N es un coeficiente numérico que depende de n. *F* y *G* son dos funciones escalón que dependen de la relación $\frac{E}{n}$ que sería la cantidad de energía total de los resonadores por resonador, esta relación es el escalón de la función y la razón por la que se escoge es que permita encontrar que la partición de energía *Y(X)* es independiente del número de resonadores n y el número de átomos p, argumento suficiente para asegurar la existencia de un único estado de equilibrio ya que como es sabido este no depende de la cantidad de materia que haya en un sistema.

De aquí se hace el siguiente cambio de variable

$$\frac{E}{n} = u \qquad \frac{H}{n} = q \qquad \phi = F(u)(q-u)^k$$

Y el funcional (17) queda escrito en la forma

$$\varphi_n(u) = ZN\phi^n(u)G(u) \tag{18}$$

De manera que las ecuaciones (15) y (16) cuando se reemplaza el funcional (18) toman la forma:

$$M = npcN\int_0^q HG(u)\,\phi^n(u)\frac{du}{q-u}$$

$$MY = npcN\int_0^q uHG(u)\,\phi^n(u)\frac{du}{q-u} \qquad MX = \frac{npcN}{k}\int_0^q HG(u)\,\phi^n(u)du$$

Como se puede observar, en estas integrales la función ϕ está elevada a la n, esto significa que al maximizar su valor se encontrara el estado más probable de w, valor que Poincaré identifica como el estado de equilibrio del sistema, por ello en la integral solo hay interés sobre este elemento pudiendo sacar a los demás de tal manera que al hacer el cociente *MY/M* y *MX/M* se obtiene que:

$$Y = u, \qquad X = \frac{q-u}{k} \tag{19}$$

Y maximizando la función ϕ:

$$\phi' = 0$$

$$\frac{F'(u)}{F(u)} - \frac{k}{q-u} = 0 \tag{20}$$

O bien utilizando (19) y (20) se puede escribir:

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)} \tag{21}$$

Esta es la ley de partición de la energía, es decir, la relación buscada entre X e Y.

La ley de Planck

Esta construcción que logra establecer la relación de la partición de la energía entre los átomos X y los resonadores Y ha salido desde la física estadística, muy distinto al trabajo de Planck que se basa mayoritariamente en la termodinámica. Poincaré estaba interesado en saber si este sistema que él había modelado conduciría a la misma ley de Planck haciendo uso de la hipótesis cuántica; esto no significa que él pretendiera llegar a la ley de forma adrede, sino que pensaba utilizar la hipótesis para encontrar a que resultado lo llevaba, sea cual fuera este. De las leyes de la combinatoria ordinarias, Poincaré llegó al mismo resultado al que había llegado Planck con respecto a las distintas complexiones o combinaciones posibles en las que se distribuiría la energía en un sistema como el planteado al tener en cuenta que la energía de los resonadores solo era posible si esta admitía múltiplos de $\varepsilon = h\upsilon$ en la forma $E = P.\varepsilon$, donde P sería el número de cuantos a distribuir. Sumado a esto se debe agregar que en el funcional de la ecuación (17), φ representará el número de complexiones debido a que en estas están contenidos todos los posibles estados del sistema incluyendo por supuesto el estado de equilibrio termodinámico. Por esta razón, se puede escribir como sigue:

$$\varphi = \frac{(P+n-1)!}{P!\,(n-1)!} \tag{22}$$

Utilizando las aproximaciones de Stirling:

$$(P+n)! = (P+n)^{P+n} e^{-P-n} \sqrt{2\pi(P+n)};$$

$$P! = P^P e^{-P} \sqrt{2\pi P}, \qquad\qquad n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Se puede escribir entonces (22) como:

$$\frac{(P+n-1)!}{P!\,(n-1)!} = \frac{(P+n)!}{P!\,n!}\frac{n}{P+n} = \left(1+\frac{n}{P}\right)^{P}\left(1+\frac{P}{n}\right)^{n}\sqrt{\frac{P+n}{2\pi Pn}\frac{n}{P+n}}$$

Recordando la sustitución $E = nu$ e introduciendo la hipótesis Planckiana $E = P.\varepsilon$, se encuentra:

$$\frac{(P+n-1)!}{P!\,(n-1)!} = \left(1+\frac{\varepsilon}{u}\right)^{P}\left(1+\frac{u}{\varepsilon}\right)^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{u+\varepsilon}{u}\frac{\varepsilon}{u+\varepsilon}} \tag{23}$$

Si se toma $P = \frac{nu}{\varepsilon}$ se puede escribir (23) de la forma:

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{u}\right)^{\frac{nu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{u}{\varepsilon}\right)^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{u+\varepsilon}{u}\frac{\varepsilon}{u+\varepsilon}}$$

Esto nos muestra que podemos tomar la forma del funcional (17):

$$F(u) = \left(1+\frac{\varepsilon}{u}\right)^{\frac{u}{\varepsilon}}\left(1+\frac{u}{\varepsilon}\right), \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad G(u) = \sqrt{\frac{u+\varepsilon}{u}\frac{\varepsilon}{u+\varepsilon}} \tag{24}$$

Donde como se mencionó anteriormente F es una función de u y ε elevada a la n potencia, N es un coeficiente que depende de n y G es otra función de u y ε.

Ahora recordando que $u = Y$, y que:

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}$$

Se puede encontrar a partir de esta relación utilizando $F(u)$ como $F(\mathrm{Y})$:

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)} = \frac{F(u)}{F'(u)} = \frac{1}{\varepsilon} log\left(1+\frac{\varepsilon}{Y}\right)$$

Recordando que $F'(u)$ se hace desde (24) se encuentra entonces

$$\frac{\varepsilon}{X} = log\left(1+\frac{\varepsilon}{Y}\right)$$

Y finalmente despejando Y:

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}}-1} \tag{25}$$

Es la ley de Planck.

En conclusión, este primer método es aceptable para reconocer que la hipótesis cuántica de Planck es suficiente para explicar la radiación del cuerpo negro, esto quiere decir que la hipótesis como tal va a conducir a la ley de Planck. Sin embargo, Poincaré reconoce las limitaciones presentes y se propone encontrar un camino más general y menos especulativo.

Capítulo 3

Segundo método: Transformada de Fourier

En lo que sigue Poincaré se propone encontrar, primero si verdaderamente la partición de la energía es independiente del número de resonadores n y del número de átomos p sin importar cual es la forma de la densidad de probabilidad w, y segundo, preguntarse si la construcción parcialmente intuitiva de Planck utilizando las complexiones e introduciendo la hipótesis cuántica es la única que permite llegar a la ley de radiación de energía de cuerpo negro. [10]

Para responder estas dos cuestiones primero plantea una transformada de Laplace en la forma:

$$\phi(\alpha) = \int_{0}^{\infty} w(E) e^{-\alpha E} dE \tag{26}$$

Con $w(E)$ como la densidad de probabilidad de un solo resonador y donde α es un numero complejo $\alpha = \sigma + i\beta$. Pero si se asume $\sigma = 0$ entonces la transformada toma la forma

$$\phi(i\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(E) e^{-i\beta E} dE \tag{27}$$

[10] En el razonamiento anterior Poincaré introduce las complexiones de la misma forma en que Planck lo hizo.

Como se quiere calcular una transformada de Fourier, en la integral (27) E *barre* en el intervalo $(-\infty, \infty)$, por eso puede llegar a considerarse igual a (26) si asumimos que para $E > 0$ se tiene que $\psi(E) = w(E)$ y para $E < 0$ se tiene $w(E) = 0$. Es decir que la transformada de Fourier será igual a cero en el intervalo $(-\infty, 0)$. El sentido físico de esto se encuentra en que naturalmente un resonador no puede tener energía negativa. Multiplicando (26) por si misma n veces tenemos

$$\phi^n(\alpha) = \int_0^\infty w(\mathrm{E}_1) \dots w(\mathrm{E}_n)\, e^{-\alpha(E_1, E_2, \dots E_n)} dE_1 \dots E_N$$

Al interior de esta integral se tiene la expresión de la densidad de probabilidad asociada al sistema de resonadores (14) así que reemplazándola toma la forma

$$\phi^n(\alpha) = \int_0^\infty \varphi(E, n) e^{-\alpha E} d\mathrm{E} \tag{28}$$

Ahora se puede calcular la transformada inversa de Fourier de (28) y resulta

$$\varphi(E, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \phi^n(\alpha) e^{-\alpha E} d\mathrm{E} \tag{29}$$

¿Cuál es la justificación física y matemática de lo anterior expuesto? Empezando por la segunda. En el primer método, el método de la función escalonada, Poincaré “supone” que la densidad de probabilidad de los resonadores puede ser igual al funcional (17), o sea que esta suposición resulta ser una prueba de ensayo y error que se encuentra limitada y no es suficiente para mostrar si la ley de Planck es verdadera y si se deriva únicamente de la hipótesis cuántica. En cambio, con el uso de la transformada de Fourier no hay mayor interés en saber cuál es la forma de φ pero si en saber que posee una transformada única de Fourier que a su vez puede ser recuperada al hallar la transformada inversa. Como una adición trivial hay que recordar que la transformada de Fourier de una función tiene una y solo una función asociada. En otras palabras, este método es más general que el primero.

En cuanto a la primera justificación, una transformada de Fourier es una aplicación matemática que permite descomponer una función en un numero infinito de funciones.

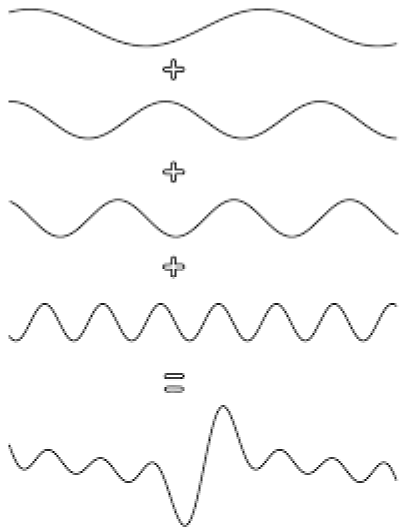

Imagen 4. Representación visual de la transformada de Fourier. Tomado de https://www.ciencia-explicada.com/2011/04/rectificacion-optica-un-nuevo-metodo.html

La descripción ilustrativa es que una suma de frecuencias daría como resultado una única frecuencia (Imagen 4). Físicamente hablando, esto tiene un gran uso en el cuerpo negro porque un espectro de frecuencias (que sería la frecuencia de cada resonador radiante y por lo tanto una función para cada resonador) daría como resultado la distribución final de un cuerpo radiante (la cuerva espectral observada experimentalmente) la ecuación (28) describe esto. Pero, también se puede interpretar en el sentido contrario, una distribución final dada puede ser descompuesta en su espectro de frecuencias, que corresponde a la lectura que se puede hacer a la ecuación (29).

Con estos nuevos descubrimientos, si se reemplaza la ecuación (29) en las ecuaciones (15) y (16) se obtiene el mismo resultado del primer método, es decir la ley de Planck (25)[11]. Y aunque serán omitidos estos cálculos porque son similares a los del primer método, si se debe rescatar una relación muy valiosa a la que llega a través de este método y que es

$$\frac{\phi\prime(\alpha)}{\phi(\alpha)} = -Y \qquad\qquad X = \frac{1}{\alpha} \tag{30}$$

[11] También se recupera el teorema de equipartición de la energía clásico pero el procedimiento será omitido.

Este segundo método le permite a Poincaré responder a la pregunta hecha por Nernst durante el congreso de Solvay: ¿Podremos escapar a la hipótesis cuántica? La respuesta es negativa. Ya que la ecuación (28) y la ecuación (29) derivan a la ley de Planck cuando se reemplazan en las ecuaciones (15) y (16) que son las que determinan los valores esperados de energía del sistema, se puede concluir que la hipótesis de los cuantos es suficiente porque conduce a la ley de Planck (24) y necesaria porque si la ley de Planck es verdadera, entonces la hipótesis de los cuantos también. Por último, puede dar respuesta al retomar las ecuaciones (30), que la energía promedio de los átomos no depende de p y la energía promedio de los resonadores no depende de n; esto asegura el equilibrio termodinámico porque una vez más, los sistemas físicos siempre llegan a dicho estado único independientemente de la cantidad de materia que posean.

Discontinuidad cuántica

Retomando las ecuaciones (30) se puede entender que son la partición de la energía entre los átomos y los resonadores derivada del segundo método cuya diferencia escrita con la partición encontrada en el primer método es obvia. Queda entonces un último intento por estudiar la continuidad de la radiación de los cuerpos aplicando estas ecuaciones. Según la ley de radiación Wien[12], la densidad de radiación espacial de cuerpo negro entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, está representada por la ecuación:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda^5} f(\lambda T) \tag{31}$$

Donde T es la temperatura absoluta y $f(\lambda T)$ una función que depende de las variables inscritas en ella. Esta ecuación es el resultado de una serie de suposiciones que son propuestas desde las ideas de la física clásica. También recuerde que la densidad de radiación espacial dada por Planck es (5):

[12] No confundir con la ley de desplazamiento de Wien.

$$\boldsymbol{u}dv = \frac{8\pi v^2}{c^3}Ydv \tag{32}$$

Donde *Y*=*U*. También se puede escribir (32) como la igualdad

$$u_\lambda d\lambda = u_v dv = Kv^2 Ydv \tag{33}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = \frac{c}{v}$ y con $K = \frac{8\pi}{c^3}$. Se puede despejar *Y* de (33) así:

$$Y = \frac{u_v}{Kv^2} \tag{34}$$

De (33) también $u_v = u_\lambda \frac{d\lambda}{dv}$, que si se remplaza en (34) nos da

$$Y = \frac{u_\lambda}{Kv^2}\frac{d\lambda}{dv} \tag{35}$$

Recordando que $\lambda = \frac{c}{v}$ entonces $d\lambda = -\frac{cdv}{v^2}$ y al reemplazar esto en (35)

$$Y = \frac{K' u_\lambda}{v^4} \tag{36}$$

Con $K' = -\frac{c}{K}$. Y como $\lambda = -\frac{c}{v}$ se puede escribir (36) en términos de λ de la forma

$$Y = K'' u_\lambda \lambda^4 \tag{37}$$

Con $K'' = -\frac{1}{8\pi}$. Finalmente despejando u_λ de (31) y reemplazando en (37) nos da

$$Y = \frac{K'' f(\lambda T)}{\lambda} \tag{38}$$

Ahora, *T* no es otra cosa que *X*, y tomando las ecuaciones (30) se puede escribir

$$Yd\alpha = -d\ ln\phi(\alpha)$$

$$YdX = X^2 d\ ln\phi(\alpha) \tag{39}$$

Donde igualando (38) y (39) para *Y*

$$\frac{K'' f(\lambda X)}{\lambda} = \frac{X^2 d \ln(\phi)}{dX}$$

O también

$$\frac{K'' f(\lambda X) dX}{\lambda X^2} = d \ln(\phi)$$

La expresión a la derecha no cambia si se hace el cambio de variable X a μX y λ a $\frac{\lambda}{\mu}$ siendo μ cualquier constante, por lo tanto, se deduce que ϕ es una función de λX. Si se escribe $d\ \ln(\phi(\lambda X))$ de esta derivada saldrá un termino λ adicional, aunque no se conozca la forma de ϕ que sería, $\lambda\ d\ \ln(\phi(\lambda X))$. Y como al interior se tiene un producto, el diferencial de λX seria $Xd\lambda$

$$\frac{K''f(\lambda X)Xd\lambda}{\lambda^2X^2} = d\ \ln(\phi)$$

Eliminando términos semejantes

$$\frac{K''f(\lambda X)d\lambda}{\lambda^2X} = d\ \ln(\phi)$$

Y multiplicando $\frac{1}{\lambda^3}$ en ambos lados de la igualdad se recupera la ley de Wien (31) y se puede escribir

$$u_\lambda d\lambda = \frac{X}{K''}\frac{d\ \ln(\phi)}{\lambda^3}$$

La radiación total es entonces:

$$\int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \frac{X}{K''}\int_0^\infty \frac{d\ \ln(\phi)}{\lambda^3} \tag{10}$$

Recordando que ϕ debe ser función de λX en la forma $\phi(\lambda X)$ la ecuación del lado derecho en (40) muestra un hecho físico que no tiene sentido ya que diverge a infinito cuando $\lambda \to 0$. La imagen 5 muestra visualmente este comportamiento. Estas longitudes de onda corta que muestran una inconsistencia son los mismos resonadores de longitud de onda corta propuestos por Poincaré y que son los que poseen una naturaleza cuántica. Esta explica porque la ley de Rayleigh-Jeans predice valores infinitos de energía cuando las longitudes de onda se hacen cada vez más pequeñas.

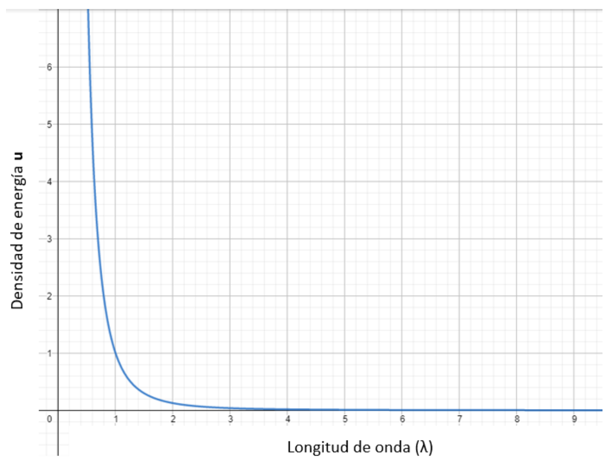

Imagen 5. Grafica de la función $\frac{1}{\lambda^3}$. Fuente propia.

Pero esta patología puede ser vista desde otro punto de vista. Al considerar la ecuación (26) que es

$$\phi(\alpha) = \int_0^\infty w(E)e^{-\alpha E} dE$$

En esta ecuación $w(E)$ debe tener un comportamiento continuo porque puede *barrer* en el intervalo que muestra la integral, pero hay que observar que cuando $\alpha \to \infty$ entonces $\phi(\alpha)$ tiende a cero. Si se relaciona esta consecuencia con la ecuación (40) cuando ϕ tienda a cero entonces el logaritmo diverge también, pero hacia menos infinito. La imagen 6 muestra este comportamiento.

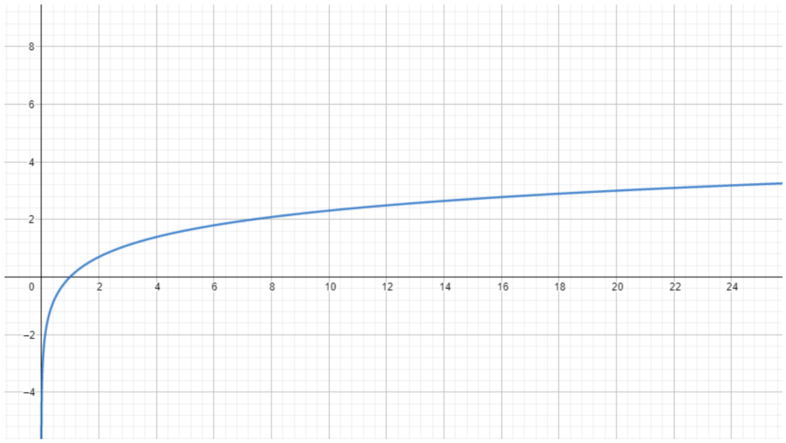

Imagen 6. Grafica de la función $ln(x)$. Fuente propia.

Al graficar la función completa de (40), $\frac{\ln(\phi)}{\lambda^3}$, se observa que diverge hacia menos infinito para $\lambda = 0$. Imagen 7.

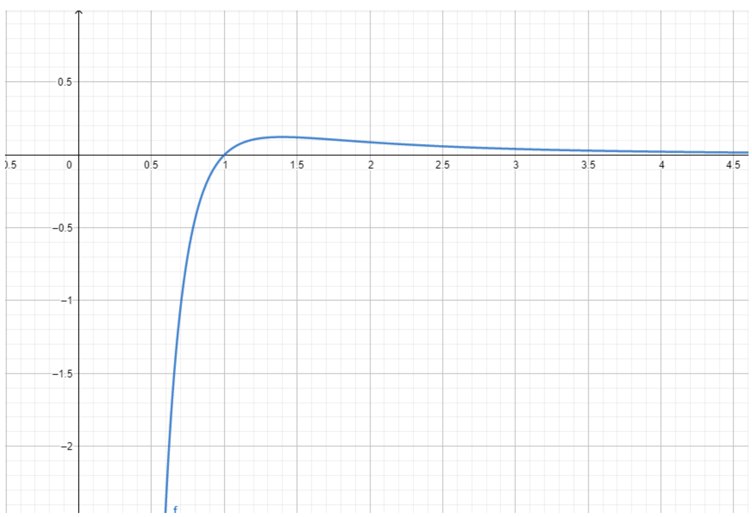

Imagen 7. Grafica densidad de radiación espectral clásica. Fuente propia.

La única forma de salvar esta extrañeza es que cuando $\alpha \to \infty$ en (26), $\phi(\alpha)$ no puede tender a cero, y así, en la ecuación (40) el logaritmo corresponda con valores finitos de energía, pero si esto es así, entonces la función $w(E)$ no puede ser considerada continua. En conclusión, hay dos caminos que llevan a una problemática más grave que la anterior. Si la función $w(E)$ es continua, la densidad de radiación espectral es infinita y no está de acuerdo con los resultados experimentales medidos, pero si la densidad de radiación espectral es finita, $w(E)$ no puede ser continua. Esta prueba de la discontinuidad cuántica presente en la partición de la energía del cuerpo negro permite afirmar con total certeza que no importa si hay más “leyes de Planck”, o no importa la forma en que son escritas matemáticamente son distintas a la ley de Planck, todas mostraran un efecto de discontinuidad de la misma naturaleza que hipótesis cuántica propuesta.

Análisis y conclusiones

Las contradicciones entre la mecánica y la termodinámica con respecto a los procesos reversibles y la necesidad de explicar la radiación de los cuerpos, dos problemáticas físicas de naturaleza aparentemente distinta condujeron a Planck a encontrar que la forma en que la energía de los cuerpos era radiada no era de naturaleza continua como había sido concebida en la física clásica, sino que esta era emitida en paquetes discretos. La búsqueda de la verdad para Planck culminó con un trabajo que mostraba una concepción muy diferente de los fenómenos que se encontraban en una escala cuántica y los que claramente las formulaciones antiguas no podían explicar.

A continuación, se presenta una comparación mostrando las semejanzas y diferencias de los trabajos de Planck y Poincaré cuando buscaron derivar una ley que describiera la radiación de energía de los cuerpos.

Los contextos e intereses de cada uno ellos son significativamente distintos. En primer lugar, Planck se encontraba en una época donde las ideas del segundo principio de la termodinámica todavía se sentían demasiado recientes y junto con las propuestas de Boltzmann y Maxwell alargarían aún más la problemática, razón por la cual invirtió demasiado tiempo intentando encontrar una justificación tan clara y convincente como fuera posible para que se aceptara la naturaleza absoluta de este principio. Hay que recordar que Planck era un experto en lo que a la termodinámica se refería y encontraba en el primer principio de esta una verdad irrefutable por lo que de alguna forma concebía los trabajos de

Clausius sobre la entropía con igual valor. Ahora bien, pasado el siglo XX, con el nacimiento de la teoría de los gases ideales y la mecánica estadística, los problemas alrededor del carácter absoluto de la termodinámica parecieron ser menos interesantes debido a las nuevas problemáticas que surgían con la relatividad especial de Einstein, el modelo atómico y la aparición de la mecánica cuántica, razones por las cuales Poincaré prefirió prescindir de los conceptos que rodeaban a la termodinámica e intentó obtener resultados de la física estadística que era según el más objetiva y menos conflictiva.

Planck buscaba específicamente encontrar una prueba irrefutable que le diera al segundo principio un carácter absoluto y no estadístico, por eso incursionó en el problema de la radiación de cuerpo negro. Ya que la evolución del sistema es irreversible, se puede calcular la entropía máxima, que es equivalente al estado más probable y que está asociado al estado de equilibrio térmico del sistema; se suponía que con un valor positivo de entropía se aseguraba que el segundo principio era absoluto, pero aparte, que la materia era continua, porque las interpretaciones estadísticas estaban muy relacionadas con sistemas microscópicos de partículas. Poincaré en cambio se interesó más en el mecanismo que lograba establecer el equilibrio termodinámico del sistema y después encontrar la partición de energía, esto lo conduciría a un resultado que, si no era el de Planck, hubiera salvado las concepciones clásicas, de lo contrario, permitiría justificar mejor porque tomaba esa forma.

Vale la pena resaltar que el modelo propuesto por Planck fue igualmente acogido por Poincaré, pero cada uno le dio un enfoque distinto. En lo que a la distribución de la energía de los cuerpos radiantes refiere, en la ley de Planck se describe la densidad de radiación por unidad de área y tiempo que emite el cuerpo con la ecuación:

$$\boldsymbol{u} = \frac{8\pi\upsilon^2}{c^3} \cdot \frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$$

Esta densidad depende de la energía promedio de los resonadores que estaría dada por:

$$U = \frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1} \tag{41}$$

Y que es la misma relación que Poincaré encuentra

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1} \tag{42}$$

En el enfoque de Planck, U es la energía promedio de un resonador y está relacionada con la temperatura absoluta T del sistema. Poincaré también se propone calcular el valor promedio de energía para un solo resonador, Y, como función del valor promedio de energía de un átomo que oscila, X. Al observar en las ecuaciones (41) y (42) se puede descubrir que $X = kT$, es decir, los átomos de Poincaré funcionan como un termómetro en este sistema pues están relacionados con la temperatura absoluta que propone Planck. Por último, en los anexos a este trabajo se encuentra una demostración de que se recupera el teorema de la equipartición de la energía clásico al calcular el límite de las ecuaciones (41) y (42) cuando $\varepsilon \to 0$.

En principio Planck logra mostrar la distribución de la energía de un cuerpo negro utilizando la hipótesis cuántica, pero esta no tiene una trascendencia importante y se puede decir que como la hipótesis es introducida más bien intuitivamente, no se determina a analizarla. Poincaré termina imbuido en el sistema hasta el punto en que encuentra que la discretización de la energía es un comportamiento natural de la radiación.

Cuando Planck encontró la distribución de energía del cuerpo negro utilizando la hipótesis cuántica, lo hizo como un artificio matemático y de poco significado físico, pero no fue el único que pensó así, ya que su trabajo paso prácticamente desapercibido hasta que en el año de 1905 Albert Einstein le daría el valor que merecía. Poincaré no estuvo exento de esa experiencia pues su artículo, dada la complejidad que presentó en la época fue igualmente ignorado; incluso Sir James Jeans atacó algunas conjeturas y errores matemáticos que no daban por resuelto el problema de la hipótesis cuántica. Esto puede estar de acuerdo con la historia porque la publicación del articulo fue en 1912 y no es sino hasta 1924 aproximadamente que Paul M. Dirac, Werner Heisenberg y Erwin Schrödinger proponen los fundamentos de la mecánica cuántica como se conoce hoy.

El trabajo de Poincaré se hace gradualmente más general hasta que logra demostrar que es imposible escapar a la hipótesis cuántica o lo que es lo mismo, no se puede concebir la continuidad de la energía a menos que las predicciones matemáticas no estén de acuerdo con las medidas experimentales.

Conclusiones

No es posible derivar la ley de Planck a partir del paradigma de la física clásica sobre la continuidad de la energía, debido a que la función $w(E)$ asumida con naturaleza continua conlleva a que la densidad de radiación espectral sea infinita a menos que $w(E)$ presente discontinuidades similares a las de la hipótesis cuántica.

La densidad de energía espectral del cuerpo negro revela valores infinitos cuando $\lambda \to 0$, esta región del espectro electromagnético corresponde a longitudes de onda corta que son los mismos resonadores propuestos por Poincaré, cuya naturaleza es cuántica y que es el mismo intervalo en que se presenta la catástrofe ultravioleta de Rayleigh-Jeans.

Analizar el problema de la radiación del cuerpo negro desde la física estadística como lo hace Poincaré y desde la termodinámica como lo hace Planck, permite llegar a la ley de radiación de los cuerpos, pero también ofrece la posibilidad de complementar las interpretaciones ofrecidas por el otro haciendo así que el entendimiento de este sea más claro.

El segundo método abordado por Poincaré a través de la transformada de Fourier establece una relación interdependiente entre la hipótesis cuántica y la ley de Planck de tal manera que la hipótesis cuántica es la única que conduce a la ley de Planck pero también si la ley de Planck es verdadera implica necesariamente la hipótesis de Planck.

El trabajo de Poincaré es un intento de explicar la naturaleza intrínseca y por lo tanto ineludible de la discontinuidad de la energía cuyo rango de alcance al entendimiento de esta patología en la física clásica es mas general que el propuesto por Planck.

Los marcos teóricos de la física clásica son incapaces de explicar la radiación del cuerpo negro necesitando entonces una nueva descripción e interpretación de los fenómenos a escalas cuánticas que nacen como un nuevo reto para comprender el mundo.

Hay una perspectiva distinta desde la que se puede complementar el estudio de la mecánica cuántica en sus inicios cuando se ve en los cursos el tópico referido a la radiación de los cuerpos para que los estudiantes conozcan con mayor detalle la historia del cuerpo negro desde su planteamiento hasta su solución en 1900 junto con el trabajo que realiza Poincaré haciendo hincapié en la problemática de la hipótesis cuántica.

Bibliografía

Alonso, M & Finn, E. (1971). Física Vol II fundamentos cuánticos y estadísticos. 1ra edición. España: fondo educativo interamericano, S.A.

ALONSO, M & FINN, E. (1998). Física. II, Campos y Ondas. ed .2 Mexico: Alhambra Mexicana.

Apostol, M. (1969). Mlulti Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability. Second edition. New York, Indiana University: George Srpinger

D. ter Haar (1967). *On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum* Pergamon Press. p. 82.

D. ter Haar (1967). Una Mejora de la Ecuación de Wien para el Espectro, Pergamon Press. p. 79.

Eisberg, R. y Resnick, R. (2000). Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas. México D.F, México: Limusa.

Feynman, R. (1996) *Feynman Lectures on Computation*. Perseus.

Gagliardi, R. y Giordan, A. (1986). La historia de las ciencias: una herramienta para la enseñanza. Enseñanza de las ciencias, 4 (3), 253-258.

Kuhn, T. (1980). La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894-1912. Madrid, España: Alianza Editorial.

Kuyanov V. (1967). On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum Pergamon Press. p. 207.

Malagón, J., Mercédes, M., Romero, A., Rodriguez, L. y Aguilar, Y. (2004). Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Moreira, M., Hilger, T. y Präss, A. (2009). *Representaciones sociales de la física y de la mecánica cuántica. Revista de Enseñanza de la Física*, 22(1), 15-30.

Planck, M. (1914). *The Theory of Heat Radiation*. Masius, M. (transl.) (2nd edición). P. Blakiston's Son & Co. OL 7154661M.

Romero, V. (2015). Radiación de Cuerpo Negro - Gas de fotones. Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

Anexos

Ley de Wien

Escribiendo la ley de Planck en términos de λ tenemos

$$I(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5.(e^{\frac{hv}{\lambda kT}} - 1)}$$

Como se busca el λ máximo se debe derivar esta equitación e igualarla a cero

$$\frac{\partial(I(\lambda, T))}{\partial\lambda} = 0$$

Cuyo resultado sería igual a

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 5.(1 - e^{-\frac{hv}{\lambda kT}})$$

Si se hace el cambio de variable $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ se puede escribir lo anterior como

$$x = 5.(1 - e^{-x})$$

Para obtener

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} - 5 = 0$$

Si bien esta ecuación no puede ser resuelta analíticamente, una buena aproximación es considerar lo que ocurre cuando x es grande

$$e^{-x} = 0$$

Así que $x \approx 5$ y la ecuación puede ser escrita como

$$x = 5.(1 - e^{-5})$$

Calculando los valores

$$x \approx 4{,}9651$$

Recordando la sustitución $x = \frac{hc}{\lambda kT}$, se despeja $\lambda_{max}T = \frac{hc}{kx}$ y reemplazando los valores de c y h y calculando se tiene

$$\lambda_{max}T = 2897.6\mu mK$$

Donde $2897.6\mu mK$ es la constante de Wien.

Ecuación de Stirling

Esta ecuación surge de la igualdad

$$N! = N^N$$

Demostración del límite:

Primero tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(Y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}\right)$$

Como en el límite se presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Quedando

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\frac{e^{\frac{\varepsilon}{X}}}{x}} \right)$$

Y evaluando el límite se tiene

$$Y = X$$