Actividades Matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Clasificar, medir e invertir

Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Johana Andrea Torres Díaz

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Actividades matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Clasificar, medir e invertir

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Actividades Matemáticas
para el desarrollo de procesos lógicos
Clasificar, medir e invertir

© Universidad Pedagógica Nacional
ISBN: 978958865041
Primera edición, 2005
Segunda edición, 2014

Autores
© Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Johana Andrea Torres Díaz

Prohibida la reproducción total o parcial sin permiso escrito

Juan Carlos Orozco Cruz
Rector

Edgar Alberto Mendoza Parada
Vicerrector Académico

Víctor Manuel Rodríguez Sarmiento
Vicerrector de Gestión Universitaria

Universidad Pedagógica Nacional
Fondo Editorial
Calle 72 Nº 11 - 86
Tel: 347 1190 y 594 1894
editorial.pedagogica.edu.co

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Haydee Jiménez Tafur
Diagramación en LaTeX

Mauricio Esteban Suárez Barrera
Diseño de carátula

Impresión Javegraf
Bogotá, Colombia, 2014

Actividades matemáticas

para el desarrollo de procesos lógicos

Clasificar, medir e invertir

Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Johana Andrea Torres Díaz

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Catalogación en la fuente - Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional.

Luque Arias, Carlos Julio

Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Clasificar, medir e invertir. / Carlos Julio Luque Arias, Lyda Constanza Mora Mendieta, Johana Andrea Torres Díaz .-- 2ª. ed. – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2014
509 p.

Incluye bibliografía 501 – 509 p.

ISBN 978958865041

1. Algebra. 2. Lógica Simbólica. I. Mora Mendieta, Lyda Constanza II. Torres Díaz, Johana Andrea III. Tít.

512.1 cd. 21 ed.

A mi maestra Laura Adela de Flechas,
quien me indicó el camino.
Carlos Julio Luque Arias

A mis chiquis, mi amado y mi mami, su apoyo y
compañía han sido fundamentales para mí.
Lyda Constanza Mora Mendieta

A mi ángel David Esteban quien me ha
dado nuevos motivos para sonreír.
Johana Andrea Torres Díaz

Tabla de contenido

Prólogo **15**

1. El concepto de igualdad **23**

1.1. La igualdad en el mundo físico 23

1.2. La igualdad en filosofía 24

1.3. La igualdad en la geometría de Euclides 27

1.4. La igualdad en la geometría de Hilbert 38

1.5. La igualdad en la aritmética de Peano 42

1.5.1. Teoremas de la aritmética de Peano 44

1.5.2. Orden en los números naturales 47

1.6. La igualdad en álgebra clásica 49

2. La igualdad en lógica y en teoría de conjuntos **53**

2.1. La igualdad en lógica 55

2.1.1. Razonamientos válidos 55

2.1.2. Leyes básicas de inferencia 57

2.1.3. La equivalencia lógica 61

2.1.4. Los conectivos lógicos 71

2.1.5. Predicados 73
2.2. La igualdad en teoría de conjuntos 76
2.2.1. Subconjuntos y el conjunto de partes 76
2.2.2. Igualdad de conjuntos 77
2.2.3. Operaciones en $\wp(X)$ 77
2.2.4. Generalización de la noción de contenencia entre conjuntos 81
2.2.5. Productos cartesianos 82
2.2.6. Relaciones de un conjunto A en un conjunto B 87
2.2.7. Funciones 91

3. Relaciones de equivalencia y particiones 93
3.1. Propiedad reflexiva 93
3.2. Propiedad simétrica y similares 95
3.2.1. Propiedad asimétrica 96
3.2.2. Relación antisimétrica estricta 96
3.3. Propiedad transitiva 98
3.4. Propiedad euclidiana 99
3.5. Relaciones de equivalencia 102
3.5.1. Otra definición de relación de equivalencia 103
3.5.2. Clases de equivalencia 106
3.6. Relaciones que no son de equivalencia 118
3.7. Conceptos y definiciones en matemáticas 119
3.8. Clasificaciones en conjuntos 122
3.9. Particiones 124
3.9.1. Particiones y relaciones de equivalencia 124

4. El proceso de medir 127
4.1. El proceso físico de medir 127
4.2. El proceso matemático de medir 128
4.2.1. Bisección de un segmento 129

4.2.2. División de un segmento en k partes iguales 132
4.2.3. Medida de la longitud de un segmento usando otro cualquiera como patrón 134
4.2.4. Medida de áreas 135
4.3. Representación de medidas: expresiones bimales, trimales, ..., decimales, etc. 137
4.3.1. Operaciones entre números utilizando representación n-mal 138
4.3.2. Expresiones n-males como divisiones entre números naturales 149
4.3.3. Operaciones con números cuya expresión n-mal es periódica 152
4.3.4. Cambio de base entre n-males 154
4.3.5. Potenciación 155
4.3.6. Radicación 156
4.3.7. Logaritmación 161
4.4. Orden entre n-males 162

5. Las fracciones **165**
5.1. Representaciones de números a través de fracciones 166
5.2. Equivalencia entre fracciones 170
5.3. Operaciones entre fracciones 173
5.3.1. Adición y sustracción entre fracciones 173
5.3.2. Multiplicación entre fracciones 177
5.3.3. División entre fracciones 184
5.3.4. Potenciación y radicación entre fracciones 187
5.3.5. Logaritmación entre fracciones 190
5.4. Otra representación de las fracciones 191
5.5. Orden entre fracciones 193

6. El conjunto de los números racionales **195**
6.1. Operaciones entre números racionales 198

6.1.1. Adición 198
6.1.2. Multiplicación 201
6.1.3. Potenciación de números racionales 206
6.2. Orden entre números racionales 207

7. Fracciones continuas finitas **211**
7.1. De las fracciones a las fracciones continuas simples finitas . . . 212
7.2. De las fracciones continuas simples finitas a las fracciones . . . 220

8. Fracciones continuas periódicas **223**
8.1. El número de oro de las matemáticas 224
8.1.1. Reductas de una fracción continua 224
8.2. El número $\sqrt{2}$ 230
8.2.1. Una hermosa y extraña relación 236
8.2.2. La demostración clásica 238
8.3. El número $\sqrt{3}$ 240
8.4. Los números $\sqrt{p}$ 242
8.5. Operaciones entre números irracionales cuadráticos 249
8.5.1. Adición 249
8.5.2. Multiplicación 251
8.6. Extensiones cuadráticas de los números racionales 255

9. Números construibles **259**
9.1. Números construibles 260
9.1.1. Multiplicación y división de números construibles . . . 261
9.1.2. Raíz cuadrada de números construibles 263
9.2. Extensiones cuadráticas y números construibles 269

10. Números algebraicos y trascendentes **271**
10.1. Números reales algebraicos 273
10.1.1. Es imposible duplicar un cubo 279

10.1.2. Es imposible trisecar un ángulo cualquiera con regla y compás 280
10.1.3. Es imposible construir un heptágono regular con regla y compás 281
10.2. Números trascendentes 282
10.2.1. El número π 283
10.2.2. El número e 289
10.2.3. Logaritmos irracionales 296

11. Una construcción de los números reales 299
11.1. El problema 300
11.1.1. Una respuesta que no es solución 300
11.2. Los números reales: cortaduras de Dedekind 303
11.2.1. Definición de cortadura 307
11.2.2. Igualdad entre cortaduras 309
11.2.3. Operaciones entre números reales 310
11.2.4. El orden en la recta 317
11.2.5. El orden entre cortaduras 318

12. Del proceso de invertir a los números negativos 321
12.1. Procesos irreversibles 321
12.2. Procesos reversibles 322
12.3. Entes opuestos 324
12.4. Números opuestos 326
12.4.1. Operaciones entre números opuestos 326
12.5. Orden 337
12.5.1. Propiedades del orden 338

13. Números irracionales negativos 343
13.1. Números construibles opuestos 344
13.2. Operaciones entre números construibles opuestos 345

13.2.1. Adición 345
13.2.2. Sustracción 347
13.2.3. Multiplicación 349
13.2.4. División 351
13.2.5. Radicación 352

14. Números reales: una construcción oficial 357
14.1. Relación de equivalencia entre parejas de números reales no negativos 361
14.2. Operaciones entre números reales 363
14.2.1. La adición 363
14.2.2. La multiplicación 366
14.2.3. Definición de división entre números reales 371
14.3. Orden en los números reales 371

15. Axiomatización de los números reales 377
15.1. Axiomas de campo 378
15.1.1. Definiciones 380
15.1.2. Propiedades de las operaciones con respecto a la igualdad entre números reales 381
15.1.3. Otros teoremas 382
15.2. Axiomas de orden 392
15.2.1. Definiciones 393
15.2.2. Teoremas sobre el orden de los números reales 393
15.2.3. Propiedades de monotonía de la adición y multiplicación entre números reales 394
15.3. Axioma de completitud 400
15.3.1. Definiciones 400
15.3.2. El axioma 403
15.3.3. Teoremas 404
15.4. Potenciación entre números reales 408

16.Solución de ecuaciones entre números reales 413

16.1. Ecuaciones de primer grado 415

16.1.1. Con una incógnita 415

16.1.2. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas 419

16.2. Ecuaciones de segundo grado 435

16.2.1. Ecuaciones de tipo (1) 435

16.2.2. Ecuaciones de tipo (2) 435

16.2.3. Ecuaciones de tipo (3) 438

16.2.4. Ecuaciones de tipo (4) 446

16.2.5. Ecuaciones de tipo (5) 453

16.2.6. Ecuaciones de segundo grado que incluyen números negativos como coeficientes 458

16.3. Ecuaciones de tercer grado 471

16.3.1. El método babilónico 471

16.3.2. El método de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano . . 472

16.3.3. El método de Viète 474

16.3.4. Solución moderna 475

16.3.5. Propiedades de las raíces de la ecuación cúbica 483

16.4. Ecuaciones de cuarto grado 489

16.4.1. El método babilónico 489

16.4.2. El método de Ferrari 489

16.4.3. La solución moderna 491

16.5. Ecuaciones de quinto grado 494

16.6. Número de raíces de una ecuación de grado n 498

16.6.1. Relaciones entre las raíces de una ecuación de grado n 498

16.6.2. El teorema fundamental del álgebra 500

Bibliografía 501

Prólogo

Prólogo a la segunda edición

Siguiendo los planteamientos y desarrollos del Grupo de Álgebra sobre la actividad matemática en la formación de docentes de matemáticas, esta segunda edición se diferencia de la anterior, en una ampliación y reorganización de los tres primeros capítulos, con lo cual se pretende mejorar la percepción del concepto de *igualdad* y su formulación matemática como relación de equivalencia.

Adicionalmente, en todo el texto se incluyeron nuevas notas históricas alrededor de los objetos matemáticos que se mencionan, algunas basadas en otros trabajos de investigación en los que han participado los autores y otras fruto del interés genuino por continuar descubriendo la belleza que hay en la historia de las matemáticas, así como del convencimiento de los valiosos aportes que hay allí y que vale la pena comunicar y continuar explorando en pro de la formación de profesores de matemáticas.

Los cambios son consecuencia de ocho años de trabajo continuo en el espacio académico Sistemas Numéricos, del segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con el apoyo de otros integrantes del Grupo de Álgebra, los profesores Juan Carlos Ávila, Haydee Jiménez y Yeison Sánchez, y algunos estudiantes de dicho programa que hicieron sus trabajos de grado en relación con algunos de los temas tratados en este libro.

Así como en otras publicaciones del Grupo de Álgebra, esperamos mostrar en esta el espíritu característico del grupo, la importancia de la actividad matemática en el hacer matemático y la importancia del aprendizaje de las matemáticas, la mirada a la historia de las matemáticas como un organizador curricular y, principalmente, invitar a los lectores a que profundicen, estudien y hagan sus propias producciones.

En el primer capítulo se presenta un panorama del significado que se le da a la igualdad, en el mundo físico, en la visión de algunos filósofos, la que está presente en los *Elementos* de Euclides, y en los *Fundamentos* de Hilbert, donde la propiedad euclidiana prima sobre la transitiva (las cuales usualmente se tratan como equivalentes) y la caracterización de la igualdad en la *Aritmética* de Peano, como una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Se finaliza con el uso que se le da en el álgebra clásica, donde no importan las propiedades de la igualdad sino su comportamiento con las operaciones.

El capítulo segundo se dedica a formular un lenguaje matemático preciso que incluye la lógica simbólica y la teoría de conjuntos; en la primera parte se muestran algunos razonamientos deductivos básicos, herramientas fundamentales en la construcción de teorías matemáticas, hasta llegar al concepto de equivalencia lógica; en la segunda, se construyen los conceptos básicos de inclusión, igualdad, operaciones entre conjuntos, productos cartesianos, relaciones, funciones y operaciones, pues todo esto será fundamental en los capítulos siguientes.

El tercer capítulo estudia propiedades de las relaciones como reflexividad, simetría, transitividad, propiedad euclidiana y otras afines, así como sus vínculos lógicos para caracterizar las relaciones de equivalencia y su papel en la formulación de definiciones matemáticas; finaliza con el concepto de *partición* y su relación con el proceso de clasificar.

Los capítulos siguientes fueron revisados y ampliados, pero manteniendo la línea lógica de la primera edición. Se incluyeron nuevas notas históricas y otras actividades, en particular, en el capítulo 7 se incluyó una representación geométrica para las fracciones continuas; en el capítulo 8, la construcción de una fracción continua periódica simple para $\sqrt{7}$ y los números metálicos.

En el capítulo 11 se modificó la definición de las operaciones entre cortaduras y se reformularon las demostraciones de la mayoría de los teoremas, y en el 12 se cambió la línea lógica de la presentación eliminando algunos teoremas e incluyendo otros, buscando sencillez y elegancia. En el capítulo 16, se amplió la aplicación de la regla falsa para resolver algunas ecuaciones de primer grado.

Manifestamos nuestro agradecimiento a Haydee Jiménez Tafur por su esfuerzo, dedicación, seriedad con su trabajo, detalle, crítica, rigurosidad y aporte no solo a la diagramación en Latex, de esta nueva edición, sino en muchas de las actividades e ideas matemáticas aquí expuestas.

Extracto de la introducción de la primera edición

Este libro es producto del proyecto de investigación "Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: el proceso de medir", desarrollado entre agosto de 2002 y agosto de 2004, con el apoyo del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).

Este proyecto es continuación de otro, que se desarrolló en la Universidad Pedagógica Nacional durante los años 1999 y 2000 con el auspicio del CIUP, titulado "Actividades matemáticas para el desarrollo del pensamiento lógico: el proceso de contar", donde se propusieron actividades matemáticas[1], que se han aceptado como base curricular para el espacio académico Aritmética, ubicado en el primer semestre del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En consecuencia, el espíritu del trabajo desarrollado, en este proyecto se mantiene; específicamente, en los roles del profesor y el estudiante y en la intencionalidad de las actividades didácticas propuestas para la formación inicial de profesores de matemáticas.

El proyecto base de este texto tuvo su origen al percibir que los estudiantes en el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional tienen serias dificultades con el significado y utilización de los números reales; concepto necesario para un desarrollo adecuado de otros espacios académicos, como los relacionados con el Cálculo, el Análisis y la Geometría analítica, y para un adecuado desempeño de los estudiantes como futuros profesores, pues este es uno de los conceptos centrales en los currículos de la enseñanza básica y media.

Inicialmente, planteamos un conjunto de procesos lógicos necesarios para el conocimiento y manejo de los números racionales no negativos, a partir de los cuales diseñamos actividades que les permitieran a los estudiantes construir conocimientos matemáticos, desde lo que conocen, y mostrar la necesidad de crear, descubrir y chocar con algunas ideas preconcebidas. Pretende-

[1]Descritas en Luque, Mora y Páez (2013).

mos desarrollar una discusión agradable pero rigurosa y profunda, en la que se avance en el nivel de abstracción hasta formalizar conceptos matemáticos.

Aunque la actividad que se desarrolla en el aula de clase está fundamentada en preguntas, respuestas, contrapreguntas y reformulación de respuestas en una construcción colectiva donde el profesor y los estudiantes cuestionan, argumentan, ejemplifican, proponen contraejemplos, establecen acuerdos, generalizan, abstraen y, en general, se simula un ambiente científico. *La presentación* que se hace de cada actividad, en este libro, está organizada en una forma secuencial que no necesariamente corresponde con la de la clase; sin embargo, el espíritu y los resultados son productos de esta interacción.

El segundo proceso de este estudio es el de *medir*, donde diferenciamos entre el proceso físico y el proceso matemático de medir, y su papel en la construcción de los números racionales no negativos.

Se inicia la discusión con el *proceso físico de medir*, pero muy pronto debemos abandonar la realidad, ante la imposibilidad de dividir algún objeto físico en partes iguales. Recurrimos, como en ocasiones anteriores, a la Geometría euclidiana en busca de objetos y procedimientos que permitan realizar tal tarea y con la ayuda de la regla y el compás incursionamos en la división de un segmento en n partes iguales.

Se miden unos segmentos con otros y para expresar el resultado de las medidas, se usan representaciones análogas a los decimales, a las cuales llamamos representaciones n-males, por ser similar a la notación decimal pero escrita en base n. Seguidamente, como en el caso de los números naturales, se procura encontrar algoritmos para operar utilizando tales expresiones –las n-males–, sin mayor dificultad en la suma y la multiplicación, pero con la súbita aparición de otros objetos extraños a nuestra construcción, los *n-males periódicos* que resultan de la división entre algunos números naturales; con la grata sorpresa de que ahora todas las divisiones (salvo la división por 0) se pueden efectuar, y que en todos los casos existe una base (de hecho, infinitas) en la cual la expresión n-mal tiene un número finito de cifras. Este es el contenido del cuarto capítulo cuyos resultados son fruto de la discusión con los estudiantes, pero que se plasman, de nuevo con algunos ajustes de redacción.

En la siguiente actividad, descrita en el capítulo 5, se tratan las fracciones como resultantes de la división de números naturales, que se interpretan como representaciones alternativas de las expresiones n-males; se proponen algoritmos para sus operaciones procurando ofrecer interpretaciones gráficas en los casos en que ello es posible.

El capítulo 6 presenta una construcción de los números racionales no negativos como clases de equivalencia de pares de números naturales, y a partir de las propiedades de los números naturales, se demuestran las propiedades de las operaciones básicas y del orden entre números racionales.

En el capítulo 7 aplicamos la construcción anterior a los mismos números racionales positivos para obtener números racionales cuyo numerador y denominador son números racionales y elegimos entre ellos las fracciones continuas simples como una representación que permite ofrecer otra caracterización de los números racionales como fracciones continuas simples finitas, y de paso abren el camino hacia una presentación de algunos números irracionales.

Los números irracionales son nuestro siguiente tema de discusión; como ellos son absolutamente desconocidos por casi todos los estudiantes de secundaria y de primeros semestres de universidad, salvo algunas referencias entre π y la expresión decimal $3,1416$, o entre el número irracional $\sqrt{2}$ y el racional $1,4142$, no se hace necesario trabajar en bases diferentes de 10, como en los casos anteriores.

Iniciamos nuestra octava actividad, descrita en el capítulo 8, retomando las fracciones continuas finitas como una manera de representar números racionales positivos y desde allí considerar la posibilidad de tratar con fracciones continuas infinitas que, como es natural, no representan números racionales. De esta consideración surgen nuestros primeros ejemplos de números irracionales: *los números irracionales cuadráticos*; procuramos operar con ellos, y salvo algunos casos particulares, nos tropezamos con dificultades que no podemos superar; y sin embargo, estudiamos las extensiones cuadráticas de los números racionales positivos para construir conjuntos de números con raíces cuadradas de números que no fueran cuadrados perfectos y definimos las operaciones usuales entre ellos mostrando que cumplen las mismas propiedades de las operaciones con números racionales positivos.

En el capítulo 9 recurrimos de nuevo a la Geometría de Euclides y a la interpretación de Descartes para ampliar nuestro conjunto de números haciendo construcciones con regla y compás, con lo cual logramos construir números naturales, racionales e irracionales cuadráticos; no negativos; pero, a manera de ganancia, aparecen nuevos números irracionales no considerados hasta el momento y, por añadidura, vienen con una manera natural de operarlos; terminamos esta actividad haciendo extensiones cuadráticas de los números construibles y de paso, encontrando que existen números no construibles.

Seguidamente nos dedicamos a presentar algunos números no construibles, iniciando con los cuatro problemas clásicos: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, la trisección de cualquier ángulo y la construcción del heptágono regular con regla y compás euclidianos, por ser estas situaciones las inspiradoras de la aparición de números trascendentes; luego estudiamos el carácter de las soluciones de una ecuación algebraica para llegar al concepto de número algebraico y finalmente presentamos, solo de vista, algunos números trascendentes; esto constituye el contenido del capítulo 10.

En el capítulo 11 se describe la actividad relacionada con la construcción de un conjunto de números que incluya a todos los números que conocemos: algebraicos y trascendentes, en el cual podamos definir operaciones entre ellos y demostrar sus propiedades, partiendo de los números racionales no negativos, ya construidos en el capítulo 6. Para ello hacemos una adaptación de la presentación de Dedekind para los números reales no negativos. No estudiamos las propiedades topológicas, ni de convergencia, de los números reales, sino que hacemos énfasis en sus propiedades algebraicas.

Hasta este punto nos comprometimos inicialmente en el proyecto de investigación, pero teniendo en cuenta que los números reales tienen una estructura algebraica muy rica, y que nuestra presentación no da suficiente importancia a ella, continuamos con el estudio de los números negativos a partir del *proceso de invertir*, usando un juego como recurso didáctico (el cual, valga la pena indicarlo, ha sido inspirador de algunas unidades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de los números negativos): conjeturamos y proponemos algoritmos para operar con números negativos opuestos a los naturales y a los racionales positivos. Para evitar confusiones entre los números negativos y el signo $-$ que utilizamos para efectuar sustracciones, introducimos dos tipos de símbolos, unos en negrilla y otros normales, para denotar los dos tipos de números. Este es el tema del capítulo 12.

Como, de nuevo, nos quedamos cortos para introducir de manera significativa a los números irracionales negativos, en nuestra siguiente actividad, descrita en el capítulo 13, otra vez con ayuda de la Geometría, usando regla y compás, encontramos números construibles opuestos a los descritos en el capítulo 9.

Concluimos con una presentación constructiva de los números reales donde se aplica el mismo procedimiento descrito en el capítulo 6, definiendo una relación de equivalencia entre números reales no negativos y, a partir de sus propiedades, demostramos las propiedades algebraicas y de orden de los números reales. Esta actividad la presentamos en el capítulo 14.

El capítulo 15 lo dedicamos a estudiar una presentación alternativa de los números reales, desde nuestro punto de vista, con menos recursos pedagógicos que la anterior donde los números reales son objetos abstractos, cuya naturaleza y significado no es de interés, lo importante es que satisfacen una lista de propiedades que se toman como axiomas; esta presentación es una variación de la propuesta por Hilbert (1953) a comienzos del siglo XX, y es una de las formas más usuales de estudiar los números reales en los primeros cursos universitarios[2]. A partir de una lista de axiomas demostramos las propiedades algebraicas y de orden de los números reales.

El último capítulo describe varias formas de resolver ecuaciones, algunas históricas, otras inventadas en clase, otras donde se aplican ideas simples y geniales de algunos matemáticos clásicos con procedimientos aritméticos, algebraicos, sintéticos, analíticos y hasta de la geometría proyectiva. En todos los casos hacemos una presentación donde se utilizan los axiomas de los números reales. Estudiamos las relaciones entre las soluciones de una ecuación y sus coeficientes, y enunciamos el teorema fundamental del álgebra, como abrebocas para iniciar el estudio del Álgebra Abstracta, asunto que, naturalmente, no abordamos en este libro.

Este, como otros libros, tiene varias maneras de estudiarse, puede hacerse una lectura ligera para observar panoramas, profundizar en alguno de sus ejercicios o tomarse como motivo de reflexión sobre los temas que aborda; aunque nuestro propósito fundamental es que sea usado con la perspectiva del famoso físico danés Niels Bohr, quien decía a sus estudiantes "todas mis afirmaciones, no las tomen como tales, sino como preguntas".

[2]Un ejemplo de esto es la presentación que aparece en uno de los textos clásicos de las carreras de Matemáticas como (Apostol, 1998).

Capítulo

1 El concepto de igualdad

Así pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones,
de allí pasa a conceptos y termina con ideas.
Kant

El concepto de igualdad[1] tiene un papel preponderante en casi todas las construcciones intelectuales y en muchas circunstancias de la vida cotidiana, pero su significado en cada contexto puede ser muy variado y procurar una definición de igualdad puede conducirnos a círculos viciosos. Comencemos con algunos ejemplos donde aparece el término igual.

1.1. La igualdad en el mundo físico

Hablando en sentido estricto, no existen en el mundo físico dos objetos que sean *exactamente iguales*, pues, por iguales que parezcan, difieren en su composición molecular, en la distribución espacial de ella, etc., de manera que usar la palabra *igual* para comparar dos objetos de la realidad física puede ser generalmente una falacia. El filósofo y matemático alemán, Gottlob Frege (1972) expresó: "Jamás dos objetos son exactamente iguales"(p. 147).

[1]La palabra *igual* viene del latín *aequālis*. Y la palabra *igualdad*, del latín *aequalĭtas-ātis*, conformada por el adjetivo *aequus* que quiere decir *igual*, *justo*, *equitativo* y el sufijo *tat* que significa *calidad*. Otras palabras comparten esta raíz como ecuación y equilátero. El término *igual* en griego originalmente era *ίοσς*, cuyo lexema es *iso* que quiere decir *idéntico*.

Los gemelos parecen *iguales*, pero si estudiamos todas sus características, podemos encontrar diferencias; dos billetes de la misma denominación en el mismo país, el envés de las cartas de una baraja, se parecen, pero no son estrictamente iguales.

En son de consolarnos, podríamos considerar una relación de igualdad total o de identidad entre una cosa y ella misma. Sin embargo, si consideramos seres vivos, desde un punto de vista biológico no hay seres que permanezcan en el tiempo orgánicamente iguales; el mismo ser en tiempos distintos es diferente, porque se está transformando continuamente.

En el mundo físico inanimado también las cosas están cambiando permanente, debido a los cambios en la entropía y otras circunstancias termodinámicas.

Ante el fracaso, resignación; como no conseguimos cosas iguales en el mundo físico busquemos en el mundo de las ideas, aunque aquí también hay variedad.

Ejercicio

En la Constitución de la República de Colombia de 1991, una parte del artículo 13 enuncia: "Todas las personas nacen libres e iguales ante la ley, recibirán la misma protección y trato de las autoridades y gozarán de los mismos derechos, libertades y oportunidades sin ninguna discriminación...". ¿Qué significa esta afirmación?

1.2. La igualdad en filosofía

En filosofía si usamos la palabra *igual*, que generalmente se representa mediante el símbolo[2] "=", con algún significado, este debe permitir que una cosa sea *igual a sí misma*, en símbolos $a = a$. Frege (1972) se refirió a esta afirmación diciendo "$a = a$ es una verdad evidente, ya que una cosa no es más igual que a sí misma".

[2]Este símbolo, dos segmentos de recta de igual longitud y paralelos, fue propuesto por Robert Recorde en el libro *The Whetstone of whitte* (El aguzador del ingenio) en 1557, que es considerado el primer tratado inglés de álgebra. Su uso se extendió a finales del siglo XVII. Antiguamente se utilizaban palabras para referirse a los símbolos; por ejemplo, para el signo igual se utilizaba *aequales*, *aequantur* o abreviaturas como *aeq.*

Esta propiedad de la igualdad se conoce como *propiedad reflexiva*.

Y con respecto a la expresión "$a = b$", opina: "la podemos interpretar de distintas formas; por ejemplo, tomemos dos objetos que son exactamente iguales; sabemos por la primera expresión que $a = a$ luego, $a = b$ sería $a = a$ o $b = b$"; aquí estaríamos hablando solo de un objeto; por tanto, esta expresión no aporta nada nuevo.

Podríamos pensar que "$a = b$" es el mismo objeto, pero con nombres distintos, y la relación aquí, únicamente se diría si se designara el mismo objeto. Pero esta relación sería arbitraria, ya que se podría asignar un nombre o un signo a cualquier objeto dado y "$a = b$" estaría hablando de la manera de designar un objeto como tal; por tanto, la expresión "$a = b$" no nos aportaría un conocimiento nuevo.

Debido a esto, Frege (1972) dice que las expresiones "$a = b$" no pueden verse solo como una referencia al mismo objeto o como una relación de dos signos diferentes del mismo objeto; y continúa diciendo que la interpretación de esta expresión depende de tres elementos: los signos, la referencia a la que se hace alusión y el sentido del signo.

Así, la expresión "$a = b$" puede designar un objeto o fenómeno y este es para Frege el referente, el cual se expresa a través de a y de b que son los signos con los que se nombra. Por tanto, al signo le corresponde un sentido determinado y una denotación unica que a su vez, le corresponde un úni signo. Lo anterior nos lleva a que en un manejo adecuado de igualdad se puede reconocer el objeto de referencia y el sentido otorgado por cada signo con el cual se está expresando.

Por su parte, Wilhelm Leibniz opina que "dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser substituida por otra sin perjuicio de la verdad"(Frege, 1972, p. 172); si aplicamos esta consideración a nuestra discusión, tenemos que en la expresión:

$$a = a,$$

si sustituimos "a" por "a" se obtiene $a = a$ si y solamente si, a tiene todas las propiedades que tiene a, y a tiene todas las propiedades que tiene a, en el lado izquierdo y derecho de la igualdad, respectivamente.

Y aplicando el criterio de Leibniz a la expresión:

$$a = b,$$

si sustituimos "a" por "b" y "b" por "a" obtenemos que $b = a$ si y solamente si, b tiene todas las propiedades que tiene a, y, a tiene todas las propiedades

que tiene b en el lado izquierdo y derecho de la igualdad. Es decir, que a partir de $b = a$ se puede concluir que $a = b$. Esto implica que la igualdad se puede leer en ambas direcciones, aunque por nuestras costumbres mayoritarias de lateralidad y enseñanza acostumbramos mirarla solo en una de ellas, de izquierda a derecha, es poco usual escribir $3 = x$, por ejemplo. Esta propiedad de la igualdad se conoce como *propiedad simétrica*.

Ahora, si queremos comparar dos cosas iguales entre sí a una tercera, hay por lo menos dos formas de hacerlo:

1. Si suponemos que $a = b$ y $a = c$, tenemos que todo lo que se dice de a puede decirse de b y de c; entonces, se puede reemplazar a por b en la segunda expresión y concluimos que $b = c$. Esta propiedad de la igualdad se conoce como *propiedad euclídea*.

2. Si suponemos que $a = b$ y $b = c$, tenemos que todo lo que se dice de b puede decirse de c; entonces, se puede reemplazar b por c en la primera expresión y concluimos que $a = c$. Esta propiedad de la igualdad se conoce como *propiedad transitiva*.

Como vemos, ¡no es sencillo meterse con filósofos!

En vista de las dificultades, busquemos en terrenos más familiares; esto es, en las matemáticas.

Las matemáticas están organizadas en teorías que a partir de unas afirmaciones que suponemos verdaderas y que llamamos *axiomas* o *postulados*, deducimos otras que llamamos *teoremas*.

Las teorías generalmente se agrupan por temas; por ejemplo hay teorías geométricas, algebraicas, topológicas, de orden y muchas otras incluyendo combinaciones de las mencionadas como topología algebraica, algebra geométrica, etc.

Y en cada una de esas agrupaciones también hay diferentes teorías; por ejemplo entre las teorías geométricas la más conocida es la geometría de Euclides, pero hay otras como la geometría de Lovachevski, o la de Riemann, o la geometría proyectiva, o la geometría afín, o la geometría simpléctica y muchas otras.

Entre las teorías aritméticas está la aritmética de Peano, que es la más popular, la de Peirce, la de Warner, la de Lawvere, la de Heyting, la que surge dentro de la teoría de conjuntos, etc. Y esto ¡solo para las teorías de los números naturales!

En este capítulo revisaremos la noción de igualdad que se usa en la geometría de Euclides, en una versión mejorada de ella presentada por Hilbert y en la aritmética de Peano.

1.3. La igualdad en la geometría de Euclides

La obra *Elementos* de Euclides es reconocida como un tratado para el estudio de las matemáticas elementales (aritmética, geometría[3]) conocidas en la época de su publicación, descritas y organizadas lógicamente de manera que cada proposición pudiera ser justificada desde unos postulados, definiciones y proposiciones demostradas previamente.

En el libro primero se establecen 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes, las cuales son el punto de partida para el desarrollo de toda la obra. Además, se plantean 48 proposiciones que abarcan construcciones y propiedades de las figuras planas rectilíneas y el concepto de *igualdad*, entre ellas. Precisamente las primeras ideas de igualdad se expresan en las nociones comunes[4]:

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si cosas iguales se adicionan a iguales, los totales son iguales.
3. Si cosas iguales se sustraen a iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí.

Las tres primeras nociones se consideran más generales en el sentido que aplican a todos los objetos matemáticos que se estudian en los *Elementos*:

[3] Aunque algunas personas vean álgebra en los *Elementos*, Gratann Guinness afirma que expresiones como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ no aparecen, ni siquiera de manera encubierta: su diagrama no lleva las letras a ni b. Su teorema era relativo a la geometría, sobre un cuadrado grande estando compuesto de cuatro partes, con rectángulos a la derecha y encima del cuadrado menor y un cuadrado pequeño en la esquina norte-este; de hecho, él específicamente definió como *el gnomon*, la L-forma formada por las tres regiones pequeñas [los *Elementos*, Libro 2, Definición 2], también conocido por su uso en los relojes de sol y en la medida de tiempo. Todos estas relaciones geométricas, esenciales al teorema, están perdidas en el simple signo '+' en la igualdad.

[4] En diferentes traducciones de los *Elementos* aparecen diferentes nociones comunes; por ejemplo en la traducción de Vera (1970) se listan 9 nociones comunes. Sin embargo, las 4 nociones que aquí se relacionan están entre las 5 nociones que coinciden en todas las traducciones (Levi, 2006, p. 105).

figuras, magnitudes y números, como se evidencia a lo largo de las demostraciones de las 465 proposiciones de *Elementos*; el alcance de estas tres nociones comunes trasciende incluso de las matemáticas mismas[5], pues como afirma Proclo no solo se refiere a "cosas" que ocupan el mismo espacio[6], sino también a velocidades, periodos de tiempo y otras muchas cosas que no se superponen en el espacio (Euclid, 1956a, p. 223).

La primera de estas nociones comunes, suele denominarse como *propiedad euclídea* de la igualdad.

La cuarta noción se refiere a la igualdad geométrica: la *congruencia* de figuras geométricas[7], entendida esta en el sentido de encajar, ajustar o coincidir, en un sentido intuitivo. Tradicionalmente, esto se interpreta como un principio de superposición: si una cosa puede *trasladarse* y *superponerse* para coincidir con otra sin deformarse, entonces estas cosas son iguales[8]. Así, la congruencia entre segmentos, por ejemplo, implica la posibilidad de superponerlos, de manera que coincidan. Sin embargo, en la presentación de Euclides para *construir en un punto dado un segmento igual a otro dado* (proposición I-2) (Vera, 1970, p. 706), pareciera que hay movimiento de un segmento, pero lo que se hace es una construcción con regla y compás:

Sea BG el segmento dado y A, el punto dado. Se construye sobre el segmento AB el triángulo equilátero ADB (proposición I-1), se prolongan los lados DA y DB (postulado 2) y se trazan las circunferencias con centro en B y radio BG y con centro en D y radio DH (postulado 3). Entonces, el segmento BG es igual al segmento BH, el segmento DL es igual al segmento DH y el segmento DA es igual al segmento DB, de donde el segmento BH resulta ser igual al segmento AL (noción común 3) y, por lo tanto, GB es

[5]Esta característica posiciona estos tres enunciados como nociones comunes en los términos establecidos por el programa aristotélico en Segundos Analíticos (Euclides, 1991, p. 60).

[6]Esta idea de "ocupar el mismo espacio" es usada por Apolonio en un intento de demostrar la noción común 1, demostración que fue criticada por Aristóteles y Proclo, por considerar que estas nociones son verdades evidentes por sí mismas. Un estudio detallado de esta demostración se encuentra en Euclid (1956a, pp. 222-223).

[7]Esta noción común parece tener poca generalidad, en tanto se refiere solamente a la coincidencia intuitiva que lleva a la congruencia geométrica. Matemáticos como Herón no reconocieron en este enunciado una noción común (Euclides, 1991, p. 59).

[8]Este criterio de congruencia fue empleado por Euclides y varios de sus contemporáneos, usando implícitamente el *postulado de libre movilidad*, llamado así por Helmholtz (1887), según el cual, el espacio no deforma los cuerpos cuando estos se trasladan de un lugar a otro. Un estudio detallado de este problema aparece en Campos (1994, pp. 43 - 45).

igual a AL (noción común 1). Así, construimos un segmento igual a GB en el punto A (figura 1.1).

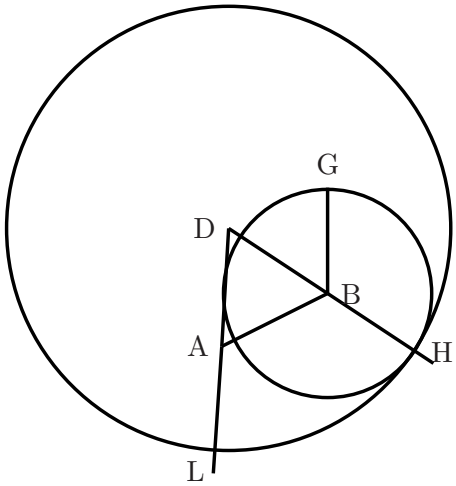


Figura 1.1

Ejercicio

En la construcción anterior se presume que el segmento BG es menor que el segmento AB. Desarrolle la construcción en el caso de que el segmento BG sea mayor que el segmento AB.

Esta noción de igualdad de figuras incluye implícitamente la idea de movimiento, de la cual evidentemente Euclides no era muy partidario[9], pues solo lo usó en el libro I en las proposiciones I-4 y I-8. Tiene sentido este rechazo, tal vez porque el movimiento, aunque fuera sin deformación, no estaba considerado en la geometría, esta estudiaba los objetos inmóviles y solo en la astronomía se admitía y estudiaba el movimiento de los objetos. La

[9]Como menciona Euclides (1991, p. 61): "a juicio de Platón, este recurso era uno de los que descalificaban a los geómetras de su tiempo por contaminar el pensamiento geométrico con la manipulación de objetos, pero ni antes ni después de Euclides dejó de aplicarse. Se suponía tácitamente que el movimiento no deforma los objetos así tratados". Por su parte Russell (1902, citado por Euclid, 1956a, p. 227) señala que el uso aparente del movimiento es engañoso en esta presentación, lo que se hace realmente es transferir la atención del observador de una figura a otra, definida por la posición de algunos de sus elementos y las propiedades que comparte con la figura original.

proposición I-4, el primer criterio de congruencia de triángulos[10] enuncia: "si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales". Veamos la demostración de esta proposición a la manera de Euclides[11]:

Sean CAB y ZED dos triángulos que tienen los lados CA y CB respectivamente iguales a los lados ZE y ZD y el ángulo comprendido ACB igual al ángulo EZD. Si se aplica el triángulo CAB sobre el triángulo ZED, colocando el punto C sobre el punto Z y el lado CA sobre el lado ZE, se aplicará también el punto A sobre el punto E, por ser iguales los lados CA y ZE. Por ser el ángulo ACB igual al ángulo EZD, se aplicará CB sobre ZD y por ser estos iguales, el punto B se aplicará sobre el punto D. Pero como A ya estaba aplicado sobre E, la base AB se aplicará sobre ED, porque si no fuera así dos rectas comprenderían un espacio lo cual es imposible[12]. Entonces, la base AB se aplicará sobre la base ED y son iguales; por lo tanto, todo el triángulo CAB se aplicará sobre todo el triángulo ZED y serán iguales, y los ángulos restantes CAB y CBA se aplicarán respectivamente a los ángulos ZED y ZDE y también serán iguales, como se quería demostrar[13].

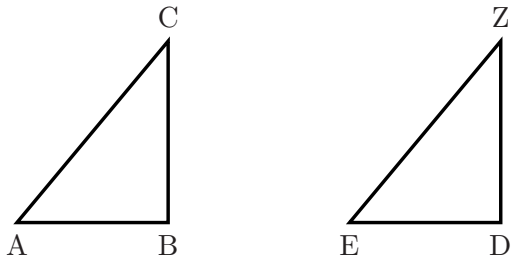


Figura 1.2

[10]Criterio conocido actualmente como Lado-Ángulo-Lado.

[11]Un estudio detallado de esta proposición se encuentra en Euclid (1956a, pp. 247-250).

[12]En la traducción de Vera (1970), esta imposibilidad aparece como noción común 9 (p. 705).

[13]La idea de superposición ha llevado a una definición de igualdad de las figuras en términos de la correspondencia biunívoca entre sus partes y la igualdad de las mismas. Así por ejemplo, dos triángulos son congruentes si hay una correspondencia biunívoca entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1989, p. 85; Euclid, 1956a, p. 228; Moise y Downs, 1986, pp. 105-107).

Otras proposiciones relacionadas con la igualdad de figuras (como I-8, I-23, I-26 e I-34) recurren a la proposición I-4, y a otras que se van demostrando. Por ejemplo, la igualdad de ángulos se presenta en la proposición I-23: "sobre una recta dada y en uno de sus puntos, construir un ángulo rectilíneo igual a otro rectilíneo dado" (Vera, 1970, p. 718). En esta proposición Euclides considera el ángulo DGE y la recta AB, para construir un ángulo igual a DGE en el punto A, se toman sobre las rectas GD y GE los puntos cualesquiera D y E respectivamente y se traza la recta DE. Ahora, se construye el triángulo AZH con los segmentos AZ, AH y ZH iguales a los segmentos GD, GE y DE, respectivamente. Entonces, por la proposición I-8[14], como DG y GE son respectivamente iguales a ZH y AH y la base DE es igual a la HZ, se concluye que el ángulo DGE es igual al ángulo ZAH como se quería construir:

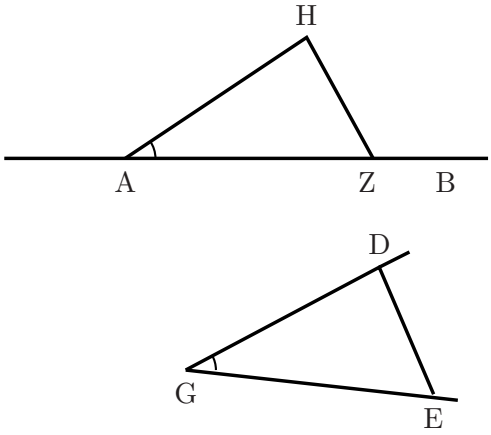


Figura 1.3

Euclides también considera la igualdad de figuras curvas. La primera definición del libro III enuncia: "círculos iguales son los que tienen iguales sus diámetros o cuyas líneas desde el centro son iguales" (Vera, 1970, p. 750). Algunos comentaristas de los *Elementos* (Levi, 2006; Vera, 1970) señalan que este enunciado es más bien un teorema que se puede demostrar considerando[15] el postulado 3, la noción común 4 y la proposición I-3 que permite[16]

[14] "Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a los lados del otro e iguales las bases, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales" (Vera, 1970, p. 710).

[15] Describir un círculo para cada centro y cada radio (Vera, 1970, p. 704).

[16] Dados dos segmentos desiguales, restar del mayor otro segmento igual al menor (Vera, 1970, p. 706).

sobreponer los dos *radios* y al ser estos iguales, se sobreponen los dos círculos; pero ya hemos mencionado el aparente rechazo de Euclides a este uso de la noción común 4 y eso explicaría el que haya considerado más conveniente presentar la igualdad de círculos como una definición.

Ahora bien, respecto a la igualdad de arcos la proposición III-23 enuncia: "sobre la misma cuerda y de la misma parte de ella, no pueden existir segmentos de círculo semejantes desiguales" (Levi, 2006, p. 128). Para demostrarla, Euclides indica que si sobre la recta AB se pudieran construir los dos segmentos de círculo AGB y ADB desiguales, se trazan las rectas AGD, GB y DB. Por ser semejantes los dos segmentos circulares, son iguales los ángulos ADB y AGB (proposición III-21), pero esto no es posible porque el ángulo exterior y el ángulo interior del triángulo GDB no son iguales (proposición I-16):

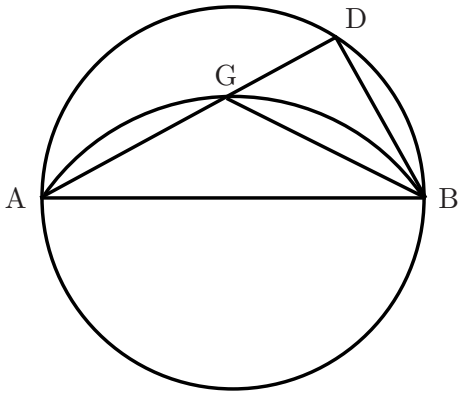


Figura 1.4

Ejercicio

Estudie la proposición III-24 de los Elementos, relacionada también con la igualdad en figuras curvas.

Hasta aquí la igualdad solo está contemplada en el sentido de congruencia, aplicando segmentos, ángulos y triángulos[17]; sin embargo, sin hacer alguna

[17]Las proposiciones referidas a la igualdad de triángulos muestran una serie de relaciones en las cuales la igualdad de algunos elementos (lados ó ángulos) permiten inferir la igualdad de los triángulos.

referencia a algún cambio en el significado del término *igual*; en la proposición I-35, Euclides introduce por primera vez una idea de igualdad entre figuras rectilíneas, sin necesidad de que estas sean congruentes, una igualdad referida al área de las figuras[18].

La proposición I-35 establece que: "los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales" (Vera, 1970, p. 726).

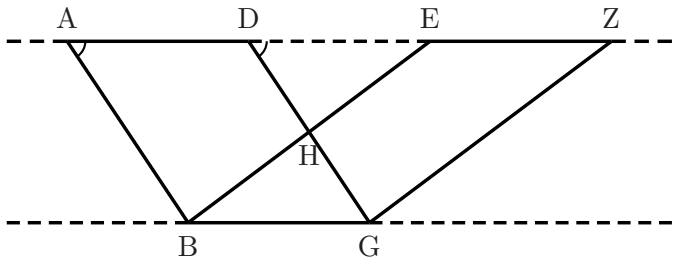


Figura 1.5

Para demostrarla, Euclides considera los paralelogramos ABGD y EBGZ, sobre la misma base BG y entre las mismas paralelas AZ y BG. Por ser paralelogramos, los segmentos AB y BG son iguales y, de manera análoga, los segmentos EZ y BG, y los segmentos AB y DG (proposición I-34), por lo cual AD y EZ son iguales (noción común 1). Sumando el segmento común DE, los segmentos AE y DZ resultan ser iguales (noción común 2). Por otra parte, por ser paralelos los segmentos AB y DG (proposición I-33) los ángulos ZDG y EAB son iguales (proposición I-29), con lo cual el triángulo EAB es igual al triángulo DZG (proposición I-4).

Restando el triángulo común DHE, resultan iguales los trapecios ABHD y EHGZ (noción común 3) y, sumando a estos últimos el triángulo común BHG, se concluye que los paralelogramos ABGD y EBGZ son iguales (noción común 2), como se quería demostrar.

En la demostración de esta proposición Euclides trata a las figuras como magnitudes, es decir *cosas* en el sentido de las nociones comunes, pues las suma y las resta, y utiliza las nociones comunes para garantizar la igualdad

[18]Legendre introdujo (Euclid, 1956a, p. 328) el término *equivalente* para expresar este sentido más amplio de la igualdad, restringiendo el término *igual* solo para las figuras congruentes. Euclides utilizó la misma palabra para expresar la congruencia y la equivalencia de figuras planas, no obstante algunas traducciones de los Elementos, como la de Vera (1970), utilizan la palabra *equivalente* en estas proposiciones, en lugar de la palabra *igual*, usada en las proposiciones referidas a congruencia. Aquí no haremos esta distinción.

de las nuevas figuras (áreas[19]) que se obtienen de estos procedimientos, que antes habían sido usadas para las longitudes. Así, partiendo de la noción de igualdad geométrica *evidente* referida a la congruencia de figuras, planteada en la noción común 4 y desarrollada en las primeras proposiciones del libro I, se extiende a una noción de igualdad, con la aplicación de las nociones comunes 1, 2 y 3, en términos de la equivalencia de figuras que no necesariamente coinciden, es decir no son congruentes.

Esta idea contradice la intuición sobre la igualdad de figuras, pues no es fácil concebir que, por ejemplo, dos paralelogramos sean iguales aunque los lados paralelos de uno sean más largos que los del otro. La proposición I-35 mostró que la concepción de que áreas iguales se derivan de perímetros iguales[20] es falsa y nos lleva a delimitar lo que es *igual* al comparar dos figuras, no es una igualdad universal en el sentido de que todos y cada uno de sus elementos son iguales, como en el caso de la congruencia, pues no siempre las figuras coinciden exactamente; pero sí es posible pensar en *cosas* que son iguales en *algo*, en este caso figuras que son iguales en su área, como se evidencia también en las proposiciones[21] I-36, I-37, I-38 y I-41.

Ejercicio

Estudie el enunciado y la demostración de la proposición I-41. ¿A qué resultado actual corresponde?

En esta misma línea, en las primeras proposiciones del libro II, Euclides presenta rectángulos en los cuales, más allá de sus propiedades geométricas demostradas en el libro I, se interesa en la posibilidad de "segmentarlos" en

[19]El área es la segunda magnitud que aparece en los *Elementos*, aunque Euclides no hace uso explícito de este término, ni le atribuye un significado de cantidad o medida. Incluso, en el desarrollo de la demostración para establecer la igualdad de paralelogramos, usa como argumento la igualdad entre dos trapecios, evidentemente no congruentes.

[20]Este principio era utilizado por los navegantes de la época para determinar si una isla era más grande que otra, comparando el tiempo que tardaban en rodearlas.

[21]En lo que sigue del estudio en los libros I y II, Euclides aborda cuestiones referidas a la construcción de paralelogramos iguales a otras figuras planas y la posibilidad de expresar un área como suma de otras, esto es el procedimiento geométrico de aplicación y transformación de áreas que le permite más adelante estudiar la cuadratura de figuras planas. Un estudio detallado sobre este tema se encuentra en Luque, Mora y Torres (2006a, pp. 105-116).

otros rectángulos, a partir de las ideas expresadas en las nociones comunes sobre la adición y sustracción de *cosas* iguales. Por ejemplo, en la proposición II-1, "si una de dos rectas se divide en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por dichas rectas equivale a los rectángulos comprendidos por la no dividida y por cada una de las parciales" (Vera, 1970, p. 736),

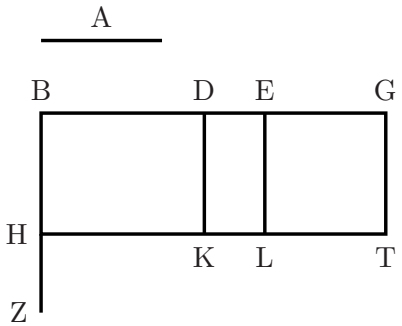


Figura 1.6

se observa la posibilidad tácita de transformar un área en la suma de otras. Las figuras planas, en este caso rectángulos, se conciben implícitamente como magnitudes y la igualdad entre figuras se ratifica en el sentido de la equivalencia, es decir la igualdad de sus áreas[22].

La idea de igualdad que se presenta con las nociones comunes 1, 2 y 3 se emplea también al estudiar las magnitudes y los números[23]. Sobre las primeras, en los libros V y VI se expone en detalle la teoría de proporcionalidad, desarrollada por Eudoxo para magnitudes geométricas y aunque Euclides no define magnitud, implícitamente asume que las magnitudes satisfacen las nociones comunes del libro I de los *Elementos*.

En los libros VII, VIII y IX, dedicados a la Aritmética, se puede ver la utilización de tales nociones para establecer igualdad entre números; por ejemplo, en la proposición 5 del libro VII se utilizan las nociones 1 y 2 para demostrar que: "si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro" (Euclides, citado por Vera, p. 834).

La igualdad entre razones, la proporción, es la idea central en la teoría de Eudoxo que en los *Elementos* se materializa en un nuevo significado para la

[22]Un estudio detallado sobre este tema se encuentra en Levi (2006, pp. 151-166).
[23]La teoría aritmética se desarrolla en los libros VII al IX de los *Elementos*.

igualdad. La igualdad de razones se plantea en la definición 5 del libro V: "se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente" (Vera, 1970, p. 787). En símbolos modernos,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si dados dos números naturales } m \text{ y } n, \text{ si}$$
$$ma > nb, \text{ entonces } mc > nd, \text{ o}$$
$$ma = nb, \text{ entonces } mc = nd, \text{ o}$$
$$ma < nb, \text{ entonces } mc < nd.$$

La igualdad entre razones tiene un nivel mayor de abstracción[24] respecto a la igualdad de figuras geométricas (congruencia) o la igualdad de áreas; en la teoría de las proporciones se considera la relación entre las magnitudes mas no su naturaleza, esto hace que el estudio se desarrolle en función de las nociones comunes y relaciones como *ser igual*, *ser mayor* o *ser menor* como se observa en la definición anterior. Este es precisamente el criterio de proporcionalidad y trasciende, incluso filosóficamente, del significado de igualdad utilizado en los primeros libros de *Elementos*[25].

El desarrollo de la teoría de proporcionalidad en Euclides, nos lleva a otra posibilidad de igualdad entre figuras planas: ya no es necesario que sean congruentes o que tengan áreas iguales, basta con que sean iguales en "forma". La definición 1 del libro VI enuncia: "figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales" (Vera, 1970, p. 805); así, al referirnos a triángulos, por ejemplo, decimos que dos triángulos

[24]En esta definición de proporcionalidad también se observa la introducción de infinitas operaciones pues se habla de "cualesquiera" equimúltiplos, lo cual supone la existencia de magnitudes tan grandes o pequeñas como se quiera. Esta idea se constituye en el antecedente para definir número real a la manera de Dedekind veintitrés siglos después. Un estudio detallado sobre esto se encuentra en Levi (2006, pp. 184-192).

[25]La igualdad entre razones fue importante en el desarrollo de otras teorías matemáticas griegas. Por ejemplo, en el estudio de las cónicas de Apolonio, la ausencia de números impulsó el uso de proporciones para expresar las relaciones entre las magnitudes y transformarlas apropiadamente para hacer las razones (relaciones entre magnitudes) lo más simple posibles en las diferentes situaciones planteadas por Apolonio en su obra (Charbonneau, 1996, pp. 6-7).

son semejantes, si y solo si, se puede establecer una correspondencia entre sus elementos, lados y ángulos, de tal manera que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales[26]; es decir, que las medidas de las longitudes de los lados homólogos sean proporcionales, o lo que es lo mismo, que la razón entre dos cualesquiera de tales medidas es constante. Si esta constante es 1, la semejanza se convierte en congruencia.

Al igual que con la congruencia de triángulos no es necesario verificar las seis condiciones; por ejemplo, basta que los tres pares de ángulos correspondientes sean congruentes para afirmar que dos triángulos son semejantes (criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo); este criterio es considerado por Euclides en la proposición 4 del libro VI de los *Elementos*: "en los triángulos equiángulos, los lados opuestos a los ángulos iguales son proporcionales" (Vera, 1970, p. 808), de la cual, es fácilmente deducible que, en consecuencia, los triángulos son semejantes, de acuerdo con la definición dada por Euclides[27]. La demostración es como sigue:

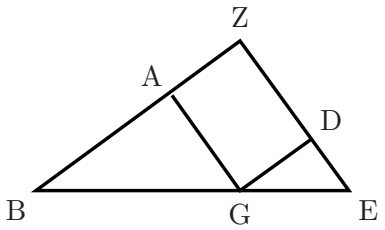


Figura 1.7

Sean los triángulos ABG y DGE que tienen iguales los ángulos ABG y DGE y los ángulos BAG y GDE, respectivamente. Colóquese BG en línea recta con GE (figura 1.7). Como los ángulos ABG y AGB juntos son menores que dos ángulos rectos (proposición I-17) y AGB es igual a DEG, los ángulos ABG y DEG juntos son menores que dos ángulos rectos, por lo tanto al prolongar BA y ED se encontrarán en un punto Z (postulado 5).

Por ser iguales los ángulos DGE y ABG, las rectas BZ y GD son paralelas (proposición I-28) y por ser iguales los ángulos AGB y DEG, también son paralelas las rectas AG y ZE, de donde se concluye que ZAGD es un parale-

[26]Decir que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son proporcionales, es lo mismo que decir que las magnitudes que representan son proporcionales; esto es que $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ o que $AB \times GH = CD \times EF$.

[27]Las proposiciones VI-6 y VI-7 plantean otros criterios para demostrar la semejanza entre dos triángulos.

logramo y la recta ZA es igual a DG y la recta AG es igual a ZD (proposición I-34), y como AG es paralela al lado ZE del triángulo ZBE, será BA a AZ como BG es a GE y como AZ es igual a GD, BA es a GD como BG es a GE y AB es a BG como DG es a GE (proposición VI-2).

Además, como GD es paralela a BZ, BG es a GE como ZD a DE, y como ZD es igual a AG, se concluye que BG es a GE como AG es a DE y BG es a GA como GE a ED. Entonces AB es a BG como DG a GE, BG es a GA como GE a ED y BA es a AG como GD es a DE, como se quería demostrar.

Vemos entonces en la obra de Euclides diferentes sentidos de la igualdad, aunque en todos se mantiene lo establecido en las tres primeras nociones comunes. Es de destacar que a lo largo de la obra se pasa a niveles cada vez menos intuitivos en lo que se entiende por igualdad, desde la "coincidencia" propia de la igualdad de figuras geométricas, hasta una igualdad en aspectos o cualidades específicas de las figuras como el área y la forma, o una igualdad en sentido abstracto como la de la teoría de las proporciones.

1.4. La igualdad en la geometría de Hilbert

El trabajo de Hilbert (1953) sobre los fundamentos de las matemáticas se refleja de manera clara y precisa en el libro *Fundamentos de la geometría* (*Grundlagen der Geometrie*), publicado por primera vez en 1899 como fruto de una serie de sus conferencias sobre geometría euclidiana en la Universidad de Gotinga. Hilbert considera que la forma correcta de desarrollar rigurosamente cualquier tema científico es con un enfoque axiomático que permite trascender de la intuición y facilita el análisis de las relaciones lógicas entre los conceptos básicos y los axiomas[28]. Los axiomas se pueden elegir de manera arbitraria, pero cumplen su función de organizar y desarrollar la teoría si tales axiomas son exhaustivos, independientes y consistentes entre sí (Zach, 2005, pp. 2-3).

[28] "Cuando se trata de investigar los fundamentos de una ciencia, debe establecerse un sistema de axiomas que contenga una descripción completa y exacta de las relaciones existentes entre los términos no definidos de dicha ciencia. Los axiomas así asumidos son las definiciones de los términos no definidos y ninguna afirmación que concierne a la ciencia cuyos fundamentos se están poniendo a prueba se considera válida a menos que pueda ser derivada a partir de los axiomas mediante un número finito de pasos lógicos" (Hilbert, 1902, citado por Campos, 1994, pp. 482-483).

En los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert (1953) considera tres objetos no definidos: puntos, rectas y planos, y presenta un sistema completo de axiomas para la geometría euclidiana, que establece las relaciones entre tales objetos. Los axiomas se organizan en 5 grupos, según su naturaleza, así:

- Axiomas de pertenencia o enlace (8).
- Axiomas de orden (4).
- Axiomas de congruencia (5).
- Axioma de paralelismo (1).
- Axiomas de continuidad (2).

Posteriormente, Hilbert desarrolla, para cada grupo de axiomas, los teoremas de la geometría euclidiana, como consecuencias lógicas de tales axiomas.

Los axiomas de congruencia (III) que se presentan en el primer capítulo definen el concepto de congruencia y el de movimiento *geométrico*, lo que posibilita el desplazamiento y la suma de segmentos y también, el desplazamiento y la suma de ángulos:

III-1. Si[29] A, B son dos puntos de una recta a y además es A' un punto de la misma o de distinta recta a', puede encontrarse siempre sobre un lado determinado de a', un punto B' tal que el segmento AB sea congruente o igual al segmento $A'B'$.

III-2. Si un segmento $A'B'$ y un segmento $A''B''$ son congruentes con el mismo segmento AB, también el segmento $A'B'$ es congruente con el $A''B''$.

III-3. Sean AB y BC dos segmentos de la recta a sin puntos comunes y, de otra parte, $A'B'$, $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta a o sobre otra distinta a' también sin puntos comunes; si $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$, entonces $AC \equiv A'C'$[30].

III-4. Dados un ángulo $\measuredangle(h, k)$ en un plano α, una recta a' en un plano β, y una de las regiones de β determinadas por a'; representemos por h' una semirrecta de a' que parte de O'. Entonces, existe en el plano β una

[29]Este axioma garantiza la existencia de un segmento congruente a otro, con lo cual se resuelve el vacío de la proposición I-2 de los *Elementos* de Euclides.

[30]El símbolo $\equiv$ representa la relación *ser congruente*.

única semirrecta k' tal que $\measuredangle(h,k)$ sea congruente, o igual, con $\measuredangle(h',k')$ y tal que todos los puntos interiores del ángulo $\measuredangle(h',k')$ estén situados en la región dada con respecto a a'. Además todo ángulo es congruente consigo mismo.

III-5. Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican las congruencias $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$, también verifican la congruencia: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.

Se observa en los axiomas III-2 y III-3 las dos primeras nociones comunes de Euclides aplicadas a los segmentos, lo cual muestra de cierta manera que estas dos ideas se necesitan para estudiar la igualdad de objetos geométricos. Asimismo, llama la atención que el último axioma de congruencia es la proposición I-4 de los *Elementos*, con lo cual Hilbert soluciona el problema de Euclides frente al uso del *trasladarse y superponerse sin deformarse* para demostrar la igualdad entre dos figuras.

La primera consecuencia de los axiomas de congruencia que presenta Hilbert, antes de entrar con el desarrollo de los teoremas, es el que si el segmento $AB \equiv A'B'$, entonces el segmento $A'B' \equiv AB$[31]. En efecto, en su explicación del axioma III-1 Hilbert concluyó que un segmento es igual a sí mismo[32], esto es en particular $A'B' \equiv A'B'$, y si $AB \equiv A'B'$, por el axioma III-2 se concluye que $A'B' \equiv AB$.

Luego, Hilbert presenta y demuestra los teoremas referidos a la congruencia de figuras[33], entre ellos los conocidos actualmente como criterios de congruencia de triángulos:

Teorema 12 (*primer teorema de congruencia de triángulos*): un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$ en el caso de que sean válidas las congruencias: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$.

Teorema 13 (*segundo teorema de congruencia de triángulos*): un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$, en el caso de que sean válidas las congruencias $AB \equiv A'B'$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$.

Teorema 18 (*tercer teorema de congruencia de triángulos*): si en dos triángulos los lados correspondientes son congruentes, los triángulos son congruentes.

[31] Esta propiedad se conoce como propiedad simétrica de la igualdad.

[32] Esta propiedad se conoce como propiedad reflexiva de la igualdad, en este caso para segmentos.

[33] Un estudio detallado de estos teoremas y sus demostraciones se encuentra en Campos (1994, pp. 374-410).

Asi como otros teoremas, demostrados también por Euclides, que involucran ángulos y segmentos iguales, como el teorema 11: "en un triángulo con dos lados congruentes (isósceles), los ángulos opuestos a ellos son congruentes" y el teorema 21: "todos los ángulos rectos son congruentes entre sí"[34].

Veamos la demostración a la manera de Hilbert (1953, pp. 18-19) del teorema 12:

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$, tales que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ y $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$. Por el axioma III-5 se cumple $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$ y $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$, entonces basta probar que $BC \equiv B'C'$. Para esto, supongamos que BC y $B'C'$ no son congruentes y determinemos un punto D' sobre $B'C'$ tal que $BC \equiv B'D'$. Entonces los triángulos ABC y $A'B'D'$, tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre estos, de donde serían congruentes los ángulos BAC, $B'A'D'$ y $B'A'C'$ (axioma III-5), pero esto no es posible, pues por el axioma III-4, un ángulo cualquiera solamente puede trasladarse de una manera en un semirrayo dado, en una región dada de un plano. Luego el supuesto es falso y, en consecuencia, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes.

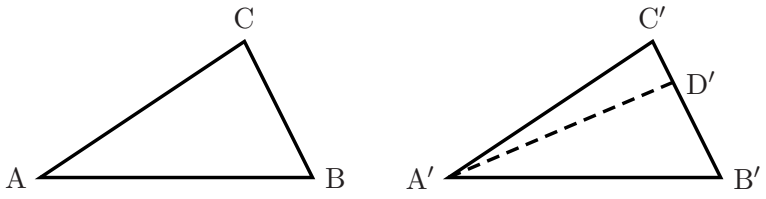


Figura 1.8

Ejercicio

Reconstruya la demostración de los teoremas 13 y 18 a la manera de Hilbert.

Otro aspecto notable sobre el uso de la igualdad en los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert (1953) se encuentra en su estudio sobre el área de las figuras. En el capítulo cuarto, Hilbert introduce el concepto de *equidescomponibilidad* de polígonos, cuando se pueden descomponer en un número finito

[34]Cuarto postulado de Euclides.

de triángulos, los cuales, por parejas, son congruentes entre sí, y el concepto de *equicomplementariedad* de polígonos, cuando se les puede agregar un número finito de polígonos equidescomponibles, de modo que los polígonos compuestos sean equidescomponibles. Con base en esto demuestra una serie de teoremas que le permiten concluir que:

Polígonos equidescomponibles tienen igual área (consecuencia del teorema 50), y

Teorema 51: dos polígonos equicomplementarios tienen igual área y dos polígonos de igual área son equicomplementarios.

Ejercicios

1. *Compare la noción de igualdad de áreas en los Elementos de Euclides y en los Fundamentos de Hilbert. Establezca coincidencias y diferencias.*

2. *En el tercer capítulo de los Fundamentos de la geometría aparece la teoría de las proporciones. Estudie y compare con los desarrollos de Euclides sobre la igualdad de razones.*

Vemos entonces en los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert (1953) que se mantiene lo señalado por Euclides en las nociones comunes de los *Elementos*, con el valor agregado de que se logran presentar otras propiedades generales de la igualdad como la reflexiva y la simétrica. Asimismo, dada la libertad de seleccionar los principios en una presentación de este tipo (axiomática), Hilbert presenta como axioma de congruencia la posibilidad de la *libre movilidad* (axioma III-5) que fue poco apreciada por Euclides, así como la garantía de la existencia de un segmento congruente a otro (axioma III-1), con lo cual se cubren algunos de los vacíos de la teoría desarrollada en los *Elementos*.

1.5. La igualdad en la aritmética de Peano

La teoría más conocida los números naturales es la propuesta por Giuseppe Peano en 1889, basada en los trabajos de Dedekind y Grassmann, en el libro *Arithmetices Principia Nova Método Exposita* donde expone las bases que son desarrolladas en detalle por Edmund Landau (1966).

En la versión de Landau se usan como términos no definidos (que él llama *explicaciones*): número, uno, sucesor y *es igual a*:

El signo N significa *número* (entero positivo).
El signo 1 significa *unidad*.
El signo $x + 1$ significa el *sucesor* de x o x más 1.
El signo $=$ significa *igual a*.

Y los reglamenta con los siguientes axiomas:

A1. $1 \in \mathrm{N}$.

A2. $x \in \mathrm{N} \supset x + 1 \in \mathrm{N}$.

A3. $x \in \mathrm{N} \supset x + 1 \neq 1$.

A4. $x, y \in \mathrm{N} \supset x = y. = .x + 1 = y + 1$.

A5. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N}.x \in k \supset x + 1 \in k ::\supset N = k$.

A6. $x \in \mathrm{N} \supset x = x$

A7. $x, y \in \mathrm{N} \supset x = y. = .y = x$.

A8. $x, y, z \in \mathrm{N} \supset x = y.y = z \supset x = z$.

A9. $x = y.y \in \mathrm{N} \supset x \in \mathrm{N}$.

El símbolo $p \supset q$ se usa para decir que q es una consecuencia lógica de p, los demás se infieren del contexto. Si reemplazamos $x+1$ por x^+, los axiomas A2 y A4 implican que todo número natural tiene un único sucesor, o lo que es igual si $x = y$ entonces $x^+ = y^+$.

A3 afirma que 1 es el primer número natural, A4 implica que cada número natural, diferente de 1, es sucesor de un único número o sea que si $x^+ = y^+$ entonces $x = y$.

A5 afirma que si un subconjunto k de los números naturales tiene las siguientes propiedades:

I. 1 pertenece a k,

II. Si x pertenece a k entonces x^+ pertenece a k, entonces k tiene a todos los números naturales, o sea $k = \mathrm{N}$

En los axiomas restantes se presenta el concepto de igualdad que se maneja en la teoria, mediante tres propiedades que ya habíamos señalado anteriormente en este capítulo:

- El axioma A6 afirma que todo número natural es igual a sí mismo, o sea la *propiedad reflexiva de la igualdad*.

- El axioma A7 afirma que si un número natural es igual a otro, el segundo es igual al primero, o sea la *propiedad simétrica de la igualdad.*

- El axioma A8 afirma que si un número natural es igual a otro, y este a su vez es igual a un tercero, el primero es igual al tercero, la llamamos *propiedad transitiva de la igualdad*, en símbolos si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$.

- Un nuevo aspecto de la igualdad (que ya había aparecido con los filósofos) se resalta en esta teoría: el axioma A9, en el que se afirma que si dos números naturales son iguales, uno de ellos puede reemplazarse por el otro en toda aparición de éste último.

Listaremos ahora los teoremas fundamentales que se deducen de los axiomas, pues los vamos a requerir en capítulos posteriores, pero solo haremos una prueba para ilustrar el uso del igual [35].

1.5.1. Teoremas de la aritmética de Peano

Para todo x, y, z, en N

Teorema 1: si $x \neq y$ entonces $x^+ \neq y^+$.

Llama la atención que sin tener axiomas sobre el símbolo $\neq$ (que significa no igual o diferente) el primer teorema lo escriba en términos de él. Sin embargo, otra forma lógica del teorema 1 con el uso de la igualdad es: si $x^+ = y^+$ entonces $x = y$.

[35] Un estudio detallado de la axiomática de Peano se encuentra en Luque, Jiménez y Ángel (2013, pp. 211-230).

Ejercicios

1. *Demuestre este teorema con el uso de los axiomas de Peano. ¿En qué difiere la demostración si se toma el enunciado "si $x^+ = y^+$ entonces $x = y$"?¿Por qué cree que en la teoría original se presenta este primer teorema en términos de "$\neq$"?*

2. *Peano no presenta en su teoría axiomas que definan "$\neq$", proponga axiomas para caracterizarlo.*

Teorema 2: $x^+ \neq x$.

Teorema 3: si $x \neq 1$ existe un único u tal que $x = u^+$.

Teorema 4 (definición de suma): para cada par de números naturales x, y, existe un único número natural, notado $x + y$, tal que:

1. $x + 1 = x^+$ para todo x en N.

2. $x + y^+ = (x + y)^+$ para cada x y cada y en N.

$x + y$ es llamado *la suma* de x y de y, o el número obtenido por la *adición* de y a x.

Teorema 5 (ley asociativa de la adición):

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Prueba: sean x y y números naturales fijos pero arbitrarios, y sea M el conjunto de todos los z para los cuales la afirmación del teorema es cierta.

a) $(x + y) + 1 = (x + y)^+ = x + y^+ = x + (y + 1)$, por tanto 1 pertenece a M.

b) Sea z un elemento de M, entonces

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

luego

$$\begin{aligned}(x + y) + z^+ &= ((x + y) + z)^+ \\ &= (x + (y + z))^+ \\ &= x + (y + z)^+ \\ &= x + (y + z^+),\end{aligned}$$

por lo cual z^+ pertenece a M. De esta manera la afirmación es válida para todo número natural z. Notemos en particular el uso de la propiedad transitiva de la igualdad y del axioma A9. □

Teorema 6 (ley conmutativa de la adición):

$$x + y = y + x$$

Teorema 7: $y \neq x + y$.

Teorema 8 (ley cancelativa de la adición): si $x + y = x + z$ entonces $y = z$.

Teorema 9: dados números naturales x y y solo sucede uno de los siguientes casos:

1. $x = y$.

2. Existe un único número natural u tal que $x = y + u$.

3. Existe un único número natural v tal que $y = x + v$.

Ejercicio

Demuestre los teoremas 6, 7, 8, 9. Señale cuáles axiomas de la igualdad se utilizan en el razonamiento.

Vemos entonces que en la teoría de Peano para los números naturales, la noción de igualdad que se usa es la de una relación $x = y$ que es reflexiva, simétrica y transitiva. Llama la atención el uso que le da a la igualdad en las demostraciones a partir del axioma 9, pues en cada paso se va reemplazando un número por otro que es igual pero que al estar escrito de manera diferente posibilita *ver de otra manera lo mismo*. Esta es una de las virtudes de la igualdad que más se usa en matemáticas, aunque pocas veces se haga explícita como en este axioma.

1.5.2. Orden en los números naturales

Usando el teorema 9 podemos definir un orden estricto[36] $<$ en los números naturales y con él una relación de orden $\leq$, como vemos enseguida. Incluimos estos teoremas aquí pues nos servirán en la construcción de los números racionales positivos en un capítulo posterior.

Definición 2: si $x = y + u$ entonces $x > y$ ($>$ lo leemos "es mayor que").

Definición 3: si $y = x + v$ entonces $x < y$ ($<$ lo leemos "es menor que").

Teorema 10: para cualesquiera x, y dados, se tiene exactamente uno de los casos:

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y$$

Teorema 11: si $x > y$ entonces $y < x$.

Teorema 12: si $x < y$ entonces $y > x$.

Definición 4: $x \geq y$ significa $x > y$ o $x = y$ (lo leemos x es mayor o igual que y).

Definición 5: $x \leq y$ significa $x < y$ o $x = y$ (lo leemos x menor o igual que y).

Teorema 13: si $x \geq y$ entonces $y \leq x$.

Teorema 14: si $x \leq y$ entonces $y \geq x$.

Teorema 15: si $x < y$, $y < z$, entonces $x < z$.

Teorema 16: si $(x \leq y,\ y < z)$ o $(x < y,\ y \leq z)$, entonces $x < z$.

Teorema 17 (transitividad del orden): si $x \leq y$, $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Teorema 18: $x + y > x$.

Teorema 19 (monotonía de la suma): si $x > y$, o $x < y$, entonces $x + z > y + z$, o $x + z < y + z$, respectivamente.

Teorema 20: si $x + z > y + z$, o $x + z < y + z$, entonces $x > y$ o $x < y$, respectivamente.

[36] Un orden estricto $<$ en un conjunto A es una relación en A que es transitiva y asimétrica, esto último significa que si $x < y$ entonces no es cierto que $y < x$ (Luque, Jiménez y Fonseca, 2009b).

Teorema 21: si $x > y$, $z > u$, entonces $x + z > y + u$.

Teorema 22: si $(x \geq y,\ z > u)$, o $(x > y,\ z \geq u)$, entonces $x + z > y + u$.

Teorema 23: si $x \geq y$, $z \geq u$, entonces $x + z \geq y + u$.

Teorema 24: $x \geq 1$.

Teorema 25: si $y > x$ entonces $y \geq x + 1$.

Teorema 26: si $y < x + 1$ entonces $y \leq x$.

Teorema 27 (principio de buen orden): en cada conjunto no vacío de números naturales existe un *mínimo* (es decir, uno que es menor que cualquier otro número del conjunto).

Teorema 28 (definición de multiplicación): para cada par de números naturales x, y existe un único un número natural, notado $x * y$ (lo leemos x veces y; sin embargo, el símbolo $*$ habitualmente se omite), tal que

1. $x * 1 = x$ para todo número natural x.
2. $x * y^+ = (x * y) + x$ para todo x y todo y.

$x*y$ es llamado el *producto* de x y y, o el número obtenido de la *multiplicación* de x por y.

Teorema 29 (ley conmutativa de la multiplicación[37]):

$$xy = yx$$

Teorema 30 (ley distributiva de la multiplicación con respecto a la suma):

$$x(y + z) = xy + xz$$

Teorema 31 (ley asociativa de la multiplicación):

$$(xy)z = x(yz)$$

Teorema 32: si $x > y$ o $x = y$ o $x < y$, entonces $xz > yz$, $xz = yz$ o $xz < yz$, respectivamente.

[37]De aquí en adelante no se escribirá el símbolo $*$, pero se entenderá que $x * y = xy$.

Teorema 33 (ley cancelativa de la multiplicación): si $(xz > yz)$ o $(xz = yz)$ o $(xz < yz)$, entonces $(x > y)$, o $(x = y)$, o $(x < y)$, respectivamente.

Teorema 34: si $x > y$, $z > u$, entonces $xz > yu$.

Teorema 35: si $(x \geq y, z > u)$ o $(x > y, z \geq u)$, entonces $xz > yu$.

Teorema 36: si $x \geq y$, $z \geq u$ entonces $xz \geq yu$.

1.6. La igualdad en álgebra clásica

En su forma clásica, el álgebra se ocupaba de la resolución de ecuaciones en distintos conjunto de números[38], en consecuencia hay un álgebra para cada tipo de números: álgebra diofántica para los números enteros, álgebra de los números racionales, reales o complejos (para estos tres conjuntos es la misma), álgebra de cuaternios (Luque, Mora y Torres, 2006b), etc.

Precisemos: una *ecuación* es una igualdad entre números combinados con operaciones, donde alguno(s) de ellos, la(s) *incógnita*(s), no es (son) conocido(s); dichos números están en un conjunto dado y las operaciones también están definidas en él. Al resolver una ecuación, lo que se busca es hallar el(los) valor(es) para esa(s) incógnita(s), la *solución*, que haga que se cumpla la condición de igualdad. Por ejemplo, entre números naturales:

$$3x - 4 = 8$$

es una ecuación con incógnita x, cuya solución es $x = 4$.

En todos los casos, el trabajo de resolver una ecuación consiste en reemplazar la ecuación dada en otras que sean *equivalentes* a ella, pero que sea más sencilla que la anterior.

[38]La actividad de resolver ecuaciones es casi tan antigua como las actividades de contar y medir; pero, el estudio sistemático de las ecuaciones y sus posibilidades de solución es mucho más reciente y es uno de los factores que lleva a la consolidación del álgebra moderna. Podría decirse que este proceso, hasta el siglo XVII, inició en las civilizaciones antiguas, donde hay evidencias del interés por la solución de ecuaciones, fundamentalmente con fines prácticos; sin embargo, la historia muestra una evolución en estas ecuaciones, no solo en los intereses que motivaban su solución, sino además en la aparición de diferentes procedimientos haciendo uso de propiedades geométricas y aritméticas que permitían hacer sustituciones convenientes o aproximaciones numéricas. En el último capítulo de este libro se hace un estudio detallado sobre la solución de ecuaciones.

Dos ecuaciones algebraicas son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones; por ejemplo, la ecuación:

$$3x - 4 = 8$$

es equivalente a la ecuación:

$$6x - 8 = 16$$

Si a una igualdad, digamos, entre números reales, sumamos, restamos[39], multiplicamos o dividimos por un número diferente de cero en ambos lados de la igualdad, el resultado es *otra* igualdad; esta es equivalente a la primera; debido a que en cada uno de estos procesos, cuando operamos dos números que son iguales, con otros dos, que también son iguales, debemos obtener resultados iguales, porque los resultados de las operaciones son únicos; en particular la ecuación:

$$x = y + a$$

es equivalente a

$$x - a = y$$

y la ecuación:

$$x = y \times a$$

es equivalente a

$$x \div a = y$$

si $a \neq 0$.

De hecho, para resolver una ecuación, usamos estos procedimientos para transformar esta en otras ecuaciones equivalentes, terminando con una ecuación de la forma

$$x = a$$

donde a es la solución de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación entre números naturales:

$$3x - 4 = 8$$

[39] Al-Khwārizmī llamó *al-jabr* al procedimiento correspondiente a sumar a ambos lados de una ecuación una misma expresión y *al-muqābalah* a la acción de eliminar aquello que aparece igual en dos ecuaciones equivalentes. Obsérvese que estas dos ideas corresponden con las nociones comunes 2 y 3 de Euclides en *Elementos*.

es equivalente a:

$$(3x - 4) + 4 = 8 + 4$$

y esta a su vez a:

$$3x = 12$$

y por último a:

$$3x = 3 \times 4$$

o sea

$$x = 4.$$

Desde el punto de vista algebraico es lo mismo $3x - 4 = 8$ que $x = 4$. No parece, pero, ¡así es!

Sin embargo, debemos tener cuidado con las operaciones que efectuamos en ambos lados de una igualdad, pues no todas las operaciones son tan nobles como las mencionadas; por ejemplo, en los números naturales tenemos que si

$$x^2 = y^2$$

entonces $x = y$, pero si a una igualdad entre números reales le aplicamos radicación a ambos lados es posible que no obtengamos igualdades si no aplicamos las reglas de forma correcta; por ejemplo, de

$$(-5)^2 = 5^2$$

no debemos concluir que

$$-5 = 5.$$

Esto es debido a que la radicación de números reales no tiene una respuesta única.

Ejercicios

1. *El uso de ecuaciones equivalentes para resolver una ecuación es un ejemplo del axioma 9 de Peano sobre la igualdad. ¿Qué otras propiedades de la igualdad de las enunciadas por Euclides, Hilbert y Peano se observan en la igualdad entre ecuaciones?, ¿qué nuevas propiedades? Ejemplifique.*

2. *Busque otros ejemplos de igualdad en las matemáticas o en otros contextos y señale qué aspectos comparten con las nociones de igualdad presentadas en este capítulo y qué nuevas propiedades aparecen.*

Capítulo

2 La igualdad en lógica y en teoría de conjuntos

Tanta es la ventaja de un lenguaje bien construido, que su notación simplificada a menudo se convierte en fuente de teorías profundas.
Laplace

En el lenguaje común sucede con frecuencia que cuando tratamos de comunicar una idea a otra persona, la idea no se transmite fielmente, muchas veces debido a que diferentes personas asignan significados diferentes a una misma palabra. Para evitar estas ambigüedades del lenguaje común se han desarrollado lenguajes precisos para expresar ideas matemáticas[1]; dos lenguajes básicos son la lógica simbólica y la teoría de conjuntos.

Entre 1900 y 1928, David Hilbert había propuesto que toda teoría matemática $\mathfrak{T}$, como la geometría o la teoría de grupos, debería ser fundamentada lógicamente; es decir, que todo teorema de $\mathfrak{T}$ fuera deducible de un conjunto de axiomas, mediante aplicación de las reglas de la lógica, en lo que llamamos una *demostración*.

De esta manera, intentaba establecer la coherencia e integridad de cualquier teoría $\mathfrak{T}$, y decidir de manera mecánica y mediante razonamientos fini-

[1]Según Devlin (2012), "una de las características del pensamiento matemático que a menudo causa inmensa dificultad a los principiantes es la precisión lógica que requiere el discurso matemático, que frecuentemente lleva a la construcción de frases que suenan extrañas al compararse con el lenguaje usual y que exige considerable esfuerzo seguir tal discurso. (La definición tradicional de *continuidad* es un excelente ejemplo, pero la escritura matemática está llena de estas instancias.)" (p. 2).

tistas[2], usando algoritmos, si una proposición dada es un teorema de $\mathfrak{F}$. Este punto de vista se conoció como *formalismo*[3].

El mismo Hilbert tuvo algunos éxitos en esta dirección, pero en 1930 el lógico austriaco Kurt Gödel demostró que la propuesta de Hilbert, conocido como el Programa de Hilbert, no se podía realizar para toda teoría que incluyera a los números naturales.

Este resultado, sin embargo, no impide que se desarrollen teorías, con limitaciones, que nos permitan fundamentar parte de la matemática a partir de ellas; la teoría de conjuntos fue un intento de esto, utilizando como punto de partida los conceptos de conjunto y de pertenencia de un elemento a un conjunto, y unos axiomas que relacionan los conceptos básicos.

---

[2]Se entiende por *razonamientos finitistas* aquellos que sean absolutamente seguros y estén libres de cualquier sospecha (Pareja, 2008); no obstante, una definición de estos razonamientos fue dada por el matemático francés Jacques Herbrand (1908-1931), alumno de Noether; así:

Un argumento finitista es aquel que satisface las condiciones siguientes:

1. En él, nunca consideraremos nada distinto a un número finito de objetos y de funciones: estas funciones estarán bien definidas en el sentido de que sus valores sean calculados en forma unívoca.

2. Nunca exhibiremos un objeto sin antes dar un procedimiento para construirlo.

3. Nunca consideraremos la totalidad de objetos x de una colección infinita.

4. Cuando digamos que un argumento (o un teorema) es verdadero para todos los objetos x de una colección finita, estamos significando que para cada x tomado separadamente, es posible repetir el argumento general en cuestión, que a su vez debe considerarse meramente como el prototipo de estos argumentos particulares. (Herbrand, citado por Pareja, 2008, p. 128).

[3]Es importante hacer claridad respecto a dos palabras que usualmente se pueden utilizar como sinónimos y que no lo son, *axiomatización* y *formalización*. La formalización se hace sobre teorías que previamente han sido axiomatizadas. "La formalización se refiere al sistema de axiomas dentro de un lenguaje L dado". (Pareja, 2008, p. 124). El primer propósito del formalismo fue crear técnicas matemáticas a través de las cuales fuera posible probar que las matemáticas estaban libres de contradicciones. Los logicistas, por su parte "formalizaron las diversas ramas de las matemáticas, pero por razones de distinta índole. Los logicistas buscaban esa formalización para mostrar que la rama de las matemáticas en cuestión pertenecía a la lógica" (Pareja, 2008, p. 126). La idea del logicismo, según Russell es "mostrar que todas las matemáticas puras se siguen de premisas puramente lógicas y que estas usan solamente conceptos definibles en términos lógicos".

En este capítulo presentamos la noción de igualdad que se usa en la lógica bivalente usual y en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem (Muñoz, 2002).

2.1. La igualdad en lógica

La lógica habitualmente la asociamos con formas correctas de razonar. Lo primero que debemos decir es que, en la actualidad, no hay una manera correcta de razonar, hay muchas lógicas: lógicas multivaluadas (Peña, 2005), que incluyen valores de verdad diferentes a verdadero y falso, lógica difusa o borrosa[4], que pertenece a la lógica multivaluada y estudia valores de verdad probables cuyos extermos son la verdad absoluta y la falsedad absoluta; lógicas modales (Orayen, 2005) donde se incluyen la posibilidad y la necesidad de ser; lógica paraconsistente (Da costa y Lewin, 2005) en la que no se excluyen las contradicciones, lógica intuicionista (Fitting, 1969), y muchas otras.

La *lógica formal clásica* es la más popular en matemáticas y la que usaremos aquí;esta estudia reglas y técnicas para determinar si un razonamiento dado es o no válido[5] y trata con proposiciones que pueden tener solo uno de dos valores de verdad posibles: verdadero y falso. En ella representamos las proposiciones con letras minúsculas p, q, r, etc. Si una proposición p es verdadera, su negación $\neg p$ es falsa, si p es falsa, su negación $\neg p$ es verdadera, también si $\neg p$ es verdadera, p es falsa.

2.1.1. Razonamientos válidos

Un *razonamiento* consta de unas suposiciones iniciales que llamamos *premisas* y una conclusión. Un *razonamiento deductivo válido* es, de acuerdo con Diodoro de Megara en el siglo IV a.C, el que nos garantiza que *si las premisas son verdaderas, necesariamente la conclusión es verdadera*, o dicho de otra manera, *mediante un razonamiento deductivo válido, no es posible*

[4](Tanaka, 1997). Son muchas las aplicaciones de la lógica difusa, en el área médica (diagnósticos, análisis de ritmos cardíacos, acupuntura); en el área de control de sistemas, en los automóviles (sistemas de frenado, por ejemplo); en electrodomésticos (como lavadoras, tostadoras, sistemas de aire acondicionado o calefacción), control de máquinas, robots (un estudio más detallado, pero sencillo, puede leerse en: Benito y Durán 2011).

[5]Una versión más detallada de esta sección se encuentra en (Luque, Ávila y Soler, 2013, pp. 35-77).

obtener una conclusión falsa de una premisa verdadera; pues si la premisa es verdadera y la forma de razonar es válida la conclusión debe ser verdadera.

En este punto debemos ser cuidadosos, la validez de un razonamiento no garantiza la verdad de su conclusión y la falsedad de una conclusión no garantiza la invalidez de un argumento; pero *la falsedad de su conclusión sí garantiza que o el razonamiento es inválido o alguna de sus premisas es falsa.*

Ejercicio

Analice los siguientes razonamientos y sus conclusiones, ¿son razonamientos válidos? Explique:

a. *Si Mario toma alcohol, entrega las llaves*
Mario no tomó alcohol
Entonces Mario no entregó las llaves

b. *Si Mario toma alcohol, entrega las llaves*
Mario no entregó las llaves
Entonces Mario no tomó alcohol.

Decimos que una proposición q es *consecuencia lógica* de otra p, cuando q es verdadera todas las veces que es verdadera p; el paso de las premisas a la conclusión es *una deducción* o *una inferencia deductiva*, que notamos:

$$\begin{array}{|c|}\hline p \\ \hline q \\ \hline \end{array}$$

o $p \vdash q$. En algunos textos se usa $p \Rightarrow q$ o también $p \supset q$.

Si $p \vdash q$, aparece una nueva proposición que llamamos la *implicación formal* entre p y q, que notamos $p \to q$ y que es verdadera si el razonamiento es válido[6], p se llama *antecedente* y q, *consecuente*.

En la vida cotidiana, en ciencias y en matemáticas habitualmente razonamos partiendo de premisas verdaderas, pero existe la posibilidad de considerar premisas falsas y aun así, llegar a conclusiones verdaderas; por ejemplo,

[6]Este es el *teorema de la deducción* que establece: si $M \vdash q$, entonces $\vdash M \to q$, donde q es una proposición cualquiera y M es un conjunto de premisas cualquiera. El *recíproco del teorema de la deducción* también es válido: si $\vdash M \to q$, entonces $M \vdash q$, donde q es una proposición cualquiera y M es un conjunto de proposiciones cualquiera.

de las premisas "los gatos son aves" y "las aves son mamíferos", podemos concluir que "los gatos son mamíferos".

En la antigua Grecia, Filon de Alejandría (s. I a.C. - I d.C.) consideraba que la proposición $p \rightarrow q$ solamente era falsa en el caso en que p fuera verdadera y q falsa, y *en los demás casos posibles era considerada verdadera*. Esta forma de implicación es llamada *material*, pero permite la construcción de enunciados absurdos o chocantes: las llamadas *paradojas de la implicación material*, como por ejemplo que una proposición falsa implica cualquier otra proposición; bajo esta idea, es lógicamente verdadero afirmar que "si el sol es de leche entonces las mandarinas son animales domésticos".

Es decir, que el valor de la implicación material está relacionado con su estructura lógica y *no tiene que ver con la realidad*, sino que consideran los mundos posibles. Es una afirmación hipotética sobre una relación formal, si se da una condición tiene que darse también lo condicionado. El hecho de que no se dé la condición no afecta al hecho de que se dé o no se dé lo condicionado.

Curiosamente la implicación que se usa en matemáticas es la de Filón, en ella aparecen nuevas formas de razonamiento puesto que, si en las premisas hay una falsa, es posible que razonando correctamente se llegue a una conclusión falsa. También podemos obtener una conclusión verdadera a partir de premisas falsas pero, como lo hemos reiterado, la veracidad de una conclusión no es garantía de la corrección del razonamiento.

En particular, si las premisas son falsas, no importa la verdad o falsedad de la conclusión, el razonamiento es válido.

Si deseamos probar que q es consecuencia lógica de p, basta con suponer que p es verdadera y a partir de ahí, haciendo razonamientos válidos, llegar a la conclusión de que q es verdadera.

Ejercicio

Busque ejemplos de razonamientos válidos, cotidianos y de las matemáticas, que surjan de premisas falsas.

2.1.2. Leyes básicas de inferencia

Los razonamientos válidos son secuencias de algunos básicos que llamamos *leyes de inferencia*, unas de las más usadas son:

a. Modus ponendo ponens: si la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera y p es verdadera inferimos que q es verdadera. Por ejemplo, de las premisas "si el agua hierve a 100 grados centígrados, se evapora" y "el agua hirvió a 100 grados centígrados", concluimos que "el agua se evaporó"; esquemáticamente:

$p \rightarrow q$
p
q

b. Ley de la adjunción: si en un razonamiento afirmamos p y luego afirmamos q, también se puede afirmar la *conjunción* de las dos proposiciones, que notamos $p \wedge q$, en símbolos:

p
q
$p \wedge q$

Similarmente,

p
q
$q \wedge p$

Esto significa que la conjunción $q \wedge p$ de dos proposiciones es verdadera solo cuando las dos son verdaderas. Por ejemplo, si se tiene que "Juan Manuel Santos es hombre" y "Juan Manuel Santos es el presidente de Colombia", es válido concluir que "Juan Manuel Santos es hombre y es el presidente de Colombia".

c. Modus tollendo tollens: si en una proposición condicional $p \rightarrow q$, negamos (*tollendo*) el consecuente, debemos concluir la negación (*tollens*) del antecedente.

Se obtiene de suponer que $p \rightarrow q$ es verdadera y que $\neg q$ es verdadera, entonces q es falsa y p debe ser falsa, por tanto $\neg p$ es verdadera. Por ejemplo, con las premisas: "si un triángulo es rectángulo entre sus lados se cumple el teorema de Pitágoras" y "en este triángulo no se cumple el teorema de Pitágoras", podemos concluir que "este triángulo no es rectángulo"; simbólicamente:

$$\begin{array}{|c|}\hline p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \\ \hline \end{array}$$

Un error frecuente es concluir la falsedad del consecuente suponiendo la falsedad del antecedente, lo válido es que *la falsedad del consecuente implica la falsedad del antecedente.*

d. Ley de reducción al absurdo: es una variación del *modus tollendo tollens*, consiste en concluir la negación del antecedente a partir de una implicación cuyo consecuente es falso[7], o sea que si $(p \to 0)$ es verdadera, podemos concluir $\neg p$; puesto que si p es verdadera, $(p \to 0)$ sería falsa. Simbólicamente,

$$\begin{array}{|c|}\hline p \to 0 \\ \hline \neg p \\ \hline \end{array}$$

Esto es: si en un razonamiento válido, partiendo de una hipótesis, llegamos a una contradicción, debemos concluir que nuestra hipótesis es falsa.

e. Ley del silogismo hipotético: también conocido como *silogismo aristotélico*, dice que la implicación es transitiva.

$$\begin{array}{|c|}\hline p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \\ \hline \end{array}$$

Resulta de suponer que $p \to q$ es verdadera y que $q \to r$ es verdadera, por tanto p es verdadera y q es verdadera, entonces por *modus ponendo ponens* r es verdadera, y en consecuencia $p \to r$ es verdadera.

f. Ley de la adición: si p es verdadera entonces la disyunción $p \vee q$ es verdadera, o sea que

$$\begin{array}{|c|}\hline p \\ \hline p \vee q \\ \hline \end{array}$$

[7]El valor de verdad falso lo notaremos con 0 y el de verdadero con 1.

Naturalmente, también es válido

q
$p \vee q$

Esto significa que el valor de verdad de $p \vee q$ es verdadero cuando alguna de las dos proposiciones es verdadera.

g. Modus tollendo ponens: la disyunción $p \vee q$ es falsa solo en el caso en el cual ambas p y q sean falsas, esto significa que si sabemos que alguna de ellas, digamos p es verdadera, o que su negación $\neg p$ es falsa, podemos concluir que q es verdadera. Así, de las premisas "los números naturales son impares o pares" y "el 2 no es impar", se tiene que "el 2 es par". Lo simbolizamos así:

$p \vee q$
$\neg p$
q

De la misma forma

$p \vee q$
$\neg q$
p

h. Ley de los casos: si asumimos como premisas dos condicionales con el mismo consecuente $p \to q$ y $r \to q$ podemos inferir que el consecuente común es consecuencia lógica de la disyunción de las premisas; puesto que si $p \to q$ y $r \to q$ son verdaderas, entonces p es verdadera, q es verdadera y r es verdadera, por tanto $p \vee r$ es verdadera, y $(p \vee r) \to q$ es verdadera. En símbolos:

$p \to q$
$r \to q$
$(p \vee r) \to q$

Es frecuente que para demostrar una implicación cuyo antecedente es una disyunción $(p \vee r) \to q$, demostramos las dos implicaciones $p \to q$ y $r \to q$, pues la verdad de la primera es una consecuencia lógica de estas.

Ejercicios

1. *Usando las leyes básicas de la inferencia, compruebe la validez de sus respuestas en los ejercicios anteriores de este capítulo.*

2. *Use las leyes básicas de la inferencia para llegar a la conclusión, con base en las premisas dadas:*

   a) $p \vee q$; $p \to r$; $q \to s$. Conclusión: $r \vee s$

   b) $(p \vee r) \to q$; $q \to s$. Conclusión: $(p \vee r) \to s$

   c) $\neg\neg p$; $p \to (\neg q)$; $q \to (\neg\neg r)$. Conclusión: r

2.1.3. La equivalencia lógica

El concepto de igualdad entre dos proposiciones p y q en lógica corresponde con una implicación mutua. Si cada una de las proposiciones es consecuencia lógica de la otra decimos que ellas son *lógicamente equivalentes* y lo notamos $p \leftrightarrow q$.

i. Ley de la equivalencia: para obtener una forma más operativa de la equivalencia de dos proposiciones supongamos que $p \to q$ y $q \to p$ son verdaderas. En símbolos,

$$\begin{array}{|c|}\hline p \to q \\ q \to p \\ \hline p \leftrightarrow q \\ \hline \end{array}$$

Por la ley de adjunción, obtenemos

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p)).$$

Si p es verdadera, por *modus ponendo ponens* deducimos que q es verdadera y si q es verdadera concluimos que p es verdadera.

Si p es falsa, como $q \to p$ es verdadera, concluimos por *modus tollendo tollens* que q es falsa; y si suponemos que q es falsa, como $p \to q$ es verdadera, debemos concluir que p es falsa.

En resumen, cuando p y q son lógicamente equivalentes, ambas tienen el mismo valor de verdad.

j. Propiedad reflexiva de la equivalencia: en lógica recibe el nombre de *principio de identidad* y afirma que todo objeto es idéntico a sí mismo o en símbolos p es p, que se puede escribir como $p \leftrightarrow p$, o aún más simplificado como $p \rightarrow p$.

k. Propiedad simétrica de la equivalencia: se conoce también como ley conmutativa, y en símbolos la escribimos

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p).$$

l. Propiedad transitiva de la equivalencia: se deduce de la ley del silogismo hipotético y establece que

$$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r).$$

m. Propiedad euclídea de la equivalencia: se deduce de la ley del silogismo hipotético, las propiedades conmutativa y asociativa de la conjunción y establece que

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow r).$$

Ejercicio

Formule argumentaciones que validen las cuatro propiedades de la equivalencia que se acaban de plantear.

Ejemplos

Presentamos algunas leyes de inferencia que se cumplen en ambos sentidos y por lo tanto constituyen ejemplos de equivalencias lógicas.

n. Ley de la doble negación: resulta de suponer que si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa y $\neg(\neg p)$ es verdadera, esquemáticamente:

p
$\neg(\neg p)$

También se tiene que

$\neg(\neg p)$
p

por tanto,

$$(\neg\neg p) \leftrightarrow p.$$

o. Ley de la negación del condicional: para establecer la forma de negar una implicación supongamos que $\neg(p \rightarrow q)$ es verdadero, entonces $(p \rightarrow q)$ es falso, por tanto p es verdadera y q es falsa, o sea que $\neg q$ es verdadera y por lo tanto $p \wedge \neg q$ es verdadera. De la premisa $\neg(p \rightarrow q)$ deducimos $p \wedge \neg q$, en símbolos:

$\neg(p \rightarrow q)$
$p \wedge \neg q$

También se cumple que

$p \wedge \neg q$
$\neg(p \rightarrow q)$

O sea que

$$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q)).$$

p. Ley de De Morgan para la disyunción: la negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de cada una de las proposiciones, es decir que

$$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q).$$

q. Ley de De Morgan para la conjunción: la negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de cada una de las proposiciones, es decir que

$$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Esto significa, por ejemplo, que la proposición "no es cierto que los colombianos son pelirrojos y que los ingleses son rubios" es lógicamente equivalente a la proposición "los colombianos no son pelirrojos o los ingleses no son rubios".

r. Ley de la contrarrecíproca: en ocasiones no es sencillo demostrar que $p \to q$ es verdadera asumiendo la verdad de p; en su lugar podemos suponer $\neg q$ y concluir $\neg p$ este es un razonamiento válido puesto que

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

Una argumentación que justifica esta afirmación la logramos suponiendo que $p \to q$ es verdadera entonces,

Si asumimos el punto de vista de Diodoro (como lo hemos hecho en las argumentaciones hechas), concluimos que p es verdadera y q es verdadera, por tanto, $\neg q$ es falso y $\neg p$ es falso, pero no podemos concluir que $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera, pues este caso no existe.

Si miramos desde el punto de vista filónico, debemos considerar cuatro casos:

O p es verdadera y q es verdadera, por tanto $\neg q$ es falso y $\neg p$ es falso, en consecuencia $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera.

O p es falsa y q es verdadera, por tanto $\neg q$ es falsa y $\neg p$ es verdadera, en consecuencia $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera.

O p es falsa y q es falsa, por tanto $\neg q$ es verdadera y $\neg p$ es verdadera, en consecuencia $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera.

El caso en que p es verdadera y q es falsa no es posible pues asumimos que $p \to q$ es verdadera.

En todos los casos concluimos que $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera; es decir, que de la verdad de $p \to q$ deducimos la verdad de $(\neg q) \to (\neg p)$ y por tanto:

$p \to q$
$(\neg q) \to (\neg p)$

Recíprocamente, si suponemos que $(\neg q) \to (\neg p)$ es verdadera, deducimos que $p \to q$ es verdadera.

O sea que:

$$((\neg q) \to (\neg p)) \leftrightarrow (p \to q).$$

Esta regla de inferencia se conoce como la *ley de contrarrecíproca.*

Ejercicios

1. *Muestre y argumente los razonamientos que permiten concluir las equivalencias que expresan las leyes de De Morgan.*

2. *Complete las argumentaciones dadas desde el punto de vista de Diodoro para validarlas desde el punto de vista filónico.*

3. *Escriba la contrarrecíproca para cada una de las siguientes proposiciones:*

   a) *Si David es arquitecto, entonces David es millonario.*

   b) *Si $x < 0$, entonces x no es positivo.*

   c) *Si x^2 es impar, x es impar.*

4. *Busque ejemplos de las matemáticas donde sea más conveniente usar la contrarrecíproca para demostrar la verdad de una afirmación (sugerencia: analice la proposición c del numeral anterior).*

5. *Proponga ejemplos que ilustren el uso de cada una de las 18 reglas de inferencia presentadas en este capítulo.*

6. *Formule argumentaciones que validen cada una de las reglas de inferencia.*

7. *Demuestre que $p \wedge (q \vee r)$ es equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, y que $(p \to q) \to r$ es equivalente a $(\neg r) \to (p \wedge \neg q)$.*

Ejemplos

Otros ejemplos de equivalencia lógica, en casos particulares, son los siguientes:

1. La proposición "un paralelogramo es un rectángulo" es equivalente a "las diagonales de un paralelogramo son congruentes".

   Prueba: para ver que estas proposiciones son equivalentes, debemos demostrar que si un paralelogramo es un rectángulo, entonces las diagonales son congruentes, y que si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

Para la primera parte, supongamos que $ABCD$ es un rectángulo. Entonces, por ser A y B ángulos rectos, son iguales (postulado 4 de Euclides); además, el segmento AD es congruente con el segmento BC, pues corresponden a los lados opuestos del paralelogramo en cuestión, y como el segmento AB es congruente a sí mismo, se tiene que el triángulo ABD es congruente al triángulo BAC, de acuerdo con el criterio lado-ángulo-lado; de esta forma, los segmentos que constituyen las diagonales del paralelogramo BD y AC son congruentes.

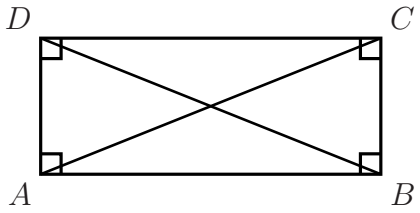


Figura 2.1

Ahora, supongamos que las diagonales del paralelogramo $ABCD$ son congruentes; es decir, el segmento BD es congruente con el segmento AC; los segmentos AD y BC son congruentes, por ser lados opuestos de un paralelogramo, y como el segmento AB es congruente con él mismo, de acuerdo con el criterio lado-lado-lado para congruencia de triángulos, se tiene que los triángulos ABD y BAC son congruentes. Luego, los ángulos A y B son congruentes; además, son ángulos adyacentes del paralelogramo $ABCD$, entonces son suplementarios, por tanto, cada uno de ellos es recto. Por otra parte, los ángulos B y D son congruentes, al igual que los ángulos A y C, porque corresponden a los ángulos opuestos de un paralelogramo; así, los ángulos B, D, A y C son rectos, por lo que el paralelogramo $ABCD$ es un rectángulo. □

2. La proposición "dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con los lados y el ángulo comprendido de otro triángulo" es equivalente a "dos ángulos y el lado comprendido del triángulo sean respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido del otro triángulo", en otras palabras, el criterio de congruencia para triángulos conocido como lado-ángulo-lado es lógicamente equivalente al criterio ángulo-lado-ángulo.

   Prueba: supongamos que la primera proposición es cierta para deducir la segunda.

Llamemos los vértices de los triángulos ABC y DEF, respectivamente, tales que el segmento AB es congruente con el segmento DE, el segmento AC es congruente con el segmento DF, y el ángulo A es congruente con el ángulo D, como se muestra en la figura 2.2.

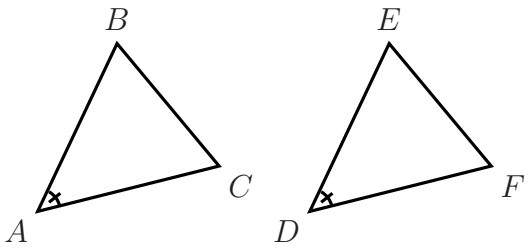


Figura 2.2

Si suponemos que, dados dos triángulos tales que dos lados de uno son congruentes con dos lados del otro, y los ángulos formados entre esos dos lados son congruentes entre sí, entonces los otros ángulos correspondientes también lo son (Brumfield, Eicholz y Shanks, 1960, pp. 84-97), se tiene que el ángulo B es congruente con el ángulo E y el ángulo C con el ángulo F; por tanto, para demostrar que los dos triángulos son congruentes, solo falta probar que el segmento BC es congruente con el segmento EF.

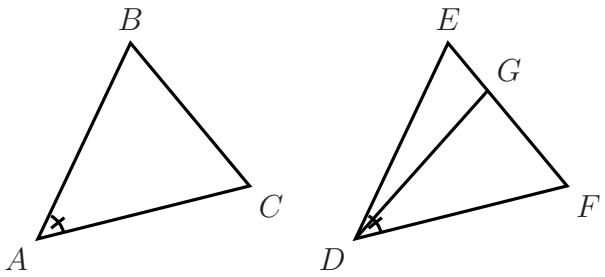


Figura 2.3

Existe un punto G en la semirrecta FE tal que el segmento CB es congruente con el segmento FG (figura 2.3), y como el segmento AC es congruente con el segmento DF y el ángulo C es congruente con el ángulo F, por la hipótesis del párrafo anterior, si en los triángulos ABC y DEF, el ángulo BAC es congruente con el ángulo GDF, entonces el segmento DG es igual al segmento AB, por lo cual los puntos G y E son

iguales; así CB es congruente con FE; por tanto, los triángulos ABC y DEF también lo son, y si esto es así, entonces el ángulo B es congruente con el ángulo E, y como el ángulo A es congruente con el ángulo D (por hipótesis) y el segmento AB es congruente con el segmento DE, hemos demostrado que el valor de verdad del criterio ángulo-lado-ángulo es consecuencia lógica del valor de verdad del criterio lado-ángulo-lado.

Pero el valor de verdad del criterio lado-ángulo-lado también determina el criterio ángulo-lado-ángulo como veremos enseguida.

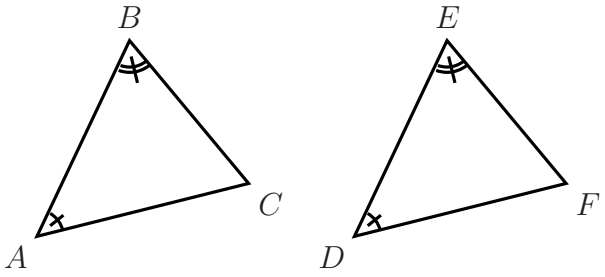


Figura 2.4

Consideremos los mismos dos triángulos ABC y DEF, tales que el ángulo A sea congruente con el ángulo D, el ángulo B congruente con el ángulo E y el segmento AB congruente con el segmento DE, como se muestra en la figura 2.4.

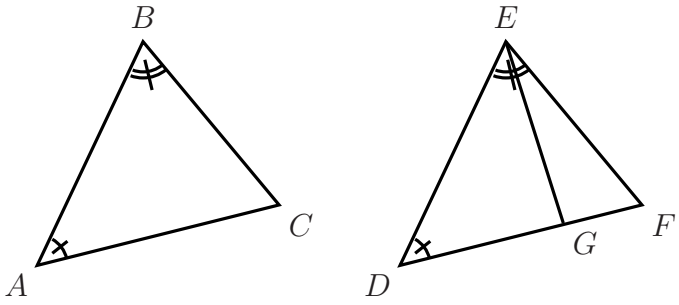


Figura 2.5

De manera similar a la demostración anterior, consideramos un punto G en la semirrecta DF (figura 2.5), de tal manera que el segmento AC sea congruente con el segmento DG, de tal forma que al estudiar

los triángulos ABC y DEG se tiene, por hipótesis, que el ángulo B es congruente con el ángulo GED; de donde se deduce que el punto G es el mismo punto F, y los triángulos ABC y DFE son congruentes. Por tanto, BC es congruente con EF y, así, como el segmento AB es congruente con el segmento DE, y el ángulo B es congruente con el ángulo E, se tiene el criterio lado-ángulo-lado como consecuencia lógica del criterio ángulo-lado-ángulo. □

En este ejemplo, se nota una diferencia respecto al ejemplo anterior. Aquí se observa que no siempre demostrar que dos proposiciones son equivalentes se hace de manera directa; algunas veces se requiere recurrir a ideas un poco más elaboradas.

Ejercicio

Demuestre que cada par de las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. *Un paralelogramo es un rombo y las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí.*

b. *Un paralelogramo es un rombo y cada diagonal de un paralelogramo biseca a un par de ángulos opuestos.*

c. *Los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y el cuadrilátero es un paralelogramo.*

En ocasiones, tenemos proposiciones que parecen ser lógicamente equivalentes, pero no lo son; por ejemplo,

I. Las proposiciones

   a. El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF, y

   b. Los ángulos ABC, BCA y CAB son congruentes con los ángulos DEF, EFD y FDE, respectivamente.

no son equivalentes. La proposición b es consecuencia lógica de la proposición a, pero no al contrario; podemos tener tres ángulos congruentes dos a dos, pero los triángulos no necesariamente deben ser congruentes.

II. Dadas las proposiciones

a. Los lados de un polígono A son respectivamente congruentes con los lados del polígono B, y

b. Los ángulos internos de un polígono A son respectivamente congruentes con los ángulos del polígono B.

la primera proposición implica la segunda, pero no al contrario; considérense, en particular, dos rectángulos que no sean cuadrados.

Resulta más asombroso que existan proposiciones equivalentes en las cuales no hay relación entre el antecedente y el consecuente. Por ejemplo,

III. "Washington es la capital de Estados Unidos" y "el autor de la *Crítica de la razón pura* es Inmanuel Kant" son proposiciones equivalentes.

IV. "2 es impar" y "el avestruz es un reptil", también son lo mismo, desde el punto de vista lógico.

¡Sorprendente, pero lógicamente cierto!

2.1.3.1. La equivalencia lógica y las definiciones en matemáticas

Decir "un triángulo es equilátero" equivale a decir que "un triángulo tiene todos sus lados de igual longitud"; es decir, podemos remplazar la primera expresión por la segunda, pues la primera solo contiene un *nombre* que resume la información dada en la segunda; de esta manera, el valor de verdad de la segunda proposición determina la veracidad de la primera, y viceversa. De manera similar:

a. "Un paralelogramo es un rectángulo" es lo mismo que decir "un paralelogramo tiene sus cuatro ángulos rectos".

b. "a y b son números naturales tales que $a \leq b$", es equivalente a "existe $c \in N$ tal que $a + c = b$".

c. "Dos triángulos ABC y DEF son congruentes", es lo mismo que decir "existe una correspondencia entre sus vértices de tal forma que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes"; simbólicamente,

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF},\ \overline{AC} \cong \overline{DF},$$

$$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E \text{ y } \angle C \cong \angle F.$$

Como se puede ver en los anteriores ejemplos, ninguno aporta nuevas relaciones entre una proposición y otra; lo que se introduce es un *nuevo término o nueva notación* a un determinado contenido; esta es la forma más común de hacer una *definición*. Construimos un objeto, o una relación entre objetos, en un lenguaje determinado y le ponemos un nombre.

2.1.4. Los conectivos lógicos

Hemos formulado algunas formas válidas de razonamiento construyendo proposiciones a partir de otras, usando la negación, la implicación, la disyunción, la conjunción y la equivalencia; pero existen otras, por ejemplo la proposición "4 ni es primo, ni es impar" la podemos simbolizar como

$$p \downarrow q$$

si esta representa

$$(p \downarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q),$$

y por la ley de De Morgan para la conjunción

$$(p \downarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q).$$

Análogamente podemos introducir símbolos para cada una de las combinaciones de dos proposiciones, pero todas ellas solo pueden tener 16 posibilidades, que podemos organizar en tablas de la siguiente forma[8]:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 2.1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 2.2

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 2.3

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Tabla 2.4

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tabla 2.5

$\leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

Tabla 2.6

$-\bullet$	0	1
0	0	0
1	1	0

Tabla 2.7

$\bullet-$	0	1
0	0	1
1	0	0

Tabla 2.8

[8]Un trabajo detallado sobre estos conectores se encuentra en Luque, Jiménez y Ángel (2013). Un estudio alternativo se presenta en: Oostra (2005).

$\otimes$	0	1
0	1	1
1	0	0

Tabla 2.9

$*$	0	1
0	1	0
1	1	0

Tabla 2.10

π_1	0	1
0	0	0
1	1	1

Tabla 2.11

π_2	0	1
0	0	1
1	0	1

Tabla 2.12

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

Tabla 2.13

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

Tabla 2.14

$\top$	0	1
0	1	1
1	1	1

Tabla 2.15

$\bot$	0	1
0	0	0
1	0	0

Tabla 2.16

Y podemos tratarlas todas como operaciones lógicas o conectivos lógicos; la operación correspondiente a $\leftarrow$, la llamamos *implicación recíproca* y corresponde con

$$(p \leftarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p).$$

La operación correspondiente a $\mid$, la llamamos *barra de Sheffer* y corresponde con

$$p \mid q \leftrightarrow \neg(p \wedge q).$$

La correspondiente a $\downarrow$, la llamamos *functor de Peirce* y corresponde con

$$(p \downarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q).$$

La correspondiente a $-\bullet$, la llamamos *diferencia* y corresponde con

$$(p - \bullet\ q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

La correspondiente a $\bullet -$, la llamamos *diferencia recíproca* y corresponde con

$$(p \bullet - q) \leftrightarrow (q - \bullet\ p).$$

La correspondiente a π_1, la llamamos *primera proyección* y corresponde con

$$(p\ \pi_1\ q) \leftrightarrow p.$$

La correspondiente a π_2, la llamamos *segunda proyección* y corresponde con

$$(p\ \pi_2\ q) \leftrightarrow q.$$

La correspondiente a $\otimes$, la llamamos *negación de la primera proyección* y corresponde con

$$(p \otimes q) \leftrightarrow \neg p.$$

La correspondiente a $*$, la llamamos *negación de la segunda proyección* y corresponde con

$$(p * q) \leftrightarrow \neg q.$$

Una razón para utilizar solo los conectivos habituales es que todos los conectivos enunciados podemos expresarlos en términos de $\neg$ y $\wedge$, o de $\neg$ y $\vee$, o de solo $\downarrow$, o solo $|$, por ejemplo:

$x \vee y = \neg((\neg x) \wedge (\neg y))$
$x \rightarrow y = \neg(x \wedge (\neg y))$
$x \veebar y = (\neg((\neg x) \wedge (\neg y))) \wedge (\neg(x \wedge y))$
$x \leftrightarrow y = \neg((\neg((\neg x) \wedge (\neg y))) \wedge (\neg(x \wedge y)))$
$x \mid y = \neg(x \wedge y)$
$x \downarrow y = (\neg x) \wedge (\neg y)$
$x \leftarrow y = \neg((\neg x) \wedge y)$
$x - \bullet\ y = x \wedge (\neg y)$
$x \bullet - \ y = (\neg x) \wedge y$
$x\ \pi_1\ y = x$
$x\ \pi_2\ y = y$
$x \otimes y = \neg x$
$x * y = \neg y$
$x \top y = \neg((\neg x) \wedge x)$
$x \perp y = x \wedge (\neg x)$

2.1.5. Predicados

En las proposiciones que tratamos en las secciones anteriores no tuvimos en cuenta su significado en algún contexto, solo nos interesamos en sus valores de verdad, veremos ahora, someramente, formas de razonamiento que incluyen conjuntos de objetos sobre los que hacemos afirmaciones que describen sus propiedades, los llamaremos *universos de discurso*.

Por ejemplo, si X es el conjunto de los triángulos en un plano, de ellos podemos afirmar que son equiláteros, o rectángulos, o isósceles, etc., algunos de ellos cumplirán la propiedad y otros no. Estos calificativos, que separan de todos los triángulos del plano aquellos que cumplen la propiedad y aquellos

que no, los llamaremos *predicados* sobre X y los notaremos $P(x)$ donde x es un elemento arbitrario de X.

Usaremos letras minúsculas para representar a los elementos de X, a los objetos de X que tienen *nombre propio* los llamaremos *constantes* y a los nombres genéricos o comunes los llamaremos variables; por ejemplo en el conjunto de los números reales 5 es una constante.

Una expresión que contenga variables o constantes de manera que al sustituir las variables por elementos del universo de discurso no obtengamos una proposición las llamamos (Wolf, 1997) *términos*.

Si reemplazamos una variable x del predicado $P(x)$ por un elemento particular del universo X conseguimos una proposición.

Otra forma de conseguir proposiciones a partir de predicados es usar cuantificadores; por ejemplo en el conjunto de los números naturales N, el predicado "x es par o impar" es verdadero *para todo* x en N. Las expresiones *para todo*, *para cada*, son formas del *cuantificador universal* que representamos con el símbolo $\forall$.

Las expresiones *existe algún* o *para algún*, son formas del *cuantificador existencial* que representamos con el símbolo $\exists$.

Así como en la lógica de proposiciones necesitamos paréntesis para determinar el significado de una proposición compuesta, en la lógica de predicados requerimos además establecer la forma en que un cuantificador afecta a un predicado, o *el alcance de un cuantificador*; por ejemplo,

$$[(\forall x \in X)(P(x))] \rightarrow (Q(x))$$

el símbolo x tiene dos usos diferentes, en $(\forall x \in X)(P(x))$ se refiere a un elemento cualquiera del universo X, y por tanto aparece cuantificada, pero en $Q(x)$ no está explícito si es un elemento particular o uno arbitrario de X.

Los dos cuantificadores mencionados están vinculados por la negación, en el sentido de que para negar una proposición que incluya el cuantificador universal en la forma

$$(\forall x \in X)(P(x))$$

obtenemos que no todo $x \in X$ cumple un predicado $P(x)$ y esto significa que existe un $x \in X$ que no cumple $P(x)$, en símbolos

$$\neg[(\forall x \in X)(P(x))] \leftrightarrow (\exists x \in X)(\neg P(x))$$

análogamente

$$\neg[(\exists x \in X)(P(x))] \leftrightarrow (\forall x \in X)(\neg P(x)).$$

Las reglas de inferencia para el cálculo de predicados son análogas a las del cálculo de proposiciones.

Ejercicios

1. *Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones:*

   a. *Para todo número real,* $x^2 > 0$.

   b. *Si el jefe no está presente, algunos empleados no hacen su trabajo.*

   c. *Existe un número natural* x*, tal que* $x + 3 = 2$.

2. *Para las siguientes premisas, encuentre una conclusión derivada de una argumentación válida con el uso de todas las premisas:*

   a. *Ningún estudiante es perezoso; Diana es escritora; todos los escritores son perezosos.*

   b. *Todos los conductores tienen pase; los médicos tienen casa; Luis es conductor; ningún conductor tiene casa.*

3. *Demuestre la validez de las siguientes argumentaciones. De no serlo, plantee la conclusión que haga válida la argumentación:*

   a. *Algunos colombianos son violentos.*
   Todos los hombres son violentos.
   Entonces, algunos colombianos son hombres.

   b. *Todos los artistas son pobres.*
   Para ser maestro, se debe ser profesional.
   Algunos jóvenes son artistas.
   Ningún profesional es pobre.
   Entonces, algunos jóvenes no son maestros.

   c. *Todos los escritores son interesantes.*
   Algunos profesionales venden seguros.
   Algunos políticos son escritores.
   Solo las personas que no son interesantes venden seguros.
   Entonces, algunos profesionales no son políticos.

2.2. La igualdad en teoría de conjuntos

Emplearemos las palabras *conjunto* (que notamos con letras mayúsculas) y *pertenece* (que notamos con el símbolo $\in$), sin dar una definición de estas; todo lo que necesitamos saber es que la expresión "$x \in A$" significa "x es un elemento del conjunto A". Es decir que, dado un elemento y un conjunto, debemos poder establecer si el elemento pertenece o no al conjunto.

Es necesario comenzar con un conjunto de referencia[9], llamémoslo X, en él construiremos otros conjuntos. Inicialmente, cuando enunciamos alguna propiedad p sobre los elementos del conjunto X (un predicado sobre X), por el axioma de especificación (Halmos, 1971, pp. 13-16) se forman dos conjuntos: el conjunto A de elementos que cumplan una propiedad dada p:

$$A = \{x \in X : p(x)\}$$

y el conjunto de elementos que no cumplan la propiedad p; es decir, los elementos de X que no están en A. Este se denomina el *complemento* de A y se nota A^c:

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Si ningún elemento de X cumple la propiedad p, el conjunto formado lo llamamos *conjunto vacío*, que se nota $\varnothing$[10].

2.2.1. Subconjuntos y el conjunto de partes

Sea X un conjunto, decimos que un conjunto A de X está contenido en un conjunto B de X o que A es subconjunto de B y lo notamos $A \subseteq B$ si y solo si $(\forall x \in X)(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A lo llamamos el *conjunto*[11] *de partes de* A y lo notamos $\wp(A)$, en símbolos $\wp(A) = \{B \subseteq X : B \subseteq A\}$.

[9]Si no se asume, de partida, la existencia de un conjunto universal, pueden aparecer contradicciones al suponer, por ejemplo, la existencia de un conjunto que tenga a todos los conjuntos como elementos; ello conduce a la conocida paradoja de Russell.

[10]Este símbolo fue introducido por los Bourbaki; en particular por André Weil, muy seguramente en honor a Thoralf Skolem, matemático noruego que contribuyó a la axiomatización de la teoría de conjuntos, pues este símbolo corresponde a una de las vocales del alfabeto noruego.

[11]La existencia del conjunto de partes de un conjunto está justificado por el axioma del conjunto potencia dentro de la axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem (1908).

2.2.2. Igualdad de conjuntos

Sea X un conjunto, dos subconjuntos A y B de X son iguales, $A = B$, si y solo si $(\forall x \in X)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Para demostrar que $A = B$ debemos probar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ es decir que debemos tomar un elemento arbitrario de A y por medio de razonamientos válidos, demostrar que ese elemento se encuentra en B, y viceversa tomar un elemento cualquiera de B y probar que está en A, por ejemplo si queremos demostrar que $(A^c)^c = A$, debemos probar primero que $(A^c)^c \subseteq A$; para ello, sea $x \in (A^c)^c$ entonces $x \notin A^c$ o sea que $x \in A$ (lo que no está en el complemento de A, está en A). Y para probar que $A \subseteq (A^c)^c$ elegimos un elemento $x \in A$, fijo pero arbitrario, entonces $x \notin A^c$ y por lo tanto $x \in (A^c)^c$.

2.2.3. Operaciones en $\wp(X)$

Sea X un conjunto, para cualquier par de subconjuntos A y B de X, podemos formar otros conjuntos combinando los elementos de A y de B, utilizando los conectivos de la lógica; por ejemplo, si tomamos los elementos que estén en:

1. A y en B, obtenemos la *intersección* de A y B, que notamos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

   Si $A \cap B = \varnothing$, decimos que A y B son conjuntos *disyuntos*.

2. A o en B, obtenemos la *unión* de A y B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

3. A entonces están en B, obtenemos la *implicación* de A y B:

$$A \to B = \{x : x \in A \to x \in B\}$$

4. A si y sólo si están en B, obtenemos la *doble implicación* de A y B:

$$A \leftrightarrow B = \{x : x \in A \leftrightarrow x \in B\}$$

5. A y no en B, obtenemos la *diferencia* entre A y B:

$$A - B = A - \bullet \ B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

6. A o en B pero no en ambos, obtenemos la *diferencia simétrica* entre A y B:

$$A \,\Delta\, B = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Este último conjunto se puede expresar de otra forma, así:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B),$$

es decir, que un elemento cualquiera debe estar en A y no en B o en B y no en A.

Como vemos en el último ejemplo, cada una de estas operaciones se puede expresar de maneras diversas, por ejemplo:

$$A \to B = A^c \cup B = (A - B)^c$$

Demostremos una de las tres afirmaciones contenidas en este par de igualdades:

$$A^c \cup B = (A - B)^c,$$

debemos probar que $A^c \cup B \subseteq (A - B)^c$ y $(A - B)^c \subseteq A^c \cup B$.

Demostremos la primera contenencia, para ello, elegimos un elemento arbitrario $x \in A^c \cup B$ por la definición de unión

$$x \in A^c \quad \vee \quad x \in B$$

esto significa que

$$x \notin A \quad \vee \quad x \in B$$

es decir, que la afirmación

$$x \in A \quad \wedge \quad x \notin B$$

es falsa, o sea que su negación

$$\neg(x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)$$

es verdadera, y como la afirmación en el interior del paréntesis define $A - B$ concluimos que

$$x \notin (A - B)$$

y por tanto

$$x \in (A - B)^c$$

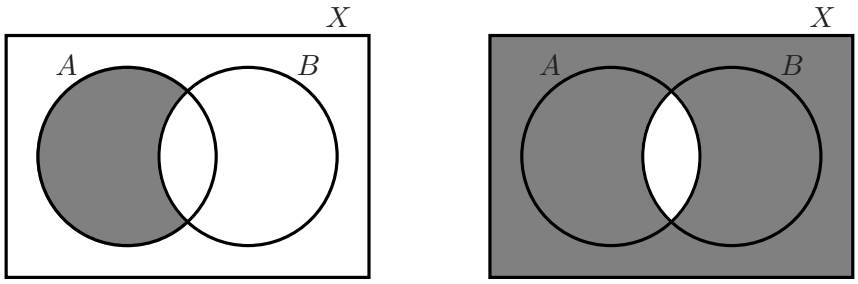
lo que significa que

$$A^c \cup B \subseteq (A - B)^c.$$

Como las operaciones usuales de unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica entre los conjuntos A y B corresponden con las operaciones definidas por los conectivos $\vee$, $\wedge$, $-\bullet$ y $\veebar$ respectivamente; de la misma forma podemos construir nuevos conjuntos usando los otros conectivos lógicos así:

$$A \copyright B = \{x \in X : x \in A \copyright x \in B\}.$$

Gráficamente representamos, con los conocidos diagramas de Venn-Euler[12], al universo X como un rectángulo y dentro de él representamos los subconjuntos usuales con círculos u otras figuras geométricas, marcando las zonas correspondientes al valor de verdad 1 del conectivo correspondiente. Por ejemplo:



$A - B$ $\qquad$ $A \mid B$

Figura 2.6

Ejemplo

Si $X = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, c, e\}$, tenemos que

$A \cup B = \{a, b, c, e\} = B \cup A$

$A \veebar B = \{b, e\} = B \veebar A$

$A \leftarrow B = \{a, b, c, d\} \neq B \leftarrow A = \{a, c, d, e\}$

$A \mid B = \{d, b, e\} = B \mid A$

$A \downarrow B = \{d\} = B \downarrow A$

$A \ \pi_1 \ B = \{a, c, b\} \neq B \ \pi_1 \ A = \{a, c, e\}$

[12] En honor del matemático John Venn (1834-1882), quien perfeccionó la idea de Euler (1707-1783).

Ejercicios

1. *Demuestre que* $(A - B)^c \subseteq A^c \cup B$.

2. *¿Cómo se caracteriza el conjunto de los elementos que no están ni en* A *ni en* B*?*

3. *¿Qué relación existe entre la operación implicación y la operación diferencia de conjuntos?*

4. *¿Qué relación existe entre la operación doble implicación y la operación diferencia simétrica de conjuntos?*

5. *Escriba otras alternativas para la formación de conjuntos con otros conectivos lógicos o mezcla de ellos, como por ejemplo: los elementos que, si están en* A *no estén en* B*, y si están en* B *no estén en* A*, etc.*

6. *Exprese, si es posible, los resultados del ejercicio 5 en términos de los aquí dados; si no es posible, elija algunos como base y exprese los demás en términos de los elegidos.*

7. *Dé algunas condiciones sobre* A *y* B*; por ejemplo:* $A \subset B$*;* $A \cap B = \varnothing$*;* $B = A$*, etc. Realice, entre ellos, las operaciones mencionadas en esta sección; determine algunas regularidades en cada caso.*

8. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
   c. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   d. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   e. $A \cup \varnothing = A$
   f. $A \cap \varnothing = \varnothing$
   g. $A \cup X = X$
   h. $A \cap X = A$
   i. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   j. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

k. $A \cup A^c = X$

l. $A \cap A^c = \varnothing$

m. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

n. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ñ. $A \cup A = A \cap A = A$

o. $(A^c)^c = A$

p. $A - B = A \cap B^c$

q. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

r. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $(A \cup B) - B = A$

s. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

donde A y B son subconjuntos de un conjunto universal X.

2.2.4. Generalización de la noción de contenencia entre conjuntos

Dados X un conjunto no vacío y A, B subconjuntos de X, decimos (Luque, Jiménez y Fonseca, 2009a) que *A está contenido en B según el conectivo* © o que *A es un subconjunto de B según el conectivo* © y lo notamos

$$A \subseteq_{©} B, \text{ si y solo si } (\forall x \in X)(x \in A \ © \ x \in B).$$

La contenencia usual corresponde con la contenencia según el conectivo $\rightarrow$, en cuyo caso no escribiremos el conectivo, la igualdad de conjuntos corresponde con la contenencia según el conectivo $\leftrightarrow$. La afirmación $A \subseteq_{©} B$ es equivalente a $A \ © \ B = X$.

Con la modificación de la definición de contenencia, también se obtiene un cambio en la definición del conjunto de todos los conjuntos que están contenidos según el conectivo © en A, al cual llamaremos *conjunto de partes según el conectivo* ©, que notamos $\wp_{©}(A)$. El conjunto de partes usual corresponde con el del conectivo $\rightarrow$ y tampoco lo mencionaremos.

$$\wp_{©}(A) = \{B \subseteq X : B \subseteq_{©} A\}.$$

Ejemplo

Según el conectivo $\veebar$: en un conjunto de referencia X, si A, B son subconjuntos de X, $(A \subseteq_{\veebar} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \veebar x \in B))$. $A \subseteq_{\veebar} B$ cuando $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$ o sea que $\{A, B\}$ forma un *cubrimiento disyunto*[13] de X, una representación gráfica corresponde a la figura 2.7.

En particular si $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

i) $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$. Como $A \veebar B = \{a, b, c, d, e\} = X$ entonces $A \subseteq_{\veebar} B$, también tenemos que $A \vee B = X$, luego $A \subseteq_{\veebar} B$.

ii) $A = \{a, b, c\}, B = \{a, c, d, e\}$. Como $A \vee B = X$ entonces $A \subseteq_{\veebar} B$, sin embargo tenemos que $A \vee B = \{b, d, e\} \neq X$, luego $A \not\subseteq_{\veebar} B$.

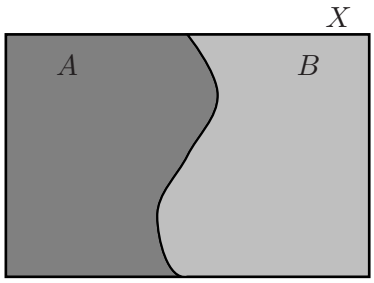


Figura 2.7

Ejercicio

Desarrolle otros ejemplos utilizando otros conectivos lógicos para definir la contenencia de conjuntos en un conjunto de referencia X.

2.2.5. Productos cartesianos

Sea X un conjunto y A un subconjunto de dos elementos de X, digamos $A = \{a, c\}$, si deseamos ordenar estos dos elementos de manera que el primero sea c y el segundo sea a, esto podemos hacerlo (Halmos, 1971, pp. 35-39)

[13] Si A y B son ambos distintos de vacío, $\{A, B\}$ es una partición de X.

formando los conjuntos de los elementos que anteceden o son iguales en el orden deseado a cada elemento, en la forma $\{c\}$ y $\{a, c\}$. Y los reunimos en un conjunto $\{\{c\}, \{a, c\}\}$, para decir que a c no le antecede algún elemento y a a le antecede c.

Si $X = \{a, c, d\}$ y queremos expresar el orden c, d, a lo hacemos con el conjunto

$$\{\{c\}, \{d, c\}, \{a, d, c\}\}$$

Un detalle importante es que si damos el conjunto $\{\{c\}, \{d, c\}, \{a, d, c\}\}$, podemos recuperar el orden establecido. Por supuesto que pudimos elegir a los elementos que siguen en lugar de los que anteceden, pero la idea es la misma.

Esta idea es la utilizada en teoría de conjuntos para construir lo que llamamos una *pareja ordenada*. Dados dos elementos a y b de un conjunto X, definimos la pareja ordenada (a, b) como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Como $\{a\}$, $\{a, b\} \in \wp(X)$ entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(X))$.

De esta definición puede demostrarse (Muñoz, 2002, p. 65) que si a, b, c y d son elementos de X, dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales, si y solo si $a = c$ y $b = d$. La pareja (a, b) no es igual a la pareja (b, a), a menos de que $a = b$.

Definimos el producto cartesiano

$$X \times X = \{(a, b) : a, b \in X\}$$

Notemos que $X \times X$ no es subconjunto[14] de X.

Para dos subconjuntos cualesquiera A y B de X, definimos (Luque, Donado y Páez, 1998, pp. 15-24) el *producto cartesiano de A con B, según el conectivo lógico* ©[15] al conjunto:

$$A \times_{©} B = \{(a, b) : a \in A \text{ © } b \in B\}.$$

[14] A pesar de que $X \times X$ no es una parte del universo, su existencia en la teoría está garantizada por el axioma que afirma que el conjunto de partes de un conjunto es también un conjunto, y $X \times X$ es un subconjunto de $\wp(\wp(X))$.

[15] El símbolo © representa alguno de los 16 conectivos posibles en la lógica usual, correspondientes a las 16 operaciones que se pueden efectuar con los dos valores 0 y 1.

Por ejemplo, el producto cartesiano de A con B,

1. Según el conectivo lógico $\wedge$ (parte sombreada de la figura 2.8):

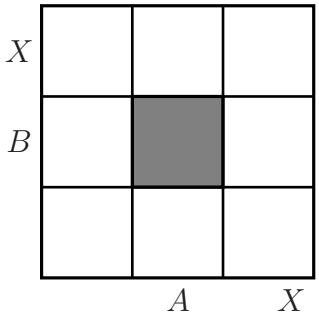


Figura 2.8

2. Según el conectivo $\vee$ (parte sombreada de la figura 2.9):

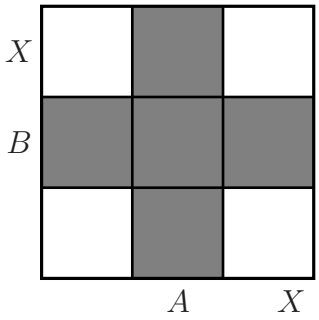


Figura 2.9

3. Según el conectivo $\rightarrow$ (parte sombreada de la figura 2.10):

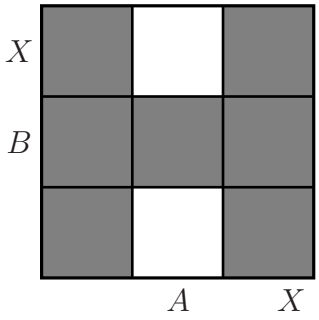


Figura 2.10

4. Según el conectivo $\leftrightarrow$:

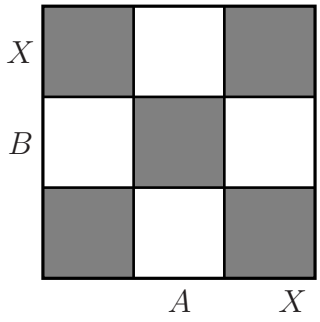


Figura 2.11

Este último producto corresponde al producto fibrado (*pullback*) (Adámek, 1983, p. 158) entre las funciones características[16] $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ de A y B, respectivamente.

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ el conjunto de referencia y $A = \{a\}$ y $B = \{1, 2\}$, el producto $A \times_{\vee} B$ está formado por todas las parejas ordenadas (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir $(a, 1)$ y $(a, 2)$; con $a \in A$ y $b \notin B$, es decir (a, a), (a, b), (a, c) y $(a, 3)$; y con $a \notin A$ y $b \in B$, es decir $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$; o sea

$$A \times_{\vee} B = \{(a,1),(a,2),(a,a),(a,b),(a,c),(a,3),(b,1),(b,2),(c,1),$$
$$(c,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

Usaremos el producto según el conectivo $\wedge$, como es usual, por estar contenido en los demás que mencionamos y omitiremos el subíndice.

Para el producto cartesiano usual $A \times B$ se cumplen algunas propiedades como:

a. $A \times B = \varnothing \leftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$

[16] La función característica $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} : X \to \{0, 1\}$ asigna a un elemento x de A el número 1 si $x \in A$, y el número 0 si $x \notin A$; para cada subconjunto A de X, el conjunto de todas las funciones características de un conjunto X es equivalente al conjunto de sus partes.

b. $A \subseteq B \rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

c. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

d. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

e. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

f. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

g. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

h. En general $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$

Demostremos el numeral f.

Prueba: Sea $(x, y) \in A \times (B - C)$ esto significa que $(x \in A) \wedge (y \in B - C)$ o sea que $(x \in A) \wedge ((y \in B) \wedge (y \notin C))$ lo que equivale a $((x \in A) \wedge (y \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (y \notin C))$ y esto dice que $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C$ y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$. La recíproca se demuestra de manera similar. □

Ejercicios

1. *Elija como conjunto universal* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. *Calcule los productos cartesianos de* $A = \{0, 1, 3\}$ *con* $B = \{3, 4\}$, *según los conectivos lógicos mencionados.*

2. *Note que en el caso del conectivo lógico* $\wedge$, $A \times B$ *es diferente de* $B \times A$. *¿Qué sucede con los otros conectivos?*

La noción de pareja ordenada se puede extender a cualquier número de conjuntos (Muñoz, 2002, p. 71) $A_1, \ldots, A_n$, para obtener triplas, cuádruplas y en general n-uplas ordenadas; así:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$$

Si el número de conjuntos es infinito numerable, el resultado es un conjunto de sucesiones de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, donde a_i pertenece al conjunto A_i para todo número natural i.

2.2.6. Relaciones de un conjunto A en un conjunto B

Para establecer una relación binaria entre un conjunto A y un conjunto B debemos dar criterios de manera que dados dos elementos, x en A y y en B, el criterio permite decir si están relacionados. Como en general no nos interesa la particularidad de los criterios, basta con escribir a los dos elementos, teniendo cuidado con el orden en que se mencionan, el primero en A y el segundo en B, esto es en forma de una pareja ordenada (x, y) en $A \times B$. Un subconjunto de parejas ordenadas de $A \times B$ describe una *relación de A en B*. Si $A = B$ el conjunto de parejas define una *relación en A*.

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B, es un elemento del conjunto de partes $\wp(A \times B)$; la colección de todas las relaciones de A en B es precisamente $\wp(A \times B)$.

En cada relación de A en B hay tres informaciones que la determinan: el conjunto fuente A, el conjunto meta B y el conjunto de parejas ordenadas, podemos tener dos conjuntos de parejas con símbolos iguales en relaciones diferentes, por ejemplo

$$R = \{(1, 3), (5, 1), (4, 0)\}$$

define relaciones diferentes si los símbolos 0, 1, 3, 4 y 5 representan números naturales o enteros, o racionales o reales.

2.2.6.1. Dominio y rango de una relación

Si S es una relación de un conjunto A en un conjunto B, el *dominio* de S, notado, $D(S)$, lo definimos por

$$D(S) = \{x \in A : (\exists y \in B)((x, y) \in S)\}$$

De forma similar, el *rango* o *recorrido* de S, notado $R(S)$, lo definimos por

$$R(S) = \{y \in B : (\exists x \in A)((x, y) \in S)\}$$

Si $(x, y) \in S$, decimos que x está relacionado con y mediante S, y algunas veces lo notamos por xSy.

Por ser conjuntos, las relaciones también cumplen el axioma de especificación, esto es que en $X \times X$ como universo cada predicado con dos variables libres x e y, que notamos $P(x, y)$ determina una relación, si $x \in A$ y $y \in B$, el predicado P genera el conjunto de parejas ordenadas $R = \{(x, y) \in A \times B :$

$P(x, y)\}$; y cada relación de A en B puede ser descrita con un predicado en dos variables sobre $A \times B$.

El grafo de una relación R entre A y B es el conjunto de las parejas ordenadas de la relación.

2.2.6.2. La relación recíproca de una relación

Si S es una relación de A en B, la relación de B en A, formada por las parejas ordenadas (y, x), con $(x, y) \in S$ la llamamos *relación recíproca*[17] de S y la notamos $S^!$, en símbolos

$$S^! = \{(y, x) : (x, y) \in S\}$$

El número de relaciones binarias de un conjunto A con n elementos en un conjunto B con m elementos es el número de subconjuntos del producto cartesiano $A \times B$ o sea $2^{n \times m}$, en particular el número de relaciones binarias en un conjunto con n elementos es 2^{n^2}.

Ejemplos

1. En cualquier conjunto X, la *relación vacía* $\varnothing$ como subconjunto de $X \times X$.

2. Dados los conjuntos A de los hombres y B de las mujeres, se define la relación
$$R = \{(a, b) \in A \times B : a \text{ es el esposo de } b\}$$

3. En cualquier conjunto X, la *relación idéntica* o *diagonal* de X notada
$$\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b\}$ y $R = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$. Luego,
$$R^! = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

[17] Aunque el uso de la palabra inversa y la notación S^{-1} para esta relación es frecuente, nos parece inapropiada, puesto que en general S^{-1} no es inversa de S en el sentido algebraico que al operar las dos (en este caso la operación es la composición de relaciones) nos dé como resultado una relación idéntica.

5. En el conjunto de los números naturales N definimos la relación

$$R = \{(a, b) \in N \times N : (\exists c \in N)(ac = b)\}$$

En consecuencia, $R^{!} = \{(b, a) \in N \times N : (\exists c \in N)(ac = b)\}$.

Ejercicios

1. *Proponga ejemplos de relaciones en el conjunto de los números naturales o en ámbitos como la geometría. Para cada uno de estos ejemplos encuentre la recíproca de la relación.*

2. *Elija como conjunto universal* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. *Defina realciones de* $A = \{0, 1, 3\}$ *en* $B = \{3, 4\}$, *para tres de los productos cartesianos definidos en la sección anterior, dibuje el grafo y encuentre la recíproca de la relación en cada caso.*

La definición de relación está basada en la definición de contenencia y en la definición de producto cartesiano; pero como hemos modificado ambas definiciones, dependiendo de los conectivos lógicos, podemos generalizar también la definición de *relación según los conectivos lógicos* $©_1$ *y* $©_2$. Dados A y B subconjuntos de X, *una relación* $T_{(©_1,©_2)}$ *según los conectivos lógicos* $©_1$ *y* $©_2$, de A en B es un subconjunto según el conectivo $©_1$ del producto cartesiano $A \times_{©_2} B$ según el conectivo $©_2$. O sea, $T_{(©_1,©_2)} \subseteq_{©_1} A \times_{©_2} B$; o más específicamente

$$(\forall (x, y) \in X \times X)((x, y) \in T_{(©_1,©_2)}\ ©_1\ (x, y) \in A \times_{©_2} B).$$

Ejercicio

Tomando el conjunto universal X *y los conjuntos* A *y* B *del ejercicio anterior, proponga y desarrolle ejemplos de relaciones usando diferentes conectores para la definición de contenencia y producto cartesiano.*

2.2.6.3. Composición de relaciones

La operación más conocida entre relaciones en un conjunto A es la *composición*, este es uno de los mecanismos más usados de construcción de relaciones. Sea X un conjunto, A, B, C subconjuntos de X, R_1 una relación de A en B y R_2 una relación de B en C, la composición

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in A \times C : (\exists y \in B)((x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2)\}$$

Notemos que en la notación para la composición de las relaciones R_1 y R_2 las escribimos en el orden contrario[18] $R_2 \circ R_1$.

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3, a, b, c, d, x, y, z\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{x, y, z\}$, R_1 la relación de A en B,

$$R_1 = \{(1, c), (1, d), (2, a), (3, b), (3, c)\}$$

y R_2 la relación de B en C,

$$R_2 = \{(a, z), (b, y), (b, z), (d, x)\}$$

entonces para realizar la composición $R_2 \circ R_1$ por cada pareja (p, q) de R_1 buscamos una pareja en R_2 cuya primera componente sea q, por ejemplo (q, s) entonces la pareja (p, s) está en la relación compuesta; en nuestro caso para la pareja $(1, c)$ en R_1 no existe una pareja en R_2 cuya primera componente sea c, entonces la ignoramos; para la pareja $(1, d)$ en R_1 si existe la pareja (d, x) en R_2, y por lo tanto la pareja $(1, x)$ está en la compuesta, y así encontramos que

$$R_2 \circ R_1 = \{(1, x), (2, z), (3, y), (3, z)\}.$$

[18]Esta notación se elige de forma que cuando las relaciones sean funciones, la composición sea $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2.2.6.3.1. Propiedades de la composición de relaciones

1. La composición de relaciones es asociativa.
2. La relación recíproca de $(S \circ R)$ es $(S \circ R)^! = R^! \circ S^!$.
3. El conjunto de las relaciones binarias en un conjunto X con la composición de relaciones es asociativa y tiene como elemento idéntico a la relación diagonal en X.

2.2.6.3.2. Otras composiciones cambiando conectivos

Como en la definición de composición de relaciones aparece un conectivo lógico, podemos sustituirlo por otro cualquiera © para obtener otras formas de composición de relaciones (Luque, Jiménez y Fonseca, 2009a), dejamos al lector interesado la exploración de algunas de estas posibilidades: sea X un conjunto, A, B, C subconjuntos de X, R_1 una relación de A en B y R_2 una relación de B en C, la composición

$$R_2 \circ_{©} R_1 = \{(x, z) \in A \times C : (\exists y \in B)((x, y) \in R_1 \ © \ (y, z) \in R_2)\}.$$

Notemos que usamos relaciones usuales, que también pueden cambiarse por relaciones según los conectivos $©_1$ y $©_2$.

2.2.7. Funciones

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una relación de A en B, tal que todo elemento de A está como primera componente en alguna pareja ordenada de f, pero solamente en una.

Es decir, que si la pareja $(x, y) \in f$ y la pareja $(x, z) \in f$, debe tenerse que $y = z$.

El conjunto de todas las funciones que se pueden definir de un conjunto A en otro conjunto B lo notamos B^A.

2.2.7.1. Funciones inyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *inyectiva o uno a uno* si todo elemento de B que está en alguna pareja de la función, está solamente una vez; es decir, que si la pareja $(x, y) \in f$ y la pareja $(z, y) \in f$, debe tenerse que $x = z$.

Dicho de otra manera: si para todo x, y elementos de A se cumple que $f(x) = f(y)$, entonces debe tenerse que $x = y$.

2.2.7.2. Funciones sobreyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *sobreyectiva*, o simplemente *sobre*, si todo elemento de B está en alguna pareja de la función; es decir, que para todo elemento y de B exista un elemento x de A tal que la pareja $(x, y) \in f$.

2.2.7.3. Funciones biyectivas

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una función *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

2.2.7.4. Operaciones binarias sobre un conjunto

Una *operación binaria interna* en un conjunto A es una función

$$* : A \times A \to A$$

Ejercicio

Usando como conectivo la doble implicación para definir el producto cartesiano, ejemplifique relaciones, funciones y operaciones entre dos conjuntos.

Capítulo

3 Relaciones de equivalencia y particiones

De un discípulo a su maestro:
"Siempre nos cuentas historias pero nunca nos revelas su significado".
El maestro replicó:
"¿Te gustaría que alguien te ofreciera fruta y la masticara antes de dártela?".

Como hemos dicho, la igualdad estricta entre objetos de la realidad es imposible; y en los ejemplos que hemos estudiado de las matemáticas tampoco encontramos acuerdo, pues aparecen en cada caso características y propiedades particulares; busquemos, entonces, maneras de relacionar objetos que sean lo más parecidos posible a una igualdad. Una opción es elegir relaciones que cumplan las mismas propiedades de una igualdad, que hemos encontrado como comunes en los ejemplos vistos en los dos capítulos anteriores.

3.1. Propiedad reflexiva

Una propiedad que comparten las nociones de igualdad que hemos repasado en los primeros dos capítulos es la reflexiva; precisemos.

Una relación R en un conjunto A es *reflexiva* si para todo $a \in A$ se cumple que $(a, a) \in R$; también es usual escribir $a \,R\, a$; es decir, todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Como es tan importante saber qué es una cosa como saber qué no es, veamos al menos dos formas de que una relación R definida en un conjunto A no sea reflexiva; en el primer caso ninguna pareja $(a, a) \in \mathrm{R}$ o sea que $(\forall a \in \mathrm{A})(\neg((a, a) \in \mathrm{R}))$, a esta propiedad la llamamos *propiedad irreflexiva*. En el segundo caso solo algunas de las parejas (a, a) no están en R o sea $(\exists a \in \mathrm{A})(\neg((a, a) \in \mathrm{R}))$, esta la llamamos *propiedad no reflexiva*.

Algunos resultados generales (Luque, Jiménez y Fonseca, 2009a) sobre estas relaciones son:

Teorema 3.1. Una relación R es reflexiva en A si y solo si su relación recíproca $\mathrm{R}^!$ es reflexiva en A.

Prueba: sea A un conjunto, R una relación reflexiva en A y un elemento arbitrario $x \in \mathrm{A}$. R es reflexiva si y solo si para todo $x \in \mathrm{A}$ se cumple que $(x, x) \in \mathrm{R}$ y como $\mathrm{R}^! = \{(y, x) : (x, y) \in \mathrm{R}\}$, entonces $(x, x) \in \mathrm{R}^!$. □

Teorema 3.2. El complemento de una relación reflexiva es irreflexiva y viceversa.

Teorema 3.3. La composición de dos relaciones reflexiva es reflexiva.

Prueba: sean R_1 y R_2 dos relaciones reflexivas sobre un conjunto A. Para cada $x \in \mathrm{A}$, se cumple que $(x, x) \in \mathrm{R}_1$ y $(x, x) \in \mathrm{R}_2$. Por la definición de la composición de relaciones $(x, x) \in \mathrm{R}_1 \circ \mathrm{R}_2$, (también $(x, x) \in \mathrm{R}_2 \circ \mathrm{R}_1$) lo que significa que $\mathrm{R}_1 \circ \mathrm{R}_2$ (y también $\mathrm{R}_2 \circ \mathrm{R}_1$) es reflexiva. □

Ejemplos

1. En el conjunto vacío la única relación que se puede definir es la *relación vacía* y ella es reflexiva e irreflexiva.

2. En un conjunto unitario $\mathrm{A} = \{0\}$ hay dos relaciones: la relación vacía y $\mathrm{R} = \{(0, 0)\}$, la primera es irreflexiva y la segunda es reflexiva.

3. La *relación idéntica* en un conjunto A, también conocida como la *diagonal* de A: $\Delta_\mathrm{A} = \{(x, x) : x \in \mathrm{A}\}$, es reflexiva, además es la más pequeña relación reflexiva en A, esto es que toda relación que sea reflexiva debe contener a la relación idéntica.

4. En un conjunto con tres elementos $\mathrm{A} = \{a, b, c\}$ podemos formar $2^9 = 512$ relaciones: la relación vacía, 9 relaciones con un elemento, 36 relaciones con dos elementos, las cuales no son reflexivas. De las 84 relaciones con tres elementos, la única reflexiva es la relación idéntica.

5. La relación de igualdad en la axiomática de Peano para los números naturales es reflexiva.

6. En el plano euclidiano las relaciones de congruencia y semejanza de triángulos son reflexivas.

7. En lógica bivalente clásica la relación dada entre dos proposiciones por la doble implicación es reflexiva.

8. Entre humanos la relación *ser hermano de* es reflexiva y la relación *ser padre de* es irreflexiva.

Otra propiedad que comparten las igualdades estudiadas en matemáticas es la propiedad simétrica.

3.2. Propiedad simétrica y similares

Una relación R en un conjunto A es *simétrica*, si y solamente si para todo $a, b \in \mathrm{A}$ tenemos que $(a, b) \in \mathrm{R}$ implica que $(b, a) \in \mathrm{R}$, en símbolos

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \to (y, x) \in \mathrm{R}).$$

De nuevo, consideremos algunas relaciones entre la propiedad simétrica y la negación. Una relación R en un conjunto A es *no simétrica* si existe un $x \in \mathrm{A}$ o $y \in \mathrm{B}$ tales que

$$(x, y) \in \mathrm{R} \wedge \neg((y, x) \in \mathrm{R}).$$

O en forma equivalente

$$(\exists x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} - \bullet\ (y, x) \in \mathrm{R}),$$

donde $-\bullet$ es la diferencia lógica. De la forma lógica de la propiedad simétrica surgen varias opciones de propiedades, que si bien algunas de ellas no son propiedades de una igualdad vale la pena mencionarlas.

3.2.1. Propiedad asimétrica

Una relación R definida sobre un conjunto A, se denomina *asimétrica*, si para todo $x, y \in \mathrm{A}$, tenemos que $(x, y) \in \mathrm{R}$ implica $(y, x) \notin \mathrm{R}$, en símbolos

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \rightarrow \neg((y, x) \in \mathrm{R})).$$

O equivalentemente

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \mid ((y, x) \in \mathrm{R})),$$

donde $\mid$ es la barra de Sheffer.

Podría pensarse que una relación no simétrica es asimétrica, pero no, pues una relación R definida sobre un conjunto A, es *no asimétrica* si

$$\neg(\forall x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \rightarrow \neg((y, x) \in \mathrm{R})).$$

O equivalentemente

$$((\exists x \in \mathrm{A} \vee \exists y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, x) \in \mathrm{R})).$$

3.2.2. Relación antisimétrica estricta

Llamamos *estrictamente antisimétrica* a una relación R en un conjunto A si satisface la condición

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})(\neg((x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, x) \in \mathrm{R}))$$

que se puede expresar como

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})((x, y) \in \mathrm{R} \mid (y, x) \in \mathrm{R}),$$

donde $\mid$ es la barra de Sheffer; y también es equivalente a

$$(\forall x, y \in \mathrm{A})(\neg((x, y) \in \mathrm{R}) \vee \neg((y, x) \in \mathrm{R})),$$

esto significa que ni (x, y) ni (y, x) están en R.

Teorema 3.4. Una relación R en un conjunto A es simétrica si y solo $\mathrm{R} = \mathrm{R}^{!}$.

La composición de relaciones simétricas no necesariamente es simétrica, por ejemplo si $X = \{0, 1, 2\}$, las relaciones

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\} \text{ y } S = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,2), (2,0)\}$$

son simétricas en X, pero

$$R \circ S = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0), (2,1), (2,0), (0,2)\}$$

no es simétrica en X pues $(1,2) \notin R \circ S$.

Teorema 3.5. Si una relación es simétrica su relación complemento también es simétrica.

Teorema 3.6. Una relación R en un conjunto A que sea estrictamente antisimétrica no puede ser reflexiva; aún más, si R es una relación en un conjunto A estrictamente antisimétrica entonces $R \cap \Delta_A = \varnothing$.

Prueba: si $(x, y) \in R$ entonces $x \neq y$, pues si $x = y$ entonces $(x, x) \in R \wedge (x, x) \in R$, lo que no puede suceder y por lo tanto $R \cap \Delta_A = \varnothing$. □

Teorema 3.7. Toda relación R en un conjunto A es asimétrica si y solo si es antisimétrica estricta.

Ejemplos

1. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto no vacío A son simétricas.

2. En el conjunto vacío la relación vacía es simétrica y asimétrica.

3. En el conjunto de los segmentos del plano euclidiano la relación de congruencia es simétrica y no asimétrica. En el conjunto de las proposiciones de la lógica clásica la equivalencia es simétrica.

4. En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano las relaciones de congruencia y de semejanza de triángulos son simétricas y no asimétricas.

5. La relación de igualdad en la axiomática de Peano es simétrica.

6. La relación de perpendicularidad entre las rectas del plano es simétrica y no antisimétrica estricta.

7. En el conjunto de los números enteros la relación *ser inverso aditivo de* es simétrica.

8. En un conjunto unitario A = {0}, la relación vacía es simétrica y asimétrica y la relación unitaria T = {(0, 0)} es simétrica pero no asimétrica.

9. La relación vacía en cualquier conjunto A es estrictamente antisimétrica.

10. Entre humanos la relación *ser hermano de* es simétrica y la relación *ser padre de* es asimétrica.

Una tercera propiedad que comparten las igualdades de los capítulos 1 y 2 son las propiedades transitiva y euclídea o euclidiana.

3.3. Propiedad transitiva

Una relación R en un conjunto A es *transitiva*, si y solamente si $(a, b) \in \mathrm{R}$, y $(b, c) \in \mathrm{R}$ implica que $(a, c) \in \mathrm{R}$ para todo $a, b, c \in \mathrm{A}$. En símbolos

$$(\forall x, y, z \in \mathrm{A})(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R).$$

Teorema 3.8. Si una relación R en un conjunto A es transitiva, entonces su relación recíproca $\mathrm{R}^!$ también lo es.

Prueba: sean R una relación transitiva sobre un conjunto A y los elementos x, y, z de A, tales que $(x, y) \in \mathrm{R}^!$ y $(y, z) \in \mathrm{R}^!$. Por la definición de la relación recíproca $\mathrm{R}^!$, $(y, x) \in \mathrm{R}$ y $(z, y) \in \mathrm{R}$ y como R es transitiva $(z, x) \in \mathrm{R}$ y por lo tanto $(x, z) \in \mathrm{R}^!$. □

La composición de relaciones transitivas no necesariamente es transitiva, por ejemplo si $\mathrm{X} = \{0, 1, 2\}$, las relaciones

$$\mathrm{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)\} \text{ y } \mathrm{S} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2), (2, 0)\}$$

son transitivas en X, pero

$$\mathrm{R} \circ \mathrm{S} = (0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (0, 2)$$

no es transitiva en X, pues $(1, 0) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ y $(0, 2) \in \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ pero $(1, 2) \notin \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$.

Teorema 3.9. Una relación binaria en un conjunto A que es irreflexiva y transitiva también es asimétrica.

Ejemplos

1. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto A son transitivas.
2. La relación de congruencia entre segmentos del plano euclidiano es transitiva.
3. En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano las relaciones de congruencia y de semejanza de triángulos son transitivas.
4. La relación de equivalencia lógica usual es transitiva.
5. La igualdad en la aritmética de Peano es transitiva.
6. En un conjunto vacío y en un conjunto unitario todas las relaciones son transitivas.
7. La relación R de *divisibilidad* en el conjunto de los números enteros Z definida por $\mathrm{R} = \{(a, b) : \exists c \in Z, a \times c = b\}$ es transitiva.

3.4. Propiedad euclidiana

Una relación R en un conjunto A es *euclidiana a izquierda* si para todo $x, y, z \in \mathrm{A}$ se satisface que si $(x, y) \in \mathrm{R}$ y $(x, z) \in \mathrm{R}$ entonces $(y, z) \in \mathrm{R}$. En símbolos

$$(\forall x, y, z \in \mathrm{A})(((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R) \rightarrow (y, z) \in R).$$

Una relación R en un conjunto A es *euclidiana a derecha* si para todo $x, y, z \in \mathrm{A}$ se satisface que si $(x, y) \in \mathrm{R}$ y $(z, y) \in \mathrm{R}$ entonces $(x, z) \in \mathrm{R}$. En símbolos

$$(\forall x, y, z \in \mathrm{A})(((x, y) \in R \wedge (z, y) \in R) \rightarrow (x, z) \in R).$$

Una relación R en un conjunto A es *euclidiana* si lo es a izquierda y a derecha.

Una relación euclidiana a izquierda o euclidiana a derecha no puede ser irreflexiva pues si $(x, y) \in \mathrm{R}$ como $(x, y) \in \mathrm{R}$ entonces $(y, y) \in \mathrm{R}$.

A primera vista pareciera que hay alguna relación lógica entre las propiedades transitiva y euclidiana a izquierda (o a derecha), sin embargo ellas son lógicamente independientes.

Ejemplos

1. En el conjunto N de los números naturales la *relación de orden estricto*[1] denotada por $a < b$ si y solo si existe $c \neq 0$ tal que $a+c = b$ es transitiva, pero no es euclidiana a izquierda pues $2 < 8$ y $2 < 5$ pero no es cierto que $8 < 5$, ni es euclidiana a derecha pues $3 < 6$ y $2 < 6$ pero no es cierto que $3 < 2$.

2. En el conjunto $\mathrm{A} = \{0, 1, 2\}$ la relación

$$\mathrm{R} = \{(0, 1), (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$$

   es euclidiana a izquierda, pero no es transitiva pues $(0, 1) \in \mathrm{R}$ y $(1, 2) \in \mathrm{R}$ pero $(0, 2) \notin \mathrm{R}$.

3. La relación de congruencia entre segmentos es euclidiana y transitiva.

4. La relación ser primos relativos entre números naturales no es ni transitiva ni euclidiana.

Teorema 3.10. Si una relación R en un conjunto A es euclidiana a izquierda (a derecha), entonces su relación recíproca $\mathrm{R}^!$ es euclidiana a derecha (a izquierda).

Prueba: sean R una relación euclidiana a izquierda sobre un conjunto A y x, y, z elementos de A, tales que $(x, z) \in \mathrm{R}^!$ y $(y, z) \in \mathrm{R}^!$. Por la definición de la relación recíproca $\mathrm{R}^!$, $(z, x) \in \mathrm{R}$ y $(z, y) \in \mathrm{R}$ y como R es euclidiana a izquierda $(y, x) \in \mathrm{R}$ y por lo tanto $(x, y) \in \mathrm{R}^!$. □

Corolario 3.11. Si una relación R en un conjunto A es euclidiana entonces su relación recíproca $\mathrm{R}^!$ es euclidiana.

[1] Una relación de *orden estricto* en un conjunto A es una relación transitiva e irreflexiva.

La composición de relaciones euclidiana no necesariamente es euclidiana; por ejemplo, en el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ las relaciones

$$R = \{(0, 1), (1, 1)\} \text{ y } S = \{(0, 1), (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$$

son euclidianas a izquierda, pero su compuesta

$$S \circ R = \{(0, 2), (0, 1), (1, 2), (1, 1)\}$$

no lo es, pues $(0, 2) \in R \circ S$ y $(0, 1) \in R \circ S$ pero $(2, 1) \notin R \circ S$.

Ejemplos

1. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto A son euclidianas.

2. En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano las relaciones de congruencia y de semejanza de triángulos son euclidianas.

3. La relación de equivalencia lógica usual es euclidiana.

4. La igualdad en la aritmética de Peano es euclidiana.

5. En un conjunto vacío y en un conjunto unitario todas las relaciones son euclidianas.

6. La relación R de divisibilidad en el conjunto de los números enteros Z definida por $R = \{(a, b) : \exists c \in Z, a \times c = b\}$ *no* es euclidiana a izquierda, pues $(2, 10) \in R$ y $(2, 12) \in R$ pero no es cierto que $(10, 12) \in R$.

Ejercicio

Realice las demostraciones que faltan de los teoremas presentados en las secciones 3.1 a 3.4

3.5. Relaciones de equivalencia

Las relaciones de igualdad de la geometría de Euclides y de Hilbert son reflexivas, simétricas y euclidianas; la de la axiomática de Peano y la de la lógica son reflexivas simétricas y transitivas; veamos que las dos caracterizaciones de la igualdad son equivalentes, las llamaremos *relaciones de equivalencia*.

Una relación de equivalencia T definida en un conjunto no vacío A, es una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema 3.12. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y euclidiana a izquierda, entonces T es de equivalencia.

Prueba: solo falta probar que es transitiva. Para ello sean $(a, b) \in$ T y $(b, c) \in$ T entonces por ser T simétrica $(b, a) \in$ T y por ser euclidiana a izquierda $(a, c) \in$ T, lo que permite concluir que T es transitiva. □

Notemos que en la demostración no usamos la propiedad reflexiva, esto significa que:

Teorema 3.13. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades simétrica y euclidiana a izquierda, entonces T es transitiva.

Si en los teoremas 3.12 y 3.13 cambiamos la propiedad euclidiana a izquierda por euclidiana a derecha obtenemos teoremas análogos.

Teorema 3.14. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades simétrica y transitiva entonces T es euclidiana a izquierda.

Prueba: sean $(a, b) \in$ T y $(a, c) \in$ T entonces por ser T simétrica $(b, a) \in$ T y por ser transitiva $(b, c) \in$ T, por tanto T es euclidiana a izquierda. □

Teorema 3.15. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades simétrica y transitiva, entonces T es euclidiana a derecha.

Pero también se cumple que:

Teorema 3.16. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades reflexiva y euclidiana a izquierda, entonces T es simétrica y transitiva.

Prueba: probemos primero que es simétrica. Sea $(a, b) \in$ T, como T es reflexiva $(a, a) \in$ T y como T es euclidiana izquierda $(b, a) \in$ T, luego T es simétrica. Como es simétrica y euclidiana a izquierda por el teorema 3.13 es transitiva. □

Teorema 3.17. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades reflexiva y euclidiana a derecha, entonces T es simétrica y transitiva.

Los teoremas 3.15. y 3.16 permiten caracterizar las relaciones de equivalencia de manera más simple.

Teorema 3.18. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades reflexiva y euclidiana a izquierda, entonces T es una relación de equivalencia.

Teorema 3.19. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades reflexiva y euclidiana a derecha, entonces T es una relación de equivalencia.

Las propiedades euclidiana a izquierda y a derecha son independientes, por ejemplo en el conjunto A $= \{0, 1\}$ la relación R $= \{(0, 1), (1, 1)\}$ es euclidiana a izquierda pero no a derecha, y la relación T $= \{(1, 0), (1, 1)\}$ es euclidiana a derecha pero no a izquierda.

Teorema 3.20. Sea T una relación definida en un conjunto no vacío A, que cumple las propiedades euclidiana a derecha y a izquierda, entonces T es una relación simétrica.

Prueba: sea $(a, b) \in$ T, como T es euclidiana a izquierda, $(a, b) \in$ T y $(a, b) \in$ T implican que $(b, b) \in$ T y como T es euclidiana a derecha, $(b, b) \in$ T y $(a, b) \in$ T implican que $(b, a) \in$ T y por tanto T es simétrica. □

Sin embargo no toda relación R en un conjunto A que sea euclidiana es reflexiva; por ejemplo, en el conjunto A $= \{0, 1, 2\}$ la relación R $= \{(0, 1), (1, 1), (0, 0), (1, 0)\}$ es euclidiana pero no reflexiva.

3.5.1. Otra definición de relación de equivalencia

Ya dijimos que en el libro I de sus *Elementos*, Euclides (300 a.C.) introdujo la noción común 1: *cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí*, que es una forma de decir la propiedad euclidiana de la igualdad.

Sin embargo, a lo largo de sus *Elementos*, extiende esta noción a otro tipo de relaciones, como el paralelismo. En la proposición 30 del libro I probó que las rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí y luego, en la proposición 9 del libro XI la extiende al espacio, "las rectas paralelas a una misma recta que no está en el plano de ellas, son paralelas".

En la proposición 24 del libro 3 la aplica a segmentos circulares semejantes; luego, en la proposición 11 del libro V dice: "razones iguales a una misma razón son iguales entre sí", y en la proposición 12 del libro X dice: "las magnitudes conmensurables a una misma magnitud son conmensurables entre sí".

En un artículo publicado en la revista *Mathematics Teacher*, Charles Buck (1967) afirma:

Una relación es de equivalencia sobre un conjunto si,

1. Tiene la propiedad de la igualdad dada en la noción común 1 de los *Elementos* de Euclides, y

2. Cada elemento del conjunto tiene la relación dada con algún elemento en el conjunto (por lo tanto, con él mismo).

Más precisamente, una relación binaria R en un conjunto A es una *relación de equivalencia* sobre A si:

1. Para cada a, b y c elementos de A, $(a, c) \in$ R y $(b, c) \in$ R implican $(a, b) \in$ R; y

2. Para todo $a \in$ A, existe un $x \in$ A tal que $(a, x) \in$ R.

Una relación definida así es reflexiva, puesto que 2 y 1 aplicadas en ese orden implican que $(a, a) \in$ R para todo $a \in$ A.

También es simétrica, porque para todo b en A se tiene que $(b, b) \in$ R por reflexividad, y $(b, b) \in$ R y $(a, b) \in$ R implican $(b, a) \in$ R por la propiedad 1.

Usando la simetría y la propiedad 1 obtenemos la transitividad.

Es inmediato que las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, implican las propiedades 1 y 2; por lo tanto, las definiciones son equivalentes.

Frecuentemente la aplicación de la propiedad 2 es trivial: dos triángulos son congruentes si ellos tienen la misma longitud y forma; dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección; dos niños son de peso equivalente si ellos tienen el mismo peso.

En cada uno de estos casos se satisface la propiedad 2 de manera trivial. En todos ellos, el único argumento es ver que si dos cosas tienen las mismas propiedades que una tercera, entonces tienen las mismas propiedades entre sí (propiedad 1).

Es igualmente fácil ver cuando una relación no satisface esta definición de equivalencia; por ejemplo, si dos rectas en el plano euclidiano son perpendiculares a otra, ellas no son perpendiculares entre sí.

Estos argumentos aparecen en los *Fundamentos de la geometría*, donde Hilbert (1953) usó esta definición para caracterizar la congruencia de segmentos: el axioma III.2 afirma: "si dos segmentos son congruentes a un tercero son congruentes entre sí" y el axioma III.1 afirma, entre otras cosas, que dado un segmento existe siempre un segmento congruente a él y con ellos prueba la reflexividad, simetría y transitividad de la congruencia de segmentos y de ángulos.

Ejercicio

Comente la siguiente demostración de que toda relación simétrica y transitiva debe ser reflexiva: sea S una relación simétrica y transitiva sobre A. Como S es simétrica, entonces para todo $a, b \in \mathrm{A}$ se tiene que si $(a, b) \in \mathrm{S}$ entonces $(b, a) \in \mathrm{S}$, y como es transitiva tenemos que $(a, a) \in \mathrm{S}$; por lo tanto, es reflexiva.

Ejemplos

Para construir ejemplos de relaciones de equivalencia podemos considerar igualdades parciales, esto es que puede darse que dos objetos no sean idénticos, pero que tengan alguna característica común, que sean iguales en algo, estas relaciones cumplen las mismas propiedades de una igualdad.

1. Si comparamos personas por su estatura, la relación *tener la misma estatura* es una relación de equivalencia.

2. Si entre los seres vivos definimos la relación *ser hermano de* como tener el mismo padre y la misma madre, esta es una relación de equivalencia; pero si cambiamos el conectivo $\wedge$ por el conectivo $\vee$, la relación ya no es transitiva, ni euclidiana.

3. Si en el criterio de comparación entre dos objetos utilizamos la expresión *el mismo...*, obviamente la relación en mención es una igualdad; por ejemplo: tener la misma edad, el mismo color de ojos, el mismo sexo, etc. En general, si comparamos dos objetos en *alguna de sus características*, la relación tener la misma característica es una relación de equivalencia. *¡Pues claro!* estamos usando la palabra *igual*, con respecto a una característica especial, entonces todo lo dicho para la igualdad es aplicable aquí.

4. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto A son de equivalencia.

5. La relación de equivalencia lógica usual es una relación de equivalencia.

6. La igualdad en la aritmética de Peano es de equivalencia.

7. En un conjunto vacío y en un conjunto unitario todas las relaciones son euclidianas.

3.5.2. Clases de equivalencia

Si S es una relación de equivalencia en un conjunto A, para cada elemento $a \in \mathrm{A}$ el conjunto de los elementos que están relacionados con a lo notamos $[a]$ y lo llamamos *la clase de equivalencia de* a; es decir:

$$[a] = \{x \in \mathrm{A} : (x, a) \in \mathrm{S}\}$$

Cuando manejamos clases de equivalencia, sea para relacionarlas u operarlas, no es necesario tratar con todos y cada uno de los elementos que la forman; basta elegir uno de ellos como *representante*, y esta elección arbitraria no debe influir en el manejo de las clases, puesto que todos los elementos de una clase tienen las mismas propiedades con respecto a la relación de equivalencia que las define; así, cualquier elemento de la clase puede ser representante de esta.

El conjunto de las clases de equivalencia generadas por una relación de equivalencia S sobre un conjunto A, lo llamamos *el conjunto cociente de* A *sobre* S, y lo notamos A/S.

La idea de conjunto cociente es una generalización de la idea de división; en esta, las partes deben ser iguales, mientras que en el conjunto cociente

no necesariamente. Por ejemplo, si dividimos un rectángulo en cuatro partes iguales, obtenemos:

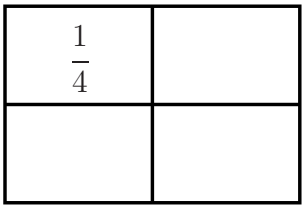


Figura 3.1

Y cada una de ellas es $\frac{1}{4}$ del rectángulo; pero si partimos el rectángulo en cuatro partes desiguales (figura 3.2),

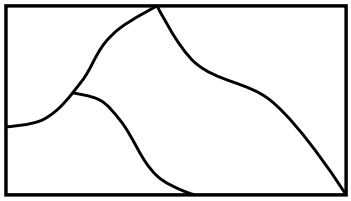


Figura 3.2

ya no llamamos $\frac{1}{4}$ a cada pedazo, pero sí podemos expresar esta partición en términos de clases de equivalencia.

Si a cada elemento del conjunto A le hacemos corresponder la clase de equivalencia en la que él está por la relación S, obtenemos una función que llamamos *función cociente* o *proyección canónica del conjunto* A *sobre el conjunto cociente* A/S (figura 3.3):

$$\begin{aligned} [\ ] : \mathrm{A} &\to \mathrm{A/S} \\ x &\to [x] \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta función es sobreyectiva.

El nombre de proyección puede entenderse si pensamos cada clase de equivalencia como una fibra en el producto cartesiano $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ sobre cada punto de A.

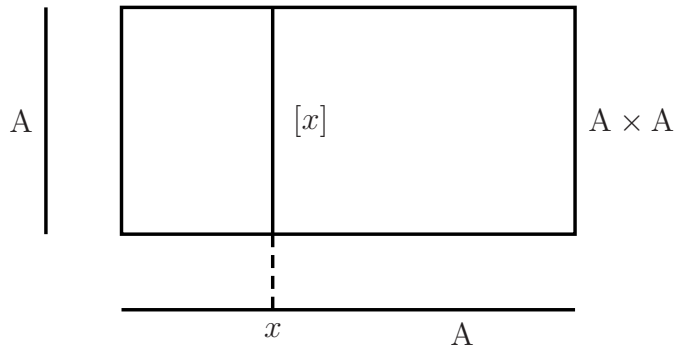


Figura 3.3

Ejemplos

1. En un conjunto X, la relación de igualdad define un conjunto cociente X/ = formado por clases unitarias, donde cada elemento forma su propia clase de equivalencia; este cociente es equivalente al conjunto X.

2. Sea A un conjunto y B un subconjunto de A, definimos la relación:

$$a \sim b \quad \text{si y solo si } a \text{ y } b \text{ pertenecen a B,}$$

obtenemos el conjunto cociente A/B, en el que cada uno de los elementos de A que no están en B forman una clase de equivalencia, y el conjunto B forma otra clase; esto es como reducir un subconjunto de A a un punto (figura 3.4).

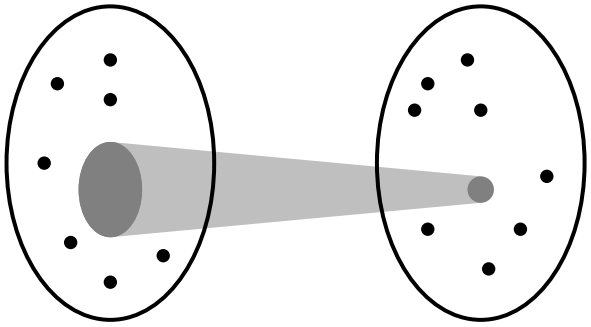


Figura 3.4

Notemos que cuando hacemos un cociente en un conjunto utilizando una relación de equivalencia, estamos *identificando* unos puntos del

conjunto con otros *equivalentes* a él; es decir, estamos diciendo que en algún sentido los puntos son *iguales* y por lo que hemos dicho *dos puntos iguales son un solo punto*; por lo tanto, el resultado de identificar puntos con una relación de equivalencia es *pegar* unos puntos con sus equivalentes en uno solo.

3. Si tenemos un rectángulo $ABCD$ e *identificamos* el segmento AC con el segmento BD, lo que estamos diciendo es que el punto A y el punto B se unen en un solo punto (A es equivalente a B). Y así *pegamos* cada uno de los puntos del segmento AC con cada uno de los del segmento BD y obtenemos como resultado un cilindro (figura 3.5).

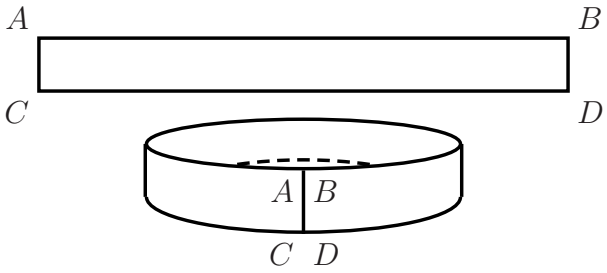


Figura 3.5

4. Si en el rectángulo $ABCD$ *pegamos* cada uno de los puntos del segmento AC con cada uno de los del segmento BD pero de otra forma, identificando ahora el punto A con el punto D y el B con el C (girando el segmento AC 180 grados) el resultado es ahora la banda de Möbius (Courant y Robbins, 1997, pp. 188-189) (figura 3.6).

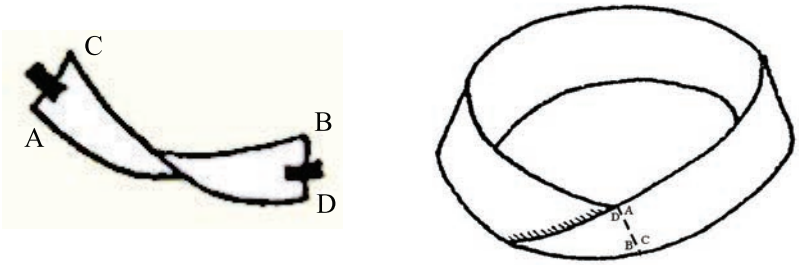


Figura 3.6

5. **Relaciones de equivalencia en geometría euclidiana.**

   a) En el conjunto de los segmentos del plano euclidiano la relación de congruencia entre segmentos es de equivalencia.

   b) En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano la relación de congruencia de triángulos es de equivalencia.

   c) **La relación de semejanza:** en la cotidianidad la palabra *semejanza* sugiere parecido, tal como cuando se hace el modelo a escala de un aeroplano, la maqueta de una casa o se saca la ampliación de una fotografía; nos referimos a figuras semejantes cuando estas tienen la *misma forma*, aunque no sean del mismo tamaño (figura 3.7); claro está que, en particular, podrían ser del mismo tamaño, de donde la congruencia se considera como un caso especial de semejanza.

Figura 3.7

La relación de semejanza surge de lo que tienen en común una imagen y una ampliación de ella; eso que tienen en común es lo que llamamos forma. Abstraemos el color, el tamaño y otras características, para lograr el concepto de forma. Dicha abstracción se formaliza en geometría euclidiana mediante la *semejanza de figuras planas*, usando la proporcionalidad, la cual permite dividir al conjunto de las figuras planas en clases; de tal manera, que dos figuras planas que están en la misma clase tienen la misma forma. De acuerdo con esto, es *la semejanza la que da lugar al concepto de forma y no esta la que genera la relación de semejanza*; es decir, que no podemos definir la semejanza como igualdad de forma sino al revés[2].

La relación de semejanza puede también establecerse en términos de geometría analítica, para ello se emplea cierto tipo de transformación, conocido como *homotecia*. Una *homotecia* de centro O y

[2] "Las relaciones de equivalencia no nacen del carácter abstracto común a las cosas, sino que lo engendra" (Rey Pastor, Calleja y Trejo, 1958, p. 9).

razón un número real k (distinto de cero) es una transformación que hace corresponder a un punto A otro A', alineado con A y O, tal que: $OA' = k \cdot OA$; considerando las coordenadas de los puntos $A(x, y)$ y su homotético $A'(x', y')$, la relación que hay entre ellos es entonces: $x' = kx$ y $y' = ky$ (figura 3.8).

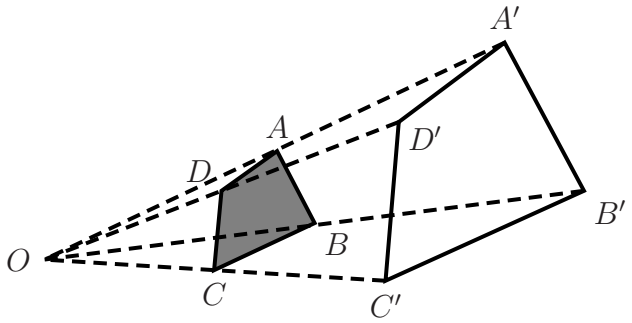


Figura 3.8

O dicho de otra manera, OA' es a OA, como OB' es a OB, y la razón, en este caso, es k. De ahí que la proporcionalidad sea una herramienta para generar figuras cambiando la escala.

La relación de semejanza entre figuras de la geometría euclidiana es de equivalencia.

d) **La relación de paralelismo entre rectas coplanares:** dos rectas m, n, en el mismo plano, son paralelas y lo notamos $m \parallel n$ si son la misma o no tienen puntos en común.

Esta relación es de equivalencia, pues las propiedades reflexiva y simétrica se deducen directamente de la definición, y para ver que es transitiva, supongamos que m, n y r son tres rectas distintas, tales que $m \parallel n$, $n \parallel r$ y m no es paralela a r, entonces m y r tienen un punto en común, digamos P; pero como m y r son paralelas a n, tenemos dos rectas diferentes que tienen al punto P y son paralelas a una tercera, lo cual contradice el postulado 5 de Euclides[3]; por tanto, $m \parallel r$.

e) Las relaciones de equidescomponibilidad y equicomplementariedad de polígonos en la geometría de Hilbert son de equivalencia.

[3]Por un punto P exterior a una recta p es posible trazar una y solo una recta paralela a la recta dada (p).

6. **Relaciones de equivalencia en aritmética:** llamamos aritmética al estudio de los números, y como hay varios tipos de números, hay varias aritméticas; aritmética de los números naturales, de los enteros, de los racionales, de los reales, de los complejos, etc.

   a) **La relación de equinumerosidad entre conjuntos:** cada una de estas aritméticas también tiene varias formas de presentarse: en el caso de la aritmética de los números naturales se puede presentar con axiomas como lo vimos en el capítulo 1, o puede construirse a partir de los axiomas de una teoría de conjuntos, digamos la de Zermelo-Fraenkel-Skolem, donde se construyen *números cardinales*, que en casos finitos coinciden con los números naturales, pero que en el caso de conjuntos infinitos difieren sustancialmente.

   Sea X un conjunto no vacío dado, en el conjunto $\wp(\mathrm{X})$ de partes de X definimos la relación de *equinumerosidad* de conjuntos[4], que notamos $\cong$, y que permite comparar cuándo dos subconjuntos A y B de X tienen el *mismo número*[5] *de elementos,* dada por:

   $$\mathrm{A} \cong \mathrm{B} \text{ si y solo si existe una función } f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}, \text{ biyectiva.}$$

   Esta relación es de equivalencia, ya que la función identidad es biyectiva y tanto la función inversa de una función biyectiva, como la compuesta de dos funciones biyectivas, son biyectivas. En particular,

[4]Esta relación podría usarse para definir los números naturales, diciendo que la clase del conjunto $\varnothing$ es el número natural 0, la clase del conjunto unitario $\{\varnothing\}$ es el número 1, y así sucesivamente. Esto, sin embargo, tiene la dificultad que posiblemente el conjunto de partida X no sea suficientemente grande para que nos permita definir todos los números naturales, y si escogemos un conjunto suficientemente grande como para que contenga a todos los conjuntos, aparece una dificultad aún mayor, como es la de no poder considerarlo como un conjunto, pues da pie a paradojas que vician la teoría (Smullyan y Fitting, 1996, p. 11). Las dos salidas más frecuentes para la construcción de los números naturales son la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel-Skolem y la de Von Neumann, revisada posteriormente por Bernays, Robinson y Goedel, conocida como la teoría de clases (Machover, 1996). En la primera se construyen, basados en la existencia del conjunto vacío, el axioma de apareamiento y de la existencia de un conjunto inductivo (Suppes, 1968), y en la segunda pueden considerarse como clases de equivalencia de la relación de equinumerosidad definida antes sobre la *clase* de todos los conjuntos.

[5]Insistimos en que aquí la palabra *número* no se refiere necesariamente a un *número natural*, aunque en los casos finitos sí.

i. Un conjunto A es *finito*[6] si existe un número natural n de forma que A es equivalente a un conjunto de la forma:

$$\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1\},$$

el número n se llama el *cardinal* del conjunto.

ii. Un conjunto es *enumerable* si es equivalente al conjunto de los números naturales N. Algunos casos particulares son: el conjunto P de los números pares, el conjunto I de los números impares, el conjunto T de los números triangulares, el conjunto C de los números cuadrados, el conjunto K de los números cúbicos, el conjunto D de las potencias de 10:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots\}\\
\mathbb{P} &= \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \cdots\}\\
\mathbb{I} &= \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \cdots\}\\
\mathbb{T} &= \{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ \cdots\}\\
\mathbb{C} &= \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ \cdots\}\\
\mathbb{K} &= \{0,\ 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ \cdots\}\\
\mathbb{D} &= \{10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7,\ 10^8,\ \cdots\}
\end{aligned}$$

Esto significa que todos estos conjuntos tienen *el mismo número de elementos* que el conjunto de los número naturales, sin importar que en el último caso hay, entre cada número y el siguiente, un espacio cada vez mayor; por ejemplo, entre 10^2 y 10^3 hay 900 números, pero entre 10^7 y 10^8 hay 90 millones de

[6]Hay otras alternativas para definir conjuntos finitos, Dedekind, por ejemplo, define que un conjunto A es finito si no existe una biyección entre A y uno de sus subconjuntos propios (subconjuntos distintos de A). Según Tarski, un conjunto A se dice finito cuando, para todo conjunto B de partes x de A, uno al menos de los elementos x_0 de B es minimal por inclusión; es decir, tal que ningún x de B esté estrictamente incluido en x_0. Estas dos definiciones son equivalentes si se asume el axioma de elección; si no, es más fuerte la de Tarski, y equivale al siguiente esquema de definición:

1. Vacío es finito.
2. Todo conjunto finito al que se le agrega un elemento sigue siendo finito.
3. Si una condición c vale para el vacío y si supuesta verdadera para x es verdadera cuando se añade un elemento a x, entonces c es verdadera para todo conjunto finito.

números; en la última fila no están muchos números naturales, pero hay exactamente *el mismo número*[7]; más precisamente, tienen el mismo *cardinal* que los números naturales[8].

La condición de biyectividad para la equivalencia de dos conjuntos puede debilitarse un poco, basados en la idea intuitiva de que si podemos establecer una función uno a uno entre un conjunto A y otro conjunto B, entonces el conjunto A debe tener un número de elementos menor o igual que el conjunto B; es decir, que si podemos establecer una función inyectiva entre A y B y otra entre B y A, debemos esperar que los dos conjuntos tengan el mismo número de elementos; esto es intuitivamente claro en conjuntos finitos, pero para conjuntos infinitos requiere una demostración. La afirmación constituye el teorema de Schöder-Bernstein (Suppes, 1968, p. 60), que nos garantiza que si existen dos funciones inyectivas $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ y $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, entonces existe una biyección $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

b) **Los números enteros y los racionales:** a partir de los números naturales es posible construir los números enteros y de estos, los números racionales en un proceso que se muestra a continuación:

i. Sea $(\mathbf{N}, +)$ el conjunto de los números naturales con la operación suma. En el conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, definimos la relación de equivalencia:

$$(a, b) \equiv (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a + d = b + c$$

Las clases de equivalencia son:

$$[(a, b)] = \{(c, d) : \ a + d = b + c\}$$

por ejemplo:

$$[(0, 0)] = [(1, 1)] = [(2, 2)] = [(3, 3)] = [(k, k)]$$
$$[(0, 1)] = [(1, 2)] = [(2, 3)] = [(3, 4)] = [(k, k + 1)]$$
$$[(1, 0)] = [(2, 1)] = [(3, 2)] = [(4, 3)] = [(k + 1, k)]$$

[7] Bolzano fue el primero en distinguir la relación *estar contenido en* entre conjuntos, con la relación *tener menor tamaño que*. Los números cuadrados están contenidos en el conjunto de los enteros, pero una y otra totalidades tienen el mismo tamaño (Delahaye, 2001, p. 38).

[8] Notemos que este número llamado *aleph subcero*, que se representa usualmente con el símbolo $\aleph_0$, *no* es un número natural, es el primero de los números transfinitos.

En el conjunto cociente $\mathbf{Z} = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \,/\, \equiv$ podemos definir una operación entre clases:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

y esta no debe depender del representante que se tome de cada clase; es decir, el resultado de la operación entre clases debe ser el mismo.
Para ver esto, sean $(a',b') \in [(a,b)]$ y $(c',d') \in [(c,d)]$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} a' + b &= b' + a \\ c' + d &= d' + c, \end{aligned}$$

por tanto

$$a' + b + c' + d = b' + a + d' + c,$$

(hemos omitido los paréntesis por la asociatividad de la operación $+$). Lo que significa que,

$$[(a+c, b+d)] = [(a'+c', b'+d')],$$

y por definición:

$$[(a,b)] \ \oplus \ [(c,d)] = [(a',b')] \ \oplus \ [(c',d')].$$

El conjunto $\mathbf{Z}$ con esta operación es un grupo, que puede identificarse con el conjunto de los *números enteros* asignando a la clase $[(k, k+r)]$ el entero r, y a la clase $[(k+r, k)]$ el entero $(-r)$.

ii. Con este mismo procedimiento, construimos el conjunto de los números racionales $\mathbf{Q}$ considerando el producto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ y en él la relación de equivalencia:

$$(a,b) \cong (c,d) \quad \text{si y solo si} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

En el conjunto $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \,/\, \cong) - \{0\}$ definimos la operación producto en forma análoga a lo hecho anteriormente y obtenemos un grupo.

Podemos repetir este proceso en cualquier *monoide*[9] conmutativo y cancelativo. Sea $(\mathrm{M}, \oplus)$ un monoide conmutativo y cancelativo, construimos el producto $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$, y en él definimos la relación de equivalencia $\sim$ de la siguiente manera: Para todo $a, b, c, d \in \mathrm{M}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } a \oplus c = b \oplus d$$

La propiedad reflexiva de la relación es consecuencia de la conmutatividad de la operación $\oplus$; la simetría se desprende de la misma propiedad conmutativa de la operación, y la simetría de la igualdad. La prueba de que la relación es transitiva utiliza las propiedades asociativa, conmutativa y cancelativa de la operación en el monoide.

El resultado es una estructura más rica, puesto que de un monoide conmutativo y cancelativo obtenemos un grupo.

En $((\mathrm{M} \times \mathrm{M}) \,/\, \sim, \copyright)$ la operación está definida por:

$$[(a, b)] \copyright [(c, d)] = [(a \oplus c, b \oplus d)].$$

La asociatividad y conmutatividad de $\copyright$ viene directamente de la de $\oplus$, el elemento idéntico es $[(e, e)]$ donde e es el elemento idéntico del monoide, y el inverso de la clase $[(a, b)]$ es la clase $[(b, a)]$.

c) **Las congruencias de Gauss:** otra manera de obtener nuevos números utilizando relaciones de equivalencia, esta vez a partir de una clase especial de anillos[10], la ilustra el concepto de *congruencia de Gauss*.

En el anillo de los números enteros $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ definimos la relación de *congruencia módulo n en* Z, para un entero positivo n cualquiera, de la siguiente manera:

$$x \equiv y \,(\mathrm{mód}\, n) \quad \text{si y solo si} \quad n | x - y.$$

La relación de congruencia es de equivalencia, pues es:

[9] Un *monoide* es un conjunto en el que está definida una operación asociativa donde existe un elemento idéntico.

[10] Un *anillo* $(\mathrm{A}, +, \cdot)$ es un conjunto donde están definidas dos operaciones $+$ y $\cdot$, de manera que $(\mathrm{A}, +)$ es un grupo abeliano, y la multiplicación es asociativa y distributiva con respecto a la suma.

i. Reflexiva, porque si $x \in \mathbf{Z}$, entonces, como todo número entero positivo divide a 0, tenemos que $x \equiv x$.

ii. También es simétrica porque si $x \equiv y$ (mód n) entonces $n|(x-y)$; pero si esto sucede, también sucede que $n|(y-x)$, luego $y \equiv x$.

iii. La transitividad también es inmediata y se la dejamos al lector.

La clase de equivalencia de un elemento a es:

$$[a] = \{a + kn\}_{k \in Z}.$$

Hay exactamente n clases de equivalencia, que son:

$$[0],\ [1],\ \cdots [n-1],$$

y no hay otras porque un entero a cualquiera se puede escribir de manera única de la forma:

$$a = q + nr \quad \text{con} \quad 0 \leq r < n.$$

Esto quiere decir que $a \in [r]$, y solo hay las posibilidades mencionadas para r.

Ilustramos el conjunto cociente que se obtiene para el caso $n = 5$, que está formado por cinco clases de equivalencia, y la operación entre clases está definida por la tabla 3.1 (omitimos los paréntesis por comodidad).

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabla 3.1

Estos números son conocidos[11] como *enteros módulo 5.*

[11] Un estudio más detallado de este tema se encuentra en Luque, Mora y Torres (2006b, pp. 73-77).

Ejercicio

Demuestre que la relación $(a, b) \equiv (c, d)$ *si y solo si* $a + d = b + c$*, definida en* $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$*, es una relación de equivalencia.*

3.6. Relaciones que no son de equivalencia

Una manera de clasificar relaciones sobre un conjunto dado X es formar dos grupos con ellas: las que son de equivalencia y las que no.

Entre las relaciones que no son de equivalencia, algunas cumplen una o dos o ninguna de las propiedades mencionadas para ellas; es decir que no hay relación entre una propiedad y las demás, o dicho de otro modo, *las propiedades que caracterizan a las relaciones de equivalencia son independientes unas de otras.* Mostraremos en seguida relaciones que tienen alguna(s) de las características de una relación de equivalencia, pero no todas; por tanto, no son relaciones de equivalencia.

Ejemplos

1. Si entre seres vivos definimos la relación *ser primo de*, como ser hijo de un hermano del padre o de la madre, esta relación es reflexiva y simétrica, pero no transitiva.

2. La relación de *inclusión* entre conjuntos definida por: un conjunto A *está contenido* en un conjunto B si todo elemento de A es elemento de B, es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica.

3. Entre números naturales definimos la relación *ser divisor de*, por: un número natural a es *divisor* de un número b si existe un número natural c de manera que $a \times c = b$. Esta relación es reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

   Es reflexiva puesto que para todo número natural se tiene que $a \times 1 = a$, y por tanto a es divisor de a. Pero no es simétrica porque, por ejemplo, 2 es divisor de 6 $(3 \times 2 = 6)$ pero 6 no es divisor de 2. Sí es transitiva, pues si a es divisor de b existe un número natural c tal que $a \times c = b$, y si b es divisor de d, existe un número natural f

tal que $b \times f = d$; remplazando la primera igualdad en la segunda, y aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales, obtenemos que

$$a \times (c \times f) = d,$$

lo que significa que a es divisor de d.

4. En el conjunto de circunferencias del plano, definimos la relación *ser secantes*, por: dos circunferencias son secantes si tienen por lo menos dos puntos en común. Esta relación es reflexiva y simétrica, pero no transitiva.

5. La relación de *perpendicularidad* entre rectas del mismo plano es simétrica, pero no reflexiva ni transitiva.

6. En el conjunto de los números naturales, la relación *ser mayor que*, definida como: $a > b$ si y solo si existe un número natural c diferente de cero tal que $b + c = a$, es solo transitiva.

Ejercicio

Busque ejemplos de relaciones, cotidianas y matemáticas, que sean de equivalencia y otras que no lo sean, pero sean, solo reflexivas, solo simétricas, reflexivas y transitivas, y otras posibles combinaciones entre las propiedades estudiadas para mostrar que las tres propiedades son independientes unas de otras.

3.7. Conceptos y definiciones en matemáticas

En el ejemplo d de relaciones de equivalencia en geometría euclidiana aparece una situación nueva; no aparece la palabra *igual*, o la expresión *lo mismo*, para comparar rectas diferentes; surge entonces la pregunta: ¿qué es lo que tienen igual las rectas paralelas? Si no sabemos la respuesta, nos inventamos un nombre para ello, le llamamos *dirección* y decimos que *las rectas paralelas tienen la misma dirección*. Ha surgido un nuevo concepto, el concepto de dirección.

La *relación de equipolencia* entre segmentos orientados del plano, definida por la igualdad de magnitud, dirección y sentido, define el concepto de *vector libre* del plano.

Cabe entonces preguntarse: ¿todos los *conceptos* aparecen así? Es decir, ¿a partir de una relación de equivalencia?

En realidad, esta es solo una de las formas con las cuales los matemáticos definen sus objetos; también se le llama definición por *abstracción*, que se formaliza matemáticamente mediante relaciones de equivalencia. Este tipo de definición permite crear nuevos conceptos, que se ejemplifican con un representante de la clase de equivalencia, aunque es posible que existan varios contextos donde puede referirse el concepto creado y, por tanto, cada concepto tiene varios representantes.

Existen otras maneras (Rey Pastor, Calleja y Trejo, 1958, pp. 7-11) para construir conceptos matemáticos, todas con el requisito común, de que las condiciones bajo las cuales el nuevo concepto se genera no sean contradictorias; las formas más conocidas son:

1. Por *definiciones explícitas*, cuando se introducen palabras nuevas para designar combinaciones lógicas de conceptos ya definidos.

2. De *forma axiomática,* cuando se caracterizan los objetos mediante axiomas sin recurrir al significado objetivo de los mismos; por ejemplo, las piezas del ajedrez están definidas por los movimientos que se les asignan y no es importante el nombre o la figura que los representan.

3. Por *recurrencia,* cuando definimos objetos iniciales a partir de los cuales se definen los siguientes mediante una ley de formación, por ejemplo, las definiciones de las operaciones entre números naturales cuando son presentados formalmente (Luque, Mora y Páez, 2013, pp. 298-299).

Para saber si dos conceptos son realmente uno y el mismo concepto, se debe poder establecer una correspondencia biunívoca entre los contextos; es decir, una correspondencia entre cada uno de los elementos de estos, que respete las relaciones que los elementos tienen en cada contexto y, con ello, se conserven las propiedades que determinan el concepto. Por ejemplo, el concepto de vector libre en el plano es equivalente al concepto de parejas ordenadas de números reales, puesto que cada vector se puede representar mediante una pareja de números reales, de manera que al resultado de sumar dos vectores le corresponde la pareja suma de las parejas correspondientes a

los vectores sumados, y todas las propiedades de la suma de vectores son las mismas que las de la suma de parejas ordenadas.

Ejercicios

1. *¿Es posible reducir las formas de definición de conceptos enunciadas a la de abstracción? Justifique.*

2. *Complete las siguientes tablas:*

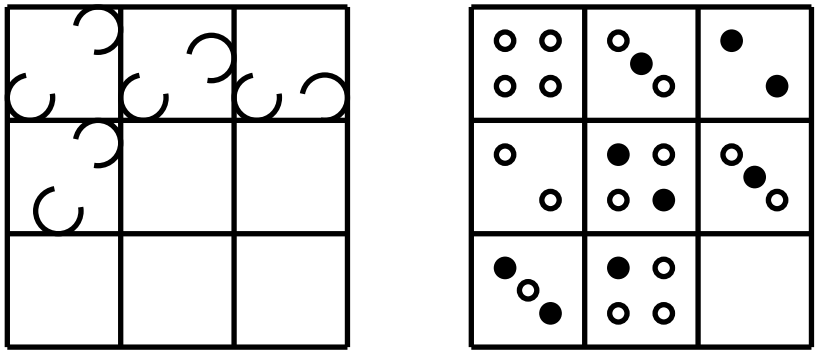


Figura 3.9

3. *Idee tablas similares cuyo contenido sean expresiones algebraicas que impliquen encontrar alguna regularidad.*

4. *Para cada una de las siguientes* definiciones, *dé dos ejemplos:*

   a) *Un* pengro *es una figura geométrica de cinco lados, dos de ellos congruentes.*

   b) *Un* partín *es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de un conjunto dado, tal que la intersección entre dos cualesquiera es vacía.*

   c) *Un grupo es un conjunto con una operación, tal que la operación es asociativa, en el conjunto existe elemento neutro con esa operación y todos los elementos del conjunto tienen inverso.*

   d) *Un conjunto ordenado se llama un retículo si para cada par de elementos existe ínfimo y supremo.*

5. *A partir de los siguientes ejemplos (figura 3.10), escriba una definición de Secitri.*

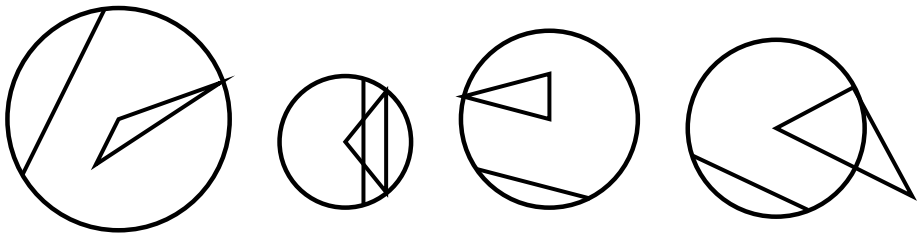


Figura 3.10

3.8. Clasificaciones en conjuntos

Cuando una relación de equivalencia está definida sobre un conjunto, este queda repartido en subconjuntos, cuyos elementos son los que tienen las mismas características, definidas por la relación; es decir, que *las relaciones de equivalencia clasifican los elementos del conjunto sobre las que están definidas.*

Realizar *clasificaciones* es de ocurrencia común en la vida cotidiana y en las ciencias; por ejemplo, si tomamos como referencia el conjunto de los animales, podemos inicialmente clasificarlos por tener o no, un esqueleto, en vertebrados e invertebrados. Si nuestro interés son los vertebrados, los clasificamos a su vez en peces, reptiles, anfibios, aves y mamíferos. Es posible seguir estableciendo criterios hasta llegar al nivel de detalle de especie[12]: perros, gallinas, caballos, etc.

De hecho, los biólogos agrupan animales en reino, filum, clase, orden, familia, género y especie; así, *de acuerdo con cierto criterio*, identificamos los animales de un grupo determinado, *enunciando sus características*; por ejemplo, si un animal tiene alas, plumas, pico y se reproduce por medio de huevos, es un ave, y no hay riesgo que también pueda ser clasificado como un pez.

[12]La palabra *especie* viene del latin *specie* que significa *tipo*. En biología las especies son tipos diferentes de organismos; hay incluso especies de perros; sin embargo, el sentido de la expresión *tipos diferentes* ha cambiado de la distinción únicamente morfológica y visible a otros criterios como nominalista, tipológico, evolutivo, filogenético y reconocimiento biológico.

Las características de cada clase de animal son excluyentes entre ellas, y todos los elementos pertenecientes a un mismo conjunto comparten las mismas características; así mismo, cada animal que exista debe poderse incluir en alguna clase; si no es así, se debe crear una nueva clase para este, para lo cual es necesario definir qué significa, por ejemplo, ser mamífero.

Si se elige el conjunto de las estrellas, estas también pueden clasificarse por brillo en clases[13] O, B, A, F, G, K, M o, por tamaño, en gigantes, normales y enanas; por su manera de morir, en gigantes rojas, estrellas neutrónicas y huecos negros. Y nuevamente, si una estrella está clasificada por su brillo en la clase O, no puede estar también en la clase A, o en otra clase; además, todas las estrellas que están en la clase A tienen las mismas características, diferentes de las que pertenecen a la clase F.

En matemáticas también hay clasificaciones; por ejemplo, los triángulos se clasifican por la cantidad de lados congruentes en equiláteros, isósceles y escalenos o, por la medida de sus ángulos, en acutángulos, rectángulos y obtusángulos; los números naturales en pares e impares; los números reales en racionales e irracionales, etc.

En todos los casos, la tarea consiste en considerar un conjunto base, y en él *distinguir cuáles elementos están en una clase determinada* y si es posible, *enunciar las características o propiedades* que le obligan a estar en esa clase y no en otra. Porque, además, si la clasificación está bien hecha, *cada elemento debe pertenecer a una clase y estar en una y solo una de ellas*.

Cotidianamente, se usan expresiones como: *son iguales* o *tienen características iguales*, para referirse a los elementos de una clase; desde una perspectiva matemática, una clasificación se obtiene a partir de relaciones entre objetos que caracterizan lo que entendemos cuando usamos la palabra *igual*, es decir, relaciones de equivalencia.

Así, por ejemplo, la relación *tener el mismo tipo de sangre*, definida en un conjunto de personas, clasifica a este en cuatro clases: O, A, B y AB, y cada una de estas se clasifica en dos, según su factor RH. Cada una de las clases es disyunta con respecto a las demás, en el sentido que cada persona tiene un solo tipo de sangre, y además la reunión de todas las clases abarca a todas las personas o, dicho de otro modo, no hay personas que tengan un tipo de sangre distinto a los mencionados. A estos tipos de división los llamamos particiones.

[13]Un recurso nemotécnico para recordar esta clasificación es la frase "*Oh Be A Fine Girl Kiss Me*".

3.9. Particiones

Una *partición* $\Im$, de un conjunto no vacío A, es una colección de subconjuntos no vacíos de A, disyuntos dos a dos, cuya unión es todo A, en símbolos:

$\Im = \{A_i\}_{i\in I}$, donde I es un conjunto de índices, es una partición de A, si y solo si

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \text{para todo} \quad i, j \in I,$$

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$\text{y} \qquad A_i \neq \varnothing \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Una partición en un conjunto A es una clasificación de los elementos de A, que como lo dice su nombre forma clases, de la misma forma que las relaciones de equivalencia también forma clases.

3.9.1. Particiones y relaciones de equivalencia

"Las relaciones de equivalencia y las particiones son dos facetas de la misma realidad matemática". Esta frase, tomada de un libro de teoría de conjuntos (Hrbacek y Jech, 1999, p. 30), muestra el estrecho vínculo que existe entre las clasificaciones que son posibles en un conjunto, y las características que puedan tener los elementos clasificados (Stoll, 1963, p. 30). Mostraremos en seguida que, dada una relación de equivalencia en un conjunto A, ella determina una partición del conjunto y toda partición de un conjunto A define una relación de equivalencia en él.

Veamos la primera parte: toda relación de equivalencia determina una partición del conjunto en clases, sus clases de equivalencia.

Dada una relación de equivalencia S en un conjunto A, se cumple que todo elemento a de A pertenece a una clase de equivalencia, pues $a \in [a]$ para todo elemento a de A, puesto que S es reflexiva.

Además, dos clases de equivalencia o son la misma o son disyuntas; esto se debe a que si $(a, b) \in$ S entonces $[a] = [b]$, porque si $(a, b) \in$ S y consideramos cualquier otro elemento $c \in [b]$. Por definición de clase de equivalencia, se tiene que $(b, c) \in$ S; entonces, como S es transitiva, tenemos que $(a, c) \in$ S, lo que significa que $c \in [a]$. Usando la simetría obtenemos la otra inclusión, y por tanto las dos clases son iguales.

Hemos dicho que, si un elemento cualquiera d de A es tal que $d \in [a]$ y $d \in [b]$, entonces $[d] = [a]$ y $[d] = [b]$; por tanto $[a] = [b]$.

Con esto hemos probado que:

Toda relación de equivalencia S define una partición sobre el conjunto en la cual está definida.

Veamos ahora la afirmación recíproca: si $\Im$ es una partición de un conjunto A, la relación definida por:

$(x, y) \in$ S si y solo si existe un conjunto B $\in \Im$ tal que $x, y \in$ B,

es de equivalencia.

Esta relación es reflexiva, puesto que, para todo $x \in$ A, existe un conjunto B $\in \Im$ tal que $x \in$ B, porque $\Im$ es una partición.

Por definición, la relación es simétrica. Para ver la transitividad, supongamos que $(x, y) \in$ S y $(y, z) \in$ S; entonces, existen un conjunto B $\in \Im$ tal que $x, y \in$ B y un conjunto C $\in \Im$ tal que $y, z \in$ C; como $y \in$ B y $y \in$ C, concluimos que B = C, porque en una partición los conjuntos distintos son disyuntos; es decir, que $(x, y) \in S$.

Así,

Toda partición $\Im$ sobre un conjunto, define una relación de equivalencia S en el conjunto.

Una pregunta natural es: si partimos de una relación de equivalencia S sobre un conjunto A, obtenemos la partición $\Im$ asociada a ella y luego, a esta le definimos la relación de equivalencia S$'$ correspondiente, ¿qué relación existe entre S$'$ y S?

Supongamos que $(x, y) \in$ S, entonces $x, y \in [x]$ y $[x] \in \Im$; por la definición de S$'$ se tiene que $(x, y) \in$ S$'$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in$ S$'$, entonces existe un conjunto B $\in \Im$ tal que $x, y \in$ B; como B es una clase de equivalencia de S, entonces $(x, y) \in$ S, y por tanto S = S$'$.

Y si comenzamos con una partición $\Im$, le hallamos la relación de equivalencia correspondiente R, y a esta le hallamos su partición $\Im'$, ¿se tiene que $\Im' = \Im$?

La respuesta de nuevo es afirmativa, porque si tomamos un elemento B $\in \Im$, como B $\neq \varnothing$, existe $x \in$ B, debemos probar que $[x] =$ B. Esto se sigue de la siguiente secuencia de equivalencias:

$y \in [x]$ si y solo si xRy si y solo si $x, y \in$ B si y solo si $y \in$ B.

Lo anterior significa que $B \in \Im'$. La segunda parte de la demostración es análoga y la dejamos al lector.

Capítulo

4

El proceso de medir

Cuando puedes medir aquello de lo que hablas y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello.
William Kelvin

4.1. El proceso físico de medir

En este capítulo pretendemos construir un sistema de números que nos permita expresar medidas de longitudes. Iniciemos nuestro estudio con un problema simple: queremos medir la longitud del lado más largo de nuestro cuaderno utilizando nuestras experiencias, pero sin utilizar reglas graduadas o cintas métricas, como las usuales.

Al proponer el problema a un grupo de estudiantes, algunos de ellos utilizaron sus dedos, su palma de la mano extendida, un billete, el carné de la universidad, entre otros instrumentos. Sus resultados fueron expresados como 16 dedos; una cuarta y un "tris", dos cédulas y media, etc.

Una primera conclusión es que podemos utilizar casi cualquier objeto que tenga longitud[1] para medir otra longitud, *solo requerimos llegar a un acuerdo.*

[1]El patrón más usado para medir longitudes es el *metro*: la longitud marcada en una barra de platino iridiado mantenida a una temperatura constante en un museo de Francia, la cual se reproduce para obtener metros "iguales".

Hubo objeciones a la utilización de los dedos o las manos, como unidad de medida, ya que el tamaño de ellos varía de persona a persona, lo que impide unificar el número que asignamos a la medida, pues una exigencia que debemos hacerle a un patrón de medida es que sea *invariable*, es decir, que se utilice siempre el mismo patrón y que él no cambie entre una medida y otra. Otra condición deseable para el patrón es que sea *accesible* a las personas interesadas en el proceso de medición, y debe ser fácilmente *manipulable*.

Además, como el patrón de medida escogido no cabe un número exacto de veces en el objeto que deseamos medir, debemos dividirlo, en lo posible, en partes iguales. *¿Qué pasaría si las partes no fueran iguales?*

Como vimos en el capítulo 1, en la naturaleza no hay dos objetos iguales, en consecuencia nos vemos obligados a recurrir a entes ideales, a objetos matemáticos que nos proporcionen la posibilidad de obtener; por ejemplo, segmentos de igual longitud.

4.2. El proceso matemático de medir

A diferencia de los procesos físicos donde la medida implica error y donde las precisiones son limitadas, los procesos matemáticos son ideales, no recurren a las medidas directas; por ejemplo, en la geometría euclidiana no medimos con cintas métricas, ni con objetos reales, ni con programas de computadores, sino utilizando el *razonamiento lógico*: admitimos como ciertas, afirmaciones que sean consecuencias lógicas de otras que sabemos o suponemos verdaderas. Este recurso es el utilizado en las matemáticas y en otras ciencias y es conocido como método axiomático. En él aceptamos como ciertas algunas afirmaciones iniciales que llamamos *axiomas* o *postulados*, y deducimos de ellos otras afirmaciones que llamamos *teoremas*.

En la geometría euclidiana se aceptan como verdaderas las nociones comunes mencionadas en el capítulo 1 y los 5 postulados propuestos por Euclides:

1. Dados dos puntos cualesquiera, es posible trazar una recta de un punto al otro (por dos puntos pasa una única recta).

2. Un segmento de recta cualquiera puede prolongarse de manera indefinida en línea recta.

3. Es posible trazar una circunferencia con cualquier punto como centro y con cualquier segmento de recta como radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto exterior a una recta es posible trazar una única paralela a la recta dada.

Con estos postulados se demuestran teoremas y se elaboran construcciones geométricas utilizando las reglas usuales de la lógica. Por ejemplo, Euclides plantea en la proposición I-3 de los *Elementos* la siguiente construcción y argumentación para: "dadas dos rectas desiguales quitar de la mayor una recta igual a la menor" (Euclides, 1991, p. 205): sean AB y r las dos rectas desiguales, AB mayor que r; colóquese sobre el punto A la recta AC igual a r (proposición I-2) y trácese el círculo con centro en A y radio AC, que corta a la recta AB en el punto E. Entonces, AE es igual a AC y como AC es igual a r, se concluye que AE es igual a r y, por tanto, se ha quitado de la recta AB una recta igual a r (figura 4.1).

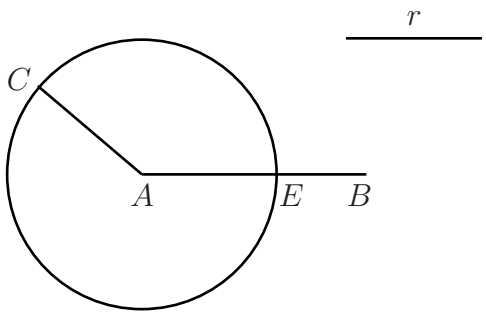


Figura 4.1

Intentemos ahora dividir un segmento de recta en dos partes congruentes[2] justificando cada afirmación. Si bien mantenemos los principios expresados por Euclides en los *Elementos*, haremos una presentación más actual de la construcción.

4.2.1. Bisección de un segmento

Para dividir un segmento[3] $\overline{AB}$ en dos partes iguales, usemos el tercer postulado; tomemos el punto A como centro y $\overline{AB}$ como radio para trazar una

[2]Proposición I-10 de los *Elementos*.

[3]El segmento determinado por los puntos A y B lo notaremos como $\overline{AB}$.

circunferencia; luego, con el mismo radio y haciendo centro en B, tracemos otra circunferencia que interseque a la anterior[4], como se muestra en la figura 4.2.

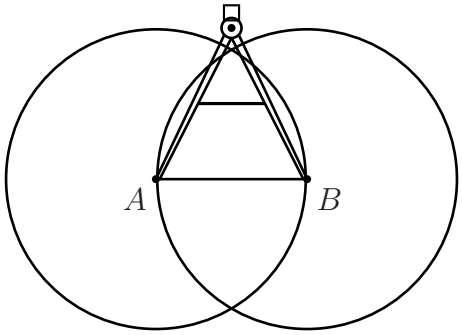


Figura 4.2

Uniendo los puntos de intersección entre las circunferencias, construimos un segmento que divide a $\overline{AB}$ en dos partes congruentes.

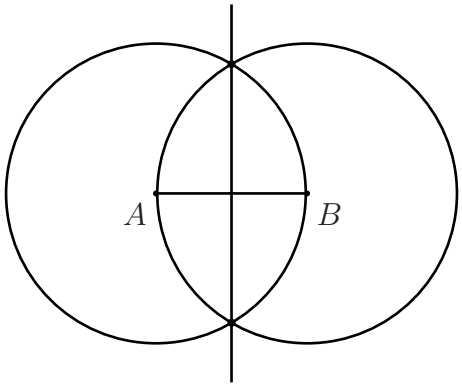


Figura 4.3

Según la construcción que realizamos (figura 4.3), efectivamente, el segmento quedó dividido en dos partes congruentes; sin embargo, es necesario demostrarlo.

[4]En los axiomas de Euclides no hay algún enunciado que permita garantizar esta afirmación, que parece tan evidente, como lo hizo notar Moritz Pash (1882). En la formulación axiomática de la geometría de Hilbert se incluye un axioma, el cuarto axioma de ordenación, que resuelve esta dificultad (axioma plano de ordenación o axioma de Pasch).

Si a los puntos de intersección de ambas circunferencias los llamamos C y D, respectivamente, como se muestra en la figura 4.4, al trazar segmentos que unan a C con A, A con D, D con B y B con C, obtenemos varios triángulos[5], entre ellos ΔCAD y ΔCBD, sobre los cuales centraremos nuestra atención para mostrar que los segmentos $\overline{AX}$ y $\overline{XB}$ son congruentes entre sí, y por tanto el punto X es el punto medio de $\overline{AB}$.

Inicialmente, tenemos que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ porque ambos son radios de la primera circunferencia trazada, y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ porque son radios de la segunda circunferencia; luego, de acuerdo a que si dos cosas son iguales a una tercera, estas son iguales entre sí, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

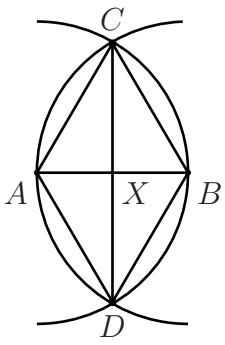


Figura 4.4

Por razones similares $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, y como ΔCAD y ΔCBD comparten el lado $\overline{CD}$, tenemos que $\Delta CAD \cong \Delta CBD$, porque si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

De esta manera, $\angle ACD \cong \angle BCD$ porque son partes correspondientes de triángulos congruentes; además, ya tenemos que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, y como $\overline{CX}$ es congruente a sí mismo, obtenemos que, dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados del ΔACX son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido entre los lados del ΔBCX, por lo cual $\Delta ACX \cong \Delta BCX$, y en consecuencia $\overline{AX} \cong \overline{BX}$.

[5]Si A, B y C son tres puntos no todos colineales, llamaremos *triángulo* al conjunto de puntos de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. A, B y C son conocidos como los vértices del triángulo, y los utilizaremos para notar el triángulo; es decir, para referirnos a un triángulo cualquiera nombraremos sus vértices precedidos del símbolo Δ; de esta manera, en lugar de escribir, por ejemplo, triángulo ABC, escribiremos ΔABC.

Hemos demostrado (a partir de hipótesis y siguiendo un procedimiento razonable) que es posible dividir un segmento en dos partes congruentes y, de esta forma, cada parte en dos para obtener cuatro, y así sucesivamente, por lo cual, podemos conjeturar que es posible dividir un segmento en 2^n partes congruentes.

Ejercicios

1. *Demuestre que:*

   a) *Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. Este es conocido como el teorema lado-lado-lado de la congruencia de triángulos.*

   b) *Si dos triángulos son congruentes, entonces sus lados y ángulos correspondientes son congruentes entre sí.*

2. *Muestre otra forma de dividir un segmento en dos partes congruentes y justifique cada paso del proceso.*

4.2.2. División de un segmento en k partes iguales

Para efectuar una medida de un segmento dado utilizando otro como patrón, no necesariamente la división del segmento patrón debe ser a la mitad, puede ser cualquier número de pedazos[6], solo basta, igual que en el caso anterior, con mostrar un mecanismo geométrico que nos permita dividir un segmento cualquiera $\overline{AB}$ en k partes iguales. Ilustremos el caso cuando $k = 3$, pues la idea general es la misma para otros casos. Para dividir $\overline{AB}$ en tres partes congruentes podemos proceder así:

1. Tomemos $\overline{AB}$ y un punto C que no esté en la recta que contiene a $\overline{AB}$; tracemos una semirrecta sobre $\overline{AC}$. Desde el punto C y con radio $\overline{AC}$ marcamos otro punto D sobre $\overrightarrow{AC}$[7]; luego desde D con radio $\overline{AC}$ marcamos otro punto E, obteniendo así tres segmentos congruentes (figura

[6] De hecho, el sistema de medidas que más se utiliza en el mundo divide cada unidad en diez pedazos.

[7] $\overrightarrow{AC}$ se lee "semirrecta AC".

4.5). (El proceso continúa sucesivamente de acuerdo con el número de veces en que se quiera dividir $\overline{AB}$).

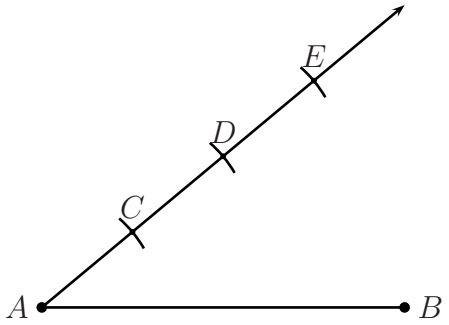


Figura 4.5

2. Tracemos $\overleftrightarrow{EB}$ y sendas paralelas a esta recta desde los puntos D y C (figura 4.6).

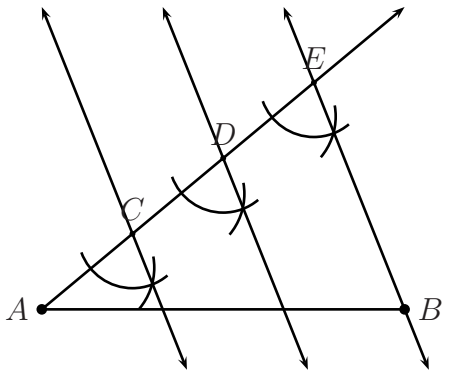


Figura 4.6

Los cortes de estas rectas con $\overline{AB}$ dividen a $\overline{AB}$ en tres partes congruentes.

Ejercicio

Demuestre la anterior afirmación dentro de la geometría de Euclides.

Hasta ahora hemos restado un segmento de otro mayor y hemos dividido un segmento en un número cualquiera de partes iguales; veamos cómo aplicar esto para medir otros segmentos con uno dado.

4.2.3. Medida de la longitud de un segmento usando otro cualquiera como patrón

Si deseamos medir $\overline{AB}$ usando $\overline{CD}$ como patrón de medida (que también llamaremos *unidad*) podemos proceder así:

1. Colocamos $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ a partir del punto A, tantas veces como sea posible sin pasar por el punto B. Supongamos que ocurre n veces.

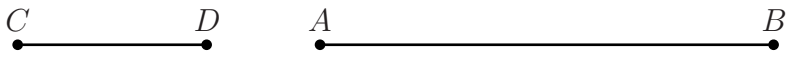


Figura 4.7

2. Si todavía queda un resto $\overline{PB}$ de $\overline{AB}$, entonces dividimos $\overline{CD}$ en dos partes (o en k partes) congruentes, y medimos el resto con esas partes.

3. Si después de ello queda todavía un resto, dividimos de nuevo la medida en dos partes (o en k); esto es, dividimos $\overline{CD}$ en cuatro partes, y repetimos la misma operación sucesivamente hasta conseguir la precisión deseada.

Naturalmente, la unidad puede dividirse en tantas partes como deseemos, y cada una de esas partes, a su vez, en igual número de partes, y así sucesivamente.

Ejercicios

1. *En una regla de* 12 *cm haga cuatro marcas* (*ninguna de ellas en* 1) *de forma que se puedan medir todas las longitudes cuyos resultados sean números naturales entre* 1 *y* 12.

2. *Un hombre era dueño de un terreno cuadrado y vendió la cuarta parte. El resto de terreno quedó en forma de L. Al hacer su testamento les dejó esta propiedad a sus cuatro hijos, con la condición de que la dividieran en cuatro lotes del mismo tamaño y de la misma forma. ¿Será posible hacerlo?*

3. *Estudie el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD entre dos números naturales y explique cómo puede utilizarse en el proceso matemático de medir.* El algoritmo de Euclides para encontrar (a, b) es el siguiente: si $0 < b < a$, aplicamos el algoritmo de la división y encontramos que

$$a = bq_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < b.$$

Ahora bien, si $r_1 = 0$ entonces $b \mid a$ y $(a, b) = b$. Si no, aplicamos nuevamente el algoritmo de la división con b como dividendo y r_1 como divisor, de donde obtenemos:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Si $r_2 = 0$ entonces $r_1 = (r_1, b) = (a, b)$[8]. Si no, repetimos el proceso, hasta llegar, a lo sumo, en b pasos a un residuo 0; obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, && 0 \leq r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2, && 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, && 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k, && 0 \leq r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1} + 0.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$(a, b) = (r_1, b) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{k-1}, r_k) = r_k.$$

4.2.4. Medida de áreas

Para medir áreas debemos, igualmente, escoger una unidad de área y en caso de ser necesario dividirla en partes iguales. Si consideramos que la igualdad de las partes de una unidad significa que estas sean congruentes entre sí, para que una unidad tenga mitad es necesario que tenga algún eje

[8] Si $a = bq + r$, entonces $(a, b) = (b, r)$.

de simetría; por ejemplo, como unidades de medida de área en el plano de la geometría euclidiana, podemos escoger rectángulos que se pueden dividir en dos rectángulos iguales, de manera que cada una de ellas sea de nuevo un rectángulo y congruentes entre sí, y cada una de ellas se puede dividir en dos partes iguales y así sucesivamente en un proceso infinito.

No sucede lo mismo con los triángulos o con los cuadrados, o con los círculos; si un triángulo es equilátero o isósceles tiene mitad, y aunque esas dos partes son congruentes entre sí, cada una de estas ya no es un triángulo equilátero, ni isósceles, y en el caso de los círculos o los cuadrados, la mitad de un círculo no es un círculo y la mitad de un cuadrado tampoco es un cuadrado[9].

Pero en realidad, para medir el área de una figura, la congruencia no es el tipo de igualdad que nos interesa entre las partes de la unidad, lo que buscamos es una unidad, bien sea rectángulo, cuadrado, triángulo o círculo, o lo que sea, donde existan figuras semejantes que tengan la mitad (o la tercera parte, u otra) del área (Luque, Mora y Torres, 2006a) de la que escogemos como unidad. Y siempre es posible construir un triángulo equilátero que tenga la mitad del área de un triángulo equilátero dado de lado l, basta escoger como lado $l_2 = l/\sqrt{2}$. O construir un círculo que tenga la mitad del área de un círculo dado de radio r, basta escoger como radio $r_2 = r/\sqrt{2}$.

Ejercicio

Explore construcciones y argumentos geométricos para dividir figuras geométricas como cuadrados, rectángulos o triángulos, en partes iguales.

[9] Aunque, por ejemplo, un triángulo equilátero se puede dividir en cuatro triángulos equiláteros iguales o un cuadrado en cuatro cuadrados iguales o un trapecio en la misma cantidad de trapecios iguales entre sí (¡inténtelo!). Ideas como estas fueron estudiadas por Martin Gardner (1914-2010). ¡Anímese a explorar!

4.3. Representación de medidas: expresiones bimales, trimales, ..., decimales, etc.

Teniendo ya un procedimiento para dividir un segmento en cualquier número de partes, nos ocuparemos de estudiar una forma para escribir los resultados de una medida[10].

Si para efectuar una medida dividimos la unidad en dos pedazos iguales, y estos a su vez en dos, y estos de nuevo en dos, y así sucesivamente, es natural pensar en la base dos para expresar nuestra medida[11], pues en base dos cada casilla a la derecha de otra significa la mitad de la casilla anterior (de izquierda a derecha); esto es, si queremos escribir la mitad de la unidad, que es donde terminan los números naturales, que ya conocemos, basta colocar nuevas casillas a la derecha, de manera que cada una signifique la mitad de la anterior, con el cuidado de poner una marca, digamos |, que separe las unidades de las fracciones de la unidad.

Por ejemplo, si un pupitre mide dos billetes más la mitad de la mitad de un billete, que llamaremos un cuarto de billete, representaremos esa medida

[10]En el año 952 d.C. el matemático árabe Al-Uqlidisi, en el capítulo 3 de su obra *Kitab al-fusul fi al-hisab al-Hindi*, emplea una notación muy cercana a la nuestra para separar la parte entera de la decimal; por ejemplo, escribe: 2'375 para indicar la mitad de 4,75 (1157, traducida por Saidan, 1978). Al-Kashi, 500 años después aproximadamente, en su tratado *La llave de la aritmética* (1427) introdujo la notación decimal (llamada en ese entonces, al igual que en la época de Uqlisidi, fracciones decimales) basado en los números sexagesimales, hace los decimales a partir de un décimo con potencias sucesivas de 10 y utiliza los decimales para realizar cálculos; además establece tablas para pasar una fracción sexagesimal a la decimal y viceversa, pues en ese entonces lo usual era la utilización de fracciones sexagesimales. Rudolff (1530) utiliza una línea vertical para separar las unidades de las fracciones de la unidad, en lugar del punto o coma que empleamos ahora, escribía entonces 373 | 95 para 373,95. Las expresiones y cálculos con decimales los propuso el matemático Belga Simon Stevin en su libro *La Disme* (1585), pero utilizando una notación muy distinta a la actual, utilizó expresiones como 32 ⓪ 5 ① 7 ② para representar 32,57. Matemáticos posteriores a Stevin como Wilhelm von Kalcheim adaptan la notación del belga y escriben, por ejemplo 693 ② para 6,93 y otros como Beyer, escriben:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & v \\ 8 & & 7 & 9 & 8 & \end{array}$$

para simbolizar 8,00798. En 1620 John Napier propuso la notación actual que sustituyó a la de Stevin y sus variaciones (Cajori, 1928).

[11]Según el número de partes en que dividamos la unidad de medida escogemos la base para expresar los resultados.

de la siguiente manera:

$$1\,0 \mid 0\,1_{(2)},$$

donde el número que se encuentra a la izquierda del símbolo | es dos, escrito en base dos, mientras que las cifras a la derecha de | representan la mitad de una unidad, en la primera casilla y la mitad de la mitad de una unidad en la segunda casilla; las demás posiciones a la derecha del último 1 representan la mitad de la mitad de la mitad de una unidad, la mitad de la mitad de la mitad de la mitad de una unidad, y así sucesivamente.

¿Por qué el símbolo |? En realidad, solo tiene el propósito de insistir en que uno puede inventarse lo que se le ocurra; claro está que si ya existe un símbolo inventado que cumple la misma función que el nuestro, es mejor utilizarlo; por esto, en lugar de | utilizaremos la usual coma (,)[12]. Luego diremos que nuestro pupitre mide (de manera ideal) 10,01 billetes, en base dos.

Debemos ahora definir los procedimientos para operar con estos nuevos números, en su representación *bimal*[13].

4.3.1. Operaciones entre números utilizando representación n-mal

4.3.1.1. Adición

Para sumar dos de estos *nuevos* números, usando su representación bimal, realizamos un procedimiento similar al que utilizamos para sumar números naturales mediante representaciones en diferentes bases, pues el sistema continúa siendo posicional.

Si queremos sumar por ejemplo $10,01$ con $1,11$, sumamos inicialmente las cifras de la derecha (que corresponden a la mitad de la mitad de una unidad, las cuales llamaremos *cuartésimas*), así: $1+1$ significa la mitad de la mitad de una unidad más la mitad de la mitad de una unidad, lo cual nos da una mitad (que llamaremos *dósimas*), pues con dos mitades formamos una unidad de la casilla de la izquierda, lo cual representamos: 10; por tanto, tenemos cero cuartésimas y una dósima, que tendremos en cuenta al sumar las dósimas.

[12]En algunos textos y las calculadoras es común usar punto en lugar de coma para separar las cifras decimales.

[13]Si escribimos los números en base n llamaremos a tales expresiones representaciones n-males de números.

En nuestro ejemplo tenemos $0+1=1$, más 1, obtenido en el paso anterior, tenemos 10, que representa cero dósimas y una unidad, que sumamos con la otra unidad del segundo sumando, obteniendo 10; cero unidades, y un grupo de dos, el cual al ser sumado con el otro 1 del primer sumando resulta ser nuevamente 10.

En conclusión, la suma es:

$$\begin{array}{r} 10,01 \\ +1,11 \\ \hline 100,00 \end{array}$$

Ejemplo

En base 12 tenemos que

$$\begin{array}{r} 34568,679 \\ +\ 2348,765 \\ \hline 368B5,222 \end{array}$$

4.3.1.2. Sustracción

Para restar[14] se realiza un procedimiento similar al de la adición, teniendo en cuenta que una mitad más otra mitad forman una unidad de la posición izquierda. Por ejemplo, en base 3:

$$\begin{array}{r} 1,201 \\ -\ 0,112 \\ \hline 1,012 \end{array}$$

Y en base 12:

$$\begin{array}{r} 53414,630 \\ -\ 2568,453 \\ \hline 50A68,199 \end{array}$$

[14]La sustracción con expresiones n-males, como en el caso de los números naturales, no es una operación en el sentido actual, pues no todas las restas son posibles; es necesario, como antes, que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.

Ejercicio

Escriba un algoritmo para efectuar sustracciones de números expresados con n-males y explíquelo.

Es natural que en la suma y la resta de expresiones bimales se adopte el procedimiento de las operaciones entre números naturales en cualquier base, pues en esencia el sistema es posicional y sus valores relativos son los mismos. Una décima equivale a 10 centésimas, lo mismo que una decena equivale a 10 unidades.

Hay un problema común en la adición y la sustracción cuando necesitamos operar dos números que tengan distinto número de cifras n-males[15]. Desde el punto de vista operativo sabemos que

$$2 = 2,0 = 2,000\cdots$$

porque dos unidades más cero n-ésimas son solo dos unidades y no importa cuántos ceros escribamos a la derecha, ellos significan que no hay partes de la unidad en nuestra medida. Pero desde el punto de vista físico de la precisión de la medida, sí hay diferencia entre escribir 2 y $2,0$ pues en el último caso se esta afirmando que la precisión de la medida llega hasta las n-ésimas. Para nuestro estudio adoptaremos el primer punto de vista.

4.3.1.3. Multiplicación

Entre números naturales, multiplicar significa sumar varias veces un mismo sumando, pero entre n-males, ¿qué significado le podemos asignar a una multiplicación? Iniciemos la discusión dándole sentido a multiplicar un número natural k (que podemos identificar con el n-mal $k,0$) por un n-mal; por ejemplo, $3 \times 1,2$.

En este caso, tiene sentido repetir k veces el n-mal y sumar:

$$3 \times 1,2 = 1,2 + 1,2 + 1,2 = 3,6.$$

Ahora démosle sentido a $1,2 \times 3$. Podemos recurrir al viejo truco de extender la validez de la propiedad conmutativa de la multiplicación; es decir, *si queremos que la multiplicación de números escritos en representación*

[15]Llamamos cifras n-males a aquellas ubicadas a la derecha de la coma.

n-mal sea conmutativa como la de los números naturales, sería bueno aceptar que

$$1,2 \times 3 = 3 \times 1,2 = 3,6.$$

Solo nos queda darles un significado a la multiplicación de dos n-males cualesquiera; por ejemplo, $1,2 \times 0,2$ no puede significar: repetir $1,2$ veces $0,2$ y sumar, porque no sabemos qué sentido darle a $1,2$ veces.

Podríamos intentar encontrar un algoritmo para multiplicar, por ejemplo, $0,1 \times 0,1$ en base 2, sabiendo que la respuesta es $0,01$; pues estamos hablando de la mitad de la mitad.

Un camino que ya es común para nosotros, es *copiarnos* del algoritmo de la multiplicación para números naturales, buscar analogías entre ese procedimiento y el que deseamos proponer modificando elementos que hacen parte de él, de esta manera, si queremos multiplicar $0,1 \times 0,1$, lo disponemos uno debajo del otro, teniendo en cuenta las posiciones de cada cifra, así:

$$\begin{array}{r} 0\,,\,1 \\ \times\, 0\,,\,1 \end{array}$$

Multiplicamos primero dósimas con dósimas, con lo que obtenemos cuartésimas; por esta razón, al multiplicar 1×1 obtenemos una cuartésima, y conservando el lugar que les corresponde a las cuartésimas las ubicamos en el siguiente lugar de las dósimas; esto es:

$$\begin{array}{r} 0\,,\,1 \\ \times\, 0\,,\,1 \\ \hline \qquad\quad 1 \end{array}$$

Luego, multiplicamos un dósima con 0 unidades, de lo que obtenemos 0 dósimas; realizamos después un procedimiento similar al anterior para el otro número del segundo factor, teniendo en cuenta que al multiplicar unidades por dósimas se obtiene dósimas y unidades por unidades, unidades; finalmente sumamos los productos hallados, así:

$$\begin{array}{r} 0\,,\,1 \\ \times\, 0\,,\,1 \\ \hline \qquad 0\ 1 \\ +\,0\ \ 0 \\ \hline 0\,,0\ \ 1 \end{array}$$

El procedimiento es fundamentalmente el mismo en cualquier base, y como es natural con cualquier algoritmo, este se efectúa mecánicamente.

4.3.1.4. División

Para dividir[16] dos números expresados como n-males, procedemos como en la multiplicación: por partes. Inicialmente observemos que dividir dos números naturales, considerados como n-males, debe tener el mismo sentido de la división entre números naturales; es decir, repartir el primero en un número de grupos igual al divisor, siempre que el cociente sea un número natural considerado como n-mal.

Esta interpretación puede extenderse al caso de dividir un n-mal x entre un número natural k, podemos repartir x en grupos, considerando el n-mal como un número natural de pedazos de la unidad, por ejemplo en base 10, la división:

$$3,244 \div 4$$

puede interpretarse como 3244 milésimas dividido entre 4, lo que nos da 811 milésimas; es decir, $0,811$ unidades[17].

Este punto de vista nos permite ampliar el concepto de división entre números naturales, obteniendo como cociente números expresados como n-males; además, podemos efectuar divisiones que antes no eran exactas y ahora lo son, al escribir el número natural como n-mal. Por ejemplo, dividamos 25 entre 2 en base 6:

Como 25 unidades equivale a $25,0$ expresado como n-mal, si dividimos entre 2 de la forma expuesta anteriormente, obtenemos:

$$25 \div 2 = 12,3.$$

O en la misma base 6, efectuar $5 \div 4$ para obtener

$$5 \div 4 = 1,13.$$

Aparecen nuevas situaciones; por ejemplo, en base 8 tenemos que:

$$22 \div 7 = 2,44444\ldots$$

[16]Contrario a lo que sucede con los números naturales, la división entre n-males diferentes de 0, sí es una operación, en el sentido de que todas las divisiones son posibles, excepto la división por 0.

[17]Como se observa, hemos reducido el problema de considerar n-males a expresarlos como números naturales, algo similar sucede cuando, por ejemplo, pensamos en sumar, dos longitudes: 1,2 metros con 3,5 metros, podemos, por ejemplo, considerar tales longitudes en centímetros; así, la suma corresponde a 120 cm + 350 cm = 470 cm, que equivale a 4,7 m.

interpretando 22 como $22,000000\ldots$ con tantos ceros como deseemos aproximar el resultado. En este caso, el residuo se repite, y con él las cifras que siguen en el cociente, en un proceso que no podemos concluir, no importa cuántos ceros pongamos en el dividendo.

En base 10, una división con los mismos símbolos nos da otro resultado donde los residuos no son los mismos, pero sí se repiten en un ciclo sin fin. Por ejemplo:

$$22 \div 7 = 3,142857142857\ldots$$

Como después de la primera vez se pierde la vergüenza, podemos también eliminar las barreras que nos impedían dividir un número menor entre uno mayor, y efectuar divisiones como $1 \div 2$ que en base 10 es $0,5$; en base 5 es $0,2222\ldots$, etc.

Si algunas cifras n-males, no todas 0, se repiten, las llamaremos *n-males periódicos*, y como no podemos escribir todas sus cifras optamos por escribir, de acuerdo con la costumbre, una raya encima de las cifras que se repiten, las cuales llamamos *periodo*.

En nuestros ejemplos:

$$2,44444\ldots = 2,\overline{4}$$
$$3,142857142857\ldots = 3,\overline{142857}.$$

En algunos casos el periodo no comienza en la primera cifra decimal; por ejemplo, en base 10 tenemos que:

$$25 \div 12 = 2,083333\ldots = 2,08\overline{3}.$$

Los cálculos anteriores nos sugieren que un procedimiento para dividir dos números expresados como n-males cualesquiera es: primero, multiplicamos el dividendo y el divisor por 10 o 100 o 1000 o con tantos ceros como sea necesario para que el divisor quede convertido en un número natural; luego efectuamos la división como lo describimos anteriormente.

Ejemplos

1. Para efectuar en base 9

$$28,72 \div 0,8$$

la cambiamos por

$$2872 \div 80$$

efectuamos la división y obtenemos:

$$28,72 \div 0,8 = 33,1\overline{3}.$$

2. En base 10

$$0,84 \div 32 \quad \text{es lo mismo que} \quad 0,84 \div 32,00 = 84 \div 3200 = 0,02625.$$

Las divisiones entre números expresados como n-males también las escribiremos en la forma $\frac{a}{b}$ cuando a y b sean números naturales y b sea diferente de 0.

Ejercicios

1. *Pareciera que estas discusiones no tuvieran aplicación práctica alguna; sin embargo, una vieja anécdota nos permite repensarlo. En la época de la incorporación de Austria al Reich alemán (Niklitschek, 1953), la relación del marco alemán con el chelín austriaco fue fijada en* $2:3$*, naturalmente en base* 10*; con esto la conversión de marcos a chelines era sencilla. Un marco valía exactamente un chelín y medio. Y si un objeto costaba* 22 *marcos, su equivalente era* $22 + \frac{22}{2}$ *chelines, es decir, con* 33 *chelines ¡Fácil! Pero, ¿y la conversión de chelines a marcos? ¿Cuántos marcos son 10 chelines? ¿Existe alguna base en la cual las dos conversiones sean exactas?*

2. *¿En cuáles bases las divisiones* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{3}$ *tienen como resultado una expresión n-mal finita?*

3. *¿Existe alguna base en la que* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{3}$ *tengan como resultado una expresión n-mal periódica de una cifra?, ¿de dos?, ¿de tres?, ¿de k? Justifique.*

4. *Repita el ejercicio anterior con* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ *y* $\frac{1}{7}$. *Procure una generalización.*

5. *Muestre ejemplos de divisiones cuyos resultados tengan solo una cifra n-mal, dos, tres, etc.*

6. *Escriba la expresión decimal de* $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{1}{31}$, $\frac{1}{47}$, $\frac{1}{59}$, $\frac{1}{61}$, $\frac{1}{97}$, $\frac{1}{109}$, $\frac{1}{113}$. *¿Cuáles son sus periodos? Enuncie una conjetura al respecto. Escriba otros números con la misma propiedad. Encuentre ejemplos en base 6.*

7. *El primer residuo del desarrollo decimal de* $\frac{1}{7}$ *es el residuo que se obtiene cuando se divide* 10 *por* 7*; el segundo, es el que se obtiene al dividir* 10^2 *por* 7*; el n-ésimo residuo, cuando* 10^n *se divide por* 7*. Encuentre un ejemplo similar en base* 6*.*

8. *En el desarrollo de* $\frac{11}{7}$*, los residuos sucesivos en el proceso de la división son los residuos de* 11, 11×10, 11×10^2, 11×10^3*, y así sucesivamente. Encuentre un ejemplo similar en base* 8*.*

9. *Al dividir* 11 *entre* 7*, el primer y séptimo residuo son iguales a* 4*, y el periodo inicia con el segundo dígito del desarrollo y termina con el séptimo.*

   En el desarrollo de $\frac{3}{7}$*, el primer y séptimo residuo son iguales a* 2*, y el periodo consta de los primeros seis términos del desarrollo. ¿Hay una regularidad? Encuentre un ejemplo en base* 12*.*

10. *¿Es cierto que si una división por un número b tiene a lo más* $b-1$ *residuos diferentes, o sea que si los primeros* $b-1$ *residuos son diferentes, el siguiente será uno de los que ya aparecieron, y el periodo del desarrollo decimal de* $\frac{a}{b}$ *no puede contener más de* $b-1$ *dígitos? ¿Depende de la base?*

11. *El periodo del desarrollo decimal de* $\frac{1}{7}$ *es* 142857*. Si multiplicamos este número por* 2 *obtenemos* 285714*; por* 3 *obtenemos* 428571*, por* 4 *obtenemos* 571428*; por* 6*, obtenemos* 857142*, y así sucesivamente.*

Los dieciséis dígitos del periodo de $\frac{1}{17}$ *son los dígitos del* 0 *al* 9 *inclusive, y los seis del período de* $\frac{1}{7}$.

El periodo de $\frac{1}{47}$ *tiene* 46 *dígitos que constan de cuatro conjuntos del* 0 *al* 9, *y los seis que se encuentran en el periodo de* $\frac{1}{7}$. *Construya un ejemplo similar en base* 12.

12. *En base* 10 *tenemos que si un número primo* p *cuyo último dígito es* 7 *y tiene un periodo* N *de* $p-1$ *dígitos, al multiplicarse por los números del* 1 *al* $p-1$, *cada dígito de* N *estará una sola vez en el extremo derecho del número, y por tanto los dígitos de* N *serán los que se encuentran en la extrema derecha de los números* cN *para* $c = 1, 2, 3, \cdots p-1$, *el último dígito de* N *será* 7. *Verifique lo dicho y construya un ejemplo en base* 12.

13. *¿Si efectuamos una división cualquiera entre dos números naturales, digamos* a *y* b, *con* b *diferente de cero, y suponemos que el resultado es un n-mal periódico, ¿es posible determinar el número máximo de cifras n-males que hay en el periodo? Estudie el problema, primero en base diez y luego en otras bases. Formule conjeturas al respecto.*

4.3.1.5. Divisiones de la unidad

Estudiemos ahora algunas divisiones elementales en diferentes bases, con dividendo 1 y divisores $2, 3, 4, \ldots$ etc., respectivamente, tratando de encontrar regularidades.

Por ejemplo, en base 2 la división de uno entre dos corresponde a $\frac{1}{10}$, es decir:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 10 \\ \hline 10 & 0,1 \\ 0 & \end{array}$$

y obtenemos que $\frac{1}{10} = 0,1$.

Naturalmente, la representación de la misma división de uno entre dos cambia si escogemos otra base; por ejemplo, en base 4 es $0,2$, en base 6 es $0,3$ y, en general, en cualquier base par k es $0,\frac{10}{2}$, donde 10 corresponde a k escrito en base k. Sin embargo, abusando de la notación, para expresar regularidades escribiremos k en lugar de 10, por ejemplo la división de uno entre dos en base par k la expresamos como $0,\frac{k}{2}$.

Pero en base 3, la división $\frac{1}{2}$ da como resultado el número periódico $0,\overline{1}$.

Ejercicio

Encuentre una fórmula para $\frac{1}{2}$ en cualquier base impar p. Justifique sus procedimientos.

La división $\frac{1}{3}$ en cualquier base m que sea múltiplo de 3 tiene la forma:

$$\frac{1}{3} = 0,\frac{m}{3}$$

Si la base es 4, 7, 10 y en general se la forma $t = 3k + 1$, entonces

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{\frac{t-1}{3}}$$

Y finalmente[18] si la base es de la forma $p = 3k + 2$, entonces

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{\frac{p-2}{3}\,\frac{2p-1}{3}} = 0,\left(\frac{p-2}{3}\right)\left(\frac{2p-1}{3}\right)\left(\frac{p-2}{3}\right)\left(\frac{2p-1}{3}\right)\ldots$$

por ejemplo, en base 2 es $0,10101010\ldots$, en base 5 es $0,13131313\ldots$, en base 8 es $0,252525\ldots$

Como vemos, toda división entre números naturales puede escribirse en cualquier base, pero ¡para cualquier división existen algunas bases en las que

[18]Los paréntesis consecutivos no indican operación alguna; solo los usamos para diferenciar cada una de las cifras que conforman el número.

la expresión n-mal es finita! Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0,2 \quad \text{en base } 6$$
$$\frac{1}{3} = 0,4 \quad \text{en base } 12$$

y, de hecho, ¡existen infinitas bases en las cuales $\frac{1}{3}$ tiene expresión n-mal finita de una sola cifra!

Ejercicios

1. *La tabla 4.1 muestra los resultados de expresar* $\frac{1}{4}$ *como n-mal en una base k. Haga sus propios cálculos para* $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$*, etc., y proponga una conjetura para representar como n-mal la división* $\frac{1}{k}$*.*

Representación de	Base $k > 4$	Representación final
$\frac{1}{4}$	$k = 4p$	$0,\left(\frac{k}{4}\right)$
	$k = 4p+1$	$0,\left(\overline{\frac{(k-1)}{4}}\right)$
	$k = 4p+2$	$0,\left(\frac{(k-2)}{4}\right)\left(\frac{(2k)}{4}\right)$
	$k = 4p+3$	$0,\left(\overline{\frac{(k-3)}{4}}\right)\left(\overline{\frac{(3k-1)}{4}}\right)$

Tabla 4.1

2. *¿En cuáles bases la fracción* $\frac{p}{q}$ *tiene expresión n-mal finita de una sola cifra, de dos cifras, . . ., de k cifras?*

3. *Existen bases en las que* $\frac{1}{3}$ *tiene expresión n-mal periódica cuyo periodo es de una sola cifra; por ejemplo en base* 10*,*

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

también las bases 13*,* 16*, etc. Existen bases donde la expresión n-mal tiene periodo de* 2 *cifras, como las bases* 14*,* 17*, etc. ¿En cuáles bases la división* $\frac{p}{q}$ *tiene expresión n-mal periódica cuyo periodo es de una sola cifra, de dos,. . ., de k cifras? ¿El resultado depende de p?*

4.3.2. Expresiones *n*-males como divisiones entre números naturales

En la última parte de la sección anterior, realizamos algunas divisiones entre números naturales y obtuvimos como resultados n-males, que no correspondían a números naturales. Ahora trataremos el problema inverso; como de costumbre, empecemos por los casos más sencillos.

1. Si el número representado como n-mal tiene un número finito de cifras n-males:

   Por ejemplo, sabemos que en base 7, $0,1$ representa la unidad de medida dividida en siete partes iguales; esto lo escribimos en base mayor o igual a 8, como $\frac{1}{7}$; el número $0,01$ representa la parte que resulta del proceso anterior en siete partes iguales, y esto lo podemos escribir $\frac{1}{7^2}$ (en base k, $k > 7$).

   En base 10 conocemos una manera más breve de expresar lo mismo:

$$0,11 = \frac{11}{100}$$

   ¿Será que en base 7, $0,11_{(7)} = \frac{11}{100}{}_{(7)}$?

Usted puede verificarlo, realizando la división. Realmente se tiene que en cualquier base:

$$0,11 = \frac{11}{100},$$

o un poco más, en base 7 y en cualquier base mayor que 4, tenemos que:

$$0,1234_{(7)} = \frac{1234_{(7)}}{10000_{(7)}}.$$

2. Si la expresión n-mal es periódica:

   Una expresión n-mal periódica es una suma[19] de infinitos términos, pero no hemos desarrollado aún mecanismos para efectuar una operación con infinitos términos; sin embargo, algunas consideraciones nos permitirán estimar su valor, si este existe. Estudiemos un ejemplo sencillo en base 10:

$$S = 0,\overline{9} = 9\left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$10S = 9,\overline{9} = 9\left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \cdots\right),$$

   si restamos[20] la segunda igualdad de la primera nos queda:

$$9S = 9,$$

   es decir que ¡¡$S = 1$!!. Mírelo bien $0,\overline{9} = 0,9999999\ldots = 1$[21].

   Por supuesto, podemos cambiar el 10 por una base cualquiera k, y el procedimiento permanece intacto. También es útil cuándo el número de cifras periódicas es mayor que uno; por ejemplo, encontremos algunos números naturales cuya división tenga por resultado $0,\overline{123}$ en base 5:

[19] Estas sumas, conocidas entre los matemáticos como *series*, se pueden efectuar algunas veces en que su resultado es un número finito; estudiar las condiciones para que se pueda efectuar y la manera de hacerlo forma la teoría de sucesiones y series y, más generalmente, la teoría de convergencia.

[20] Siendo estrictos, esto tampoco es una resta porque tiene infinitos términos; pero intuitivamente sospechamos que como por cada uno de los términos de la segunda expresión hay uno igual en la primera, podemos eliminarlos por pares.

[21] En 1770, en la obra *Elementos de Álgebra*, Euler (1822) demuestra que $0,9999\ldots = 1$, usando la convergencia de la serie geométrica que resulta de la expresión polinómica del número $0,999\ldots$ (p. 170).

a) Primero pongámosle nombre al número

$$d = 0, \overline{123}.$$

b) Multipliquemos ambos miembros de la anterior igualdad por $1000 = 10^3$, porque tenemos tres cifras periódicas

$$1000d = 123, 123123123\ldots$$

c) Restemos la primera igualdad de la primera

$$\begin{array}{rl} 1000d = & 123, 123123123\ldots \\ - \quad d = & 0, 123123123\ldots \\ \hline 444d = & 123, 000\ldots = 123 \end{array}$$

Por tanto:

$$d = \frac{123}{444} \quad \text{es decir que} \quad 0, \overline{123} = \frac{123}{444}.$$

Y en base 8:

$$0, \overline{123} = \frac{123}{777}.$$

Ejercicios

1. *Encuentre dos números naturales en base* 7 *cuya división sea* $31, 2\overline{145}$.

2. *Si multiplicamos el periodo del desarrollo decimal de* $\frac{1}{7}$ *por* 2, 3, 4, 5, 6, *observamos una curiosidad. Enúnciela.*

3. *Lo mismo sucede si multiplicamos el periodo de* $\frac{1}{17}$ *por los números entre* 1 *y* 16. *Encuéntrela y proponga una explicación. ¿Sucede lo mismo en otras bases?, ¿con otros números?*

4. *Demuestre que*

$$0, \overline{ab} = \frac{ab}{(n-1)n + (n-1)}$$

para cualquier base n.

5. *¿Cómo escribir como división entre números naturales n-males de la forma* $a, \overline{bc}, a, b\overline{cd}$, *etc.? Considere los diferentes casos (dos cifras antes de un periodo de una cifra, dos cifras antes de un periodo de dos cifras, etc.) e intente dar una generalización.*

4.3.3. Operaciones con números cuya expresión *n*-mal es periódica

Los resultados anteriores nos dan un mecanismo para operar números que tienen expresión n-mal periódica si damos alguna manera de encontrar dos números naturales, en el caso de que existan, tales que la división de ellos sea precisamente nuestro n-mal periódico.

Sin anunciarse, han aparecido entre nosotros números que aspiran a pasar desapercibidos y tener los mismos derechos (las mismas propiedades) que los n-males *finitos*[22], pero no hemos discutido cómo operar con estos números cuya representación n-mal tienen colas infinitas y que hemos llamado n-males periódicos. Esto es lo que haremos a continuación.

Y ya tenemos solución para nuestro problema inicial, para operar con números expresados como n-males periódicos, encontramos números naturales cuya división sea cada uno de los números a operar, luego buscamos una base común donde las divisiones tengan resultados n-males con finitas cifras n-males.

Por ejemplo, para sumar $0, \overline{3}$ con $1, \overline{7}$ en base 10,

$$\begin{array}{r} 0,3333333333333333333\ldots \\ \underline{1,7777777777777777777\ldots} \end{array}$$

no sabemos en qué lugar va un cero o un uno; sospechamos que todos deben ser unos, pero solo es una sospecha.

Una salida es que encontremos números naturales cuyas divisiones sean los números dados, en este caso

$$\frac{1}{3} \text{ y } \frac{16}{9},$$

[22]Pues ya vimos que, por ejemplo, 0,5 que es un decimal finito, también se puede representar como $0, 4\overline{9}$.

en base 10. Observamos los divisores, sabemos que si escribimos los números en base 9, obtenemos un número finito de cifras n-males; de hecho, los resultados son:

$$\frac{1}{3}_{(9)} = 0,3_{(9)} \quad \text{y} \quad \frac{16}{9}_{(10)} = \frac{17}{10}_{(9)} = 1,7_{(9)},$$

sumamos los resultados obteniendo $2,1_{(9)}$ y regresamos a la base 10:

$$2,1_{(9)} = \frac{21}{10}_{(9)} = \frac{19}{9}_{(10)} = 2,\overline{1}_{(10)},$$

entonces

$$0,\overline{3} + 1,\overline{7} = 2,\overline{1},$$

en base 10.

Podemos imaginar que el proceso se puede simplificar sumando las cifras correspondientes hasta el infinito, pero no siempre es así.

Por supuesto, también podemos multiplicar en base 9:

$$0,3_{(9)} \times 1,7_{(9)} = 0,53_{(9)},$$

y pasar el resultado a base 10:

$$0,53_{(9)} = \frac{53}{100}_{(9)} = \frac{48}{81}_{(10)} = 0,\overline{592}_{(10)},$$

o sea que en base 10:

$$0,\overline{3} \times 1,\overline{7} = 0,\overline{592}$$

y este resultado no tenemos otro modo de explicarlo. La división tiene un resultado aún más extraño.

Ejercicios

1. *Proponga otro procedimiento para sumar números n-males periódicos.*

2. *Estudie el problema de la multiplicación de números n-males periódicos; empiece por casos simples: n-mal de la forma k,0 por n-mal periódico, n-mal con finitas cifras n-males por n-mal periódico, etc. Trate de encontrar regularidades.*

4.3.4. Cambio de base entre n-males

Un procedimiento natural para pasar números de una base numérica a otra, consiste en aplicar el procedimiento mencionado para encontrar dos números naturales cuya división tenga como resultado el número en cuestión, pasar cada uno de ellos a la base deseada, y efectuar la división en dicha base; por ejemplo, pasemos $25,24_{(6)}$ a base 9:

$$25,24_{(6)} = \frac{2524}{100}\ {}_{(6)} = \frac{767}{40}\ {}_{(9)} = 18,4_{(9)}$$

Si recorremos el camino en el sentido contrario, obtenemos:

$$18,4_{(9)} = \frac{184}{10}\ {}_{(9)} = \frac{421}{13}\ {}_{(6)} = 25,24_{(6)}.$$

¡Como debe ser!

Sin embargo, cuando estudiamos los números naturales (Luque, Mora y Páez, 2013), encontramos dos procedimientos para pasar números de una base numérica a otra. Uno de ellos consiste en multiplicar cada una de las cifras del número por la potencia de la base que corresponda a su posición, y sumar los resultados. Naturalmente estos resultados deben escribirse en la base a la que deseamos pasar; por ejemplo, si deseamos cambiar $25_{(7)}$ a base 8, escribimos el número en forma polinómica:

$$25_{(7)} = 2 \times 7^1 + 5 \times 7^0$$

realizamos los productos en base 8 y sumamos:

$$2_{(8)} \times (7_{(8)})^1 + 5_8 \times (7_{(8)})^0 = 16_{(8)} + 5_{(8)} = 23_{(8)},$$

con lo que obtenemos el resultado: $25_{(7)} = 23_{(8)}$.

Este procedimiento debería poderse extender a los números expresados como n-males, teniendo en cuenta que las cifras n-males son potencias de $\frac{1}{n}$; pero aquí aparece un problema, veamos un ejemplo:

Para pasar $25,24_{(6)}$ a base 9, escribimos el número en forma polinómica:

$$25,24_{(6)} = 2_{(9)} \times (6_{(9)})^1 + 5_{(9)} \times (6_{(9)})^0 + 2_{(9)} \times \left(\frac{1}{6}\ {}_{(9)}\right)^1 + 4_{(9)} \times \left(\frac{1}{6}\,{}_{(9)}\right)^2,$$

para la parte n-mal calculamos

$$\text{¡¡ } \frac{1}{6}_{(9)} = 0,1\overline{4}_{(9)} \text{ !!}$$

como el resultado es periódico, ¡hasta aquí llegamos! ¿Qué hacemos ahora?

Una opción es escribir $\frac{1}{6}_{(9)}$ en una base en la cual el resultado tenga finitas cifras n-males; por ejemplo operando en base 12:

$$\frac{1}{6}_{(12)} = 0,2_{(12)} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{6}_{(12)}\right)^2 = 0,04_{(12)},$$

multiplicamos por los coeficientes y sumamos

$$\begin{aligned} 2_{(12)} \times \left(\frac{1}{6}_{(12)}\right) + 4_{(12)} \times \left(\frac{1}{6}_{(12)}\right)^2 &= 2_{(12)} \times 0,2_{(12)} + 4_{(12)} \times 0,04_{(12)} \\ &= 0,4_{(12)} + 0,14_{(12)} = 0,54_{(12)}. \end{aligned}$$

Ahora escribimos $0,54_{(12)}$, en base 9 obteniendo $0,4$; le sumamos las unidades y obtenemos

$$25,24_{(6)} = 13_{(9)} + 5_{(9)} + 0,4_{(9)} = 18,4_{(9)},$$

de nuevo, ¡*como debe ser*!

Ejercicio

¿Es posible aplicar el procedimiento de las divisiones sucesivas para cambiar de base en números expresados como n-males? Argumente.

4.3.5. Potenciación

Nuestro siguiente problema consiste en dar sentido a la expresión:

$$a^b = c$$

cuando a, b, y c son n-males.

Si b es un número natural, interpretado como el n-mal $b, 0$, la operación consiste en repetir b veces la base a, y multiplicar. Por ejemplo, en cualquier base mayor que 4 tenemos que:

$$(0,2)^{2,0} = (0,2) \times (0,2) = 0,04$$
$$(0,001)^{3,0} = 0,001 \times 0,001 \times 0,001 = 0,000000001$$

Pero si el exponente es un número n-mal que no corresponde a un número natural, la interpretación de este como número de veces que se escribe la base no tiene sentido.

Ejercicios

1. *¿Qué relación existe entre el número de cifras n-males de la base, el exponente y el número de cifras n-males del resultado?*

2. *Intente darle significado a los otros casos de potenciación.*

4.3.6. Radicación

Análogamente a lo que hicimos en la potenciación, solo trataremos el caso en que el exponente sea un número natural, es decir que buscaremos procedimientos para calcular raíz cuadrada, cúbica, etc.

Iniciemos calculando la raíz cuadrada de un número natural, en el caso en que el número no sea un cuadrado perfecto.

Por ejemplo, queremos calcular en base 10

$$\sqrt{79}$$

El primer método que aprendimos con los números naturales fue el tanteo: sabemos que la raíz debe estar entre 8 y 9, pero más cerca de 9; propongamos que sea $8,7$. Elevamos al cuadrado y obtenemos $75,69$, lo que significa que debemos aumentar nuestra estimación, digamos $8,9$; pero en este caso su cuadrado nos da $79,21$; es decir que el valor correcto está entre $8,7$ y $8,9$ pero más próximo a $8,9$, digamos $8,89$; elevamos de nuevo al cuadrado y obtenemos $79,0321$. Así obtenemos la raíz con el grado de aproximación que queramos.

Naturalmente, este engorroso procedimiento es útil también para calcular la raíz de un n-mal en cualquier base, y sirve también para calcular raíces cúbicas y superiores. Pero esto no es para enorgullecernos; deberíamos buscar algo mejor.

Logramos una pequeña mejora en el siguiente ejemplo: calculemos la raíz cuadrada de 1331 en base 5.

Como el número tiene cuatro cifras, su raíz cuadrada debe ser de dos cifras, y como el número 1331 está entre 100 y 10000, su raíz cuadrada está entre 10 y 100; las dos primeras cifras de la izquierda, en nuestro caso 13, nos permiten conjeturar que la cifra de las quinquenas en la raíz es 2 porque:

$$2^2 < 13 < 3^2.$$

¿Cómo hallar las cifra de las unidades? Un mecanismo ya usado consiste en ensayar con todas las cifras posibles para representar los números en base 5 hasta obtener la mejor aproximación a 1331; en nuestro caso es $24_{(5)}$, pues

$$24_{(5)} \times 24_{(5)} = 1241_{(5)}.$$

Esta manera nos lleva a una aproximación cada vez mejor y con la precisión que queramos de la raíz cuadrada de un número, pero, aunque no es práctica, nos conduce a un camino más promisorio.

Si $1331_{(5)}$ fuera el cuadrado de un número natural, su raíz cuadrada, como ya hemos dicho, tendría dos cifras: quinquenas (q) y unidades (u). Como sabemos que no lo es, su raíz cuadrada es la suma de un cuadrado y un residuo (r)[23], así

$$\begin{aligned} 1331 &= (q+u)^2 + r \\ 1331 &= (q^2 + 2qu + u^2) + r. \end{aligned}$$

También es de nuestro conocimiento que es posible encontrar la cifra de las quinquenas analizando solo las dos primeras cifras del número; razón por la cual nuestro primer paso es:

1. Separar el número en grupos de dos cifras de derecha a izquierda[24] y extraer la raíz cuadrada del primer grupo de números (este puede

[23] Aunque no conozcamos si la cantidad subradical es un cuadrado perfecto, tendremos en cuenta el residuo, pues este puede no ser cero.

[24] Dado que la raíz cuadrada de un número natural conformado por cinco cifras es un número compuesto por tres cifras, la de un número compuesto por cuatro o por tres cifras es un número conformado por dos cifras y la de un número de dos cifras (o de una cifra) es un número de una cifra.

quedar conformado por una cifra), la cual corresponderá a la primera cifra de la raíz deseada; así:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.31} & 2 \\ \hline & 2 \\ \end{array}$$

Luego, la cifra de las quinquenas es 2 ($q = 2$), pero esta no es exacta, pues $2^2 = 4$ y el número analizado fue 13. Tenemos entonces un primer residuo, que lo obtenemos mediante un segundo paso, de esta manera:

2. La cifra obtenida en el paso 1 (q), se eleva al cuadrado (q^2) y se resta del primer grupo de cifras; esta diferencia es el primer residuo, a la cual se le coloca –a derecha– el siguiente grupo de números:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.31} & 2 \\ \underline{-4} & 2 \\ 431 & \\ \end{array}$$

Observamos que 431 debe ser $2qu + u^2 = u\,(2q + u)$ más el residuo. Por tanto, si dividimos 431 entre $2q$, resulta la cifra de las unidades o una cifra mayor, pues la división debería hacerse entre $2q + u$, por lo cual el cociente puede resultar un número grande. De esta manera, lo que hacemos es dividir 43 quinquenas entre $2q$ (4 quinquenas) para obtener así unidades, de donde resulta 10. Como este número no lo podemos escribir en un solo lugar, consideramos una unidad menor; esto es, 4. Tenemos entonces que el siguiente paso es:

3. Separar el número conformado por la diferencia y el siguiente periodo en dos grupos, de manera tal que quede solo una cifra de derecha a izquierda; el número que quede a la izquierda lo dividimos entre el duplo de la raíz encontrada. Dicho cociente es la siguiente cifra de la raíz (podrá ser una cifra menor o una mayor):

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.31} & 24 \\ \underline{-4} & 2 \times 2 = 4 \\ 43.1 & \\ \end{array} \qquad 43 \div 4 = 10 \rightarrow 4$$

Para comprobar que, efectivamente, la cifra elegida es correcta (en este caso, 4), formamos un nuevo número con el duplo de las quinquenas más las unidades obtenidas –en unidades–, esto es, $2q+u$; en este caso, es 44, el cual multiplicamos por u para obtener $2qu+u^2$; esto es 44×4; este producto lo restamos a 431. Si es posible realizar esta sustracción entonces la cifra elegida es correcta. De manera general, se tiene que:

4. Para ver que efectivamente la cifra hallada es la correcta, se forma un nuevo número con la cifra del duplo y el cociente –siendo este último la cifra de las unidades–, este número se multiplica con la cifra en cuestión. Si el producto obtenido se puede restar del número que se dividió en dos grupos, la cifra obtenida es correcta; si no, se disminuyen tantas unidades como sean necesarias para poder realizar la resta.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13.31} & 24 \\ \hline -4 & 2\times 2=4 \\ \hline 43.1 & 44\times 4=341 \\ -341 & \\ \hline 40 & \end{array} \qquad 43\div 4=10\rightarrow 4$$

De esta manera, $\sqrt{1331_{(5)}}$ es 24, con residuo 40; lo cual podemos comprobar, así:

$$24^2+40=1241+40=1331.$$

Pero, obviamente, aquí no se detiene el procedimiento propuesto; podemos hallar una mejor aproximación de la raíz cuadrada de 1331; esto es, encontrar la raíz cuadrada n-mal (en este caso 5-mal) de 1331, así:

i. Escribimos el radicando como n-mal.

ii. Por cada pareja de ceros que se agregue a la derecha del número, obtenemos una cifra n-mal en la raíz que deseamos encontrar.

iii. En la raíz, separamos con punto tantas cifras n-males como grupos de dos cifras n-males haya en el radicando.

Ejemplo

De acuerdo con lo anterior, tenemos que la raíz cuadrada de 1331 con tres cifras 5-males es:

$\sqrt{1\,3.3\,1,0\,0.0\,0.0\,0}$	$24,322$	
-4	$2 \times 2 = 4$	
43.1	$44 \times 4 = 341$	$43 \div 4 = 10 \to 4$
$-3\,4\,1$	$24 \times 2 = 103$	
400.0	$1033 \times 3 = 3204$	$400 \div 103 = 3$
$-3\,2\,0\;4$	$243 \times 2 = 1041$	
$2\,4\,1\,0.0$	$10412 \times 2 = 21324$	$2410 \div 1041 = 2$
$-2\,1\,3\,2\;4$	$2432 \times 2 = 10414$	
$2\,2\,2\;1\,0.0$	$104142 \times 2 = 213334$	$22210 \div 10414 = 2$
$-2\,1\,3\,3\;3\;4$		
$3\,2\,1\;1$		

Encontramos entonces que la raíz cuadrada de $1331_{(5)}$ es aproximadamente igual a $24,322_{(5)}$, con residuo $0,003211$.

Usando el procedimiento expuesto anteriormente es posible encontrar la raíz cuadrada de cualquier número n-mal; si su raíz cuadrada no es exacta, se puede hallar una aproximación con tantas cifras n-males como se desee, tal como se enunció.

Un hecho que les parece curioso a algunos estudiantes es que por estar acostumbrados a que en los números naturales la raíz de un número es siempre menor que él, en números decimales puede no suceder así; por ejemplo:

$$\sqrt{0,6} = 0,774596669\ldots$$

Ejemplo

Para hallar la raíz cuadrada de 2 con una aproximación de cuatro cifras decimales, escribimos el 2 como decimal, y procedemos a ejecutar el algoritmo presentado:

$2,0\,0.0\,0.0\,0.0\,0$	$1,4142$	
-1	$1\times 2=2$	
$1\;\;0.0$	$25\times 5=125\otimes$	$10\div 2=5$
$-9\;6$	$24\times 4=96$	
$4\;0.0$	$14\times 2=28$	$40\div 28=1$
$-2\;8\;\;1$	$281\times 1=281$	
$1\;1\;\;9\;0.0$	$141\times 2=282$	$1190\div 282=4$
$-1\;1\;\;2\;9\;6$	$2824\times 4=11296$	
$6\;0\;4\;\;0.0$	$1414\times 2=2828$	$6040\div 2828=2$
$-5\;6\;5\;\;6\;4$	$28282\times 2=56564$	
$3\;8\;\;3\;6$		

Ejercicios

1. *Proponga o averigüe un método para encontrar la raíz cúbica de un número cualquiera en base* 10*, y extiéndalo a otras bases.*

2. *Averigüe las primeras 1000 cifras de* $\sqrt{2}$*; obsérvelas e intente encontrar un periodo o alguna regularidad.*

3. *Consulte otros métodos para extraer raíz cuadrada (busque por ejemplo en la historia*[25]*) y estudie si se pueden aplicar a otras bases.*

4.3.7. Logaritmación

Si pretendemos extender lo hecho con respecto a los logaritmos[26] en los números naturales a n-males, debemos mantener el significado y las propiedades para los números naturales interpretados como n-males, es decir que si a, b y c son n-males de la forma k,0 y

$$a^c = b \quad \text{entonces} \quad \log_a b = c$$

por ejemplo, el número N que satisface

$$\log_{7,0} N = 2,0 \quad \text{es el mismo que satisface} \quad 7,0^{2,0} = N$$

[25] Al-Kashi, en su obra *La llave de la aritmética*, desarrolló un método iterativo para obtener la raíz enésima de un número. Napier con su ábaco también.

[26] El matemático inglés John Napier (1550-1617), fue el inventor de la palabra *logaritmo* (del griego *logos*: razón y *arithmos*: número).

O si

$$\log_b 125,0 = 3,0, \quad \text{el valor de } b \text{ es tal que } b^{3,0} = 125,0$$

o lo que es lo mismo

$$b = \sqrt[3,0]{125,0}$$

Podemos extender nuestra definición de logaritmo a números n-males si el exponente es de la forma $k,0$, interpretando la potenciación de la misma forma, por ejemplo en números 7-males[27]:

$$(3,5)^{3,0}_{(7)} = (3,5 \times 3,5 \times 3,5)_{(7)} = 102,146_{(7)},$$

lo que interpretamos como:

$$(\log_{3,5} 102,146)_{(7)} = 3,0_{(7)}.$$

Esto quiere decir que $3,0_{(7)} = 3_{(7)}$ es el exponente al que hay que elevar $(3,5)_{(7)}$ para que nos dé como resultado $102,146_{(7)}$.

Los otros casos de potenciación y de logatirmación para n-males los estudiaremos más adelante, cuando dispongamos de más herramientas teóricas.

4.4. Orden entre n-males

Como en los números naturales, queremos establecer un criterio para saber cuándo un número expresado como n-mal es mayor que otro, y como en el caso de los naturales, podemos usar la adición para definir un orden: decimos que un número escrito como n-mal x *es menor o igual* que otro número expresado como n-mal y, lo que escribimos $x \leq y$ si y solo si existe un número representado con el n-mal z tal que:

$$x + z = y$$

De nuevo podemos interpretar esta definición diciendo que el número menor se debe completar con otro para obtener el mayor.

[27]Para evitar la confusión entre la base numérica n en que expresamos los números y la base de los logaritmos b, escribiremos la primera como un subíndice de los números como se hacía en los números naturales. Cuando no escribimos algún número, entendemos que es base numérica 10.

Este criterio puede resultar sensato, pero no es aplicable en todos los casos, en particular cuando alguno de los números a comparar sea periódico.

Otra salida es utilizar el criterio lexicográfico para la escritura de los números; esto es: comparamos las partes enteras como números naturales; si una de ellas es mayor, el problema está resuelto; si no, comparamos las partes n-males con el mismo criterio pero de izquierda a derecha.

Ejemplos

1. Comparemos los siguientes dos números en base 12:

$$6532098,7652245677 \quad \text{y} \quad 6532098,762245677.$$

   Como sus partes enteras son iguales, empezamos a comparar las cifras n-males de izquierda a derecha, y observamos que difieren en la tercera posición, siendo el primer número el mayor.

2. Si los números son periódicos, como

$$3,142142\ldots = 3,\overline{142} \quad \text{y} \quad 3,14251425\ldots = 3,\overline{1425}$$

   Los escribimos en su forma extendida, y comparamos cifra con cifra. Donde aparezca primero una cifra mayor, ese es el número mayor[28].

Ejercicios

1. *¿Cambian los criterios o los resultados de la comparación entre dos números expresados como n-males si cambiamos de base?*

2. *Proponga un criterio para comparar dos números que no tengan el mismo número de cifras n-males. Justifique las afirmaciones que haga.*

3. *Haciendo los cálculos en base 11, para cuáles valores de x se cumple que:*

   $a)$ $\quad 3,2x+5,9 \leq 6,17.$

[28] Una excepción a esta regla se presenta cuando el número es de la forma $a,b\ldots de\ \overline{k-1}$ en base k; este número es igual a $a,b\ldots d(e+1)$.

$b)$ $0,23x - 12,54 \leq 35,A.$

$c)$ $11,7Ax - 42,39 \leq 63,23.$

$d)$ $5A,65 - 2,3x > 16,34.$

Justifique sus procedimientos.

Capítulo

5 Las fracciones

El principio es la mitad del todo.
Pitágoras

En el capítulo anterior encontramos expresiones n-males que nos permitieron escribir resultados de medidas en cualquier base numérica, y algunas maneras de pasar n-males de una base numérica a otra. En un paso intermedio recurrimos a escribir expresiones n-males como resultados de divisiones entre números naturales; por este camino encontramos que

$$\frac{1}{2} = \begin{cases} 0,1 & \text{en base } 2 \\ 0,\overline{1} & \text{en base } 3 \\ 0,2 & \text{en base } 4 \\ 0,\overline{2} & \text{en base } 5 \\ 0,3 & \text{en base } 6 \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \end{cases}$$

Es como si la división $\frac{1}{2}$ fuera una forma de representar infinitos n-males, uno por cada base, y así para cada división posible.

Notemos que en cada base numérica, digamos k, es más cómodo repre-

sentar la unidad dividida en k partes, esto es $\frac{1}{k}$; a su vez cada una de ellas dividida en k partes, es decir $\frac{1}{k^2}$, y así sucesivamente, pero en base k la representación de la unidad dividida en n partes puede resultar periódica cuando $n \neq k$.

5.1. Representaciones de números a través de fracciones

El concepto de *fracción*[1] se dio relativamente tarde, en relación con los números naturales. Las culturas primitivas no tuvieron necesidad de usar fracciones, las evadían creando unidades más pequeñas, por lo menos, en lo relacionado con las medidas[2].

Históricamente[3], las expresiones $\frac{1}{k}$, que llamamos *fracciones unitarias*, aparecieron para expresar fracciones de la unidad, y varias de las culturas de la Antigüedad encontraron formas de operar con ellas, mucho antes de que las expresiones decimales aparecieran en escena. Por ejemplo, los egipcios representaron estas fracciones con jeroglíficos, algunas tenían símbolos especiales como es el caso de $\frac{1}{2}$ y para las otras fracciones unitarias escribían un símbolo parecido a una boca abierta, algo como ❍ y debajo de este el *denominador*, con la simbología previamente establecida para los números naturales; por ejemplo $\frac{1}{8}$ lo representaban:

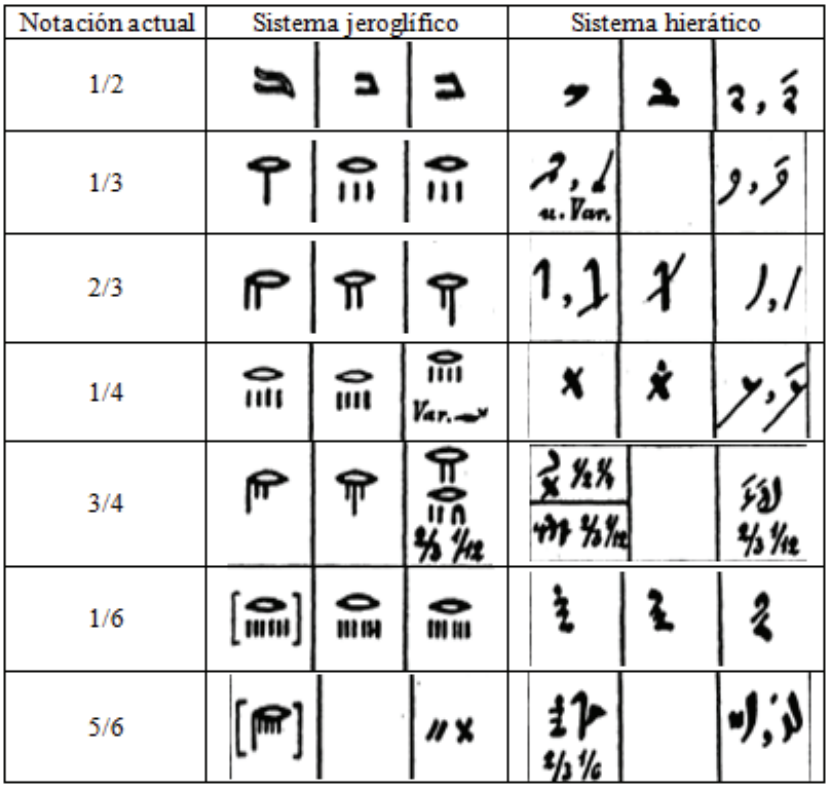
❍
|||||||

[1] La palabra fracción viene del latín *frangere* (romper, quebrar), se refiere a un número quebrado y así fue llamado frecuentemente.

[2] Los romanos establecieron un sistema de medidas con submúltiplos para no utilizar fracciones. La unidad principal era el *as*, $\frac{1}{12}$ del *as* era llamado *uncia* cuyo símbolo era $-$, $\frac{2}{12}$, un *sextans*, representado por $=$; entre otros (Smith, 1958, p. 208).

[3] Los babilonios construyeron tablas de números de la forma $\frac{1}{k}$ expresando los resultados como los números 60-males con finitas cifras, cuando ello era posible, o sea cuando el denominador es un múltiplo de potencias de 2, 3 o 5. En los otros casos como $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, daban valores aproximados (a nuestros ojos, pues muy posiblemente para ellos, esos podrían haber sido los valores). Una revisión histórica de las fracciones se encuentra en la sección 7.3.1. de Luque, Jiménez y Ángel (2013).

Además de estas, aceptaban otras fracciones como dos tercios[4], tres cuartos o cinco sextos (obsérvese que el numerador es uno menos que el denominador). Pero no solamente utilizaban notación jeroglífica sino notación hierática (figura 5.1).



Tomada de Cajori (1928, p. 13).
Figura 5.1

Para escribir otras fracciones, las expresaban como sumas o productos de estas, como puede verse en la figura 5.1.

Nuestra presentación fue elegida en sentido contrario por razones pedagógicas, con el propósito de utilizar los conocimientos que hemos adquirido de

[4]Aparecía comúnmente en la solución de problemas relacionados con el cálculo de la capacidad de depósitos o graneros cilíndricos, en los cuales el volumen, medido en codos cúbicos, debía transformarse en capacidad de grano, medido en *khar*, con la equivalencia: 1 codo cúbico $= \frac{2}{3}$ khar; así, la fracción $\frac{2}{3}$ no era la expresión de un reparto, sino un operador para obtener la equivalencia en khar de los codos cúbicos.

las bases numéricas y de trabajar en un ambiente poco utilizado en las aulas, lo que nos permite un margen mayor en la creatividad a la hora de plantear soluciones a los problemas propuestos, y nos da ínfulas de estar haciendo lo que los matemáticos hacen (esto último es bueno para la autoestima).

Buscamos formas de representación equivalentes a las notaciones *n-males*, de tal manera que nos permitan manejar un tercio, un medio, tres quintos, etc., sin necesidad de recurrir a una base específica; a estas expresiones las llamamos *fracciones*[5]. Nos centraremos inicialmente en las fracciones unitarias.

Para ello, tomemos por ejemplo $\overline{AB}$ como el segmento unidad, y C como el punto medio de $\overline{AB}$, así:

Figura 5.2

Es lo mismo afirmar que $\overline{AC}$ (o bien, $\overline{CB}$) es *la mitad* de $\overline{AB}$ o que $\overline{AB}$ es el doble de $\overline{AC}$; es decir, si tengo la mitad de una cantidad, por ejemplo, y la duplico, esta es igual a la cantidad original. Luego, la mitad de *algo* equivale a dividir ese *algo* entre dos; así, la mitad de 16, la podemos representar como $16 \div 2$ o $\dfrac{16}{2}$, que es igual a 8, o en base 7 como $22 \div 2$ o $\dfrac{22}{2}$ que equivale a 11. De manera similar sucede con otras expresiones como un tercio, un cuarto, etc.

Un tercio de 45 es 15, pero ¿qué significado le podemos asignar a la mitad de 15 o a un tercio de $11_{(6)}$?

Interpretando la división como un procedimiento entre números naturales, sabemos que al efectuar una división entre dos números naturales cualesquiera, no obtenemos necesariamente un número natural, pero sí una expresión n-mal; es decir que las expresiones $\dfrac{15}{2}$ o $\dfrac{11}{3}_{(6)}$ pueden considerarse no solo como una operación indicada sino como números[6].

El dividendo lo llamamos *numerador* y lo colocamos encima de la línea, conocida como vínculo, mientras que el divisor lo llamamos *denominador*

[5]La palabra fracción viene del latín *fractĭo*, *-ōnis* que quiere decir quebrar o romper. Antiguamente no se les llamaba fracciones sino quebrados, palabra que tiene su origen en el árabe *kasr*, proveniente de *kasara*, que quiere decir romper y que fue utilizado por Al-Khwārizmī (780-850) (Youschekevitch, 1976, citado por Ruiz y García, 2009).

[6]El número colocado como subíndice a la derecha de la división representa la base en la cual están escritos el dividendo y el divisor.

y lo colocamos debajo de la línea, por supuesto esta ubicación también es arbitraria. Los dos números son naturales y por tanto pueden escribirse en cualquier base, obviamente, debemos escribir ambos términos en una sola base.

Representamos la mitad de 1 como $\frac{1}{2}$ o como $\frac{1}{10}_{(2)}$, o si se quiere gráficamente:

Figura 5.3

Pues $\overline{AC}$ es un medio de $\overline{AB}$.

Otras figuras geométricas también se pueden utilizar para representar fracciones, siempre que tengamos un procedimiento con regla y compás para dividirlo en k partes iguales; por ejemplo, un rectángulo lo podemos dividir en dos partes iguales, dividiendo uno de sus lados en dos segmentos iguales y trazando paralelas desde cada uno de los puntos determinados por esa división a uno de los lados perpendiculares al que dividimos (figura 5.4).

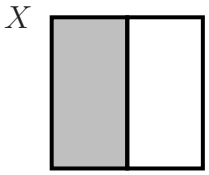


Figura 5.4

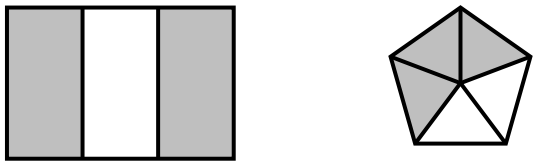
De donde la superficie coloreada de gris en el rectángulo X (figura 5.4) es un medio de la superficie total, pues dos de las partes coloreadas de gris (o de blanco) completan la unidad.

Otra área que también representa un medio de la de un cuadrilátero, en este caso del paralelogramo bordeado en negrita es la región en blanco en la figura 5.5.

Tomada de Gardner (1981).

Figura 5.5

Con esta interpretación tienen sentido también expresiones como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$, etc. De manera gráfica (figura 5.6).



(a) (b)

Figura 5.6

La parte coloreada de gris en la figura 5.6(a) representa $\frac{2}{3}$ del rectángulo, y lo coloreado en la 5.6(b) representa $\frac{10}{12}_{(3)}$ del pentágono.

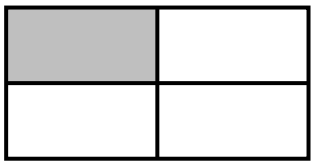
Ejercicios

1. *Escriba un método para dividir una circunferencia en dos, tres, cuatro, cinco, seis partes iguales, usando regla y compás.*
2. *Considere otras figuras geométricas como por ejemplo, triángulos isósceles y utilizando regla y compás, represente distintas fracciones.*
3. *Utilice otros polígonos no convexos, por ejemplo uno en forma de L (o en cruz) y explore cuáles fracciones puede representar allí.*

5.2. Equivalencia entre fracciones

La fracción $\frac{1}{4}$ representa una parte de una unidad dividida en cuatro partes iguales, o también una división en cualquier base mayor que 4, por ejemplo en base 8 es $0,2$; en base 10 es $0,25$, y así sucesivamente. Pero estas expresiones n-males pueden obtenerse como resultado de otras divisiones; por ejemplo en base 8, $\frac{2}{10}_{(8)} = 0,2$, lo que implica que $\frac{1}{4} = \frac{2}{10}_{(8)}$ pues representa el mismo número 8-mal.

Gráficamente $\frac{1}{4}_{(8)}$ se puede representar como se indica en la figura 5.7.



$\frac{1}{4}_{(8)}$

Figura 5.7

Y $\frac{2}{10}_{(8)}$ lo representamos como se muestra en la figura 5.8.

$\frac{2}{10}_{(8)}$

Figura 5.8

Las partes coloreadas de gris en la figura 5.8 representan la misma fracción de la unidad que las partes pintadas con el mismo color en la figura 5.7.

Y no son las únicas representaciones. Podemos encontrar infinitas fracciones equivalentes entre sí, ya que si al sacar la *n-ésima* parte de un número y tomar después n pedazos, obtenemos el mismo número; por ejemplo en base 10:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \cdots$$

en símbolos, lo que hemos dicho es que

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb},$$

donde n es un número natural diferente de cero, igualmente b debe ser diferente de cero[7].

Y surge un nuevo problema: dadas dos fracciones, ¿cómo determinar si representan el mismo número? Para buscar una solución dividamos el problema en dos:

1. Si las fracciones tienen igual denominador, la respuesta es obvia: la única manera para que sean iguales es que tengan el mismo numerador.

2. Si tienen diferente denominador, una opción es dividir cada una de las partes en que está dividida la primera unidad, en el número de partes en

[7]Este procedimiento es comúnmente conocido como *amplificación*.

que se encuentra dividida la segunda y viceversa; con esto obtenemos partes de igual tamaño en ambas unidades y nos remitimos al caso anterior.

Ejemplo

¿Las fracciones $\frac{10}{12}_{(3)}$ y $\frac{120}{221}_{(3)}$ son iguales? Si cada parte $\frac{1}{12}_{(3)}$ de la primera fracción la dividimos en $221_{(3)}$ partes, obtenemos nuevas partes de tamaño $\frac{1}{12 \times 221}_{(3)}$ pero obtenemos $10 \times 221_{(3)}$ partes, es decir, que la fracción $\frac{10}{12}_{(3)}$ equivale a la fracción $\frac{10 \times 221}{12 \times 221}_{(3)}$; análogamente, la fracción $\frac{120}{221}_{(3)}$ equivale a la fracción $\frac{120 \times 12}{12 \times 221}_{(3)}$ o sea que las fracciones iniciales son equivalentes si $10 \times 221_{(3)} = 120 \times 12_{(3)}$, como en efecto sucede.

Abstrayendo el proceso anterior, podemos afirmar que, en general:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,;\ b, d \neq 0 \text{ si } ad = cb$$

y viceversa, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; b, d \neq 0$, tenemos que $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db}$; y como $bd = db$, entonces $ad = bc$. En resumen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,;\ b, d \neq 0 \text{ si y solo si } ad = cb.$$

Ejercicios

1. *Supongamos que* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*; muestre un argumento que justifique la igualdad:*

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}\,;$$

explique gráficamente.

2. *Supongamos que* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, muestre un argumento que justifique:*

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\,.$$

Una igualdad de esta forma la llamamos una *proporción. ¿De cuántas maneras es posible escribir esta igualdad?*

3. *Las igualdades del numeral* 2 *permiten averiguar un número conociendo los otros tres; por ejemplo, si sabemos que* $\frac{2}{3} = \frac{14}{d}$, *¿cuánto vale d? (d se llama la cuarta proporcional entre* 2, 3 *y* 14*).*

4. *Si la igualdad es de la forma* $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, *b se llama la media proporcional entre a y d, ¿cuál es la media proporcional entre* 3 *y* 12*? ¿Entre* 1 *y* 1*?*

5.3. Operaciones entre fracciones

5.3.1. Adición y sustracción entre fracciones

La situación más simple para sumar o restar fracciones se presenta cuando ellas tienen el mismo denominador; esto es, sumar medios con medios, tercios con tercios, etc. El problema se reduce a sumar o restar los numeradores, o sea

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Por ejemplo, $\frac{5}{16}_{(12)} + \frac{7}{16}_{(12)} = \frac{10}{16}_{(12)}$. La figura 5.9 muestra los sumandos, y la figura 5.10, la suma.

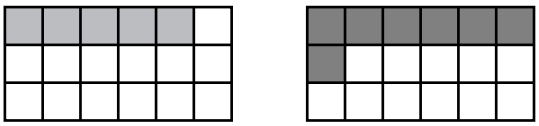


Figura 5.9

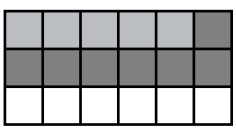


Figura 5.10

Esto es, $\frac{10}{16}_{(12)}$, que es equivalente a $\frac{2}{3}$ de la unidad dada.

Si las fracciones tienen distinto denominador, podemos encontrar otras equivalencias con igual denominador, y efectuar con ellas la adición o la sustracción como acabamos de decir. Una manera para hacer esto consiste en multiplicar el numerador y el denominador del primer sumando por el denominador del segundo sumando, y viceversa; es decir:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

No solo encontramos un procedimiento, sino una *fórmula* para sumar fracciones.

Ejercicios

1. *Describa otra manera para conseguir un denominador común entre dos fracciones dadas, y aplíquelo para mostrar otro método para sumar o restar fracciones.*

2. *Si formamos una sucesión de fracciones unitarias usando como denominadores a los números naturales en su orden a partir de* 1*, obtenemos la conocida progresión armónica:*

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$$

Sume los dos primeros términos, los tres primeros, y así sucesivamente[8].

3. *Si formamos una sucesión de fracciones unitarias usando como denominadores a las potencias de* 2 *en su orden a partir de* 1*, obtenemos otra sucesión:*

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$$

Sume los dos primeros términos, los tres primeros, y así sucesivamente. ¿La suma dejará de crecer a partir de algún término de la progresión?

[8] En la Antigüedad se creía que esta suma con infinitos sumandos tenía un valor determinado, pero uno de los Bernoulli demostró en el siglo XVIII que no es así.

4. *Si en la progresión armónica calculamos las diferencias entre dos términos consecutivos, las escribimos en un nuevo renglón y repetimos el proceso, obtenemos la siguiente tabla:*

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{56}$ $\frac{1}{72}$ $\frac{1}{90}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{168}$ $\frac{1}{252}$ $\frac{1}{360}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{140}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{504}$ $\frac{1}{840}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{630}$ $\frac{1}{1260}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{168}$ $\frac{1}{504}$ $\frac{1}{1260}$

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{56}$ $\frac{1}{252}$ $\frac{1}{840}$

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{72}$ $\frac{1}{360}$

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{90}$

$\frac{1}{10}$

Enuncie algunas regularidades de esta tabla.

5. *Retomemos el problema egipcio de representar toda fracción como la*

suma de fracciones unitarias[9]*. Una primera observación, inmediata y un poco obvia, es que toda fracción* $\frac{a}{b}$ *con* $b \neq 0$ *se puede representar de manera inmediata como suma de fracciones unitarias usando el hecho de que* $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$*, y por tanto* $\frac{a}{b}$ *es la suma de* a *sumandos iguales a* $\frac{1}{b}$*. ¡Pero esto no debe ser lo que buscamos!*

Veamos otras posibilidades; por ejemplo, para la fracción $\frac{3}{7}$ *tenemos que*

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$
$$\frac{1}{35}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$$

son expresiones válidas, o sea que hay varias formas posibles para escribir una fracción como suma de fracciones unitarias. ¿Cuántas en cada caso?

6. *La primera parte del papiro Rhind nos ofrece una tabla de las combinaciones de fracciones unitarias necesarias para construir todas las fracciones que se obtienen al dividir* 2 *por un número impar entre* 3 *y* 101*. El comienzo de esa tabla es:*

$$\frac{2}{3} = \tau.$$
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

[9]Las ideas centrales de este desarrollo son de Milton Rojas, estudiante de la Universidad Pedagógica Nacional, basado en la lectura de Snape y Scott (1995, pp. 7-29).

Una luz sobre el método está en la siguiente secuencia:

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + x$$

donde x es un número por determinar (deténgase a pensar cómo hallar la primera fracción unitaria, ¿puede ser cualquiera?),

$$\frac{10}{18} = \frac{9}{18} + \frac{1}{18}.$$

Por tanto

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}.$$

Otro ejemplo

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + x$$

$$\frac{10}{45} = \frac{9}{45} + \frac{1}{45}.$$

Describa el método egipcio, para la fracción

$$\frac{2}{2n+1}, \quad n \in N.$$

Ejemplifique el caso de $\frac{2}{61}$ y $\frac{2}{101}$. ¿Es válida su fórmula para números impares mayores que 101?

7. *Estudie el caso de las fracciones de la forma $\frac{3}{k}, \frac{4}{k}, \frac{5}{k}$ para $k \geq 1$.*

5.3.2. Multiplicación entre fracciones

Comencemos dándole un significado a la multiplicación entre números naturales y fracciones por analogía con los números naturales; digamos que, en base 2, $101 \times \frac{1}{11}$ significa colocar un tercio cinco veces y sumarlos entre sí; esto es:

$$101 \times \frac{1}{11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{101}{11}$$

es como si multiplicáramos el número natural por el numerador de la fracción, o sea

$$101 \times \frac{1}{11} = \frac{101}{11} = \frac{101 \times 1}{11}\,.$$

En base 5,

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3 \times 1}{2}$$

$$2 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10} = \frac{2 \times 3}{10}$$

es decir que,

$$a \times \frac{b}{c} = \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \cdots + \frac{b}{c}}_{a \text{ veces}} = \frac{a \times b}{c}.$$

Si queremos dar sentido a la multiplicación

$$\frac{1}{11} \times 101$$

podemos asumir que también para esta operación se cumple la propiedad conmutativa, y decir que

$$\frac{1}{11} \times 101 = 101 \times \frac{1}{11}.$$

Como tenemos varias representaciones para las fracciones, intentemos justificar de otra forma este resultado.

$\frac{1}{2} \times 3$ lo interpretamos como la mitad de 3; entonces consideremos tres unidades

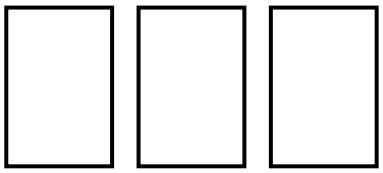


Figura 5.11

y pintemos la mitad de cada parte; esto es:

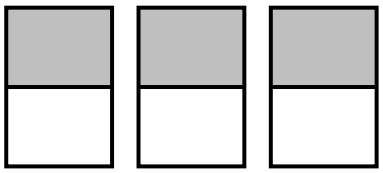


Figura 5.12

Lo cual se representa como $\frac{3}{2}$, es decir que $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$, que es el mismo resultado de $3 \times \frac{1}{2}$.

Veamos ahora cómo multiplicar dos fracciones cualesquiera; por ejemplo, ¿qué significa $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$?

Gráficamente dos tercios lo representamos como:

$\frac{2}{3}$

Figura 5.13

la mitad de dos tercios es:

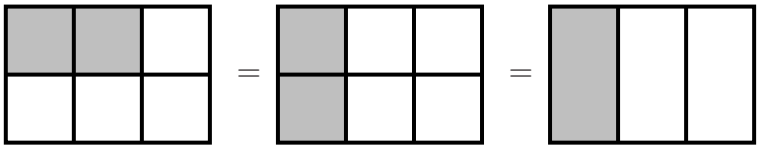


Figura 5.14

o sea $\frac{2}{6}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{3}$.

Y si hacemos $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$, es decir, dos tercios de un medio, primero consideramos un medio:

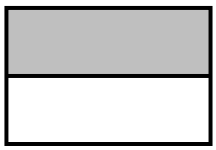


Figura 5.15

y tomamos dos tercios de ese medio; así:

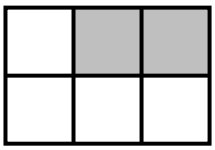


Figura 5.16

el resultado es de nuevo $\frac{2}{6}$ o $\frac{1}{3}$.

Una interpretación geométrica de la multiplicación de fracciones puede reforzar nuestras conclusiones. Si deseamos multiplicar, por ejemplo $\frac{4}{7}$ por $\frac{3}{5}$, podemos representar $\frac{4}{7}$ en un segmento y $\frac{3}{5}$ en otro segmento, y formar con ellos un rectángulo. La multiplicación de las dos fracciones es la fracción del área total del rectángulo formado, o sea:

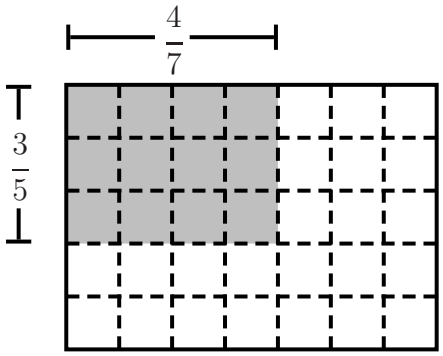


Figura 5.17

El rectángulo queda dividido en 35 partes, y el producto de las dos fracciones es 12 de las 35 partes; o sea $\frac{12}{35}$. De esta manera

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$$

y ¡obviamente!

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}.$$

Otro ejemplo:

$$\frac{7}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{56}{12}$$

gráficamente:

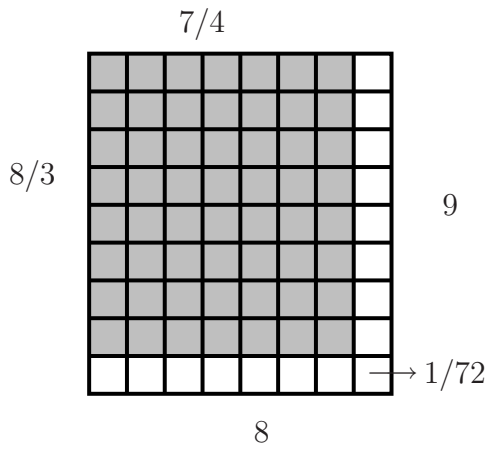


Figura 5.18

Observando los resultados anteriores, podemos conjeturar que:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Ejercicios

1. *Explique el resultado del último ejemplo.*

2. *En el año* 1700 *a.C., un sacerdote egipcio llamado Ahmes escribió un papiro*[10]*, "Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras". En él aparece un problema que consiste en escribir toda fracción cuyo numerador sea* 2 *y denominador sea impar, como la suma de las fracciones que tengan numerador* 1*; uno de ellos es*

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$$

A partir de este, podemos conseguir otros, por ejemplo:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}\right)$$

[10]Este corresponde al mismo papiro de Rhind (Westren, 1997, p. 8).

de donde

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Ahmes encontró que

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232},$$

proponga una explicación para el procedimiento seguido por Ahmes.

3. *Los papiros egipcios que se han encontrado contienen problemas enunciados verbalmente, cuyas soluciones se presentan como una secuencia de instrucciones para realizar procedimientos aritméticos, pero no presentan explicación alguna. El problema 31 del papiro de Ahmes, dice: "Una cantidad; sus* $\frac{2}{3}$*, su* $\frac{1}{2}$*, su* $\frac{1}{7}$*, su totalidad asciende a 33". Interprete este problema y escríbalo en términos modernos. Proponga un algoritmo que resuelva el problema. Consulte cómo lo resolvían los egipcios.*

4. *Siguiendo con Ahmes, para calcular cinco números en progresión aritmética, tales que su suma sea 100, elige la diferencia d de la progresión de manera que sea igual a* $5\frac{1}{2}$ *veces el término menor, y toma tal término menor o igual a 1, con lo que obtiene la progresión*

$$1,\ 6\frac{1}{2},\ 12,\ 17\frac{1}{2}\ \text{y}\ 23$$

Pero estos números solo suman 60 *y los números buscados deben sumar* 100*. Ahmes multiplica entonces cada uno de los términos por*

$$\frac{5}{3} = \frac{100}{60}$$

Este procedimiento es conocido como ***regula falsa****, o* ***regla de la falsa posición.***

Use la regla de la falsa posición para encontrar siete números que formen una progresión aritmética, de manera que su suma sea 150. ¿Podemos resolver el mismo problema pero con la condición de que el producto sea un número dado? ¿Y si cambiamos la progresión aritmética por geométrica?

5. *Los egipcios también calcularon el volumen de un tronco de pirámide de "*6 *como altura vertical por* 4 *en la base por* 2 *en el extremo superior", así: tiene que cuadrar este* 4*, resultando* 16*. Tiene que doblarlo, resultando* 8*. Tiene que cuadrar* 2*, resultando* 4*. Tiene que sumar el* 16*, el* 8 *y el* 4*, resultando* 28*. Tiene que tomar* 1/3 *de* 6*, resultando* 2*. Tiene que tomar* 2 *veces el* 28*, resultando* 56*. Exprese lo anterior con una fórmula.*

6. *Uno de los teoremas más bellos de las matemáticas dice que todo número mayor que* 77 *se puede descomponer en suma de naturales tales que la suma de sus recíprocos*[11] *es* 1*. Escriba algunos ejemplos.*

7. *Los dígitos de* 1 *a* 9 *se pueden escribir en dos números tales que su razón sea* $\frac{1}{5}$*; por ejemplo,* $\frac{2697}{13485}$*. Encuentre otras tres maneras. Formule un problema similar en base* 7*.*

8. *Si en alguna base* $\frac{1}{4} \times 32 = 5$*, ¿cuánto es* $\frac{1}{3} \times 10$ *en esa base?*

9. *Si en una fábrica se empacan m frascos por minuto, y se llena una caja con n frascos, ¿cuántas cajas se llenan en una hora?*

$$a)\ \frac{m}{60n} \qquad b)\ \frac{n}{60m} \qquad c)\ 60mn \qquad d)\ \frac{60m}{n} \qquad e)\ \frac{60n}{m}$$

10. *¿Para qué valores de y es el cuadrilátero de la figura 5.19 un cuadrado?*

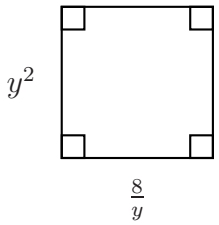


Figura 5.19

$$a)\ 1 \qquad b)\ 2 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 6 \qquad e)\ 7$$

[11] Si k es un número natural, su *recíproco* es el número n-mal $\frac{1}{k}$.

11. *Si el uno por ciento de x es igual a 0,003, entonces 10x es igual a:*

$a)\ 0,003 \qquad b)\ 0,03 \qquad c)\ 0,3 \qquad d)\ 3 \qquad e)\ 30$

12. *Cada uno de los cinco cuadrados siguientes tiene lados iguales a 4n, y se han subdividido cada uno en cuadrados congruentes. ¿Cuál es la cuarta parte de la suma de los perímetros de los cuadrados pequeños?*

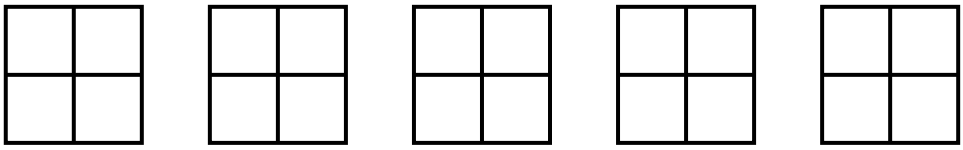


Figura 5.20

13. *Si* $5a + 2b = 11$ *y* $4a + 3b = 4$*, entonces, ¿cuál es el valor de* $a - b$*?*

5.3.3. División entre fracciones

Asociar a la división entre fracciones situaciones intuitivas no es algo simple; de hecho, algunos autores como Llinares y Sánchez (1988, p. 151) aseguran que no existen tales procedimientos. Sin embargo, hasta ahora nuestro propósito ha estado centrado en encontrar significados intuitivos a las operaciones entre fracciones con la ayuda de situaciones geométricas; así que iniciemos interpretando qué significa dividir un número natural entre una fracción; por ejemplo, qué significa $3 \div \frac{1}{2}$.

Representemos esta operación de manera gráfica (figura 5.21).

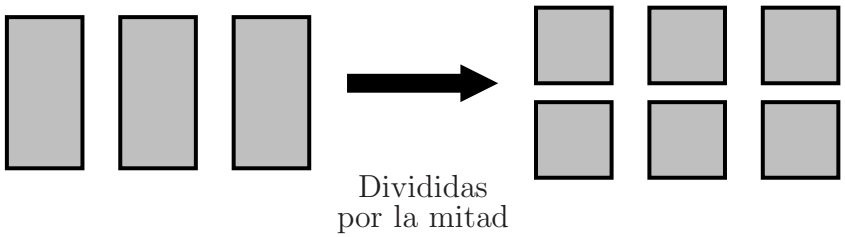


Figura 5.21

De esta manera

$$3 \div \frac{1}{2} = 6 = \frac{6}{1} = \frac{3 \times 2}{1}$$

Ahora asignemos significado a $\frac{1}{2} \div 3$

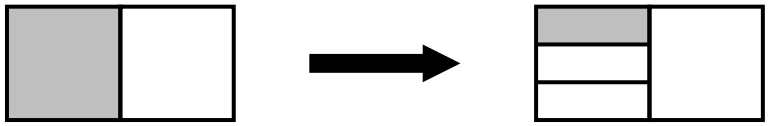


Figura 5.22

Luego,

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$$

Y ahora dividir dos fracciones; por ejemplo[12], si queremos dividir

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{3},$$

pintamos $\frac{5}{3}$ (figura 5.23).

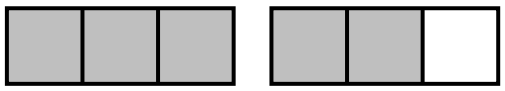


Figura 5.23

Debemos repartir $\frac{1}{2}$ en cinco casillas, pero en la forma que tiene no es posible; entonces escogemos una fracción que sea su equivalente, pero que sí se pueda repartir en cinco grupos como $\frac{5}{10}$; ponemos uno de estos décimos en cada casilla, y miramos lo que le corresponde a la unidad. Esto es $\frac{3}{10}$.

Para la división $\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$, pintamos $\frac{1}{2}$, y como solo tenemos una casilla por llenar, colocamos los $\frac{5}{3}$ en ella y nos preguntamos cuánto le toca a la unidad; obviamente, el doble; es decir, $\frac{10}{3}$.

[12]Esta idea fue comunicada a uno de los autores por la profesora Cecilia Leguizamón de la Universidad Pedagógica Nacional.

Con lo anterior, podemos conjeturar que para dividir dos fracciones multiplicamos el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda; este será el numerador del cociente; luego, multiplicamos el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda; este será el denominador del cociente; es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejercicios

1. *Efectúe:*

   a) $\frac{2}{5} \div \frac{2}{3}$ *en base* 9.

   b) $\frac{10}{3} \div \frac{12}{4}$ *en base* 7.

2. *Los números entre el* 0 *y el* 10 *pueden expresarse en términos de ellos mismos usando operaciones aritméticas y solo tres treses, por ejemplo:*

$$0 = 3! - 3 - 3$$
$$1 = 3^{(3-3)}$$
$$2 = \frac{3+3}{3}$$
$$3 = \frac{3 \times 3}{3}$$

   Escriba los demás.

   También el problema tiene sentido con cuatro cuatros; por ejemplo:

$$1 = \frac{44}{44}$$
$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$
$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

$$4 = 4 + \frac{4-4}{4}$$
$$5 = \frac{(4\cdot 4)+4}{4}$$

Escriba los números del 5 *hasta el* 10. *¿Es posible pasar del número* 10 *con operaciones elementales?*

¿El problema es el mismo con cinco cincos?,¿con seis sises?, etc., ¿en otras bases?

3. *Un error común en los estudiantes escolares es hacer simplificaciones de la forma:*

$$\frac{16\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}.$$

¿Para cuáles valores de A, B *y* C *se tiene que* $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A}{C}$*?, donde* AB *es la notación posicional en base* k *y no el producto* $A \cdot B$.

5.3.4. Potenciación y radicación entre fracciones

Ya hemos estudiado algunas de las operaciones entre fracciones, tales como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. Tratemos ahora la potenciación y su relación con la radicación. Recordemos en qué consiste la primera operación entre números naturales.

Dados dos números, uno llamado base, y el otro denominado exponente, se repite la base el número de veces que indique el exponente, y se multiplican entre sí, así:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}$$

Podemos copiar esta definición a las fracciones siempre que el exponente sea un número natural, por ejemplo, en base 5:

$$\left(\frac{10}{2}\right)^3 = \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} = \frac{1000}{13},$$

o bien, podríamos también extender la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división para números naturales, a los casos en que

la división no sea un número natural e interpretar la operación (en base 5) como:

$$\left(\frac{10}{2}\right)^3 = \frac{(10)^3}{(2)^3} = \frac{10\times 10\times 10}{2\times 2\times 2} = \frac{1000}{13}$$

Y el resultado coincide, lo que nos lleva a proponer que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots\times\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a\times a\times\cdots\times a}{b\times b\times\cdots\times b} = \frac{a^n}{b^n};$$

donde a, b y n son números naturales, y $b\neq 0$.

Estudiemos ahora el problema de interpretar la potenciación cuando el exponente es una fracción. Por ejemplo, ¿qué significa $11^{1/3}{}_{(7)}$? ¡No puede ser, repetir $\frac{1}{3}$ de veces 11 y multiplicar!

Pongámosle un nombre a nuestro problema; digamos que $11^{1/3}=x$; entonces, si los dos números son iguales, sus cubos[13] también son iguales

$$\left(11^{1/3}\right)^3 = x^3$$

Y si suponemos que las propiedades de la potenciación para los números naturales se valen también para las fracciones, tenemos que: $\left(11^{1/3}\right)^3 = 11^{1/3\times 3} = 11$, luego:

$$11 = x^3$$

Pero esta es una situación que ya conocemos, y que podemos escribir de otra forma:

$$x = \sqrt[3]{11} = 2_{(7)}$$

Este ejemplo nos permite conjeturar que:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \text{ siempre que } n\neq 0.$$

¿Y si la fracción del exponente no es unitaria? Por ejemplo, encontremos el valor de:

$$\left(\frac{1}{A4}\right)^{3/4} \quad \text{en base 12}$$

[13]Hasta ahora es válido que cada una de las operaciones que hacemos con cada par de números da un resultado único; por eso el razonamiento es válido.

Aplicando lo convenido

$$\left(\frac{1}{A4}\right)^{3/4} = \left[\left(\frac{1}{A4}\right)^{3}\right]^{1/4}$$

llamando $a = \left(\frac{1}{A4}\right)^{3}$ y $n = \frac{1}{4}$, entonces:

$$\left(\frac{1}{A4}\right)^{3/4} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{A4}\right)^{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2454}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{2454}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8^4}} = \frac{1}{8}\,{}^{(12)}$$

lo que podemos escribir de manera más general, así:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m};\ \ n \neq 0$$

En resumen:

$a = b^{1/n}$ es equivalente a escribir $a = \sqrt[n]{b}$ y a $a^n = b$, si $n \neq 0$.

Y en general:

$a^n = b^m$ es una expresión equivalente a $a = b^{m/n}$ y a $a = \sqrt[n]{b^m}$, si $n \neq 0$.

Notemos que tanto n como m pueden ser fracciones.

Sin embargo, no siempre encontraremos como potencia a una fracción; podemos tener que resolver problemas a los cuales solo podremos dar una aproximación.

Por ejemplo si queremos encontrar a qué es igual $\left(\frac{1}{5}\right)^{1/2}$ en base 10, realizando el proceso anterior obtenemos que

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y hasta ahí llegamos, pues hasta ahora no tenemos una expresión para $\sqrt{5}$.

Ejercicios

1. *Si a, b representan fracciones, x, y, n, m representan números naturales, enuncie un argumento que justifique las siguientes propiedades de la potenciación y la radicación.*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, si $a \neq 0$ y $x \geq y$
3. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$
4. $\left(a \cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
6. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
7. $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$, $n \neq 0$

2. *Justifique el siguiente procedimiento*

$$0,2^{0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

5.3.5. Logaritmación entre fracciones

Para abordar logaritmos donde intervienen fracciones, tendremos en cuenta las propiedades ya establecidas para estos en los números naturales, y las utilizaremos para las fracciones. Consideremos un ejemplo para ver cómo podemos proceder.

¿Cuál es el $\log_3 \dfrac{2}{3}$? Si escribimos:

$$\log_3 \frac{2}{3} = x,$$

e interpretamos como en los números naturales, estamos interesados en buscar x tal que $3^x = \dfrac{2}{3}$. De nuevo, como en el caso de los cubos, afirmamos que si dos números son el mismo, tienen el mismo logaritmo; es decir que

$$\log_3 3^x = \log_3 \frac{2}{3}$$

así:

$$x = \log_3 2 - \log_3 3$$
$$x = \log_3 2 - 1$$

Pero, ¿cuál es el logaritmo en base 3 de 2? Sabemos que está entre 0 y 1; pero, ¿cómo obtenemos un valor preciso? Si $y = \log_3 2$, entonces:

$$3^y = 2$$

Si suponemos que y es una fracción, entonces se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}$, con p y q números naturales, $q \neq 0$; así:

$$3^{p/q} = 2$$
$$3^p = 2^q$$

pero no existen dos números naturales p y q que satisfagan la anterior igualdad. *¿Por qué?* Concluimos entonces que $\log_3 2$ no es una fracción; ¿qué clase de número es? No lo sabemos aún; trataremos de darle solución a esto más adelante.

Ejercicio

Intente realizar otros logaritmos donde intervengan fracciones y analice qué sucede.

5.4. Otra representación de las fracciones

Las fracciones están conformadas por pares de números naturales, y podemos representarlas gráficamente (figura 5.24) de otra manera con las siguientes instrucciones (Caro, 1936, p. 19):

i. Tomamos una hoja de papel cuadriculado.

ii. Marcamos un punto O.

iii. Trazamos dos segmentos perpendiculares[14] OA, OB, concurrentes en O.

iv. Dividimos cada uno de ellos en veinte partes iguales y los marcamos con los números naturales entre 1 y 20.

[14]Esta condición es usual pero no es necesaria; las dos rectas pueden formar un ángulo cualquiera, y las conclusiones no cambian.

v. Marcamos dentro del ángulo AOB los vértices correspondientes a los vértices de los cuadrados del papel.

vi. Tomamos las cifras de OA como numeradores, y las de OB como denominadores.

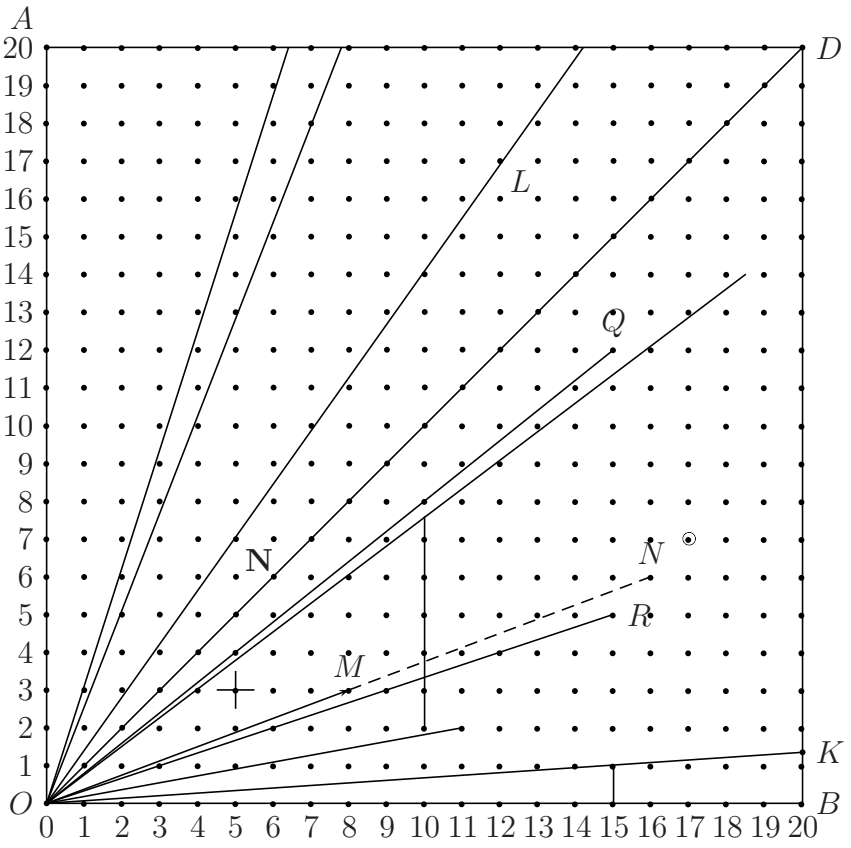


Figura 5.24

De esta manera, los puntos ubicados dentro del cuadrado (que tiene como lados OA y OB) representan las fracciones que pueden formarse con los veinte primeros números naturales, combinándolos de dos en dos.

Si suponemos que cada punto está unido al vértice O por un segmento de recta, la fracción $\frac{3}{8}$ está representada por el segmento OM. Si se prolonga el segmento OM, se hallarán puntos que representan la misma fracción $\frac{3}{8}$, cuyo numerador y denominador se encuentran multiplicados por el mismo

número natural. El punto M que pertenece al segmento prolongado y es el punto más cercano a O, representa la fracción en su forma más sencilla, pues este es irreducible; su numerador y denominador son primos relativos.

Ejercicios

1. *¿Cuáles fracciones, cuyas cifras no excedan en 10, se hallan comprendidas entre* $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{2}{11}$*?*
2. *¿Puede trazarse una recta que partiendo del origen se extienda indefinidamente sin tocar en su trayectoria un solo punto del cuadrado extendido también indefinidamente? Si es así, encuentre una. ¿Cuántas rectas de éstas existen?*
3. *Estudie, a partir de la figura 5.24, las operaciones entre fracciones.*

5.5. Orden entre fracciones

Si queremos determinar entre dos fracciones con el mismo denominador cuál es la mayor, basta comparar sus numeradores, y si su denominador es diferente, ya conocemos mecanismos para remplazarlas por fracciones equivalentes con el mismo denominador, por lo que el problema de ordenar fracciones no representa ninguna dificultad. Por ejemplo:

Para saber entre las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$ cuál es la mayor, las remplazamos por unas equivalentes con denominadores iguales, digamos

$$\frac{3}{5} = \frac{21}{35} \quad \text{y} \quad \frac{2}{7} = \frac{10}{35},$$

como

$$\frac{21}{35} > \frac{10}{35} \quad \text{entonces} \quad \frac{3}{5} > \frac{2}{7}.$$

Esto nos conduce a intuir que:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \quad \text{si y solo si} \quad a \times d \geq b \times c.$$

Capítulo

6 El conjunto de los números racionales

Cuando se finaliza un noble edificio,
no deben quedar visibles los andamios.
Carlos Federico Gauss

Este es un capítulo dedicado a una de las labores importantes de la actividad matemática: la de formalizar; esto es, escribir de manera precisa las definiciones de cada concepto, describir las relaciones entre cada noción y las demás, elaborar un sistema de afirmaciones donde cada una de ellas sea sustentada con un razonamiento válido, es decir con una demostración, de manera que nada quede en el aire, contrario a las aproximaciones intuitivas que hemos hecho en los dos capítulos anteriores.

Formalizaremos el concepto de número racional[1] dentro de la teoría de los números naturales y nuestro primer paso es escoger una notación adecuada para los objetos que deseamos estudiar. En los capítulos anteriores hemos utilizado expresiones n-males y fracciones diferentes para representar un solo número.

Las fracciones que hemos utilizado, de la forma $\frac{m}{n}$ son pares de números naturales m, n con la condición de que el segundo no sea cero. Realmente

[1]Hemos escogido presentar los números racionales antes que los negativos, atendiendo al proceso histórico de la evolución de los números; por ese motivo, los que aquí llamamos números racionales corresponden a los racionales positivos y el 0. Este conjunto lo notaremos $\mathbb{Q}^*$.

no importa si escribimos el numerador arriba, o abajo, o al lado del denominador, claro, siempre y cuando lo escribamos de igual manera; lo que es significativo es que son dos números naturales, uno que es el numerador y el otro el denominador; es decir, una pareja ordenada de números naturales que podemos escribir como (m, n). Sabemos además, que existen muchas parejas de números naturales que corresponden a fracciones equivalentes, luego lo importante no son realmente las parejas de números naturales sino las familias de parejas equivalentes entre sí.

Llamaremos un *número racional* a una familia de fracciones equivalentes; estas familias las representaremos con paréntesis cuadrados, así: $[(m, n)]$; o sea, el número racional $[(m, n)]$ es la familia de parejas de números naturales que sean equivalentes a la fracción dada $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

De lo hecho anteriormente sabemos que la fracción $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ es equivalente a la fracción $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ cuando[2] $mb = na$. En términos de parejas escribimos

$$(m, n) \approx (a, b) \text{ si y solo si } \; mb = na.$$

Esto significa que

$$[(m, n)] = [(a, b)] \text{ si y solo si } (m, n) \approx (a, b); \text{ esto es, si y solo si } mb = na.$$

Veamos ahora que la relación entre las parejas de números naturales se comporta como una igualdad en matemáticas; es decir, como una relación de equivalencia.

Prueba:

1. La relación es reflexiva, porque para todo m, $n \in N$, $n \neq 0$ se tiene que:

   $$(m, n) \approx (m, n) \quad \text{ya que } \; mn = nm$$

   por la propiedad conmutativa de la multiplicación entre números naturales.

[2]En lo que sigue omitiremos el símbolo $\times$ para la multiplicación de números naturales.

2. También es simétrica porque para todo m, n, a, $b \in N$, con $n \neq 0$ y $b \neq 0$ se tiene que si $(m,n) \approx (a,b)$, entonces $mb = na$; y por la propiedad simétrica de la igualdad y la propiedad conmutativa de la multiplicación de los números naturales, tenemos que $an = bm$, lo que significa que $(a,b) \approx (m,n)$.

3. Finalmente, es transitiva, porque para todo m, n, a, b, c, $d \in N$, con $n \neq 0$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene que si $(m,n) \approx (a,b)$ y $(a,b) \approx (c,d)$, entonces, por la primera equivalencia $mb = na$, y por la segunda, $ad = bc$; multiplicando la primera igualdad por d, obtenemos

$$(mb)d = (na)d$$

de donde, aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales y remplazado ad por su igual, tenemos

$$n(ad) = n(bc)$$

Luego, aplicando la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación de números naturales,

$$(md)b = (nc)b$$

y como $b \neq 0$, se tiene que $md = nc$, por la propiedad cancelativa de la multiplicación entre números naturales, lo que significa que $(m,n) \approx (c,d)$. □

Cada clase de equivalencia de esta relación es lo que hemos llamado un *número racional*[3]. En consecuencia,

i. $[(m,n)] = [(m,n)]$.

ii. Si $[(m,n)] = [(a,b)]$ entonces $[(a,b)] = [(m,n)]$.

iii. Y si $[(m,n)] = [(c,d)]$ y $[(c,d)] = [(e,f)]$ entonces $[(m,n)] = [(e,f)]$.

Al conjunto de todos los números racionales lo notamos $\mathbb{Q}^*$ (de la palabra inglesa *quotient* y el asterisco indica que no estamos considerando los números racionales negativos). En la figura 6.1 se representan algunas de estas clases.

[3]Recuérdese que estamos refiriéndonos a los números racionales positivos o cero (en otros términos, a los números racionales no negativos).

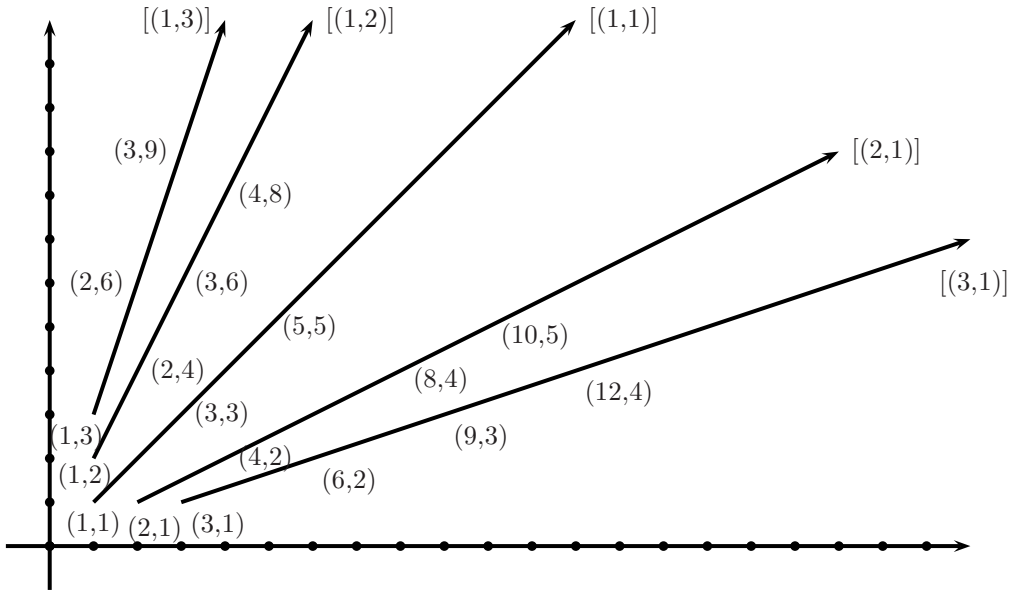


Figura 6.1

6.1. Operaciones entre números racionales

6.1.1. Adición

Copiándonos de la suma entre fracciones:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd},$$

definimos la adición[4] de dos números racionales, como:

$$[(a,b)]\oplus[(c,d)]=[(ad+bc,bd)].$$

Con esta definición es posible demostrar las propiedades de la adición de números racionales utilizando las propiedades de los números naturales que demostramos en Luque, Mora y Páez (2013, pp. 302-311), utilizando los axiomas de Peano.

[4]Por ahora debemos colocar un símbolo distinto para indicar la suma de dos números racionales puesto que el símbolo + lo usamos para sumar números naturales y no tienen el mismo significado. Sin embargo, luego usaremos el mismo cuando no genere confusión.

Antes de leer cada una de las demostraciones que se presentan en este capítulo, procure una demostración propia. Si no se le ocurre alguna idea, lea el comienzo y vuelva a intentarlo; siempre trate de caminar solo. Finalmente, lea la demostración propuesta y compárela con la suya.

6.1.1.1. Propiedad asociativa de la adición

Debemos demostrar que para todo $[(a,b)]$, $[(c,d)]$, $[(e,f)] \in \mathbb{Q}^*$, tenemos que:

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\}$$

Prueba: iniciemos con el primer lado de la igualdad

$$\begin{aligned}
\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] &= [(ad+bc,bd)] \oplus [(e,f)] && \text{por la definición de adición en } \mathbb{Q}^*. \\
&= [((ad+bc)f+bde,bdf)] && \text{por la definición de adición en } \mathbb{Q}^*.
\end{aligned}$$

Y por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición de números naturales

$$\begin{aligned}
\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] &= [(adf+bcf+bde,bdf)] \\
&= [(adf+b(cf+de),bdf)] \\
&= [(a,b)] \oplus [(cf+de,df)] && \text{por la definición de adición en } \mathbb{Q}^*. \\
&= [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} && \text{por la definición de adición en } \mathbb{Q}^*. \quad \square
\end{aligned}$$

6.1.1.2. Existencia de elemento idéntico para la adición

En los números racionales también existe un número que actúa como elemento idéntico para la adición, es decir, un elemento $[(x,y)] \in \mathbb{Q}^*$, tal que al sumarlo con cualquier otro número racional $[(a,b)]$, nos da como resultado el mismo número racional $[(a,b)]$; o sea:

$$[(a,b)] \oplus [(x,y)] = [(a,b)]$$

para encontrarlo asumamos que la anterior igualdad se cumple; esto es lo mismo que

$$[(ay + bx, by)] = [(a, b)],$$

por la definición de adición en $\mathbb{Q}^*$. Para que las dos familias sean iguales, se requiere que

$$(ay + bx)b = bya,$$

y si aplicamos las propiedades distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, conmutativa y cancelativa de la adición entre números naturales, encontramos que como $b \neq 0$, se tiene que $x = 0$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior vemos que y puede tomar cualquier valor diferente de 0 en los números naturales. Es decir que *el elemento idéntico para la suma de números racionales* es:

$$[(0, y)].$$

Debemos resaltar que a pesar de que el número y no está fijo, la familia $[(0, y)]$ sí es única.

6.1.1.3. Propiedad cancelativa de la adición

Esta propiedad establece que si se cumple la igualdad

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a, b)] \oplus [(e, f)],$$

entre números racionales cualesquiera $[(a, b)]$, $[(c, d)]$, $[(e, f)]$, entonces también se cumple la igualdad

$$[(c, d)] = [(e, f)].$$

Prueba: debemos asumir como cierta la primera igualad, y obtener como consecuencia la segunda; es decir, suponemos que

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a, b)] \oplus [(e, f)],$$

esto significa que

$$[(ad + bc, bd)] = [(af + be, bf)],$$

por la definición de adición en $\mathbb{Q}^*$.

Ahora aplicamos la definición de igualdad entre números racionales obteniendo que:

$$(ad)(bf) + (bc)(bf) = (bd)(af) + (bd)(be),$$

y por las propiedades conmutativa, asociativa de la multiplicación y cancelativa de la adición entre números naturales, nos queda:

$$(bc)(bf) = (bd)(be).$$

Aplicando de nuevo las propiedades conmutativa, asociativa y cancelativa de la multiplicación entre números naturales, teniendo en cuenta que $b \neq 0$, obtenemos que:

$$cf = ed,$$

de donde concluimos que

$$[(c, d)] = [(e, f)],$$

lo que finaliza nuestra demostración. □

6.1.1.4. Propiedad conmutativa de la adición

Veamos ahora que la adición de números racionales es *conmutativa*. Es decir, que para todo $[(a, b)]$, $[(c, d)] \in \mathbb{Q}^*$, tenemos que:

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(c, d)] \oplus [(a, b)].$$

Prueba: partamos de la definición de adición de números racionales:

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(ad + bc, bd)].$$

Usando las propiedades conmutativas de la adición y la multiplicación de los números naturales, tenemos que:

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(cb + da, db)],$$

y por la definición de adición en $\mathbb{Q}^*$:

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(c, d)] \oplus [(a, b)].$$ □

6.1.2. Multiplicación

Para obtener una definición de multiplicación[5] entre números racionales, observamos que para las fracciones

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

[5]Como en la adición, también en la multiplicación de números racionales usaremos un símbolo diferente para indicarla.

lo que indica que debemos definir:

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(ac,bd)].$$

6.1.2.1. Propiedad asociativa de la multiplicación

Las demostraciones de las propiedades de las multiplicación son más rápidas que las de la suma porque se derivan casi inmediatamente de las de la multiplicación de los números naturales; por ejemplo, para demostrar que para números racionales $[(a,b)]$, $[(c,d)]$, $[(e,f)]$ cualesquiera se cumple que:

$$\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = [(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \otimes [(e,f)]\}.$$

Prueba: basta aplicar la definición de multiplicación para obtener:

$$\begin{aligned}\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] &= [(ac,bd)] \otimes [(e,f)] \\ &= [((ac)e,(bd)f)],\end{aligned}$$

y como la multiplicación de números naturales es asociativa, tenemos:

$$\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = [(a(ce),b(df))],$$

con lo que conseguimos el resultado deseado

$$\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = [(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \otimes [(e,f)]\}. \qquad \square$$

6.1.2.2. Existencia del elemento idéntico para la multiplicación

Para la multiplicación de números racionales también existe un número que actúa como elemento idéntico; es decir, un elemento $[(x,y)] \in \mathbb{Q}^*$, tal que al multiplicarlo con cualquier otro número racional $[(a,b)]$, nos da como resultado el mismo número racional $[(a,b)]$, o sea:

$$[(a,b)] \otimes [(x,y)] = [(a,b)],$$

para encontrarlo, asumamos que la anterior igualdad se cumple; esto es lo mismo que

$$[(ax,by)] = [(a,b)],$$

por la definición de multiplicación en $\mathbb{Q}^*$. Para que las dos familias sean iguales, se requiere que

$$(ax)b = (by)a,$$

y si aplicamos las propiedades asociativa, conmutativa y cancelativa de la multiplicación de los números naturales, teniendo en cuenta que a y b son elementos arbitrarios de N y $b \neq 0$, encontramos que $x = y$.

Es decir que el *elemento idéntico para la multiplicación de números racionales* es:

$$[(y, y)].$$

Como en el caso de la suma, a pesar de que el número y no está fijo, la familia $[(y, y)]$ sí es única.

6.1.2.3. Existencia de elementos inversos para la multiplicación

Aquí aparece una diferencia fundamental entre los números naturales y los números racionales que estamos presentando; mientras que en aquellos se cumple la propiedad cancelativa, es decir que:

$$\text{si se cumple la igualdad } \ ab = ac \ \text{ podemos concluir que } \ b = c$$

lo que obliga a que el factor a esté en ambos lados de la igualdad y sea diferente de 0 para poder cancelarlo; en los números racionales tenemos una propiedad más general, ella establece que:

Si se cumple la igualdad

$$[(a, b)] \otimes [(x, y)] = [(c, d)],$$

entonces podemos concluir que

$$[(x, y)] = \frac{1}{[(a, b)]} \otimes [(c, d)],$$

donde $\dfrac{1}{[(a, b)]}$ representa un número racional asociado a cada número racional $[(a, b)] \neq [(0, y)]$ por la condición:

$$\frac{1}{[(a, b)]} \otimes [(a, b)] = [(x, x)] = [(1, 1)].$$

Esta condición obliga a que $\dfrac{1}{[(a, b)]} = [(b, a)]$, puesto que

$$[(a, b)] \otimes [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(1, 1)].$$

6.1.2.4. Propiedad conmutativa de la multiplicación

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición de multiplicación en $\mathbb{Q}^*$ y de la propiedad conmutativa de la multiplicación de números naturales. Para todo par de números racionales $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ se cumple que

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(c,d)] \otimes [(a,b)];$$

la demostración es inmediata.

6.1.2.5. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Dados $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ y $[(e,f)]$, números racionales, vamos a demostrar que:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \otimes [(e,f)]\}.$$

Prueba: partamos de

$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\}$

$= [(a,b)] \otimes [(cf+de, df)]$ por la definición de adición en $\mathbb{Q}^*$.
$= [(a(cf+de), b(df))]$ por la definición de multiplicación en $\mathbb{Q}^*$.
$= [(acf+ade, bdf)]$ por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números naturales.
$= [(acbf+bdae, bdbf)]$.

Por la definición de igualdad de números racionales es lícito multiplicar ambas componentes por un número cualquiera b, y aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación de números naturales, y la definición de adición en $\mathbb{Q}^*$, obtenemos:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [(ac,bd)] \oplus [(ae,bf)],$$

y por la definición de multiplicación en $\mathbb{Q}^*$,

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \otimes [(e,f)]\}. \quad \square$$

6.1.2.6. Definición de división de números racionales

Si $[(c,d)]$ es un número racional diferente de $[(0,y)]$ y $[(a,b)]$ es un número racional cualquiera, definimos la división $[(a,b)]$ entre $[(c,d)]$ mediante:

$$[(a,b)] \div [(c,d)] = [(a,b)] \otimes \frac{1}{[(c,d)]},$$

y como $\dfrac{1}{[(c,d)]} = [(d,c)]$, entonces

$$[(a,b)] \div [(c,d)] = [(a,b)] \otimes [(d,c)] = [(ad,bc)].$$

Notemos que la división de dos números racionales es un número racional siempre que el divisor no sea de la forma $[(0,y)]$.

Ejercicio

Demuestre que la división de números racionales no es asociativa, ni tiene elemento idéntico, ni es conmutativa; que sí es distributiva a izquierda pero no a derecha con respecto a la suma de números racionales; esto último significa que

Dados $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ *y* $[(e,f)]$ *números racionales, se cumple que:*

$$\{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} \div [(a,b)] = \{[(c,d)] \div [(a,b)]\} \oplus \{[(e,f)] \div [(a,b)]\},$$

pero no se cumple que

$$[(a,b)] \div \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \div [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \div [(e,f)]\}.$$

En términos más conocidos afirmamos que si x, y, z *representan números racionales,*

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z},$$

pero

$$\frac{x}{y+z} \neq \frac{x}{y} + \frac{x}{z}\,.$$

6.1.3. Potenciación de números racionales

La potenciación entre dos números racionales solo está definida cuando el exponente es un número natural, pues en general al tener exponentes racionales podemos obtener resultados que no sean números racionales.

Si $[(c,d)]$ es de la forma $[(n,1)]$, es decir, cuando c es un múltiplo de d, lo identificaremos con el número natural n, y definimos para a, b, c, d, números naturales cualesquiera, y b, $d \neq 0$:

$$[(a,b)]^{[(n,1)]} = [(a,b)]^n = [(a^n, b^n)].$$

6.1.3.1. Propiedades de la potenciación

Para todo $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ números racionales, y para todo n, m números naturales se cumple que:

1. $[(a,b)]^n \otimes [(c,d)]^n = ([(a,b)] \otimes [(c,d)])^n$.

2. $[(a,b)]^n \otimes [(a,b)]^m = ([(a,b)])^{n+m}$.

3. $[(a,b)]^n \div [(a,b)]^m = ([(a,b)])^{n-m}$ si $n \geq m$.

4. $([(a,b)]^n)^m = ([(a,b)])^{nm}$.

Ejercicio

Demuestre las propiedades de la potenciación enunciadas anteriormente.

Mostraremos enseguida argumentos para sostener la afirmación inicial de que *la potenciación, definida de la misma forma y con las mismas propiedades que las que hemos definido para exponentes naturales, no es en general un número racional*; esto es, que una expresión de la forma $[(a,b)]^{[(c,d)]}$ con $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, números racionales cualesquiera, *no siempre es un número racional.*

Ejemplo

Si $[(a,b)] = [(2,1)]$ y $[(c,d)] = [(1,2)]$, el número $[(2,1)]^{[(1,2)]}$ no es racional.

Prueba: supongamos que $[(2,1)]^{[(1,2)]}$ es un número racional; es decir, que existen números naturales p y $q \neq 0$, con p y q primos relativos entre sí[6] tales que :

$$[(2,1)]^{[(1,2)]} = [(p,q)],$$

multiplicando ambos términos de la igualdad por sí mismos, obtenemos de una parte,

$$\left([(2,1)]^{[(1,2)]}\right)^{[(2,1)]} = [(2,1)]^{[(2,2)]} = [(2,1)]^1 = [(2,1)],$$

y de la otra

$$[(p,q)]^{[(2,1)]} = [(p^2,q^2)],$$

lo que implica que

$$[(2,1)] = [(p^2,q^2)],$$

y por tanto $p^2 = 2q^2$, lo que significa que p^2 es par y en consecuencia p es par, o sea que $p = 2m$ para algún número natural m.

Entonces $p^2 = 4m^2 = 2q^2$, de donde $q^2 = 2m^2$, es decir que q^2 es par y q debe ser par, lo que es imposible porque p y q no tienen factores en común. Debemos concluir que $[(2,1)]^{[(1,2)]}$ no es un número racional. □

6.2. Orden entre números racionales

También el orden en los números racionales $\mathbb{Q}^*$ se define a partir del orden de los números naturales; decimos que:

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ si y solo si } ad \leq bc.$$

Esta relación tiene las siguientes propiedades:

1. **Reflexiva**: para todo número racional $[(a,b)]$ se cumple que $[(a,b)] \leq [(a,b)]$.

[6]Esto significa que no tienen factores en común diferentes de 1, su máximo común divisor es 1.

Prueba: por la propiedad conmutativa de la multiplicación entre números naturales y la propiedad reflexiva del orden entre números naturales tenemos que $ab \leq ba$, y por la definición de orden entre números racionales se tiene que $[(a,b)] \leq [(a,b)]$. □

2. **Antisimétrica**: dados dos números racionales cualesquiera $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, y también se cumple que $[(c,d)] \leq [(a,b)]$, entonces debe cumplirse que $[(a,b)] = [(c,d)]$.

   Prueba: si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, entonces $ad \leq bc$, y si además se cumple que $[(c,d)] \leq [(a,b)]$, entonces $cb \leq da$; pero por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números naturales y por la propiedad antisimétrica del orden de los números naturales concluimos que $ad = bc$, y por tanto $[(a,b)] = [(c,d)]$, lo que concluye la demostración. □

3. **Transitiva**: dados números racionales cualesquiera $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ y $[(e,f)]$, si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, y también se cumple que $[(c,d)] \leq [(e,f)]$, entonces debe cumplirse que $[(a,b)] \leq [(e,f)]$.

   Prueba: si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, entonces $ad \leq bc$, y si además se cumple que $[(c,d)] \leq [(e,f)]$, entonces $cf \leq de$.

   Si multiplicamos en ambos lados de la desigualdad $ad \leq bc$ por e y en ambos lados de la desigualdad $cf \leq de$ por a obtenemos

   $$(ad)e \leq (bc)e \quad \text{y} \quad a(cf) \leq a(de),$$

   y por la propiedad asociativa de la multiplicación entre número naturales y la propiedad transitiva del orden en los números naturales

   $$a(cf) \leq (bc)e,$$

   aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación de números naturales, y si c es diferente de 0, concluimos que

   $$af \leq be, \text{ lo que significa que } [(a,b)] \leq [(e,f)].$$

   Si $c = 0$, también se cumple la desigualdad. □

4. **Monotonía de la adición**: dados dos números racionales cualesquiera $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, si se cumple que

$$[(a,b)] \leq [(c,d)],$$

y también se cumple que

$$[(e,f)] \leq [(g,h)],$$

entonces debe cumplirse que

$$[(a,b)] \oplus [(e,f)] \leq [(c,d)] \oplus [(g,h)].$$

Prueba: si $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, entonces $ad \leq bc$, y si $[(e,f)] \leq [(g,h)]$, entonces $eh \leq fg$. Si multiplicamos $ad \leq bc$ por fh en ambos lados de la desigualdad, y $eh \leq fg$ por db en ambos lados de la desigualdad, y aplicamos la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales, obtenemos

$$adfh \leq bcfh \quad \text{y} \quad ehdb \leq fgdb,$$

o lo que es igual, por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números naturales

$$afdh \leq chbf \quad \text{y} \quad bedh \leq dgbf.$$

Sumando estas dos desigualdades (propiedad monótona de la desigualdad de números naturales con respecto a la suma), conseguimos

$$(afdh + bedh) \leq (chbf + dgbf).$$

Ahora aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números naturales, y obtenemos que:

$$(af + be)dh \leq (ch + dg)bf,$$

lo que significa que

$$[(af + be, bf)] \leq [(ch + dg, dh)],$$

es decir que

$$[(a,b)] \oplus [(e,f)] \leq [(c,d)] \oplus [(g,h)],$$

lo que concluye la demostración. □

Ejercicio

Demuestre la propiedad de monotonía del orden de números racionales para la multiplicación, esto es que: dados dos números racionales cualesquiera $[(a,b)]$ *y* $[(c,d)]$*, si se cumple que*

$$[(a,b)] \leq [(c,d)],$$

y también se cumple que

$$[(e,f)] \leq [(g,h)],$$

entonces debe cumplirse que

$$[(a,b)] \otimes [(e,f)] \leq [(c,d)] \otimes [(g,h)].$$

Capítulo

7

Fracciones continuas finitas

Toma lo que hace falta, opera como debes
y obtendrás lo que deseas.
Wilhelm Leibniz

La construcción de los números racionales a partir de los números naturales que hemos presentado se puede repetir utilizando los números recién construidos como conjunto de partida, porque, como vimos, los números racionales tienen las mismas propiedades algebraicas que las que usamos de los naturales para la construcción de los números racionales. *El resultado será un conjunto de números cuya primera y segunda componente son números racionales*; es decir, tenemos expresiones de la forma:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

que pueden ser interpretadas como la división de dos números racionales, con lo que obtenemos otro número racional y no logramos nada nuevo.

Sin embargo, esta idea de tener fracciones cuyos términos sean también fracciones, con algunas variaciones, nos lleva a un tipo especial de fracciones cuyos términos son fracciones que permiten observar regularidades y caracterizar los números racionales, además nos permiten descubrir y estudiar unos nuevos números que no son racionales y que serán el objeto de estudio

de nuestro próximo capítulo. Estas fracciones se conocen como *fracciones continuas*[1].

7.1. De las fracciones a las fracciones continuas simples finitas

Una *fracción continua* es una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}},$$

donde a_1 es un número natural[2] y a_i con $i > 1$, son números naturales diferentes de cero. Si $b_i = 1$ para todo $i \geq 1$, $i \in N$, la fracción continua se denomina *fracción continua simple*, y si hay último término, se llama una *fracción continua simple finita*; de lo contrario es una *fracción continua simple infinita.*

Toda fracción puede expresarse como una fracción continua simple finita, para ello la escribimos como una fracción compuesta, usando el algoritmo de la división, de manera que cada uno de los numeradores de las fracciones parciales sea 1; por ejemplo $\frac{53}{20}$ podemos escribirlo como:

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{13}{20},$$

y si dividimos el numerador y el denominador del segundo sumando entre 13

[1]Los pitagóricos aproximaban las raíces cuadradas inexactas (números irracionales) por medio de fracciones continuas. En 1613, Cataldí las estudió. En 1572, Bombelli aproximó las raíces cuadradas por medio de fracciones continuas, y en 1658, Brouncker encontró una expresión para $\frac{4}{\pi}$ en fracción continua infinita. El primer estudio sistemático sobre las mismas se debe a Euler, quien lo realizó en 1837. Un estudio un poco más detallado acerca de la historicidad de las fracciones continuas puede leerse en Recalde y Vargas (2013).

[2]Usualmente a_1 puede ser un número entero cualquiera, pero por la construcción que hacemos en este libro, solo consideraremos números naturales, incluyendo el cero.

obtenemos:

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{1}{\frac{20}{13}}.$$

Pero,

$$\frac{20}{13} = 1 + \frac{7}{13},$$

entonces remplazamos esta igualdad en la fracción inicial, y conseguimos:

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{7}{13}}.$$

Reiteramos el proceso hasta lograr

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}.$$

También podemos establecer fracciones continuas a partir del recubrimiento de rectángulos dados con la menor cantidad de cuadrados (Redondo y Haro, 2005). Veamos un ejemplo:

Si queremos cubrir un rectángulo de 22×6 utilizando la mínima cantidad de cuadrados posibles, no necesariamente, todos de las mismas dimensiones; tenemos que con cuadrados de lado 6 (una de las dimensiones del rectángulo), el rectángulo queda como se observa en la figura 7.1.

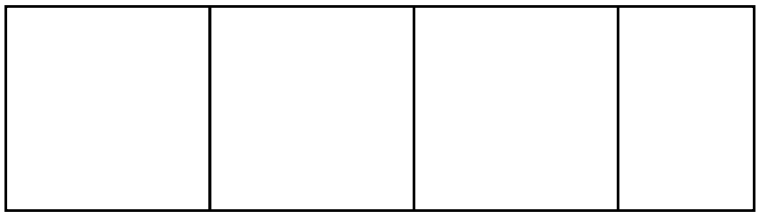


Figura 7.1

Lo que simbólicamente se escribe como:

$$22 \times 6 = 3 \times 6^2 + 6 \times 4.$$

Y equivale a:

$$\frac{22 \times 6}{6^2} = 3 + \frac{6 \times 4}{6^2}$$
$$\frac{22}{6} = 3 + \frac{4}{6}\,. \qquad (1)$$

Lo que indica que, como se ve en la figura 7.1, tenemos 3 cuadrados de lado 6 y un rectángulo de lados 4 y 6.

Podemos continuar con nuestro cometido, pero ubicando cuadrados de máximo tamaño en el rectángulo de 6×4, como vemos en la figura 7.2.

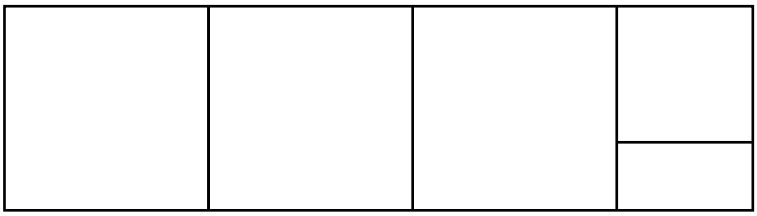


Figura 7.2

De donde tenemos que:

$$6 \times 4 = 1 \times 4^2 + 2 \times 4$$
$$\frac{6 \times 4}{4^2} = 1 + \frac{2 \times 4}{4^2}$$
$$\frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4}\,. \qquad (2)$$

Pero, si queremos continuar con la fracción original $\frac{22}{6} = 3 + \frac{4}{6}$ y tenemos en cuenta que $\frac{4}{6} = \frac{1}{\frac{6}{4}}$, sustituyendo esto último y (2) en (1), nos queda:

$$\frac{22}{6} = 3 + \frac{4}{6}$$
$$\frac{22}{6} = 3 + \frac{1}{\frac{6}{4}}$$
$$\frac{22}{6} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{4}}. \qquad (3)$$

Ahora, repitiendo el procedimiento anterior en el rectángulo de 2×4, obtenemos lo que ilustra la figura 7.3, esto es,

$$2 \times 4 = 2 \times 2^2$$
$$\frac{2 \times 4}{2^2} = 2$$
$$\frac{4}{2} = 2.$$

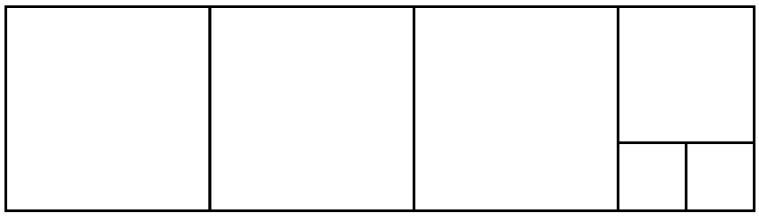


Figura 7.3

Que reemplazando en (3) es:

$$\frac{22}{6} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{2}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Obteniendo así la fracción continua correspondiente a $\frac{22}{6}$.

Ejercicios

1. *Halle una fracción continua para las siguientes fracciones:* $\frac{19}{7}, \frac{17}{12}, \frac{39}{5}$. *¿La fracción continua correspondiente a una fracción dada es única?*

¿Qué relación existe entre las fracciones continuas correspondientes a diferentes fracciones que representan un mismo número racional?

2. *Haga sus propios ensayos hasta lograr habilidad en el manejo.*

3. *Suponga que desea cubrir un rectángulo de 45 unidades por 16 unidades, utilizando exclusivamente cuadrados, no necesariamente iguales. ¿De qué forma se puede hacer con el mínimo número de cuadrados? Haga un dibujo donde represente su solución, halle la fracción correspondiente al dibujo y explique cada paso que realiza.*

No olvide estar siempre atento a las regularidades en el proceso que efectúa.

Las anteriores fracciones tienen numerador mayor que el denominador, y teniendo en cuenta esta característica encontramos la fracción continua correspondiente. Abordemos ahora el problema de hallar la fracción continua para una fracción cuyo numerador sea menor que el denominador; por ejemplo, ¿cuál es la fracción continua para $\frac{13}{20}$? Una salida sencilla es utilizar el hecho de que:

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{\frac{20}{13}}.$$

De esta manera obtenemos en el denominador una fracción cuyo numerador es mayor que el denominador, y ya conocemos el procedimiento para encontrar la fracción continua correspondiente a una fracción de este estilo; el resultado es:

$$\frac{13}{20} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}.$$

Esta es una fracción continua simple, cuyo primer término es cero (de acuerdo con la forma general de una fracción continua: $a_1 = 0$).

Otra opción es ampliar nuestra definición de fracción continua, y aceptar tanto sumas como restas en las fracciones parciales; en el caso que nos ocupa podemos escribir:

$$\frac{13}{20} = 1 - \frac{7}{20},$$

y continuar el proceso como en el primer caso,

$$\frac{13}{20} = 1 - \frac{1}{\frac{20}{7}},$$

hasta obtener:

$$\frac{13}{20} = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}.$$

Ejercicio

Similarmente a como se representó la fracción continua correspondiente a $\frac{22}{6}$ *utilizando cuadrados para recubrir un rectángulo de* 22×6 *unidades, proponga una manera para representar, gráficamente, la fracción continua:*

$$\frac{13}{20} = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}.$$

A partir de tal idea, represente también:

$$\frac{5}{7} = 2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{2}}}.$$

A partir de lo anterior, podemos conjeturar que:

Todo número racional[3] puede ser expresado como una fracción continua finita simple.

Para demostrarlo, supongamos que tenemos el número racional $\frac{c}{d}$, con $d \neq 0$ y $c > 0$, porque si $c = 0$, la fracción continua que resulta es inmediata. Por el algoritmo de la división para números naturales, existen números naturales a_1 y r_1 tales que:

$$c = da_1 + r_1 \quad \text{con} \quad 0 \leq r_1 < d,$$

donde a_1 es el cociente y r_1 el residuo de dividir c entre d.

Si r_1 es diferente de cero, reiteramos el proceso tomando como dividendo el divisor, y como divisor el residuo de la anterior división; así tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned}
d &= r_1 a_2 + r_2 && 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 a_3 + r_3 && 0 \leq r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 a_4 + r_4 && 0 \leq r_4 < r_3 \\
&\vdots && \vdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} a_{n-1} + r_{n-1} && 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_n + r_n && 0 = r_n.
\end{aligned}$$

Para obtener la fracción continua correspondiente a la fracción $\frac{c}{d}$, dividimos la primera igualdad entre d:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{r_1}{d},$$

y las demás igualdades entre $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-2}$ y r_{n-1} respectivamente, obteniendo:

[3]Recordemos que aquí estamos considerando números racionales no negativos; esto es, mayores o iguales a cero.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} \\
\frac{r_2}{r_3} &= a_4 + \frac{r_4}{r_3} \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n.
\end{aligned}$$

Ahora debemos conseguir que el numerador de cada fracción sea 1 y lo logramos si dividimos su numerador y denominador entre el numerador, o sea:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{r_1}{d} = a_1 + \frac{1}{\dfrac{d}{r_1}}.$$

Finalmente sustituimos cada fracción parcial por su equivalente hasta obtener:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}} \\ \cdots + \frac{1}{a_n},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ahora pensemos en el proceso inverso; esto es, ¿cómo hallar la fracción correspondiente a una fracción continua simple finita dada?

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}} \qquad \text{con } a_i > 0, \;\; i \geq 1.$$
$$\cdots + \frac{1}{a_n}$$

7.2. De las fracciones continuas simples finitas a las fracciones

Hallemos, por ejemplo, la fracción que tiene como fracción continua a:

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}}.$$

No es difícil pensar en efectuar las operaciones indicadas entre las fracciones simples que forman la fracción continua, comenzando por la última; por ejemplo:

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{\frac{13}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{3}{13}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \frac{13}{42}} = \frac{404}{181}.$$

Esperamos que la mecanización de los algoritmos propuestos y la proposición de algunos nuevos sea una constante preocupación del estudiante, sin necesidad de que se le sugiera hacerlo.

Tampoco es difícil intuir que siempre que tengamos una fracción continua finita podamos efectuar este procedimiento y obtener una fracción simple.

Por simplicidad, ilustremos el caso de la fracción continua:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4}}}.$$

Efectuando las operaciones, concluimos que:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4}}} = \frac{a_1[a_2(a_3a_4 + b_3) + b_2a_4] + b_1(a_3a_4 + b_3)}{a_2(a_3a_4 + b_3) + b_2a_4}.$$

En general se tiene que:

Toda fracción continua finita simple representa un número racional.

Tenemos entonces que una fracción puede ser representada por una fracción continua simple finita, y esta, a su vez, puede ser expresada como un racional. Surge una pregunta: ¿qué representa una fracción continua simple infinita? Este es el tema de nuestro siguiente capítulo.

Ejercicio

Encuentre la fracción correspondiente a cada una de las siguientes fracciones continuas:

a) $3 + \cfrac{3}{6 + \cfrac{3}{9 + \cfrac{3}{12 + \cfrac{3}{15}}}}$ *b)* $4 + \cfrac{2}{6 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{10}}}$ *c)* $5 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{2}{13 + \cfrac{2}{19}}}}$

Todo número racional se puede escribir como una fracción continua finita, y viceversa; sabemos operar con números racionales pero no con fracciones

continuas. Una manera de hacerlo es convertir las fracciones continuas en fracciones, operar los resultados y convertir estos últimos en fracciones continuas.

Ejercicio

Aplique este procedimiento para operar fracciones continuas sencillas y busque una regularidad.

Capítulo

8 Fracciones continuas periódicas

Son las operaciones que podemos realizar con los números las que determinan su naturaleza.
Simon Stevin

Como dijimos en el capítulo anterior, la construcción de los números racionales a partir de los números naturales permite que los números naturales sean remplazados por otros números que tengan dos operaciones cuyas propiedades sean las mismas y con ellos formar números análogos a los números racionales.

También vimos que toda fracción continua simple finita representa a un número racional, y viceversa, todo número racional tiene una expresión como fracción continua simple finita.

Esto significa que una expresión de la forma[1]

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

donde los a_i con $i > 0$ son números naturales y el número de fracciones *no es finito*, representa un *número que no es racional*; los llamaremos *números*

[1]Esta notación para las fracciones continuas fue introducida en 1898 por el matemático alemán Alfred Pringsheim, seguidor de Weierstrass.

irracionales[2]; es decir, números que no se pueden expresar como una división entre números naturales.

8.1. El número de oro de las matemáticas

Estudiemos el número que representa la expresión:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Por analogía con la representación n-mal, estudiada en el capítulo 4, notaremos las fracciones continuas simples periódicas (entendidas como aquellas donde existen un $i > 1$ y un $j \geq i$, tales que la secuencia entre a_i y a_j se repite) de manera similar. En este caso:

$$[1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = [1; \overline{1}]$$

Una primera manera de estudiar estas fracciones es aproximarnos, usando fracciones continuas finitas con un número de términos cada vez mayor.

8.1.1. Reductas de una fracción continua

Llamamos *primera reducta* de una fracción continua a su primer término, o sea a su parte entera; *segunda reducta*, a la suma de la primera reducta con

[2]Según la historia de las matemáticas, el descubrimiento de los números irracionales se debe a Hippasus de Metapontun de la escuela pitagórica en el siglo V a.C. Los babilonios, egipcios, hindúes y árabes conocieron algunos números irracionales, pero no los reconocieron como tales, y los trabajaron con aproximaciones. En el Renacimiento, los irracionales eran considerados como símbolos que no tenían existencia independiente de las magnitudes geométricas, y sus operaciones se justificaban con la teoría de las proporciones de Eudoxo. A finales del siglo XVI, Simón Stevin reconoció números irracionales, pero los operaba con aproximaciones decimales de racionales. John Wallis en su *Álgebra* (1685) y Descartes en sus *Reglas para la dirección del espíritu* (1628) los aceptan como números abstractos. En el siglo XIX, William R. Hamilton escribió *Álgebra como la ciencia del tiempo puro*, y Bernhard Bolzano escribió un tratado sobre la teoría de números; estos libros sirvieron para el fundamento posterior del concepto de número irracional.

la primera fracción parcial, y así sucesivamente. Por ejemplo, las reductas de la fracción continua:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},$$

son:

1.ª reducta: 1.

2.ª reducta: $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

3.ª reducta: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\dfrac{7}{5}$.

4.ª reducta: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\dfrac{17}{12}$.

En nuestro caso, para la fracción continua

$$[1;1,1,1,1,1,\ldots]=[1;\overline{1}]\,.$$

las primeras reductas son:

1.ª reducta: 1.

2.ª reducta: $1+\dfrac{1}{1}=2$.

3.ª reducta: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\dfrac{3}{2}$.

4.ª reducta: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\dfrac{5}{3}$.

Cada vez que un matemático observa un cálculo engorroso, se pregunta: "¿será posible evitar estos molestos cálculos?". Procuremos determinar el valor de las reductas sin hacerlos.

Escribamos las reductas obtenidas en una lista, y observemos si existe alguna regularidad

$$1 \qquad 2 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{8}{5} \qquad \frac{13}{8} \qquad \frac{21}{13} \qquad \frac{34}{21} \ldots$$

La sucesión de los numeradores es la sucesión de Fibonacci (Luque, Mora y Páez, 2013, p. 299); cada uno de ellos es la suma de los dos numeradores anteriores y, de otro lado, el denominador de una fracción es igual al numerador de la fracción anterior (aunque hay otra manera de verlo, ¿cuál?), esto es:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{b_1} = 1 \\
&\frac{a_2}{b_2} = 2 \\
&\frac{a_3}{b_3} = \frac{3}{2} = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \\
&\frac{a_4}{b_4} = \frac{5}{3} = \frac{a_2 + a_3}{a_3} \\
&\quad \vdots \\
&\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 2,
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos una fórmula por recurrencia para hallar el valor de la fracción continua cuando los $a_i = 1$ con $1 \leq i \leq n$.

Una segunda visión la obtenemos expresando el resultado de cada reducta en forma decimal:

$$1 \qquad 2 \qquad 1,5 \qquad 1,\overline{6} \qquad 1,6 \qquad 1,625 \qquad 1,6153846 \qquad 1,6190476$$

y si queremos mayor precisión, calculamos términos con n cada vez mayores; usando un computador, obtenemos:

$$1,\ 61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576.$$

Observamos que el valor de esta fracción se encuentra alrededor de 1,6 y cada vez los valores de las reductas obtenidas están uno por encima y otro por debajo de ¡*un número que ignoramos*!

Otro método surge de una observación tan simple como genial. Llamemos x a la fracción continua infinita dada, así:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Entonces,

$$x = 1+\frac{1}{x} = 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}}},$$

como la fracción continua es *infinita*, entonces la cola infinita es igual a ¡un pedazo de ella! A partir de

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

podemos suponer, como siempre, que x es un número que se comporta como un número racional, y podemos multiplicar la igualdad por x, obteniendo:

$$x^2 = x + 1,$$

y resolviendo esta ecuación, tenemos que:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esta expresión[3] es conocida en matemáticas como el *número áureo o número de Fibonacci* y se nota comúnmente con la letra griega[4] ϕ. El número de oro es el primer número metálico[5] considerado.

Geométricamente, ϕ puede interpretarse como el resultado de la división de un segmento en dos partes, de manera que la parte mayor sea media proporcional entre la parte menor y el todo; para los antiguos era la forma más bella de dividirlo.

En símbolos, lo que pretendemos es que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

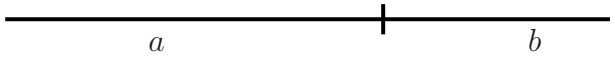


Figura 8.1

Podemos calcular su valor escribiendo la anterior proporción en la forma

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b},$$

y si cambiamos $\phi = \dfrac{a}{b}$, tenemos que:

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi,$$

que es la ecuación que define a la sección áurea o el también llamado *número de oro* de las matemáticas. Como ya hemos visto *ϕ es un número irracional*, pues lo definimos como una fracción continua simple infinita.

[3]Este número expresa un concepto de *belleza* en matemáticas, el cual fue estudiado por los griegos, los egipcios y los romanos; en particular por Marcos Vitruvio Polio. Luca Paccioli, en el siglo XV, escribió un libro sobre la *Divina proporción*. Leonardo da Vinci y Alberto Durero la estudiaron basados en los estudios de Fibonacci. En la época moderna Matila Ghyka y Gyorgy Doczi han estudiado la aplicación de la sección áurea en la naturaleza, las artes y la arquitectura.

[4]El símbolo ϕ para la relación áurea fue elegido por el matemático americano Mark Barr. ϕ es la primera letra del nombre del escultor griego Phidias, quien solía usar la relación áurea en sus esculturas.

[5]Aunque los números metálicos datan de la Antigüedad, su nombre fue dado recientemente.

También ϕ representa la medida de una de las diagonales del pentágono regular cuando su lado se toma como unidad.

Si reiteramos las divisiones áureas en un pentágono regular, obtenemos la conocida *máscara de Hermes o Medusa*, mostrada en la figura 8.2, que aparece en un mármol romano tomado del original griego, en el primer siglo a.C. Este se encuentra en la Glyptothek de Múnich, Alemania.

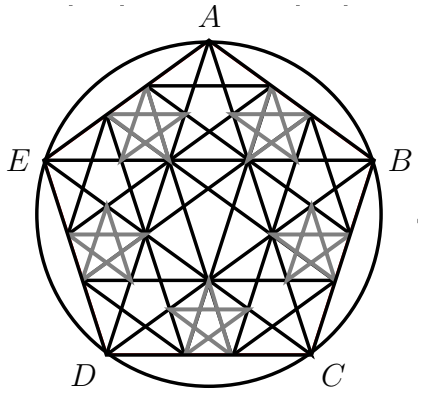


Figura 8.2

Ejercicios

1. *Como la ecuación que define ϕ es*

$$\phi^2 = \phi + 1,$$

si la multiplicamos por ϕ sucesivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi^3 &= \phi^2 + \phi \\ \phi^4 &= \phi^3 + \phi^2 \\ &\vdots \\ \phi^n &= \phi^{n-1} + \phi^{n-2}. \end{aligned}$$

Es decir que la sucesión

$$\{1, \phi, \phi^2, \phi^3, \ldots, \phi^n\}$$

es una sucesión de Fibonacci. Demuestre que:

a) *La suma de los n primeros términos es:*

$$\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^n = \phi^{n+2} - \phi - 1.$$

b) *La suma de los n primeros términos impares es:*

$$\phi + \phi^3 + \cdots + \phi^{2n-1} = \phi^{2n} - 1.$$

c) *La suma de los n primeros términos pares es:*

$$\phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^{2n} = \phi^{2n+1} - \phi.$$

2. *Consulte cómo dividir un segmento y un rectángulo para obtener la proporción áurea. Copie los procedimientos para dividir un triángulo y un pentágono en proporción áurea. ¿Es posible dividir cualquier polígono en esta proporción?, ¿un sólido?*

3. *Muestre que las cifras n-males de ϕ son las mismas que las de $\dfrac{1}{\phi}$ (¿Este resultado es independiente de la base en que se escriba ϕ?).*

8.2. El número $\sqrt{2}$

Hagamos el mismo tratamiento realizado para la sección áurea con la fracción continua simple infinita resultante de cambiar algunos unos por doses:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

o de forma resumida $[1; \overline{2}]$. Sus primeras reductas son sucesivamente:

1.^{a} reducta: 1.

2.^{a} reducta: $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

3.^{a} reducta: $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{7}{5}$.

4.^{a} reducta: $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{17}{12}$.

Escritas como sucesión de fracciones son

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169}.$$

Y como sucesión de números decimales:

$$1 \quad 1,5 \quad 1,4 \quad 1,41\overline{6} \quad 1,4137931 \quad 1,4\overline{142857} \quad 1,4142011834319\ldots$$

Posiblemente si observamos la lista de los cuadrados de la sucesión anterior podemos establecer alguna conjetura:

Reducta (n)	1.^{a}	2.^{a}	3.^{a}	4.^{a}	5.^{a}	6.^{a}
Decimal	1	1,5	1,4	$1{,}41\overline{6}$	1, 4137931	$1{,}4\overline{142857}$
Cuadrado	1	2,25	1,96	$2{,}0069\overline{4}$	1,9988109...	2,00020408...

Tabla 8.1

El cuadrado de las reductas se aproxima cada vez a 2.

Ejercicio

Exprese una regularidad en la sucesión de las fracciones correspondientes a las reductas de la fracción continua, en forma de fórmula de recurrencia.

Utilizando el método del ejemplo anterior, vamos a hallar el número que representa la siguiente fracción continua simple infinita:

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}},$$

sumando 1 en ambos lados de la igualdad, podemos escribirla en la forma:

$$x+1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\ldots}},$$

y esta, a su vez, como

$$x+1 = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Si suponemos que x se comporta como un número racional, multiplicamos por $x+1$ en ambos lados de la igualdad y obtenemos:

$$(x+1)^2 = 2(x+1) + 1.$$

Efectuando las multiplicaciones y aplicando la propiedad cancelativa de la adición, nos queda:

$$x^2 = 2$$

es decir que $x = \sqrt{2}$, y hemos demostrado que $\sqrt{2}$ *es un número irracional*, pues se puede representar mediante una fracción continua simple infinita.

Geométricamente, $\sqrt{2}$ puede interpretarse como la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado se escoge como unidad[6]. Es uno de los primeros ejemplos conocidos en la historia de *magnitudes inconmensurables.*

En geometría, dos segmentos de longitudes a y b, respectivamente, se llaman *conmensurables* si existe un segmento de longitud c y dos números naturales n y m de forma que $a = nc$ y $b = mc$.

En el caso en que a y b sean conmensurables, Euclides nos enseñó un procedimiento[7] para encontrar la medida común.

Supongamos que b es el mayor de los dos segmentos, si existe una medida común entre a y b, colocamos a a desde un extremo y a lo largo de b tantas veces como sea posible, sin que sobrepasemos la longitud de b; es decir, dividimos b entre a. Si las longitudes coinciden, entonces a es la medida común.

[6] Algunas versiones geométricas de esta demostración pueden encontrarse en Casás (2010).

[7] Si a y b son números naturales, el procedimiento conduce al máximo común divisor entre a y b; es decir, que si dos segmentos tienen longitudes dadas por números naturales, siempre son conmensurables.

Si en el proceso queda un residuo, digamos r_1, este residuo debe ser conmensurable con a, para que a y b sean conmensurables; entonces repetimos el proceso anterior con r_1 y a, si el residuo es 0, entonces r_1 es la medida común; si no, obtenemos un residuo r_2, y así sucesivamente hasta obtener un residuo 0. El penúltimo residuo es la máxima medida común.

Por ejemplo, si $a = 36$ y $b = 248$, la primera división tiene como residuo 32; al dividir 36 entre 32 tenemos como residuo 4 y, finalmente, al dividir 32 entre 4 obtenemos el codiciado 0. La máxima medida común de a y b es 4.

Dos segmentos se llaman *inconmensurables*[8] si no son conmensurables. Los griegos[9] descubrieron la existencia de segmentos inconmensurables, intentando medir la diagonal de un cuadrado usando su lado como unidad. Si el lado de un cuadrado es 1, el teorema de Pitágoras nos dice que su diagonal mide $\sqrt{2}$.

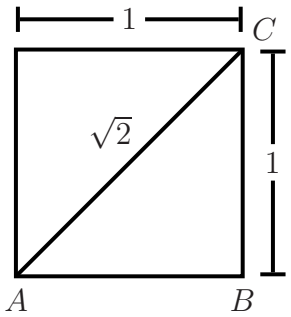


Figura 8.3

Para mostrar esta inconmensurabilidad, apliquemos el procedimiento de Euclides y dividamos la longitud del lado mayor $\sqrt{2}$, entre el menor 1; o sea, haciendo centro en A, copiamos el lado sobre la diagonal y obtenemos como

[8]El descubrimiento de las razones inconmensurables obligó a los griegos a preferir la geometría de la regla y el compás sobre la aritmética. Sin embargo, la teoría de proporciones de Eudoxo de Cnido permitió extender pruebas que consideraban magnitudes conmensurables a problemas que contemplaban las magnitudes inconmensurables, como se hace en los *Elementos* de Euclides.

[9]Teeteto de Atenas demostró que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ son inconmensurables con la unidad; Platón dedicó uno de sus Diálogos a él (Vera, 1970, p. 200).

El libro X de los *Elementos* de Euclides contiene cuatro definiciones sobre las magnitudes conmensurables e inconmensurables y 115 proposiciones sobre los números irracionales en las que solo intervienen raíces cuadradas. En él encontramos una clasificación sistemática de los segmentos de líneas inconmensurables de la forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ donde a y b sí son conmensurables y de la misma naturaleza.

cociente 1 y como residuo $(\sqrt{2}-1)$, es decir:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1).$$

Dividamos ahora el divisor anterior, que es 1, entre el residuo, y obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

Este resultado lo podemos escribir como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}-1)$$

e interpretarlo como una división con cociente 2 y residuo $(\sqrt{2}-1)$.

Sin embargo, esto es muy extraño porque uno siempre espera que los nuevos residuos en el procedimiento de Euclides sean cada vez menores, hasta conseguir como residuo 0.

El resultado anterior podemos verlo de otra forma:

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)},$$

y como el segundo sumando del denominador es el mismo que el primer miembro de la igualdad, podemos sustituirlo en un proceso sin fin:

$$\sqrt{2}-1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$

$$\sqrt{2}-1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}$$

hasta formar una fracción continua infinita:

$$\sqrt{2}-1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

o sea que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

con el mismo resultado que habíamos conseguido.

Esto significa que $\sqrt{2}$ no puede ser expresado como un número racional, o sea que tampoco puede escribirse como un n-mal periódico[10], pues si lo fuera podríamos hallar la fracción asociada. Solo podemos tener una aproximación cualquiera que sea el número de cifras decimales que escribamos; por ejemplo, en base 10 con 12 decimales correctos es:

$$\sqrt{2} \cong 1,414213562373.$$

O usando un computador lo calculamos con 100 decimales correctos; el resultado es:

1, 4142 1356 2373 0950 4880 1688 7242 0969 8078 5696 7187 5376 9480 7317
6679 7379 9073 2478 4621 0703 8850 3875 3432 7641 573,

y, no obstante, esta expresión sigue siendo solo una aproximación.

El número $\sqrt{2}$ fue manejado con buenas aproximaciones por las culturas de la Antigüedad. Los griegos usaban:

$$\sqrt{2} \cong \frac{7}{5} = 1,4.$$

Los hindúes dieron la aproximación:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1,41\overline{6}$$

que corresponde con la cuarta reducta de su fracción continua. Pero ninguna de estas culturas reconoció que $\sqrt{2}$ fuera un número irracional, muy posiblemente no estaba dentro de sus intereses.

El historiador de la matemática Thomas Heath (1956, citado por Campos, 1996, p. 25), señala que es necesario superar tres etapas antes de que sea descubierta realmente la irracionalidad de la diagonal de un cuadrado:

[10]Wallis (1696) demostró que los números racionales tenían representación decimal periódica, pero fue Otto Stolz (1842-1905) quien "mostró que cada número irracional puede representarse como un decimal no periódico" (Kline, 1994, p. 1302) y sugirió además utilizar esta idea para definir los números irracionales.

1. Reconocer como inexacto cualquier valor encontrado por medición directa o por cálculos basados en ella.

2. Llegar a la convicción de que es imposible obtener una expresión aritmética exacta del valor.

3. Probar tal imposibilidad.

Los pitagóricos, en cambio, sí la reconocieron, y además encontraron que la sucesión[11]:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \ldots$$

se aproxima a $\sqrt{2}$, donde cada numerador a partir del tercero se obtiene multiplicando el numerador del término anterior por 2 y sumando el numerador del anterior al anterior; por ejemplo, $17 = 7 \times 2 + 3$ y cada denominador a partir del tercero se construye multiplicando el anterior denominador por 2 y sumando el anterior del anterior; por ejemplo, $12 = 5 \times 2 + 2$.

8.2.1. Una hermosa y extraña relación

Mucho se ha estudiado acerca de los números triangulares y los números cuadrados (Luque, Mora y Páez, 2013, pp. 196-216). ¿Existe una relación directa entre ellos? Es decir, ¿existen números cuadrados que sean triangulares? Esta pregunta se puede reformular diciendo: ¿existen números naturales n y k tal que $\dfrac{n(n+1)}{2} = k^2$?

Si multiplicamos por ocho a cada lado de la igualdad y sumamos uno, tenemos:

$$4n^2 + 4n + 1 = 8k^2 + 1,$$

que también puede escribirse como:

$$(2n+1)^2 = 2(2k)^2 + 1.$$

[11] Si llamamos x_n a los numeradores y y_n a los denominadores de los términos de esta sucesión, estos corresponden a las soluciones naturales de la ecuación $x^2 = 2y^2 + 1$ o de la ecuación $x^2 + 1 = 2y^2$.

Si llamamos $y = 2n + 1$ y $x = 2k$, la ecuación toma la forma:

$$y^2 = 2x^2 + 1,$$

que es una de las ecuaciones que aparece en la nota 12, cuyas soluciones son las parejas de números naturales $(x, y) = (2, 3), (12, 17), (70, 99), \ldots$ y cuyos cocientes y/x corresponden a las reductas pares de la fracción continua de $\sqrt{2}$.

Finalmente, obtenemos los valores de k calculando $x/2$ para cada x; sustituyéndolos en la primera igualdad encontramos las soluciones naturales correspondientes a n, y obtenemos $(k, n) = (1, 1), (6, 8), (35, 49), \ldots$ Luego, sí hay números triangulares que son cuadrados y, no solo eso, también sabemos cuáles son y que son infinitos.

No es fácil sospechar que exista alguna relación entre números triangulares, cuadrados y las reductas de una fracción continua.

La ecuación $y^2 = 2x^2 + 1$ es solo un caso particular de una familia de ecuaciones de números naturales de la forma $y^2 = dx^2 + 1$, donde d es un número natural que no es un cuadrado perfecto, conocidas como ecuaciones de Pell-Fermat, y cuyo estudio se aborda, por sugerencia de Euler (Kline, 1994), expresando $\sqrt{d}$ como fracción continua. Los valores x y y que satisfacen la ecuación son tales que las razones x/y son las reductas de $\sqrt{d}$, pero este método no proporciona todas las soluciones. Posteriormente Lagrange y Fermat dieron soluciones más generales.

Notemos que si d es un cuadrado perfecto, entonces la ecuación no tiene alguna solución diferente a $x = 1$, $y = 0$.

Ejercicios

1. *Estudie ecuaciones de Pell-Fermat con d = 3, 5, etc.*

2. *En la ecuación*

$$127x - 52y + 1 = 0,$$

tomemos los coeficientes de x y y; formemos la fracción

$$\frac{127}{52},$$

hallemos su fracción continua simple

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}},$$

cuyas reductas son:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\,, \\ r_3 &= \frac{17}{7}\,, \\ r_4 &= \frac{22}{9}\,, \\ r_5 &= \frac{127}{52}\,. \end{aligned}$$

Encontramos que $x = 9$ y $y = 22$, números que aparecen en la expresión de r_4, son una solución de la ecuación. Estudie situaciones similares para encontrar soluciones enteras para ecuaciones de la forma

$$ax - by + c = 0.$$

8.2.2. La demostración clásica

Ya hemos visto que $\sqrt{2}$ no puede ser escrito como una fracción por tener asociada una fracción continua simple infinita. Otra manera de demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como el cociente de dos números naturales la hizo Euclides,

> con un arma de la lógica conocida como reducción al absurdo, o prueba por contradicción. Este método gira alrededor de la perversa idea de intentar demostrar que un teorema es cierto asumiendo en un principio que es falso. La reducción al absurdo, a la que Euclides tenía tanta

> afición, es una de las armas más sutiles de los matemáticos. Se trata de una estrategia mucho más refinada que cualquier jugada de ajedrez: un ajedrecista se puede permitir sacrificar un peón o incluso otra pieza, pero un matemático arriesga la partida entera. (Singh, 1998, p. 65).

Para demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción, Euclides supuso que sí, y demostró que esa fracción hipotética podía simplificarse hasta el infinito, sin llegar a reducirla nunca a su forma más simplificada; por tanto, la fracción hipotética no podía existir.

Otra manera de ver esa conclusión es suponer que el numerador y el denominador de la fracción no tienen factores en común y llegar a una contradicción, es decir, si $\sqrt{2}$ fuera racional, se podría escribir como un cociente de dos números naturales $\dfrac{b}{a}$ con a, b primos entre sí y $a \neq 0$; entonces se tendría que

$$b^2 = 2a^2,$$

de donde podemos concluir que b^2 es un número par y, por ende, b es par, o sea es de la forma

$$b = 2c,$$

con lo que

$$b^2 = (2c)^2 = 2a^2,$$

o sea que

$$2c^2 = a^2,$$

de donde se concluye que a^2 es par, y por tanto a es par; pero como a y b son primos relativos, a debe ser impar. En conclusión, a es par e impar, lo que no puede ser.

Esta prueba es la misma que hicimos en el final del capítulo 6, con otra notación.

Es curioso que los números irracionales, al igual que los racionales, tengan su origen en la geometría, lo que nos muestra que las pretendidas separaciones entre aritmética y geometría pueden ser artificiales. Veremos esta situación de nuevo más adelante.

Ejercicio

Estudie la fracción continua simple infinita resultante de cambiar los doses por treses, es decir:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}}$$

¿Qué número irracional obtiene? Estudie otros casos cambiando los treses por otros números naturales.

8.3. El número $\sqrt{3}$

No solo $\sqrt{2}$ es irracional, realmente *toda raíz cuadrada de un número natural que no sea un número natural*[12] *es irracional*. Esta es una afirmación algo fuerte; de momento, la abordaremos por partes.

Empecemos por calcular una fracción continua para $\sqrt{3}$. Sabemos que $\sqrt{3}$ debe ser un número entre 1 y 2 porque $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, es decir que

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x},$$

donde x es un número mayor que 1, del que no sabemos mucho, pero que lo trataremos como si fuera un número racional. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$3 = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2},$$

o sea

$$x = 1 + \frac{1}{2x}.$$

[12]Considerando solamente números positivos.

Si reemplazamos este resultado en $\sqrt{3}$, obtenemos:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

o en forma breve

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}],$$

lo que demuestra que $\sqrt{3}$ *también es irracional.*

Ahora vamos a demostrar que $\sqrt{3}$ no es racional, utilizando las mismas ideas de la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Suponemos que $\sqrt{3}$ es racional; así, deben existir números naturales a y b tales que:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0,$$

donde a y b no tienen divisores comunes distintos de 1.

Elevamos al cuadrado

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{a^2}{b^2} \\ a^2 &= 3b^2, \end{aligned} \tag{1}$$

por tanto, a^2 es múltiplo de 3, y, de aquí, demostraremos que a debe ser múltiplo de 3, pues si no lo fuera, entonces a debería ser de una de las dos formas siguientes:

$$a = 3k + 1 \quad \text{o} \quad a = 3k + 2.$$

Si

$$\begin{aligned} a &= 3k + 1 \\ a^2 &= 9k^2 + 6k + 1 \\ a^2 &= 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ a^2 &= 3m + 1, \end{aligned}$$

donde $m = 3k^2 + 2k$; entonces a^2 no es múltiplo de 3, lo que contradice la hipótesis. Y si $a = 3k + 2$, tenemos

$$\begin{aligned} a &= 3k + 2 \\ a^2 &= 9k^2 + 12k + 4 \\ a^2 &= 3(3k^2 + 4k) + 4 \\ a^2 &= 3m + 4 \\ a^2 &= 3(m + 1) + 1. \end{aligned}$$

Entonces a^2 no es múltiplo de 3, lo cual contradice nuestra hipótesis. Luego

$$\begin{aligned} a &= 3n, && n \in N \text{ con } n \neq 0 \\ a^2 &= 9n^2 \\ 3b^2 &= 9n^2 && \text{de (1)} \\ b^2 &= 3n^2, \end{aligned}$$

entonces b^2 es múltiplo de 3, y b es múltiplo de 3.

Como a y b son múltiplos de 3, entonces entre a y b existen divisores diferentes de 1, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego, $\sqrt{3}$ no es racional.

8.4. Los números $\sqrt{p}$

Ejercicios

1. *Copie el procedimiento utilizado hasta ahora para demostrar que $\sqrt{5}$ es irracional.*

2. *Comente la siguiente* demostración *de que $\sqrt{p}$ es irracional si p no es un cuadrado perfecto.*

   Supongamos que $\sqrt{p}$ es un número racional, entonces existen $a, b \in N$ con $b \neq 0$ y $(a, b) = 1$[13] tales que:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b},$$

[13] $(a, b) = 1$ significa que el máximo común divisor de a y b es 1.

entonces

$$p = \frac{a^2}{b^2},$$

y

$$a^2 = pb^2,$$

luego

$$a^2 \text{ es múltiplo de } p.$$

De esto debemos concluir que a es múltiplo de p.

Supongamos que no, es decir que a es de una de las siguientes formas para algún $k \in N$:

$$\begin{aligned} \text{Si } \ a = kp + 1, \ \text{entonces } \ a^2 &= (kp)^2 + 2(kp) + 1 \\ &= p(k^2p + 2k) + 1, \end{aligned}$$

no es múltiplo de p, lo que contradice la hipótesis.

$$\begin{aligned} \text{Si } \ a = kp + 2 \ \text{ entonces } \ a^2 &= (kp)^2 + 4(kp) + 4 \\ &= p(k^2p + 4k) + 4, \end{aligned}$$

no es múltiplo de p, lo que contradice la hipótesis.

Así sucesivamente hasta

$$\begin{aligned} a = kp + (p-1) \ \text{ entonces } \ a^2 &= (kp + (p-1))^2 \\ &= k^2p^2 + 2kp(p-1) + (p-1)^2 \\ &= k^2p^2 + 2kp(p-1) + p^2 - 2p + 1 \\ &= p(k^2p + 2k(p-1) + p - 2) + 1, \end{aligned}$$

no es múltiplo de p, lo que contradice la hipótesis.

Por tanto, $a = kp$, y

$$a^2 = p^2k^2,$$

remplazando esta igualdad en la tercera obtenemos que

$$p^2k^2 = pb^2,$$

o sea

$$b^2 = pk^2$$

de donde concluimos que b^2 es múltiplo de p, y en consecuencia, también b es múltiplo de p, lo que contradice nuestra hipótesis y termina nuestra *demostración*.

Con el mismo método usado para encontrar la fracción continua simple de $\sqrt{3}$ podemos calcular:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}$$

O sea $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$, $\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$ y con una ligera variación:

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= 2 + \frac{1}{x} \qquad (2) \\ 7 &= 4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \\ 3x &= 4 + \frac{1}{x} \\ x &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3x}. \end{aligned}$$

Reemplazamos x en (2)

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3} + \cfrac{1}{3x}}$$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3} + \cfrac{1}{3\left(\cfrac{4}{3} + \cfrac{1}{3x}\right)}}$$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3} + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3} + \dots}}}$$

Para que nos queden únicamente números naturales en el resultado de $\sqrt{7}$, multiplicamos por 3 en el denominador y el numerador de cada fracción parcial, quedándonos la fracción continua:

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \dots}}}$$

que no es una fracción continua simple.

Pero podemos seguir un camino similar al que hicimos con $\sqrt{2}$ para calcular una fracción continua simple para $\sqrt{7}$:

$$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{7} - 2}} = 2 + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{7} - 2} \cdot \dfrac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2}} = 2 + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{7} + 2}{3}}.$$

Ahora, como en el denominador de la segunda fracción hay 3, si sumamos y restamos 1 en el numerador, podemos separar la parte entera de $\dfrac{\sqrt{7} + 2}{3}$, o sea 1, obteniendo

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{\dfrac{2 + 1 + (\sqrt{7} - 1)}{3}} = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{7} - 1}{3}}.$$

Invertimos la última fracción y racionalizamos,

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7} - 1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7} - 1} \cdot \cfrac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} + 1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7} + 1}{2}}}.$$

Y reiteramos el proceso

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{(1+1)+(\sqrt{7}-1)}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-1}{2}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{7}-1}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{7}-1} \cdot \cfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{(2+1)+(\sqrt{7}-2)}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{7}-2}{3}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-2}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{7}-2} \cdot \cfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(2+2)+(\sqrt{7}-2)}}}},$$

hasta conseguir una repetición

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\left[\cfrac{1}{\sqrt{7} - 2}\right]}}}}}.$$

Finalmente, $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$.

Ejercicios

1. *Encuentre los números irracionales correspondientes a las fracciones continuas:* $[1; \overline{3}]$ *y* $[2; \overline{13}]$.

2. *Busque otros números con el mismo comportamiento de* $\sqrt{7}$ *y trate de encontrar una forma general para estos números.*

3. *Si tomamos* $a = 1$ *como punto de partida para encontrar la fracción continua que representa* $\sqrt{5}$*, en lugar de la parte entera de* $\sqrt{5}$*, obtenemos una fracción continua infinita pero no simple*[14]*:*

$$\sqrt{5} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cdots}}}$$

   Estudie otras representaciones con fracciones continuas de $\sqrt{p}$*, tomando* $a = 1$ *e intente encontrar alguna regularidad. Estudie otras representaciones, tomando como punto de partida un* a *que sea menor que la parte entera de* $\sqrt{p}$*.*

[14] Esta idea fue propuesta y desarrollada por la estudiante del curso Sistemas Numéricos Diana Alexandra Acosta Méndez, en el segundo semestre de 2005.

Para $\sqrt{8}$ obtenemos:

$$\sqrt{8} = [2; 1, 4, 4, 4, \ldots],$$

o en forma resumida

$$\sqrt{8} = [2; 1, \overline{4}].$$

Si p es un número natural que no es un cuadrado perfecto, entonces la fracción continua asociada con $\sqrt{p}$ la podemos calcular suponiendo que

$$\sqrt{p} = a + \frac{1}{x},$$

donde a es la parte entera de $\sqrt{p}$, y x es un número mayor que 1. Operando como lo hicimos antes, obtenemos que:

$$x = \frac{2a}{p - a^2} + \frac{1}{(p - a^2)x}.$$

Y si remplazamos x en $\sqrt{p}$, obtenemos una fracción continua simple infinita para cada número p que no sea un cuadrado perfecto, lo que demuestra que son irracionales. Además, hemos demostrado que existen infinitos números irracionales, por lo menos uno por cada uno de los números naturales que no son cuadrados perfectos: su raíz.

Este resultado nos permite hacer afirmaciones asombrosas. Por ejemplo, ahora estamos seguros de que en la lista de los números cuadrados

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

no es posible que uno de ellos sea el doble o el triple, o 5 veces el otro, pues eso exigiría que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc., fueran números racionales, y ya sabemos que no lo son, porque existirían, por ejemplo, dos números naturales a, b tales que $a^2 = 2b^2$, y sabemos que estos números no existen. Por supuesto, en la lista sí hay números que son el cuádruplo de otros; por ejemplo, 36 y 9.

Ejercicios

1. *Demuestre que el número irracional asociado con una fracción continua simple infinita periódica de la forma* $[1; \overline{k}]$ *es:*

$$\frac{\sqrt{k^2 + 4} - (k - 2)}{2}$$

2. *Demuestre que el número irracional asociado con una fracción continua simple infinita periódica de la forma* $[j;\overline{g}]$ *es:*

$$(j-1)+[1;\overline{g}]$$

Este teorema es un caso particular de uno debido a Lagrange (Jones, 1969, p. 104), que establece que la fracción continua simple asociada a un número irracional x es periódica si y solo si x es solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes naturales[15]. Usualmente, a estos números se les denomina *números irracionales cuadráticos.*

Ya antes habíamos mencionado a los números metálicos[16]; estos tienen que ver con números irracionales cuadráticos; así: *los números metálicos, denotados por* σ_p^q*, se definen como el conjunto de números irracionales cuadráticos que son soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas de la forma* $x^2-px-q=0$. Para la ecuación $x^2-x-1=0$ tenemos el *número de oro*; para $x^2-x-2=0$, el *número de cobre*; para $x^2-x-3=0$, el *número de níquel*. Mientras que los *números de plata* y *bronce* corresponden a las ecuaciones $x^2-2x-1=0$ y $x^2-3x-1=0$ respectivamente.

8.5. Operaciones entre números irracionales cuadráticos

8.5.1. Adición

Como en todos los casos que hemos estudiado, nos interesaremos ahora en la forma de operar números irracionales, y como en otros casos, abordaremos el problema por partes. Iniciemos con el problema de sumar números naturales con irracionales cuadráticos.

Cuando sumamos un número natural n con una fracción continua simple de la forma $[1;\overline{k}]$, obtenemos

$$n+[1;\overline{k}]=[n+1;\overline{k}],$$

[15]Una ecuación de la forma $ax^2=bx+c$, o $ax^2+c=bx$, etc., donde los números a,b,c, $a\neq 0$ son números naturales y los llamamos coeficientes.

[16]Un estudio detallado puede encontrarse en Roldán y Rodríguez (2010).

porque la primera cifra representa la parte entera de la fracción continua simple, así tenemos también que:

$$n + [p; \overline{k}] = [n + p; \overline{k}].$$

Con esto demostramos que la suma de un número natural con un irracional es un número irracional, pues al sumarlos obtenemos una fracción continua simple infinita, y por tanto, existen infinitos números irracionales por cada número natural; antes habíamos probado que existía por lo menos uno.

En general, la suma (y la resta) de un número racional r con un irracional i debe dar como resultado un número irracional s, porque si no fuera así y s fuera racional, la resta de $s - r$ (o la suma) sería irracional, y hemos demostrado antes que la suma (o resta) de dos racionales es racional.

Veamos ahora cómo sumar dos irracionales cuadráticos; por ejemplo, para sumar:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12},$$

podemos reducir el problema, utilizando las propiedades de la radicación de los números racionales

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

pero esto solo vale en algunos casos. Una manera general la propusieron los hindúes[17] en la siguiente forma:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3 + 12) + 2 \times \sqrt{3 \times 12}}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{27},$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = 3\sqrt{3}.$$

Esto equivale a usar la igualdad:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{(p + q) + 2\sqrt{pq}},$$

[17]El hindú Bhaskara (Kline, 1994, p. 251) lo dijo así: "la suma de dos números irracionales es el mayor número irracional que sea dos veces su producto al menor de ellos. La suma y la diferencia se efectuará como si fueran números enteros".

fácilmente verificable, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad. De esta manera es posible demostrar la irracionalidad de $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ en el caso en que $(p+q)+2\sqrt{pq}$ no sea un cuadrado perfecto.

Por la forma que tienen las fracciones continuas infinitas, no tenemos recursos generales para definir operaciones entre ellas, solo algunos casos especiales, como por ejemplo $\sqrt{2}+\sqrt{2}$. Podemos iniciar diciendo que es la fracción continua de $2\sqrt{2}$, o sea de $\sqrt{8}$ que calculamos anteriormente, es decir que:

$$[1;\overline{2}]+[1;\overline{2}]=[2;\overline{1,4}].$$

Si reiteramos la suma con el mismo sumando, comenzamos nuestro siguiente tema: la multiplicación de números naturales por irracionales cuadráticos.

8.5.2. Multiplicación

Hemos demostrado que $2\sqrt{2}$ es un número irracional, pues

$$2\times[1;\overline{2}]=[2;1,\overline{4}].$$

Análogamente tenemos que

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{18},$$

también es irracional. Como la fracción continua para $\sqrt{18}$ es:

$$[4;4,8,4,8,4,8,4,\ldots],$$

tenemos que

$$3\times[1;\overline{2}]=[4;\overline{4,8}].$$

De igual manera, $4\sqrt{2}$ es:

$$4\sqrt{2}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{32},$$

pero

$$\sqrt{32}=5+\cfrac{7}{10+\cfrac{7}{10+\cfrac{7}{10+\ldots}}}$$

no es una fracción continua simple.

Procuremos una expresión general para expresiones de la forma $n\sqrt{2}$. Como $n\sqrt{2} = \sqrt{2n^2}$, podemos usar los métodos anteriores; si a es la parte entera de $\sqrt{2n^2}$, entonces, como habíamos hecho antes:

$$\sqrt{2n^2} = a + \frac{1}{x} \tag{3}$$

Si elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad, nos queda:

$$2n^2 = a^2 + \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Esta igualdad la podemos escribir:

$$(2n^2 - a^2)x = 2a + \frac{1}{x},$$

la cual nos permite concluir que:

$$x = \frac{2a}{2n^2 - a^2} + \frac{1}{(2n^2 - a^2)x}.$$

Al remplazar este valor en (3) obtenemos una fracción continua para $n\sqrt{2}$ en términos de n y de la parte entera de $\sqrt{2n^2}$,

$$n\sqrt{2} = k + \cfrac{1}{\cfrac{2k}{2n^2 - k^2} + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{\cfrac{2k}{2n^2 - k^2} + \cfrac{1}{2n + \ldots}}}}$$

o en forma resumida:

$$n\sqrt{2} = \left[k; \frac{2k}{(2n^2 - k^2)}, 2n, \frac{2k}{(2n^2 - k^2)}, 2n, \cdots\right],$$

pero, lamentablemente no es muy expresiva.

Lo que sí nos dice es que la multiplicación de un número natural por una fracción continua simple infinita es una fracción continua simple infinita; es

decir, que el producto de un número natural por un irracional es de nuevo un irracional, lo que incrementa el número de irracionales comparado con el de los naturales.

Ensayemos otro camino, en sentido contrario al anterior, para encontrar alguna regularidad que nos permita relacionar el producto de un número natural por una fracción continua simple infinita con otra fracción continua simple infinita.

Empecemos, de nuevo, con la fracción continua $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$, y multipliquemos cada una de sus cifras por 2, para obtener $[2; \overline{4}]$; esta es la fracción continua de $\sqrt{5}$. Si la multiplicamos por 3, obtenemos $\sqrt{10} = [3; \overline{6}]$, y por 4, obtenemos $\sqrt{17} = [4; \overline{8}]$.

Y ahora sí aparece una regularidad:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, \ldots] = \sqrt{1^2 + 1} = [1; 2 \times 1, 2 \times 1, 2 \times 1, \ldots] \\
\sqrt{5} &= [2; 4, 4, 4, \ldots] = \sqrt{2^2 + 1} = [2; 2 \times 2, 2 \times 2, 2 \times 2, \ldots] \\
\sqrt{10} &= [3; 6, 6, 6, 6, \ldots] = \sqrt{3^2 + 1} = [3; 2 \times 3, 2 \times 3, 2 \times 3, \ldots] \\
\sqrt{17} &= [4; 8, 8, 8, 8, \ldots] = \sqrt{4^2 + 1} = [4; 2 \times 4, 2 \times 4, 2 \times 4, \ldots]
\end{aligned}$$

De donde conjeturamos que

$$\sqrt{a^2 + 1} = [a; 2a, 2a, \ldots] = [a; \overline{2a}].$$

Ejercicios

1. *Represente como fracción continua simple los números de cobre, de níquel, de plata y de bronce.*

2. *Si σ_p^q indica el número p, q metálico, estudie las siguientes propiedades de los números metálicos:*

   a) $(\sigma_p^q)^2 = p\sigma_p^q + q$.

   b) $\sigma_p^q - p = \dfrac{q}{\sigma_p^q}$.

   c) $(\sigma_p^q)^n = p(\sigma_p^q)^{n-1} + q(\sigma_p^q)^{n-2}$, con n cualquier número natural.

3. *Calcule la fracción continua simple para $\sqrt{a^2 + 1}$ suponiendo que*

$$\sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{x}$$

para algún número x mayor que 1, que suponemos se comporta como un número racional.

4. *Calcule la fracción continua simple para $\sqrt{a^2-1}$ suponiendo que*

$$\sqrt{a^2-1} = a - \frac{1}{x},$$

para algún número x mayor que 1, que suponemos se comporta como un número racional.

5. *Extienda el procedimiento para expresiones de la forma $\sqrt{a^2 \pm b}$.*

Las observaciones precedentes nos permiten definir *una manera exótica* de multiplicar un número natural por una fracción continua simple, definida esta como la multiplicación del número natural por los a_i, $i \geq 1$ de la fracción continua simple. Notemos esta operación con un símbolo diferente, por ejemplo $\bigstar$, así:

$$\begin{aligned} 2 \bigstar \sqrt{2} &= \sqrt{5} \\ 2 \bigstar [1;\overline{3}] &= [2;\overline{6}] \\ 2 \bigstar [1;\overline{4}] &= [2;\overline{8}], \end{aligned}$$

las dos últimas igualdades, también las podemos expresar como:

$$\begin{aligned} 2 \bigstar \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) &= \sqrt{10}-1 \\ 2 \bigstar (1+\sqrt{5}) &= \sqrt{17}-2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Ejercicios

1. *Demuestre que*

$$2 \bigstar [1;\overline{k}] = [2;\overline{2k}]$$

es lo mismo que $2 \bigstar \left(\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k+2}{2}\right) = \sqrt{k^2+1}-k+2.$

2. *Demuestre que*

$$n \star [1;\overline{k}] = [n;\overline{nk}] = \frac{\sqrt{(nk)^2+4} - nk + 2}{2} + (n-k).$$

3. *¿Cuánto vale X en la ecuación $X = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$?*

4. *Demuestre que la ecuación cuadrática $x^2 = 2x+1$ tiene como solución a la fracción continua simple $[2;\overline{2}]$; la ecuación cuadrática $x^2 = 3x+1$ tiene como solución a la fracción continua simple $[3;\overline{3}]$ y, en general, la ecuación cuadrática $x^2 = kx+1$ tiene como solución a la fracción continua simple $[k;\overline{k}]$.*

5. *Busque soluciones para ecuaciones de la forma $x^2 = x + n$, con n un número natural.*

6. *Compare los desarrollos como fracción continua simple de $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ con los de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{17}$. ¿Encuentra algo en común?*

7. *Demuestre que $\sqrt{6}$ y $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ son números irracionales.*

8.6. Extensiones cuadráticas de los números racionales

Hemos mostrado la dificultad que tiene operar con números irracionales en general; pero si consideramos números irracionales que tienen ciertas formas determinadas podemos ir un poco más allá.

Por ejemplo, sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional; como no tenemos otra expresión para él con la cual podamos operar, entonces asumamos que no necesitamos otra expresión y simplemente operamos con el símbolo $\sqrt{2}$, como se opera con los números racionales, y tenemos en cuenta que cuando aparezca la expresión $(\sqrt{2})^2$ la podemos remplazar por 2, pues esta es la definición de $\sqrt{2}$. Así, parece sensato establecer que

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\,,$$

y que

$$4\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} = 28\big(\sqrt{2}\big)^2 = 28 \times 2 = 56.$$

En general, si a y b son números racionales, entonces los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $b \neq 0$ son números irracionales, y los podemos sumar entre ellos obteniendo otro de la misma forma, así:

$$\big(a + b\sqrt{2}\big) + \big(c + d\sqrt{2}\big) = \big(a + c\big) + \big(b + d\big)\sqrt{2}\,.$$

Si admitimos el caso en que $b = 0$, los números de la forma $a + 0\sqrt{2}$ son los números racionales. En este conjunto enriquecido, la suma que hemos definido también cumple con las propiedades enunciadas para la suma de números racionales, porque, en últimas, lo que hacemos es sumar números racionales; el número $0 + 0\sqrt{2}$ es el módulo de esta suma, y la igualdad de dos de ellos, digamos $\big(a + b\sqrt{2}\big) = \big(c + d\sqrt{2}\big)$ solo se tiene cuando $a = c$ y $b = d$.

La multiplicación podemos definirla suponiendo la distributividad de ella con respecto a la suma; mejor dicho, la definimos para que resulte distributiva, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\big(a + b\sqrt{2}\big) \times \big(c + d\sqrt{2}\big) &= \big(\big(ac + bd\big(\sqrt{2}\big)^2\big) + \big(ad + bc\big)\sqrt{2} \\ &= \big(ac + 2bd\big) + \big(ad + bc\big)\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Las propiedades de esta multiplicación no son inmediatas, pero tampoco son difíciles; basta calcular. Notemos, para empezar, que el producto de dos números de la forma $a + b\sqrt{2}$ también es de la misma forma.

Para encontrar un número $x + y\sqrt{2}$ que sea elemento idéntico para la multiplicación, debemos resolver la ecuación:

$$\big(a + b\sqrt{2}\big) \times \big(x + y\sqrt{2}\big) = a + b\sqrt{2}\,,$$

o lo que es lo mismo, resolver las ecuaciones simultáneas:

$$ax + 2by = a \quad \text{y} \quad ay + bx = b,$$

cuyas soluciones son $x = 1$ y $y = 0$, es decir, que el elemento idéntico para la multiplicación es

$$1 + 0\sqrt{2}\,.$$

Como sucede en los números racionales, cada número de la forma $a + b\sqrt{2}$ diferente de $0 + 0\sqrt{2}$ tiene un inverso multiplicativo, así:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-\,b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\,.$$

Ejercicios

1. *Demuestre que la multiplicación de números de la forma $a+b\sqrt{2}$, como se definió, cumple las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva con respecto a la suma.*

2. *Demuestre que*

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\,.$$

Naturalmente, $\sqrt{2}$ nada tiene de especial con respecto a las demás raíces de números naturales que no sean cuadrados perfectos y, en consecuencia, podemos repetir la construcción utilizando cualquier otra raíz $\sqrt{p}$, de manera que p no sea un cuadrado perfecto, definiendo la suma:

$$\big(a+b\sqrt{p}\big)+\big(c+d\sqrt{p}\big) = \big(a+c\big)+\big(b+d\sqrt{p}\big),$$

y la multiplicación:

$$\begin{aligned}\big(a+b\sqrt{p}\big)\times\big(c+d\sqrt{p}\big) &= \big(\big(ac+bd\big(\sqrt{p}\big)^2\big)+\big(ad+bc\big)\sqrt{p}\\ &= \big(ac+pbd\big)+\big(ad+bc\big)\sqrt{p}\,.\end{aligned}$$

Las demostraciones de que estas operaciones cumplen las mismas propiedades que las de los números racionales, son una copia de las ya consideradas para $\sqrt{2}$.

Al conjunto de los números de la forma $a+b\sqrt{p}$, con a, b números racionales y p un número natural que no sea cuadrado perfecto, lo llamamos *una extensión cuadrática de Q con* $\sqrt{p}$, y lo notamos $\mathrm{Q}\big(\sqrt{p}\big)$.

Podemos generalizar un poco más e incluir varias raíces en un solo conjunto de números; por ejemplo, incluyamos en $\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ a $\sqrt{3}$; es decir que si llamamos $\mathrm{F}=\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)$, lo que queremos es calcular la extensión cuadrática $\mathrm{F}\big(\sqrt{3}\big)=\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big)$, la cual estaría formada por todos los números de la forma:

$$x+y\sqrt{3} \text{ con } x,y \text{ en } \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big),$$

o sea por los números de la forma

$$\big(a+b\sqrt{2}\big)+\big(c+d\sqrt{2}\big)\sqrt{3}\,,$$

con a, b, c, d números racionales.

Se dice que $\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big)$ es una C-extensión de Q de orden 2, ya que se necesitaron dos raíces cuadradas para formarlo.

De manera análoga a como se probó que las operaciones en $\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)$ tienen las mismas propiedades de Q, se demuestra que las operaciones definidas en $\mathrm{F}\big(\sqrt{3}\big)$ también las cumplen. Así, podemos construir extensiones con cualquier número de raíces.

Una observación final es que cada una de estas extensiones incluye a la anterior pero no es igual a ella, pues por lo menos $\sqrt{k}$ no está en F, y todas incluyen a los números racionales.

Hemos mostrado infinitos números irracionales cuadráticos; sin embargo, existen también infinitos irracionales que no lo son, es decir, que no son soluciones de ecuaciones de segundo grado con coeficientes naturales; por tanto, su fracción continua simple no es periódica y, en consecuencia, no sirven los métodos aquí tratados para conocerlos y manipularlos. Algunos de estos números son el tema de nuestro siguiente capítulo.

Capítulo

9

Números construibles

Los matemáticos pueden usar dibujos y razonar sobre ellos,
pero sabiendo que no están pensando en ellos,
sino en lo que ellos representan.
Platón

En el capítulo anterior descubrimos algunos números irracionales al estudiar fracciones continuas infinitas; probamos que no son racionales usando otros razonamientos, pero cuando intentamos operar con ellos nos vimos en grandes dificultades: a pesar de que encontramos soluciones en algunos casos particulares, no dimos una manera general.

Si los tratamos como expresiones n-males no periódicas, tampoco tenemos manera de operarlos salvo que operemos con aproximaciones de los números y no con ellos. Si bien es cierto que podemos mejorar las aproximaciones tanto como queramos, no estamos trabajando con números irracionales en sí y como no los conocemos de manera precisa, tampoco podemos ordenarlos. ¡Estamos en problemas!

Aún más, existen números irracionales que no son cuadráticos, es decir que no pueden representarse mediante una fracción continua simple periódica y no conocemos recursos para encontrar o manipular fracciones continuas no periódicas. Sin embargo, existen en la geometría recursos, no solo para construir, sino también para operar con los números que conocemos: naturales, racionales, irracionales cuadráticos y con estos, aparecen otros números no considerados hasta ahora, como veremos.

En la antigua Grecia, Platón consideraba que la recta y la circunferencia eran las curvas básicas y perfectas, y que ellas deberían bastar para lograr todas las otras construcciones; posiblemente esta sea una razón para considerar válidas en geometría solo las que sean trazadas con regla y compás.

Las reglas y los procedimientos para el manejo de la regla y el compás están establecidos en los *Elementos* de Euclides, que ya mencionamos en los capítulos anteriores. Los postulados:

1. Puede trazarse una recta de un punto a otro, y
2. Una recta finita (segmento) puede prolongarse continuamente en línea recta,

indican lo que se puede hacer con una regla que no tiene marca alguna, es decir que con ella no se puede medir distancias entre puntos dados. Y el postulado

3. Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y cualquier distancia (radio),

indica que es posible trazar una circunferencia con centro en un punto dado y como radio un segmento dado[1].

9.1. Números construibles

En la sección 1.3 presentamos la proposición I-2 (libro I proposición 2) (Euclid, 1956a, p. 244), que permite trasladar un segmento a cualquier punto sobre una recta cualquiera; con esta construcción, copiando un segmento a continuación de otro, obtenemos un nuevo segmento, que define *la suma* de los dos primeros.

En la sección 4.2 mostramos la proposición I-3 (Euclid, 1956a, p. 246) que describe la resta de dos segmentos desiguales dados, el menor del mayor; y es una pequeña variación de la anterior. En esta misma sección presentamos la proposición I-10 (Euclid, 1956a, p. 267) que permite dividir un segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales y, en general, en 2^n partes congruentes y la proposición

[1] En 1797, el matemático italiano Lorenzo Mascheroni, en el libro *Geometría del compás*, demostró que los problemas cuyos datos e incógnitas sean puntos pueden resolverse solamente con el compás. El alemán J. Steiner demostró que lo mismo es posible si se usa solamente la regla y se da un círculo fijo y su centro (Gutiérrez, 1992, p. 8).

VI-10 (Euclid, 1956b, p. 213) que permite dividir un segmento $\overline{AB}$ en k partes iguales.

Con lo hecho hasta aquí, podemos representar con segmentos algunos números racionales, y además sumarlos y restarlos.

La multiplicación y división de segmentos las construiremos enseguida. Los números que podamos construir con regla y compás siguiendo las reglas de la geometría euclidiana los llamaremos *números construibles*.

9.1.1. Multiplicación y división de números construibles

La proposición VI-12 (Euclid, 1956b, p. 215), el quinto postulado, y la proposición I-31 (Euclid, 1956a, p. 315) (esta última, presenta la construcción de una paralela a una recta dada en un punto dado) permiten construir la cuarta proporcional a tres segmentos dados; esto significa, que dados tres segmentos de longitudes X, Y y Z respectivamente, podemos construir un segmento cuya longitud T sea tal que:

$$\frac{X}{Y} = \frac{Z}{T}.$$

Para realizar esta construcción:

i. Dibujamos dos semirrectas distintas con un origen común en un punto que notamos 0.

ii. Con centro en 0 trazamos una circunferencia de radio arbitrario cuya longitud tomamos como unidad, por tanto, los puntos de intersección de la circunferencia con las semirrectas tienen longitud 1, y los notamos[2] con el mismo símbolo 1 en ambas semirrectas. En una de ellas, marcamos un punto X de manera que el segmento $0X$ tenga longitud X, y en la otra un punto Y, de manera que la longitud del segmento $0Y$ sea Y.

iii. Unimos los puntos 1 de la semirrecta $0X$ con el punto Y y trazamos una paralela a la recta $1Y$ por el punto X que corta a la semirrecta $0Y$ en

[2]Usaremos letras mayúsculas X, Y, etc., y números 1, 2, etc., para notar puntos extremos de segmentos que tengan el otro extremo en 0. Así mismo, la letra X representa la longitud del segmento $0X$ o sea el número X.

el punto P. Los triángulos resultantes $\triangle 01Y$ y $\triangle 0XP$ son semejantes (comparten el ángulo $X0Y$ y el ángulo $01Y$ es congruente con el ángulo $0XP$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas); por tanto, sus lados son proporcionales (figura 9.1); es decir,

$$\frac{1}{X} = \frac{Y}{P}.$$

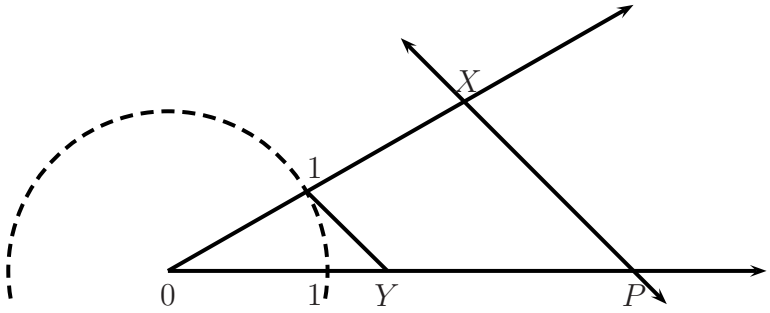


Figura 9.1

En consecuencia, el segmento $0P$ tiene longitud $X \times Y$; en otras palabras, este procedimiento permite hallar el producto de dos números[3].

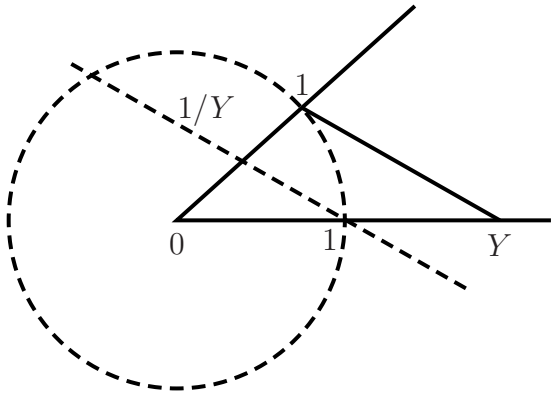


Figura 9.2

[3]Euclides al multiplicar dos segmentos obtenía un área, pero con la proposición VI-12, el quinto postulado y la proposición I-31 de la obra de Euclides es posible obtener un segmento de la multiplicación de dos segmentos; sin embargo, esta interpretación, se la debemos a Descartes (1947), en el segundo capítulo de *La géométrie*, titulado "Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas".

La figura 9.2 muestra una forma para construir $\frac{1}{Y}$, y para hallar el cociente $\frac{X}{Y}$ de dos números construibles, se multiplica $X \times \frac{1}{Y}$. Con esto hemos mostrado que *los números racionales positivos son construibles.*

Ejercicio

Teniendo en cuenta la figura 9.3 construya un argumento que muestre que ϕ es construible con regla y compás.

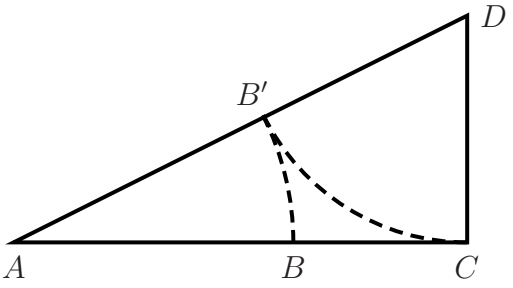


Figura 9.3

9.1.2. Raíz cuadrada de números construibles

Para mostrar que los números irracionales cuadráticos y las raíces $\sqrt[2^n]{p}$ de números construibles p son construibles, usamos lo hecho y las siguientes proposiciones:

La proposición I-11 presenta la construcción (Euclid, 1956a, p. 269) de una perpendicular a una recta dada en un punto dado y permite la construcción de un segmento cuya longitud sea la raíz cuadrada de algún número construible; por ejemplo, para encontrar el segmento que representa a $\sqrt{2}$, se traza una perpendicular a la semirrecta en el punto 1, y tomando centro en 1 con radio $\overline{01}$ marcamos el punto P sobre la perpendicular construida.

La longitud de $\overline{1P}$ es 1 y la de $\overline{0P}$ es $\sqrt{2}$ (figura 9.4). Con centro en 0 y radio $\overline{0P}$ trazamos una circunferencia que corta a nuestra semirrecta en el punto que llamaremos $\sqrt{2}$.

Trazando un segmento perpendicular de longitud 1 en el punto que representa $\sqrt{2}$ determinamos la ubicación de $\sqrt{3}$ y así sucesivamente logramos ubicar $\sqrt{p}$ para todo número natural p.

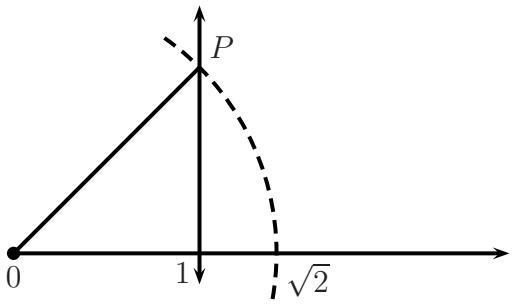


Figura 9.4

La proposición VI-13 (Euclid, 1956b, p. 216) muestra la construcción de una media proporcional entre dos segmentos dados[4]. Una modificación que usamos para construir la raíz cuadrada de la longitud de un segmento $0X$, la presentamos de la siguiente forma (figura 9.5):

i. En una semirrecta con origen 0 dibujamos el punto que representa a 1, y a partir de él dibujamos un segmento de longitud X que termina en el punto P. Luego, construimos el punto medio del segmento resultante y lo llamamos R.

ii. Con centro en R y radio $\overline{RP}$ trazamos una circunferencia. En el punto 1 levantamos una perpendicular a la semirrecta $0P$, que corta a la circunferencia en el punto M. La longitud del segmento $1M$ es la raíz cuadrada de X. Copiamos este segmento sobre la semirrecta $0X$ y obtenemos un segmento que representa $\sqrt{X}$.

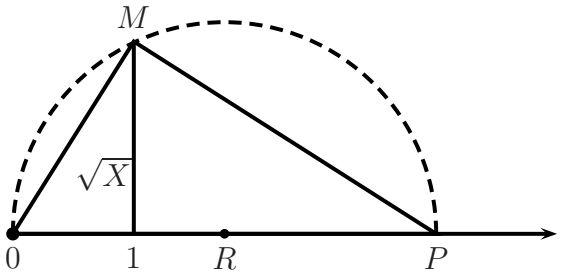


Figura 9.5

Para hacer una prueba satisfactoria debemos justificar dos afirmaciones:

[4]La proposición II-14 de los *Elementos* de Euclides expresa geométricamente que "es posible construir un cuadrado igual (en área) a un rectángulo dado".

i. Que un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

ii. Que los triángulos $01M$ y $1MP$ son semejantes.

Para probar *i.* debemos saber que un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes, pero eso es obvio porque su suma con el adyacente es igual a dos ángulos rectos en ambos casos. Entonces, en la figura 9.6 tenemos que: $b = d{+}e$ y $f = c{+}a$; luego $b{+}f = (d{+}c){+}(e{+}a)$. Pero como $a = c$ y $d = e$, por formar parte de triángulos isósceles, y $b + f$ es igual a dos ángulos rectos, concluimos que $d + c$ es igual a un ángulo recto.

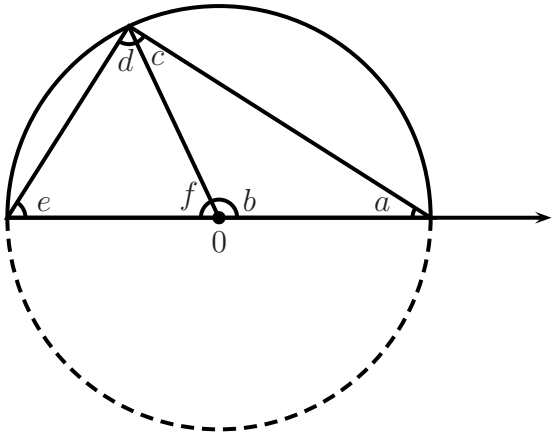


Figura 9.6

Ejercicio

Usando la figura 9.5 demuestre que los triángulos $01M$ *y* $1MP$ *son semejantes.*

Todas las construcciones que hemos realizado se pueden combinar o repetir un número finito de veces para obtener otras.

Ya mostramos que todo número racional es construible; también que la suma, resta, multiplicación, división y la raíz cuadrada de números construibles es construible.

Como consecuencia de lo hecho, podemos concluir que todo número irracional cuadrático es construible, pues si A, B, C son números construibles,

y $B^2 > 4AC$, la ecuación

$$AX^2 + BX + C = 0 \text{ con } A \neq 0,$$

que tiene como una de sus soluciones:

$$X = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A},$$

y todas las expresiones que en ella aparecen son construibles con regla y compás; por tanto, la expresión completa lo es.

Ejemplo

Algunos números irracionales cuadráticos (y por tanto, construibles) no lo parecen a primera vista; por ejemplo, los números $\operatorname{sen} 60^\circ$ y $\cos 72^\circ$ lo son; el primero de ellos obviamente lo es. Veremos en seguida por qué el segundo también.

Cada uno de los triángulos que forma la estrella pentagonal (figura 9.7) es isósceles, y sus ángulos miden 72-72-36 grados sexagesimales, respectivamente. Si el lado del pentágono en el centro se toma como unidad, cada uno de los otros dos lados miden ϕ. Si aplicamos el teorema del coseno a este triángulo obtenemos:

$$\phi^2 = \phi^2 + 1 - 2 \times 1 \times \phi \times \cos 72^\circ,$$

es decir que

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{2\phi}.$$

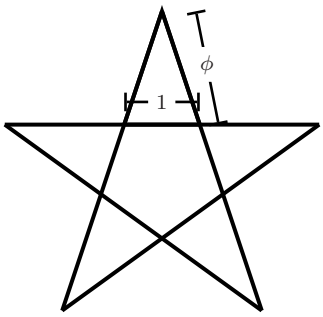


Figura 9.7

Como ϕ es irracional, cuadrático y construible, $\cos 72^\circ$ también lo es.

Para demostrar que es cuadrático, debemos encontrar una ecuación de segundo grado con coeficientes naturales cuya solución sea $\dfrac{1}{2\phi}$.

Como $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, tenemos que $\cos 72^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$; si llamamos a esto x; es decir,

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{5}},$$

tenemos que

$$\frac{1}{x} = 1 + \sqrt{5}$$

de donde, elevando al cuadrado y haciendo algunos cálculos, obtenemos la ecuación

$$4x^2 + 2x = 1$$

una de cuyas soluciones es, obviamente, $x = \cos 72^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$.

Ejercicios

1. *Demuestre que los triángulos que forma la estrella pentagonal son isósceles, y sus ángulos miden* $72 - 72 - 36$ *grados sexagesimales, respectivamente.*

2. *Demuestre que si tomamos el lado del pentágono como unidad, los otros dos lados de cada triángulo que forma la estrella miden* ϕ.

3. *Usando la estrella pentagonal, demuestre que* $\cos 108^\circ$ *es irracional.*

A partir de los postulados, nociones comunes y proposiciones del libro I, planteadas por Euclides, resuelva las siguientes cuestiones:

4. *¿Es posible construir (con regla y compás euclidianos) sobre una recta*

   a) *los números naturales? Explique y muestre cómo.*

   b) *los números racionales? Explique y muestre cómo.*

   c) *otros números? ¿Cuáles?*

5. *Sobre una recta (figura 9.8), en la cual se encuentran ubicados los números* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$*, haga las construcciones necesarias, con regla sin marcas y compás, para ubicar los números:* 0, 1, $0,\overline{3}$, $1,\overline{2}$ *y* $\sqrt{2}-1$*, a partir de los puntos dados. ¿Es posible a partir de dos puntos cualesquiera construir los números naturales, racionales? ¿Otros, cuáles? Explique.*

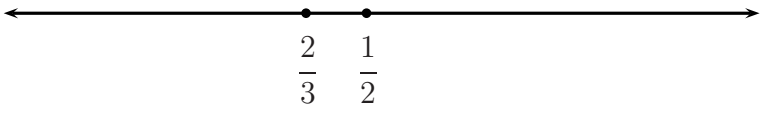


Figura 9.8

6. *Sobre la recta anterior, ¿es posible construir otros números racionales?, ¿irracionales? ¿Todos los números irracionales? Si su respuesta a alguna de estas preguntas es sí, construya ejemplos; si es no, presente contraejemplos.*

7. *Dado el segmento* $\underline{\quad 1 \quad}$*, construya los siguientes números con regla sin marcas y compás. Describa los pasos y explique:*

   a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$
   b) $\sqrt[4]{3}$
   c) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}$
   d) $\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{1+\sqrt[4]{3}}$
   e) ϕ
   f) $\sqrt[3]{2}+1$
   g) $\sqrt[6]{2}\div 3$

8. *Construya un rectángulo de longitudes una unidad y* $\sqrt{2}$ *unidades, busque cubrirlo con la menor cantidad de cuadrados posibles, similar a lo que presentamos en el capítulo 7 y halle la fracción continua relacionada. Realice las demostraciones geométricas necesarias.*

9. *Repita el ejercicio anterior para rectángulos de longitudes 1 y* $\sqrt{3}$ *y, 1 y* $\sqrt{5}$*.*

Como $\sqrt{p}$ es construible si p es construible, entonces por iteración un número finito n de veces $\sqrt[2^n]{p}$ es construible.

Observemos que estos números no son irracionales cuadráticos si $n > 1$, es decir que *existen infinitos números irracionales construibles no cuadráticos.*

9.2. Extensiones cuadráticas y números construibles

Al final del capítulo anterior estudiamos las extensiones cuadráticas de los números racionales, donde construimos conjuntos de números que incluían raíces cuadradas de números que no tenían como raíz un número natural. En ellos, definimos operaciones de adición y multiplicación que resultaron cumplir las mismas propiedades de las operaciones correspondientes de números racionales.

Mostraremos ahora que esta construcción, en todos los casos, nos da conjuntos de números construibles.

Como $\sqrt{2}$ es construible, el producto $r\sqrt{2}$ con cualquier número racional r y su suma con otro racional s, también será construible. Esto es, que el conjunto $\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)$ es un conjunto de números construibles.

Reiterando el argumento, concluimos que $\mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big)$ también es un conjunto de números construibles, pero además sabemos que:

$$\mathrm{Q} \subset \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big) \subset \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big).$$

El proceso puede continuar hasta incluir todas las raíces de los números naturales que queramos, que no sean cuadrados perfectos, y en la secuencia

$$\mathrm{Q}, \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big), \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big), \mathrm{Q}\big(\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{3}\big)\big(\sqrt{5}\big), \ldots$$

siempre obtenemos conjuntos de números construibles.

En general (Campos, Garzón, Pérez y De Villamarín, 1990, p. 223), si se tiene una cadena de C-extensiones cuadráticas de Q, es decir una secuencia

$$\mathrm{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_s$$

donde cada F_n es una extensión cuadrática de F_{n-1} (o sea que existen k_1 en F_0 con $\sqrt{k_1} \notin F_0$ y $F_1 = F_0\big(\sqrt{k_1}\big)$, k_2 en F_1 con $\sqrt{k_2} \notin F_1$ y $F_2 = F_1\big(\sqrt{k_2}\big), \ldots, k_n$ en F_{n-1} con $\sqrt{k_n} \notin F_{n-1}$ y $F_n = F_{n-1}\big(\sqrt{k_n}\big)$), entonces para

cada F_n, todos sus elementos son construibles, o sea que para todo número natural n, F_n es un conjunto de números construibles.

Recíprocamente (Albis, 1984, p. 52), si un número x es construible, debe estar en una extensión construible F_n de orden 2^n para algún número natural n, que depende del número de raíces cuadradas que es necesario extraer para obtener x.

Esto significa que existen números no construibles; en particular, *todo número irracional que sea solución de una ecuación de grado impar y no tenga raíces racionales*, no es construible. Algunos de ellos aparecieron muy temprano en el desarrollo de las matemáticas, pero se ignoraba que no eran construibles; recién en el siglo XIX, se hicieron demostraciones de no constructibilidad.

En el siguiente capítulo estudiaremos algunos de estos números, intentando mostrar las formas más comunes de razonamientos utilizados en la solución de este tipo de problemas.

Capítulo

10 Números algebraicos y trascendentes

Si alguien encuentra y nos comunica eso que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos, nuestra gratitud será enorme.
Jacob Bernoulli

En el capítulo anterior mostramos la forma de construir números con regla y compás de acuerdo con las reglas de la geometría euclidiana, y encontramos que todos los números racionales, los números irracionales cuadráticos, los números que son soluciones de ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son números construibles[1], son construibles; además, dijimos que si un número es construible, debe estar en una extensión cuadrática de orden 2^n de los números racionales para algún número natural n. Ahora estudiaremos otros números que no son construibles e iniciaremos su tratamiento desde la historia de las matemáticas.

Desde la Antigüedad se conocen cuatro problemas cuya solución es insólita: la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo cualquiera, la cuadratura del círculo y la división de la circunferencia en un número arbitrario de partes iguales, utilizando solamente regla y compás euclidianos.

Según la historia, el primero de estos problemas surgió en el año 429 a.C. cuando falleció Pericles, gobernador de Atenas, debido a una peste que atacó a la ciudad; los atenienses fueron a consultar el oráculo de Apolo en

[1]Cuando decimos números construibles, nos referimos a números construibles con regla y compás euclidianos.

Delfos, donde había un altar de forma cúbica, procurando detener la epidemia. La respuesta del oráculo fue: "la epidemia cesará el día en que ese altar sea sustituido por otro exactamente igual al doble".

Desde el punto de vista griego, el problema debía resolverse con regla y compás (naturalmente, euclidianos). Muchos matemáticos, entre los que figuraban Hipócrates, Arquitas, Eudoxo, Nicomedes, etc., dedicaron sus esfuerzos a encontrarle solución y, aunque todos los intentos fueron fallidos, de sus tentativas de solución surgieron nuevas ideas matemáticas como las secciones cónicas descubiertas por Menecmo o la concoide que construyó Nicomedes tratando de solucionar el problema Delfiano[2].

El segundo problema consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales, empleando únicamente la regla y el compás euclidianos. Hipias propuso la construcción de una curva llamada *cuadratriz* para resolver el problema; pero esta curva es la primera definida de manera cinemática, por lo que Platón no la aceptó como solución al problema. La concoide de Nicomedes, aplicada al problema de la duplicación del cubo, también puede aplicarse para la trisección del ángulo; pero, al igual que la anterior solución, esta no cumple las condiciones.

El problema de la cuadratura del círculo consiste en construir, con regla y compás euclidianos, un cuadrado de área igual a la de un círculo de área dada. Anaxágoras fue el primero en interesarse en este problema. Hipócrates descubrió las primeras cuadraturas de superficies delimitadas por curvas, estudiando la cuadratura del círculo. Dinostrato reconoció que con el auxilio de la cuadratriz de Hipias era posible resolver el problema de la cuadratura del círculo (de nuevo violando las condiciones de construcción); de ahí, el nombre de la curva.

El cuarto problema, la división de la circunferencia en n partes iguales, tuvo su inicio con el intento fallido de construir el heptágono regular con regla y compás euclidianos. La construcción más sencilla es la del hexágono regular descrita en la proposición 15 del libro IV de los *Elementos* de Euclides, a partir de la cual es posible construir el triángulo, el cuadrado, y con este último, un polígono regular de 2^n lados (donde n es un número natural) y los de 12, 24, 48, etc. Aunque las construcciones del pentágono y del decágono regular son menos evidentes, también son conocidas; la primera es atribuida

[2]Esta parte de la historia es un aliento para quienes se inician en el estudio de las matemáticas, algunas veces no encontramos soluciones a los problemas que estamos buscando resolver; no obstante, ellas -las matemáticas- son agradecidas y algún aprendizaje logramos.

a Ptolomeo; sin embargo, en 1893, Richmond elaboró otra y una para el polígono regular de diecisiete lados, aunque Gauss en 1796 ya había hecho una construcción para este. F. J. Richelot construyó el polígono regular de 257 lados, y Hermes de Lingen el de 65.537 lados, después de diez años de trabajo; pero, finalmente, Gauss fue quien demostró que un polígono regular se puede construir con regla y compás si y solamente si los factores primos del número de lados son primos de Fermat[3] diferentes (Gutiérrez, 1992, pp. 10-13).

Después de mil trescientos años, los matemáticos admitieron que, con las condiciones impuestas, estos problemas son imposibles de resolver; no por incompetencia de los que lo intentan, sino porque la solución ¡no existe![4].

Antes de abordar las pruebas de imposibilidad de las construcciones mencionadas, haremos algunas consideraciones generales con respecto a las soluciones de las ecuaciones algebraicas que tienen como coeficientes números naturales.

10.1. Números reales algebraicos

Un *número real algebraico*[5] de grado n es un número que sea solución[6] de una ecuación de la forma

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0,$$

donde los coeficientes a_i son números naturales[7], pero no lo es de una de grado menor.

Notemos que en esta definición están incluidas las ecuaciones con coeficientes racionales porque si los coeficientes son $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$, $c_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$, $c_2 = \dfrac{a_2}{b_2} \cdots$,

[3]Un número primo es de Fermat si es de la forma $2^{2^k} + 1$.

[4]En Torres, Campos y Pérez (2001) se describen algunas de las soluciones propuestas a través de la historia en el intento por resolver los tres primeros problemas.

[5]Puesto que también hay números complejos algebraicos o enteros algebraicos. El estudio de los números algebraicos se debe principalmente a Dirichlet y Dedekind.

[6]Las soluciones de una ecuación también se llaman *raíces*.

[7]En la teoría de las ecuaciones algebraicas, los coeficientes pueden incluir números negativos, pero por nuestra forma de presentación, estos números no los hemos estudiado aún. Esta dificultad se obvia si admitimos términos diferentes de 0 en el lado derecho de la ecuación; es decir, expresiones como por ejemplo: $a_n x^n = a_1 x + a_0$ con $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Ecuaciones como las consideradas se denominan *ecuaciones polinómicas*.

donde a_i, b_i son números naturales para cada $i \geq 1$ y $b_i \neq 0$, la ecuación se convierte en una ecuación con coeficientes naturales multiplicando ambos miembros de la ecuación por el producto de todos los denominadores.

Naturalmente, todo número racional $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$ es algebraico puesto que es solución de la ecuación de primer grado $qx = p$.

Puesto que cada número racional es un número real algebraico, si un número no es algebraico, entonces no puede ser racional; es decir que, si existen números no algebraicos, deben ser irracionales. Pero, ¿todo número irracional será no algebraico?

Los números irracionales cuadráticos son números reales algebraicos puesto que son soluciones de ecuaciones polinómicas de segundo grado y no lo son de una de grado menor. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número real algebraico de grado dos porque es raíz de la ecuación $x^2 = 2$, y no es raíz de una ecuación de grado 1 con coeficientes naturales (*¿por qué?*). De nuevo, es natural que, si un número no es algebraico, no puede ser irracional cuadrático.

También $\sqrt[3]{2}$ es un número algebraico de grado tres porque es raíz de $x^3 = 2$, y no es raíz de una ecuación de grado inferior (*¿por qué?*).

En suma, toda raíz de una ecuación con coeficientes naturales de grados $3, 4, 5 \ldots$ es un número algebraico, sea expresable o no mediante radicales.

Como vemos, la idea de número algebraico es una generalización de la idea de número racional, a grados mayores que 1.

Ejemplos

1. Veamos que el número $\sqrt[3]{5} - 1$ es real algebraico. Para ello, debemos encontrar una ecuación con coeficientes naturales de tal manera que una de sus soluciones sea el número dado.

   Si hacemos
   $$x = \sqrt[3]{5} - 1,$$
   podemos escribir
   $$\sqrt[3]{5} = x + 1,$$
   y elevando al cubo ambos lados de la igualdad, obtenemos
   $$5 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
   o sea que
   $$4 = x^3 + 3x^2 + 3x$$

es una ecuación con coeficientes naturales que tiene como una de sus soluciones a $\sqrt[3]{5}-1$.

2. Hay ecuaciones que no tienen coeficientes racionales, pero cuyas soluciones son soluciones de una ecuación con coeficientes naturales, y por tanto, también definen números reales algebraicos; por ejemplo, la ecuación
$$\sqrt{2}x = \sqrt{3}+1$$
tiene como solución al número
$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$
Para demostrar que este es un número algebraico, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (*¿por qué es esto lícito?*) y obtenemos
$$2x^2 = 2\sqrt{3}+4,$$
o lo que es lo mismo
$$2(x^2-2) = 2\sqrt{3}\,,$$
y elevando de nuevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos:
$$x^4+1 = 4x^2.$$
Obtenemos así una ecuación con coeficientes naturales, que tiene como una de sus soluciones a $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ y, por tanto, este es un número algebraico.

Esto muestra que dentro de los números algebraicos hay más de los que inicialmente parecen.

3. El número $x = \cos 20^\circ$ es un número algebraico, pues si remplazamos $A = 20^\circ$ en la identidad[8]
$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A,$$

[8]Si partimos de las identidades básicas: $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A\cos B + \cos A\operatorname{sen}B$ y $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$, obtenemos $\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$ y $\operatorname{sen}(2A) = 2\operatorname{sen}A\cos B$, y si usamos la identidad $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$ en $\cos(3A) = \cos 2A\cos A - \operatorname{sen}2A\operatorname{sen}A$, obtenemos: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$.

y ponemos $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x,$$

o lo que es lo mismo

$$8x^3 = 6x + 1,$$

lo que prueba que x es un número algebraico.

Ejercicios

1. *Encuentre una ecuación con coeficientes naturales, algunas de cuyas soluciones sean las mismas que las de la ecuación:*

$$x^2 + 3x = \sqrt{2}\,.$$

2. *Encuentre una ecuación con coeficientes naturales alguna de cuyas soluciones sea*

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}\,.$$

3. *Pruebe que* $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{2}$ *es algebraico.*

Si queremos estudiar el carácter general de los números algebraicos, de acuerdo con su definición, debemos estudiar las soluciones de las ecuaciones polinómicas de grado n.

Iniciamos haciendo énfasis en que gran parte del estudio de estas soluciones tiene que ver con la divisibilidad de los números naturales; en particular, con el teorema fundamental de la aritmética, que afirma que todo número natural, mayor que 1, se puede escribir de manera única (salvo el orden) como un producto de factores primos.

Un primer resultado importante establece que si n, x, y y son números naturales y n es divisor de xy, y n y x no tienen factores primos en común, entonces n es un divisor de y.

Para justificar esta afirmación, notemos que si n divide a xy, todos los factores primos de n están también en xy, y si algún primo p está en n a la

potencia α entonces está en xy, por lo menos a la misma potencia; y, como n y x no tienen factores primos en común, todos los factores primos de n deben estar, por lo menos, a la misma potencia en la factorización de y; por tanto, n es divisor de y.

De la misma manera podemos concluir que si n y x no tienen factores primos en común, entonces n y x^k no tienen factores primos en común para cualquier número natural k; o sea que si n divide a yx^k, debe dividir a y.

Con estas herramientas, consideremos alguna ecuación polinómica con coeficientes naturales

$$c_n x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \quad \text{con} \quad c_n \neq 0.$$

Si esta ecuación tiene una raíz racional[9] $\dfrac{a}{b}$, donde a y b no tienen factores en común y $b \neq 0$, entonces, al sustituir $\dfrac{a}{b}$ por x en la ecuación, obtenemos:

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n - c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0,$$

y si multiplicamos ambos miembros por b^n nos resulta:

$$c_n a^n - c_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n = 0,$$

que se puede escribir como:

$$c_n a^n = c_{n-1}a^{n-1}b - \cdots - c_1 ab^{n-1} - c_0 b^n,$$

o lo que es igual:

$$c_n a^n = b\big(c_{n-1}a^{n-1} - \cdots - c_1 ab^{n-2} - c_0 b^{n-1}\big).$$

Esto significa que b es un divisor de $c_n a^n$. Aplicamos ahora el resultado anterior con n, x y y remplazados por b, a, c_n, respectivamente, y concluimos que b es un divisor de c_n.

[9]En este capítulo solo consideramos las soluciones racionales que son cocientes de dos números naturales, por tanto el denominador no es 0.

Ejercicio

Muestre un razonamiento que justifique por qué a es un divisor de c_0.

Una consecuencia inmediata de los razonamientos anteriores es que, si una ecuación de la forma

$$x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 = 0,$$

cuyos coeficientes son naturales, tiene una raíz racional, esta es un número natural y debe ser un divisor de c_0.

Esta conclusión se sustenta en que si $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, es una raíz racional de la ecuación, b debe ser un divisor de c_n; esto es, b debe ser un divisor de 1, y el único divisor de 1 es él mismo; por tanto, b debe ser 1, y la solución de la ecuación debe ser el número natural a que, como ya sabemos, debe dividir a c_0.

Otra consecuencia importante de nuestro resultado es que un número de la forma $\sqrt[n]{a}$, donde a y n son números naturales, es o un número irracional o un número natural y, si este es el caso, entonces a es la enésima potencia de un número natural.

Naturalmente, $\sqrt[n]{a}$ es una raíz de $x^n = a$, que si tiene una raíz racional esta debe ser un número natural, y si $\sqrt[n]{a}$ es un número natural, digamos k, entonces $a = k^n$. Este resultado es una generalización del que obtuvimos en el capítulo 1 para números irracionales cuadráticos.

En particular hemos demostrado que $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}$ son números irracionales, y por tanto no son construibles, pues en el capítulo anterior vimos que un número irracional que sea solución de una ecuación algebraica de grado impar no es construible si la ecuación no tiene soluciones racionales. Entonces, como $\sqrt[3]{2}$ es solución de la ecuación

$$x^3 - 2 = 0,$$

y ella no tiene soluciones racionales, $\sqrt[3]{2}$ no es construible, pues si las tuviera deberían ser divisores de 2, pero ni 1 ni 2 son soluciones de la ecuación. Análogamente sucede para $\sqrt[5]{3}$.

10.1.1. Es imposible duplicar un cubo

Una consecuencia de que $\sqrt[3]{2}$ no sea construible es la imposibilidad de duplicar un cubo usando solamente regla y compás euclidianos[10], pues ello equivale a construir un cubo de lado $\sqrt[3]{2}$ a partir de uno de lado 1, o lo que es igual, si b es el lado del cubo duplicado y a el del original debemos tener que

$$b^3 = 2a^3; \text{ es decir, } b = \sqrt[3]{2a}\,.$$

Hipócrates de Quíos demostró que este problema es equivalente al de intercalar dos medias proporcionales[11] entre a y $2a$; es decir, construir segmentos de longitudes x y y, tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

pues la primera igualdad implica que

$$x^2 = ay,$$

y la segunda, que

$$y^2 = 2ax,$$

o sea que

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax,$$

es decir que

$$x^3 = 2a^3.$$

Por tanto, x es el lado de un cubo que tiene el doble del volumen del cubo de lado a.

Aunque los griegos no consiguieron resolver el problema, su estudio de estas medias proporcionales llevó a Menecmo al descubrimiento de la parábola y de la hipérbola, puesto que el sistema de ecuaciones

$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$

[10]Gracias a los trabajos de Evariste Galois se pudo demostrar que el problema no tenía solución. En 1837, el francés L. Wantzel demostró su imposibilidad.

[11]En el proceso de construcción de la raíz cuadrada de un número construible, mostramos cómo construir una media proporcional entre dos números.

corresponde a la intersección de dos parábolas, y el sistema

$$x^2 = ay$$
$$xy = 2a^2,$$

a la intersección de una parábola con una hipérbola.

Ejercicio

Con un procedimiento análogo a la demostración clásica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, procure demostrar que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

10.1.2. Es imposible trisecar un ángulo cualquiera con regla y compás

En el ejemplo 3 de la sección anterior mostramos que el número $x = \cos 20°$ es solución de la ecuación

$$8x^3 = 6x + 1,$$

y como ya sabemos, las únicas posibles raíces racionales[12] de esta ecuación son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$; que, al remplazar cada una de ellas en la ecuación, vemos que ninguna es solución, concluimos que como $x = \cos 20°$ es diferente de todas ellas, es irracional. Lo anterior implica que el número $\cos 20°$ no puede ser construible, pues es una solución de una ecuación de grado impar que no tiene raíces racionales. Por tanto, es imposible construir con regla y compás un ángulo de 20° y, en consecuencia, es imposible trisecar un ángulo de 60°.

Si el ángulo de 20° fuera construible, sería posible desde el punto que represente al 1, en uno de sus lados, trazar una perpendicular al otro lado, lo que determinaría $\cos 20°$, que como hemos visto es imposible.

[12] Aunque solo consideramos las raíces racionales cuyo numerador y denominador son números naturales, y este último diferente de 0, esta ecuación no tiene otra solución racional.

Ejercicios

1. *Comente la siguiente construcción y establezca una conclusión.*

   Sea CAB el ángulo dado con centro en A y radio arbitrario AE; trazar el diámetro DE (figura 10.1). Trazar la bisectriz del ángulo EAF. Pasar la distancia AG igual a DE. Trazar DG que corta la semicircunferencia en el punto I. Pasar la distancia IJ igual a FI. Trazar las rectas AI y AJ que dividen el ángulo inicial en tres ángulos iguales.

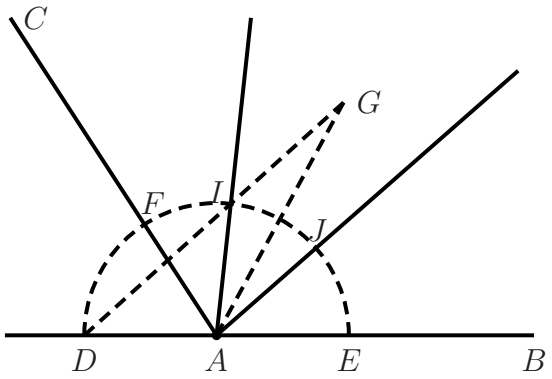


Figura 10.1

2. *Demuestre que*

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + \cos\theta$$

   y con ello pruebe que $x = \cos 12^\circ$ *es irracional. ¿Es construible?*

3. *Muestre que si* θ *es algún ángulo tal que* $\cos 2\theta$ *es irracional, entonces* $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ *y* $\tan\theta$ *también son irracionales.*

10.1.3. Es imposible construir un heptágono regular con regla y compás

Si un heptágono regular fuera construible, serían construibles $y = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ y $x = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, pero x satisface la ecuación $x^3+x^2 = 2x+1$, y esta ecuación no tiene raíces racionales.

Ejercicios

1. *Compruebe que* $2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ *satisface la ecuación* $x^3 + x^2 = 2x + 1$.
2. *¿Por qué la ecuación* $x^3 + x^2 = 2x + 1$ *no tiene raíces racionales?*
3. *Demuestre que el pentágono y el hexágono regular son construibles.*

10.2. Números trascendentes

Haciendo operaciones aritméticas con los números algebraicos podemos obtener resultados racionales, como por ejemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = 3.$$

Pero existen números que no son algebraicos. Por trascender el poder de los métodos algebraicos; Euler los llamó *números trascendentes*.

Estos números fueron descubiertos en 1851 por el matemático francés Liouville, mostrando algunos números que no eran algebraicos (Niven, 1956, p. 92); por ejemplo, demostró que el número

$$0,101001000000100\ldots10\ldots$$

donde el número de ceros entre dos unos sucesivos es 1!, 2!, ..., $n!$, ..., es trascendente.

En el siglo XIX, el matemático alemán George Cantor, demostró que existían números trascendentes, pero sin mostrar alguno de ellos. Sin embargo, de sus razonamientos se concluye que hay muchos más números trascendentes que algebraicos, pero casi todos son desconocidos.

De cierta manera es natural que haya más números trascendentes que algebraicos, pues ellos no deben cumplir alguna condición como los algebraicos; en este sentido, representan el caso más general posible, por lo menos, con las consideraciones que hasta ahora hemos hecho.

Lamentablemente, los argumentos involucrados en las demostraciones de trascendencia de un número no están al alcance de los recursos que hemos desarrollado, aunque algunos pocos casos de las demostraciones de la irracionalidad de los números trascendentes, sí. Esto no quita, por supuesto, el interés en conocer algunas de las propiedades y curiosidades de dos de sus más famosos exponentes: los números π y e.

10.2.1. El número π

Desde hace más de 4000 años se sabe que el número de veces en que el diámetro de una circunferencia está contenido en ella, que llamamos π[13], es siempre el mismo, sin importar cuál sea el tamaño de la circunferencia; lo que no se sabía era que fuera un número irracional. Por ejemplo, los babilonios sabían que:

$$\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}.$$

En el papiro Rhind se encuentra el valor

$$\pi = \frac{256}{81} \sim 3,16.$$

Arquímedes de Siracusa (Sicilia) encontró una aproximación del número π con dos decimales correctos mediante la comparación de las áreas de polígonos regulares inscritos y circunscritos a circunferencias:

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,\overline{142857},$$

también estableció que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

y una aún mejor

$$\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351},$$

con cuatro decimales correctos

$$3{,}14159 < \pi < 3,14160.$$

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa (Fibonacci) encontró que π debía caer entre los números 3,1410 y 3,1427.

Los matemáticos chinos encontraron una aproximación mejor que esta usando una fracción más sencilla:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}141592.$$

[13]El inglés William Jones propuso designar por la letra griega π la relación de la longitud de la circunferencia con su diámetro; la designación se hizo usual, desde 1737, cuando la usó Euler. Es la primera letra de la palabra *perímetro* en griego.

Hacia la mitad del siglo XVI, un ingeniero militar holandés, Adriano Metius, encontró que 355/113 da el valor de π con seis decimales correctos[14].

En el siglo XV, el matemático árabe Al-Kashi dio como valor de π el número 3,1415926538979, correcto hasta la novena cifra decimal usando un polígono regular de 2832 lados.

Más de 150 años después, en Francia, Viète encontró nueve cifras exactas de π usando un polígono de 1.722 lados y además fue el primero en encontrar una fórmula para π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

A finales del siglo XVI, en Holanda, Van Roomen consiguió el mismo resultado de Al-Kashi y el alemán Ludolph van Ceulen, utilizando un polígono de más de cuatro millones de lados logró 35 dígitos correctos. En 1699, Abraham Sharp duplicó el número de cifras obtenidas por Van Ceulen.

En 1706, John Machin, valiéndose de los desarrollos en serie de la función arco tangente, logró obtener los primeros cien decimales de π.

En el siglo XVIII, Georges Louis Leclerc encontró una forma de aproximar probabilísticamente a π: sobre una hoja de papel se dibuja un conjunto de rectas paralelas separadas entre sí a una distancia fija D, arbitraria. Luego se lanza repetidamente y al azar sobre la hoja rayada una aguja, también de longitud D, y se cuenta el total de lanzamientos N y el número C de veces que la aguja, al caer, hace contacto con alguna de las líneas dibujadas. Se demuestra que la probabilidad de que la aguja corte alguna de las líneas es igual a $\frac{2}{\pi}$.

En 1873, el inglés William Shanks calculó, durante 20 años, π con 707 decimales; pero, en 1947 se demostró que el cálculo estaba errado desde la cifra 527.

Posteriormente, en el año 1947, dos matemáticos norteamericanos: John W. Wrench, Jr. y Levi B. Smith, llegaron a los 1120 decimales de π, utilizando una calculadora preelectrónica.

[14]Esta expresión es fácil de recordar, basta colocar los tres primeros números impares repetidos consecutivamente, así: 113355, y luego formar una fracción con las dos mitades.

Los computadores lograron inicialmente 808 decimales correctos. En 1949 un computador ENIAC, programado por John Newman, halló los 2037 primeros decimales de π.

En 1967, en Francia, un computador en 28 horas y 10 minutos obtuvo 500000 decimales correctos; en 1984, en Estados Unidos, se obtuvieron 10013395 decimales exactos.

En 1986, David H. Bailey obtuvo 29360000 cifras usando un computador CRAY-2 y algoritmos desarrollados por los hermanos Jonathan y Peter Borwein, quienes, a su vez, se basaron en la teoría de las ecuaciones modulares de Ramanujan.

Dos años después, el japonés Yasumasa Kanada, usando el mismo método desarrollado por los Borwein y un computador Hitachi, llegó hasta la cifra 201326000; y al comenzar la década del noventa, el cálculo fue llevado hasta los mil millones de cifras.

En 1997, Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi, utilizando un Hitachi SR2201 con 1024 procesadores, obtuvieron 51539600000 cifras.

Como muestra, los mil primeros decimales del número π son:

3, 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953
0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737
1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901
2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960
8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951
0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035
2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532
1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

Encontrar[15] más decimales correctos de π, desde el punto de vista práctico, no tiene mucho sentido, pues con los primeros 39 decimales de π es suficiente para calcular la circunferencia del universo con una precisión del orden del radio de un átomo de hidrógeno.

Para demostrar que π es racional o irracional, bastaría encontrar alguna regularidad en su expresión decimal, o algún período, o demostrando la imposibilidad de que tal período exista. Uno de los Borwein notó que, antes de las cincuenta mil millones de cifras, la secuencia de los diez dígitos, 0123456789, aparece solo seis veces en los puestos:

17387594880	26852899245	30243957439
34549153953	41952536161	43289964000

En los primeros diez millones de dígitos el número 7 aparece 1000027 veces y el 8 aparece solo 999814 veces, ¡qué paciencia![16].

Como un ejercicio interesante podríamos tratar de encontrar alguna regularidad en la fracción continua simple de π, que obtenemos mejorando las aproximaciones decimales de π que conocemos; por ejemplo, comenzando con dos cifras decimales obtenemos:

$$\pi \approx \ 3{,}14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7}}.$$

Con cuatro cifras:

$$\pi \approx \ 3,1415 = \frac{31415}{10000} = \frac{6283}{2000} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}}}},$$

[15]Más datos sobre cálculos de π se encuentran en Borwein (1998).

[16]Si se tiene curiosidad por historias sobre π, las siguientes páginas en Internet pueden ayudar:
http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/constants.html
http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/Algorithms/splitting.html
http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html
http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html
http://www.efg2.com/lab/Mathematics/Buffon.htm
http://www.ams.org/new-in-math/cover/pi-calc.html

que escribimos de manera resumida como:

$$\pi \approx 3{,}1415 = [3; 7, 14, 1, 8, 2].$$

Con seis cifras nos da:

$$[3; 7, 15, 1, 84, 6, 2].$$

Con nueve cifras:

$$[3; 7, 15, 1, 293, 11, 1, 1, 7, 6, 1, 3, 3, 2].$$

Y los resultados pueden parecer desalentadores. Con algo de paciencia pueden calcularse los primeros 61 números, con el resultado:

$$[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4,$$
$$2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, \ldots].$$

De pronto, un avezado lector encuentra alguna regularidad.

Por fortuna, existen otra maneras de presentar[17] a π, y es a través de su relación con otros números; por ejemplo, James Gregory presentó una serie que Gotfried von Leibniz utilizó en 1674 para obtener la expresión:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Euler presentó varias series relacionadas con π; entre ellas:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$
$$\frac{\pi^4}{96} = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

[17]Los cálculos de estas expresiones requieren conocimientos que aún no hemos desarrollado, pero incluimos las informaciones para despertar la curiosidad del estudiante en estos temas.

La última, como ya lo mencionamos, aparece en el cálculo de la probabilidad de que dos números naturales escogidos al azar sean primos.

Otra forma curiosa es:

$$\frac{\pi-3}{4}=\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{4\times5\times6}+\frac{1}{6\times7\times8}-\cdots$$

John Wallis expresó:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\cdots}$$

Esta fórmula fue usada en el siglo XVII por Lord Brouncker para expresar a $\frac{\pi}{4}$ mediante una fracción continua[18], en la cual los numeradores de las fracciones parciales son los cuadrados de los números impares:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}}$$

He aquí otras dos representaciones[19] de π, como fracción continua:

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cdots}}}}} \qquad \pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cdots}}}}}$$

[18]El método de Brouncker para encontrar esta fracción continua infinita para π forma parte de una serie de métodos infinitos que se desarrollaron entre los años 1650 y 1660 (Boyer, 1986, p. 486).

[19]Tomadas de http://gaussianos.com/algunas-fracciones-continuas-interesantes/

La primera demostración de la *irracionalidad* de π fue presentada a la Academia de Ciencias de Berlín en 1761, por Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Unos años más tarde, el francés Adrien Marie Legendre propuso una mejora a la demostración anterior y, adicionalmente, probó que el cuadrado de π también es irracional. Una prueba más sencilla, *pero no tanto*, se debe a Ivan Niven (1947).

La demostración de la *trascendencia* de π fue presentada en 1882 por Lindemann pero, como ya dijimos, supera los límites de nuestra discusión[20].

10.2.1.1. La cuadratura del círculo es imposible

Una consecuencia de la trascendencia de π es que la cuadratura del círculo es imposible. Veamos por qué: dado un círculo de radio r debemos hallar, utilizando solamente regla y compás euclidianos, un cuadrado de lado a cuya área sea igual a la del círculo dado; o sea, tal que

$$\pi r^2 = a^2.$$

Esto equivale a construir un número a tal que

$$\sqrt{\pi} r = a.$$

Si π fuese construible, también lo sería su raíz cuadrada, y por consiguiente $\sqrt{\pi} r$; o sea que el lado a del cuadrado podría hallarse con regla y compás. Como el número π es trascendente, no es algebraico y, por tanto, no es construible, lo que demuestra la imposibilidad de cuadrar el círculo con regla y compás.

10.2.2. El número e

Otro engendro matemático famoso es el número e, es uno de los más importantes de las matemáticas; es la base de los logaritmos de Neper; aparece en problemas relacionados con los procesos de desintegración nuclear, el interés compuesto continuo, en ecuaciones que describen crecimiento, etc.

Consideremos por ejemplo el caso del interés compuesto (A), para lo cual haremos uso de su fórmula:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

[20] Véase por ejemplo, Siegel (1949).

donde P es el capital o monto inicial que se ha invertido por t años, r es la tasa de interés (expresada, generalmente, en forma decimal) y n es el número de veces que el interés se capitaliza al año.

Si prestamos un dinero al 100 % anual, durante un año *–tal vez alguien muy necesitado acepte esta tasa de interés–*, de tal forma que el interés se capitaliza semestralmente; al finalizar el primer año, cada peso ha crecido en

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,$$

o sea que por cada peso prestado recibiría $2,25.

Si el interés se capitalizara trimestralmente, ¿recibiría más dinero en el año? Claro, al finalizar el año, por cada peso recibiría

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4.$$

Esto significa que cada peso crece en $2,44. ¿El valor por peso aumenta indefinidamente de acuerdo con el número de veces que se capitalice el interés al año? ¿Si prestamos el dinero de tal manera que el interés se capitalice cada segundo, obtenemos una gran cantidad de dinero por peso o es aproximadamente igual al que obtendríamos si se capitalizara cada día?

Si el intéres se capitaliza...	**Cada peso crece en...**
bimestralmente	$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = 2,521626372$
mensualmente	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2,61303529$
semanalmente	$\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} = 2,692596954$
diariamente	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714567482$
por hora	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2,718126692$
por minuto	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600} = 2,718279243$

Tabla 10.1

Al observar la tabla 10.1 vemos que a medida que n aumenta, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende a estabilizarse; en otras palabras, podríamos decir que para un n suficientemente grande, tenemos que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182.$$

Esta es una aproximación del número irracional e, como lo veremos en las páginas siguientes.

Usemos ahora el teorema del binomio de Newton para aproximar:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\times\frac{1}{n^3}+\cdots$$

o lo que es lo mismo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2}\times\frac{1}{1\times 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\times\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots$$

Aunque la expresión pueda intimidarnos, se estudia mejor si la tomamos por partes; por ejemplo, en el tercer término aparece

$$\frac{n(n-1)}{n^2},$$

que podemos expresarlo de la forma:

$$\frac{n(n-1)}{n^2}=\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}=1-\frac{1}{n}.$$

En el cuarto término aparece:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3},$$

que podemos expresarlo como:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=\frac{n^3-3n^2+2n}{n^3}=\frac{n^3}{n^3}-\frac{3n^2}{n^3}+\frac{2n}{n^3}=1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Y en los demás términos aparecen expresiones similares que pueden escribirse como un 1 menos otros términos donde n está en el denominador

elevada a potencias cada vez mayores. En todos los casos, si consideramos valores de n cada vez más grandes, el valor de cada una de las expresiones consideradas se aproxima más a 1. En resumen, nos queda:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\cdots$$

Notemos que el tercer término es el segundo dividido por 2, el cuarto es el tercero dividido por 3, el quinto es el cuarto dividido por 4, y así sucesivamente.

Si partimos del primer término igual a 1, y hacemos divisiones sucesivas por 2, 3, 4,... etc., obtenemos:

$$\begin{aligned}
&1\\
&\frac{1}{1} = 1\\
&\frac{1}{2} = 0,5\\
&\frac{0,5}{3} = 0,166667\\
&\frac{0,166667}{4} = 0,041667\\
&\frac{0,041667}{5} = 0,008333\\
&\frac{0,008333}{6} = 0,001389,
\end{aligned}$$

y sumamos los resultados, obtenemos una aproximación de e que es mejor en cuanto más términos tomemos. O sea,

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\cdots$$

si tomamos infinitos términos.

A pesar de que es imposible sumar infinitos términos, podemos aproximarnos tanto como queramos al valor de e; por ejemplo, Euler lo calculó con 23 cifras decimales exactas:

$$e = 2{,}71828182845904523536028,$$

y las primeras 500 cifras decimales de e calculadas con un computador son:

$$
\begin{array}{lllllll}
e = & 2,7182818284 & 5904523536 & 0287471352 & 6624977572 & 4709369995 \\
& 9574966967 & 6277240766 & 3035535547 & 5945713821 & 7852516642 \\
& 7427466391 & 9320030599 & 2181741359 & 6629043572 & 9003342952 \\
& 6059563073 & 8132328627 & 9434907632 & 3382988075 & 3195251019 \\
& 0115738341 & 8793070215 & 4089149934 & 8841675092 & 4476146066 \\
& 8082264800 & 1684774118 & 5374424554 & 4243710753 & 9077744992 \\
& 0695517027 & 6183860626 & 1331374573 & 0007520449 & 3372656029 \\
& 7606737113 & 2007093287 & 0912744374 & 7047230696 & 9677209310 \\
& 1416928368 & 1902551510 & 8657463772 & 1112523897 & 8442506953 \\
& 6967707854 & 4996996794 & 6864454905 & 9879316368 & 8923009879
\end{array}
$$

De manera análoga a la usada para π, podemos encontrar aproximaciones cada vez mejores para una fracción continua simple que represente a e. Si comenzamos con una aproximación decimal de dos cifras, obtenemos:

$$[2; 1, 2, 2, 4, 3].$$

Con cuatro cifras obtenemos:

$$[2; 1, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 1, 9],$$

o con seis cifras:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 8, 1, \ldots].$$

Ejercicio

Calcule una fracción continua correspondiente a la aproximación 2,71828182. ¿Observa alguna regularidad?

Euler, en 1737, obtuvo (Castro, 1996, p. 15), las fracciones continuas:

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cdots}}}}}}}}}$$

y

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}},$$

demostrando que e y $\sqrt{e}$ son irracionales. En 1739 demostró que e^2 también es irracional.

El matemático colombiano Víctor Caro (1936, p. 155) encontró la fracción continua:

$$e = 2 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cfrac{4}{6 - \cdots}}}}$$

En seguida presentamos una demostración relativamente elemental de que el número e es irracional.

Sabemos que e se puede expresar como la serie infinita:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times n} + \cdots$$

Supongamos que e es racional, es decir que existen números naturales m y $n \neq 0$ tales que:

$$e = \frac{m}{n}.$$

Llamemos S_n a la suma finita

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}.$$

Ahora restemos esta suma de la serie para e y multipliquemos por $n!$:

$$n!(e - S_n) = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)} + \cdots$$

Si cambiamos en cada denominador las expresiones $(n + r)$ por otras menores $(n + 1)$ cada fracción es mayor, o sea que:

$$\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)} + \cdots < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^r} + \cdots$$

Esta última es una progresión geométrica con primer término $\dfrac{1}{n+1}$ y razón $\dfrac{1}{n+1}$, cuya suma ya conocemos, es $\dfrac{1}{n}$. En resumen, tenemos que:

$$0 < n!\left(\frac{m}{n} - S_n\right) < \frac{1}{n}$$

Pero,

$$\begin{aligned} n!S_n &= n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= n! + n! + n(n-1)(n-2)\cdots 3 + n(n-1)(n-2)\cdots 4 + \cdots \\ &\qquad + n(n-1)(n-2) + n(n-1) + (n+1) \end{aligned}$$

es un número natural y

$$n!\frac{m}{n} = (n-1)!m$$

también es un número natural; es decir que encontramos un número natural entre 0 y $\frac{1}{n}$ para cada número natural n. Pero esto es imposible porque entre 0 y 1 no hay números naturales, lo que demuestra que e es irracional.

La trascendencia de e fue demostrada por Charles Hermite en 1873. Su demostración fue simplificada por David Hilbert y mejorada por Hurwitz (Herstein, 1970, p. 208-210).

Ferdinand Lindemann, en 1882 presentó un teorema[21] que demuestra la trascendencia de e, de π, de e^{α}, $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\operatorname{senh}\alpha$, $\tanh\alpha$, para cualquier número algebraico α diferente de 0; $\log\alpha$, $\operatorname{arc\,sen}\alpha$, y las inversas de cada una de las funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas de cualquier número algebraico diferente de 0 y de 1.

En 1929, Gelfond y Schneider demostraron que si a y b son números algebraicos y b es irracional, entonces a^b es trascendente (Pollard y Diamond, 1998, p. 55). De este resultado se desprende que $2^{\sqrt{2}}$ y e^{π} son números trascendentes.

Las pruebas de trascendencia de los números trascendentes en general son difíciles, pero algunas pruebas de su irracionalidad, no tanto. Por ejemplo, ya mostramos que e es irracional; podemos probar que, análogamente a lo sucedido para las raíces cuadradas, todo logaritmo, cuya base sea un número natural, que no sea un número natural[22] es irracional; aún más, casi todos son trascendentes[23], pero esto no lo probaremos.

10.2.3. Logaritmos irracionales

Para ejemplificar los razonamientos usaremos la base 2. Supongamos que $\log_2 b$ para b, un número natural mayor o igual que 1 es un número racional, es decir que existen números naturales p y q sin factores comunes, con $q \neq 0$, tales que:

$$\log_2 b = \frac{p}{q},$$

esto significa que

$$2^{p/q} = b,$$

[21] Una prueba del teorema de Lindemann y del teorema Gelfond y Schneider se encuentra en (Niven, 1967, pp. 124-131 y 142-149).

[22] Solamente estamos considerando números positivos.

[23] Este es un caso particular del teorema de Lindemann, que mencionamos anteriormente.

si elevamos ambos miembros de la igualdad al exponente q obtenemos:

$$2^p = b^q.$$

El número b no puede ser impar, porque toda potencia de un impar es impar, y por tanto b^q no puede ser una potencia de 2.

Si b es par, debe ser de la forma $2k$, donde k es un número natural, para lo cual k puede ser par o impar. Si k es impar, es de la forma $2m + 1$, así:

$$2^p = b^q = 2k = 2(2m + 1)$$

de donde

$$2^{p-1} = 2m + 1$$

lo cual es imposible, pues ninguna potencia de 2 es un número impar.

Si k es par, tiene dos opciones: ser potencia de 2 o ser igual al producto de un número impar por una potencia de dos. Para el primer caso, supongamos que $k = 2^x$, con $x \in N$, de donde $b = 2 \cdot 2^x$; esto es, $b = 2^{x+1}$. Es decir que

$$\log_2 b = \log_2 2^{x+1} = x + 1,$$

lo que significa que el logaritmo es un número natural.

Ahora, veamos el otro caso: k igual al producto de una potencia de 2 por un número impar; simbólicamente:

$$k = 2^r(2m + 1), \text{ donde } r \text{ es un número natural.}$$

Lo que implica que

$$b = 2 \cdot 2^r(2m + 1),$$

es decir que

$$2^p = b^q = [2^{r+1}(2m + 1)]^q,$$

que es equivalente a

$$2^{p-q(r+1)} = (2m + 1)^q,$$

lo cual también es imposible porque ninguna potencia de un número impar es una potencia de 2.

Con esto demostramos que todo logaritmo en base 2, que no sea un número natural[24], es irracional.

[24]Insistimos en que solamente estamos considerando números positivos.

Ejercicios

1. *Adecue el razonamiento anterior para demostrar que todo logaritmo en base* 3 *que no sea natural es irracional.*

2. *Formule una conjetura para otras bases y procure una demostración.*

Capítulo

11 Una construcción de los números reales

Dios creó los números naturales, lo demás es obra del hombre.
Leopoldo Kroenecker
Los números son la libre creación de la mente humana.
Richard Dedekind
Lo que es demostrable no debería ser aceptado en la ciencia sin demostración.
Richard Dedekind

En el capítulo 8 construimos números irracionales a partir de algunos cocientes de números racionales que llamamos fracciones continuas, en un proceso que a pesar de no ser finito, permite lograr algunas caracterizaciones de ellos, pero no logramos procesos generales para operar con estas fracciones.

Utilizando las reductas de las fracciones continuas infinitas logramos aproximaciones de números irracionales como expresiones n-males no periódicas, que de igual manera no se dejaban operar, salvo con aproximaciones.

En el capítulo 9 llegamos un poco más lejos, y construimos números con regla y compás euclidianos, y abarcamos a los números racionales, a todos los irracionales cuadráticos y otros irracionales construibles, con la enorme ventaja de que tenemos una manera de operarlos, y como ganancia obtuvimos que, en este conjunto de números, las operaciones tienen las mismas propiedades que las operaciones entre números racionales.

No obstante, debemos aceptar que nos faltaron muchos: infinitos números algebraicos y todos los trascendentes, que también son infinitos. Surge la pregunta: ¿existe algún procedimiento para construir un conjunto de números

que incluya a todos los números que conocemos: algebraicos y trascendentes, donde podamos definir las operaciones entre ellos y demostrar sus propiedades? Y para pedir un poco más, ¿será posible que dicha construcción tome como punto de partida a los números racionales?

La respuesta es afirmativa, y no solo una; por lo menos las tres más célebres surgieron casi en forma simultánea; después de casi 2400 años del descubrimiento del primer número irracional, su presentación es distinta, pero conducen a los mismos números. Estos se conocen como los *números reales*[1].

11.1. El problema

Desde la antigua Grecia se tenía conciencia de los problemas que se daban con la aparición de las magnitudes inconmensurables, si la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado no corresponde a una magnitud conmensurable ¿cómo comparar entonces razones como estas?

11.1.1. Una respuesta que no es solución

Una respuesta propuesta por Eudoxo, aplicable a ambas magnitudes, permite establecer un criterio para la igualdad de dos razones cualesquiera, como lo observamos en el capítulo 1:

> Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta. (Euclides, citado por Vera, 1970, p. 787).

Lo cual, en símbolos es:

$$\frac{x}{z} = \frac{m}{n},$$

si, dados a y b números naturales, siempre que

$$ax < bz, \text{ entonces } am < bn,$$

[1]En este libro, de acuerdo a la construcción que venimos haciendo, presentaremos en esta sección una construcción de los números reales, pero solo de los no negativos.

o si

$$ax = bz, \text{ entonces } am = bn,$$

o si

$$ax > bz, \text{ entonces } am > bn.$$

Esta definición tiene la ventaja de ser aplicable no solo a magnitudes geométricas, sino también a números. Claro, en la visión moderna.

La teoría desarrollada por Eudoxo y tratada en el libro V de *Elementos* de Euclides, pudo usarse para definir los números irracionales; sin embargo, su utilización tardó mucho tiempo, Dedekind fue quien "... hizo uso del trabajo de Euclides y reconoció su deuda hacia este..."(Kline, 1994, p. 1297) para construir su teoría de los números reales.

A finales del siglo XIX se hizo imperioso fundamentar el análisis, y con ello aparece la necesidad de definir *número real*; cuestiones como el estudio de los límites, la continuidad de funciones y las aproximaciones por series de Fourier requerían una comprensión de los números reales y sus propiedades, para justificar teoremas y demostraciones. Una primera idea acerca del número real fue publicada por Agustín-Louis Cauchy en 1821 en el *Cours*, donde afirmaba que "... un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él"(Kline, 1994, p. 1255), lo cual fue interpretado como una definición de los números irracionales a partir de la noción de límite, y utilizada por varios matemáticos de la época para relacionar límite con número irracional; lo cual, después de 48 años, fue señalado por Charles Méray como un grave *lapsus* de razonamiento (Boyer, 1986, p. 693), porque al hablar de límite se requiere tener definido el conjunto de los números reales.

Alrededor de 1830, Bernhard Bolzano, a partir del límite de sucesiones de números racionales, hizo un intento para axiomatizar los números reales y logró establecer la existencia de una cota superior mínima para un conjunto acotado de números reales[2]; su trabajo no fue reconocido, quizá porque, "si el límite es irracional no tiene existencia lógica hasta que se hayan definido los números irracionales"(Kline, 1994, p. 1297).

Sin embargo, el primer matemático en divulgar una construcción para los números irracionales fue *sir* William Hamilton, quien leyó dos artículos, uno en 1833 y otro en 1835, ante la Royal Irish Academy. En ellos, definió los

[2]Teorema base del que hoy se conoce como el teorema Bolzano-Weierstrass: "todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite"(Boyer, 1986, p. 692).

números irracionales como una partición de números racionales (como los explicó Dedekind posteriormente), pero no culminó su trabajo.

En 1869, Méray publicó un artículo en el cual definió los números reales basado en los números racionales, constituyéndose esta en la primera teoría sobre los números reales, precisada en 1872 en su obra *Nouveau précis d'analyse infinitésimale.*

En el mismo año (1872), aparece una obra de H. Kossak, quien trató de presentar la teoría de Karl Weierstrass sobre los números reales, pero él la desaprobó; fueron Ferdinand Lindenmann y Eduard Heine, quienes dieron a conocer las ideas de Weierstrass, ya que habían sido sus alumnos en Berlín, lugar donde este famoso matemático había dado, en sus clases, una teoría de los números irracionales desde 1859. Weierstrass, al igual que Méray, se dio cuenta de que para fundamentar el análisis únicamente en el concepto de número, necesitaba definir los números irracionales independientemente del concepto de límite; así, los definió, de una manera general, como *conjuntos de racionales más que como meras sucesiones ordenadas* (Boyer, 1986, p. 694).

George Cantor había iniciado en 1871 un trabajo sobre la aritmetización, similar a los de Weierstrass y Méray, al cual Heinrich Heine aportó algunas ideas que conllevaron a la presentación de un artículo publicado por Heine en el *Journal für Mathematik* en 1872, en el que se expone el trabajo desarrollado por Cantor y Heine. La teoría es similar a la de Méray, soportada en el conjunto de los números racionales, desde el cual forma *sucesiones fundamentales* y una relación de equivalencia entre ellas, lo que le permite definir los números irracionales y, en términos generales, los números reales[3].

Una teoría de los números reales, esencialmente distinta a las hasta ahora enunciadas, salvo la iniciada por Hamilton, fue presentada en el mismo año (1872) por Richard Dedekind, quien la publica en su libro *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuidad y números irracionales*). La teoría de Dedekind es la más sistemática, la más abstracta y a su vez, la más simple de las presentadas; ella demuestra que todo teorema del álgebra puede expresarse como un teorema sobre números racionales.

Estas construcciones de los números reales de finales del siglo XIX coinciden en partir de la comprensión del significado y operaciones de los números racionales, a partir de los cuales se definen los números irracionales que son los que finalmente presentan la principal dificultad para definir los números

[3]Para una explicación un poco más amplia sobre estas teorías, la de Weierstrass y Cantor, véase Sánchez (1997).

reales. Las teorías de Cantor y Dedekind están basadas en las operaciones de los números racionales; ambas construyen los números reales con entes compuestos de infinitos elementos; ambas comparan la geometría con la aritmética; ambas comparten la idea de que la continuidad del espacio no se puede demostrar y, por tanto, debe tomarse como axioma.

Las construcciones de Weierstrass, Cantor-Heine y Méray comparten el uso de las series o las sucesiones para la construcción de los números irracionales, mientras que Dedekind usa conjuntos y orden. Las sucesiones son objetos con una estructura más compleja que las cortaduras, y en el caso de las *sucesiones fundamentales*, se presuponen también ciertas propiedades topológicas.

Aunque todas las construcciones de los números reales son equivalentes, si las construcciones de Cantor, Weierstrass y Dedekind se hacen usando un conjunto distinto al de los números racionales, los resultados ya no coinciden.

11.2. Los números reales: cortaduras de Dedekind

La propuesta de construcción de los números reales de Richard Dedekind (1997) inicia con una comparación entre los números racionales[4] y la recta geométrica, para lo cual hace una breve presentación de los números racionales:

1. Las cuatro operaciones fundamentales están definidas para todo par de números racionales, con excepción de la división por cero.

2. Dados dos números racionales cualesquiera, está definido un orden entre ellos.

3. Dado cualquier número racional, existen infinitos números racionales mayores que él, e infinitos números racionales menores que él.

4. Cada punto P de una línea recta produce una separación de la misma en dos porciones, de manera que cada punto de una parte se encuentra a la izquierda de cada punto de la otra parte.

[4]Como se ha manifestado, en este libro hacemos una leve modificación de la teoría de Dedekind para los números reales por cuanto aquí solo consideramos los números reales no negativos.

La recíproca de la última afirmación permitió a Dedekind cuestionarse sobre la diferencia entre los números racionales y las magnitudes geométricas continuas; en esencia, sobre el significado de la continuidad geométrica, y se dio cuenta de que la idea que tenían matemáticos contemporáneos y anteriores como Galileo, Leibniz y Bolzano sobre continuidad estaba errada, ya que ellos llamaban *continuidad* a lo que hoy conocemos como *densidad*; esto es, que entre dos puntos cualesquiera siempre hay otro entre ellos. Actualmente nos referimos a la propiedad análoga a la continuidad geométrica en los números reales como *completitud*.

A raíz de esta distinción, Dedekind encuentra que el secreto de la continuidad (completitud) está en que si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases, tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces *existe un único punto* que produce esta separación de la línea recta en dos conjuntos; reconoce además, que esta afirmación es indemostrable, y la toma como axioma.

Seguidamente, copia esta noción de continuidad al conjunto discontinuo de los números racionales (Dedekind, 1997, pp. 119-128) para *llenarlo* hasta formar un conjunto *completo* como la recta; es decir que los números racionales se pueden extender para construir el conjunto completo de los números reales, suponiendo lo que ahora se conoce como axioma de Cantor-Dedekind[5].

Luego establece que el conjunto de los números racionales también se puede dividir en dos clases disjuntas, tales que todo número racional de la primera clase es menor que todo número racional de la segunda y que tal partición la establece uno y solo un número real. A esta separación o corte de los números racionales lo llama una *cortadura*.

Si en la primera clase hay un número máximo, o en la segunda, un número mínimo, la cortadura está dada por un número racional, y viceversa; sin embargo, existen cortaduras en las cuales la primera clase, llamémosla A, no tiene máximo, y la segunda, sea esta B, no tiene mínimo. Dedekind da como ejemplo la cortadura definida, en la primera clase, por los números racionales cuyos cuadrados son menores que 2, y en la segunda, por todos los números racionales cuyos cuadrados son mayores que 2; es decir, la cortadura determinada por el número irracional que denotamos $\sqrt{2}$; como A y B no tienen

[5]El axioma de Cantor-Dedekind dice: "los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales"(Boyer, 1986, p. 695).

elemento máximo ni elemento mínimo, respectivamente, esta cortadura no pudo ser generada por un número racional; entonces crea un nuevo número al que denomina número irracional y lo nota como (A, B). A partir de esto, establece que:

- Si p es un número racional, este se representa como (A, B) de tal manera que:

$$A = \{r \in Q \text{ tales que } r < p\}$$
$$B = \{r \in Q \text{ tales que } r \geq p\}.$$

  O bien,

$$A = \{r \in Q \text{ tales que } r \leq p\}$$
$$B = \{r \in Q \text{ tales que } r > p\}.$$

- Si p es un número irracional, este se representa como (A, B) de tal manera que:

$$A = \{r \in Q \text{ tales que } r < p\}$$
$$B = \{r \in Q \text{ tales que } r > p\}.$$

Dedekind hace énfasis en que "el número irracional no es la cortadura misma, sino algo distinto, que corresponde a la cortadura y que la produce. De modo parecido, aunque los números racionales generan cortaduras, no son lo mismo que ellas"(Kline, 1994, p. 1301).

Finalmente, define un número real como una cortadura; esto es, si x es un número real, entonces los números racionales pueden separarse en dos clases, cada una de la cuales posee infinitos elementos, donde cada elemento de la primera clase es menor que x y cada elemento de la segunda es mayor que x; x puede estar en la primera clase o en la segunda, pero no en ambas. Con ello, le da interpretación geométrica al conjunto de los números reales, en forma de línea recta.

La versión que presentaremos aquí es una ligera variación de la propuesta por Dedekind porque no consideramos la recta completa sino la semirrecta que construimos en la sección correspondiente a los números construibles y solo consideramos números racionales definidos como clases de equivalencia de parejas de números en $N \times (N - \{0\})$. Esto obliga a unas pequeñas modificaciones, de forma, mas no de fondo.

Escogimos esta versión por ser, en nuestra opinión, la que menos conocimientos previos requiere, adicionales a los que hemos desarrollado: algo de lenguaje de la teoría de conjuntos, los números racionales con su estructura algebraica y su estructura de orden. Una versión similar a esta, aparece en (Landau, 1966, pp. 43-67).

Iniciamos comparando los números racionales[6] y la semirrecta definida en los números construibles.

1. Para todo par de números racionales están definidas operaciones de adición, multiplicación y división, con excepción de la división entre cero. La sustracción está definida si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

2. Dados dos números racionales cualesquiera, está definido un orden entre ellos.

3. Dado cualquier número racional, diferente de cero, existen infinitos números racionales mayores que él, e infinitos racionales menores que él.

4. Si todos los puntos de una semirrecta, con origen en 0, se sitúan en dos clases, tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases.

5. Cada número racional a produce una división del conjunto de los números racionales en dos clases A y B, tales que todo número de A es menor que todo número de B. El número a es el mayor número de la clase A o el menor de la clase B.

Así, cada número racional a produce una *cortadura* que posee la propiedad de que los números en la primera clase tienen elemento máximo, o los de la segunda clase tienen elemento mínimo. Inversamente, toda cortadura para la cual exista un número mayor a todos los números en la primera clase o uno menor en la segunda está determinada por un número racional.

[6] Recordemos que llamamos racionales a los números racionales no negativos.

11.2.1. Definición de cortadura

Una *cortadura* β de los números racionales es una pareja de conjuntos, así:

$$\beta = (\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

tal que corta a todos los números racionales en dos partes, con las siguientes condiciones:

i. A y B son conjuntos no vacíos de números racionales ($\mathbb{Q}^*$).

ii. Todo número racional pertenece a alguno de los dos conjuntos, A o B, pero no a ambos.

iii. Todo número racional que pertenezca a B es mayor que todo número racional que pertenezca a A[7].

La condición *i.* establece que cualquier número racional debe estar en alguno de los dos conjuntos, pero también todo número racional determina una cortadura, y de hecho, podemos incluirlo en A o en B; por conveniencia, lo incluiremos en A, esto significa que B no tiene elemento mínimo.

Cuando A tenga elemento máximo a la cortadura (A, B) la llamamos *racional*, esto significa que existe un número racional r tal que $a \leq r < b$ para todo $a \in \mathrm{A}$ y todo $b \in \mathrm{B}$; este r es único, pues si existiera otro número racional r' que cumpla la misma condición y fuera $r < r'$, entonces por la densidad de los números racionales, existe un número racional t tal que $r < t < r'$. Como $a \leq r$ para todo $a \in \mathrm{A}$, entonces $t \notin \mathrm{A}$, y por la condición *ii.*, $t \in \mathrm{B}$. Pero por la condición *iii.*, $t > r'$ y esto contradice la hipótesis. De manera análoga se prueba que es imposible que $r' < r$, por tanto $r = r'$.

Cuando A no tenga elemento máximo a la cortadura (A, B) la llamamos *irracional*.

Ejemplos

1. El número 2 determina la cortadura α, tal que $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, donde

$$\mathrm{A} = \{a \in \mathbb{Q}^*, \text{ tales que } 0 \leq a \leq 2\} \text{ y}$$
$$\mathrm{B} = \{b \in \mathbb{Q}^*, \text{ tales que } b > 2\}.$$

[7] Nótese que al decir "todo número racional que pertenezca a B (o a A)", se está haciendo referencia a "todos los infinitos", números de B (o de A).

2. El número cero determina la cortadura

$$\delta = (\{0\}, \mathbb{Q}^+)$$

De ahora en adelante usaremos como nombre para la cortadura el nombre del número que la define y su mismo símbolo; es decir, para los ejemplos anteriores:

$$2 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

donde A representa el conjunto de todos los números racionales entre 0 y 2, incluso el 0 y el 2 (este 2 no es el mismo que estamos definiendo; el 2 que estamos definiendo es el 2 real; el que estamos incluyendo en A es el 2 racional), y en B están todos los números racionales estrictamente mayores que 2. Para simplificar la escritura, notaremos el 2 racional como 2', y el 1 racional como 1'; en general, si n es un número racional, lo simbolizaremos por n'. En conclusión, escribiremos, por ejemplo:

$$2 = ([0', 2'],\ (2', \infty))$$
$$0 = (\{0'\}, \mathrm{Q}^+) = (\{0'\},\ (0', \infty))$$

teniendo en cuenta que:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{Q}^* : a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{Q}^* : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{Q}^* : a < x \leq b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q}^* : a \leq x \leq b\}.$$

Para el caso de números irracionales conocidos, escribiremos, por ejemplo:

$$\sqrt{2} = (\mathrm{C}, \mathrm{D}),$$

donde

$$\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{Q}^* : x^2 \geq 0' \,\mathrm{y}\, x^2 < 2'\},$$

y

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Q}^* : x^2 > 2'\}.$$

Usaremos la notación $\sqrt{2}$ para este número, del cual ya demostramos, es un número irracional, y por tanto, no existe un número racional que sea el elemento máximo de $[0', \sqrt{2})$.

En cualquier otro caso, usaremos letras griegas para indicar una cortadura, así:

$$\delta = (\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

En consecuencia, definimos un *número real*[8] como una cortadura en el conjunto de los números racionales. De igual forma, toda cortadura en el conjunto de los números racionales admite un elemento de separación que es un número real (teorema de Dedekind) (Sagastume y Fernández, 1960). De esa manera, el conjunto de todas las cortaduras es continuo e isomorfo al de los números reales.

Todo número racional del conjunto A en la cortadura que define el número real x puede considerarse como una aproximación por defecto de tal número real, y todo número racional del conjunto B, como una aproximación por exceso.

Si representamos gráficamente a los números reales en una semirrecta, un número real es una marca en la semirrecta que divide a los números racionales en dos conjuntos: el de los menores que x y el de los mayores que x (figura 11.1). Vale la pena aclarar que esta idea no forma parte de la teoría, es solo un recurso pedagógico visual de los elementos planteados.

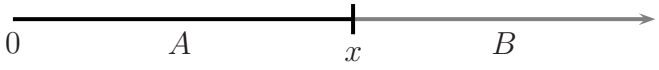


Figura 11.1

11.2.2. Igualdad entre cortaduras

Al igual que en la construcción de los números racionales, debemos definir cuándo dos números reales son iguales. Como cada cortadura es una pareja de conjuntos, resulta natural que la igualdad de cortaduras sea:

$$\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \text{ y } \beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \text{ si y solo si } \mathrm{A} = \mathrm{C} \text{ y } \mathrm{B} = \mathrm{D}.$$

Esta relación de igualdad entre cortaduras es una relación de equivalencia porque está definida en términos de la igualdad de conjuntos, y esta lo es, como lo mencionamos en el capítulo 2.

Para determinar una cortadura (A, B) basta uno de los dos conjuntos A o B, porque cada uno es el complemento del otro con respecto al universo de los números racionales; esto significa que para demostrar que (A, B) = (C, D) es suficiente probar que A = C.

[8] Aunque escribimos números reales, nos referimos a números reales no negativos.

11.2.3. Operaciones entre números reales

Las operaciones entre números reales las definimos también de manera natural:

11.2.3.1. Adición

Sean $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ dos números reales. La suma $\alpha + \beta$ es el número real definido por la cortadura

$$\alpha + \beta = (\mathrm{A} + \mathrm{C}, (\mathrm{A} + \mathrm{C})'),$$

donde $\mathrm{A} + \mathrm{C} = \{x + y : x \in \mathrm{A} \wedge y \in \mathrm{C}\}$ y $(\mathrm{A} + \mathrm{C})' = \mathbb{Q}^* - (\mathrm{A} + \mathrm{C})$.

A continuación probaremos que $\alpha + \beta$ es una cortadura:

1. Tenemos que $\mathrm{A} + \mathrm{C}$ es un conjunto no vacío pues tanto A como C son conjuntos no vacíos. También $(\mathrm{A} + \mathrm{C})'$ es no vacío, pues $\mathrm{B} + \mathrm{D}$ es no vacío y $\mathrm{B} + \mathrm{D} \subseteq (\mathrm{A} + \mathrm{C})'$: sea $x + y \in \mathrm{B} + \mathrm{D}$. Como $x \in \mathrm{B}$ entonces $x \notin \mathrm{A}$, de manera similar, como $y \in \mathrm{D}$ entonces $y \notin \mathrm{C}$; por tanto $x + y \notin \mathrm{A} + \mathrm{C}$, luego $x + y \in (\mathrm{A} + \mathrm{C})'$.

2. De la definición de adición de cortaduras se deduce que $(\mathrm{A} + \mathrm{C}) \cup (\mathrm{A} + \mathrm{C})' = \mathbb{Q}^*$ y $(\mathrm{A} + \mathrm{C}) \cap (\mathrm{A} + \mathrm{C})' = \emptyset$, esto es, todo número racional pertenece a alguno de los dos conjuntos, $\mathrm{A} + \mathrm{C}$ o $(\mathrm{A} + \mathrm{C})'$, pero no a ambos.

3. Probaremos que todo número racional que pertenezca a $(\mathrm{A} + \mathrm{C})'$ es estrictamente mayor que todo número racional que pertenezca a $\mathrm{A} + \mathrm{C}$ y para esto procedemos por contradicción: sea $x \in \mathrm{A} + \mathrm{C}$ con $x = a + c$ donde $a \in \mathrm{A}$, $c \in \mathrm{C}$ y $y \in (\mathrm{A} + \mathrm{C})'$. Supongamos que $x \geq y$ y sea $u = x - y = (a + c) - y$, entonces $y = (a + c) - u = a + (c - u)$. Como $u \geq 0$ tenemos que $c - u \leq c$ y por las condiciones *ii.* y *iii.* de la definición de cortadura tenemos que $c - u \in \mathrm{C}$. Luego $y \in \mathrm{A} + \mathrm{C}$ pero esto contradice la hipótesis. Por tanto se cumple que $x < y$.

4. Por último probaremos por contradicción que el conjunto $(\mathrm{A} + \mathrm{C})'$ no tiene elemento mínimo: sea $m = x + y$ el elemento mínimo de $(\mathrm{A} + \mathrm{C})'$, luego $m \notin \mathrm{A} + \mathrm{C}$, por tanto $x \notin \mathrm{A}$ o $y \notin \mathrm{C}$. Si asumimos que $x \notin \mathrm{A}$ por definición de cortadura tenemos que $x \in \mathrm{B}$ y como B no tiene elemento

mínimo, existe $u \in \mathrm{B}$ tal que $u < x$. Entonces $u + y < x + y = m$ con $u + y \in (\mathrm{A} + \mathrm{C})'$, pues como $u \in \mathrm{B}$, por definición de cortadura, $u \notin A$ y por tanto $u + y \notin \mathrm{A} + \mathrm{C}$. Pero este hecho contradice la minimalidad de m. De manera similar llegamos a una contradicción si asumimos que $y \notin \mathrm{C}$.

11.2.3.1.1 Propiedades de la adición de números reales

Por la manera como ha sido construido, la suma de números reales tiene las mismas propiedades de las operaciones de los números racionales:

Propiedad asociativa

Para todo $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ y $\gamma = (\mathrm{E}, \mathrm{F})$ números reales, se cumple que

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Prueba: por definición de adición entre números reales

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= ((\mathrm{A}, \mathrm{B}) + (\mathrm{C}, \mathrm{D})) + (\mathrm{E}, \mathrm{F}) \\ &= ((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}), ((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E})').\end{aligned}$$

Para demostrar la igualdad es suficiente probar que $(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E} = \mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E})$. Para ello, debemos probar dos contenencias

$$((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}) \subseteq (\mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E})) \quad \text{y} \quad (\mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E})) \subseteq ((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}).$$

Para demostrar la primera elijamos un x arbitrario en $(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}$, esto es: sea $x \in (\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}$, como x es un número racional, entonces existen $(u \in \mathrm{A} \wedge v \in \mathrm{C}) \wedge w \in \mathrm{E}$, tal que $x = (u + v) + w$. Pero, como u, v y w son números racionales cualesquiera, se cumple la propiedad asociativa de la adición, por tanto:

$$x = (u + v) + w = u + (v + w).$$

Y, como la operación $\wedge$ también es asociativa, se cumple que

$$[(u \in \mathrm{A} \wedge v \in \mathrm{C}) \wedge w \in \mathrm{E}] \leftrightarrow [u \in \mathrm{A} \wedge (v \in \mathrm{C} \wedge w \in \mathrm{E})],$$

así, tenemos que $x \in \mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E})$. De este modo:

$$(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E} \subseteq \mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E}).$$

De manera similar probamos la segunda contenencia y concluimos que

$$(\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E} = \mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E}).$$

Por tanto,

$$((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E}, ((\mathrm{A} + \mathrm{C}) + \mathrm{E})') = (\mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E}), (\mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{E}))'),$$

y en consecuencia

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \qquad \square$$

Propiedad conmutativa

Para todo $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ números reales, se cumple que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Prueba: por definición de adición entre números reales

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (\mathrm{A}, \mathrm{B}) + (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \\ &= (\mathrm{A} + \mathrm{C}, (\mathrm{A} + \mathrm{C})'). \end{aligned}$$

Debemos probar que $\mathrm{A} + \mathrm{C} = \mathrm{C} + \mathrm{A}$: sea $x \in \mathrm{A} + \mathrm{C}$, entonces existen $u \in \mathrm{A}$ y $v \in \mathrm{C}$ tal que $x = u + v$. Ahora, por la propiedad conmutativa de la adición entre números racionales, tenemos que $x = v + u$ y como la conjunción es conmutativa $v \in \mathrm{C}$ y $u \in \mathrm{A}$, por lo cual $x \in \mathrm{C} + \mathrm{A}$. De esta manera $(\mathrm{A} + \mathrm{C}) \subseteq (\mathrm{C} + \mathrm{A})$.

La demostración de $(\mathrm{C} + \mathrm{A}) \subseteq (\mathrm{A} + \mathrm{C})$ es análoga y por tanto se tiene que $\mathrm{A} + \mathrm{C} = \mathrm{C} + \mathrm{A}$.

Y utilizando la definición de adición entre números reales, concluimos que:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha. \qquad \square$$

Existencia de elemento idéntico

Si $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ es un número real cualquiera, el número

$$0 = (\{0'\}, (0', \infty))$$

con $(0', \infty) = \{w \in \mathbb{Q}^* : w > 0'\}$, es el elemento idéntico[9] para la adición, es decir que

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

[9]Insistimos que el cero fuera de los paréntesis es el cero real mientras que los se hallan al interior de los conjuntos de la cortadura son el cero de los números racionales.

Prueba: por la definición de adición, tenemos que:

$$\alpha + 0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) + (\{0'\}, (0', \infty)) = (\mathrm{A} + \{0'\}, (\mathrm{A} + \{0'\})').$$

Es claro que

$$\mathrm{A} + \{0'\} = \{x + 0' : x \in \mathrm{A}\} = \mathrm{A},$$

luego $(\mathrm{A} + \{0'\}, (\mathrm{A} + \{0'\})') = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, por tanto

$$\alpha + 0 = \alpha.$$

De manera similar probamos que $0 + \alpha = \alpha$. □

Ejercicios

1. *Demuestre que el elemento neutro de la adición entre números reales, a partir de cortaduras, es único.*

2. *Demuestre la propiedad cancelativa para la adición entre números reales.*

11.2.3.2. Multiplicación entre números reales

Análogamente a como se definió la suma de números reales, podemos definir la multiplicación de dos números reales $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$, así:

$$\alpha \bullet \beta = (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}, (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})'),$$

donde $\mathrm{A} \bullet \mathrm{C} = \{x \cdot y : x \in \mathrm{A} \wedge y \in \mathrm{C}\}$ y $(\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})' = \mathbb{Q}^* - (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})$.

Ejercicio

Demuestre que la multiplicación de cortaduras es una cortadura.

11.2.3.2.1 Propiedades de la multiplicación

La multiplicación entre números reales también comparte todas las propiedades de la multiplicación entre números racionales; veamos.

Propiedad asociativa

Para todo $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ y $\gamma = (\mathrm{E}, \mathrm{F})$, números reales, se cumple que:

$$(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma),$$

o equivalentemente, de acuerdo con la definición de multiplicación entre números reales:

$$[(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D})] \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F}) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet [(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F})].$$

Prueba: si partimos del lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$[(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D})] \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F}) = (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}, (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})') \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F}).$$

Y aplicando nuevamente la definición de multiplicación:

$$[(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D})] \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F}) = ((\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E}, ((\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E})').$$

De nuevo basta probar que $(\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E} = \mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} \bullet \mathrm{E})$. Al igual que hicimos en la adición, primero elijamos un x arbitrario en $(\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E}$; de esta manera

$$x \in \{(a \cdot c) \cdot e : (a \in \mathrm{A} \wedge c \in \mathrm{C}) \wedge e \in \mathrm{E}\},$$

esto significa que existe $(a_1 \in A \wedge c_1 \in C) \wedge e_1 \in E$ tal que $x = (a_1 \cdot c_1) \cdot e_1$. Como a_1, c_1 y e_1 son números racionales, se cumple la propiedad asociativa de la multiplicación, por lo cual $x = a_1 \cdot (c_1 \cdot e_1)$ y como la $\wedge$ también es asociativa, tenemos que:

$$x \in \{a \cdot (c \cdot e) : a \in \mathrm{A} \wedge (c \in \mathrm{C} \wedge e \in \mathrm{E})\}.$$

Por lo cual $(\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E} \subseteq \mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} \bullet \mathrm{E})$. Similarmente deducimos que $\mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} \bullet \mathrm{E}) \subseteq (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E}$. De donde concluimos que

$$((\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E}, ((\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}) \bullet \mathrm{E})') = (\mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} \bullet \mathrm{E}), (\mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} \bullet \mathrm{E}))'),$$

y en consecuencia,

$$[(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D})] \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F}) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet [(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \bullet (\mathrm{E}, \mathrm{F})]. \qquad \square$$

Propiedad conmutativa

Esta propiedad enuncia que para todo número real α y β, $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ se tiene que:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D}) = (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \bullet (\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Prueba: por definición de multiplicación entre números reales

$$\begin{aligned} \alpha \bullet \beta &= (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \\ &= (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}, (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})'). \end{aligned}$$

Elegimos un x arbitrario en $\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}$; es decir, existen $a_1 \in A$ y $c_1 \in C$ tal que $x = a_1 \cdot c_1$. Pero como la $\wedge$ es conmutativa y se cumple que $a_1 \cdot c_1 = c_1 \cdot a_1$ para todo número racional, entonces $x \in \mathrm{C} \bullet \mathrm{A}$. Por lo cual $\mathrm{A} \bullet \mathrm{C} \subseteq \mathrm{C} \bullet \mathrm{A}$.

De manera similar se demuestra que $\mathrm{C} \bullet \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \bullet \mathrm{C}$ y con ello, que $\mathrm{A} \bullet \mathrm{C} = \mathrm{C} \bullet \mathrm{A}$.

A partir de lo cual se concluye que

$$\alpha \bullet \beta = (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C}, (\mathrm{A} \bullet \mathrm{C})') = (\mathrm{C} \bullet \mathrm{A}, (\mathrm{C} \bullet \mathrm{A})') = (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \bullet (\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \beta \bullet \alpha. \quad \square$$

Existencia del elemento idéntico

Para todo número real $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ existe el número

$$1 = ([0', 1'], (1', \infty))$$

llamado *elemento idéntico* para la multiplicación, tal que

$$\alpha \bullet 1 = 1 \bullet \alpha = \alpha.$$

En general, la multiplicación de conjuntos de números *no es cancelativa*, pues se tiene, por ejemplo, que en el conjunto N de los números naturales, si P es el conjunto de los números pares, entonces

$$\mathrm{P} \bullet \{0, 1\} = \mathrm{P} \bullet \{0, 1, 2\} = \mathrm{P},$$

y sin embargo,

$$\{0, 1\} \neq \{0, 1, 2\}.$$

Además, no se tienen inversos multiplicativos porque no existe un conjunto que multiplicado por N sea igual a $\{1\}$.

Afortunadamente, para cada número real α distinto de cero, $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, existe el inverso multiplicativo que notamos:

$$1/\alpha = (1/\mathrm{B}, (1/\mathrm{B})')$$

con $1/\mathrm{B} = \{1/x : x \in \mathrm{B} \text{ o } x \text{ es el máximo de A}\} \cup \{0\}$, tal que

$$\alpha \bullet (1/\alpha) = 1,$$

esto significa que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \bullet (1/\mathrm{B}, (1/\mathrm{B})') = ([0,1], (1, \infty))$.

Para demostrar esto, es suficiente probar que $\mathrm{A} \bullet 1/\mathrm{B} = [0,1]$. Veamos que $\mathrm{A} \bullet 1/\mathrm{B} \subseteq [0,1]$: sea $z \in \mathrm{A} \bullet 1/\mathrm{B}$, esto es, $z = x \cdot y$ con $x \in A$ y $y \in 1/\mathrm{B}$. Si $y = 0$, entonces $z = 0$ y está en $[0,1]$. Si $y > 0$, entonces existe $u \in B$ tal que $y = \frac{1}{u}$. Por definición de cortadura tenemos que $x < u$ y como $y > 0$, $0 < xy < uy = 1$ (Si u es el máximo de A, se cumple que $x \leq u$). Por tanto, $x \cdot y \in (0,1) \subseteq [0,1]$.

La otra contenencia puede estudiarse en (Restrepo, 1994, pp. 223-230), donde se presenta una formulación de las cortaduras de Dedekind como parejas de conjuntos de números racionales muy similar a la presentada aquí. Otras versiones se pueden consultar en (Landau, 1966, pp. 43-91; Spivak, 1978, pp. 727-755); en ellos se hace una presentación donde las cortaduras se definen como un subconjunto de números racionales acotado superiormente que equivale a elegir uno de los dos conjuntos de nuestra presentación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Para todo $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ y $\gamma = (\mathrm{E}, \mathrm{F})$, números reales, se cumple que

$$\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma.$$

Prueba: esta propiedad de los números reales también se desprende de manera directa de las propiedades de los números racionales; pues para todo subconjunto A, C y E de números racionales, se cumple que:

$$\mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} + \mathrm{E}) = \mathrm{A} \bullet \mathrm{C} + \mathrm{A} \bullet \mathrm{E}.$$

Puesto que si $x \in \mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} + \mathrm{E})$, existe $a_1 \in A \wedge (c_1 \in C \wedge e_1 \in E)$ tal que:

$$x = a_1 \cdot (c_1 + e_1).$$

Y como a_1, c_1 y e_1 son números racionales, satisfacen la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, esto es:

$$x = (a_1 \cdot c_1) + (a_1 \cdot e_1).$$

Y $a_1 \in A \wedge (c_1 \in C \wedge e_1 \in E)$ es equivalente a $(a_1 \in A \wedge c_1 \in C) \wedge (a_1 \in A \wedge e_1 \in E)$ porque la conjunción es idempotente $((p \wedge p) \leftrightarrow p)$ y asociativa; por la definición de adición y multiplicación entre cortaduras, tenemos que $x \in \mathrm{A} \bullet \mathrm{C} + \mathrm{A} \bullet \mathrm{E}$; así $\mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} + \mathrm{E}) \subseteq \mathrm{A} \bullet \mathrm{C} + \mathrm{A} \bullet \mathrm{E}$.

Similarmente se demuestra que $\mathrm{A} \bullet \mathrm{C} + \mathrm{A} \bullet \mathrm{E} \subseteq \mathrm{A} \bullet (\mathrm{C} + \mathrm{E})$ y con ello la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición entre números reales. □

En resumen, en el conjunto de los números reales las operaciones adición y multiplicación son asociativas, conmutativas, cada una tiene un elemento idéntico, son cancelativas; existen elementos inversos para la multiplicación y esta es distributiva con respeto a la adición.

Desde el punto de vista de las operaciones y sus propiedades, no hemos ganado algo con respecto a los números racionales. Veamos que las ganancias están en el orden.

Ejercicios

1. *Demuestre la existencia de un elemento idéntico para la multiplicación entre números reales.*

2. *Demuestre que existe un inverso multiplicativo para cada número real distinto de cero.*

11.2.4. El orden en la recta

Dedekind compara las propiedades del orden de los números racionales con las propiedades que tienen los puntos sobre una línea recta, en la cual se distinguen dos direcciones llamadas *derecha* e *izquierda*, de tal manera que si p y q son dos puntos diferentes de la recta, se tiene que o p está a la izquierda de q o recíprocamente, q está a la izquierda de p, y se cumple que:

i. Si p está a la izquierda de q y q a la izquierda de r, entonces p está a la izquierda de r; en este caso, se dice que q está entre p y r.

ii. Si p y q son dos puntos diferentes, existen infinitos puntos de la recta entre ellos.

iii. Si p es un punto fijo en una recta, todos los puntos están en una de dos clases A, B, con características completamente análogas a las clases antes descritas, las que definen la cortadura.

A partir de esto, Dedekind define el orden entre los números reales, que equivale a definir el orden entre cortaduras.

11.2.5. El orden entre cortaduras

Si $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$, números reales, decimos que α *es menor que* β, y lo notamos:

$$\alpha < \beta \text{ si y solo si } \mathrm{A} \subset \mathrm{C};$$

es decir, que todo elemento de A es elemento de C, pero existe algún racional que está en C y no en A; además, $\mathrm{D} \subset \mathrm{B}$.

La relación

$$\alpha \leq \beta \text{ si y solo si } \alpha < \beta \text{ o } \alpha = \beta,$$

o en otra palabras,

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \text{ si y solo si } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{C}, \mathrm{D} \subseteq \mathrm{B}$$

es una relación de orden. Esto significa que cumple con las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva:

i *Reflexiva:* hay que probar que para todo número real α, $\alpha \leq \alpha$.

Sea $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$; como $\mathrm{A} = \mathrm{A}$ y $\mathrm{B} = \mathrm{B}$, se tiene que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}$ y $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}$; por tanto, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq (\mathrm{A}, \mathrm{B})$; en síntesis, $\alpha \leq \alpha$.

ii *Antisimétrica:* si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$ entonces $\alpha = \beta$.

Sean $\alpha = (\mathrm{A}, B)$ y $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$, supongamos que

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \quad \text{y} \quad (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \leq (\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$

esto significa que $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{C}$ y $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{D}$, $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{A}$, lo que implica que $\mathrm{B} = \mathrm{D}$ y $\mathrm{A} = \mathrm{C}$; por tanto, $\alpha = \beta$.

iii *Transitiva:* si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$.

Sean $\alpha = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\beta = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ y $\gamma = (\mathrm{E}, \mathrm{F})$, la hipótesis dice que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ y $(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \leq (\mathrm{E}, \mathrm{F})$ o sea que $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{C}$ y $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{D}$, $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{E}$.

Si $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{B}$ y $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{D}$, entonces $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{B}$, por la transitividad de la contenencia entre conjuntos, y por el mismo argumento se concluye que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$.

En consecuencia, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq (\mathrm{E}, \mathrm{F})$, concluyendo que $\alpha \leq \gamma$.

Por analogía con la recta geométrica si α, β y γ son números reales:

- $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$, diremos que el número β se encuentra entre α y γ.
- Si $\alpha \neq \gamma$ existen infinitos números diferentes β, que se encuentran entre α y γ.
- Para α, un número real cualquiera, todos los números reales se dividen en dos clases, A y B, de manera que cada una de ellas posee un número infinito de elementos, cada miembro de A es menor que α y cada miembro de B es mayor que α. El número α puede ser incluido en cualquier clase.

La diferencia entre los números reales y los racionales no es algebraica, es de orden, los números reales son completos, los racionales no. Pero esta diferencia entre números racionales y reales no la abordaremos aquí por cuanto no es el interés. No obstante, invitamos al lector a consultar y estudiar en el tema.

Hasta aquí hemos presentado una forma para construir el conjunto de los números reales (no negativos), y somos conscientes de su complejidad; sin embargo, consideramos que las otras opciones requieren mayores prerrequisitos. Compartimos la afirmación de Kline: "el número irracional (...) es un monstruo intelectual, y podemos comprender por qué los griegos y tras ellos tantas generaciones de matemáticos los encontraron tan difíciles de manejar"(Kline, 1994, p. 1302).

Ejercicios

1. *Demuestre que entre números reales se cumple la monotonía de la adición.*

2. *Demuestre que entre números reales se cumple la monotonía para la multiplicación.*

3. *Consulte en qué consiste la completitud de los números reales y cómo la trataron matemáticos en la historia.*

Capítulo

12 Del proceso de invertir a los números negativos

El hombre está siempre dispuesto a negar
todo aquello que no comprende.
Blaise Pascal

En nuestro mundo existen procesos en los que el arrepentimiento es posible, ¡y por supuesto, también en los que no! En los primeros, podemos ejecutar una acción y deshacer lo hecho hasta tener la misma situación inicial: tejer y deshacer el tejido como lo hacía Penélope en la *Odisea*, ensuciar la ropa para luego limpiarla, avanzar y después retroceder, etc.

12.1. Procesos irreversibles

Los procesos que no tienen reversa se llaman *irreversibles*; por ejemplo:

1. Envejecer, como casi todos los procesos biológicos, es un proceso irreversible. No es posible volver a nuestros años mozos. Es cierto que hoy la ciencia tiene descubrimientos asombrosos (cirugías plásticas, tratamientos de estética, lipoesculturas, etc.) pero, tal proceso no es, por ahora, reversible.

2. Romper un papel.

3. El paso del tiempo.

4. Disparar un arma.

5. Cantar.

6. Hablar.

7. Cortarse el cabello.

8. Los procesos de combustión en química.

9. El proceso de inferir la verdad de una proposición q a partir de la de otra p, asegurando la verdad de $p \rightarrow q$, no permite asegurar la verdad de p a partir de la de q y la de $p \rightarrow q$.

10. Si a partir de un número, digamos x, lo elevamos a la cuarta potencia, le restamos 5 veces el cuadrado de x, le sumamos 6, y obtenemos como resultado 0, no es posible a partir del resultado, deshacer lo hecho y encontrar el valor de x.

Pero como los procesos irreversibles no son de nuestro interés en este momento, dejaremos este tema hasta aquí; en cambio, revisaremos los procesos reversibles.

12.2. Procesos reversibles

Consideremos algunos procesos reversibles como:

1. Partiendo de un sitio, caminar cierta distancia en una dirección y luego regresar en dirección contraria hasta llegar al lugar inicial.

Podemos representar esta situación con los dos sentidos: derecho e izquierdo[1] de una recta, cuando se fija en ella un punto de referencia, que corresponde con el punto de partida que notamos con 0.

Si representamos con numerales escritos en letra normal la cantidad de pasos[2] que se recorren hacia la derecha, con numerales huecos (efecto contorno), la cantidad de pasos que se recorren hacia la izquierda, con el signo

[1] O arriba y abajo, o en cualquier posición, siempre que haya dos sentidos contrarios.

[2] Si escogemos como unidad de distancia, un paso; el procedimiento también es válido si usamos fracciones de paso.

+ hacer un proceso a continuación de otro, y con el símbolo =, la expresión *es equivalente a*, tendremos por ejemplo que:

$$5 + \cancel{5} = 0$$

Debemos enfatizar que 0 no representa "nada", como en los números naturales, sino *una posición inicial de referencia*. En esta situación, cualquier posición sobre la recta se puede representar con 0. Este 0 no es absoluto[3], ¡es relativo!, es decir, no existe un único 0, ¡existen infinitos ceros[4]!

2. Elevar la temperatura de una sustancia no orgánica, y luego dejarla enfriar[5] hasta obtener la temperatura inicial.

A diferencia de las escalas para medir longitudes, donde a partir de un cero inicial se inicia la medida y se avanza en un sentido único, pasando por $1, 2, 3, \ldots$, etc., unidades; en la escala del termómetro *el cero no es extremo de la escala*, hay temperaturas por encima y por debajo de él[6].

Si partiendo de 0 grados *aumentamos la temperatura* en 5 grados y a continuación la disminuimos en 5 grados, obtenemos, como temperatura final del proceso, 0 grados; esto lo podemos representar como:

$$(+5) + (-5) = 0,$$

donde $(+5)$ significa aumentar la temperatura en 5 grados, (-5) disminuirla en 5 grados, y + hacer un proceso a continuación del otro. De nuevo, tenemos

[3]En la escala Kelvin de temperatura, el cero se escoge de forma que no haya posibilidad de una temperatura bajo él (Serway, 1998, p. 562).

[4]Curiosamente, en física también cuando se pensaba de manera clásica en el vacío, se le consideraba absoluto y único; la mecánica cuántica, por el contrario, considera infinitos estados vacíos, todos equivalentes (Ryder, 1984, pp. 290-296). Por su parte, el matemático francés Lazare Carnot (1753-1823) señala que el cero absoluto es una cantidad por debajo de la cual no hay nada. "Para obtener realmente una cantidad negativa aislada, sería necesario restar una cantidad efectiva de cero, quitar algo de nada: operación imposible"(Carnot, 1803, citado por Boyé, s.f., p. 2).

En el siglo XIX, F. Busset enfatizó en la existencia de varios tipos de ceros, el cero absoluto y ceros relativos, el cero como origen en un sistema de coordenadas.

[5]Si en el intervalo de cambio de la temperatura no está ninguno de sus puntos críticos de cambios de estado (Serway, 1998, p. 537).

[6]El primer termómetro científico fue construido por René Réaumur en 1730; incluía temperaturas por debajo de 0; en 1713, Daniel Fahrenheit evita esas temperaturas escogiendo un punto de referencia para el cero, más bajo.

que aquí tampoco tiene un papel fundamental el 0; también es válida la afirmación, desde cualquier temperatura que tomemos como referencia.

3. La equivalencia lógica.

Dos proposiciones p y q se dice que son equivalentes cuando $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ son ciertas; esto significa que:

a. Si asumimos la verdad de p y demostramos $p \rightarrow q$, podemos asegurar la verdad de q y viceversa:

b. Si asumimos la verdad de q y demostramos $q \rightarrow p$ podemos asegurar la verdad de p.

Estos dos procesos son *inversos*, en el sentido de que si aplicamos a y luego b, partiendo de la verdad de p llegamos a la verdad de p; y si aplicamos b y luego a, partiendo de la verdad de q llegamos a la verdad de q.

4. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Si a partir de un número, en un conjunto cualquiera donde esté definida la multiplicación y la adición, digamos x, lo multiplicamos por un número a, le sumamos otro número b y obtenemos como resultado 0, es posible, a partir del resultado, deshacer lo hecho y encontrar el valor de x, siempre y cuando en el conjunto al que pertenece x tenga sentido deshacer la multiplicación y la adición.

12.3. Entes opuestos

Aparte de los procesos inversibles que hemos mencionado, también existen cosas opuestas, que pueden ser representadas con el mismo modelo matemático, por ejemplo:

1. **La carga eléctrica** de la materia aparece de dos formas. Cuando ellas son contrarias, los cuerpos se atraen; si son del mismo tipo, se rechazan; cuando se juntan cargas iguales de distinto tipo, las dos se compensan, y la carga resultante es nula o neutra.

2. **La interferencia de las ondas:** cuando dos o más ondas concurren en el mismo espacio, sus amplitudes se suman, de manera que si sus fases se acomodan convenientemente, puede obtenerse una onda de amplitud 0, en lo que se llama *interferencia destructiva*. Así, es posible obtener

oscuridad sumando luces y silencio sumando sonidos; es lo que sucede cuando una señal de televisión o de radio no es clara.

3. **Pasivos y activos:** en contabilidad, desde tiempos muy antiguos[7], era costumbre escribir las deudas con color rojo, y las ganancias y todo lo que les pertenencía, con color negro.

4. **El juego de las escondidas francesas:** juegan hombres y mujeres, se esconden por parejas y nadie busca; si alguien es solicitado por alguno de los jugadores activos, debe regresar al juego en pareja.

   El número de mujeres activas en el juego las representamos con numerales huecos, y los hombres con numerales normales, entrar al juego lo representamos con $+$ y salir del juego con $-$.

   Supongamos que el juego inicia con cinco hombres (5), y tres mujeres ($\mathbb{3}$), esto lo simbolizamos:

$$5 + \mathbb{3}.$$

   Tres hombres (3) forman parejas con tres mujeres ($\mathbb{3}$) y se esconden, es decir, quedan dos hombres (2) en el juego; esto lo representamos:

$$5 + \mathbb{3} = 2.$$

[7]Los chinos, desde el primer siglo de nuestra era, representaban con varillas negras y rojas, activos y pasivos, respectivamente. Sin embargo, aparecen solamente *como auxiliares de cálculo*; no hay *números negativos* en los enunciados de los problemas; tampoco los hay en las respuestas.
La primera vez que aparecen de forma explícita las reglas que rigen la aritmética con los números negativos es hacia el año 628 de nuestra era, en una obra del matemático hindú Brahmagupta, en ella se explican los algoritmos para efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, con lo que llamaba "los bienes", "las deudas" y la "nada"; es decir, con lo que hoy llamamos números positivos, negativos y cero; dice, por ejemplo: "una deuda restada de la nada se convierte en un bien, un bien restado de la nada se convierte en una deuda". Sin embargo, los aceptaron con reservas, por ejemplo, Brāskara, obtuvo como soluciones de un problema 50 y -5, y dice: "el segundo valor no debe considerarse, porque es inadecuado; la gente no aprueba las soluciones negativas". La misma idea la aplicaron los comerciantes alemanes al escribir de un color lo que tenían y de otro lo que debían, y al final del mes sumaban todo lo que tenían y le restaban todo lo que debían y escribían el resultado del color que fuera el número mayor (Kline, 1994, pp. 783-811).

De la misma manera:

$$\mathbb{5} + 5 = \mathbb{0}$$
$$\mathbb{5} + \mathbb{3} = \mathbb{8}$$
$$5 + 3 = 8$$
$$\mathbb{3} + 5 = 2.$$

12.4. Números opuestos

Como hemos observado en las situaciones anteriores, ni los números naturales ni los racionales solos, pueden expresar esta idea de oposición; para representar situaciones donde aparezcan procesos inversos o cosas opuestas debemos usar dos clases de números que notaremos unos con letra normal y los otros con letra hueca, que llamaremos números *opuestos*[8], cada clase se comporta como los números naturales o racionales que conocemos cuando se suman o restan entre ellos de la manera usual, pero abren nuevas posibilidades cuando se mezclan; por ejemplo, al juntar dos números que representen la misma cantidad pero que *sean de clase diferente, se eliminan unos a otros.*

12.4.1. Operaciones entre números opuestos

12.4.1.1. Adición

Cuando tenemos números de la misma clase, y los sumamos, obtenemos números de la misma clase, así:

$$\mathbb{12454} + \mathbb{325} = \mathbb{12779}$$
$$\mathbb{458,2} + \mathbb{500,4} = \mathbb{958,6},$$

y

[8]Es más usual el nombre de *números negativos y positivos*, pero esta connotación es peyorativa; lo negativo se asocia con lo malo; adicionalmente, los números negativos se dibujan en el lado izquierdo de la recta numérica, y también la izquierda es siniestra, lo siniestro es malo; la izquierda es la revolución y la derecha es el orden; el estudio de la ley se llama derecho, etc. La primera vez que en el Renacimiento aparece un número negativo aislado en una ecuación algebraica es en la obra *Triparty en la science des nombres*, del matemático francés Nicolás Chuquet, escrita en 1484 (González, *et al.*, 1990, p. 28).

$$1352 + 4581 = 5933$$
$$432{,}1 + 123{,}4 = 555,\ 5.$$

La regla de combinación de las dos clases de números es: cuando las cantidades o las magnitudes sean las mismas pero de diferente clase, las dos se eliminan, y obtenemos 0 como resultado[9]:

$$\mathbb{75} + 75 = 0$$

Pero, cuando sumamos números diferentes y de diferente clase[10] obtenemos:

$$\mathbb{1235} + 325 = \mathbb{910}$$

dado que esto equivale a

$$\mathbb{1235} - \mathbb{325},$$

es decir,

$$\mathbb{1235} + 325 = \mathbb{910} = \mathbb{1235} - \mathbb{325}$$

porque 325 elimina $\mathbb{325}$ de los $\mathbb{1235}$.

Como la cantidad que representa el numeral hueco es mayor a la del número representado con el numeral normal, entonces el resultado es un número escrito con numerales huecos; algo similar sucede si el número normal es mayor:

$$\mathbb{1452} + 3745 = 2293,$$

lo que equivale a

$$3745 - 1452,$$

[9]Podemos considerar que el número 0 está en ambos conjuntos y por lo tanto lo podemos escribir normal o hueco, indistintamente, o que no está en ninguno y pintarlo de otro color; adoptaremos la primera opción.

[10]En sus *Elementos de álgebra* de 1746, Clairaut establece: "uno se imagina un libro de cuentas en el cual se escribe en una columna los gastos, en otra los ingresos, *cuidando sobre todo no mezclarlos*. Se preguntará quizás si se puede sumar negativo con positivo, o más bien, *si se puede decir que se suma algo negativo*. A lo que yo respondo que *esa expresión es exacta cuando no se confunde sumar con aumentar*. Que dos personas, por ejemplo, sumen sus fortunas, cualesquiera que sean estas, yo diría que esto significa sumar sus bienes; que uno tenga deudas y efectos reales, si las deudas superan a los efectos, significa que lo que tiene es negativo; y la unión de esta fortuna con la del primero disminuirá los bienes de este, de manera que la suma será menor que lo que poseía el primero, o incluso, enteramente negativa"(Clairaut, 1746, citado por Boyé, s.f., p. 4).

esto es

$$\square\square\square\square + 3745 = 2293 = 3745 - 1452.$$

El resultado final es equivalente a restar el número menor del mayor, como si fueran de la misma clase y la diferencia es de la misma clase del número mayor[11].

Ejercicio

¿Es cierto, en general, que

$$\square + b = b + \square$$

$$\square + b = \square - \square$$

y

$$b + \square = \square - \square\,?$$

12.4.1.2. Sustracción

Si restamos dos números de la misma clase, y la resta es posible en el sentido de los números naturales, esto es, que el minuendo es mayor o igual al sustraendo, la situación es ya conocida, y la solución es la misma:

$$\square\square\square - \square\square\square = \square\square\square$$
$$548 - 324 = 224$$

Si suponemos que las operaciones entre números escritos con numerales normales y huecos tienen las mismas propiedades que las de los números racionales positivos, podemos entonces efectuar sustracciones donde el minuendo es mayor que el sustraendo, recurriendo al truco de escribir:

$$\begin{aligned}\square\square\square - \square\square\square &= \square\square\square - \square\square\square + 0\\ &= \square\square\square - \square\square\square + (\square\square\square + 847)\\ &= \square\square\square + (\square\square\square - \square\square\square) + 847,\end{aligned}$$

[11]Cardano, en su *Ars Magna* de 1545, insiste: "es un sencillo consejo no confundir las cantidades defectuosas (ausentes) con las cantidades abundantes. Es preciso añadir entre sí las cantidades abundantes, añadir también entre sí las cantidades defectuosas, y restar las cantidades defectuosas de las abundantes, pero teniendo en cuenta las especies, es decir, no operar más que con semejantes; combinar los números entre sí, lo mismo con los cuadrados e incluso con los cubos, etc."(Cardano, 1545, citado por Boyé, s.f., p. 4).

lo que nos lleva a una situación que ya sabemos resolver:

$$\mathbb{325} - \mathbb{847} = \mathbb{325} + 847 = 522.$$

O sea que cuando restamos números de la misma clase, y el minuendo es menor que el sustraendo, la diferencia es un número de la clase opuesta.

Y un resultado sorprendente

$$\mathbb{0} - \mathbb{4} = 4;$$

no, como decía Pascal[12], que $\mathbb{0} - \mathbb{4} = \mathbb{0}$.

Con el mismo truco también podemos restar números de clases diferentes; por ejemplo, para efectuar:

$$3 - \mathbb{5}$$

sumamos 0, en forma de un par de números de la misma magnitud pero de diferente clase, para que las sustracciones usuales sean posibles; en nuestro caso:

$$\begin{aligned} 3 - \mathbb{5} &= \mathbb{0} + (3 - \mathbb{5}) \\ &= (5 + \mathbb{5}) + (3 - \mathbb{5}) \end{aligned}$$

y si insistimos en que estos números cumplan por lo menos con las mismas propiedades de los números naturales y racionales, entonces

$$3 - \mathbb{5} = (\mathbb{5} - \mathbb{5}) + (5 + 3)$$

$$\mathbb{5} - \mathbb{5} = \mathbb{0}$$

y

$$5 + 3 = 8$$

de donde podemos conjeturar que:

$$3 - \mathbb{5} = 8.$$

De la misma forma obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{3} - 2 &= 0 + (\mathbb{3} - 2) \\ &= (\mathbb{2} + 2) + (\mathbb{3} - 2) \\ &= (2 - 2) + (\mathbb{2} + \mathbb{3}) \\ &= \mathbb{5} \end{aligned}$$

[12]Pascal (1623-1662), en sus *Pensamientos* afirma: "demasiada verdad nos asombra; yo sé que no pueden comprender que, a quien de cero resta cuatro, le queda cero".

y también podemos efectuar:

$$\begin{aligned} 5-8 &= (\mathbb{8}+8)+(5-8) \\ &= \mathbb{8}+5 = (\mathbb{3}+\mathbb{5})+5 = \mathbb{3}+(\mathbb{5}+5) = \mathbb{3}. \end{aligned}$$

12.4.1.3. Multiplicación

Hasta ahora las dos clases de números estudiados tienen un comportamiento igual al de los números racionales que conocemos, y en particular de los números naturales, en lo que respecta a las operaciones de suma y resta cuando se opera al interior de cada uno, y cuando se operan entre ellos. *Convengamos* que un tipo de números, por ejemplo *los que escribimos con numerales normales, representan los números naturales o racionales convencionales.*

Así, la multiplicación

$$3 \times 5$$

significa, como en los números naturales,

$$3 \times 5 = 5+5+5 = 15,$$

y de la misma forma podemos asumir que

$$3 \times \mathbb{5} = \mathbb{5}+\mathbb{5}+\mathbb{5} = \mathbb{15}.$$

Pero, ¿cuál significado le asignamos a

$$\mathbb{5} \times 3\,?$$

Podemos, como en ocasiones anteriores, y *para que la multiplicación de estos números sea conmutativa*, decir que

$$\mathbb{5} \times 3 = 3 \times \mathbb{5}.$$

O sea

$$3 \times \mathbb{5} = \mathbb{5}+\mathbb{5}+\mathbb{5}$$

que, curiosamente, coincide con

$$5 \times \mathbb{3} = \mathbb{3}+\mathbb{3}+\mathbb{3}+\mathbb{3}+\mathbb{3} = \mathbb{15}.$$

Pero el caso que no tiene interpretación directa es

$$\mathbb{3} \times \mathbb{5}.$$

Para abordar este caso, necesitamos acudir de alguna forma a los números que estamos representando con numerales normales, que son los que para nosotros tienen significado; por ejemplo, al igual que en la resta, podemos sumar 0, en forma de:

$$\mathbb{3} \times \mathbb{5} = \mathbb{3} \times \mathbb{5} + (\mathbb{15} + 15),$$

y expresar

$$\mathbb{15} = 3 \times \mathbb{5},$$

y

$$15 = 3 \times 5$$

para obtener

$$\mathbb{3} \times \mathbb{5} = \mathbb{3} \times \mathbb{5} + [(3 \times \mathbb{5}) + (3 \times 5)].$$

Y si, como venimos haciendo, *suponemos que para estos números también se cumple la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma*, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{3} \times \mathbb{5} &= [(\mathbb{3} \times \mathbb{5}) + (3 \times \mathbb{5})] + (3 \times 5) \\ &= \mathbb{5}(\mathbb{3} + 3) + (3 \times 5) \end{aligned}$$

con el sorprendente resultado:

$$\mathbb{3} \times \mathbb{5} = \mathbb{5} \times 0 + 15 = 0 + 15 = 15.$$

El truco puede parecer artificial, pero es indudable que funciona. De hecho es tan artificial que ninguna de las representaciones, ni los procesos reversibles, ni los objetos opuestos, que mencionamos al comienzo de este capítulo tiene correspondencia con este truco; entre ellos no hay manera de definir una multiplicación.

Y no se crea que el truco es invento nuestro; históricamente, este resultado también tuvo dificultades para ser aceptado; por ejemplo, August De Morgan, objetaba:

> Si suponemos que las cantidades negativas corresponden con las deudas de un hombre, ¿cómo se explica que multiplicando 10 libras esterlinas de deuda, por otra deuda de 5 libras esterlinas, este hombre tendrá o llegará a tener una fortuna de cincuenta libras esterlinas?

Las mismas cantidades negativas fueron rechazadas durante largo tiempo; por ejemplo, Francis Maseres (1731-1824)

> [...] publicó en 1759 su *Dissertation on the use of the negative sign in Algebra* (*Disertación sobre el uso del signo negativo en álgebra*), donde muestra cómo evitar los números negativos (excepto para indicar la sustracción de una cantidad mayor de una menor), y en particular las raices negativas, mediante la cuidadosa segregación de tipos de ecuaciones cuadráticas de tal forma que aquellas con raíces negativas son consideradas separadamente; y, por supuesto, las raíces negativas deben ser rechazadas. Él hace lo mismo con las cúbicas. Más adelante dice de las raíces negativas:
>
> [...] sirven únicamente, en lo que yo puedo juzgar, para confundir toda la doctrina de ecuaciones y para volver en cosas oscuras y misteriosas las que son en su propia naturaleza excesivamente simples y ordinarias [...]. Se debería desear, por lo tanto, que las raíces negativas nunca hubieran sido admitidas dentro del álgebra o que fueran, de nuevo, descartadas de ella; ya que, si esto fuera hecho, hay razón de sobra para imaginar que las objeciones que muchos hombres cultos e ingeniosos ahora hacen de los cómputos algebraicos, como ser oscurecidos y confundidos con nociones casi inteligibles, serían por consiguiente suprimidas; siendo inevitable que el álgebra o la aritmética universal es, por su propia naturaleza, una ciencia no menos simple, clara y capaz de demostración que la geometría. (Kline, 1994, pp. 783-784).

Con respecto a las cantidades negativas, Descartes en *La Géométrie* de 1637, afirma:

> Pero, a menudo se llega a que algunas de estas raíces son falsas o menores que cero (negativas): como cuando se supone que x designa el defecto de una cantidad, que si es 5, se tendrá $x + 5 = 0$, que multiplicada por
>
> $$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$
>
> dará
>
> $$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0,$$
>
> ecuación en la cual hay cuatro raíces, a saber: tres verdaderas que son 2, 3 y 4 y una falsa, que es 5. (Descartes, 1947, p. 145).

Augustus De Morgan en 1831, en su *On the Study and Difficulties of Mathematics* (*Sobre el estudio y las dificultades de las matemáticas*) afirmó, ante las soluciones negativas de un problema:

> La expresión imaginaria $\sqrt{-a}$ y la expresión negativa $-b$ tienen este parecido: que cualquiera de ellas, cuando aparece como solución de un problema, indica que hay alguna inconsistencia o absurdo. En cuanto se refiere al significado real, ambas son igualmente imaginarias, ya que $0 - a$ es tan inconcebible como $\sqrt{-a}$. (Kline, 1994, p. 784).

Maclaurin, en su *Tratado de álgebra* de 1748, en relación con el uso del signo negativo argumenta:

> Si $(+a) - a = 0$ entonces si multiplicamos esta igualdad por n, el producto debe ser 0; el primer término del producto es $+na$, y el segundo término del producto debe ser $-na$, puesto que es preciso que los dos términos se cancelen. Así que los signos diferentes dan $-$ para el producto.
>
> Pero si multiplicamos $(+a) - a$ por $-n$, por el caso anterior, tendremos $-na$ para el primer término; por tanto tendremos $+na$ para el segundo, puesto que es necesario que los dos términos se cancelen. En consecuencia $-$ multiplicado por $-$ da $+$ en el producto. (Traducción libre). (Maclaurin, 1748, p. 13).

El matemático flamenco Simon Stevin (1548-1620) recurre a una interpretación geométrica.

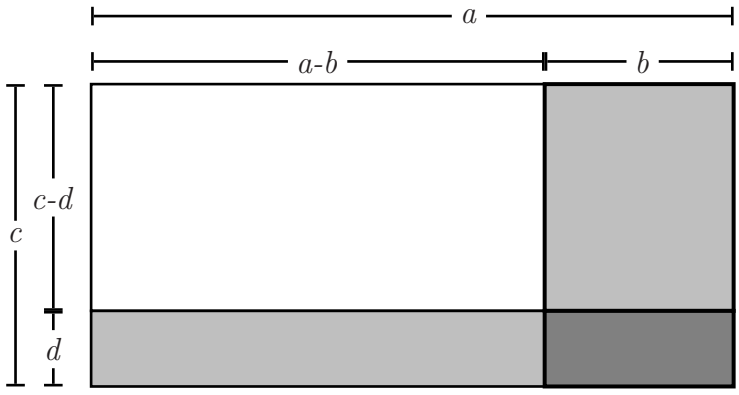


Figura 12.1

En el rectángulo de la figura 12.1 tenemos que el área del rectángulo blanco es

$$(a-b)(c-d),$$

que se puede escribir como el área del rectángulo mayor, menos el área de los rectángulos lateral e inferior, más el área del rectángulo de intersección que fue restado dos veces, o sea:

$$ac - bc - ad + bd,$$

lo que significa que:

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd,$$

y por tanto

$$(-b)(-d) = bd.$$

Euler, por su parte, dice:

> Queda por resolver el caso en que − es multiplicado por −; o por ejemplo, $-a$ por $-b$.
>
> Es evidente, a primera vista, que en cuanto a las letras, el producto será ab; pero es incierto aún si el signo que debe ponerse delante de este producto es + o bien −; todo lo que sabemos es que será uno de estos dos signos.
>
> Ahora, digo que no puede ser el signo −: pues $-a$ por $+b$ da $-ab$ y $-a$ por $-b$ no puede producir el mismo resultado que $-a$ por $+b$; debe producir un resultado contrario, es decir $+ab$; en consecuencia, tenemos la siguiente regla: − multiplicado por − produce +, que es lo mismo que + multiplicado por +. (Traducción libre). (Euler, 1822, p. 8).

Estas son reglas para manejar signos, designadas por un número positivo, y precedido de un signo −. No se trata de números negativos.

Cauchy, a comienzos del siglo XIX, insiste en definir una regla para operar sobre los símbolos + y −, y no sobre números negativos:

> Siguiendo estas convenciones, si representamos un número o una cantidad por A, y si hacemos
>
> $$a = +A, \quad b = -A,$$

entonces tenemos

$$+a = +A, \quad +b = -A,$$
$$-a = -A, \quad -b = +A.$$

En las últimas cuatro ecuaciones, si reemplazamos a y b por sus valores entre paréntesis, obtenemos las fórmulas:

$$+(+A) = +A, \quad +(-A) = -A,$$
$$-(+A) = -A, \quad -(-A) = +A.$$

En cada una de estas fórmulas, el signo del lado derecho es el que llamamos el producto de los dos signos del lado izquierdo. *Multiplicar* dos signos uno por el otro es formar su producto. (Bradley y Sandifer, 2009, p. 268).

Cauchy usa el hecho de que el opuesto del opuesto es el número mismo; pero no hace consideraciones sobre el producto de números negativos.

Alrededor de 1833, Peacock, con su *Álgebra aritmética* y *Álgebra simbólica*, se enfrentó a tratar la existencia de las cantidades negativas y a validar algunos de los resultados clásicos en la teoría de números y el álgebra de la época (Gallardo y Torres, 2005).

Cuando Herman Hankel, alrededor de 1867, en su obra *Teoría del sistema de los números complejos*, establece que la condición para construir una aritmética universal es la de una matemática intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles, y afirma que las matemáticas son una creación humana, y por tanto sus conceptos no se deducen de manera empírica, sino que son construcciones intelectuales, y como tales, *no han sido descubiertas sino inventadas*; que el número no es una cosa, una sustancia que exista independientemente fuera del sujeto o de los objetos que los causan; que no es un principio independiente como creyeron los pitagóricos; que matemáticamente una idea es imposible en sentido estricto solamente si es lógicamente imposible, es decir, que implique una contradicción, y que si los números considerados son lógicamente posibles, si su concepto está definido de forma clara, si es libre de toda contradicción, la cuestión no puede ser el saber si existe en el dominio de lo real o en lo que es intuitivo; formula el principio de permanencia de las leyes formales, que establece un criterio para ampliar el concepto de número:

1. La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido, sino que su significado puede ser cualquiera.

2. Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones, y que subsistan las leyes fundamentales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro.

Y con eso abrió el camino para que los números negativos fueran admitidos y ocuparan un sitio reconocido dentro de las matemáticas, aunque no tuvieran una definición rigurosa y explícita: solo eran símbolos con los que se operaba respetando unas leyes preestablecidas (González, *et al.*, 1990, pp. 48-49).

Hankel propone esta explicación:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \operatorname{op} b) = a\,b + a \times (\operatorname{op} b)$$
$$0 = 0 \times (\operatorname{op} b) = (a + \operatorname{op} a) \times (\operatorname{op} b) = a \times (\operatorname{op} b) + (\operatorname{op} a \times \operatorname{op} b),$$

por tanto

$$(\operatorname{op} a) \times (\operatorname{op} b) = a\,b.$$

Debieron pasar más de mil años entre la aparición y la aceptación de los números negativos. Fue necesario que los matemáticos abandonaran la necesidad de descubrirlos en la naturaleza, y comenzar a verlos como creaciones intelectuales. Luego de esto se vio que los negativos solo provienen de leyes lógicas y aritméticas. Con esto se modificó la creencia de que las matemáticas constituían un cuerpo de verdades acerca de la naturaleza, y se produjo una ruptura entre el mundo de las matemáticas y el mundo real.

Hamilton, en 1835, en su obra *Theory of conjugate functions; on algebra as the science of pure time*, insiste en la dificultad para comprender los números negativos, y en particular las reglas de los signos del producto, y sugiere permanecer en un dominio puramente formal, y evitar toda referencia al mundo físico.

Al contrario, insiste en que, en el dominio de la geometría, es esta referencia al mundo físico lo que nos permite admitir, sin discusión, por ejemplo, el quinto postulado de Euclides sobre las paralelas. El postulado de las paralelas es admitido por todos sin discusión, porque puede *verificarse* físicamente todos los días; la regla de los signos, por el contrario, choca contra el sentido común, y por tanto demanda una justificación sólida.

De todo lo expuesto podemos inferir que las reglas que usamos para manejar números opuestos a los números naturales se pueden usar para los

opuestos de los números racionales, pues los argumentos no dependen de la naturaleza de los números, sino de sus propiedades.

12.4.1.4. División

La división[13] es solo otra manera de escribir la multiplicación, y en consecuencia podemos inferir las reglas para la división de la de aquella; por ejemplo:

$$8 \div 2 = 4 \text{ es otra forma de decir que } 4 \times 2 = 8;$$

similarmente[14],

$$8 \div \mathbb{2} = \mathbb{4} \text{ porque } \mathbb{4} \times \mathbb{2} = 8$$
$$\mathbb{8} \div 2 = \mathbb{4} \text{ porque } \mathbb{4} \times 2 = \mathbb{8}$$
$$\mathbb{8} \div \mathbb{2} = 4 \text{ porque } 4 \times \mathbb{2} = \mathbb{8}$$

Y lo mismo vale con decimales, puesto que

$$\mathbb{3} \div 2 = \mathbb{1{,}5} \text{ es lo mismo que decir } \mathbb{1{,}5} \times 2 = \mathbb{3}.$$

De la misma forma, concluimos que:

$$\frac{\mathbb{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\mathbb{3}+3}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

12.5. Orden

Para dar significado a las relaciones de *ser mayor que* o *ser menor que*, notamos Q al conjunto de los números racionales positivos, y $\mathbb{Q}$ al de sus números opuestos y, de nuevo, separamos los casos:

El primer caso ya está resuelto:

$$a < b \text{ si y solo si existe un } c \in Q \text{ tal que } a + c = b.$$

[13] Debemos insistir en que no es posible dividir por 0.

[14] Antoine Arnauld, un teólogo amigo de Pascal, dice, a propósito de la igualdad

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

"¿Cómo un número más pequeño podría ser a uno más grande como uno más grande a uno más pequeño?". (González, *et al.*, 1990, p. 32).

pues los numerales normales indican los números racionales positivos que conocemos.

Para comparar un número representado con numerales huecos con uno positivo, establecemos con el mismo criterio[15] anterior que:

$$\text{@} < b \text{ si y solo si existe un } c \in Q \text{ tal que } \text{@} + c = b,$$

y tenemos que siempre existe $c = b + a$, que cumple la condición; de manera que *todos lo números notados con numerales huecos son menores que todos los números positivos.*

Si queremos comparar un número positivo con uno escrito con numeral hueco, con el mismo criterio, obtendremos que

$$a < \text{B} \text{ si y solo si existe un } c \in Q \text{ tal que } a + c = \text{B},$$

pero esta situación no se presenta, pues la suma de dos números positivos siempre es un número positivo; nunca uno hueco.

Y finalmente, cuando comparemos dos números representados con numerales huecos, obtenemos que

$$\text{@} < \text{B} \text{ si y solo si existe un } c \in Q \text{ tal que } \text{@} + c = \text{B}.$$

12.5.1. Propiedades del orden

Observemos que en el conjunto formado por los números racionales positivos, los opuestos de ellos y el 0, el criterio para decidir cuándo un número cualquiera es menor que otro es que exista un número positivo que sumado con el menor nos dé como suma el mayor.

Para demostrar que esta relación es *transitiva* debemos probar que, dados números cualesquiera a, b y c, si se cumple que $a < b$ y también se cumple que $b < c$, entonces se cumple que $a < c$.

Prueba: si se cumple que $a < b$, entonces existe un número positivo k tal que $a + k = b$, y si además se cumple que $b < c$, existe también un número positivo d tal que $b + d = c$.

Si remplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

$$(a + k) + d = c$$

[15] ¿Qué sucede si escogemos $\mathbb{c} \in \mathbb{Q}$?

suponiendo la propiedad asociativa de la adición, la igualdad se convierte en

$$a + (k + d) = c$$

lo que significa que $a < c$, puesto que $k + d$ es un número positivo. □

También sabemos que, para dos números diferentes cualesquiera, *solo se tiene una de las situaciones siguientes:*

$$a < b \quad \text{o} \quad b < a,$$

puesto que si

$$a < b, \text{ entonces existe un número positivo } k \text{ tal que } a + k = b,$$

y si además se cumple que

$$b < a, \text{ existe también un número positivo } d \text{ tal que } b + d = a.$$

Por tanto,

$$(a + k) + d = a,$$

lo que implicaría que

$$k + d = 0$$

lo cual es imposible.

Adicionalmente, se cumple la propiedad de *monotonía de la adición*, que establece: dados números cualesquiera a, b, c y d, si

$$a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces } a + c < b + d.$$

Prueba: si

$$a < b, \text{ entonces existe un número positivo } k \text{ tal que } a + k = b,$$

y si además

$$c < d, \text{ existe un número positivo } n \text{ tal que } c + n = d.$$

Si sumamos las dos igualdades, obtenemos:

$$(a + k) + (c + n) = b + d,$$

y suponiendo las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, la anterior igualdad toma la forma

$$(a+c)+(k\ +\ n)=b+d,$$

lo que significa que

$$a+c<b+d.$$ □

Dejamos como ejercicio que el lector demuestre la propiedad monótona de la multiplicación por números positivos: dados números cualesquiera a, b y un número positivo c, si

$$a<b,\ \text{entonces}\ a\cdot c<b\cdot c,$$

y si $\mathbb{d}$ es un número escrito con un numeral hueco y

$$a<b,\ \text{entonces}\ b\cdot \mathbb{d}<a\cdot \mathbb{d}.$$

Este comportamiento diferente de los números representados con numerales huecos con respecto a los números positivos, también generó protestas en el mundo matemático de los siglos XVII, XVIII y XIX. Por ejemplo, Wallis (1616-1703) afirmó:

> [...] la razón de un número positivo a un número negativo debería ser más grande que infinito. El hecho que lo llevo a esta conclusión es que $1/a$ crece infinitamente cuando a tiende a cero. Por tanto, si a es menor que cero la cantidad $1/a$ debe ser negativa y más grande que infinito. (Traducción libre). (Stedall, 2004, p. xxiv).

Tampoco se entendía cómo si,

$$-3<2,$$

es posible que

$$(-3)^2>2^2,$$

a no ser que los números negativos no se comportaran como los positivos, y fuera necesario establecer nuevas reglas (González, *et al.*, 1990, pp. 39-40).

¿Hay diferencias entre las dos clases de números: normales y huecos, positivos y negativos?, o ¿existe algo que caracterice la positividad?

¿Podemos cambiar normales por huecos, y viceversa, o negativos por positivos, y viceversa, o definitivamente lo negativo existe, existen el bien y el mal o solo son puntos de vista?

Si sumamos números del mismo tipo, el resultado es del mismo tipo, si sumamos dos números de distinto tipo, el resultado es del tipo del mayor; si restamos dos del mismo tipo, y el minuendo es menor que el sustraendo, la diferencia es del tipo opuesto. Hasta aquí, no hay diferencia.

Pero si multiplicamos dos números positivos, el resultado es positivo, y si multiplicamos dos números escritos con numerales huecos, el resultado es un número positivo. ¡Ahí está la diferencia!

Diremos que un conjunto es de *números positivos*, si tanto la suma como el producto de ellos es un elemento de ellos mismos, y el conjunto de todos los números está formado por el conjunto de los números positivos, el conjunto de sus opuestos y el 0.

En síntesis, los números que hemos representado con numerales normales son los números positivos, *¡aunque pudimos haber elegido desde el comienzo que fueran los números notados con numerales huecos!*

Capítulo

13

Números irracionales negativos

Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza, haciendo uso exclusivo de su pensamiento.
Albert Einstein

En el capítulo anterior descubrimos los números negativos, diferentes de los números positivos –de hecho, opuestos a estos–, a partir de procesos reversibles; los representamos con numerales normales y con numerales huecos, donde los números de cada clase se comportan como los números naturales o racionales que conocemos, pero al sumar dos números de diferente clase, que representen la misma cantidad, se eliminan unos a otros. Intentamos operar con ellos, y encontramos justificaciones, intuitivas en unos casos y *formales* en los otros, para resultados sorprendentes, especialmente en la multiplicación.

También establecimos criterios para ordenar números representados con numerales normales y con numerales huecos, y mostramos algunas propiedades que cumple el orden, así definido, con respecto a las operaciones.

Finalmente, caracterizamos el conjunto de los números positivos, como un subconjunto de números, donde la suma y el producto entre elementos de este, sea también un elemento del mismo, con lo cual se marca una diferencia explícita con los números negativos, pues al multiplicar dos números negativos el resultado no es un número negativo.

De esta manera, obtenemos números racionales positivos y sus opuestos, pero no tenemos recursos, hasta ahora, para justificar los opuestos de los números irracionales positivos.

En el capítulo 8 empleamos las fracciones continuas infinitas para construir algunos números irracionales, y en el capítulo 9 usamos construcciones con regla y compás para construir otros. Respecto al primero de estos caminos, una exploración interesante es considerar términos negativos en las fracciones continuas, tarea que dejamos al lector, estudiaremos aquí el segundo; es decir, nos valdremos de los recursos de la geometría euclidiana, con el fin de construir y operar los opuestos de algunos números irracionales positivos.

13.1. Números construibles opuestos

Para representar geométricamente los números opuestos a los construibles, que ya hemos mencionado, usaremos una recta, que resulta de prolongar la semirrecta en la que representamos a los números construibles antes tratados, en sentido contrario con respecto al origen, que sigue representando a 0.

En una recta dada, *cualquier* punto puede elegirse como origen, y para representar un número usamos un segmento dirigido, uno de cuyos extremos es el origen, y el otro es el punto que define al número.

Cada punto que se elija como origen en una recta define dos sentidos en ella, de manera que cada segmento, es decir, cada punto, o *cada número, está ubicado en uno y en solo uno de ellos*. Diremos que dos números están *en el mismo sentido*, si al trazar otra recta que pase por el origen, los dos quedan en el mismo semiplano determinado por la recta trazada, y están en sentido contrario si quedan en diferente semiplano.

Elegiremos uno de estos sentidos para representar a los números construibles conocidos, y el otro para sus opuestos. Si un número P está determinado por el segmento $0P$, su opuesto está determinado por el corte de la circunferencia de radio $0P$, con la semirrecta de sentido opuesto[1].

Por ejemplo, elegido un punto origen, que representa el número 0, y otro punto que represente el 1, a la derecha o a la izquierda del cero, trazamos una circunferencia con centro en 0 y radio $\overline{01}$, el otro punto de corte de la

[1]En el capítulo V de la *Aritmetica Universalis*, Newton expresa esta idea en los siguientes términos: "las cantidades son afirmativas, o sea, mayores que nada, o negativas, es decir, menores que la nada. Así, en las cosas humanas las posesiones pueden llamarse bienes positivos pero las deudas bienes negativos (...) Y de la misma manera en geometría, si una línea trazada hacia cualquier dirección se considera afirmativa, la negativa será la que se traza hacia la dirección opuesta" (citado por González, *et al.*, 1990, p. 34).

circunferencia con la recta representa el opuesto del 1, es decir, el -1, como se observa en la figura 13.1.

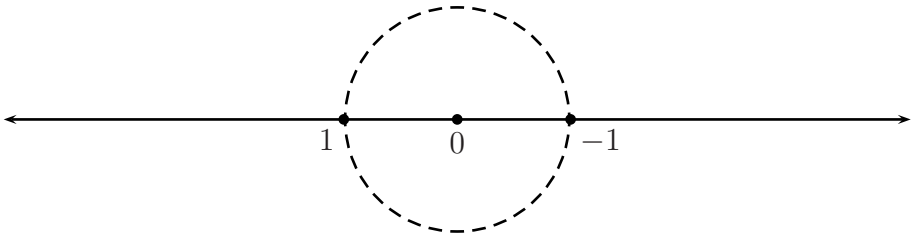


Figura 13.1

$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ están representados en la figura 13.2.

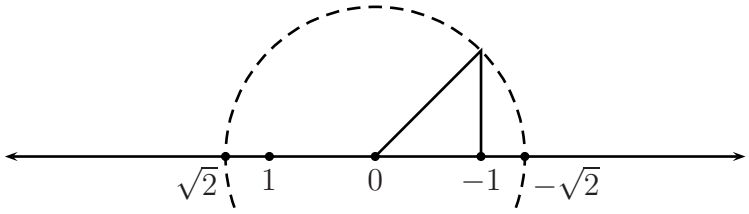


Figura 13.2

De esta manera, podemos representar todos los números construibles, los positivos y sus opuestos. Veamos ahora cómo hacer operaciones con estos números.

13.2. Operaciones entre números construibles opuestos

13.2.1. Adición

Para sumar dos números, sumamos los segmentos correspondientes, colocando uno a continuación del otro, teniendo en cuenta el sentido de los segmentos. La suma es el segmento que se obtiene desde el 0 hasta el punto que define al segundo sumando.

Cuando sumamos números de la misma clase, obtenemos números de la misma clase, pues el segmento suma queda con el mismo sentido (figuras 13.3 y 13.4).

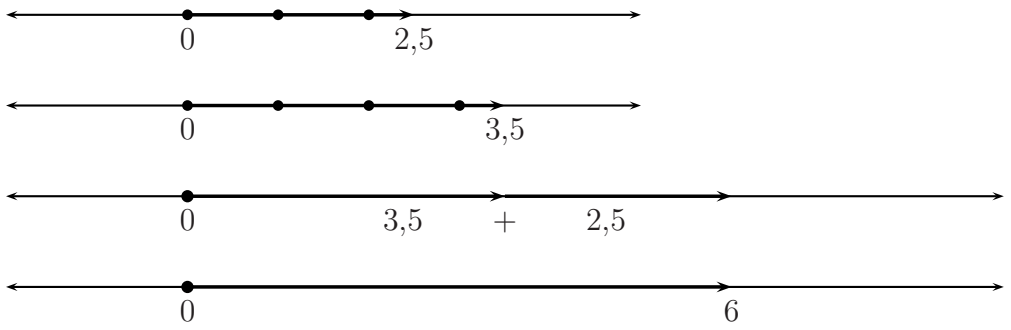


Figura 13.3

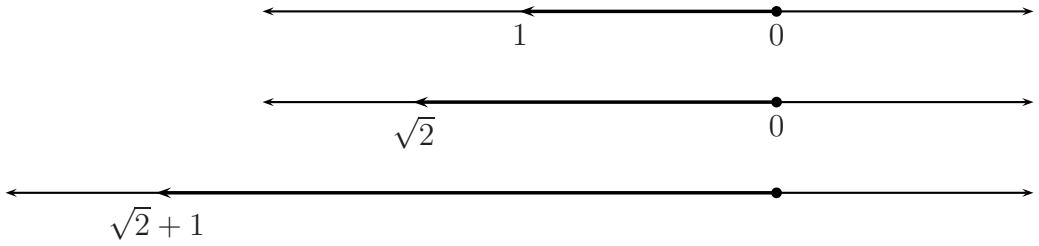


Figura 13.4

Cuando sumamos números de distinta clase, la situación es diferente. Por ejemplo, si sumamos un número con su opuesto (figura 13.5), obtenemos como resultado 0.

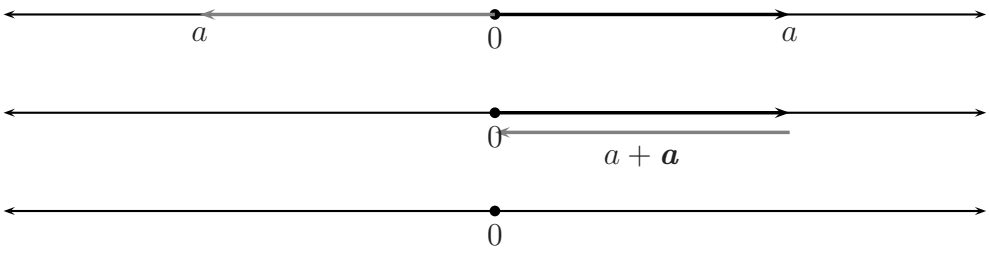


Figura 13.5

En los demás casos, el sentido del resultado de la suma depende del sentido del segmento que sea mayor, como se observa en las figuras 13.6 y 13.7.

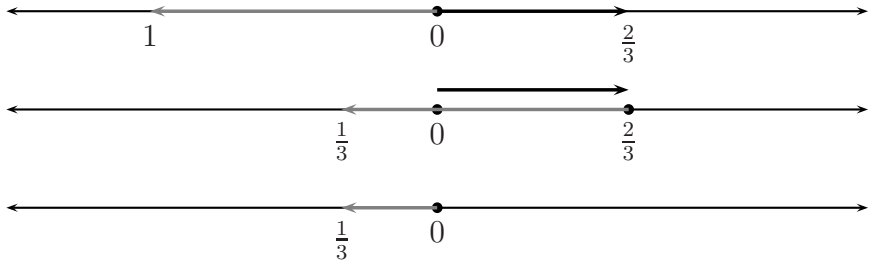


Figura 13.6

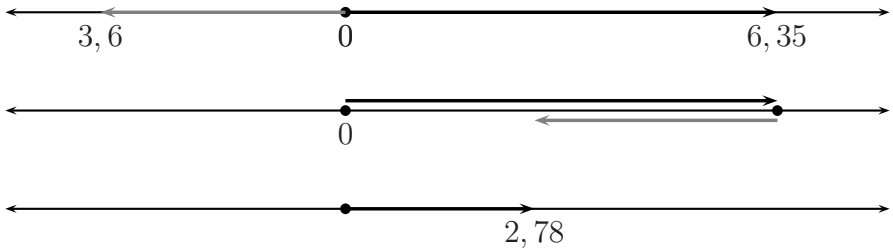


Figura 13.7

13.2.2. Sustracción

Para restar dos números $a - b$, sumamos al número a el opuesto de b; es decir, construimos $a + (-b)$, por ejemplo como se ilustra en las figuras 13.8 y 13.9.

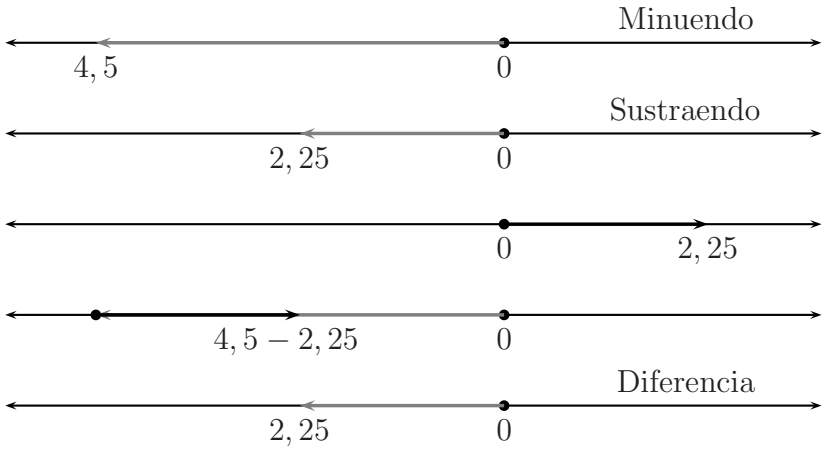


Figura 13.8

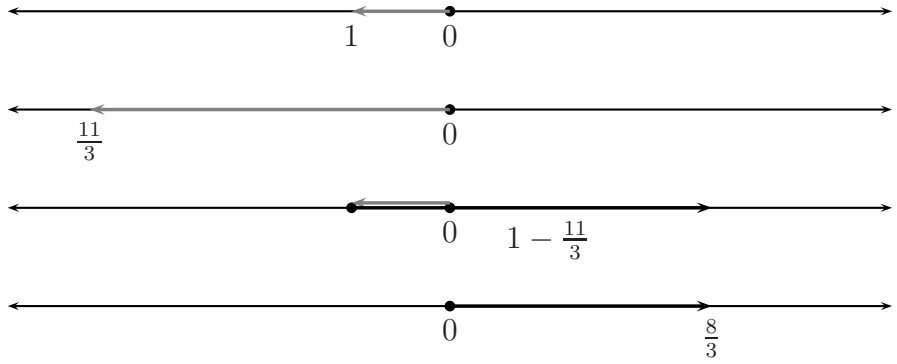


Figura 13.9

Si los dos números, minuendo y sustraendo, son negativos, la situación es similar a la resta de dos números positivos (figura 13.10).

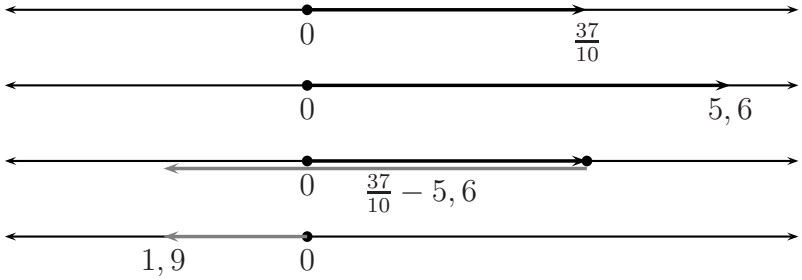


Figura 13.10

Por último, cuando el minuendo y el sustraendo son números de diferente clase, obtenemos resultados como los señalados en las figuras 13.11 y 13.12.

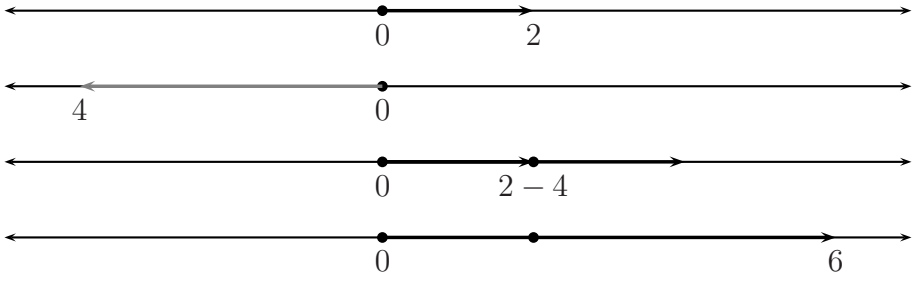


Figura 13.11

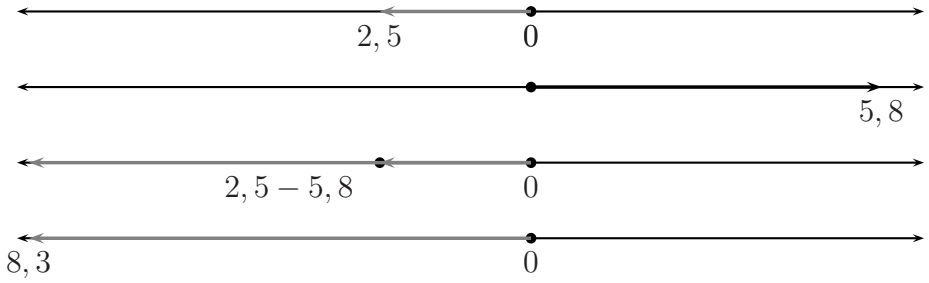


Figura 13.12

Esperamos que el lector tome la iniciativa de desarrollar los algoritmos propuestos con diferentes números construibles, incluso de explorar otras posibles construcciones. El camino avanzado hasta ahora, también debería llevarlo a cuestionarse e intentar caminar solo, sin necesidad de que se planteen ejercicios que lo lleven a ello.

13.2.3. Multiplicación

Para multiplicar números positivos y negativos, repetiremos el procedimiento empleado para multiplicar segmentos, para lo cual emplearemos dos rectas que se intersequen.

El punto de intersección lo llamaremos 0, y a partir de este *elegimos* en cuál sentido, en cada una de las rectas, ubicar los positivos y los negativos[2]. Ubicamos cada factor en una de las rectas y también el 1 en una de ellas; luego trazamos una recta que pase por 1 y el punto de los ubicados anteriormente que no esté en la misma recta, y por último una recta paralela a esta última que pase por el punto que representa el otro factor. El punto de corte de esta paralela con la otra recta, de las iniciales, corresponde al producto buscado.

Por ejemplo, para multiplicar $\mathbb{2} \times \mathbb{3}$:

i. Ubicamos $\mathbb{2}$ en una de las rectas y $\mathbb{3}$ en la otra.

ii. Ubicamos 1 en la recta donde ubicamos el $\mathbb{3}$.

iii. Trazamos una recta que pase por 1 y $\mathbb{2}$.

[2]Puede emplearse el plano cartesiano usual, utilizamos números representados con numerales normales y con numerales huecos para diferenciar los dos tipos de números.

iv. Trazamos una recta paralela a esta última, que pasa por el punto que representa $\mathbb{3}$.

v. El otro punto de corte, es decir 6, es el producto de $\mathbb{2}$ y $\mathbb{3}$.

Lo anterior, representando $\mathbb{2}$ y $\mathbb{3}$ con -2 y -3, lo podemos visualizar en la figura 13.13.

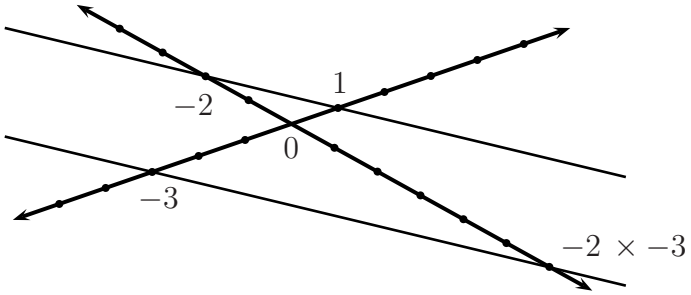


Figura 13.13

Ejercicio

Justifique la construcción anterior ejemplificada en la figura 13.13.

La inclinación de las rectas o la manera de ubicar los positivos y los negativos no alteran el resultado, pues el procedimiento funciona sin tener en cuenta estos detalles. Al fin y al cabo, lo que obtenemos son triángulos semejantes, y de las proporciones que se pueden establecer entre sus lados fácilmente se verifica que el punto que se obtiene es el producto. Por ejemplo, multipliquemos $-\frac{1}{2} \times 3$:

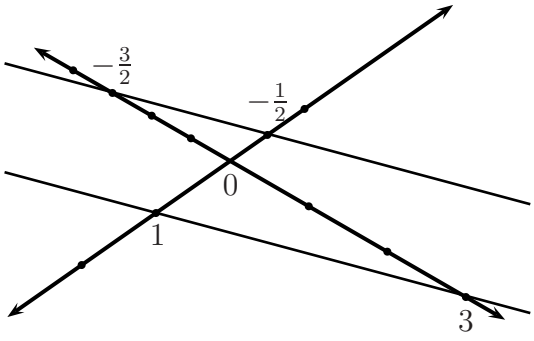


Figura 13.14

Así se verifican, geométricamente, los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior:

Número escrito con numeral normal	×	número escrito con numeral normal	=	número escrito con numeral normal
Número escrito con numeral normal	×	**número escrito con numeral hueco**	=	**número escrito con numeral hueco**
Número escrito con numeral hueco	×	número escrito con numeral normal	=	**número escrito con numeral hueco**
Número escrito con numeral hueco	×	**número escrito con numeral hueco**	=	número escrito con numeral normal

13.2.4. División

Dado que dividir por un número a, no cero, equivale a multiplicar por su inverso $\frac{1}{a}$, el procedimiento para dividir se reduce a construir el segmento $\frac{1}{a}$ y luego multiplicar con la construcción descrita anteriormente. Por ejemplo, para dividir 5 entre 3, primero dibujamos el número $\frac{1}{3}$ y lo multiplicamos por 5:

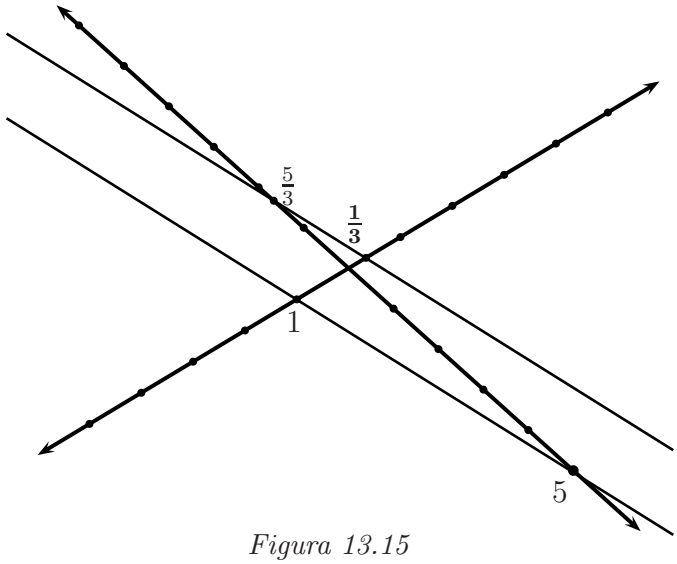


Figura 13.15

De esta manera se pueden verificar los resultados obtenidos en el capítulo anterior:

Número escrito con numeral normal	$\div$	número escrito con numeral normal	$=$	número escrito con numeral normal
Número escrito con numeral normal	$\div$	número escrito con numeral hueco	$=$	número escrito con numeral hueco
Número escrito con numeral hueco	$\div$	número escrito con numeral normal	$=$	número escrito con numeral hueco
Número escrito con numeral hueco	$\div$	número escrito con numeral hueco	$=$	número escrito con numeral normal

13.2.5. Radicación

Únicamente abordaremos el caso de la raíz cuadrada[3], dado que las construcciones geométricas que tenemos solo nos permiten encontrar raíces cuadradas de números positivos. Consideremos, en primer lugar, la raíz cuadrada de un número positivo x, empleando la construcción conocida, sobre la recta en la que estamos representando los números:

i. Ubicamos en la recta el 0, el 1 y el número x.

ii. Construimos los números $1 + x$ y $\dfrac{1+x}{2}$.

iii. Con centro en el número $\dfrac{1+x}{2}$ trazamos una circunferencia con radio[4] $\overline{0\ \dfrac{1+x}{2}}$.

iv. Trazamos una perpendicualr a la recta por el punto 1. El punto de corte de la perpendicular con la circunferencia representa $\sqrt{x}$.

v. Para ubicarlo en la recta donde estamos representando los números, construimos una recta auxiliar que interseque a la primera en el origen, y copiamos allí el segmento.

vi. Trazamos una circunferencia con centro en 0 y radio este segmento. Los puntos de corte de esta circunferencia con la recta determinan la $\sqrt{x}$,

[3]En sentido moderno, la radicación no es una operación, pues no todas ellas tienen una respuesta entre los números construibles.

[4]La notación $\overline{0\ \dfrac{1+x}{2}}$ indica un segmento cuyos extemos son los puntos 0 y $\dfrac{1+x}{2}$.

que para este caso, como se observa en la figura 13.16, son dos: uno positivo y su opuesto.

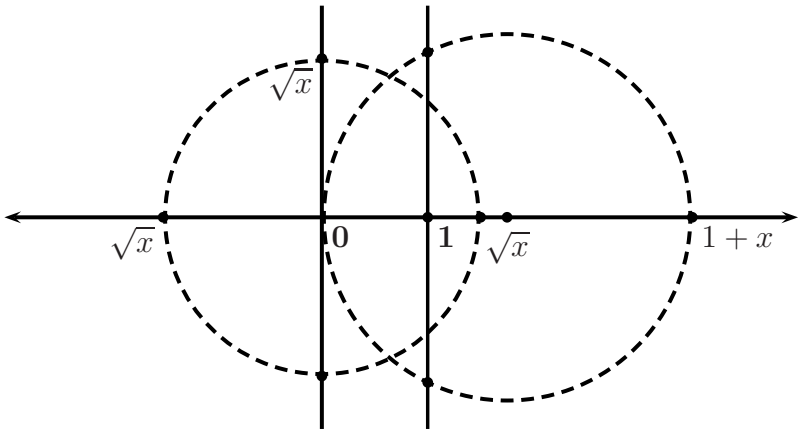


Figura 13.16

Si realizamos el mismo procedimiento para encontrar la raíz cuadrada de un número negativo b, la suma entre b y 1 siempre va a ser menor que 1, y, en consecuencia, la perpendicular a la recta, por 1, no tiene punto(s) de corte con la circunferencia con centro en el punto $\dfrac{1+b}{2}$ y radio el segmento $\overline{0\ \dfrac{1+b}{2}}$, con lo cual se puede verificar que este procedimiento no permite construir la raíz cuadrada de números negativos. Veamos la situación con $\sqrt{-4}$:

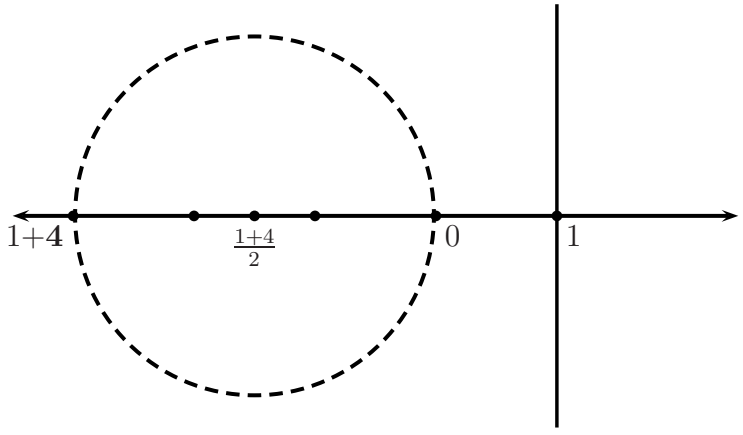


Figura 13.17

Podría pensarse que si realizamos la misma construcción con -1, en lugar de 1, la situación se resolvería; por ejemplo, si para hallar $\sqrt{-4}$, construimos $-1+(-4)$ y trazamos la circunferencia con centro en el punto medio, y levantamos la perpendicular en -1, obtenemos un punto x:

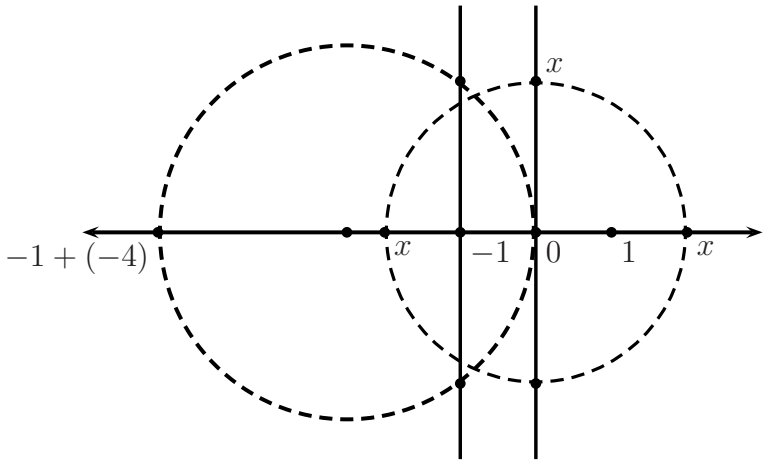


Figura 13.18

Este punto corresponde a la media proporcional entre -1 y -4, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x} &= \frac{x}{-4} \\ -1 \times (-4) &= x^2 \\ \sqrt{4} &= x, \end{aligned}$$

obteniendo así, $\sqrt{4}$ y no $\sqrt{-4}$. Por tanto, la raíz cuadrada de números negativos y, en general, las raíces $\sqrt[2n]{p}$, con p un número negativo, no son construibles con este procedimiento.

Con los números construibles llegamos un poco más lejos que en el capítulo 12, ya que ellos abarcan a los números racionales, a todos los números irracionales cuadráticos y otros irracionales construibles; tenemos, además, la ventaja de disponer de métodos para operarlos, con las mismas propiedades que las operaciones entre números racionales. No obstante, debemos reconocer que nos faltan aún muchos números: los opuestos de los números algebraicos y trascendentes, que también son infinitos.

Requerimos, entonces, un procedimiento para construir el conjunto de los números reales, que incluya a todos los números que conocemos; es decir,

los reales positivos, y sus opuestos; donde se pueda operar con ellos, aunque sean trascendentes, y demostrar las propiedades que cumplen las operaciones, tomando como base lo que hemos construido de los números racionales. Este será nuestro tema de estudio en el próximo capítulo.

Capítulo

14 Números reales: una construcción oficial

En la mayoría de las ciencias, una generación derriba lo que otra ha construido. Solo en matemáticas, cada generación añade un nuevo piso a la vieja estructura.
Hermann Hankel

Hasta ahora, lo que hemos hecho es una construcción intuitiva de los números negativos, bien sea utilizando numerales huecos para distinguirlos de los números reales positivos o valiéndonos de argumentos geométricos; y aunque hemos utilizado las propiedades de las operaciones de los números reales positivos, presumiendo que se cumplen con los números negativos, para intentar definir y dar sentido a las operaciones con estos números, aún no hemos demostrado alguna propiedad en relación con las operaciones de estos números, pues nos hemos concentrado en la búsqueda de formas para tratarlos, paso preliminar a la elaboración de una teoría; es decir, a la elección de unos símbolos y unas reglas para manejarlos, de donde surjan teoremas que antes considerábamos supuestos.

Para presentar un sistema de números que incluya a los números positivos, el cero y a los números negativos, consideraremos dos formas; una, a partir de parejas ordenadas, dentro de la teoría de los números reales no negativos desarrollada en el capítulo 11, la cual abordaremos en este capítulo, y otra, a partir de axiomas, de la que nos ocuparemos en el capítulo 15.

Para la primera presentación; es decir, la correspondiente a parejas ordenadas de números positivos (esto porque fueron los que supusimos cono-

cidos), supondremos que ya fueron construidos los números naturales. Por ejemplo, desde la teoría axiomática de Peano (Luque, Mora y Páez, 2013, pp. 279-311), los números racionales positivos, a partir de parejas ordenadas de números naturales como lo hicimos en el capítulo 6, y los números reales positivos, basados en una modificación de la construcción realizada por Richard Dedekind para la formalización de los números reales, como lo hicimos en el capítulo 11. Es decir, para esta construcción, partiremos de las propiedades ya conocidas de los números reales no negativos, recordemos sus propiedades básicas:

Para la adición:

- Propiedad asociativa.
- Existencia de elemento idéntico.
- Propiedad cancelativa.
- Propiedad conmutativa.

Para la multiplicación:

- Propiedad asociativa.
- Propiedad modulativa o existencia de elemento neutro.
- Existencia de inversos multiplicativos.
- Propiedad conmutativa.

Y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición de números reales positivos.

Con base en ellas, haremos la formalización de los números reales, incluyendo aquí los números negativos[1], definiendo las operaciones de adición y multiplicación, de las cuales demostraremos sus propiedades.

[1] A finales del siglo XIX e inicios del siglo XX se construyeron diversas teorías matemáticas para formalizar los números negativos, más específicamente para formalizar los números enteros, esto como consecuencia de los fallidos intentos por dar significado a partir de la realidad física a los números negativos. Todas las teorías pretendían que los números enteros fueran una extensión de la aritmética de los números naturales. La presentación de los números enteros más conocida es la de Herman Hankel, quien, en los preliminares de su obra *Teoría del Sistema de los Números Complejos* (1867), presenta una teoría formal para los negativos rompiendo la idea de la relación entre matemáticas

Tengamos en cuenta que los números negativos no surgen de necesidades prácticas sino de necesidades teóricas, buscamos un sistema de números donde todas las sustracciones sean posibles, así como definir los números racionales positivos a partir de parejas de números naturales permitió que todas las divisiones, excepto por cero, fueran posibles.

Recordemos cuando en páginas anteriores requeríamos restar $3-\mathfrak{5}$, basados en el juego de las escondidas francesas, recurrimos a incluir la pareja $5+\mathfrak{5}$, para obtener:

$$3-\mathfrak{5}=(5+\mathfrak{5})+(3-\mathfrak{5})=(\mathfrak{5}-\mathfrak{5})+(5+3)=8.$$

Sin embargo, podríamos haber recurrido a otra pareja; por ejemplo:

$$3-\mathfrak{5}=(6+\mathfrak{6})+(3-\mathfrak{5})=(\mathfrak{6}-\mathfrak{5})+(6+3)=\mathfrak{1}+9=8,$$

o, en general, a la pareja $a+\mathfrak{a}$, siempre que $\mathfrak{a}$ fuera mayor o igual a $\mathfrak{5}$, para nuestro ejemplo. Esto nos lleva a concluir que tenemos infinitas parejas de números que representan el mismo número; en este caso

$$6+\mathfrak{6}=5+\mathfrak{5}=7+\mathfrak{7}=\cdots=a+\mathfrak{a},$$

donde todas las parejas representan el mismo número, el 0.

También sabemos que $6+\mathfrak{6}=6-6$, pues los números escritos con numerales normales fueron los que admitimos construidos, resumidamente:

$$6-6=5-5=7-7=\cdots=a-a=0.$$

Y obviamente, no solo el cero es la diferencia de infinitas parejas de números positivos; el 1, por ejemplo, lo podemos expresar como sigue:

$$7-6=6-5=8-7=\cdots=(a+1)-a=1.$$

Cualquier número no negativo, de los que hemos construido, lo podemos escribir como infinitas sustracciones de otros dos números no negativos.

Sin embargo, tenemos algunas restas de números no negativos, cuya diferencia no resulta un número de los conocidos, por ejemplo:

$$5-8=(\mathfrak{8}+8)+(5-8)=\mathfrak{8}+5=\mathfrak{3},$$

y realidad física que persistía en el pensamiento matemático de finales del siglo XIX, aludiendo al principio de permanencia de Peacock. Otras de las citadas en la literatura son las de Dedekind (alrededor de 1870), Kronecker (1887), Méray (alrededor de 1870) y Padoa (1900).

el resultado es un número de los que hemos representado con numerales huecos, que corresponde a los números que deseamos incluir en la construcción del nuevo sistema numérico, basado solamente en los números reales no negativos.

De nuevo es conveniente que elijamos una notación adecuada para los números que deseamos construir.

Por lo que hemos visto, intuimos que todo número real se puede representar como una sustracción entre dos números reales positivos; por ejemplo, el número real dos (2) puede escribirse como[2]

$$2 - 0 \quad \text{o} \quad 3 - 1 \quad \text{o} \quad 4 - 2 \quad \text{o} \quad \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad (\sqrt{2} + 2) - \sqrt{2} \quad \text{o} \quad \cdots$$

Esto significa que cada número real lo podemos representar como parejas de números reales no negativos. Para el ejemplo anterior:

$$2 = (2, 0) = (3, 1) = (4, 2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left((\sqrt{2} + 2), \sqrt{2}\right) = \cdots$$

Y como vemos, hay infinitas parejas que representan el mismo número, pero debemos evitar usar sustracciones, pues en los números no negativos, estas no están definidas para todo par de números.

Si la pareja (a, b) representa el mismo número que la pareja (c, d) entonces debemos tener que $a-b = c-d$, pero esto se puede expresar como $a+d = b+c$.

En conclusión, decimos que una pareja (a, b) es equivalente a otra pareja (c, d), donde a, b, c y d son números reales no negativos, cuando $a+d = b+c$, en símbolos:

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ si y solo si } a + d = b + c.$$

Si representamos en un plano algunas de estas parejas, observamos que cada número real está determinado por una recta, como se observa en la figura 14.1.

[2]Cada uno de los términos deberían escribirse como un número normal; sin embargo, en adelante omitiremos esta distinción, pues solo trabajaremos con números no negativos.

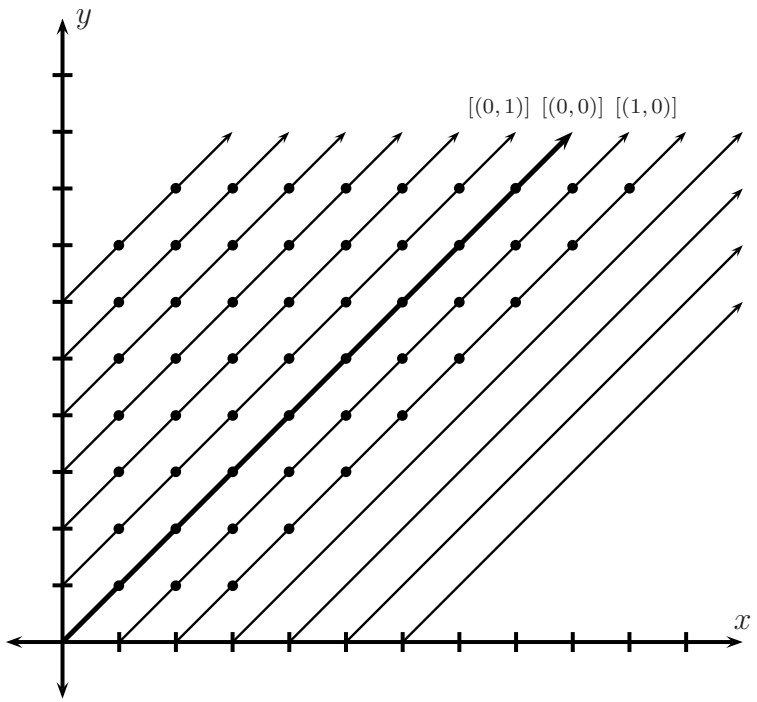


Figura 14.1

14.1. Relación de equivalencia entre parejas de números reales no negativos

Para ver que estas parejas[3] definen clases de equivalencia donde cada clase representa un solo número, demostraremos que la anterior relación es de equivalencia.

1. *Reflexiva:* para toda pareja (a, b) con a, b números reales no negativos, se debe cumplir que $(a, b) \approx (a, b)$.

Prueba: como $a + b = b + a$, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la adición de números reales no negativos (ya demostrada a partir de las

[3]Las teorías que surgieron para formalizar los números enteros se clasifican en dos: aquellas que se basan en los números naturales como cardinales y las que se fundamentan en su ordinalidad. La teoría de las parejas ordenadas, o teoría de los pares, forma parte de las del primer tipo, y surge de la idea intuitiva de que los números negativos hacen que siempre sea posible encontrar la diferencia entre dos números dados.

cortaduras de Dedekind), se tiene que $(a, b) \approx (a, b)$. □

2. *Simétrica:* si $(a, b) \approx (c, d)$, entonces $(c, d) \approx (a, b)$.

Prueba: supongamos que $(a, b) \approx (c, d)$, esto significa que $a + d = b + c$, de donde $b + c = a + d$. Y utilizando la propiedad conmutativa de la adición entre números reales no negativos, tenemos que $c + b = d + a$, lo que quiere decir que $(c, d) \approx (a, b)$. □

3. *Transitiva:* si $(a, b) \approx (c, d)$ y $(c, d) \approx (e, f)$, entonces $(a, b) \approx (e, f)$.

Prueba: supongamos que $(a, b) \approx (c, d)$ y $(c, d) \approx (e, f)$, entonces tenemos que

$$a + d = b + c \quad \text{y} \quad c + f = e + d.$$

Si sumamos término a término las igualdades; obtenemos:

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e),$$

de donde, por las propiedades conmutativa, asociativa y cancelativa de la adición entre números reales no negativos, tenemos

$$a + f = b + e$$

lo que significa que $(a, b) \approx (b, e)$. En consecuencia la relación $\approx$ es de equivalencia. □

Debido a que hay varias parejas de números reales no negativos que representan el mismo número real, lo realmente importante no son las parejas de números reales, sino las familias de parejas equivalentes entre sí. Llamaremos, entonces, un *número real* x a una familia de parejas equivalentes (a, b) de números reales no negativos, las cuales representaremos como $[(a, b)]$; esto es, la clase de equivalencia[4] de la pareja (a, b). Al conjunto de los números reales lo notaremos $\mathbb{R}$.

[4]Esta idea de construir la teoría usando pares ordenados fue de Hankel en 1867, quien se basó en la teoría de los números complejos como parejas ordenadas de números reales, hecha por Hamilton. Matemáticos como O. Stolz en 1885 y Tannery en 1886, también desarrollaron la idea, pero fue finalmente Richard Dedekind quien definió una relación de "equisustractividad"entre parejas de números naturales, sin utilizar la sustracción, así $a - b = c - d$ si y solo si $a + d = b + c$, y demostró que dicha relación es de equivalencia, lo que utilizó para definir los números enteros como el conjunto de las clases de equivalencia asociada a la definición establecida. Dedekind también determina dos operaciones: adición y multiplicación; la existencia de elementos neutros para las dos operaciones en cuestión y los elementos inversos; además establece el isomorfismo entre los números enteros positivos y los números naturales (González, *et al.*, 1990, pp. 48-51).

14.2. Operaciones entre números reales

Como hemos visto, un número real es una clase de equivalencia de la relación $\approx$, por tanto la adición de números reales debe definirse como una suma de clases; es lo que haremos enseguida.

14.2.1. La adición

Sean $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$ números reales, su suma, notada con $\oplus$ está definida por:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a+c, b+d)].$$

Veamos las propiedades que cumple esta operación.

Ejercicio

Plantee cada una de las propiedades enunciadas y haga sus propias demostraciones; luego compárelas con las aquí propuestas. Le sugerimos no iniciar leyéndolas, no es tan formativo como el ejercicio que le proponemos.

14.2.1.1. Propiedad asociativa

Debemos demostrar que para todo $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)]$, números reales, se tiene que:

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\}.$$

Prueba: partiendo del lado izquierdo de la igualdad tenemos

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = \{[(a+c, b+d)]\} \oplus [(e,f)],$$

por la definición de adición entre números reales. Ahora, aplicando nuevamente la misma definición:

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [((a+c)+e, (b+d)+f)],$$

y utilizando la propiedad asociativa de la adición para números reales no negativos, obtenemos

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a+(c+e), b+(d+f))].$$

Lo que, por la definición de adición entre números reales, queda:

$$\{[(a,b)] \oplus [(c,d)]\} \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus [(c+e, d+f)]$$
$$([(a,b)] \oplus [(c,d)]) \oplus [(e,f)] = [(a,b)] \oplus \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\},$$

que es lo que deseábamos demostrar. □

14.2.1.2. Existencia de elemento idéntico para la adición

Para todo $[(a,b)]$ en el conjunto de los números reales existe un número real $[(x,y)]$ tal que:

$$[(a,b)] \oplus [(x,y)] = [(a,b)].$$

De la igualdad anterior, deducimos que

$$[(a+x, b+y)[= [(a,b)],$$

lo que implica, por la definición de la relación de equivalencia, que

$$(a+x)+b = (b+y)+a,$$

de donde, utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y cancelativa de la adición entre números reales no negativos, obtenemos

$$x = y.$$

Esto significa que el elemento idéntico para la adición es $[(x,x)]$; es decir que, para todo número real $[(a,b)]$, existe un número real $[(x,x)]$, tal que:

$$[(a,b)] \oplus [(x,x)] = [(a,b)].$$

Prueba:

$$[(a,b)] \oplus [(x,x)] = [(a+x, b+x)],$$

de acuerdo con la definición de adición entre números reales. Además,

$$[(a+x, b+x)] = [(a,b)],$$

pues $(a+x, b+x) \approx (a,b)$, ya que $(a+x)+b = (b+x)+a$. □

14.2.1.3. Existencia de elementos inversos aditivos

En el conjunto de los números reales con la adición, para todo número real $[(a,b)]$, existe el número real $[(b,a)]$, tal que $[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(x,x)]$. Notaremos $[(b,a)] = -[(a,b)]$.

Prueba:

$$[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(a+b, b+a)],$$

por la definición de adición entre números reales, pero $(a+b, a+b) \approx (x,x)$; es decir, pertenecen a la misma familia; luego:

$$[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(x,x)],$$

y esto finaliza nuestra demostración. □

Ejercicio

Demuestre la propiedad cancelativa de la adición para la adición entre números reales; esto es, para todo $[(a,b)], [(c,d)]$ *y* $[(x,y)]$ *números reales, se tiene que*

$$\textit{Si } [(a,b)] \oplus [(x,y)] = [(c,d)] \oplus [(x,y)], \textit{ entonces } [(a,b)] = [(c,d)].$$

14.2.1.4. Propiedad conmutativa

Vamos a demostrar que para todo $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, números reales, se tiene que:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(c,d)] \oplus [(a,b)].$$

Prueba: si partimos del lado izquierdo de la igualdad y aplicamos la definición de adición, tenemos:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a+c, b+d)],$$

lo cual equivale a

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(c+a, d+b)],$$

según la propiedad conmutativa de la adición entre números reales no negativos.

De lo anterior, tenemos que

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(c,d)] \oplus [(a,b)],$$

por la definición de adición entre números reales, que corresponde con lo que queríamos demostrar. □

14.2.2. La multiplicación

La multiplicación entre números reales se define[5] de la siguiente forma:

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)].$$

Veamos cuáles propiedades cumple esta operación.

14.2.2.1. Propiedad asociativa

Para todo $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ y $[(e,f)]$, números reales, se tiene que:

$$\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = [(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \otimes [(e,f)]\}.$$

Prueba: por la definición de multiplicación, tenemos que

$$\begin{aligned}\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] &= [(ac+bd, ad+bc)] \otimes [(e,f)] \\ &= [((ac+bd)e + (ad+bc)f, (ac+bd)f + (ad+bc)e)].\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición entre números reales no negativos:

$$\begin{aligned}&\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = \\ &\quad \big[\big(((ac)e + (bd)e) + ((ad)f + (bc)f), ((ac)f + (bd)f) + ((ad)e + (bc)e)\big)\big].\end{aligned}$$

De lo cual, haciendo uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y de la multiplicación entre números reales no negativos, tenemos:

$$\begin{aligned}&\{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \otimes [(e,f)] = \\ &\quad \big[\big((a(ce) + a(df)) + (b(cf) + b(de)), (a(cf) + a(de)) + (b(ce) + b(df))\big)\big].\end{aligned}$$

[5] Aunque parece un poco extraña esta definición la podemos justificar si pensamos la pareja (a,b) representando $a-b$ y la pareja (c,d) representando $c-d$ entonces la pareja correspondiente al producto debería representar a $(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc)$.

Ahora, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición de números reales no negativos:

$$\{[(a,b)]\otimes[(c,d)]\}\otimes[(e,f)] = \big[\big(a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df)\big)\big].$$

De donde, aplicando dos veces la definición de multiplicación de números reales, obtenemos:

$$\{[(a,b)]\otimes[(c,d)]\}\otimes[(e,f)] = [(a,b)]\otimes\{[(c,d)]\otimes[(e,f)]\}. \qquad \square$$

14.2.2.2. Existencia de elemento idéntico para la multiplicación

En el conjunto de los números reales existe un elemento $[(x,y)]$, tal que al ser multiplicado por cualquier otro número real $[(a,b)]$, da como resultado el mismo número real $[(a,b)]$; esto es, para todo $[(a,b)]$ en $\mathbb{R}$,

$$[(a,b)]\otimes[(x,y)] = [(a,b)].$$

Primero, encontremos ese elemento idéntico; es decir, supongamos que la igualdad anterior se cumple, entonces:

$$[(ax+by, ay+bx)] = [(a,b)].$$

Esto implica que

$$(ax+by)+b = (ay+bx)+a,$$

lo que significa que

$$ax+b(y+1) = a(y+1)+bx,$$

de donde deducimos que $x = y+1$; esto es, el elemento idéntico de la multiplicación es

$$[(y+1,y)].$$

En resumen, para todo $[(a,b)] \in \mathbb{R}$, existe $[(y+1,y)]$, también en $\mathbb{R}$, tal que:

$$[(a,b)]\otimes[(y+1,y)] = [(a,b)].$$

Prueba: aplicando la definición de multiplicación entre números reales, tenemos:

$$[(a,b)]\otimes[(y+1,y)] = [(a(y+1)+by, ay+b(y+1)].$$

Ahora, a partir de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición entre números reales no negativos:

$$[(a,b)] \otimes [(y+1,y)] = [((ay+a)+by, ay+(by+b)].$$

Haciendo uso de la propiedad asociativa de la adición de números reales no negativos y, nuevamente, de la distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$[(a,b)] \otimes [(y+1,y)] = [((a+b)y+a, (a+b)y+b)].$$

Y como $((a+b)y+a)+b = ((a+b)y+b)+a$, entonces

$$[((a+b)y+a, (a+b)y+b)] = [(a,b)],$$

por tanto,

$$[(a,b)] \otimes [(y+1,y)] = [(a,b)],$$

tal como se quería mostrar. □

14.2.2.3. Existencia de inversos multiplicativos

Como en los números racionales, para todo número real $[(a,b)]$, diferente de $0 = [(c,c)]$, existe $[(a,b)]^{-1}$, también notado $\dfrac{1}{[(a,b)]}$, tal que:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(y+1,y)].$$

Para probar la existencia de un inverso multiplicativo para cada número real $[(a,b)]$ diferente de 0, notemos que los podemos expresar de tal manera que la pareja elegida como representante tenga alguno de sus elementos igual a 0; esto es, si

$$a > b, \quad [(a,b)] = [(a-b,0)],$$

y si

$$a < b, \quad [(a,b)] = [(0,b-a)].$$

En el primer caso están los números positivos y en el segundo los negativos. De esta manera, el inverso multiplicativo de $[(a,b)]$ tiene una de las siguientes formas:

$$[(a,b)]^{-1} = \begin{cases} [(a-b,0)]^{-1} = \left[\left(\dfrac{1}{a-b}\,,0\right)\right] & \text{si } a > b \\ \\ [(0,b-a)]^{-1} = \left[\left(0\,,\dfrac{1}{b-a}\right)\right] & \text{si } a < b, \end{cases}$$

esto significa que el inverso multiplicativo de un número positivo es positivo y el inverso multiplicativo de un número negativo es negativo.

Prueba: Caso 1: si $a > b$,

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(a-b,0)] \otimes \left[\left(\frac{1}{a-b}\,,0\right)\right],$$

por la definición anterior.

Teniendo en cuenta la definición de multiplicación para números reales:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = \left[\left(\frac{a-b}{a-b},0\right)\right].$$

Y por la propiedad del inverso multiplicativo entre números reales no negativos, tenemos:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(1,0)].$$

Pero según la definición de la relación de equivalencia definida, $(1,0) = (y+1,y)$, por tanto:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(y+1,y)],$$

tal como deseábamos demostrar.

Caso 2: si $a < b$,

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(0\,,b-a)] \otimes \left[\left(0\,,\frac{1}{b-a}\right)\right].$$

Por la definición de multiplicación entre números reales:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = \left[\left(\frac{b-a}{b-a}\,,0\right)\right] = [(1,0)].$$

Y como $(1,0) = (y+1,y)$, tenemos que:

$$[(a,b)] \otimes [(a,b)]^{-1} = [(y+1,y)],$$

que es lo que queríamos demostrar. □

14.2.2.4. Propiedad conmutativa

Demostremos que la propiedad conmutativa de la multiplicación entre números reales se cumple; esto significa que si $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$ son números reales, se tiene que:

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(c,d)] \otimes [(a,b)].$$

Prueba: partiendo del lado izquierdo de la igualdad,

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)],$$

según la definición de multiplicación entre números reales.

Además, por la propiedad conmutativa de la multiplicación y de la adición de números reales no negativos:

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(ca+db, cb+da)].$$

Y nuevamente, por la definición de multiplicación entre números reales:

$$[(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(c,d)] \otimes [(a.b)].$$ □

14.2.2.5. Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Dados los números $[(a,b)]$, $[(c,d)]$, $[(e,f)]$ reales, se cumple que:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \otimes [(e,f)]\}.$$

Prueba: por la definición de adición entre números reales, tenemos que:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [(a,b)] \otimes [(c+e, d+f)].$$

Ahora, por la definición de multiplicación de números reales, obtenemos:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [(a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e))]$$

lo que es equivalente a

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [((ac+ae)+(bd+bf), (ad+af)+(bc+be))],$$

de acuerdo con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición entre números reales no negativos.

Si utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa de la adición entre números reales no negativos, obtenemos:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [((ac+bd)+(ae+bf),(ad+bc)+(af+be))].$$

Esto último lo podemos escribir como:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = [(ac+bd,ad+bc)] \oplus [(ae+bf,af+be)],$$

según la definición de adición entre números reales.

Ahora, por la definición de multiplicación entre números reales, tenemos:

$$[(a,b)] \otimes \{[(c,d)] \oplus [(e,f)]\} = \{[(a,b)] \otimes [(c,d)]\} \oplus \{[(a,b)] \otimes [(e,f)]\},$$

que es lo que pretendíamos demostrar. □

14.2.3. Definición de división entre números reales

Para todo par de números reales $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, con $[(c,d)] \neq 0$, definimos la división entre $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$ por la expresión:

$$[(a,b)] \div [(c,d)] = [(a,b)] \otimes [(c,d)]^{-1}.$$

14.3. Orden en los números reales

Así como hemos definido las operaciones entre números reales a partir de los números ya construidos, el orden entre números reales también lo definimos desde los números reales no negativos; esto es, decimos que dos números reales $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$,

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ si y solo si } a+d \leq b+c.$$

Veamos que esta relación es de orden; es decir, demostremos que la relación definida es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. *Reflexiva:* para todo número real $[(a,b)]$, se cumple que $[(a,b)] \leq [(a,b)]$.

   Prueba: por la propiedad conmutativa de la adición entre números reales no negativos y la propiedad reflexiva de la relación de orden entre dichos números, tenemos que

   $$a+b \leq b+a,$$

lo que, por definición de la relación de orden dada anteriormente,

$$[(a,b)] \leq [(a,b)].$$ □

2. *Antisimétrica:* dados dos números reales cualesquiera $[(a,b)]$ y $[(c,d)]$, si se tiene que

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ y } [(c,d)] \leq [(a,b)], \text{ entonces } [(a,b)] = [(c,d)].$$

Prueba: si tenemos que

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ y } [(c,d)] \leq [(a,b)],$$

entonces

$$a+d \leq b+c \text{ y } c+b \leq a+d;$$

por la propiedad conmutativa de la adición entre números reales no negativos y la propiedad antisimétrica del orden entre números reales no negativos, concluimos que

$$a+d = b+c,$$

esto es,

$$[(a,b)] = [(c,d)].$$ □

3. *Transitiva:* dados números reales cualesquiera $[(a,b)]$, $[(c,d)]$ y $[(e,f)]$, si se cumple que

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ y } [(c,d)] \leq [(e,f)],$$

entonces debe cumplirse que

$$[(a,b)] \leq [(e,f)].$$

Prueba: si se cumple que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ y $[(c,d)] \leq [(e,f)]$, entonces

$$a+d \leq b+c \text{ y } c+f \leq d+e.$$

Si sumamos término a término ambas desigualdades, obtenemos:

$$(a+d)+(c+f) \leq (b+c)+(d+e),$$

de donde, por la propiedad asociativa y conmutativa de la adición entre números reales no negativos:

$$(a+f)+(c+d) \leq (b+e)+(c+d).$$

Y como $c+d \leq c+d$, entonces

$$a+f \leq b+e.$$

Esto significa que $[(a,b)] \leq [(e,f)]$, tal como lo queríamos demostrar. □

Ahora demostremos otras propiedades derivadas de la relación de orden:

4. *Monotonía de la adición de números reales:* dados números reales $[(a,b)]$, $[(c,d)]$, $[(e,f)]$ y $[(g,h)]$, si se tiene que

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ y } [(e,f)] \leq [(g,h)],$$

entonces:

$$[(a,b)] \oplus [(e,f)] \leq [(c,d)] \oplus [(g,h)].$$

Prueba: si partimos de que $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ y $[(e,f)] \leq [(g,h)]$, obtenemos:

$$a+d \leq b+c \quad \text{y} \quad e+h \leq f+g.$$

Sumando estas dos desigualdades término a término (propiedad de monotonía de la adición entre números reales no negativos), encontramos que:

$$(a+d)+(e+h) \leq (b+c)+(f+g).$$

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la adición entre números reales no negativos, tenemos:

$$(a+e)+(d+h) \leq (c+g)+(b+f),$$

lo que, por definición de adición entre números reales, equivale a:

$$[(a,b)] \oplus [(e,f)] \leq [(c,d)] \oplus [(g,h)],$$

con lo cual finaliza nuestra demostración. □

5. *Monotonía de la multiplicación de números reales por un número positivo:* dados dos números reales cualesquiera $[(a,b)]$, $[(c,d)]$,

si

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ y } [(e,f)] \geq [(x,x)],$$

entonces

$$[(a,b)] \otimes [(e,f)] \leq [(c,d)] \otimes [(e,f)].$$

Prueba: si $[(a,b)] \leq [(c,d)]$, entonces $a+d \leq b+c$; multiplicando a ambos lados de la desigualdad por e, y luego por f, obtenemos:

$$e(a+d) \leq e(b+c) \tag{1}$$

$$f(a+d) \leq f(b+c), \tag{2}$$

respectivamente.

Además, como

$$[(e,f)] \geq [(x,x)],$$

entonces

$$x+f \leq x+e.$$

En particular, si $x=0$, tenemos que $f \leq e$; esto significa que $e-f \geq 0$, luego, restando (2) de (1):

$$e(a+d) - f(a+d) \leq e(b+c) - f(b+c),$$

lo que equivale a:

$$e(a+d) + f(b+c) \leq e(b+c) + f(a+d),$$

de donde tenemos:

$$(ea+ed) + (fb+fc) \leq (eb+ec) + (af+fd),$$

aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición entre números reales no negativos.

Ahora, utilizando las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números reales no negativos y la propiedad conmutativa de la multiplicación en ese mismo conjunto, nos queda:

$$(ae+bf) + (cf+de) \leq (ce+df) + (af+be),$$

lo cual, de acuerdo con la definición $\leq$ entre números reales, es equivalente a:

$$[(ae + bf, af + be)] \leq [(ce + df, cf + de)],$$

y esto se reduce a:

$$[(a, b)] \otimes [(e, f)] \leq [(c, d)] \otimes [(e, f)],$$

según la definición de multiplicación entre números reales. $\square$

Capítulo

15 Axiomatización de los números reales

Las matemáticas no estudian los objetos,
sino las relaciones entre los objetos.
Henri Poincaré

Como mencionamos en los primeros capítulos, una presentación axiomática de una teoría matemática consta de unos *términos no definidos*, también llamados *conceptos primitivos* –no susceptibles de definición– y un *conjunto de axiomas o proposiciones primeras* (Rey Pastor, Calleja y Trejo, 1958, p. 10) que son relaciones entre los términos no definidos y que aceptamos como ciertas. De los axiomas deducimos otras afirmaciones que llamamos *teoremas*; siguiendo una manera de razonar, basada en la lógica, generalmente, la lógica bivalente o lógica clásica[1].

En el caso que nos ocupa, suponemos que existen unos entes que llamamos números reales, dos operaciones básicas que llamamos *suma* y *multiplicación* y una *relación de orden*; aceptamos como ciertos algunos axiomas, hacemos unas definiciones y, luego, deducimos reglas y teoremas que ellos cumplen.

Los axiomas de los números reales se clasifican en tres grupos: *de campo* (hacen referencia a las propiedades básicas que cumplen los números reales con las operaciones definidas), *de orden* (que establecen los criterios para comparar los números, identificando cuándo un número es mayor, menor o

[1]El ajedrez es similar a la presentación axiomática, en el sentido de que las piezas del juego se caracterizan por sus movimientos mas no por su forma o nombre; podríamos incluso jugar ajedrez sin tablero y fichas materiales, solo requerimos respetar las reglas.

igual que otro), y uno *de completitud* (que nos permite introducir los números irracionales y estudiar las propiedades de completitud de los números reales)[2].

Intente hacer sus propias demostraciones para cada uno de los teoremas que se desarrollan en esta presentación axiomática, antes de leer las demostraciones aquípropuestas. De seguro, descubrirá caminos interesantes y al comparar sus planteamientos con las demostraciones de este capítulo, encontrará nuevas ideas y maneras de razonar en matemáticas que fortalecerán su proceso de aprendizaje.

15.1. Axiomas de campo

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones: la adición $(+)$ y la multiplicación $(\times)$; ellas satisfacen los siguientes axiomas:

La pareja $(\mathbb{R}, +)$ es un *grupo abeliano*; esto significa que:

C1. Si a, b son números reales, entonces $a + b$ es un número real[3].

C2. *Propiedad asociativa de la adición:* si a, b, c son números reales, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

C3. *Existe un elemento idéntico e para la adición en el conjunto de los números reales,* y es tal que, para cualquier número real a se cumple que:

$$a + e = e + a = a.$$

Teorema 1. El elemento idéntico e de la suma es único.

[2]La presentación axiomática de los números reales hecha originalmente por Hilbert establece cuatro grupos de axiomas: de conexión, de cálculo, de ordenación y de completitud (aunque estos eran llamados de continuidad, por el matemático).

[3]Muchos textos que hacen una presentación axiomática de los números reales excluyen este primer axioma y el análogo a este con la multiplicación, dado que al determinar la adición y la multiplicación como operaciones, en el sentido moderno, no los requieren; sin embargo, Hilbert, en su versión axiomática de $\mathbb{R}$, sí los incluye dentro del primer conjunto de axiomas; nosotros también lo incluiremos dado que no hemos definido qué es una operación.

Prueba: supongamos que existen dos números reales e y e' que cumplen el axioma C3, entonces

$$e + e\text{'} = e\text{'} \qquad \text{porque } e \text{ es elemento idéntico}$$

$$e + e\text{'} = e \qquad \text{porque } e\text{' es elemento idéntico}$$

lo que implica que $e = e$', por ser los dos iguales a un mismo número. □

Como en los números reales hay un solo elemento idéntico lo notaremos 0.

C4. Para todo número real a *existe* un número real y que llamamos *inverso aditivo* de a u *opuesto* de a, tal que: $a + y = y + a = 0$.

Teorema 2. El inverso aditivo de un número es único.

Prueba: supongamos que hay dos inversos aditivos y y y' para el mismo número x, entonces

$$y = y + 0 = y + (x + y\text{'}) = (y + x) + y\text{'} = 0 + y\text{'} = y\text{'}. \qquad \square$$

Como el inverso de un número real x es único lo notamos $(-x)$.

Corolario. Para todo par a, b de números reales, si $a + b = 0$, entonces $b = -a$.

C5. *Propiedad conmutativa de la suma:* si a, b son números reales, entonces

$$a + b = b + a.$$

La operación que llamamos multiplicación y que notamos con el signo $\times$, es tal que la pareja $(R - \{0\}, \times)$ es un grupo abeliano; esto significa que:

C6. Si a, b son números reales, entonces $a \times b$ es un número real.

C7. *Propiedad asociativa de la multiplicación:* si a, b, c son números reales, entonces

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

C8. *Existe un elemento idéntico q para la multiplicación en el conjunto de los números reales*, diferente de 0, tal que para cualquier número real a se cumple que:

$$a \times q = q \times a = a.$$

Teorema 3. El elemento idéntico q de la multiplicación es único.

Como el elemento idéntico q de la multiplicación es único lo notamos 1.

C9. Para todo número real a diferente de cero ($a \neq 0$) existe un número real z tal que

$$a \times z = z \times a = 1.$$

llamado *inverso multiplicativo* de a o *recíproco* de a.

Teorema 4. El inverso multiplicativo de un número es único.

Como el inverso multiplicativo de un número real a es único lo notamos a^{-1} o $\frac{1}{a}$.

Corolario. Para todo par de números reales a, b si $a \neq 0$ y $a \times b = 1$ entonces $b = a^{-1}$.

C10. *Propiedad conmutativa de la multiplicación:* si a, b son números reales, entonces

$$a \times b = b \times a.$$

C11. *Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de números reales*: esta propiedad establece un vínculo entre las dos operaciones: si a, b, c son números reales, entonces:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

15.1.1. Definiciones

Definición 1. Si a, b son números reales, definimos la *sustracción* entre a y b como sigue:

$$a - b = a + (-b),$$

Definición 2. Si a, b son números reales y b es diferente de 0 definimos la *división* entre a y b así:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Veamos cómo los axiomas y teoremas presentados nos permiten mostrar algunos números reales, por ejemplo, el axioma C8 asegura la existencia de

un elemento 1 y el teorema 1 garantiza su unicidad, el axioma C1 afirma que la suma de dos números reales es un número real, en particular

$$1 + 1 \text{ es un número real que notaremos } 2;$$

de la misma forma aseguramos la existencia de

$$2 + 1 = 3,$$

y así sucesivamente, construimos una copia de los números naturales.

El axioma C4 asegura la existencia del inverso aditivo de cada uno de los números descritos, y con ello obtenemos el conjunto de los números enteros.

El axioma C9 y la definición de división nos garantizan la existencia de una copia de los números racionales; es decir, números de la forma $\frac{a}{b}$ para cualquier par de enteros a y b, con b diferente de 0.

Con los axiomas mencionados hasta ahora, no es posible determinar la existencia de algún número irracional en el conjunto de los números reales (para esto se requiere el axioma de *completitud*, que será introducido posteriormente); pero todos los teoremas que demostramos en esta sección son, por supuesto, aplicables a los números irracionales.

15.1.2. Propiedades de las operaciones con respecto a la igualdad entre números reales

La igualdad entre números reales *es compatible* con las operaciones en el sentido de que: para todo a, b, c, d, números reales, si

$$a = b \text{ y } c = d, \text{ entonces } a + c = b + d \text{ y } a \times c = b \times d.$$

En particular como $c = d$, tenemos que

$$\text{si } a = b \text{ entonces } a + c = b + c \text{ y } a \times c = b \times c.$$

Lo que significa que es lícito sumar (restar) o multiplicar (dividir por números diferentes de 0) ambos lados de una igualdad para obtener otra igualdad.

A esta propiedad la llamamos también de *uniformidad de la adición y la multiplicación*, respectivamente.

Mostremos ahora propiedades que se cumplen para todos los números reales, en particular, las leyes del álgebra elemental.

15.1.3. Otros teoremas

Teorema 5. *Propiedad cancelativa de la adición:* si a, b son números reales, y

$$a + b = a + c, \text{ entonces } b = c.$$

Prueba: supongamos que

$$a + b = a + c$$

por la propiedad uniforme de la adición, sumamos $(-a)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c),$$

y por el axioma C2

$$((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c;$$

ahora, usamos el axioma C4 para obtener:

$$0 + b = 0 + c,$$

y por el axioma C3, concluimos que

$$b = c.$$ □

Teorema 6. *Propiedad cancelativa de la multiplicación:*

$$\text{si } \ a \times b = a \times c \ \text{ y } \ a \neq 0, \ \text{ entonces } \ b = c.$$

Teorema 7. Para todo número real a se tiene que $0 \times a = 0$.

Prueba:

$0 \times a = (0 + 0) \times a$	por el axioma C3
$0 \times a = 0 \times a + 0 \times a$	por el axioma C11
$0 \times a + (-(0 \times a))$	por la propiedad
$\quad = (0 \times a + 0 \times a) + (-(0 \times a))$	uniforme de la adición
$0 = 0 \times a + (0 \times a + (-(0 \times a)))$	por los axiomas C4 y C2
$0 = 0 \times a$	por el axioma C4. □

Teorema 8. Para todo número real a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{0}{a} = 0$.

Teorema 9. Para todo número real a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{a} = 1$.

Teorema 10. Para todo número real a,

$$\frac{a}{1} = a$$

Teorema 11. Para todo número real a se tiene que

$$a = -(-a).$$

Prueba: por el axioma C4 sabemos que

$$(-a) + a = 0,$$

y por el corolario del teorema 2, el inverso aditivo de $(-a)$ es a, lo que significa que

$$a = -(-a).$$ □

Teorema 12. Para todo número real a se tiene que, si $a \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a}} = a.$$

Teorema 13. Para todo par de números reales a y b se tiene que

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

Prueba: por el axioma C4, tenemos que

$$a + (-a) = 0$$

y

$$b + (-b) = 0.$$

Si sumamos ambas igualdades y aplicamos el axioma C3,obtenemos

$$(a + (-a)) + (b + (-b)) = 0.$$

De acuerdo con los axiomas C2 y C5,

$$(a+b)+((-a))+(-b))=0$$

finalmente, por el corolario del teorema 2, concluimos que:

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$ □

Teorema 14. Para todo par de números reales a y b se tiene que

$$(-a)\times b=-(a\times b).$$

Prueba:

$[(a+(-a)]\times b=a\times b+(-a)\times b$	por el axioma C11
$0\times b=a\times b+(-a)\times b$	por el axioma C4
$0=a\times b+(-a)\times b$	por el teorema 7
$(-a)\times b=-(a\times b)$	por el corolario del teorema 2. □

Teorema 15. Para todo par de números reales a y b se tiene que

$$(-a)\times(-b)=(a\times b).$$

Prueba:

$[(a+(-a)]\times(-b)=a\times(-b)+(-a)\times(-b)$	por el axioma C11
$0\times(-b)=a\times(-b)+(-a)\times(-b)$	por el axioma C4
$0=a\times(-b)+(-a)\times(-b)$	por el teorema 7
$0=-(a\times b)+(-a)\times(-b)$	por el teorema 14
$(-a)\times(-b)=-(-(a\times b))$	por el corolario del teorema 2.
$(-a)\times(-b)=(a\times b)$	por el teorema 11. □

Teorema 16. Para todo número real a se tiene que $a-0=a$.

Teorema 17. Para todo número real a se tiene que $a-a=0$.

Teorema 18. Para todo a, b y c números reales se tiene que

$$(a-b)+(b-c)=(a-c).$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
(a-b)+(b-c) &= (a+(-b))+(b+(-c)) && \text{por la definición de sustracción}\\
&= (a+((-b)+b))+(-c) && \text{por el axioma C2}\\
&= (a+0)+(-c) && \text{por el axioma C4}\\
&= a+(-c) && \text{por el axioma C3}\\
&= a-c && \text{por la definición de sustracción.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 19. Para todo a, b y c números reales se cumple que

$$a \times (b-c) = a \times b - a \times c.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
a \times (b-c) &= a \times (b+(-c)) && \text{por la definición de sustracción}\\
&= a \times b + (a \times (-c)) && \text{por el axioma C11}\\
&= a \times b + (-(a \times c)) && \text{por el teorema 14}\\
&= a \times b - a \times c && \text{por la definición de sustracción.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 20. Para todo a y b números reales se tiene que

$$a = b \text{ si y solo si } -a = -b.$$

Teorema 21. Para todo número real a se cumple que

$$-a = (-1) \times a.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
-a &= (-a) \times 1 && \text{por el axioma C8}\\
-a &= -(a \times 1) && \text{por el teorema 14}\\
-a &= (-1) \times a && \text{por el axioma C5 y el teorema 14.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 22. Para todo par de números reales a y b existe un número real x tal que si:

$$a + x = b, \text{ entonces } x = b - a.$$

Prueba:

$a + x = b$	por hipótesis
$(a + x) + (-a) = b + (-a)$	sumando $(-a)$ en ambos lados de la igualdad
$(a + (-a)) + x = b + (-a)$	por los axiomas C2 y C5
$0 + x = b + (-a)$	por el axioma C4
$x = b + (-a)$	por el axioma C3
$x = b - a$	por la definición de sustracción. □

Teorema 23. Si $a \times x = b$ y $a \neq 0$ entonces $x = \dfrac{b}{a}$.

Teorema 24. Para todo número real a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{a} \neq 0$.

Prueba: supongamos que la conclusión *no es cierta*; es decir que

$\dfrac{1}{a} = 0$	negación de la conclusión
$\dfrac{1}{a} \times a = 0 \times a$	multiplicando por a en ambos lados de la igualdad
$1 = 0 \times a$	por el axioma C9
$1 = 0$	por el teorema 7.

Pero esto es absurdo, puesto que contradice el axioma C8, por tanto la conclusión debe ser cierta, o sea que:

$$\frac{1}{a} \neq 0. \qquad \square$$

Teorema 25. Para todo par de números reales a y b se cumple que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$a \times b \neq 0.$$

Por una argucia lógica, este teorema se puede escribir de otra manera:

$$\text{si } a \times b = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ ó } b = 0.$$

En esta forma se usa algunas veces para resolver ecuaciones de segundo grado. Probemos el teorema en su segunda forma.

Prueba: supongamos que $a \times b = 0$ y que la conclusión es falsa; es decir que, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces por el axioma C9, existe b^{-1} y

$a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times 0$	multiplicando ambos lados de la igualdad por a^{-1}
$(a^{-1} \times a) \times b = 0$	por el axioma C7, el teorema 7 y el axioma C9
$1 \times b = 0$	por el axioma C9
$b = 0$	por el axioma C8.

pero esto contradice la hipótesis y por tanto concluimos que $a = 0$ o $b = 0$. □

Teorema 26. Si a y b son números reales con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}.$$

Prueba:

$a \neq 0$ y $b \neq 0$	por hipótesis
$(a \times b) \times \dfrac{1}{a \times b} = 1$	por hipótesis, el teorema 25 y el axioma C9
$\dfrac{1}{a} \times \left((a \times b) \times \dfrac{1}{a \times b}\right) = \dfrac{1}{a} \times 1$	multiplicando ambos lados de la igualdad por $\dfrac{1}{a}$.
$\left(\dfrac{1}{a} \times a\right)\left(b \times \dfrac{1}{a \times b}\right) = \dfrac{1}{a}$	por los axiomas C7 y C8
$1 \times \left(b \times \dfrac{1}{a \times b}\right) = \dfrac{1}{a}$	por el axioma C9
$b \times \dfrac{1}{a \times b} = \dfrac{1}{a}$	por el axioma C8
$\left(\dfrac{1}{b}\right) \times \left(b \times \dfrac{1}{a \times b}\right) = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{a}$	multiplicando ambos lados de la igualdad por $\dfrac{1}{b}$

$$\left(\frac{1}{b}\times b\right)\left(\frac{1}{a\times b}\right)=\frac{1}{b}\times\frac{1}{a} \qquad \text{por el axioma C7}$$

$$1\times\left(\frac{1}{a\times b}\right)=\frac{1}{b}\times\frac{1}{a} \qquad \text{por el axioma C9}$$

$$\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b} \qquad \text{por los axiomas C8 y C10.} \quad \square$$

Teorema 27. Si a, b, c, d son números reales, b y d son diferentes de cero, y si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{entonces}\ \ a\times d=b\times c.$$

Prueba:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	por hipótesis
$a\times\frac{1}{b}=c\times\frac{1}{d}$	por la definición de división
$\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times d=\left(c\times\frac{1}{d}\right)\times d$	multiplicando ambos lados de la igualdad por d
$\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times d=c\times\left(d\times\frac{1}{d}\right)$	por los axiomas C7 y C10
$(a\times d)\times\frac{1}{b}=c\times 1$	por los axiomas C7, C9 y C10
$(a\times d)\times\frac{1}{b}\times b=c\times b$	multiplicando ambos lados de la igualdad por b y el axioma C8
$(a\times d)\times 1=c\times b$	por el axioma C9
$a\times d=b\times c$	por los axiomas C8 y C10. $\square$

Teorema 28. Si a, b, c, d son números reales, b y d son diferentes de cero, entonces

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} &= \left(a\times\frac{1}{b}\right)\times\left(c\times\frac{1}{d}\right) && \text{por la definición de división}\\
&= (a\times c)\times\left(\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}\right) && \text{por los axiomas C7 y C10}\\
&= (a\times c)\times\left(\frac{1}{b\times d}\right) && \text{por el teorema 26}\\
&= \frac{a\times c}{b\times d} && \text{por la definición de división.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 29. Si a, b y c son números reales, con $b\neq 0$ y $c\neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\frac{a\times c}{b\times c} &= \frac{a}{b}\times\frac{c}{c} && \text{por el teorema 28}\\
\frac{a\times c}{b\times c} &= \frac{a}{b}\times 1 && \text{por el teorema 12}\\
\frac{a}{b} &= \frac{a\times c}{b\times c} && \text{Por el axioma C9 y la simetría de la igualdad.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 30. Si a, b, c y d son números reales, con $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right).$$

Teorema 31. Si a, b, c son números reales y $c\neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c}+\frac{b}{c} &= a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c} && \text{por la definición de división}\\
&= (a+b)\times\frac{1}{c} && \text{por el axioma C11}\\
&= \frac{a+b}{c} && \text{por la definición de división.}
\end{aligned}$$ □

Teorema 32. Si a, b, c, d son números reales, $c\neq 0$ y $d\neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{c\times d}.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\frac{a\times d+b\times c}{c\times d} &= (a\times d+b\times c)\times\frac{1}{c\times d} && \text{por la definición de división}\\
&= \frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{c\times d} && \text{por el axioma C11 y la definición de división}\\
&= \frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{d\times c} && \text{por el axioma C10}\\
&= \frac{a}{c}+\frac{b}{d} && \text{por el teorema 29.}
\end{aligned}$$ □

Los estudiantes inventan algunas reglas que no necesariamente funcionan, intentando generalizar otras reglas que sí son correctas; por ejemplo: es falso que para números reales a, b, c, d cualesquiera, si $b\neq 0$ y $d\neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d},$$

y también que

$$\frac{a}{\frac{b}{d}}=\frac{\frac{a}{b}}{d}.$$

Un lector acucioso encontrará un ejemplo donde las igualdades mencionadas no se cumplan.

Teorema 33. Si a y b son números y $b \neq 0$, entonces

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Prueba: la prueba se divide en dos partes, primero probaremos que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{b} &= 1 \times \left(-\frac{a}{b}\right) && \text{por el axioma C8}\\
-\frac{a}{b} &= (-1) \times \frac{a}{b} && \text{por el teorema 21}\\
-\frac{a}{b} &= \frac{(-1) \times a}{b} && \text{por el teorema 28}\\
-\frac{a}{b} &= \frac{-a}{b} && \text{por el teorema 21.}
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Sea $(-b)x = a$ entonces, por el teorema 23, $x = \dfrac{a}{-b}$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
(-b)x &= a && \text{por hipótesis}\\
-(bx) &= a && \text{por el teorema 14}\\
-(bx) &= -(-a) && \text{por el teorema 11}\\
(-1)(bx) &= (-1)(-a) && \text{por el teorema 21}\\
bx &= -a && \text{por el teorema 6.}
\end{aligned}$$

De donde, $x = \dfrac{-a}{b}$ por el teorema 23. Finalmente, $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b}$.
La igualdad:

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

es consecuencia de la propiedad euclídea de la igualdad. □

Ejercicio

Demuestre los teoremas 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 20, 23 y 30.

Las propiedades que aquí hemos demostrado son válidas en cualquier conjunto de números con dos operaciones, que podemos llamar también adición y multiplicación, siempre y cuando satisfagan los axiomas C1 a C11, listados al comienzo; una tal estructura se denomina un *campo*.

Pero el conjunto de los números reales tiene algo más que las operaciones; también hay manera de comparar dos números reales y establecer si uno es mayor que el otro o no. Mostraremos enseguida cómo formalizar esta idea.

15.2. Axiomas de orden

En el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) definimos el orden aditivo entre ellos, diciendo que

$$a \leq b \text{ si y solo si existe un número natural } c \text{ tal que } a + c = b.$$

En los números racionales positivos lo hicimos de la misma forma y con los mismos resultados.

Si intentamos aplicar el mismo método para definir un orden en un conjunto que incluya números negativos, nos vemos en el problema de que siempre existe un número real que sumado con otro nos da cualquier otro, y así todos los números resultarían menores y mayores que todos los demás.

Es el mismo problema que genera la imposibilidad de definir una teoría de divisibilidad entre números racionales, porque como la multiplicación de los números racionales positivos es un grupo, todo número racional, excepto el 0, divide a cualquier otro.

Sin embargo, vimos la posibilidad de caracterizar a los números positivos para distinguirlos de los demás, lo que nos ayudó a definir un orden para los números reales.

Supongamos entonces que existe un subconjunto $\mathbf{P}$ de los número reales, que llamamos el conjunto de los *números positivos*, de tal manera que la suma de dos números reales positivos es positiva y el producto de reales positivos también es positivo, el 0 no es positivo y todo número real diferente de 0

es positivo o su inverso aditivo es positivo. Estas condiciones son las que denominamos *axiomas de orden*. Simbólicamente,

O1. Si a, b son números positivos, entonces: $a + b$ y $a \times b$ son números positivos.

O2. Si a es un número real, entonces *solo una* de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$a \in \mathbf{P}, \qquad a = 0, \qquad -a \in \mathbf{P}$$

El axioma **O2** se conoce como *ley de tricotomía*.

15.2.1. Definiciones

Definición 3. $a < b$ significa que $b - a$ es un número positivo. "$<$" se lee *menor que*.

Definición 4. $a > b$ significa que $b < a$. "$>$" se lee *mayor que*.

Definición 5. $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$. "$\leq$" se lee *menor o igual que*.

Definición 6. $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$. "$\geq$" se lee *mayor o igual que*.

Una consecuencia inmediata de las definiciones es que

$$a > 0 \text{ si y solo si } a \text{ es positivo.}$$

Decimos que a es *negativo* si $a < 0$, y si $a \geq 0$ se dice que a es *no negativo*.

15.2.2. Teoremas sobre el orden de los números reales

Teorema 34. La relación $<$ es *transitiva*; es decir, que si

$$a < b \text{ y } b < c, \text{ entonces } a < c.$$

Prueba: si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a \in \mathbf{P}$ y $c - b \in \mathbf{P}$, entonces su suma $(b - a) + (c - b) \in \mathbf{P}$, es decir, $c - a \in \mathbf{P}$; por tanto

$$a < c. \qquad \square$$

La relación $\leq$ es un *orden total* sobre $\mathbb{R}$; esto significa que cualquier par de números se puede comparar; aún más, si a y b son números reales, se cumple exactamente *una* de las siguientes situaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a,$$

puesto que el número $b - a$ cumple exactamente una de las situaciones:

$$b - a > 0, \quad b - a = 0, \quad b - a < 0.$$

Teorema 35. La relación $\leq$ es *reflexiva*.

Prueba: obviamente, $a = a$ para todo número real a. □

Teorema 36. La relación $\leq$ es *antisimétrica*.

Teorema 37. La relación $\leq$ es *transitiva*.

Los siguientes teoremas muestran la relación entre el orden y las operaciones algebraicas.

15.2.3. Propiedades de monotonía de la adición y multiplicación entre números reales

Teorema 38. *Monotonía de la adición:* para todo par de números reales x, y, si

$$x < y, \text{ entonces } x + z < y + z,$$

para todo número real z.

Prueba: supongamos que $x < y$; entonces $y - x \in \mathbf{P}$. Por el axioma C3, tenemos que

$$(y - x) + 0 \in \mathbf{P},$$

o lo que es igual, por el teorema 17,

$$(y - x) + (z - z) \in \mathbf{P},$$

para un número real z cualquiera; por la definición de resta y por los axiomas C2 y C5, nos queda

$$(y + z) - (x + z) \in \mathbf{P},$$

lo que significa que

$$x + z < y + z.$$

□

Teorema 39. *Monotonía de la multiplicación:* Para todo par de números reales x, y, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z < y \times z,$$

para todo real positivo z.

Teorema 40. Para todo par de números reales x, y, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z > y \times z,$$

para todo real negativo z.

Prueba: Supongamos que $x < y$, entonces

$y - x \in \mathbf{P}$	por la definición
$-z \in \mathbf{P}$	porque z es negativo
$(y - x)(-z) \in \mathbf{P}$	por el axioma O1
$(x \times z - y \times z) \in \mathbf{P}$	por los axiomas C5 y C11 y los teoremas 14 y 15
$x \times z > y \times z$	por la definición. □

Como el conjunto de los números reales es un campo donde existe un conjunto de números positivos que permite definir un orden que respeta las operaciones (leyes de monotonía), se dice que es un *campo ordenado*.

Teorema 41. $1 > 0$. Esto significa que $1 \in \mathbf{P}$.

Prueba: supongamos que $1 \notin \mathbf{P}$; entonces, o bien

$-1 \in \mathbf{P}$	por el axioma O2
$(-1) \times (-1) \in \mathbf{P}$	por el axioma O1
$(-1) \times (-1) = 1 \times 1 \in \mathbf{P}$	por el teorema 15
$1 \times 1 = 1 \in \mathbf{P}$	por el axioma C8,

lo que contradice la hipótesis; o bien

$1 = 0$	por el axioma O2,

lo que contradice el axioma C8.

Por tanto $1 \in \mathbf{P}$, o lo que es lo mismo, $1 > 0$. □

Teorema 42. Para todo número real a, si $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$.

Prueba: como $a > 0$, por el axioma O2, concluimos que $a \neq 0$, y por el axioma C9, existe el número real $\dfrac{1}{a}$, y para él, por el axioma O2, solo se tiene una de las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{a} > 0, \quad \text{o} \quad \frac{1}{a} = 0, \quad \text{o} \quad \frac{1}{a} < 0.$$

Supongamos que $\dfrac{1}{a} = 0$; entonces, por el axioma C9 y el teorema 7, tendríamos que

$$1 = a \times \frac{1}{a} = a \times 0 = 0,$$

es decir, que

$$1 = 0,$$

lo cual es imposible, porque contradice el axioma C8.

Supongamos, entonces, que $\dfrac{1}{a} < 0$; luego, al multiplicar por el número positivo a obtenemos, por el teorema 39, que

$$a \times \frac{1}{a} < a \times 0,$$

es decir que, nuevamente por el axioma C9 y el teorema 7,

$$1 < 0,$$

que tampoco es cierto, porque contradice el teorema 41.

Como ninguna de estas dos posibilidades es cierta, la única que queda, por el axioma O2, es que

$$\frac{1}{a} > 0. \qquad \square$$

Teorema 43. Para todo número real a, si $a < 0$, entonces $\dfrac{1}{a} < 0$.

Teorema 44. Para todo par de números reales a y b, se cumple que si

$$a > 0 \ \text{ y } \ b < 0, \ \text{ entonces } \ a \times b < 0.$$

Prueba:

$a \in \mathbf{P}$ y $-b \in \mathbf{P}$	por hipótesis
$a \times (-b) \in \mathbf{P}$	por el axioma O1
$-(a \times b) = a \times (-b) \in \mathbf{P}$	por el teorema 14
$(a \times b) \notin \mathbf{P}$	por el axioma O2
$a \times b \neq 0$	por el teorema 25, pues $a \neq 0$ y $b \neq 0$
$a \times b < 0$	por el axioma O2. □

Teorema 45. Para todo par de números reales a y b, se cumple que si

$$a \times b > 0, \text{ entonces } (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0).$$

Prueba: supongamos que $a \times b > 0$.

Si $a > 0$, por el teorema 42, tenemos que $\dfrac{1}{a} > 0$, y por los axiomas O1, C9 y C8 llegamos a

$$b = \frac{1}{a} \times (a \times b) > 0.$$

Si $a < 0$, entonces, por el teorema 43, se cumple que $\dfrac{1}{a} < 0$, y por el teorema 44

$$b = \frac{1}{a} \times (a \times b) < 0. \qquad \square$$

Teorema 46. Para todo par de números reales a y b, se cumple que si

$$a \times b < 0, \text{ entonces } (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0).$$

Teorema 47. Para todo número real a, si

$$a \neq 0, \text{ entonces } a^2 > 0.$$

Prueba: por hipótesis $a \neq 0$, y por el axioma O2, $a \in \mathbf{P}$ o $-a \in \mathbf{P}$.

Si $a \in \mathbf{P}$, por el axioma O1

$$a^2 = a \times a \in \mathbf{P},$$

esto significa que $a^2 > 0$.

Si $-a \in \mathbf{P}$, por el teorema 15 y el axioma O1,

$$(-a) \times (-a) = a \times a \in \mathbf{P},$$

es decir que $a^2 > 0$. □

Teorema 48. Para todo par de números reales a y b, se cumple que si

$$a < b, \text{ entonces } -a > -b.$$

En resumen, hemos demostrado que *las desigualdades se comportan casi siempre como las igualdades:*

1. Podemos sumar los miembros correspondientes de dos desigualdades del mismo sentido y obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

2. Podemos sumar (o restar) cantidades iguales a ambos miembros de una desigualdad y obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

3. Podemos multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad *por un numero positivo* y obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

Una *diferencia* en el comportamiento de las desigualdades, con respecto a las igualdades, es que cuando se *multiplican o dividen por un número negativo,* tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

Teorema 49. *La densidad de los números reales:* para todo par de números reales x y y, si

$$x < y, \text{ existe un número real } z, \text{ tal que } x < z < y.$$

Prueba:

$x < y$	por hipótesis
$x + x < y + x$	por el teorema 38
$x + y < y + y$	por el teorema 38
$2x < y + x < 2y$	por los axiomas C5, C11 y el teorema 34
$x < \dfrac{y+x}{2} < y$	por los axiomas C7, C8 y C9 y el teorema 39.

Por tanto, existe un número $z = \dfrac{y+x}{2}$ tal que $x < z < y$. □

En los siguientes ejercicios adicionales pretendemos aclarar algunos significados de los teoremas expuestos.

Ejercicios

1. *Encontrar el error en el siguiente procedimiento:*

   Si en la desigualdad $\dfrac{1}{x} < 1$ *multiplicamos por* x*, a ambos lados de la desigualdad, se concluye que* $\dfrac{1}{x}$ *es menor que* 1 *si y solo si* $1 < x$*.*

   Pero, si $x = -1$*, entonces*

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

   $y - 1$ *es menor que* 1*.*

2. *Si* x *e* y *son números reales tales que* $x > 0$ *e* $y < 0$*, señalar si los siguientes números reales son positivos o negativos:*

   a) $-y$

   b) $-(x \times y)$

   c) $x \times y^2$

   d) $x^2 \times y$

   e) $\dfrac{x}{y}$

   f) x^y

   g) $\dfrac{x - y}{x}$

   h) $\dfrac{x}{y} - x^2$

3. *Demostrar que* $2 > 0$*. Sugerencia:* $2 = 1 + 1$

4. *Demostrar que* $3 > 2$ *y que* $3 > 1$*.*

15.3. Axioma de completitud

Los axiomas de campo y orden no son suficientes para incluir los números irracionales dentro del sistema de los números reales, pues el conjunto de los números racionales también es un campo ordenado; para incluirlos se hace necesario adicionar otro axioma, llamado el *axioma de completitud*. Antes de enunciarlo debemos ampliar un poco nuestro vocabulario.

15.3.1. Definiciones

Sea A un conjunto de números reales, se dice que:

Definición 7. Un número real b es una *cota superior* de A, si para todo x en A, se tiene que $x \leq b$.

Definición 8. Un número real c es una *cota inferior* de A, si para todo x en A, se tiene que $c \leq x$.

Definición 9. Un conjunto de números reales es *acotado superiormente* si tiene por lo menos una cota superior, y es *acotado inferiormente* si tiene por lo menos una cota inferior.

Definición 10. Se llama *extremo superior* o *supremo* de un conjunto no vacío de números reales a la mínima cota superior de dicho conjunto; en caso de existir, lo llamamos *sup* A o lo notamos $\vee A$. Si $A = \{x, y\}$, escribimos $\vee A = x \vee y$.

Más precisamente, $x = sup\ A$ significa que:

i. $y \leq x$, para todo $y \in A$, y

ii. si $y \leq z$ para todo y en A, entonces $x \leq z$.

Otra versión para esta definición es: $x = sup\ A$ si y solo si

i. x es una cota superior de A, y

ii. si $a < x$, entonces a no es cota superior de A.

Definición 11. Análogamente, un elemento que sea el mayor de las cotas inferiores de un conjunto no vacío de números reales A, lo llamaremos *extremo*

inferior o *ínfimo de* A, y lo notaremos $inf\ A$ o $\wedge A$; y si A se reduce a dos elementos x y y, escribiremos $\wedge A = x \wedge y$.

Definición 12. Si $y = sup\ A$ tal que $y \in A$, entonces y se llama elemento *máximo* de A. Si $t = inf\ A$ y $t \in A$, entonces t se llama elemento *mínimo* de A.

Ejemplos

1. En $\wp(X)$, dados dos subconjuntos A y B de X, el conjunto más pequeño que los contiene a ambos es su unión, así:

$$sup\ (A, B) = A \vee B = A \cup B.$$

   También es claro que

$$inf\ (A, B) = A \wedge B = A \cap B.$$

2. En el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), con su orden usual, todo subconjunto A tiene $inf\ A$; para el conjunto P de los números pares $sup\ P$, no existe, pero para todo conjunto finito A, existe $sup\ A$.

3. También puede darse que en un conjunto ordenado X exista $sup\ A$ para todo subconjunto A de X, pero no exista $inf\ A$. Por ejemplo, en las partes no vacías de X, ordenado por la inclusión, dada una colección C finita o infinita de subconjuntos de X existe $sup\ C$ para ella, el conjunto X; pero no existe $inf\ C$, porque lo sacamos a propósito.

4. 0 es el elemento mínimo de los números naturales.

5. Todo subconjunto de números naturales tiene elemento mínimo.

6. La máxima cota inferior y la mínima cota superior del intervalo abierto de números reales $(4, 5]$, son 4 y 5, respectivamente; 5 es el elemento máximo del conjunto que no tiene elemento mínimo.

Si en un conjunto ordenado existe un elemento mínimo, lo notaremos $\mathbf{0}$, y si tiene elemento máximo lo notaremos $\mathbf{1}$.

Ejercicios

1. *Determinar, en caso de que existan, el supremo, el ínfimo, el máximo o el mínimo para cada uno de los siguientes conjuntos:*

   a) $[-3, 2]$

   b) $(-6, 6]$

   c) $\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

   d) $(-\infty, 4)$

   e) $[-3, \infty)$

   f) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in Z \text{ y } n \neq 0\right\}$

   g) $B = \left\{x \in R : x = 0 \text{ o } x = \frac{1}{n}, n \in Z \text{ y } n \neq 0\right\}$

   h) $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

   i) $D = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

   j) $E = \left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

   k) $F = \left\{n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

   l) $G = \left\{(-1)^n n + \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

2. *Si afirmamos que existe sup A para todo $A \subseteq X$, esto implica la existencia de un elemento máximo para X, el sup X, que ya hemos notado* ***1****. ¿Es cierto el recíproco?*

Si para todo B, subconjunto de un conjunto ordenado X, existe $inf\ B$, y además existe **1**, entonces existe *sup* B para todo B, puesto que el conjunto $CS(B)$ de las cotas superiores de B es no vacío (tiene por lo menos al **1**),

y este es un subconjunto de X; por tanto existe $inf\ CS(B)$, y este es, por definición, $sup\ B$.

El hecho de que exista $sup\ (A \cup \{y\})$ es equivalente a la existencia de $sup\ (sup\ A, y)$, para todo y en X, pero además los dos son iguales (*¿por qué?*); esto significa que, en el caso de existir, se cumple:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$$

o sea que $\vee$ puede ser vista como una operación entre los elementos de un conjunto ordenado, y la anterior igualdad significa que esta operación, en el caso de estar definida, para todo x, y, z en X es asociativa; además, la existencia de $sup\ A$ para cualquier subconjunto finito A de X es equivalente a la existencia de $x \vee y$ para cualquier par x, y de sus elementos.

Otras definiciones útiles son las siguientes, pues nos permiten hablar del conjunto suma de dos subconjuntos de números reales o del conjunto producto de un número real por un conjunto no vacío de números reales dado:

Definición 13. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, ambos no vacíos, y λ un número real cualquiera; se define:

$$C = A + B = \{c \in \mathbb{R} : c = a + b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

15.3.2. El axioma

Si T es un subconjunto no vacío de números reales, y está *acotado superiormente*, entonces T tiene *supremo*.

Este axioma es el que permite asegurar que $\sqrt{2}$ es un número real, pues el conjunto:

$$A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$$

es acotado superiormente, luego debe existir un número real $y = sup\ A$. Este número es justamente $\sqrt{2}$.

Un campo ordenado que cumpla el axioma de completitud, se llama un *campo ordenado y completo*; el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es el único conjunto con dos operaciones que cumple estas condiciones, salvo por el nombre de los elementos.

15.3.3. Teoremas

Teorema 51. Si r y r_1 son supremos de S, entonces $r = r_1$.

Prueba: por ser r supremo y r_1 cota superior de S, tenemos que $r \leq r_1$. De manera análoga, por ser r_1 supremo y r cota superior de S, afirmamos que $r_1 \leq r$; luego, como la relación *menor o igual que* es antisimétrica, deducimos que $r = r_1$, como se quería demostrar. □

Teorema 52. *Propiedad arquimediana del conjunto de los números reales:* si x es un número real tal que $x > 0$ y y es un número real arbitrario, existe algún número natural n tal que $xn > y$.

En términos geométricos, lo aquí expuesto significa que todo segmento y tan largo como se desee, puede ser recubierto por un número finito de n segmentos de longitud positiva dada x, tan pequeña como se desee (figura 15.1).

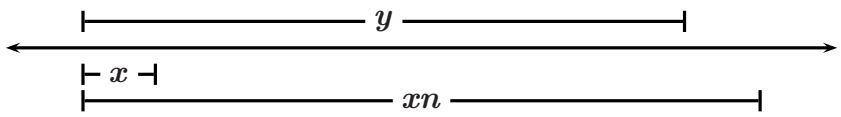


Figura 15.1

Prueba: haremos esta prueba por contradicción. Supongamos que $xn \leq y$, y definamos el conjunto X como sigue:

$$X = \{xn \text{ tales que } n \in \mathbb{N}\}.$$

Como X es no vacío y está acotado superiormente, por y. Según el axioma de completitud, X tiene supremo; supongamos que este es w.

Tenemos que $x > 0$; luego, $w - x < w$; por esto y por ser w el supremo de X, $w - x$ no es cota superior de X. Esto significa que existe al menos un elemento de X mayor que $w - x$; dicho elemento debe ser de la forma xn_1, donde n_1 es un número natural; esto es:

$$w - x < xn_1,$$

lo que implica que

$$w < xn_1 + x,$$

o de otra forma

$$w < x(n_1 + 1).$$

Pero $n_1 + 1$ es un número natural, luego $x(n_1 + 1)$ pertenece a X, con lo cual se contradice que w sea el supremo de X. □

Teorema 53. El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) no está acotado superiormente.

Prueba: supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente, y como $\mathbb{N}$ es no vacío, tenemos, por el axioma de completitud, que $\mathbb{N}$ posee extremo superior; esto significa que existe x en $\mathbb{R}$ tal que:

$$x = sup\ \mathbb{N}.$$

Por otro lado, tenemos que si n es un número natural distinto de 0 ($n > 0$), por la propiedad arquimediana existe m en los números naturales tal que $mn > x$, pero mn es un número natural, lo que contradice que x es el supremo. Por tanto, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. □

Teorema 54. Para todo x que pertenece al conjunto de los números reales, existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $a > x$.

Prueba: supongamos que para todo número natural a, se tiene $a = x$; esto significa que x es cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice el teorema anterior. □

Teorema 55. Dados A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, si existe el $sup\ A$ y el $sup\ B$, entonces,

$$sup\ (A + B) = sup\ A + sup\ B.$$

Prueba: como el $sup\ A$ y el $sup\ B$ existen, tenemos que si a y b son elementos de A y de B, se cumple que:

$$sup\ A \geq a \tag{1}$$
$$sup\ B \geq b. \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), obtenemos:

$$sup\ A + sup\ B \geq a + b.$$

Si hacemos $c = a + b$, tenemos que:

$$sup\ A + sup\ B \geq c. \tag{3}$$

Como a y b son elementos arbitrarios de A y B, respectivamente, podemos formar:

$$\{c \in \mathbb{R} : c = a + b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\},$$

conjunto que corresponde a $A + B$ y está acotado superiormente por $sup\ A + sup\ B$ de acuerdo con (3). Esto significa que, por el axioma de completitud, $A + B$ tiene supremo, y que:

$$sup\ A + sup\ B \geq sup\ (A + B). \tag{4}$$

Ahora, según la definición de extremo superior, $sup\ (A+B) \geq a+b$, para todo $a + b$ en $A + B$, o lo que equivale a:

$$sup\ (A + B) - b \geq a,$$

es decir que $sup\ (A+B) - b$ es cota superior de A, pero $sup\ A$ es la mínima; luego,

$$sup\ A \leq sup\ (A + B) - b.$$

Así,

$$b \leq sup\ (A + B) - sup\ A.$$

Por tanto, $sup\ (A+B) - sup\ A$ es cota superior de B, pero como $sup\ B$ existe, tenemos:

$$sup\ B \leq sup\ (A + B) - sup\ A,$$

o de otra manera:

$$sup\ A + sup\ B \leq sup\ (A + B). \tag{5}$$

Para que (4) y (5) sean ciertas, solo tenemos una opción:

$$sup\ A + sup\ B = sup\ (A + B),$$

con lo que finalizamos nuestra demostración[4]. □

Teorema 56. Si S es un subconjunto no vacío de números reales, y $z > 0$, se tiene que:

[4]Como vimos anteriormente, los números irracionales aparecen como extremos superiores o inferiores de conjuntos de números racionales. Este teorema permite operacionalizar la suma de dos de ellos.

a) Si $sup\ S$, es el supremo de S entonces existe $s \in S$ tal que $s > sup\ S - z$.

b) Si S tiene ínfimo, entonces existe $s \in S$ tal que $s < inf\ S + z$.

Prueba: esta prueba la hacemos por contradicción. Supongamos que para todo $s \in S$ se tiene

$$s \leq sup\ S - z,$$

lo cual significa que $sup\ S - z$ es cota superior de S, pero menor que $sup\ S$; es decir que si S tiene supremo, entonces existe $s \in S$ tal que $s > sup\ S - z$.

La parte *b*) se hace por analogía con la parte *a*) antes desarrollada, por lo cual la dejamos como ejercicio para el lector interesado. □

Teorema 57. Si existe $sup\ A$ e $inf\ A$, se tiene que

$$sup\ (\lambda A) = \begin{cases} \lambda\ sup\ A, & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda\ inf\ A, & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Prueba: para el caso $\lambda = 0$, la demostración es inmediata; entonces veamos qué sucede si $\lambda > 0$.

Como $sup\ A$ existe, tenemos que para todo $a \in A$, $sup\ A \geq a$. Si $\lambda > 0$, hacemos uso del teorema 39 y obtenemos:

$$\lambda\ sup\ A \geq \lambda a.$$

Y en razón a que $\lambda a \in \lambda A$, tenemos que $\lambda\ sup\ A$ es cota superior de λA.

Por otra parte, por el teorema anterior, decimos que si $z > 0$, existe $a_1 \in A$ tal que $sup\ A - z < a_1$, y como $a_1 \leq sup\ A$, tenemos:

$$sup\ A - z < a_1 \leq sup\ A.$$

Si hacemos $s = \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, la desigualdad anterior nos queda:

$$sup\ A - \frac{\varepsilon}{\lambda} < a_1 \leq sup\ A,$$

lo que es equivalente a:

$$\lambda\ sup\ A - \varepsilon < \lambda a_1 \leq \lambda\ sup\ A.$$

Y como λa es un elemento de λA y $\lambda\ sup\ A - \varepsilon \leq \lambda\ sup\ A$, entonces $\lambda\ sup\ A$ es la máxima cota superior de λA.

Por tanto, $\lambda\ sup\ A = sup\ (\lambda A)$. □

La demostración referente al ínfimo se hace de manera similar[5].

Ejercicios

Demostrar que

1. *Si x e y son ínfimos de A entonces $x = y$.*
2. *Si n y m son máximos de S, entonces $n = m$.*
3. *Si s y t son mínimos de S, entonces $s = t$.*
4. *Si X es un subconjunto no vacío de números reales y acotado inferiormente, entonces $inf\ X$ existe.*
5. *Si a, b son números reales, y $a \leq b \leq a + \dfrac{b}{n}$ donde n es un número entero positivo cualquiera, entonces $a = b$.*
6. *Si A y B son subconjuntos no vacíos de números reales, tales que, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, $a \leq b$, entonces $sup\ A$ e $inf\ B$ existen, y $sup\ A \leq inf\ B$.*

15.4. Potenciación entre números reales

Intentemos ahora definir la potenciación entre números reales; iniciemos con el caso en que b sea un número natural, y como ya es habitual en $\mathbb{N}$, definámosla por recurrencia mediante las fórmulas:

$$a^0 = 1 \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

y

$$a^{k^+} = a^k \times a.$$

A diferencia de la multiplicación, que es distributiva a izquierda y a derecha con respecto a la suma, la potenciación de números reales con exponente natural es distributiva solamente a izquierda con respecto a la multiplicación, es decir que:

[5] Análogamente a lo dicho en el anterior, este teorema permite efectuar la multiplicación de números irracionales.

Teorema 58. Para todo a y b números reales y para todo número natural k se tiene que

$$(a \times b)^k = a^k \times b^k.$$

Prueba: hagámosla por inducción sobre k

i. Si $k = 0$, entonces

$$(a \times b)^0 = 1 = 1 \times 1 = a^0 \times b^0.$$

ii. Si $k = n$, para algún $n \in N$ fijo, se tiene que:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Veamos que para $k = n^+$, se cumple; es decir:

$$(a \times b)^{n^+} = a^{n^+} \times b^{n^+}.$$

$$\begin{aligned}
(a \times b)^{n^+} &= (a \times b)^n \times (a \times b) && \text{por definición de potenciación} \\
&= a^n \times b^n \times (a \times b) && \text{por hipótesis de inducción} \\
&= a^n \times a \times b^n \times b && \text{por asociatividad y conmutatividad} \\
& && \text{de la multiplicación en R} \\
&= a^{n^+} \times b^{n^+} && \text{por definición de potenciación.}
\end{aligned}$$

Luego $(a \times b)^{n^+} = a^{n^+} \times b^{n^+}$. □

Teorema 59. La potenciación entre números reales con exponente natural también relaciona las operaciones de suma y multiplicación, de manera que:

$$a^{m+n} = a^m \times a^n.$$

Prueba: de nuevo hagamos inducción, en este caso sobre m. Sea $n \in N$, fijo pero arbitrario,

i. Si $m = 0$, entonces

$$a^0 \times a^n = 1 \times a^n = a^n = a^{0+n}.$$

ii. Supongamos que para algún $k \in N$,

$$a^k \times a^n = a^{k+n}.$$

Veamos que se cumple para k^+; o sea que

$$a^{k^+} \times a^n = a^{k^+ + n}.$$

$a^{k^+} \times a^n = a^k \times a \times a^n$	por definición de potenciación
$= a^k \times a^n \times a$	por asociatividad y conmutatividad de la multiplicación en R
$= a^{k+n} \times a$	por la hipótesis de inducción
$= a^{(k+n)^+}$	por definición de potenciación
$= a^{k^+ + n}$	por la definición de suma en N.

Luego $a^{k^+} \times a^n = a^{k^+ + n}$. □

Veamos ahora cómo definir la potenciación a^b entre números reales, si a es un número real cualquiera diferente de 0 y b es un número entero negativo.

Si b es un número entero negativo, entonces $-b = x$ es un número natural, y estamos en el caso anterior; por tanto, definimos

$$a^b = a^{-x} = (a^{-1})^x,$$

donde a^{-1} es el inverso multiplicativo de a.

Si b es un número racional, entonces $b = \dfrac{m}{n}$, para algún par de números enteros m y n; con $n \neq 0$, definimos

$$a^b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 60. Si a y b son números reales positivos y x es un número racional, también es válida la fórmula

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x.$$

Prueba: si $x = \dfrac{m}{n}$, m, $n \in Z$ y $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
(ab)^{m/n} &= \sqrt[n]{(ab)^m} && \text{por la definición de potenciación}\\
&= \sqrt[n]{a^m b^m} && \text{por ser } m \text{ un número entero}\\
&= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)\left(\sqrt[n]{b^m}\right) && \text{por la propiedad distributiva de la}\\
& && \text{radicación con respecto a la}\\
& && \text{multiplicación entre números reales}\\
& && \text{con exponentes naturales}\\
&= a^{m/n} b^{m/n} && \text{por definición de potenciación.}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x. \qquad \square$$

Teorema 61. Si a es un número real positivo, y x, y son números racionales, entonces

i. $a^x \times b^y = a^{x+y}$.

ii. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ con $a \neq 0$.

iii. $(a^x)^y = a^{x \times y}$.

Ejercicio

Encontrar el error en el siguiente procedimiento:

Si en la desigualdad

$$1 < 2$$

multiplicamos por $\dfrac{1}{4}$, *obtenemos:*

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

o lo que es igual:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right).$$

Si tomamos logaritmo en ambos lados de la desigualdad, tenemos que

$$\log_a\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log_a\left(\frac{1}{2}\right).$$

Y puesto que

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 < 2\log\left(\frac{1}{2}\right),$$

si dividimos en ambos lados entre $\log\left(\frac{1}{2}\right)$*, concluimos que*

$$¡2 < 1!$$

Si a es negativo, la potenciación puede no tener un resultado dentro de los números reales, en particular si $a = -1$ y n es un número par.

El conjunto de los números donde estas operaciones son posibles es conocido como el conjunto de los *números complejos*, y lo estudiaremos en otra ocasión.

El caso en el cual b sea un número irracional, también lo dejamos de lado ya que es un tema que sería abordado de forma más adecuada con herramientas del cálculo, como las sucesiones de Cauchy y la noción de distancia.

Capítulo

16 Solución de ecuaciones entre números reales

Las ecuaciones son más importantes para mí, porque la política es para el presente, pero una ecuación es algo para la eternidad.
Albert Einstein

Como dijimos en el capítulo 1, una *ecuación* es una igualdad entre números en un sistema determinado, combinados con operaciones, donde alguno(s) de ellos, *la*(*s*) *incógnita*(*s*)[1], no es (son) conocido(s); dichos números están en un conjunto dado y las operaciones también están definidas en él. Las incógnitas[2] las representamos con letras, habitualmente las últimas del abecedario:

[1]Es común llamar *variables* a las *incógnitas*, pero es conveniente aclarar que una incógnita en una ecuación representa a uno o varios elementos del conjunto de números que estemos considerando, que al ser remplazado en la ecuación hace de ella una igualdad, pero este valor *no es variable.* El término árabe para referirse a la incógnita era *shay* que significa cosa, en latín se tradujo por *res* (cosa en latín), y por eso, a las personas que resolvían ecuaciones se les llamaba *cosistas*.

[2]Diofanto (aprox. 250 d.C.) fue el primero en introducir un símbolo para la incógnita, a la cual llamó *aritmo* : $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$, y la representó con el signo ς. Luego, en la obra de Brahmagupta (alrededor del año 630 d.C.) se encuentran abreviaturas para la incógnita y sus potencias. En el siglo XIV, en el tratado del ábaco (*Trattato d'Algibra* (Anónimo del siglo XIV)), aparece lenguaje retórico para las incógnitas, el cual fue posteriormente abreviado por Pacioli (1445-1514 aprox.) y es Bombelli quien propone un cambio importante en el simbolismo para la incógnita y sus potencias, como se puede apreciar en la siguiente tabla. Pero es Viète (1540-1603) quien se reconoce como el personaje que propone el uso de letras del abecedario para representar cantidades (incógnitas, sus potencias y coeficientes genéricos) (Malisani, 1999, p. 7; Medina y Albarracín, 2012, p. 29).

x, y, z, etc. Los elementos del conjunto de números que satisfacen la ecuación, es decir, aquellos valores para los cuales la igualdad es cierta, los llamamos *soluciones o raíces*.

Resolver una ecuación es encontrar todos los valores de las incógnitas que participan en ella, para que la ecuación se convierta en una proposición verdadera, es decir, en una igualdad. La teoría matemática que se ocupa del estudio de la solución de ecuaciones en un conjunto de números es el álgebra[3]. Llamaremos a este estudio *álgebra antigua* en contraposición con el *álgebra moderna* que trata con entidades más generales que los números, sobre estas entidades se definen operaciones (similares a las operaciones aritméticas) y se estudia sus propiedades, esta nueva álgebra se origina, por un lado, en los trabajos de Evariste Galois (1811-1832) y por otro, en los de George Peacock (1791-1858) y Heinrich Weber (1842-1913).

Para resolver una ecuación, *se usan las propiedades de las operaciones definidas en el conjunto de números* que estemos considerando[4]; por ejemplo, es lícito restar en ambos lados de una ecuación entre *números reales* el mismo

Lenguaje actual	**Diofanto**	**Brahmagupta**	**Trattato d'Algibra**	**Pacioli**	**Bombelli**
x	ς	*ya* (de *yavattavat* (tanto-cuanto))	*cosa* (o *chosa*)	*co*	①
x^2	Δ^{Υ}	*va*	*censo*	*ce* o Z	②
x^3	K^{Υ}	*gha*	*chubo*	*cu* o C	③
x^4	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	*vava*	*censo di censo*	*ce ce*	④
x^5	ΔK^{Υ}		*chubo di censi*	$p^{\circ}r^{\circ}$	⑤
x^6	$K^{\Upsilon}K$		*censo di chubo* (*chubo di chubo*)		
$x^{1/2}$		*ka*(de *karana* (raíz cuadrada))			

[3]El término *álgebra* viene del título de la obra *al-jabr w'al-muqābalah*, del matemático árabe Mahommed ibn Musa Al-Khwārizmī. La obra fue traducida al latín, y en su versión latinizada se llamó *Liber algebrae et almucabola*, que se convirtió en álgebra. La palabra *al-jabr*, que significa *restablecer* se refiere a sumar a ambos lados de la igualdad el mismo valor y la palabra *muqābalah*, que quiere decir *simplificar*, se refiere a eliminar términos iguales en ambos lados de una igualdad, esto es, aplicar la propiedad cancelativa.

[4]Como lo estudiaremos en este capítulo, a través de la historia y en diferentes lugares se desarrollaron métodos de solución basados en interpretaciones y propiedades geométricas o aritméticas de las situaciones o problemas en los cuales surgían las ecuaciones. Si bien en la actualidad tales métodos se pueden observar como procedimientos generales que se describen y justifican con las propiedades algebraicas del conjunto numérico en el cual se define la ecuación, en su momento no correspondían a procedimientos algebraicos, ni quienes los usaron eran conscientes de ello.

número para obtener de nuevo una igualdad; pero esto ya no es cierto, si la ecuación es entre números naturales, puesto que en ellos no todas las restas son posibles.

No siempre una ecuación tiene soluciones dentro de un conjunto de números; por ejemplo, no existe algún número natural x que satisfaga

$$x + 3 = 1$$

pero esta ecuación sí tiene solución en los números reales, con $x = -2$.

Consideraremos en este capítulo ecuaciones entre números reales, y en consecuencia, las propiedades que podemos aplicar son los axiomas y los teoremas enunciados en el capítulo anterior, y los que de ellos se deduzcan; en particular, la compatibilidad de la igualdad con la suma y la multiplicación:

Si a, b, c y d, son números reales tales que $a = b$ y $c = d$, entonces:

$$a + c = b + d$$
$$a \times c = b \times d,$$

y en particular

$$a + c = b + c$$
$$a \times c = b \times c,$$

(por supuesto, están incluidas las restas y las divisiones, salvo la división por 0), y las correspondientes a la potenciación

$$a^c = b^c$$

con la *limitación* de que a y b sean números no negativos y que c no sea un número racional con denominador par.

Para simplificar la solución de las ecuaciones entre números reales, las clasificamos según su grado y la cantidad de incógnitas; inicialmente, resolveremos ecuaciones de primer grado con una sola incógnita y luego consideraremos otros casos.

16.1. Ecuaciones de primer grado

16.1.1. Con una incógnita

16.1.1.1. El método egipcio: la *regula falsa*

Un método de resolución de ecuaciones que se encuentra en antiguos libros egipcios y chinos es el de la *regula falsa* o *falsa posición*. El método

para ecuaciones de primer grado[5] consiste en proponer una solución, que posiblemente no lo es – un valor falso –, luego se evalúa esta solución en la ecuación y se relaciona este resultado con el que debería haberse obtenido; finalmente, se corrige la solución tentativa de acuerdo con los resultados, para obtener la solución correcta. Por ejemplo, para resolver la ecuación[6]:

$$x + \frac{x}{7} = 19,$$

se da un primer valor para x, no importa cuál, propongamos, por ejemplo $x = 7$ (¡y esto es el más burdo de los tanteos!).

Sustituimos x por 7 en la ecuación, y obtenemos como resultado 8 y no 19; introducimos entonces un factor de corrección que relacione a 19 y 8; este es:

$$\frac{19}{8}.$$

Multiplicamos este factor por la primera aproximación y obtenemos

$$\frac{19}{8} \times 7 = \frac{133}{8},$$

que es la solución correcta de la ecuación.

El procedimiento está basado en el siguiente argumento: sea la ecuación

$$ax = b.$$

Si suponemos que la ecuación tiene una *solución tentativa* x_0, y la remplazamos en ella obtenemos:

$$ax_0 = b_0,$$

entonces

$$x_1 = \frac{b}{b_0} x_0$$

[5] "No son conocidos registros del tratamiento de ecuaciones polinómicas de segundo grado por los egipcios, pero los historiadores sospechan que ellos dominaban alguna técnica de resolución de esas ecuaciones. Esa creencia se basa en el hecho de que se encontró en el papiro de Kahun, la resolución de una ecuación que hoy se escribiría $x^2 + y^2 = k$, k un número positivo, por el método de falsa posición" (Ochoviet, 2007, p. 3).

[6] Esta ecuación corresponde al problema 24 del papiro de Rhind: calcular el valor de un montón, si el montón y un séptimo del montón son 19.

sí es una *solución* de la ecuación original, puesto que

$$a\left(\frac{b}{b_0}x_0\right) = b.$$

Es claro que este método solo funciona para ecuaciones de primer grado de la forma $ax = b$, $a \neq 0$.

No obstante, al parecer el método fue conocido también por los babilonios (además de los egipcios y los chinos) y se había extendido a ecuaciones de la forma:

$$ax + b = c, \quad a \neq 0.$$

Para lo cual se partía de dos valores falsos diferentes x_0 y x_1, los cuales se remplazan en un miembro de la ecuación original; así:

$$ax_0 + b = c_0 \quad \text{y} \quad ax_1 + b = c_1.$$

Seguidamente se calculan las diferencias:

$$d_0 = c_0 - c \quad \text{y} \quad d_1 = c_1 - c.$$

Con lo cual se planteaba la proporción:

$$\frac{d_0}{x_0 - x} = \frac{d_1}{x_1 - x},$$

de donde, al despejar x se obtiene

$$x = \frac{d_1x_0 - d_0x_1}{d_1 - d_0},$$

lo cual corresponde al valor correcto de x.

Ejercicios

1. *Compruebe que al despejar x en la proporción*

$$\frac{d_0}{x_0 - x} = \frac{d_1}{x_1 - x}$$

se obtiene

$$x = \frac{d_1x_0 - d_0x_1}{d_1 - d_0}.$$

2. *¿Es posible asegurar, en el resultado anterior, de acuerdo al proceso presentado, que* $d_1 - d_0 \neq 0$? *¿Por qué?*

3. *Justifique por qué la regula falsa es válida para resolver ecuaciones de la forma* $ax + b = c,\ a \neq 0$.

16.1.1.2. El método axiomático

Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede llevar a la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son constantes, $a \neq 0$, y x es la incógnita, mediante un número finito de pasos, aplicando reiteradamente las propiedades algebraicas, enumeradas en la primera parte del capítulo anterior, derivadas de los axiomas de campo.

Si partimos de

$$ax + b = 0$$

y sumamos $(-b)$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$(ax + b) + (-b) = 0 + (-b).$$

Por los axiomas C2, C3 y C4, tenemos

$$ax = -b.$$

Ahora, como $a \neq 0$, existe $\frac{1}{a}$, y si lo multiplicamos a ambos lados de la igualdad conseguimos,

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b).$$

Y aplicando los axiomas C7, C9, la definición de división y los teoremas 21 y 28, tenemos

$$1x = \frac{-b}{a},$$

y por el axioma C8

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Por la manera en que fue obtenida, esta es la *única* solución para la ecuación planteada, y podemos afirmar que *las ecuaciones de primer grado tienen a lo más una solución.*

En resumen, si $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ entonces su solución es $x = \dfrac{-b}{a}$.

Ejemplo

Si queremos hallar la solución de $4x+3 = 0$, hacemos el proceso completo, así:

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 0 \\ 4x + 3 - 3 &= 0 - 3 \\ 4x &= 0 - 3 \\ 4x &= -3 \\ \frac{1}{4}4x &= \frac{1}{4}(-3) \\ x &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

O simplemente, utilizamos la fórmula general hallada; esto es: $4x + 3 = 0$ tiene como solución $x = -\dfrac{3}{4}$.

16.1.2. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

16.1.2.1. Una ecuación con dos incógnitas

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas se puede llevar a la forma:

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son constantes, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y x, y son las incógnitas.

16.1.2.1.1 El método escalera[7]

Para resolver la ecuación

$$x + y = 32$$

[7]Proponemos esta denominación pues como se observa, con un primer peldaño (solución) se consiguen los demás.

donde x, y y 32 son números reales, podemos elegir algunos valores para x y resolver la ecuación de una sola variable y, así:

Si $x = 1$, entonces

$$1 + y = 32,$$

o sea $y = 31$.

Si $x = 5,3$ entonces

$$5{,}3 + y = 32,$$

o sea $y = 26{,}7$.

Y así sucesivamente; para cada valor que elijamos de x encontramos un valor para y.

Pero no es necesario efectuar las cuentas todas las veces; por ejemplo, si la ecuación es:

$$3x + 5y = 54,$$

podemos iniciar proponiendo una solución por tanteo, digamos $x = 3$, $y = 9$, que por brevedad escribiremos $(3; 9)$; luego de varios intentos encontramos, también por tanteo, las siguientes soluciones:

$$(3; 9)$$
$$(8; 6)$$
$$\left(10; \frac{24}{5}\right)$$
$$\left(15; \frac{9}{5}\right)$$
$$(1{,}5; 9{,}9)$$
$$(6{,}5; 6{,}9)$$
$$(-4; 13{,}2)$$
$$(-9; 16{,}2).$$

Y con ellas, observamos una regularidad, a partir de una solución podemos hallar las otras; es decir, como $(1{,}5; 9{,}9)$ es solución de la ecuación $3x + 5y = 54$, podemos conjeturar que $(6{,}5; 6{,}9)$ también lo es.

Similarmente, si $(-4; 13{,}2)$ es solución de $3x+5y = 54$, entonces $(-9; 16{,}2)$ también es solución.

La regularidad es a partir de una solución hallada, los números que ocupan el lugar de x aumentan cinco unidades y 5 es el coeficiente de y. En cambio,

los números que ocupan el lugar de y disminuyen tres unidades y 3 es el coeficiente de x (¡como ya lo debió notar!). Es posible, entonces, encontrar varias soluciones de la ecuación (claro está, no todas las soluciones) partiendo de una particular.

Conjeturamos[8] que:

Si (x_0, y_0) *es solución de* $ax + by = c$*, donde* a*,* b *y* c *son números reales y* a *y* b *no son* 0*, entonces* $(x_0 + b, y_0 - a)$ *o* $(x_0 - b, y_0 + a)$*, también son soluciones de la ecuación.*

La primera parte de esta afirmación la podemos demostrar de la siguiente manera: si (x_0, y_0) es solución de la ecuación

$$ax + by = c$$

se cumple que:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Haciendo uso de los axiomas C3 y C4 la defínción de sustracción, tenemos que:

$$ax_0 + by_0 + 0 = c$$

$$ax_0 + by_0 + (ab - ab) = c,$$

y por los axiomas C2 y C5

$$ax_0 + (ab + by_0) - ab = c,$$

o sea,

$$(ax_0 + ab) + (by_0 - ab) = c.$$

Y por los axiomas C10, C11 y el teorema 25 concluimos que:

$$a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = c,$$

lo cual significa que $(x_0 + b, y_0 - a)$ es también solución de la ecuación inicialmente dada.

[8]Este método fue expuesto en Luque, Mora y Páez (2013, pp.110-111), pero considerando solo el conjunto de los números naturales.

Ejercicios

1. *Demuestre la segunda parte del teorema anterior.*

2. *Estudie las ecuaciones de la forma $ax - by = c$, donde a, b y c son números reales. ¿Se cumple el teorema? Si no es así, plantee una conjetura respecto a las soluciones de esta ecuación y demuéstrela.*

3. *Dada una solución (x_0, y_0) de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, ¿es posible encontrar tal ecuación? Si la respuesta es positiva, describa y argumente el procedimiento; si no, ¿cuántas soluciones se deben conocer para encontrar la ecuación?, ¿cuál es el procedimiento?*

16.1.2.1.2 El método gráfico

Con el método anterior, si encontramos *una* solución, podemos construir *otras* soluciones usando los coeficientes de la ecuación. Mostraremos ahora un método que nos permite encontrar *todas* las soluciones conociendo *dos* de ellas.

La idea surge de representar las soluciones de ecuaciones con dos incógnitas como coordenadas en un plano de un par de rectas que se cortan en un punto.

Si dibujamos un par de rectas en un plano, formando un ángulo[9] α, con un punto de intersección O, que llamaremos *origen* y que representa el número 0, elegimos un punto en cada una de las rectas, y los denominamos A y B, respectivamente, los segmentos determinados OA y OB representan la unidad de medida, y los puntos A y B representan el número 1 en cada recta; luego, a partir del segmento unidad, se construyen, con regla y compás, los segmentos que determinan los puntos, de cada recta, representantes de los números naturales, racionales y algunos irracionales, como observamos en los capítuloa 9 y 13 (números construibles). Aunque no tenemos mecanismos para encontrar los puntos de la recta que representan a los demás números algebraicos y los trascendentes, aceptamos que a cada punto de la recta le corresponde uno y solo un número real, y viceversa, estableciendo de esta

[9] Generalmente se escoge un ángulo recto, pero esta condición no es necesaria.

forma una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta[10].

Si en una recta dibujamos los valores de x y en la otra los de y, una solución de la ecuación

$$ax + by = c,$$

la representamos con una pareja de números reales (x_0, y_0), que en el plano corresponde a la intersección de las rectas *paralelas*[11] *a cada una de las rectas dadas* trazadas desde los puntos x_0, y_0.

En el caso de nuestro último ejemplo, algunas soluciones de la ecuación $3x + 5y = 54$ están dadas por los puntos

$$(3; 9), (8; 6), \left(10; \frac{24}{5}\right), \left(15; \frac{9}{5}\right), (1,5; 9,9), (6,5; 6,9), (-4; 13,2) \text{ y } (-9; 16,2),$$

que representamos gráficamente, así:

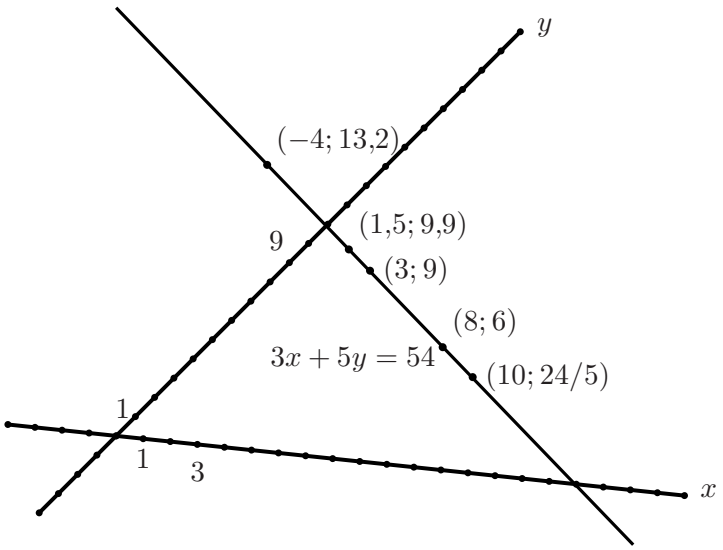


Figura 16.1

[10]Este enunciado puede parecer fácil de demostrar, pero muchos matemáticos lo han intentado con resultados poco satisfactorios; por tal motivo se considera como un axioma, el axioma de Cantor-Dedekind, mencionado en el capítulo 11.

[11]Esta condición tampoco es necesaria; pueden escogerse rectas perpendiculares, o de otra forma.

Observamos que todos los puntos resultan colineales; de hecho, si tomamos todos los puntos que solucionan la ecuación, uno por cada número real x, la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es, entonces, una recta; y tal recta representa todas las soluciones reales de la ecuación.

Ahora, si hacemos la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$, con m y b constantes y x y y números reales desconocidos, observamos que el punto de corte de la gráfica de la ecuación con el eje y es b, pues $x = 0$. Así, la gráfica de la ecuación $3x + 5y = 54$ corta al eje y en $\frac{54}{5}$ y, en consecuencia, el punto $\left(0, \frac{54}{5}\right)$ también es una solución de dicha ecuación.

16.1.2.1.3 El método axiomático

Para resolverla, aplicamos los mismos métodos de las ecuaciones con una incógnita, para llevarla a la forma:

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

suponiendo que x es un número real.

El resultado que obtenemos es que, para cada valor que elijamos para x dentro de los números reales, obtenemos un valor para y, también dentro de los números reales, puesto que todas las operaciones que hacemos están definidas.

Ejercicio

Consulte si Diofanto de Alejandría resolvía ecuaciones de este tipo, en caso positivo. Consultar las traducciones de su obra, Aritmética.

16.1.2.2. Dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas

Como ya vimos, las ecuaciones de primer grado representan rectas; así, si tenemos dos ecuaciones de primer grado, tenemos dos rectas, las cuales, o se cortan en un punto o son paralelas, obtenemos entonces, como es de

esperarse, al resolver dos ecuaciones de primer grado simultáneas con dos incógnitas[12], una única solución o ninguna.

16.1.2.2.1 El método gráfico

Está basado en el hecho de que cada ecuación de primer grado con dos incógnitas se representa en un sistema de coordenadas cartesianas, con una recta; los puntos de la recta están representados por parejas de números reales, cuya primera componente es x, y su segunda componente es y.

Si existe algún punto común a las dos rectas, ese punto ha de ser una solución común para las dos ecuaciones.

Si las rectas son paralelas, el punto no existe, y no hay solución común para las dos ecuaciones; y si las dos ecuaciones representan a la misma recta, todo punto es una solución común.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= -8, \end{aligned}$$

gráficamente se representa:

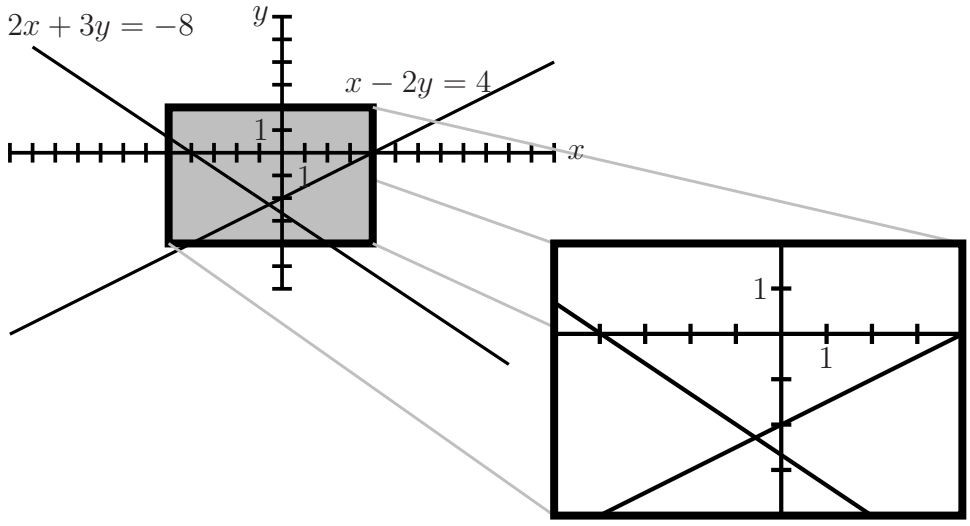


Figura 16.2

[12]En 1303 el matemático chino Chu Shinh Chieh desarrolló un estudio detallado de los sistemas de ecuaciones en la obra *Ssu-yüan yü-Chien*, que traduce *Espejo preciso de los cuatro elementos*.

El punto[13] donde se intersecan las rectas que representan las dos ecuaciones está cerca de $x = -0,5$ y $y = -2,3$. Como observamos, este método en general no nos dice exactamente cuál es la solución.

Ejercicio

Resuelva el sistema de ecuaciones anterior de manera gráfica, en un plano como el de la figura 16.1, en el cual los ejes no son perpendiculares entre sí. Use rectas paralelas o perpendiculares o combinadas para representar las parejas ordenadas (soluciones) de cada ecuación y determine con la mayor aproximación posible la solución del sistema. Compare y analice los resultados. Pruebe con otros sistemas de ecuaciones.

16.1.2.2.2 El método de igualación

En este método expresamos una cualquiera de las incógnitas del sistema en términos de la otra, en ambas ecuaciones e igualamos los resultados; con esto eliminamos una de las incógnitas y quedamos en el caso de una ecuación con una incógnita que ya sabemos resolver.

Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 5x + 7y &= 11, \end{aligned}$$

expresamos x en términos de y en las dos ecuaciones, y obtenemos:

$$x = \frac{4 - 3y}{2} \qquad x = \frac{11 - 7y}{5}$$

lo que significa que

$$\frac{4 - 3y}{2} = \frac{11 - 7y}{5}.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$5(4 - 3y) = 2(11 - 7y),$$

[13] En este método la precisión de las soluciones depende de la escala que tomemos, y en ningún caso es total, pero podemos mejorarla haciendo amplificaciones sucesivas alrededor de la solución.

cuya solución es

$$y = -2.$$

El valor de x, lo encontramos remplazando el valor de y que se acaba de encontrar en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema original; por ejemplo en:

$$2x + 3y = 4,$$

remplazamos $y = -2$

$$2x + 3(-2) = 4,$$

y obtenemos

$$x = 5.$$

Entonces, la solución del sistema es:

$$x = 5 \qquad y = -2.$$

16.1.2.2.3 El método de sustitución

Expresamos una cualquiera de las incógnitas en términos de la otra en una de las ecuaciones, y remplazamos esta expresión en la otra ecuación, para conseguir de nuevo una ecuación de primer grado con una sola incógnita que ya sabemos resolver.

Por ejemplo, en el sistema anterior, expresamos x en términos de y en la primera ecuación:

$$x = \frac{4 - 3y}{2},$$

y sustituimos esta expresión en la segunda ecuación,

$$5x + 7y = 11,$$

obteniendo

$$5\left(\frac{4 - 3y}{2}\right) + 7y = 11,$$

que es una ecuación con solo una incógnita cuya solución es

$$y = -2.$$

Remplazando este valor en la primera ecuación, conseguimos

$$x = 5.$$

¡Como debe ser!

16.1.2.2.4 El método de reducción

Consiste en multiplicar una de las ecuaciones por un cierto número, y la otra por otro número, de tal manera que el nuevo sistema tenga al menos una incógnita con coeficientes opuestos aditivos, de modo que cuando se sumen las dos ecuaciones, se eliminen los términos con iguales coeficientes.

Con el mismo ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 5x + 7y &= 11, \end{aligned}$$

multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por -2, resultando:

$$\begin{aligned} 10x + 15y &= 20 \\ -10x - 14y &= -22, \end{aligned}$$

sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{aligned} 10x + 15y &= 20 \\ -10x - 14y &= -22 \\ \hline y &= -2 \end{aligned}$$

podemos reiterar el proceso para eliminar y, o remplazar el valor hallado en una de las ecuaciones como se hizo con los otros métodos.

16.1.2.2.5 El método de los determinantes

Si aplicamos el método de reducción al sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

y multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda por $-a_1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1a_2x + b_1a_2y &= c_1a_2 \\ -a_1a_2x - a_1b_2y &= -a_1c_2. \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones nos queda:

$$b_1a_2y - b_2a_1y = c_1a_2 - a_1c_2.$$

Factorizando y despejando,

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

análogamente, obtenemos para

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Estos resultados se pueden escribir de forma más gráfica, si definimos el *determinante*[14] del sistema Δ_s como

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

y el determinante de x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

con lo que

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}.$$

Este método de solución es conocido como *la regla de Cramer*[15].
El sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

1. Tiene una solución única si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

[14]Los determinantes fueron estudiados inicialmente por el matemático japonés Seki Kowa alrededor de 1683, y, por separado, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz alrededor de 1693.

[15]En en honor a Gabriel Cramer (1704-1752), quien publicó esta regla en su obra *Introduction á l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750). En el *Ars Magna* de Cardano, aparece una regla para resolver un sistema de ecuaciones de 2×2, que básicamente consiste en la regla de Cramer, aunque sin desarrollar el paso final.

2. No tiene solución si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ y al menos una de las expresiones $(a_1c_2 - a_2c_1)$ y $(b_2c_1 - b_1c_2)$ no es cero.

3. Tiene infinitas soluciones si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ y $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$.

Puesto que los coeficientes son números reales; el caso 1., corresponde a dos rectas que se intersecan; el caso 2., a dos rectas paralelas, y el caso 3., a una sola recta.

16.1.2.3. Tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas

Los métodos enunciados para resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas se extienden fácilmente, por analogía, a tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas[16].

En el caso de los determinantes de orden superior al tercero, el cálculo se hace reduciendo un determinante de orden n, a n determinantes de orden $n-1$ hasta llegar a orden 2, los cuales ya sabemos resolver. Mostraremos con un ejemplo el procedimiento.

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2x - y + z &= 7 \\ x + 2y - z &= 6, \end{aligned}$$

escribimos el determinante del sistema Δ_s, cuya *primera* fila está formada por los coeficientes de x, y y z de la *primera* ecuación, la *segunda* fila, formada por los coeficientes de x, y y z de la *segunda* ecuación, y la *tercera*, por los de la *tercera*:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Naturalmente que podemos escoger cualquiera de las ecuaciones para que sea la primera, la segunda y la tercera; con esto *cualquier fila del determinante se puede cambiar con cualquier otra, y el determinante es el mismo.*

[16]Los babilonios resolvieron problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas e incluso hay un problema astronómico que conduce a un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas, la mayor parte de ellas lineales. El método que utilizaron para resolver este sistema era el de combinar las ecuaciones hasta llegar a calcular los valores de las incógnitas.

Por supuesto que el mismo razonamiento se vale para las incógnitas: cualquiera puede ser escogida como la primera, la segunda o la tercera, lo que implica que también *podemos intercambiar cualquier columna con otra, y el determinante debe ser el mismo.*

Para calcular un determinante 3×3, elegimos una cualquiera de las filas (o las columnas), habitualmente la que tenga más ceros, y multiplicamos cada uno de sus números a_{ij} (i es el número de la fila y j es el número de la columna donde está a_{ij}) y por un determinante 2×2, resultante de eliminar la fila y la columna donde está a_{ij} y por $(-1)^{i+j}$. En nuestro caso, si elegimos la primera fila para desarrollar el determinante, tenemos que:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_s &= 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4-(-1)) \\ &= 1(-1) - 1(-3) + 1(5) \\ &= -1 + 3 + 5 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el mismo procedimiento que en dos variables para construir el determinante asociado a la incógnita x, remplazando la columna correspondiente a la variable, por la columna de los términos que no son coeficientes de variable alguna.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Y calculamos, digamos por la primera columna:

$$\begin{aligned} \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 12 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12(-1) - 7(-3) + 6(2) = 21. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s},$$

para obtener

$$x = \frac{21}{7} = 3.$$

De manera similar,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta_s} = -2\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{7} + 7\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} - 1\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{7},$$

o sea

$$y = \frac{28}{7} = 4,$$

y para z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta_s} = 1\frac{\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{7} - 1\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{7} + 12\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{7},$$

con el resultado,

$$z = \frac{35}{7} = 5.$$

16.1.2.4. n ecuaciones simultáneas con n incógnitas

En general[17], si tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & & a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & & a_{mm}x_n = b_m \end{cases},$$

[17]Las justificaciones de estos procedimientos son tema del álgebra lineal; un texto inicial muy agradable es Campos, Garzón, Mora, Pérez y Villamarín (2004).

entonces, para cada i:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta_s},$$

donde

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & + & a_{12} + & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} + & & a_{2n} \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & + & a_{m2} + & & a_{mn} \end{vmatrix},$$

y

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & + & a_{12} + & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} + & & b_2 & & a_{2n} \\ & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & + & a_{m2} + & \cdots & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

se obtiene del anterior remplazando la columna de x_i por la columna de los términos independientes b_i. Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & & +2x_3 & & = & -2 \\ & 4x_2 & 3x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases},$$

calculamos el determinante del sistema:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

para ello, lo desarrollamos por la tercera fila, que es la que más ceros tiene, y obtenemos:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$+ 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

y cada uno de estos se desarrolla de la misma manera; por ejemplo, para el cálculo de

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

debemos tener en cuenta los signos:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

y obtenemos,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \Delta_s &= 3(4(-3) - 3(6) - 1(0)) + 2(-4(5) - 1(-4)) \\ &= 3(-30) + 2(-16) = -122. \end{aligned}$$

El cálculo del valor de un determinante puede ser bastante tedioso, pero hay por lo menos dos maneras de facilitarlo; uno es utilizar algunas propiedades de ellos, como:

- Un determinante es igual a cero si todos los elementos de una fila (o columna) son idénticos, o proporcionales, a los elementos de otra fila (o columna).
- Si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un factor dado, el determinante queda multiplicado por dicho factor.
- El valor de un determinante no se altera si se añade a cada elemento de una fila (o columna) el elemento correspondiente de otra fila (o columna) multiplicado por un factor constante.

La otra manera es *no hacerlo*, y dejarle el trabajo a una máquina. Programas como Matlab, Mathemática, Derive, Maple, etc., hacen las cuentas de manera transparente.

16.2. Ecuaciones de segundo grado

Gran parte del poder simplificador del álgebra reside en la manipulación de símbolos, que la hace muy eficiente; sin embargo, hay un gran valor pedagógico en las consideraciones históricas de su desarrollo -que hacen atractivas las presentaciones- y en algunos argumentos geométricos, que dan significado a las ecuaciones y conducen a su solución, en particular, en las de segundo grado.

Debido a que los números negativos aparecieron y se formalizaron relativamente tarde en la historia, y a que los métodos para plantear y resolver las ecuaciones en términos geométricos incluyen longitudes, áreas y volúmenes, y estas son cantidades positivas, debemos formular los problemas y las ecuaciones como se hizo históricamente, de manera que en ellas solo aparezcan números positivos.

Los cinco posibles casos de ecuaciones de segundo grado, expresados con números positivos, son los siguientes:

$$x^2 = bx \tag{1}$$
$$x^2 = c \tag{2}$$
$$x^2 + c = bx \tag{3}$$
$$x^2 = bx + c \tag{4}$$
$$x^2 + bx = c \tag{5}$$

16.2.1. Ecuaciones de tipo (1)

Una ecuación de la forma

$$x^2 = bx$$

tiene como única solución a $x = b$ pues, geométricamente, cero no es una solución aceptable.

16.2.2. Ecuaciones de tipo (2)

Una ecuación de la forma

$$x^2 = c$$

es el equivalente al problema de hallar la raíz cuadrada de un número, y para ello ya se han desarrollado diversos métodos.

16.2.2.1. El método del tanteo

Por lo que hemos hecho, ya somos expertos en este método; consiste naturalmente en proponer, "a la topa tolondra", una primera *solución tentativa*, la elevamos al cuadrado, y si el resultado es menor que el valor de c, intentamos de nuevo con un valor mayor hasta que lo logremos; si el resultado es mayor, vamos en la dirección contraria.

Podemos mejorarlo un poco haciendo consideraciones sobre algunas cifras; por ejemplo, si c es un número natural, y su cifra de las unidades es 1, la cifra de las unidades de la raíz, no puede ser 2, ni 5, sino 9 o 1, etc. Este proceso puede ser demorado, e innegablemente primitivo, pero funciona.

16.2.2.2. El método de Herón

Herón de Alejandría, en el siglo I, propuso una manera de aproximar la raíz positiva de un número c, que ilustramos con un ejemplo,

$$x^2 = 2$$

supone como raíz $x = \dfrac{3}{2}$, y para calcular una nueva aproximación, usa la regla:

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}.$$

Repitiendo el procedimiento[18] se obtiene

$$\frac{577}{408} = 1,414\ 215686245098039\ 215686245098039\ \cdots$$

que es una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

[18] Estas aproximaciones y cálculos repetidos se denominan *iteraciones*. Métodos similares fueron desarrollados por los matemáticos chinos Liu Hui (en el siglo III) y Chu Shih-Chieh (en el siglo XIII); fueron redescubiertos en Europa hacia 1800 por el matemático inglés W. G. Horner. También habían sido usados por el matemático árabe Yamschid al-Kaschi. En el capítulo 5 de (Acevedo y Falk, 1997) se encuentra un estudio detallado del método de Horner y otros métodos numéricos para resolver ecuaciones.

Ejercicios

1. *Combinando lo que hemos hecho hasta ahora, proponga ejercicios para resolver ecuaciones de la forma:*

$$ax^2 + b = c.$$

2. *Proponga una explicación*[19] *para el método de Herón; aplique el método para aproximar* $\sqrt{3}$.

16.2.2.3. El método de Euclides

Como consecuencia de la crisis provocada por el colapso de la aritmética pitagórica, la matemática griega dedicó sus mejores esfuerzos a la geometría, aunque con ella expresaron proposiciones que son equivalentes a algunos enunciados que actualmente se pueden expresar en términos simbólico-algebraicos que permiten resolver ecuaciones.

Los números fijos o desconocidos, los representaban con un segmento cuya longitud relativa a alguna unidad fija es la cantidad; un producto de dos cantidades lo interpretaban como el área de un rectángulo, y un producto de tres cantidades, como el volumen de un prisma rectangular recto. Este es el origen del uso de las palabras *cuadrado* y *cubo* para segundas y terceras potencias.

Por ejemplo, la identidad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

es asociada con la proposición II-4 de *Elementos*: "si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos".

Lo cual gráficamente se representa como:

[19] Compare estas fracciones con las reductas de la fracción continua para $\sqrt{2}$.

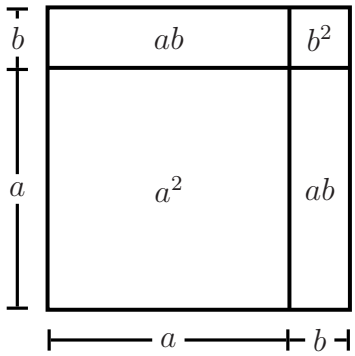


Figura 16.3

Pero vale la pena indicar que Euclides no utilizó letras como a y b y que además

> Euclides trabajó con líneas, regiones, sólidos y ángulos, no con cualquier análogo aritmetizado como longitudes, áreas, volúmenes, o grados; él nunca multiplicó magnitudes geométricas de cualquier clase (en contraste importante a su aritmética en los Libros 7-9, donde multiplicó enteros de la manera usual). De ahí que a^2 es ya una distorsión histórica [...] Se entiende ahora mucho mejor que la identidad [...] pertenece a la herencia de Euclides, sobre todo entre algunos árabes con su álgebra retórica (la frase "completando el cuadrado"es de origen árabe), y luego en la matemática europea, cuando los símbolos para cantidades y operaciones fueron gradualmente introducidos. La versión actual usada en [la identidad anterior] corresponde más o menos a principios del siglo XVII, con figuras tales como Thomas Harriot y René Descartes; Euclides y los árabes relevantes son parte de su historia, ellos son parte de la herencia de Euclides y esos árabes, y nuestro uso de [la identidad] forma parte de nuestra herencia de los dos. (Grattan-Guinness, 2004).

En la sección 9.1.2. mostramos una manera geométrica para hallar raíces cuadradas usando regla y compás.

16.2.3. Ecuaciones de tipo (3)

Las ecuaciones de la forma

$$x^2 + c = bx$$

fueron resueltas de varias maneras; destacamos aquí, una forma aritmética asumida por los babilonios, y una geométrica, que se obtiene al interpretar algebraicamente algunos procedimientos geométricos griegos.

16.2.3.1. El método babilónico

Los babilonios, alrededor de 1700 a.C., resolvieron problemas como el de hallar dos números, dados su suma y su producto; o formulado en forma geométrica, dados el área y el semiperímetro de un rectángulo, encontrar sus lados.

En general, si dos números x y y tienen una suma b y un producto c, entonces

$$y = b - x,$$

y como $xy = c$, tenemos que,

$$bx - x^2 = c.$$

Como los babilonios no conocían los números negativos, las ecuaciones se escribían solamente con términos positivos, o sea que en lugar de la anterior, consideraban la ecuación equivalente:

$$x^2 + c = bx$$

En particular, si la suma de dos números es 20 y el producto es 96, ¿cuáles son esos números? Los babilonios lo resolvían suponiendo que

$$x = 10 \text{ y } y = 10.$$

Puesto que la suma debe ser igual a 20, esta suposición es razonable, pero no correcta porque no satisface la segunda condición; para acomodarla, restaban el producto verdadero, 96, del producto obtenido:

$$100 - 96 = 4.$$

Tomaban la raíz cuadrada de 4,

$$\sqrt{4} = 2.$$

El resultado lo sumaban con el valor supuesto de x, y lo restaban del valor supuesto de y, obteniendo nuevas aproximaciones

$$x = 10 + 2 \qquad \text{y} \qquad y = 10 - 2,$$

y con esto llegaban a la respuesta correcta:

$$x = 12 \qquad \text{y} \qquad y = 8.$$

Por supuesto, no usaban los símbolos que hemos usado, ni resolvían casos generales, sino solo ejemplos concretos. La mayoría de ellos intentaba ilustrar un método general, que en forma de un algoritmo retórico queda:

1. Dividir la suma $S = x + y$ en la mitad.
2. Elevar al cuadrado el resultado de la parte 1.
3. Restar el producto $A = x \cdot y$ del resultado de la parte 2.

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A.$$

4. Tomar la raíz cuadrada del resultado de la parte 3.

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}\,.$$

5. Sumar el resultado de la parte 4 al resultado de la parte 1.

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A} + \frac{S}{2}.$$

Una justificación geométrica para este procedimiento se obtiene de la figura 16.4.

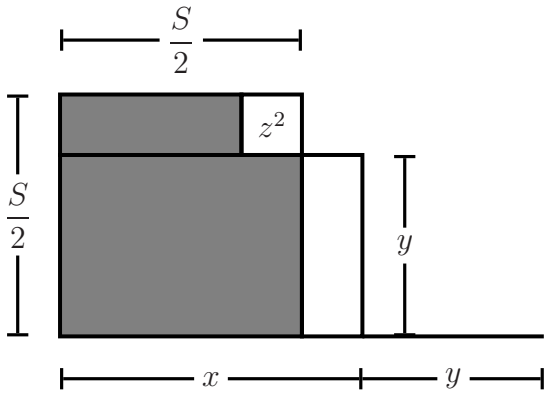


Figura 16.4

Un cuadrado de lado $\dfrac{S}{2}$ tiene el semiperímetro deseado $S = x + y$.

El valor $\left(\dfrac{S}{2}\right)^2$ excede el área deseada $xy = A$, en $z^2 = \left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - A$, que es el área del cuadrado de lado z.

La restante figura, sombreada, puede ser reconstruida como un rectángulo, cuyas dimensiones son:

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

y

$$y = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}\,.$$

Y una justificación algebraica la obtenemos llamando

$$x + y = S \qquad \text{y} \qquad xy = A,$$

y suponiendo que

$$x = \frac{S}{2} + z \qquad \text{y} \qquad y = \frac{S}{2} - z,$$

donde z es una cantidad por determinar; para ello, sustituimos estos valores en la ecuación $xy = A$, y obtenemos

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - z^2 = A,$$

por tanto

$$z^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - A,$$

o sea que

$$z = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}\,,$$

y solo consideramos el valor positivo de la raíz, que en la época era la única que tenía significado.

De esta manera

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

y

$$y = \frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}.$$

Un problema típico del álgebra babilónica antigua pide hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado; este es un caso particular del ejemplo anterior.

Ejercicio

Resuelva con el método babilónico el problema mencionado anteriormente.

16.2.3.2. El método árabe

Los árabes emplearon un método geométrico para resolver ecuaciones de este tipo[20], fundamentado en la proposición 5 del libro II de los *Elementos* de Euclides.

Veamos con la ecuación $x^2 + 77 = 18x$ a manera de ejemplo, en qué consiste el método:

1. Dibujamos un cuadrado de lado x y un rectángulo de área 77 unidades cuadradas, de tal manera que uno de los lados sea x (figura 16.5).

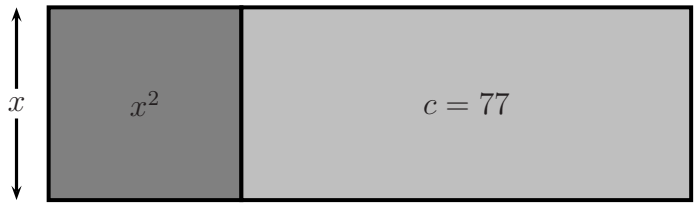


Figura 16.5

[20]Esta argumentación ya la habíamos presentado en Luque, Mora y Páez (2013, pp. 146-151), pero aplicada a números naturales.

2. El rectángulo compuesto por $x^2 + 77$ tiene como área $18x$, como vemos en la ecuación original; por tanto, el otro lado del rectángulo tiene como longitud 18 unidades (figura 16.6).

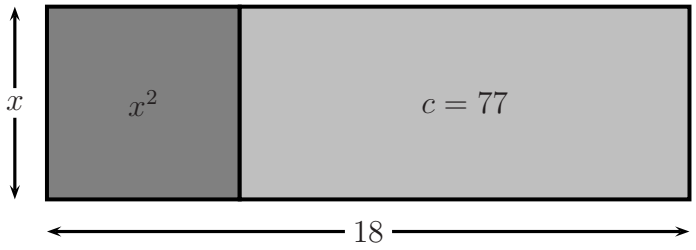


Figura 16.6

3. Trazamos un segmento que divida en dos partes iguales al rectángulo de área $18x$; es decir, la mediatriz del segmento cuya longitud es 18 unidades. Se obtienen dos casos, que x sea más pequeño o igual a 9 (la mitad del segmento de 18 unidades) o que x sea mayor que 9.

   En el primer caso, para encontrar el valor de x, se completa un cuadrado de lado 9 que incluya al cuadrado de lado x (figura 16.7).

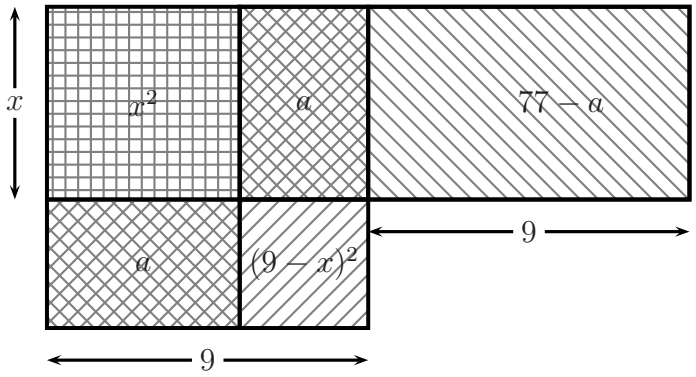


Figura 16.7

   Este cuadrado está compuesto por dos rectángulos de igual área a, y por dos cuadrados, uno de área x^2 y el otro de área $(9-x)^2$; sumando las áreas de este último con 77, que es el área del rectángulo c, se obtiene el área del cuadrado de lado 9, pues se tiene que

$$x^2 + a = 77 - a,$$

lo cual equivale a

$$(x^2 + a) + a = 77,$$

de donde

$$(9 - x)^2 + 77 = 9^2,$$

y, en consecuencia, x es 7.

En el segundo caso, para x mayor que 9, en el cuadrado de lado x se incluye un cuadrado de lado 9 (figura 16.8).

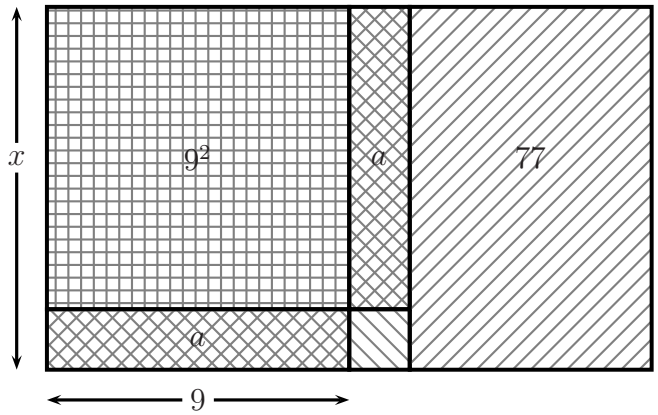


Figura 16.8

De esta manera, el rectángulo total queda dividido en dos rectángulos de igual área, uno de área $a + 9^2$ y el otro de área $(x - 9)^2 + a + 77$; se tiene entonces, que

$$(x - 9)^2 + a + 77 = 9^2 + a,$$

lo cual equivale a

$$(x - 9)^2 = 4,$$

y, por tanto, x es 11.

La proposición 5 del libro II, de los *Elementos* de Euclides establece que:

> Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada.

Esto es, de acuerdo con la figura 16.9, en lenguaje moderno,

$$AD \cdot AK + (LT)^2 = (GB)^2,$$

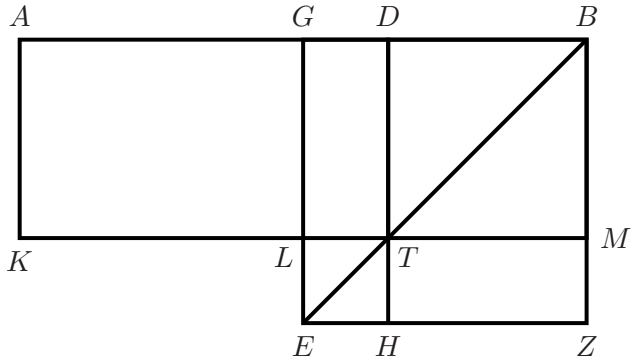


Figura 16.9

que, en el primer caso del ejemplo presentado anteriormente, equivale a decir

$$77 + (9 - x)^2 = 9^2.$$

Para demostrar esta proposición, se divide la recta AB en partes iguales por el punto G, y en partes desiguales por el punto D. Luego se construye el cuadrado $GEZB$ sobre la recta GB, y se traza la diagonal BE, y por el punto D una paralela a GE, la DH; por el punto T se traza la recta KM paralela a AB y EZ, y por el punto A, la recta AK paralela a GL y BM.

Puesto que los rectángulos GT y TZ son iguales, añadimos el rectángulo DM común, y entonces el rectángulo GM será equivalente al DZ; pero el rectángulo GM es igual a AL porque la recta AG es igual a la GB, y, por tanto, el rectángulo AL también es igual al DZ.

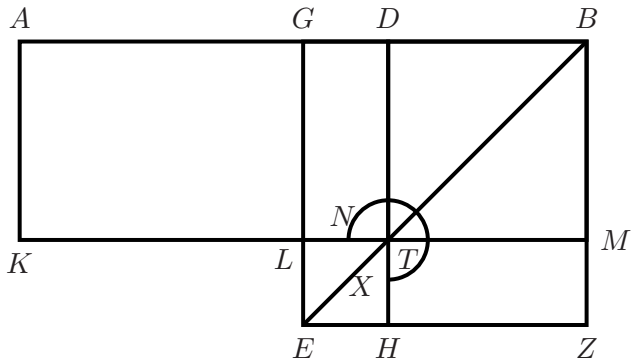


Figura 16.10

Añadiendo el rectángulo GT común, entonces el rectángulo AT es equivalente al *gnomon* MNX; pero el AT está comprendido por las rectas AD y DB porque DT es igual a DB; luego el *gnomon* MNX será equivalente a dicho rectángulo.

Añadimos ahora el cuadrado LH común, que equivale a cuadrado de GD, y el *gnomon* MNX más el cuadrado LH será equivalente al rectángulo comprendido por las rectas AD y DB más el cuadrado de GD; pero el *gnomon* MNX y el cuadrado LH forman el cuadrado $GEZB$, que es el construido sobre GB; luego el rectángulo comprendido por las rectas AD y DB más el cuadrado de GD equivale al cuadrado de GB.

16.2.4. Ecuaciones de tipo (4)

Para las ecuaciones de la forma

$$x^2 = bx + c,$$

presentamos:

16.2.4.1. El método griego

Este método, conocido como *aplicación de áreas*, se usa para la solución de ecuaciones cuadráticas de tipos (3), (4) y (5). Aplicar un área a un segmento de longitud b consiste en levantar segmentos perpendiculares, de una longitud dada, sobre este segmento hasta completar un rectángulo.

Si bien los griegos no utilizaron la aplicación de áreas con la intención de resolver alguna ecuación de segundo grado, la interpretación algebraica que está implícita en el método permite utilizarlo con este propósito. Para este caso, el proceso se describe así:

i. Construir el segmento $\overline{AB}$ con $AB = b$.

ii. Levantar una perpendicular $\overline{CB}$ a $\overline{AB}$ con $CB = \sqrt{c}$.

iii. Bisecar $\overline{AB}$ en M.

iv. Con centro en M y radio MC, construir un círculo.

v. Llamar D al punto donde el círculo encuentra la extensión de $\overline{AB}$ a través de B. Luego $x = AD$.

En la figura 16.11, se muestra la construcción.

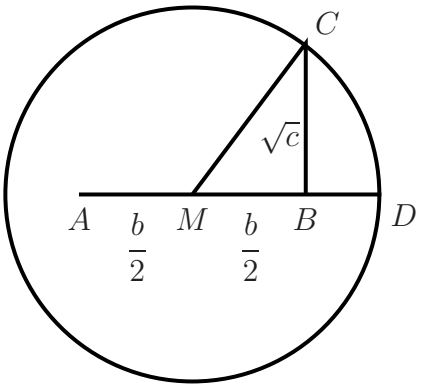


Figura 16.11

Demostremos, geométricamente, que el segmento AD es la solución de la ecuación. El término bx en la ecuación $x^2 = bx + c$ representa el área de un rectángulo.

Sobre un segmento de línea b, *aplicamos un área* a b, levantando perpendiculares de longitud x sobre este; el área aplicada es, entonces, bx.

Se debe mostrar que este rectángulo con otro rectángulo con área c, forman un cuadrado de lado x, con área x^2.

$\overline{AB}$ tiene la longitud dada b y $\overline{AD}$ tiene la longitud construida x.

Si levantamos perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{DG}$, ambas de longitud x (figura 16.12) para hacer un cuadrado $ADGE$ de área x^2, puesto que el rectángulo $ABFE$ tiene área bx, necesitamos demostrar que el rectángulo $BDGE$ tiene área c.

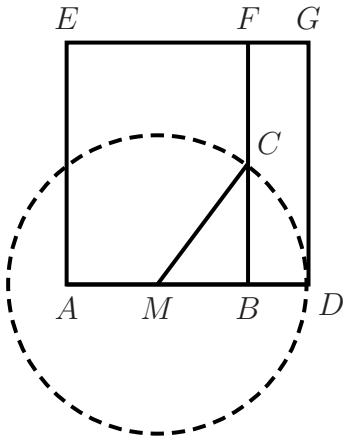


Figura 16.12

Por ser radios de la misma circunferencia, $MD = MC$; por tanto, un cuadrado sobre $\overline{MD}$, $MDHJ$, tiene la misma área que el cuadrado sobre $\overline{MC}$, el cuadrado 1.

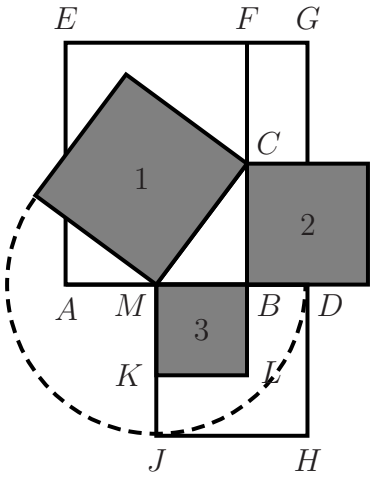


Figura 16.13

Por el teorema de Pitágoras la suma de las áreas de los cuadrados 3 ($MBLK$) y 2 (figura 16.13) es igual al área del cuadrado 1, que, a la vez, es igual al área de $MDHJ$. Por tanto, sustrayendo el cuadrado $MBLK$ del cuadrado $MDHJ$, la pieza restante, el polígono $BDHJKL$, tiene la misma área del cuadrado 2, que es igual a c, como se observa en la figura 16.14.

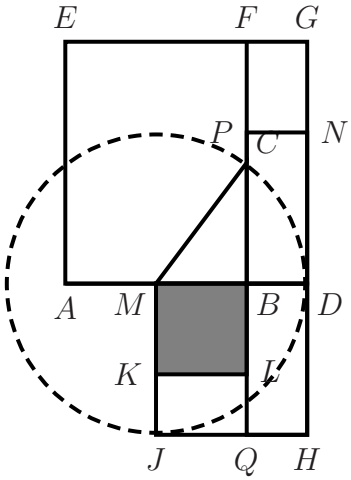


Figura 16.14

Así, el rectángulo $BDHQ$ es igual al rectángulo $PNDB$, y el rectángulo $KJQL$ es igual al rectángulo $PNGF$, con lo cual el rectángulo $BDGF$ tiene, en verdad, área igual a c, como lo queríamos demostrar.

Ejercicio

A partir de la figura 16.15, busque un razonamiento geométrico para resolver la ecuación $x^2 = 10x + 11$.

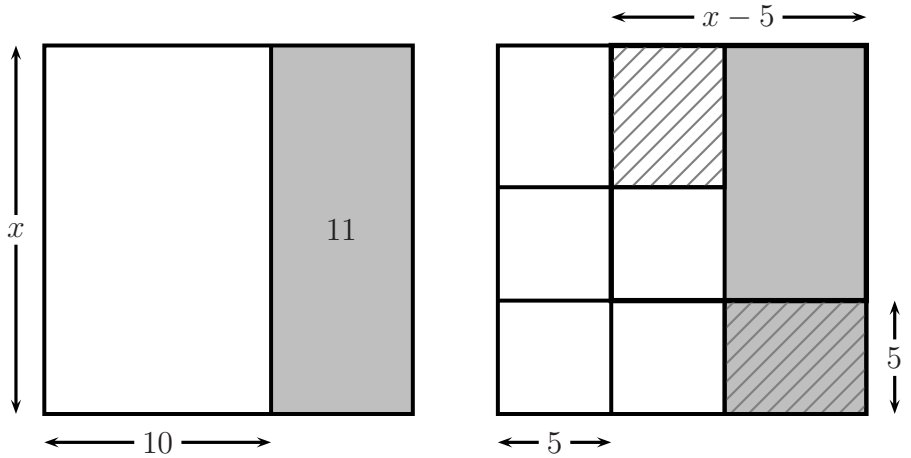


Figura 16.15

16.2.4.2. El método de Descartes

En el siglo XVII, en su libro *La geometría* (1947, pp. 56-59), René Descartes (1595-1650) describió un método geométrico para la construcción de la solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 = bx + c^2,$$

donde, de nuevo, muestra solamente las raíces positivas.

La construcción es como sigue:

i. Construir $\overline{AB}$ con $AB = c$.

ii. Levantar una perpendicular, $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$ con $AC = \dfrac{b}{2}$.

iii. Construir un círculo con centro en C y radio $\overline{AC}$.

iv. Construir una línea entre B y C que interseque el círculo en E y en D.

v. La solución es $x = BE$.

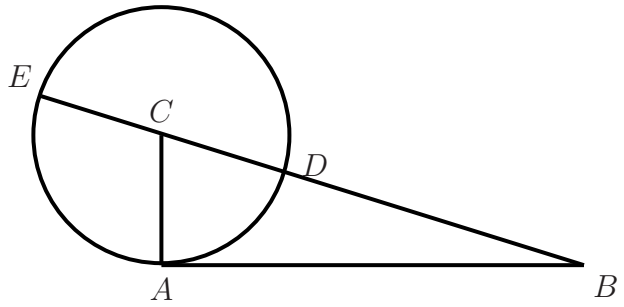


Figura 16.16

Para justificar la construcción, usamos el teorema de Pitágoras. Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, entonces

$$CB^2 = AC^2 + AB^2,$$

o en términos de x, b y c:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2,$$

lo que se simplifica en

$$x^2 - bx = c^2,$$

o lo que es igual

$$x^2 = bx + c^2.$$

También $y = DB$ es solución de la ecuación cuadrática,

$$y^2 + by = c^2,$$

y el argumento es el mismo.

Ejercicios

1. *Use el teorema:*

   > *Si una secante y una tangente son trazadas a un círculo desde un punto fuera de él, la longitud de la tangente es la media proporcional entre la longitud de la secante y la longitud del segmento externo*

   para justificar la construcción de Descartes.

2. *Use el método griego y el de Descartes para resolver algunas ecuaciones cuadráticas, y haga una comparación entre ellos.*

16.2.4.3. El método de las fracciones continuas

Ejemplifiquemos el método con un caso simple: en la ecuación

$$x^2 = x + 1,$$

como $x = 0$ no es solución de la ecuación, supongamos que $x \neq 0$; dividimos ambos lados de la igualdad por x y obtenemos

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Y ahora, ¡el truco genial! Remplazamos x en el denominador de la fracción de esta igualdad para obtener

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}},$$

e insistimos

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}},$$

y podemos reiterar el proceso sin un último paso, hasta obtener la expresión:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

que por fortuna ya conocemos como el número de oro φ.

Pero algo no está bien, pues si no conocemos a cuál número corresponde la fracción continua, *¡no hemos resuelto algo!*

Sin embargo, podemos hacer de este fracaso un triunfo, porque puede que el método no sea útil para resolver ecuaciones de segundo grado, pero si encontramos otras formas de resolver estas ecuaciones, tendremos una manera de encontrar el número que corresponde a una fracción continua infinita.

Por ejemplo, de la ecuación

$$x^2 = bx + c,$$

obtenemos la fracción continua

$$x = b + \cfrac{c}{b + \cfrac{c}{b + \cfrac{c}{b + \cdots}}}$$

resolvemos la ecuación por cualquier otro método, que por fortuna hay otros, y con su solución obtenemos un valor para la fracción continua. En particular, si $b = 4$ y $c = 3$, la fracción continua

$$x = 4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cdots}}}$$

corresponde al número

$$2 + \sqrt{7}.$$

¡Y aún más ganancia! En la ecuación

$$x^2 = bx + c,$$

podemos despejar la x de la forma:

$$x = \sqrt{c + bx}\,,$$

y aplicamos el viejo truco de remplazar la x, ahora dentro del radical,

$$x = \sqrt{c + b\sqrt{c + bx}}\,,$$

de nuevo insistimos, para obtener la expresión:

$$x = \sqrt{c + b\sqrt{c + b\sqrt{c + b\sqrt{c + b\sqrt{c + \cdots}}}}}$$

Por supuesto, esta no es una forma de resolver la ecuación, pero sí una manera de encontrar un valor para estas expresiones infinitas. Por ejemplo, para calcular

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}}$$

resolvemos la ecuación

$$x^2 = x + 2,$$

y obtenemos

$$x = 2.$$

Este es un resultado *¡extraordinariamente hermoso!* Cada resultado parcial, tomando un número finito de términos, nos da un número irracional; esta es una forma de aproximar el número racional 2, con una sucesión infinita ¡formada solamente por números irracionales!

16.2.5. Ecuaciones de tipo (5)

Son ecuaciones de la forma

$$x^2 + bx = c.$$

Para su solución, estudiaremos dos métodos geométricos y uno algebraico.

16.2.5.1. El método árabe

El matemático árabe Tabit Ben Qurra representó geométricamente el polinomio

$$x^2 + 3x + 2$$

como un producto de factores, así: a x^2 como el área de un cuadrado de lado x, a $3x$ como tres rectángulos cada uno de dimensiones x y 1; y a 2 por dos cuadrados de lado 1.

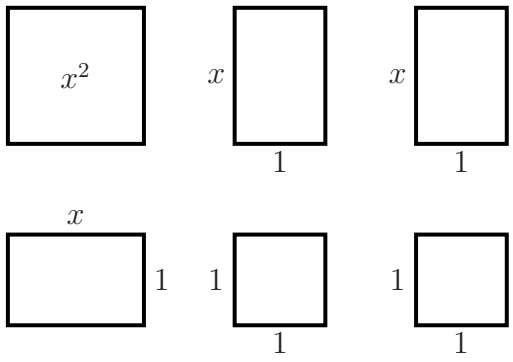


Figura 16.17

Si queremos representar la suma de estas áreas como un producto, nuestra tarea es formar un rectángulo con estas figuras. Una manera de hacerlo es

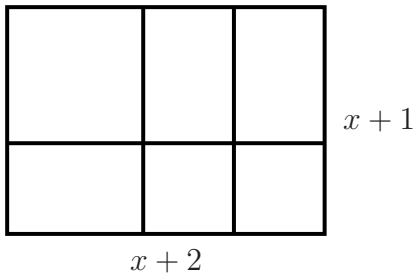


Figura 16.18

y por tanto

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

En el siglo IX, Al-Khwārizmī en su libro *al-jabr w'al muqābalah*, dio solución a ecuaciones cuadráticas, usando un método que conocemos como *compleción de cuadrados*. En su tiempo, tampoco se aceptaban números nega-

tivos, ni como coeficientes de las ecuaciones[21], ni como raíces, y sus argumentos son geométricos.

Como las longitudes, áreas y volúmenes son cantidades positivas, no hay cabida para los números negativos, y la forma en que los problemas cuadráticos son enunciados se limitan a ellas; por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 + 5x = 36$$

la enunciamos: cuando un cuadrado de lado x es añadido a un rectángulo con lados de longitud 5 y x, el resultado es un área con 36 unidades cuadradas.

Para resolver esta ecuación, Al-Khwārizmī dibuja un cuadrado de área x^2, y sobre cada uno de los lados de éste, cuatro rectángulos de dimensiones x y $\frac{5}{4}$; esta figura tiene, en suma, un área de 36 (figura 16.19).

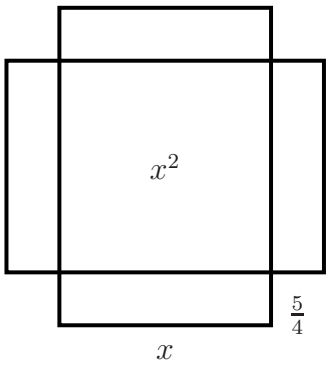


Figura 16.19

Entonces, para completar el cuadrado, se agregan cuatro cuadrados de lado $\frac{5}{4}$; con esto, se obtiene un cuadrado de lado $x + \frac{10}{4}$ y área $36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4}$ unidades (figura 16.20).

[21]Solo trescientos años después, Al-Samaw"al introdujo coeficientes negativos en las ecuaciones. Hasta el siglo XVII, la teoría de ecuaciones estuvo limitada a coeficientes y raíces positivas, pues los matemáticos europeos no aceptaban que las soluciones negativas y complejas fueran números; los antiguos matemáticos indios, como Brahmagupta, sí conocían las raíces negativas, pero fuera de China e India no se trabajaba con coeficientes negativos en los polinomios.

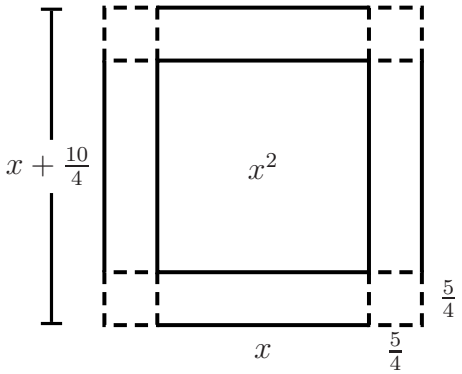


Figura 16.20

Luego, el lado del cuadrado debe ser $x + \dfrac{10}{4} = \dfrac{13}{2}$ y, por tanto, $x = 4$.

16.2.5.2. El método babilónico-árabe

Al parecer, los babilonios empleaban imágenes para resolver ecuaciones (Sessa, 2005) similares a las que presentaremos enseguida y los árabes emplearon un método[22] similar a aquel, basado en argumentos geométricos de Elementos, completando el cuadrado de otra forma, que nos permite encontrar la solución de una ecuación de este tipo. Para la misma ecuación mencionada, se dibuja un cuadrado de lado x y un rectángulo de área $5x$, obteniendo un rectángulo de lado $x + 5$ y área 36 unidades (figura 16.21).

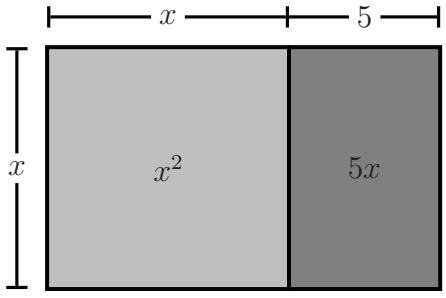


Figura 16.21

Luego, se cambia la figura obtenida por otra, con igual área, dividiendo el rectángulo de área $5x$ en dos rectángulos de área $\dfrac{5}{2}x$ (figura 16.22).

[22]Este método lo mostramos en Luque, Mora y Páez (2013, pp. 127-129), pero aplicado solo para números naturales.

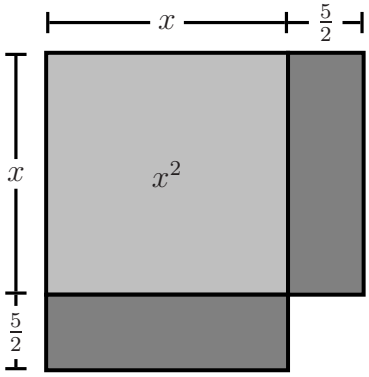


Figura 16.22

Para completar el cuadrado, se agrega un cuadrado de lado $\frac{5}{2}$ (figura 16.23).

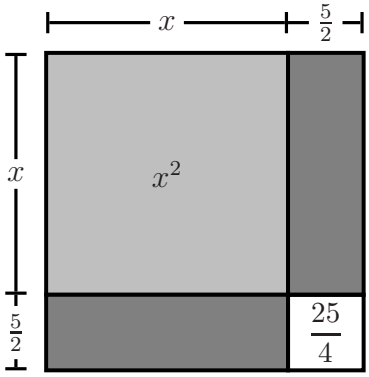


Figura 16.23

De esta manera, el área total del cuadrado es $36+\frac{25}{4}=\frac{169}{4}$, y la longitud del lado está dada por

$$x+\frac{5}{2}=\frac{13}{2},$$

es decir, $x=4$.

16.2.5.3. El método de Viète

A finales del siglo XVI, François Viète resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x^2+2bx=c,$$

sustituyendo

$$y = x + b,$$

elevando al cuadrado

$$y^2 = x^2 + 2bx + b^2,$$

de donde

$$y^2 = c + b^2,$$

y por tanto

$$y = \pm\sqrt{c + b^2}.$$

Es decir, que

$$x = y - b = \pm\sqrt{c + b^2} - b$$

¡Fenomenal!

16.2.6. Ecuaciones de segundo grado que incluyen números negativos como coeficientes

Una ecuación general de segundo grado donde los coeficientes pueden ser negativos puede escribirse de forma general como

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Presentaremos dos métodos geométricos que usan el método de las coordenadas.

16.2.6.1. El método de Carlyle

Es curioso que el método de Descartes no utilice coordenadas para resolver la ecuación cuadrática, pues él fue uno de los inventores. Sin embargo, Thomas Carlyle (1775-1881) propuso una manera que sí las usa.

Esta solución resuelve la ecuación

$$x^2 + bx + c = 0,$$

para todos los valores reales de b y c; además, muestra cuándo las soluciones no son reales (figura 16.24).

i. En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, ubicar los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (-b, c)$.

ii. Bisecar $\overline{AB}$ en M.

iii. Construir un círculo con centro M y radio $\overline{AM}$.

iv. Llamar P y Q los puntos donde el círculo interseca el eje x.

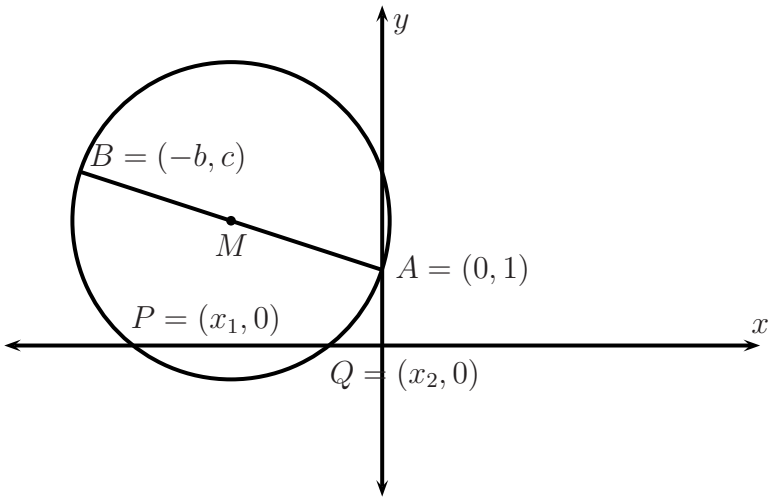


Figura 16.24

Si $P = (x_1, 0)$ y $Q = (x_2, 0)$, entonces x_1 y x_2 representan las soluciones de la ecuación. Para demostrar esta afirmación, sabemos que:

1. El círculo tiene el radio $r = \dfrac{AB}{2}$, y por tanto;

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-b-0)^2 + (c-1)^2}$$
$$r = \frac{\sqrt{b^2 + (c-1)^2}}{2}.$$

2. El centro del círculo es el punto medio de $\overline{AB}$, luego tiene coordenadas $\left(\dfrac{-b}{2}\,,\ \dfrac{c+1}{2}\right)$ y la ecuación del círculo es:

$$\left(x - \frac{-b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2.$$

Remplazando r y haciendo las cuentas,

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{4},$$

o sea

$$x^2+bx+\frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}-c,$$

que es equivalente a

$$x^2+bx+c=0.$$

3. Lo anterior significa que si x es una solución de la ecuación, entonces el punto $(x,0)$ está sobre el círculo.

Para diferentes valores de $(-b,c)$, el círculo interseca al eje x en dos puntos, tangencialmente en un punto o en ninguno, cuando el radio sea respectivamente mayor, igual o menor que la distancia entre el centro del círculo y el eje x, que es $\dfrac{|c-1|}{2}$.

16.2.6.2. El método de Von Staudt

Otro método para resolver la ecuación

$$x^2-px+q=0,$$

utilizando coordenadas, fue propuesto por el matemático alemán Karl Von Staudt (1798-1867). La idea es ubicar los puntos

$$\left(\frac{q}{p}\,,\,0\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{4}{p}\,,\,2\right)$$

en un plano cartesiano (figura 16.25).

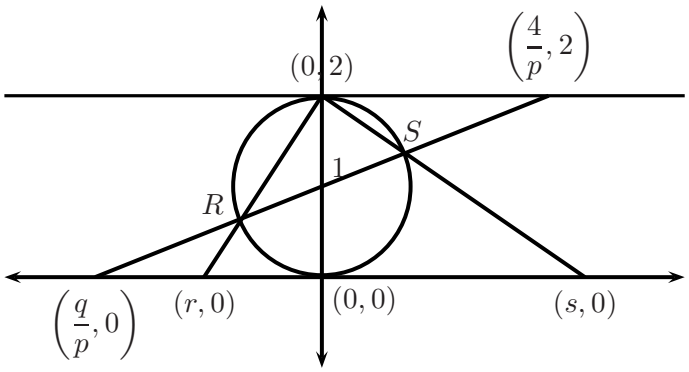


Figura 16.25

Unimos con un segmento estos puntos; el segmento corta a la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1 en los puntos R y S, cuyas proyecciones desde $(0,2)$ son $(r,0)$ y $(s,0)$, respectivamente; r y s son las raíces de la ecuación dada.

Para demostrar que la afirmación es cierta, consideremos la ecuación de la circunferencia con centro en $(0,1)$ y radio 1:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{q}{p}\,,\,0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}\,,\,2\right)$:

$$2px - (4-q)y - 2q = 0.$$

Los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia, R y S, tienen coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2), respectivamente; sus proyecciones desde $(0,2)$, están dadas por los puntos de corte de las rectas que pasan por los puntos (x_1,y_1) y $(0,2)$, y (x_2,y_2) y $(0,2)$ con el eje x; estos son, en términos de las coordenadas de R y S:

$$\begin{aligned}(r,0) &= \left(\frac{-2x_1}{y_1-2}\,,0\right)\\ (s,0) &= \left(\frac{-2x_2}{y_2-2}\,,0\right).\end{aligned}$$

Para ver que r y s efectivamente son soluciones de la ecuación propuesta, los remplazamos en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}\right)^2 - p\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}\right) + q = 0\\ \left(\frac{-2x_2}{y_2-2}\right)^2 - p\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}\right) + q = 0,\end{aligned}$$

y haciendo las cuentas obtenemos una igualdad. Ilustremos el método con ejemplos.

1. Para resolver la ecuación

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

determinamos los puntos $\left(\frac{q}{p}, 0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}, 2\right)$, que para nuestro caso son $(-4, 0)$ y $(2, 2)$, respectivamente. Hallamos las proyecciones, desde $(0, 2)$ sobre el eje x, de los puntos de corte entre la recta que pasa por los dos puntos ya determinados y la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, los cuales son las soluciones de la ecuación dada; -2 y 4 (figura 16.26).

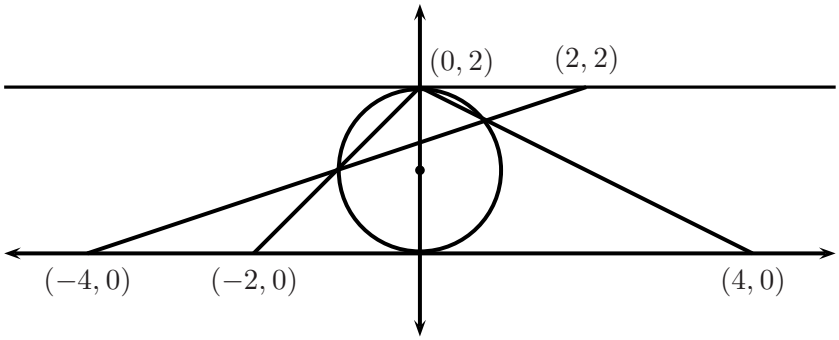


Figura 16.26

En este caso obtuvimos dos soluciones reales y diferentes.

2. En el caso de la ecuación

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

se tiene que $\left(\frac{q}{p}\, 0\right) = \left(\frac{1}{2}\, 0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}\, 2\right) = (2, 2)$, y obtenemos solo un punto de intersección de la recta que pasa por estos dos puntos y la circunferencia; en consecuencia, hay una única solución que es 1.

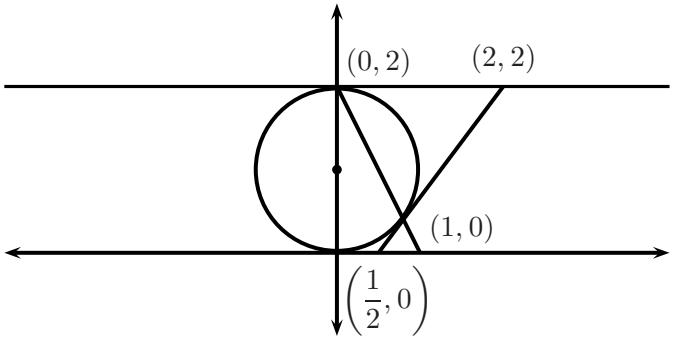


Figura 16.27

3. Por último, para la ecuación

$$x^2 + 3x + 6 = 0,$$

$$\left(\frac{q}{p}\,,\,0\right) = (-2,0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{4}{p}\,,\,2\right) = \left(-\frac{4}{3}\,,\,2\right).$$

El segmento que une los puntos anteriores no corta la circunferencia y, por lo tanto, esta ecuación no tiene soluciones reales.

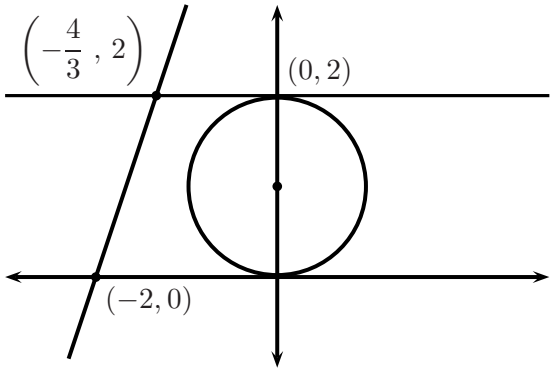


Figura 16.28

Ejercicio

Consulte sobre el método de Horner para resolver la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. *Resuelva la ecuación* $x^2 + 252x - 5292 = 0$ *con este método.*

16.2.6.3. El método axiomático

16.2.6.3.1 La solución

Toda ecuación de segundo grado, también llamada *ecuación cuadrática*, puede ser escrita en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ con } \ a \neq 0,$$

donde x es la incógnita, en tanto que a, b y c son constantes, y a es un número distinto de cero. Para resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b, $c \in \mathrm{R}$ con $a \neq 0$, sumamos $(-c)$ a ambos lados de la ecuación y obtenemos

$$(ax^2 + bx + c) + (-c) = 0 + (-c).$$

Por los axiomas C2, C3 y C4

$$ax^2 + bx = (-c).$$

Multiplicamos por $\dfrac{1}{a}$ a ambos lados de la ecuación para conseguir

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx) = \frac{1}{a}(-c),$$

y por los axiomas C9, C11, la definición de división, y el teorema 33,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Sumamos ahora $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados de la ecuación, con el propósito de formar un cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

y por el axioma C11,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Remplazando en la ecuación, y usando el teorema 28[23], obtenemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Por los teoremas 14, 29 y 32,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}.$$

[23] Si $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$ entonces $\dfrac{c}{d} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

Por el axioma C5 y el teorema 14,

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Sumando la expresión $\left(-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ a ambos lados de la igualdad, y por el axioma C4,

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Por los axiomas C2, C4 y C11, deducimos que para todo x, y en R

$$x^2-y^2=(x-y)\,(x+y),$$

y como $a^2=b$ significa que $a=\sqrt{b}$, conseguimos que,

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Por la definición de radicación

$$\sqrt{4a^2}=2a,$$

y por el teorema 25 tenemos que:

$$x=\frac{-\,b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{o}\quad x=\frac{-\,b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

de donde concluimos que la ecuación general de segundo grado tiene dos soluciones posibles, que llamaremos respectivamente x_1 y x_2.

Como la diferencia entre las dos raíces es solamente un signo antes del radical, es usual resumir las dos soluciones en una sola fórmula escribiendo:

$$x=\frac{-\,b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Notemos que no siempre obtenemos números reales como soluciones, pues por el teorema 47, *el cuadrado de un número real siempre es positivo o cero*; es decir, que *no existen raíces cuadradas reales para los números negativos*;

lo que significa que obtenemos solución real para una ecuación cuadrática solo si la cantidad

$$b^2 - 4ac,$$

llamada *el discriminante de la ecuación*, es positivo, en cuyo caso, hay dos soluciones diferentes; o cuando el discriminante es 0, en cuyo caso, las dos soluciones se funden en una sola:

$$x = -\frac{b}{2a},$$

y decimos que x es una *raíz doble* o *raíz con multiplicidad dos*[24].

Cuando el discriminante es negativo, no existen soluciones reales.

Los axiomas de campo, como hemos visto, son insuficientes para garantizar la existencia de soluciones para toda ecuación cuadrática. Ello hizo necesario construir el campo de los números complejos, en el cual tienen solución todas las ecuaciones cuadráticas.

De todas formas, *las ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales tienen, a lo más, dos soluciones.*

Ejemplo

La ecuación

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

tiene por soluciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} \\ x &= \frac{2 \pm 8}{6}, \end{aligned}$$

lo que significa que las dos raíces son:

$$x_1 = \frac{2+8}{6} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{2-8}{6},$$

[24]Esta relación fue encontrada inicialmente por Isaac Newton.

o mejor,

$$x_1 = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -1.$$

16.2.6.3.2 Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación de segundo grado

Entre las raíces de una ecuación de segundo grado y los coeficientes de sus términos existen algunas relaciones interesantes; por ejemplo, como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

si las sumamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}, \end{aligned}$$

y si las multiplicamos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

En resumen[25],

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Este resultado permite resolver el problema babilónico de hallar dos números conocidos su suma y su producto. Para ello construimos una ecuación de segundo grado, eligiendo por comodidad, $a = 1$. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 14 \\ x_1 \times x_2 &= 8, \end{aligned}$$

la ecuación correspondiente es:

$$x^2 - 14x + 8 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{164}}{2},$$

que podemos aproximar como

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{14 + 12,8}{2} = 13,4 \\ x_2 &= \frac{14 - 12,8}{2} = 0,6. \end{aligned}$$

[25]Estas relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado fueron observadas por Viète para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, por esta razón se conocen como *relaciones de Viète*

Ejercicios

1. *Encuentre el valor de k para el cual la suma de las soluciones de la siguiente ecuación es igual al doble de su producto.*

$$4x^2 + 5x + k = 0.$$

2. *Cada una de las soluciones de $x^2 + x - 6 = 0$ difiere del cuadrado de la otra en un mismo número c. Sin resolver la ecuación dada, determine el valor de c.*

3. *Encuentre todos los números que poseen la propiedad de que, al sumarse a sí mismos, el resultado es igual que al multiplicarse por sí mismos.*

16.2.6.3.3 Método para factorizar cualquier polinomio de segundo grado con coeficientes reales

Un polinomio de segundo grado se puede factorizar de forma mecánica, de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\,(x - x_2),$$

donde $a \neq 0$, x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática.

Esto se debe a que:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)\,(x - x_2) &= (ax - ax_1)\,(x - x_2) \\ &= ax^2 - ax\,x_2 - ax\,x_1 + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)\,x + a\,x_1x_2 \\ &= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a\left(\frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Ejemplo

Para factorizar el polinomio

$$3x^2 - 5x + 2,$$

resolvemos la ecuación

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 3 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 3},$$

para hallar que $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, y por tanto

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 2 &= 3\,(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right) \\ &= (x-1)\,(3x-2). \end{aligned}$$

¡Lo que uno diera por saber trucos como este en el bachillerato, para no tener que aprenderse 12 métodos de factorización!

16.2.6.3.4 Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

En algunos casos no es necesario recurrir a herramientas tan poderosas como las que hemos desarrollado para resolver una ecuación cuadrática; si, por ejemplo, el polinomio es fácilmente factorizable, aplicamos de manera directa el teorema 25: si a y b son números reales, entonces

$$a \times b = 0 \text{ si y solo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Ejemplos

1. La ecuación

   $$x^2 + 2x - 15 = 0$$

   es equivalente a

   $$(x-3)(x+5) = 0,$$

   que a su vez es equivalente al par de ecuaciones:

   $$x - 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + 5 = 0,$$

   cuyas soluciones son

   $$x = 3 \qquad\qquad x = -5.$$

2. La ecuación
$$16x^2 = 2x + 5$$
es equivalente a
$$16x^2 - 2x - 5 = 0,$$
y también a
$$(8x - 5)(2x + 1) = 0,$$
cuyas soluciones son:
$$x = \frac{5}{8} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{1}{2}\,.$$

16.3. Ecuaciones de tercer grado

16.3.1. El método babilónico

Los babilonios resolvieron problemas que conducen a raíces cúbicas[26]; uno de estos problemas equivale a resolver el sistema de ecuaciones:
$$12x = z, \quad y = x, \quad xyz = V,$$
donde V es un volumen dado, lo que es equivalente a resolver la ecuación cúbica:
$$V = 12x^3.$$

Para ello usaban tablas de cubos y raíces cúbicas. Una ecuación de la forma
$$ax^3 + bx^2 = c$$
la reducían a una forma estándar
$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3},$$
multiplicando por $\dfrac{a^2}{b^3}$.

Luego, mirando en las tablas, determinaban el valor de $\dfrac{ax}{b}$ y con ello el valor de x.

[26]En Luque, Mora y Torres (2009, pp. 142-173) se desarrollan varios métodos geométricos y algebraicos de diferentes épocas para la solución de ecuaciones de tercer grado.

16.3.2. El método de Scipione del Ferro-Tartaglia -Cardano

Scipione del Ferro (1465-1526), un profesor de matemáticas de la Universidad de Bolonia, fue el primero en resolver algebraicamente la ecuación cúbica:

$$x^3 + px = q.$$

Él no publicó su solución, pero, antes de morir, reveló el secreto de su descubrimiento a Antonio Maria Fior, uno de sus alumnos, no el más brillante.

El rumor del descubrimiento le llegó a Nicolo Tartaglia, quien se dedicó a buscar una solución por sus propios medios. Fior retó públicamente a Tartaglia a que resolviese treinta ecuaciones propuestas por él, y Tartaglia lo logró, mientras que Fior no pudo resolver una sola de las propuestas por Tartaglia.

Otro matemático interesado en el problema, Girolamo Cardano (1501-1576), se enteró del triunfo de Tartaglia, y lo invitó a su casa, prometiéndole presentarle a un bienhechor que resolvería sus problemas de dinero.

En marzo del año 1539, Tartaglia reveló su secreto a Cardano, quien se apropió del método y lo publicó en su libro *Ars magna sive de regulis algebraicis* de 1545. Tartaglia protestó contra el plagio de Cardano, pero Ludovico Ferrari (1522-1565), alumno de Cardano, contestó acusando a Tartaglia de haber hecho lo mismo que Cardano, plagiando a del Ferro.

Finalmente, la fórmula para la resolución de las ecuaciones de tercer grado ha pasado a la historia como la fórmula de Cardano-Tartaglia.

En el *Ars magna*, Cardano presentó un estudio la ecuación cúbica, caso por caso, según que los términos de los distintos grados aparezcan en un mismo lado, o en los dos lados de la igualdad, ya que los coeficientes de las potencias son necesariamente positivos[27].

Trató las ecuaciones numéricamente, pero pensó geométricamente, e hizo referencia a un tipo de compleción del cubo. Cardano utilizó muy poco el álgebra sincopada y, como los árabes, sus ecuaciones con coeficientes numéricos representan categorías generales. Así, cuando escribe:

"Sea el cubo y seis veces el lado igual a 20" (o $x^3 + 6x = 20$),

[27]Cardano no aceptó ni coeficientes ni soluciones complejas para las ecuaciones; por ejemplo, al plantearse el problema de dividir 10 en dos partes cuyo producto fuese 40, encontró $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ y las calificó de *sofisticadas*, tan sutiles como inútiles.

consideraba esto como una ecuación de la forma

$$x^3 + px = q.$$

En notación moderna, su método de solución es el siguiente: reemplaza

$$x = u - v,$$

y elije u y v de manera que

$$uv = \frac{p}{3},$$

y como

$$(u - v)^3 + 3uv\,(u - v) = u^3 - v^3,$$

entonces

$$u^3 - v^3 = q.$$

Por ejemplo, en la ecuación:

$$x^3 + 6x = 20,$$

$$uv = 2$$

$$3uv = 6$$

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 20,$$

de donde

$$u^3 - v^3 = 20.$$

Eliminando v, resulta

$$u^6 = 20u^3 + 8,$$

que es una ecuación cuadrática en u^3, cuya solución positiva es

$$u^3 = \sqrt{108} + 10,$$

o sea

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}\,},$$

y como

$$u^3 - v^3 = 20,$$

se tiene que

$$v = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}\,},$$

y por tanto

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}.$$

Cardano ofreció una formulación verbal de la regla equivalente a la solución moderna de la ecuación

$$x^3 - px = q$$

que corresponde a la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

16.3.3. El método de Viète

Para resolver la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

Viète remplazó

$$x = y - \frac{b}{3}.$$

Esto lo llevó a una ecuación de la forma

$$y^3 + py + q = 0,$$

en ella remplazó

$$y = z - \frac{p}{3z},$$

y obtuvo

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0,$$

que es una ecuación cuadrática en z^3

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Y de ella obtuvo dos valores, pero solo empleó la raíz cúbica positiva de z^3.

16.3.4. Solución moderna

Toda ecuación de tercer grado puede escribirse en la forma:

$$ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$$

donde x es una incógnita, e, f, g y h son constantes, y e es un número distinto de cero.

Para resolver esta ecuación, multiplicamos ambos lados de ella por $\frac{1}{e}$, y obtenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a = \frac{f}{e}$, $b = \frac{g}{e}$ y $c = \frac{h}{e}$.

Para eliminar el término con x^2, cambiamos la incógnita x por otra incógnita y, de manera que:

$$x = y - \frac{a}{3}.$$

Remplazamos en la ecuación, y obtenemos:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Hacemos las operaciones

$$\left[y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3\right] + a\left[y^2 - 2y\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right] + by - \frac{ba}{3} + c = 0;$$

simplificamos

$$\left[y^3 - y^2a + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27}\right] + a\left[y^2 - \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9}\right] + \left[by - \frac{ba}{3}\right] + c = 0;$$

multiplicamos

$$y^3 - y^2a + y\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0;$$

reducimos

$$y^3 + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27} - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0;$$

reagrupamos

$$y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0;$$

simplificamos

$$y^3 + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{3}\right)}_{p} y + \underbrace{\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)}_{q} = 0,$$

y bautizamos las expresiones entre paréntesis con nuevos nombres, para obtener la ecuación:

$$y^3 + py + q = 0,$$

que es equivalente a la ecuación que pretendemos resolver si hacemos:

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$
$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

¡No, aún no hemos terminado! Vamos a medio camino. Hasta ahora hemos eliminado un término de la ecuación original.

Un lector inquieto y riguroso intentará justificar cada procedimiento con los axiomas y teoremas de los números reales, estudiados en el capítulo anterior.

El siguiente paso consiste en cambiar una ecuación de tercer grado con una incógnita, en dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas; para ello cambiemos

$$y = u + v.$$

Remplazando en la ecuación, obtenemos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0;$$

operando

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0;$$

factorizando

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = 0;$$

reagrupando

$$u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q = 0,$$

¡y el punto culminante!, ¡la idea!: si la suma debe ser 0, ¡eso se puede lograr repartiendo el cero en dos pedazos!

$$u^3 + v^3 + q = 0 \text{ y } (3uv+p)(u+v) = 0.$$

¡Grandioso! Ya nuestro problema se reduce a resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ 3uv + p &= 0, \end{aligned}$$

puesto que si este factor es 0, la segunda ecuación por resolver, se cumple. Debemos dar otra cara a la última ecuación para que resulte algo conocido; si la escribimos como:

$$uv = -\frac{p}{3},$$

y elevamos al cubo en ambos lados, obtenemos

$$u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3;$$

poniéndolas juntas,

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= \left(-\frac{p}{3}\right)^3, \end{aligned}$$

vemos que debemos encontrar dos números: $z_1 = u^3$ y $z_2 = v^3$, de manera que su suma sea $-q$ y su producto sea $\left(-\frac{p}{3}\right)^3$, lo que nos conduce a una ecuación de segundo grado (recordemos las relaciones de Viète):

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$
$$z_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2},$$

que podemos escribir, de forma más simétrica, introduciendo el 2 del denominador en la raíz,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

o sea que[28]

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

[28]Este paso debe hacerse con cuidado, como lo señaló Leonhard Euler en 1732; siempre que calculamos la raíz cúbica de un número real, hay tres raíces; por ejemplo, la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene la raíz real $x = 1$ y w_1 y w_2 , las dos raíces complejas de $x^2 + x + 1 = 0$; en general, las raíces cúbicas u^3 son:

$$u,\ u \times w_1 \quad \text{y} \quad u \times w_2 \quad \text{y las de} \quad v^3 \quad \text{son:} \quad v,\ v \times w_1 \quad \text{y} \quad v \times w_2,$$

lo que nos da nueve maneras de combinar las soluciones de u y de v, con la condición adicional:

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

y por tanto, como $y = u + v$, obtenemos que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Combinando las soluciones de la ecuación cúbica, de manera que se cumpla la condición:

$$uv = -\frac{p}{3},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_2 &= (u \times w_1) + (v \times w_2) \\ y_3 &= (u \times w_2) + (v \times w_1), \end{aligned}$$

con estos valores para y encontramos tres valores para x con la ayuda de:

$$x = y - \frac{a}{3}.$$

Hemos hallado tres soluciones a la ecuación cúbica propuesta[29].

[29]En 1572, Rafael Bombelli (1526-1573) publicó un *Álgebra* donde la resolución de la ecuación cúbica incluye a los números complejos; por ejemplo, una solución de la ecuación cúbica: $x^3 = 15x + 4$ es $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, y una solución real positiva es $x = 4$.

Cardano ya había notado que cuando todos los términos de un miembro de la igualdad son de una potencia mayor que los términos del otro miembro, la ecuación tiene entonces una sola raíz positiva.

Bombelli pensó que los radicandos eran números *complejos conjugados*, cuya suma es el número real 4, de manera que su *parte real* debe ser 2; y si un número de la forma $2 - a\sqrt{-1}$ es la raíz cúbica de

$$2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1}\,,$$

a debe ser igual a 1.

$$\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}\,.$$

De aquí que las tres raíces de la ecuación son:

$$(2 + 1\sqrt{-1}),\ \ (2 - 1\sqrt{-1})\ \text{ y }\ 4.$$

Ejemplo

Para resolver la ecuación:

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 0,$$

dividimos entre 2,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Por comparación, establecemos que:

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= -5 \\ c &= 6. \end{aligned}$$

Con estos valores calculamos:

$$p = b - \frac{a^2}{3},$$

y

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c,$$

obteniendo

$$p = (-5) - \frac{(-2)^2}{3} = (-5) - \frac{4}{3} = -\frac{19}{3},$$

y

$$q = \frac{2(-2)^3}{27} - \frac{(-5)(-2)}{3} + 6 = -\frac{16}{27} - \frac{10}{3} + 6 = -\frac{268}{27}.$$

Remplazamos estos valores en:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

y obtenemos:

$$y = \sqrt[3]{-\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\left(-\frac{19}{3}\right)}{3}\right]^3}} + \sqrt[3]{-\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right] - \sqrt{\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\left(-\frac{19}{3}\right)}{3}\right]^3}}.$$

Simplificando,

$$y = \sqrt[3]{\frac{268}{54} + \sqrt{\left(-\frac{268}{54}\right)^2 + \left(-\frac{19}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{268}{54} - \sqrt{\left(-\frac{268}{54}\right)^2 + \left(-\frac{19}{9}\right)^3}};$$

operando,

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + \sqrt{\frac{17956}{729} - \frac{6859}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - \sqrt{\frac{17956}{729} - \frac{6859}{729}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + \sqrt{\frac{11097}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - \sqrt{\frac{11097}{729}}}.$$

Podemos aproximar la solución

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + 3,9016} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - 3,9016}$$

$$y = \sqrt[3]{8,86456296} + \sqrt[3]{1,06126296330}$$

$$y_1 = 2,069597 + 1,0200496,$$

hasta que finalmente,

$$y_1 = 3,0896466,$$

y por tanto,

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3},$$

y aproximando de nuevo a dos decimales

$$x_1 = 3,09 - \frac{(-2)}{3},$$

obtenemos $x_1 = 3,76.$

Las otras dos raíces las obtenemos mediante

$$y_2 = 2,069597w_1 + 1,0200496w_2$$
$$y_3 = 2,069597w_2 + 1,0200496w_1,$$

donde

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{y} \quad w_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$

son las dos raíces complejas de $x^2 + x + 1 = 0$.

Ejercicio

Una solución x_1 de la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se obtiene a partir de la solución que conseguimos con la fórmula de Cardano-Tartaglia; las otras dos soluciones podríamos conseguirlas factorizando el polinomio de tercer grado del lado izquierdo de la ecuación, en la forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x1)\,(Pol_2(x)),$$

donde $Pol_2(x)$ es un polinomio de segundo grado en x; esto daría lugar a que las otras dos soluciones se puedan conseguir con las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$\mathrm{Pol}_2(x) = 0.$$

Para conseguir $Pol_2(x)$, bastaría efectuar la división:

$$\mathrm{Pol}_2(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - x_1}.$$

¿Son correctos nuestros razonamientos? En caso de serlos, ¿conducen a las mismas soluciones?

16.3.5. Propiedades de las raíces de la ecuación cúbica

Para estudiar las propiedades de las raíces de una ecuación de tercer grado debemos iniciar con las propiedades de las raíces cubicas de un número real cualquiera, y estas a su vez se reducen a estudiar las raíces cubicas de 1; es decir a las soluciones de la ecuación

$$x^3 - 1 = 0.$$

Como

$$x^3 - 1 = (x - 1)\,(x^2 + x + 1),$$

la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene como soluciones $x = 1$ y w_1 y w_2 , las dos raíces complejas[30] de

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

que son

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Esto significa que:

$$w_1^3 = 1 \qquad \text{y} \qquad w_1^2 + w_1 + 1 = 0,$$

y lo mismo para

$$w_2^3 = 1 \qquad \text{y} \qquad w_2^2 + w_2 + 1 = 0,$$

pero además

$$w_1^2 = \frac{1}{w_1} = \frac{w_2}{w_1 w_2};$$

y como

$$w_1 w_2 = 1,$$

por ser raíces de la ecuación cuadrática, entonces

$$w_1^2 = w_2.$$

[30]En esta sección no requerimos conocimientos sobre números complejos mas allá de lo que se estudia en la escuela secundaria, por lo que consideramos que es más la ganancia de incluirlos que el sacrificio de ignorarlos.

Además,

$$(1-w_1)(1-w_2) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2,$$

y

$$w_1 - w_2 = \sqrt{3}i.$$

Con lo anterior, podemos expresar todo en términos de una sola raíz, digamos w_1, a la que llamaremos simplemente w.

Las tres raíces de la ecuación cúbica

$$y^3 + py + q = 0$$

son

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_2 &= (u \times w) + (v \times w^2) \\ y_3 &= (u \times w^2) + (v \times w). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= (u+v) + (u \times w) + (v \times w^2) + (u \times w^2) + (v \times w) \\ &= (u+v) + (u+v)w + (u+v)w^2 \\ &= (u+v)(1+w+w^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto significa que la suma de las raíces de la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{a}{3} \\ x_2 &= y_2 - \frac{a}{3} \\ x_3 &= y_3 - \frac{a}{3}, \end{aligned}$$

es

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

Podemos ampliar nuestro conocimiento de las relaciones que existen entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cúbica de manera similar a como lo hicimos en el caso de las ecuaciones de segundo grado; si suponemos que el polinomio

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

se puede factorizar como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3),$$

efectuamos las multiplicaciones en el lado derecho de la ecuación, y obtenemos:

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x+x_1x_2x_3,$$

lo que significa que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 &= b \\ x_1x_2x_3 &= c. \end{aligned}$$

Aún más, como en el caso de las ecuaciones de segundo grado, podemos determinar el carácter real o complejo de las soluciones de la ecuación cúbica,

$$y^3 + py + q = 0.$$

Estudiando su *discriminante*, este se define como:

$$\mathrm{D} = (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2.$$

Para calcularlo, como es habitual, hagámoslo por partes:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (u + v) - (wu + w^2v) \\ &= (1 - w)u + w^3v - w^2v \\ &= (1 - w)u(1 - w)w^2v \\ &= (1 - w)(u - w^2v). \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos que

$$y_1 - y_3 = (1 - w^2)(u - wv),$$

y $$y_2 - y_3 = (w - w^2)(u - v).$$

Ahora, notemos que

$$(1 - w)(1 - w^2) = 3,$$

y $$w - w^2 = \sqrt{3}i.$$

Además, como

$$(x - 1)(x - w)(x - w^2) = x^3 - 1,$$

porque w y w^2 son las raíces cúbicas de la unidad, y $x = \dfrac{u}{v}$ también es una raíz cúbica de la unidad, entonces

$$\left(\frac{u}{v} - 1\right)\left(\frac{u}{v} - w\right)\left(\frac{u}{v} - w^2\right) = \left(\frac{u}{v}\right)^3 - 1,$$

lo que es equivalente a:

$$(u - v)(u - vw)(u - vw^2) = u^3 - v^3,$$

o sea que:

$$(u - v)(u - vw)(u - vw^2) = 2\left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right),$$

y ya tenemos las herramientas para calcular el discriminante

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= (y_1 - y_2)2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \\
&= [(1 - w)(u - w^2v)(1 - w^2)(u - wv)(w - w^2)(u - v)]^2 \\
&= [(1 - w)(1 - w^2)(w - w^2)(u - v)(u - wv)(u - w^2v)]^2 \\
&= \left[3\sqrt{3}i\, 2\left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\right]^2 \\
&= -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right) \\
&= -(27q^2 - 4p^3).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que el discriminante de la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

es el mismo que el de la ecuación asociada

$$y^3 + py + q = 0,$$

puesto que las raíces de la primera están relacionadas con las de la segunda, de la forma:

$$x_1 - y_1 - \frac{a}{3}$$
$$x_2 - y_2 - \frac{a}{3}$$
$$x_3 - y_3 - \frac{a}{3},$$

pero

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2,$$
$$x_1 - x_3 = y_1 - y_3,$$
$$x_2 - x_3 = y_2 - y_3.$$

Y, por tanto, el discriminante de la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

es el mismo

$$\mathrm{D} = -(27q^2 - 4p^3).$$

Y en términos de a, b y c:

$$\mathrm{D} = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^2.$$

Si la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene coeficientes reales, su ecuación asociada

$$y^3 + py + q = 0$$

también tiene coeficientes reales, y como es de grado impar, entonces tiene al menos una raíz real.

Por consiguiente, existen tres posibilidades para sus raíces:

1. Tiene tres raíces reales diferentes.

2. Tiene tres raíces reales, y por lo menos dos de ellas iguales.

3. Tiene una raíz real, y dos raíces complejas conjugadas.

En el primer caso, el discriminante D es positivo; en el segundo caso, $\mathrm{D} = 0$, y en el tercer caso, el discriminante D es negativo, pues si

$$x_1 = \alpha + \beta_i \quad \text{y} \quad x_2 = \alpha - \beta_i$$

son las dos raíces complejas conjugadas, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &= [2\beta_i]^2 [(\alpha - x_3) + \beta_i]^2 [\alpha - x_3) - \beta_i]^2 \\ &= -4\beta^2 [(\alpha - x_3)^2 + \beta^2]^2 < 0. \end{aligned}$$

También se tiene la implicación recíproca. En suma tenemos que una ecuación cúbica con coeficientes reales:

1. Tiene sus tres raíces reales diferentes, si y solo si su discriminante es positivo.

2. Tiene sus tres raíces reales, y al menos dos iguales, si y solo si su discriminante es cero.

3. Tiene una raíz real y dos complejas conjugadas, si y solo si su discriminante es negativo.

Ejercicios

1. *Halle las raíces de la ecuación*

$$x^3 + 3x^2 - x + 6 = 0.$$

2. *Compare la forma como se halló el método descrito en esta sección para hallar las raíces cúbicas de una ecuación de tercer grado con el método expuesto en (Spivak, 1978, pp. 642-646). Establezca diferencias y similitudes.*

16.4. Ecuaciones de cuarto grado

16.4.1. El método babilónico

En Babilonia se formularon algunos problemas que conducen a ecuaciones de cuarto grado que pueden resolverse como ecuaciones cuadráticas donde la incógnita es un cuadrado, conocidas como *ecuaciones bicuadradas*; como de costumbre, los problemas aparecen formulados y resueltos de forma verbal, sin utilizar símbolos.

Muchos de los problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas, y por tanto en ellos aparecen las palabras *us* (longitud), *sag* (anchura) y *asă* (área) para representar las incógnitas.

Un ejemplo de estos problemas es:

> He multiplicado la longitud por la anchura y el área es 10. He multiplicado la longitud por ella misma y he obtenido un área. El exceso de la longitud sobre la anchura lo he multiplicado por sí mismo y el resultado por 9. Y esta área obtenida multiplicando la longitud por ella misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura? (Kline, 1994, p. 27).

El problema se traduce en el sistema de ecuaciones:

$$xy = 10$$
$$9(x-y)^2 = x^2.$$

Este sistema es equivalente a la ecuación de cuarto grado en x,

$$2x^4 + 225 = 45x^2,$$

que es una ecuación cuadrática en x^2, y así la resolvieron los antiguos babilonios.

16.4.2. El método de Ferrari

La solución de la ecuación de cuarto grado surgió casi de manera simultánea con la de tercer grado. El método se debe a Ludovico Ferrari, y fue publicado en el capítulo 39 del *Ars Magna* de Cardano, donde se presenta resolviendo muchos casos especiales, con coeficientes numéricos[31]; se da

[31]La presentación de numerosos ejemplos por parte de Cardano, Tartaglia y Ferrari muestra que buscaron y encontraron métodos generales que funcionaban para todos los casos; la búsqueda de generalidad es una característica nueva, que aparece con la introducción de los coeficientes literales por parte de Viète.

una prueba geométrica de los pasos algebraicos básicos, y luego la regla de solución en palabras[32].

Viète observó, además, que los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grados eran diferentes, y buscó un método que fuese válido para las ecuaciones de cualquier grado. Su primera idea, como ya vimos, fue eliminar un término de grado inmediatamente inferior, al máximo mediante una sustitución. Tartaglia había hecho esto para la ecuación cúbica, pero no lo intentó para todas las ecuaciones.

Veamos un ejemplo de Cardano: para resolver la ecuación

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

1. Completa el cuadrado en el lado izquierdo de la ecuación

$$x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2.$$

2. Suma en cada lado de la igualdad términos que incluyen *una nueva incógnita*, de manera que el término de la izquierda continúa siendo un cuadrado perfecto

$$\begin{aligned}(x^2 + 6 + y)^2 &= 60x + 6x^2 + y^2 + 12y + 2yx^2 \\ &= (6 + 2y)x^2 + 60x + y^2 + 12y,\end{aligned}$$

   con lo que obtiene un trinomio en x.

3. Elige y de forma que el trinomio en x del lado derecho de la igualdad sea un cuadrado perfecto; para ello, iguala a cero el discriminante de la ecuación cuadrática

$$(6 + 2y)x^2 + 60x + y^2 + 12y = 0,$$

   o sea

$$60^2 4(6 + 2y)(y^2 + 12y) = 0;$$

[32]No por las limitaciones propias de la época debemos menospreciar el valor de la obra *Ars magna* de Cardano. Ella fue un gran estímulo para las investigaciones algebraicas; además, de las soluciones a las ecuaciones de tercero y cuarto grado, llevó a los matemáticos a considerar nuevos números: los negativos y los complejos.

esta es equivalente a la ecuación cúbica:

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450,$$

cuya solución es conocida por Cardano,

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{80499\frac{1}{4}} + 287\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{80499\frac{1}{4}} + 287\frac{1}{2}} - 5\,.$$

4. Sustituye y en la ecuación para x:

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)x^2 + y^2 + 12y,$$

y toma la raíz cuadrada en cada lado de la igualdad.

5. Resuelve la ecuación de segundo grado que resulta al extraer la raíz cuadrada.

16.4.3. La solución moderna

Una ecuación general de cuarto grado tiene la forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

El primer paso consiste en eliminar el término

$$ax^3$$

de la misma manera que hicimos en las ecuaciones cúbicas, sustituimos:

$$x = y - \frac{a}{4}$$

en la ecuación original:

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d,$$

operamos

$$\left[y^4 - 4y^3\left(\frac{a}{4}\right) + 6y^2\left(\frac{a}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{a}{4}\right)^3 + \left(\frac{a}{4}\right)^4\right] + \left[a\left(y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{4}\right) + 3y\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^3\right)\right] + \left[b\left(y^2 - \frac{2ya}{4} + \frac{a^2}{16}\right)\right] + \left[cy - \frac{ca}{4}\right] + d = 0$$

$$y^4 - \frac{4y^3a}{4} + \frac{6y^2a^2}{16} - \frac{4ya^3}{64} + \frac{a^4}{256} + ay^3 - \frac{3y^2a^2}{4} + \frac{3ya^3}{16} - \frac{a^4}{64} + by^2 - \frac{2yab}{4} + \frac{a^2b}{16} + cy - \frac{ca}{4} + d = 0$$

$$y^4 - y^3a + \frac{3y^2a^2}{8} - \frac{ya^3}{16} + \frac{a^4}{256} + ay^3 - \frac{3y^2a^2}{4} + \frac{3ya^3}{16} - \frac{a^4}{64} + by^2 - \frac{yba}{2} + \frac{a^2b}{16} + cy - \frac{ca}{4} + d = 0$$

$$y^4 - \frac{3y^2a^2}{8} + \frac{2ya^3}{16} - \frac{3a^4}{256} + by^2 - \frac{bya}{2} + \frac{ba^2}{16} + cy - \frac{ac}{4} + d = 0.$$

Agrupamos y cambiamos los nombres

$$y^4 + \left(-\frac{3a^2y^2}{8} + by^2\right) + \left(\frac{2a^3y}{16} - \frac{aby}{2} + cy\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = 0$$

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3a^2}{8} + b\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = 0,$$

para obtener

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

donde

$$p = -\frac{3a^2}{8} + b$$

$$q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

$$r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d.$$

De nuevo, como en la cúbica, cambiamos una ecuación de cuarto grado en una incógnita por tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas, haciendo

$$y = u + v + w,$$

y calculamos

$$y^2 = (u+v+w)^2$$
$$y^2 - (u+v+w)^2 = 0$$
$$y^2 - (u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+2wv) = 0$$
$$y^2 - (u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+wv)) = 0$$
$$y^2 - u^2 - v^2 - w^2 - 2(uv+uw+wv) = 0$$
$$y^2 - (u^2+v^2+w^2) - 2(uv+uw+wv) = 0.$$

Nuevamente elevamos al cuadrado:

$$[y^2 - (u^2+v^2+w^2)]^2 = [2(uv+uw+wv)]^2$$

$$y^4 - 2y^2(u^2+v^2+w^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = [2uv+2uw+2wv]^2$$

$$y^4 - 2(u^2+v^2+w^2)y^2 + (u^2+v^2+w^2)^2 = 4(u^2v^2+u^2w^2+w^2v^2) + 8uvw(u+v+w),$$

y esto es lo mismo que

$$y^4 - 2(u^2+v^2+w^2)y^2 - 8uvw(u+v+w) - 4(u^2v^2+u^2w^2+w^2v^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 0.$$

Como

$$y = u+v+w$$

y

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

entonces

$$y^4 - 2(u^2+v^2+w^2)y^2 - 8uvwy - 4(u^2v^2+u^2w^2+w^2v^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 0,$$

las dos ecuaciones son equivalentes si

$$-2(u^2+v^2+w^2) = p \tag{1}$$
$$-8uvw = q \tag{2}$$
$$(u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) = r. \tag{3}$$

Para resolver este sistema, le modificamos la cara a la ecuación (2), en la forma:

$$u^2v^2w^2 = \left(\frac{-q}{8}\right)^2.$$

Sustituyendo (1) en (3), obtenemos:

$$\frac{p^2}{4} - 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) = r,$$

y después de unas breves cuentas, obtenemos

$$(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) = \frac{p^2 - 4r}{16}.$$

En resumen, tenemos que:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}$$

$$u^2v^2w^2 = \left(\frac{-q}{8}\right)^2$$

$$(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) = \frac{p^2 - 4r}{16}.$$

Esto puede interpretarse diciendo que $z_1 = u^2$, $z_2 = v^2$ y $z_3 = w^2$ son las raíces de la ecuación cúbica:

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z + \frac{q^2}{64} = 0,$$

lo que nos lleva al caso anterior que, en teoría, ya sabemos resolver.

Por fortuna, tenemos maneras para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado sin utilizar estos métodos engorrosos, que hemos presentado por su ingenio y originalidad. Es la salida natural usar un computador con programas como Derive, Mathemática, Maple, etc.

16.5. Ecuaciones de quinto grado

Viète, observó que los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grados eran diferentes y buscó un método que fuese válido para las ecuaciones de cualquier grado. Su primera idea, como ya vimos, fue eliminar un término de grado inmediatamente inferior al máximo mediante una sustitución. Tartaglia había hecho esto para la ecuación cúbica, pero no lo intentó para todas las ecuaciones.

Un estudiante aventajado habrá notado la similitud en los métodos modernos para resolver las ecuaciones cúbicas y las cuárticas, y no dudará en lanzar la idea de resolver la ecuación general de quinto grado

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

eliminando el término ax^4, sustituyendo:

$$x = y - \frac{a}{5},$$

para luego remplazar y por una suma de cuatro incógnitas:

$$y = u + v + w + t,$$

con la idea de cambiar una ecuación de grado 5 por un sistema de ecuaciones de grado inferior que conduzcan a una ecuación de grado 4 que ya sabemos resolver.

El programa parece sensato, eventualmente aparatoso por el tamaño de las ecuaciones, pero en el fondo, elemental.

Así pensaron muchos de los más célebres matemáticos durante bastantes años[33], pero el resultado no se dio: apareció una dura roca muy difícil de mover, que impidió el camino.

En 1824, ¡a sus 19 añitos!, el joven matemático noruego Niels Henrik Abel demostró[34] la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado mediante un número finito de operaciones algebraicas.

[33]Por ejemplo, James Gregory, que había proporcionado métodos propios de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grados, trató de emplearlos en la solución de la de quinto y fracasó. En posteriores trabajos sobre integración, Gregory dio por sentado que no era posible resolver algebraicamente la ecuación general de grado n para n mayor que 4. Walter von Tschirnhausen (1651-1708) probó transformaciones de la forma

$$x = t - \frac{a_1}{na_0},$$

aplicables a cualquier ecuación de grado $n : a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$, para convertirlo en otro, en el que ha desaparecido el término en x^{n-1}; pero en ecuaciones de grado mayor que 4 no fructificaron.

[34]En 1799, Paolo Ruffini había demostrado un resultado similar, pero no recibió reconocimiento.

Otro muchachito de 20 años, esta vez francés, llamado Evariste Galois, dedujo las condiciones en las que una ecuación es resoluble por radicales[35]. Este resultado, aunque fue hecho en 1830, solo fue publicado por Liouville en 1846.

Galois desarrolló la teoría de grupos para estudiar métodos generales de resolución de ecuaciones, basados únicamente en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces, aplicables a cualquier ecuación de grado n; demostró, en particular, que no existe ningún método general para resolver ecuaciones de grado mayor o igual que cinco[36].

A pesar de tan desalentadores resultados, hay algunas ecuaciones de grados quinto y superior que se pueden resolver; por ejemplo

$$x^6 = 64$$

tiene la solución $x = 2$.

El método más frecuente de resolver ecuaciones de grado superior a 2 es descomponer la ecuación en factores (dividiendo la ecuación entre los posibles divisores), con lo que, con algo de suerte, la ecuación se reduce a un producto de otras ecuaciones de grado menor[37] que ya podemos resolver por las fórmulas anteriores.

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0,$$

encontramos los factores del término independiente[38]:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10.$$

Luego de ensayar con varios valores, encontramos que 5 es una raíz, puesto que:

[35]Una ecuación irreducible de grado primo es resoluble por radicales si y solo si sus raíces son funciones racionales de dos cualesquiera de ellas.

[36]En el capítulo 5 de Luque, Mora y Torres (2009) se hace un estudio de las condiciones que hacen que las ecuaciones de grado menor que 5 tengan solución de manera general.

[37]Este método fue ideado por Descartes.

[38]En el capítulo 10 mostramos que una raíz de una ecuación de grado n, divide a su término independiente.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr|c}
x^5 & - & 6x^4 & + & 6x^3 & - & 5x^2 & + & 2x & - & 10 & x-5 \\
\cline{12-12}
-x^5 & + & 5x^4 & & & & & & & & & x^4-x^3+x^2+2 \\
\cline{1-3}
 & & x^4 & + & 6x^3 & & & & & & & \\
 & & -x^4 & - & 5x^3 & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & & x^3 & - & 5x^2 & & & & & \\
 & & & & -x^3 & + & 5x^2 & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & + & 2x & - & 10 & \\
 & & & & & & & - & 2x & + & 10 & \\
\cline{8-10}
 & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Esto significa que:

$$x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x-5)(x^4 - x^3 + x^2 + 2).$$

En el procedimiento de la división pueden omitirse varios datos innecesarios, y llegar a otro proceso que es conocido como *división sintética*, y que podemos resumir en:

i. Si el coeficiente de x^n es diferente de 1, dividimos toda la ecuación por él, para hacerlo igual a 1.

ii. Omitimos las potencias de x, y colocamos solamente los coeficientes del polinomio en el dividendo.

iii. Omitimos la x en el divisor, y solo colocamos el número elegido.

iv. Para obtener el coeficiente de un término cualquiera del cociente, se multiplica el coeficiente del término anterior por el divisor, sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

v. El cociente es un polinomio con los coeficientes encontrados, cuyo grado es uno menos que el polinomio original.

vi. El último coeficiente del cociente es el residuo.

En nuestro caso,

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -6 & 6 & -5 & 2 & -10 & 5 \\
 & 5 & -5 & 5 & 0 & 10 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

16.6. Número de raíces de una ecuación de grado n

Hemos mencionado que una ecuación de grado 1 con coeficientes reales tiene, a lo más, una solución, una de segundo grado, 2, y sospechamos que una de grado n, debe tener, a lo más, n soluciones.

Este resultado, intuido inicialmente por Cardano, quien había introducido las raíces complejas y que por un tiempo pensó que una ecuación podía tener cualquier número de raíces, fue enunciado sin prueba por Albert Girard diciendo que *una ecuación polinómica de grado n tiene n raíces, si se cuentan las raíces imposibles y si se tienen en cuenta las repetidas.*

También Descartes asume que una ecuación puede tener tantas raíces como número de dimensiones de la incógnita, usando la expresión *puede tener* por considerar falsas las raíces negativas. Más tarde, al incluir las raíces imaginarias y las negativas, concluyó que hay tantas como indica el grado.

En cuanto al número de raíces positivas, negativas y complejas, Cardano observó que las raíces complejas de una ecuación se dan por pares, y Newton lo demostró en su *Arithmetica Universalis.*

Descartes (1947) enunció, sin demostración, la regla de los signos, conocida como *regla de Descartes*, que afirma: el máximo número de raíces positivas de $f(x) = 0$, donde f es un polinomio, es el número de variaciones del signo de los coeficientes, y que el máximo número de raíces negativas es el número de apariciones de dos signos "+ "o dos signos "− ", consecutivamente.

Esta regla fue demostrada por varios matemáticos del siglo XVIII. La prueba que se da en la actualidad se debe a Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712-1785).

Gauss demostró que si el número de raíces positivas queda por debajo del número de variaciones del signo, tal diferencia debe ser un número par.

16.6.1. Relaciones entre las raíces de una ecuación de grado n

Cardano descubrió que en una ecuación de grado n, la suma de las raíces es el opuesto del coeficiente de x^{n-1}, que la suma de productos de dos en dos es el coeficiente de x^{n-2}, etc.

Es decir que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las soluciones de la ecuación, entonces

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_2x_3x4 + \cdots + x_2x_3x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$$

$$\vdots$$

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots\, x_n = (-1)^n a_n.$$

La prueba supone que un polinomio de grado n puede descomponerse en un producto de n factores de primer grado, en la forma:

$$x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \cdots + a_n = (xx_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) + \cdots + (x - x_n),$$

donde x_1, x_2, x_3, $\ldots x_n$, son las raíces de la ecuación que se obtiene al igualar el polinomio a cero.

Realizando el producto e igualando los coeficientes correspondientes a iguales potencias de x, encontramos la relación entre cada coeficiente y las raíces. Por ejemplo, para la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\, x_2,$$

o sea que

$$-(x_1 + x_2) = b$$

$$x_1\, x_2 = c.$$

Para la de tercer grado:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

es decir que

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = b$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c$$

$$-x_1x_2x_3 = d.$$

Tanto Cardano como Viète en *De Aquetionum Recognitione et Emendatione*, emplearon la primera de estas relaciones entre raíces y coeficientes de ecuaciones de grado pequeño para eliminar el término x^{n-1} en las ecuaciones polinómicas de la forma descrita anteriormente.

Newton enunció la relación entre raíces y coeficientes en su *Arithmetica Universales*, y también James Gregory en una carta a John Collins (1625-1683) secretario de Royal Society, pero ninguno de ellos dio demostración.

Viète y Descartes construyeron ecuaciones cuyas raíces fueran mayores o menores que las de la otra ecuación dada previamente. El proceso consiste solamente en remplazar x por $y + m$. Ambos utilizaron la transformación $y = mx$ para obtener una ecuación cuyas raíces fuesen el producto de m por la ecuación dada. Para Descartes, el primero de estos procesos tenía el significado de que las raíces falsas (negativas) pudiesen hacerse verdaderas (positivas), y recíprocamente.

Descartes demostró también que si una ecuación de tercer grado con coeficientes racionales tiene una raíz racional, entonces el polinomio puede expresarse como producto de factores con coeficientes racionales.

En el tercer libro de *La geometría*, Descartes (1947) enuncia que $f(x)$ es divisible por $x - a$, con a positivo, si solo a es una raíz de $f(x) = 0$, y por $x + a$, si solo a es una raíz falsa (Kline, 1994, p. 27).

16.6.2. El teorema fundamental del álgebra

Una ecuación polinómica

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

de grado mayor que 1, con coeficientes complejos, tiene al menos una solución en los números complejos.

D'Alembert fue el primer matemático que dio una demostración, pero incompleta; la primera prueba rigurosa fue presentada por Gauss.

Bibliografía

Acevedo, M. y Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia - Colciencias.

Adámek, J. (1983). *Theory of Mathematical Structures*. Boston: D. Reidel Publishing C.

Albis, V. (1984). *Temas de aritmética y álgebra*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Apostol, T. (1988). *Calculus*. Vol. 1. Barcelona: Reverté.

Benito, T. y Durán, M. I. (2011). *Lógica borrosa*. Recuperado de: http://ingtecnologia.files.wordpress.com/2011/06/logica-difusa2pdf.pdf.

Borwein, J. (1998). Brouwer-heyting sequences convergent. *The Mathematical Intelligencer*, 20(1), 14–15.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyé, A. (s.f.). *Algunos elementos de la historia de los números negativos*. Recuperado de: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjunt% os/publicaciones/otros_idiomas/Espanol/Penelope/Boye_negativos_es.pdf.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Bradley, R. y Sandifer, E. (2009). *Cauchy's Cours d'analyse*. Nueva York: Springer.

Brumfield, C.; Eicholz, R. y Shanks, M. (1960). *Geometry*. Palo Alto: Addison-Wesley.

Buck, C. (1967). An alternative definition for equivalence relations. *Mathematics Teacher*, LX(2), 124–125.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Vol. 1. Nueva York: Dover.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Campos, A. (1996). El más bello teorema. En: *Memorias VII Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 25–52). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Campos, A. (1999). Enunciados en Fundamentos de David Hilbelt. En: *Memorias X Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 50–75). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Campos, M.; Garzón, M.; Pérez, J. H. y de Villamarín, G. (1990). *Fundamentos de álgebra abstracta*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Campos, M.; Garzón, M.; Pérez, J. H. y de Villamarín, G. (2004). *Fundamentos de álgebra lineal*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Caro, V. (1936). *Los números: su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades*. Bogotá: Minerva.

Casás, N. (2010). Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. *Suma*, 63, 17–20.

Castro, I. (1996). *Leonhard Euler*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Charbonneau, L. (1996). From euclid to descartes: Algebra and its relation to geometry. En: N. Bednarz; C. Kieran y L. Lee (eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 15–37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clemens, S.; O'Daffer, P. y Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Willmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Courant, R. y Robbins, H. (1997). Topología. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas* (pp. 172–191). Vol. 4. Barcelona: Grijalbo.

Da Costa, N. y Lewin, R. (2005). Lógica paraconsistente. En: *Enciclopedia latinoamericana de filosofía* (pp. 185–204). Madrid: Trotta.

Dedekind, R. (1997). Números irracionales. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas* (pp. 119–128). Vol. 4. Barcelona: Grijalbo.

Delahaye, J. (2001). El caráter paradójico del infinito. *Investigación y Ciencia*, (23), 36–44.

Descartes, R. (1947). *La Geometría*. Buenos aires: Espasa-Calpe.

Devlin, K. (2012). ¿En qué consiste el pensamiento matemático? En: *Matemáticas y filosofía en el aula*. Recuperado el 13 de octubre de 2013 de: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/EnqueConsMate.pdf.

Euclid (1956a). *The thirteen books of the Elements*. Vol. 1 (Books I and II). 2a. ed. Nueva York: Dover.

Euclid (1956b). *The thirteen books of the Elements*. Vol. 2 (Books III - IX). 2a. ed. Nueva York: Dover.

Euclides (1970). Elementos. En: F. Vera (ed.). *Científicos griegos* (pp. 687–980). Madrid: Aguilar.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I - IV*. Vol. 1. Madrid: Gredos.

Euler, L. (1822). *Elements of algebra*. Londres: Longman, Hurst, Rees, Orme and Co.

Fitting, M. (1969). *Intuitionistic logic, model theory and forcing*. Ámsterdam: North Holland.

Frege, G. (1972). *Los fundamentos de la aritmética*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Gallardo, A. y Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. En: *Memorias del IX Simposio de la SEIEM* (pp. 243–249). España: Universidad de Córdoba.

Gardner, M. (1981). *¡Ajá! Inspiración*. Barcelona: Labor.

González, J. (s.f.). Relatividad aditivo-ordinal y números enteros: simplicidad matemática y complejidad didáctica de la transición de N a Z. Recuperado de:
http://www.gonzalezmari.es/N_MEROS_ENTEROS_BORRADOR_.pdf.

González, J.; Iriarte, M.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, 31(2), 163–185.

Gutiérrez, M. V. (1992). *Notas de geoemtría*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Halmos, P. (1971). *Teoría intuitiva de conjuntos*. México: C.E.C.S.A.

Herstein, I. (1970). *Álgebra moderna*. México: Trillas.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry*. La Salle: The Open Court Publishing Company.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la geometría*. Madrid: Instituto José Juán de matemáticas.

Hrbacek, K. y Jech, T. (1999). *Introduction to set theory*. Nueva York: Marcel Dekker.

Jones, B. (1969). *Teoría de los números*. México: Trillas.

Joyce, D. (2003). Euclid's elements. Recuperado el 3 de septiembre de 2013 de: http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/elements.html.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático: de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

Landau, E. (1966). *Foundations of analysis. The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers*. Nueva York: Chelsea.

Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Luque, C.; Donado, A. y Páez, J. (1998). *H-relaciones: una generalización de la noción de relación a partir de álgebras de Heyting*. Bogotá: XV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

Luque, C.; Jiménez, H. y Fonseca, J. (2009a). Alternativas para la definición de relación en teoría de conjuntos. En: *Memorias del Primer Foro Internacional de Matemáticas*. Neiva: Universidad Surcolombiana. Recuperado de: http://marthacmosquera.webcindario.com./MemForo1/documentos/CURSILLOS/CURSILLO1.pdf.

Luque, C.; Jiménez, H. y Fonseca, J. (2009b). ¿Es necesaria la propiedad reflexiva en la definición de orden? En: *Memorias del Primer Foro Internacional de Matemáticas*. Neiva: Universidad Surcolombiana. Recuperado de: http://marthacmosquera.webcindario.com.

Luque, C.; Jiménez, H. y Ángel, L. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. 2a. ed. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C.; Mora, L. y Páez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*. 2a. ed. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C.; Mora, L. y Torres, J. (2006a). El concepto de área. En: *Memorias XVI Encuentro de geometría y sus aplicaciones y IV Encuentro de aritmética* (pp. 105–139). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C.; Mora, L. y Torres, J. (2006b). *Estructuras análogas a los números reales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C.; Mora, L. y Torres, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras no enumerables*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C.; Ávila, J. C. y Soler, N. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: razonar*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Machover, M. (1996). *Set theory, logic and their limitations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maclaurin, C. (1748). *A Treatise of algebra*. Londres: A. Millar and J. Nourse.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. visión histórica. *IRICE*, (13).

Mancosu, P. (1998). *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Nueva York: Oxford University Press.

Medina, I. y Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La Aritmética*. Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Willmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. 4a. ed. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Niklitschek, A. (1953). *El prodigioso jardín de las matemáticas*. 3a. ed. Barcelona: Editorial Iberia.

Niven, I. (1947). A simple proof that π is irrational. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53, 509. Recuperado de: http://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002-9904-1947-08821-2.pdf.

Niven, I. (1956). *Irrational numbers*. Washington: The Mathematical Association of America.

Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: un paseo a través de la historia. *Revista digital matemática, educación e internet*, 8(1), 1–19. Recuperado de: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV8_n1_2007/De%20la%20Resolucion_de_Ecuaciones/index.html.

Oostra, A. (2005). *Huellas en los encuentros de geoemtría y aritmética*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Orayen, R. (2005). Lógica modal. En: *Enciclopedia latinoamericana de filosofía* (pp. 289–322). Madrid: Trotta.

Pareja, D. (2008). *Aproximación a la epistemología de las matemáticas. Temas cruciales en la historia de las matemáticas. Notas de clase para un curso introductorio*. Armenia: Universidad del Quindío.

Peña, L. (2005). Lógicas multivalentes. En: *Enciclopedia latinoamericana de filosofía* (pp. 323–349). Madrid: Trotta.

Pollard, H. y Diamond, H. (1998). *The theory of algebraic numbers*. Nueva York: Dover.

Recalde, L. y Vargas, V. L. (2013). Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. *Lecturas Matemáticas*, 34(1), 131–148.

Redondo, A. y Haro, M. J. (2005). Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci. *Suma*, 50, 53–63.

Restrepo, G. (1994). *Fundamentos de la matemática*. Cali: Centro editorial Universidad del Valle.

Rey Pastor, J., Calleja, P., y Trejo, C. (1958). *Análisis matemático*. Vol. 1. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Roldán, D. y Rodríguez, A. (2010). *Números metálicos: ¿proceso u objeto?* Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ruiz, L. y García, F. (2009). Arithmetica practica y specvlativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemólogico y didáctico. *Llull*, 32(69), 103–133.

Ryder, L. (1984). *Quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sagastume, A. y Fernández, G. (1960). *Álgebra y cálculo numérico*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Serway, R. (1998). *Física*. 4a. ed. México D.F.: McGraw-Hill.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estúdio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Siegel, C. (1949). Trascendental numbers. *Annals of Mathematical Studies*, (16).

Singh, S. (1998). *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta.

Smith, D. (1958). *History of mathematics*. Vol. 2. Nueva York: Dover.

Smullyan, R. y Fitting, M. (1996). *Set theory and the continuum problem*. Oxford: Clarendon Press.

Snape, C. y Scott, H. (1995). *Puzzles, mazes and numbers*. Nueva York: Cambridge University Press.

Sánchez, C. (1997). *La construcción de los números reales*. Bogotá: XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

Spivak, M. (1978). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Bogotá: Reverté.

Stedall, J. (2004). *The Arithmetic of infinitesimals. John Wallis 1656*. Nueva York: Springer.

Stoll, R. (1963). *Set theory and logic*. San Francisco: Freeman.

Suppes, P. (1968). *Teoría axiomática de conjuntos*. Cali: Norma.

Tanaka, K. (1997). *An introduction to fuzzy logic for practical applications*. Nueva York: Springer.

Torres, J.; Campos, Y. y Pérez, E. (2001). Tres problemas clásicos de la geometría: un problema de la teoría de campos. En: *Memorias XI Encuentro de geometría y sus aplicaciones* (pp. 263–284). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Uqlīdisī, A. y Saidan, A. (1978). *The arithmetic of al-Uqlīdisī: the story of Hindu-Arabic arithmetic as told in Kitāb al-fusūl fī al-Hisāb al Hindī, by Abū al-Hasan, Ahmed ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī, written in Damascus in the year 341 (A.D. 952/3)*, chapter 3. D. Reidel Pub. Co. Recuperado de: http://school.maths.uwa.edu.au/∼schultz/L9AlUqlidisi.html.

Usón, C. y Ángel Ramírez (2000). ¿Por qué seguir anclados en Egipto? *Suma*, 35, 27–34.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Madrid: Ediciones Aguilar.

Westren, H. (1997). Los grandes matemáticos. En: J. Newman (ed.). *Sigma. El mundo de las matemáticas* (pp. 4–94). Vol. 1. Barcelona: Grijalbo.

Wolf, R. (1997). *Proof, logic and Conjecture: the mathematician's toolbox*. Nueva York: W. H. Freeman and Company.

Zach, R. (2005). *Hilbert's program then and now*. Recuperado de: http://arxiv.org/pdf/math/0508572.pdf.

Este libro es la segunda edición de uno publicado en 2005, producto del proyecto de investigación "Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: El proceso de medir", desarrollado entre 2002 y 2004, con el apoyo del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP). Esta segunda edición recoge las refl¬exiones del Grupo de Álgebra sobre la enseñanza de los números racionales y reales, que surgen del trabajo con los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Las actividades didácticas propuestas van dirigidas especialmente a la formación inicial de profesores de matemáticas, en relación con tres procesos: clasificar, medir e invertir; y con ellos, la formación de los conceptos de relación de equivalencia, números racionales no negativos, números irracionales positivos, números reales no negativos y números reales; también se tiene en cuenta el proceso histórico que generó la construcción de estas estructuras numéricas.

Desde un acercamiento intuitivo, fundamentado en preguntas, respuestas, contrapreguntas y reformulación de respuestas a problemas que surgen de manera natural en la discusión; los estudiantes cuestionan, argumentan, ejemplifican, proponen contraejemplos, establecen acuerdos y generalizan, simulando un ambiente científico en el aula, donde prima la actividad matemática sobre la repetición y la memoria.

Cuando es necesario se recurre a la geometría euclidiana en busca de objetos y procedimientos que permitan realizar tareas en las que el álgebra tiene limitaciones, mostrando la permanente relación entre estas dos vertientes del conocimiento matemático. Se hace énfasis en las propiedades algebraicas de los números reales, primero en una construcción a partir de los números naturales y luego desde una perspectiva axiomática, sin profundizar en sus propiedades topológicas.

Como epílogo se presentan varias formas de resolver ecuaciones algebraicas, algunas históricas, otras inventadas en clase, otras donde se aplican ideas simples y geniales de algunos matemáticos clásicos; con procedimientos aritméticos, algebraicos, de la geometría euclidiana, de la geometría analítica y hasta de la geometría proyectiva.

ISBN: 978 - 958 8650 78 4
9 789588 650784