

**ANÁLISIS DE UN SISTEMA DINÁMICO A PARTIR DE LA FORMULACIÓN
HAMILTONIANA DE LA MECÁNICA. ESTUDIO DE CASO: EL PÉNDULO
DOBLE PLANO VERTICAL**

JENNIFER DANIELA GUZMÁN SANTOFIMIO

Código: 2009246021

**LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS DESDE UNA
PERSPECTIVA CULTURAL**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN FÍSICA**

Bogotá, D.C.

2016

**ANÁLISIS DE UN SISTEMA DINÁMICO A PARTIR DE LA FORMULACIÓN
HAMILTONIANA DE LA MECÁNICA. ESTUDIO DE CASO: EL PÉNDULO
DOBLE PLANO VERTICAL**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADA EN
FÍSICA**

**ASESOR DEL TRABAJO
JOHN BARRAGÁN**

**LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS DESDE UNA
PERSPECTIVA CULTURAL**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN FÍSICA**

Bogotá, D.C.

2016

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	ANÁLISIS DE UN SISTEMA DINÁMICO A PARTIR DE LA FORMULACIÓN HAMILTONIANA DE LA MECÁNICA. ESTUDIO DE CASO: EL PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL.
Autor(es)	Guzmán Santofimio, Jennifer Daniela
Director	John Barragán
Publicación	Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. Páginas 56
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	MECÁNICA CLÁSICA, MECÁNICA HAMILTONIANA, PÉNDULO DOBLE PLANO, SISTEMAS DINÁMICOS Y GEOMETRIZACIÓN.

2. Descripción
<p>En el presente trabajo de investigación se realiza un énfasis especial en la geometría del estudio del planteamiento, construcción, abordaje y solución del problema del péndulo doble plano vertical. Bajo la formulación de la Mecánica de Hamilton desde la perspectiva de sistema se muestra de forma organizada, la solución del sistema dinámico del péndulo doble plano vertical, realizando el análisis del sistema en general, caracterizando sus variables y restricciones, permitiendo un estudio profundo y detallado de la situación. Teniendo en cuenta que los sistemas mecánicos son aquellos para los cuales los cambios que experimentan pueden comprenderse en términos de los cambios en el estado mecánico del mismo, considerando que el estado mecánico está definido por dos cualidades o propiedades del sistema, su configuración y su movimiento.</p>

3. Fuentes

- Aguedas, V. (2007). Máximos y mínimos de funciones cuasiperiódica. *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones*, 157-164.
- Ávila, D. I. (2009). *Representaciones del movimiento Representaciones del movimiento de una partícula condicionada a una simetría tipo toroidal y su relación con otras. Una aplicación conceptual y didáctica de la mecánica Hamiltoniana*. Universidad Pedagógica Nacional: Tesis de grado. Licenciatura en Física. Bogotá D.C.
- Ayala y Barragan. (2013). *Topico Mecánica hamiltoniana, mecánica cuántica y caos*. Bogotá: Licenciatura en Física UPN.
- Ayala, Barragan. (2013). *Representación geométrica de las coordenadas generalizadas en la Mecánica hamiltoniana*. Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ayala, M. M. (2006). *Los analisis historico-criticos y la recontextualizacion de saberes científicos*. Bogotá: Proposicoes.
- Barragan, J. (2005). *Representación de la Mecánica Hamiltoniana con formas diferenciales. Estudio de caso: Péndulo esférico*. Tesis de grado. Licenciatura en física. Bogotá D. C: Universidad Pedagógica Nacional.
- Hacar, A. (2009). *Mecánica Lagrangeana*. San francisco, California: Alqua.
- J. Isaza, D. Campos. (2002). *Prolegómenos a sistemas dinámicos*. Bogotá D. C.: Universidad Nacional de Colombia.
- Marion. (1975). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Bogotá: Reverté S.A.
- Medina, M. (2007). *Tratamiento del caso de los dos cuerpos desde la Mecánica de Hamilton*. Bogotá: Pre-impresos estudiantes 1.
- Ochoa, D. (2004). El péndulo en Newton, Hamilton y los sistemas Caóticos. *Trabajo de Pregrado*, Universidad pedagógica nacional.

Soldovieri. (2010). *Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton*. Universidad de Zulia:
Copyright.

4. Contenidos

De manera general, este documento está estructurado y dividido en cuatro capítulos principales:

En el primero, se muestra la caracterización del sistema del péndulo doble plano vertical y este a su vez está dividido en dos acápite; en el primer acápite se caracteriza el sistema mecánico. En el segundo acápite, se describe el estado mecánico del sistema, definiendo dos cualidades exclusivas del ámbito mecánico: La primera cualidad, es la de configuración y la segunda cualidad, de movimiento.

En el segundo capítulo se formaliza y calcula la energía mecánica del sistema del péndulo doble. Desarrollando la descripción de la energía potencial del sistema y la energía cinética del sistema.

En el tercer capítulo se presenta el hamiltoniano del sistema que se construye a partir de las ecuaciones de las energías mecánicas mostradas en el capítulo dos, a partir del hamiltoniano se encuentran las ecuaciones de Hamilton que describen la evolución del sistema y sus efectos mecánicos. Además, se presenta la metodología de solución de las ecuaciones de Hamilton con ayuda de un software (compilador C++) que utiliza un método numérico, genérico iterativo, explícito, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, llamado Runge-Kutta de cuarto orden. El compilador permite realizar una descripción de las ecuaciones de Hamilton con el único fin de tener los movimientos generalizados y las coordenadas generalizadas como una evolución temporal del sistema del péndulo doble plano vertical.

En el cuarto capítulo se representa geoméricamente las soluciones e interpretaciones del sistema, con base en las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para el sistema del péndulo doble plano y con ayuda del programa graficador gnuplot se realizaron las gráficas de la evolución del sistema

mecánico que describen la variación del estado inicial mostrando el estado siguiente del sistema, permitiendo formar un sistema con distintas condiciones iniciales.

5. Metodología

La metodología que utilicé en este trabajo es la investigación está estructurada de la siguiente forma:

1. La realización de la caracterización del sistema del péndulo doble plano vertical desde el punto de vista de la Mecánica Hamiltoniana, haciendo la construcción del problema, en el cual se comprenden las siguientes características; los movimientos independientes de las partes móviles del sistema (grados de libertad), las coordenadas generalizadas, las posiciones, los desplazamientos, la velocidad, la magnitud de la velocidad y los momentos generalizados.
2. La caracterización de la energía del péndulo doble plano desde el punto de vista de la Mecánica Hamiltoniana, realizando los cálculos de la energía cinética y la energía potencial del sistema para construir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton.
3. La construcción del espacio de configuración y el espacio de fase: representación de las ecuaciones de Hamilton como un campo vectorial, haciendo uso de las herramientas computacionales.
4. La resolución de las ecuaciones de Hamilton del péndulo doble plano vertical.
5. Por último la geometrización de la interpretación del sistema a través de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para el sistema del péndulo doble plano vertical.

6. Conclusiones

- La caracterización para el sistema del péndulo doble desde el análisis de la formulación hamiltoniana, exige una asignación de coordenadas propias de la geometría del sistema (Esférica con el ángulo de azimutal constante y radio constante) permitiendo que el concepto de movimiento independiente, vinculado a la idea de grado de libertad, deje asociar fácilmente y de manera intuitiva coordenadas y magnitudes (cualidades) tales como;

configuración y movimiento acomodándose a la configuración curva en el caso del péndulo doble.

- La energía potencial esta descrita a partir de las fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema y las variaciones de las posiciones de las masas. Para el sistema del péndulo doble en particular está definida por tres términos, en los cuales uno de esos términos da cuenta del acople de las masas, ya que muestra que el trabajo realizado por la masa m_2 dependerá de la variación del ángulo θ_1 de la masa m_1 , y los otros dos términos son los trabajos de cada una de las masas variando con sus respectivas coordenadas generalizadas.
- La función hamiltoniana posibilita la regulación de los cambios de configuración con los cambios en el movimiento, a partir de las ecuaciones diferenciales acopladas de Hamilton, ya que al contener toda la información de la evolución del sistema, permiten interactuar con la dinámica del sistema o con la evolución del sistema del péndulo doble plano, prediciendo el comportamiento a futuro de las masas.
- Al realizar el análisis de la evolución del sistema a partir de dos casos en particular variando las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas o de configuración, permitió observar el movimiento, el periodo de oscilación de cada una de las masas con respecto al tiempo y el espacio de fase del sistema del péndulo doble.
- La geometría de los momentums generalizados con respecto a sus correspondientes coordenadas generalizadas se presenta de manera análoga a la del péndulo simple (Grafica del momentum p_{θ_1} contra el ángulo θ_1 , página 36 y Grafica del momentum p_{θ_2} contra el ángulo θ_2 , página 38), mostrando zonas cerradas de oscilación, permitiendo obtener la información de los máximos y mínimos de movimiento del sistema del péndulo doble plano.

Elaborado por:	Jennifer Daniela Guzmán Santofimio
Revisado por:	John Barragán

Fecha de elaboración del Resumen:	22	08	2016
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN.....	1
II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
Problema de investigación.....	4
III. OBJETIVOS	4
Objetivo general.....	4
Objetivos específicos	4
1. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA DEL PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL	6
1.1 SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL.....	7
1.1.1 Caracterización del sistema mecánico.....	7
1.1.2 Partes que conforman al sistema del péndulo doble plano vertical.....	8
1.1.3 Ligaduras o restricciones y grados de libertad del sistema.....	8
1.2. ESTADO DE CONFIGURACIÓN.....	11
1.2.1. Coordenadas generalizadas.....	12
1.2.2 Velocidades de las masas	14
1.2.3 Magnitud de la velocidad.....	14
1.3. ESTADO DE MOVIMIENTO	16
1.3.1 Momentum generalizado	17
2. ENERGÍA DEL SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL.....	19
2.1 ENERGÍA POTENCIAL DEL SISTEMA.....	19
2.1.1 Potencial efectivo	24
2.2 ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA.....	24
3. EVOLUCIÓN DEL ESTADO DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL	27

3.1 HAMILTONIANO DEL SISTEMA	27
3.2 LAS ECUACIONES DE HAMILTON.....	28
3.2.1 Solución numérica de las ecuaciones de Hamilton	30
4. GEOMETRIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES E INTERPRETACIONES DEL SISTEMA DEL PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL	31
IV. GLOSARIO MECÁNICA DE HAMILTON.....	45
V. LISTA DE FIGURAS	48
VI. CONCLUSIONES	49
VII. BIBLIOGRAFÍA	51
VIII. ANEXOS.....	53

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surge de una preocupación personal, sobre ¿por qué se presenta la Mecánica en la escuela o en los primeros cursos de Física siempre desde una perspectiva Newtoniana?, como lo podemos ver en los estándares generales de educación, los cuales constituyen uno de los parámetros de los que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado en el sistema educativo en Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006). La Mecánica Clásica puede presentarse desde otras perspectivas permitiendo observar de una manera diferente a la Mecánica y al estudio de sistemas dinámicos, por ejemplo, la formulación lagrangeana, la formulación Hamiltoniana, la formulación hertziana entre otras, no queriendo decir con esto que la Mecánica Newtoniana tiene falencias, sino más bien establecer alternativas respecto a las presentaciones de la Mecánica Clásica. Tomando como referencia el tópico “Mecánica Hamiltoniana, Mecánica cuántica y caos”, ofertado por el Departamento de Física de la línea de profundización enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural de la UPN, dirigida por los profesores Maria Mercedes Ayala y John Barragan, en el segundo semestre del 2013, surge la idea de realizar el analisis en particular del sistema del péndulo doble desde la perspectiva de la Mecánica Hamiltoniana.

Por los motivos anteriormente mencionados, el trabajo de investigación realiza un énfasis especial en la geometría del estudio del planteamiento, construcción, abordaje y solución del problema del péndulo doble plano vertical. Esta perspectiva geométrica permitió dar sentido a las formas de abordar la interpretación del sistema mecánico. Bajo este orden de ideas, en este trabajo se aborda una perspectiva de la Mecánica Hamiltoniana diferente a como lo hacen los libros habituales de Mecánica Clásica.

De manera general, este documento está estructurado y dividido en cuatro capítulos principales. En el primero, se muestra la caracterización del sistema del péndulo doble plano vertical y este a su vez está dividido en dos acápite; en el primer acápite se caracteriza el sistema mecánico, mostrando una breve descripción del problema, partiendo de qué es un sistema mecánico (caso particular del péndulo doble), las partes que lo conforman y los grados de libertad del sistema. En el segundo acápite, se describe el estado mecánico del sistema, definiendo dos cualidades exclusivas del ámbito mecánico: la primera cualidad, es

la de configuración o la que determina la disposición espacial del sistema y la segunda cualidad, de movimiento.

En el segundo capítulo se formaliza y calcula la energía Mecánica del sistema del péndulo doble. Partiendo de la energía potencial del sistema, calculada a través de diagramas de fuerzas de cada una de las masas del péndulo doble, permitiendo comprender las fuerzas que hacen trabajo sobre el sistema y por otro lado se calcula la energía cinética del sistema que depende de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados del sistema mecánico.

En el tercer capítulo se presenta el hamiltoniano del sistema que se construye a partir de las ecuaciones de las energías mecánicas mostradas en el capítulo dos, a partir del hamiltoniano se encuentran las ecuaciones de Hamilton que describen la evolución del sistema y sus efectos mecánicos, dichas ecuaciones asocian los cambios de configuración a cambios de movimiento del sistema. Además, se presenta la metodología de solución de las ecuaciones de Hamilton con ayuda de un software (compilador C++) que utiliza un método numérico, genérico iterativo, explícito, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, llamado Runge-Kutta de cuarto orden. El compilador permite realizar una descripción de las ecuaciones de Hamilton con el único fin de tener los movimientos generalizados y las coordenadas generalizadas como una evolución temporal del sistema del péndulo doble plano vertical.

En el cuarto capítulo se representa geoméricamente las soluciones e interpretaciones del sistema, con base en las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para el sistema del péndulo doble plano y con ayuda del programa graficador gnuplot se realizaron las gráficas de la evolución del sistema mecánico que describen la variación del estado inicial mostrando el estado siguiente del sistema, permitiendo formar un sistema con distintas condiciones iniciales.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los fenómenos mecánicos han sido representados y enseñados a partir de la formulación Newtoniana como se evidencia en los siguientes libros (Tipler, 1978; Santillana, 1995; Galaxia, 1998; Giancoli, 2007) entre otros. Esta es una formulación general que ha permitido

el tratamiento de problemas en la Mecánica Clásica, mostrando sistemas de referencia inerciales donde las ecuaciones básicas de movimiento son las leyes de Newton, siendo estas ecuaciones de segundo orden.

También se ha abordado, para ciertos cursos de Mecánica avanzada, la formulación Hamiltoniana y lagrangeana de la Mecánica, planteándose a partir del punto de vista analítico. Por ejemplo, la formulación lagrangeana simplifica problemas físicos como los sistemas de referencia inerciales que son tratados de igual manera y las ecuaciones de movimiento no dependen del sistema de referencia elegido; por lo general se presenta la formulación hamiltoniana como un enfoque básicamente equivalente al anterior (Landau y Lifshitz, 1965; Goldstein, 1987; Soldovieri, 2010), donde las ecuaciones del movimiento vienen dadas por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se escriben en términos de una función H llamada hamiltoniano, las cuales permiten ver de una manera diferente la Mecánica Clásica.

El análisis de sistemas mecánicos en Física, se basa en su solución a partir de desarrollos algebraicos, realizando un manejo de algoritmos con el estudio de sistemas ideales, dejando a un lado magnitudes fundamentales, por ejemplo: la fuerza de fricción y las cuerdas en un sistema mecánico. Por tal razón se hace incomprensible y confuso interpretar leyes, teorías y entender los problemas que se están resolviendo y de lo que se está hablando (Ayala, 2006), además se piensa que un problema mecánico es un ejercicio particular en una condición específica y con el análisis hamiltoniano se construye un problema general para una multiplicidad de casos.

La Mecánica de Hamilton desde la perspectiva de sistema (de aquí en adelante, cuando nos referimos a la Mecánica de Hamilton se hará desde la perspectiva de sistema) (Ayala y Barragan, 2013) nos muestra de una forma organizada, diferente y asequible, la solución de sistemas dinámicos sin que se requiera prerequisites formales para su comprensión (Medina, 2007), ya que serán sistemas mecánicos aquellos para los cuales los cambios que experimentan pueden comprenderse en términos de los cambios en el estado mecánico del mismo, considerando que el estado mecánico está definido por dos cualidades o propiedades del sistema, su configuración y su movimiento.

La Mecánica Hamiltoniana realiza aproximaciones a sistemas reales, realizando el análisis del sistema en general, caracterizando sus variables y restricciones, permitiendo un estudio profundo y detallado de la situación. De esta manera, se diferencia de la Mecánica Newtoniana, al hacer el estudio de partículas sin tener en cuenta diferentes factores importantes en el planteamiento, y solución de los fenómenos físicos, y en la mayoría de cursos se resuelven para casos particulares.

Problema de investigación

Considerando lo anterior, la pregunta que orienta la investigación es: ¿Cómo comprender, plantear, construir y resolver el sistema dinámico del péndulo doble plano vertical a partir de la formulación Hamiltoniana de la Mecánica con énfasis en la caracterización geométrica, desde la perspectiva de sistema?

III. OBJETIVOS

Los objetivos que se propusieron para la realización de este trabajo de investigación son:

Objetivo general

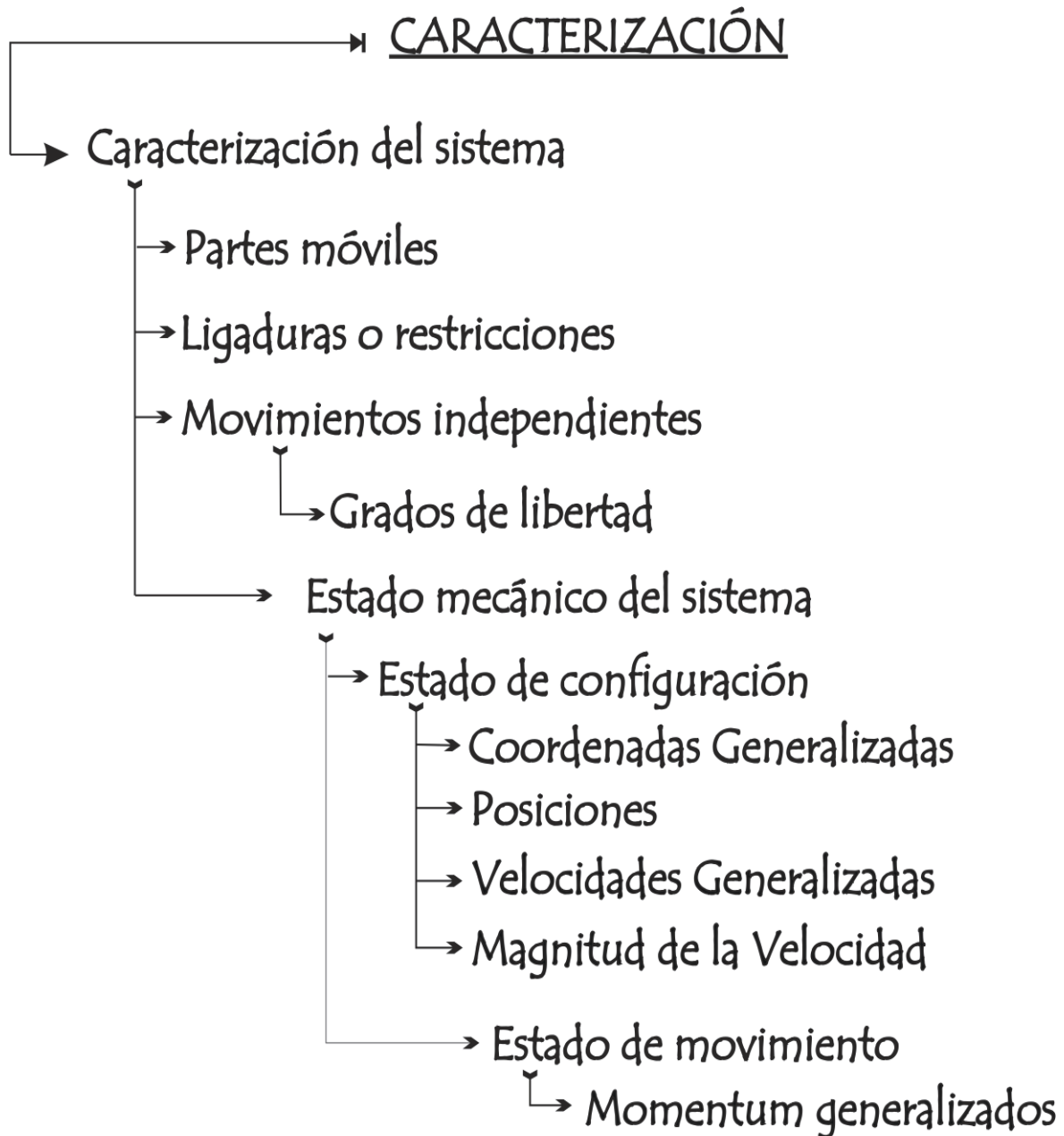
Comprender, plantear, construir y resolver el sistema del péndulo doble plano vertical a partir de la formulación Hamiltoniana de la Mecánica desde la perspectiva de sistema, con énfasis en la caracterización geométrica.

Objetivos específicos

6. Realizar una caracterización del sistema del péndulo doble plano vertical desde el punto de vista de la Mecánica Hamiltoniana, haciendo la construcción del problema, en el cual se comprenden las siguientes características; los movimientos independientes de las partes móviles del sistema (grados de libertad), las coordenadas generalizadas, las posiciones, los desplazamientos, la velocidad, la magnitud de la velocidad y los momentos generalizados.
7. Caracterizar la energía del péndulo doble plano desde el punto de vista de la Mecánica Hamiltoniana, realizando los cálculos de la energía cinética y la energía potencial del sistema para construir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton.

8. Construir el espacio de configuración y el espacio de fase: representación de las ecuaciones de Hamilton como un campo vectorial, haciendo uso de las herramientas computacionales.
9. Resolver las ecuaciones de Hamilton del péndulo doble plano vertical. Nota: En el caso en el que las ecuaciones no sean solubles analíticamente se resolverán numéricamente.
10. Geometrizar las soluciones e interpretar el sistema a través de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para el sistema del péndulo doble plano vertical.

1. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA DEL PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL



1.1 SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL

1.1.1 Caracterización del sistema mecánico

Un sistema mecánico es entendido usualmente como un conjunto de partes que se relacionan entre sí, para formar un todo (Marion, 1975). De esta forma la idea de sistema es transformada desde la perspectiva de los sistemas Dinámicos, porque aunque siga siendo el sistema una colección de objetos que forman un todo, la forma como se estudia está condicionada a las relaciones que existen entre sus partes, el comportamiento del sistema ya no está dado por la suma de los comportamientos de sus partes, sino por la interacción de estas con el todo y con ellas mismas. En este sentido ya no es posible aislar las partes para formar una idea del comportamiento general del sistema.

Por esta razón se debe pensar en la caracterización de un sistema en términos de sus componentes y condiciones que definen los cambios del sistema. Dichas condiciones serán llamadas *condiciones dinámicas* (Ayala y Barragan, 2013). Esta caracterización comprende las siguientes características:

Descripción del sistema:

Una masa m_1 está unida a otra masa m_2 mediante una cuerda inextensible l_2 . La masa m_1 a su vez está unida a una cuerda inextensible l_1 atada a un punto de un soporte que le permite la interacción con La Tierra. Las masas m_1 y m_2 están restringidas a moverse sobre el plano vertical donde $\varphi(\Theta, r) = \text{cte}$ tomando coordenadas esféricas, ya que al describir la configuración del sistema mecánico se define a la vez el sistema de superficies en términos de los cuales se analiza el espacio en el cual se representa la evolución del sistema (Ayala, Barragan, 2013).

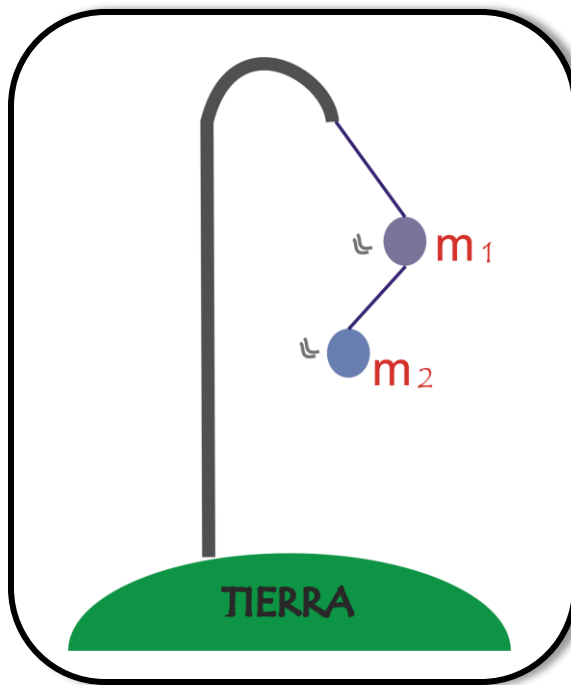


Figura 1. Esquema general del péndulo doble plano vertical.

1.1.2 Partes que conforman al sistema del péndulo doble plano vertical

El comportamiento de un sistema dinámico no está dado por la suma de sus partes, sino por las relaciones e interacciones de las partes (Ochoa, 2004). Es por eso que se tiene en cuenta que el sistema está formado por dos masas puntuales las cuáles serán las partes móviles del sistema. También, están unidas por dos cuerdas inextensibles de las cuales se despreciará su masa. La Tierra se considerara parte del sistema y será el marco de referencia.

1.1.3 Ligaduras o restricciones y grados de libertad del sistema

En cualquier sistema dinámico aparecen ligaduras que restringen el movimiento, además de fuerzas que controlan su evolución (Soldovieri, 2010). Por esto, caracterizar las ligaduras se hace importante en este tipo de estudio.

En el caso del péndulo doble plano vertical se consideran las siguientes ligaduras. Inicialmente, el sistema se restringe a moverse en un único plano vertical. Por último, las cuerdas del sistema permanecen inextensibles.

Los grados de libertad están relacionados con cada uno de los movimientos independientes de las masas m_1 y m_2 . A cada movimiento independiente se le asigna una variable que

representa la configuración del sistema. En este caso se pueden definir los siguientes movimientos independientes:

- El primer movimiento independiente pertenece a la masa m_1 que describirá una trayectoria circular de radio l_1 , además, estará sujeta a un punto de un soporte unido a Tierra, como indica la figura 2.

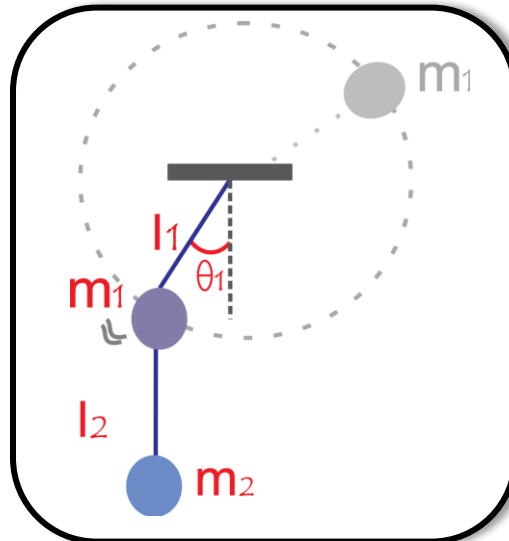


Figura 2. Representación General del primer caso para el grado de libertad uno.

- El segundo movimiento independiente se asocia a la masa m_2 . Dicho movimiento describe un círculo, considerando a m_1 en reposo, ya que se hace referencia a la configuración y no a la dinámica del sistema como indica la figura 3.

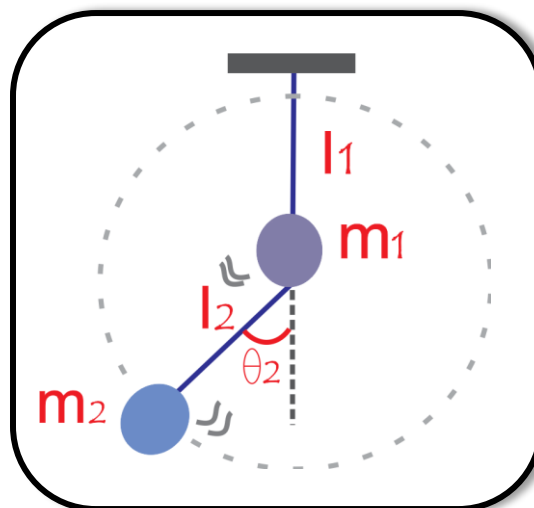


Figura 3. Representación General del segundo caso para el grado de libertad dos.

Con relación a estos movimientos, se puede decir que el sistema tiene dos grados de libertad, a los cuales se le asigna una variable independiente de configuración a cada uno. Al primer grado de libertad le asociaremos la variable angular θ_1 y al segundo grado de libertad la variable angular θ_2 .

El primer grado de libertad donde la masa m_1 traza un movimiento circular variando el ángulo θ_1 , dicho ángulo se forma entre la vertical y la cuerda en una posición particular. Mientras que el ángulo θ_1 varía, se podrían presumir dos posibles movimientos para el ángulo θ_2 : la masa m_2 se comporta como un cuerpo rígido sin variar al ángulo θ_2 o que la masa m_2 se encuentre en cualquier ángulo θ_2 (Figura 2).

El segundo grado de libertad donde la masa m_2 traza un movimiento circular variando el ángulo θ_2 . Mientras que el ángulo θ_2 varía, se podrían presumir dos posibles movimientos, como en el caso anterior, para el ángulo θ_1 : la masa m_1 se comporta como un cuerpo rígido sin variar al ángulo θ_1 o que la masa m_1 se encuentre en cualquier ángulo θ_1 (Figura 3).

Se puede decir que estos son los dos movimientos independientes posibles, ya que el primero se puede presentar sin que el segundo se presente, es decir, podemos tener el movimiento de la masa m_1 con un cambio de configuración de θ_1 sin que ocurra el movimiento de la masa m_2 o al contrario, puede haber un movimiento de la masa m_2 con un cambio de configuración de θ_2 sin que la masa m_1 esté moviéndose.

1.2. ESTADO MECÁNICO DEL SISTEMA

En el estado mecánico del sistema se procede a definir las cualidades exclusivas del ámbito mecánico. La primera cualidad a tener en cuenta, será la de configuración o la que determina la disposición espacial del sistema y la segunda de movimiento (Ayala y Barragan, 2013). A partir de esto, el estado mecánico del sistema en un momento determinado, estará dado por su estado de configuración y su estado de movimiento.

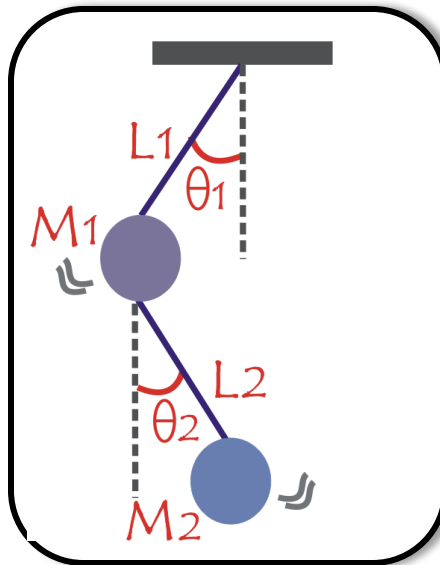


Figura 4. Representación del Sistema “Movimiento del péndulo doble plano vertical” asociándole las coordenadas generalizadas.

1.2. ESTADO DE CONFIGURACIÓN

La configuración es una de las cualidades del sistema asociada a la geometría y variables de los cambios de todos los posibles estados de configuración. Para caracterizar el estado de configuración del sistema, se hace necesario asociar a cada grado de libertad una variable. Estas variables independientes entre sí, son llamadas coordenadas espaciales del sistema o coordenadas generalizadas q_j o de configuración.

Con base en lo anterior, el sistema tiene dos movimientos independientes asociándoles una coordenada (θ_1 y θ_2) respectivamente como se indica en la figura 4. Estas dos coordenadas varían entre los siguientes intervalos:

- I. $\{0 < \theta_1 < 2\pi\}$ y $\{-\pi < \theta_1 < \pi\}$, ya que la masa m_1 puede seguir una circunferencia con respecto al pivote en el origen de coordenadas. Se ve necesario utilizar dos intervalos para estas variaciones porque es difícil asociar a cada punto físico un punto matemático ya que en el caso en el que el péndulo gire completamente, pareciera que el valor 0 y 2π fueran el mismo punto, por lo menos son el mismo punto físico, pero tiene asociado dos valores matemáticos diferentes (figura 5).
- II. $\{0 < \theta_2 < 2\pi\}$ y $\{-\pi < \theta_2 < \pi\}$ ya que la masa m_2 traza una circunferencia como la masa m_1 .

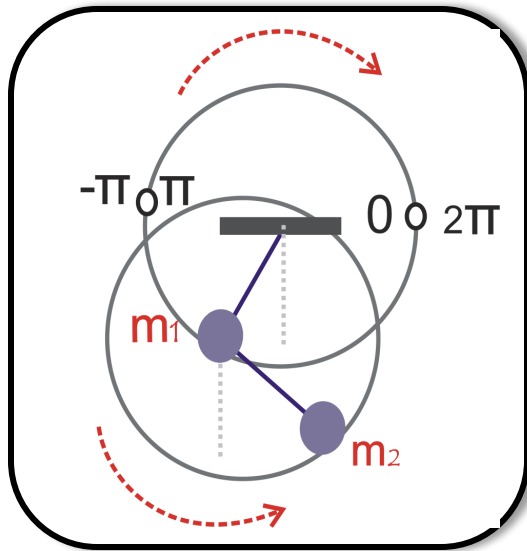


Figura 5. Representación de los intervalos del péndulo doble plano vertical, tomando como ejemplo a la masa m_1 .

1.2.1. Coordenadas generalizadas

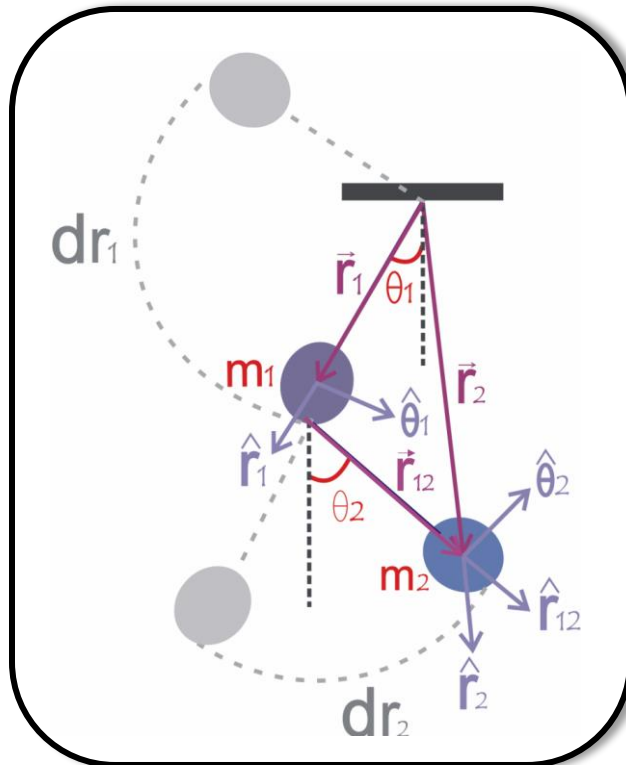


Figura 6. Representación de los vectores; posición y unitarios del sistema del péndulo doble plano vertical.

Para dar cuenta del movimiento del sistema, se debe tener presente que cada parte móvil del sistema genera un movimiento y por lo tanto se le asocia una coordenada generalizada. Si se observa la figura 6 podemos describir la variación y deducir cada coordenada generalizada.

Para la masa m_1 el vector posición \vec{r}_1 es igual a r_1 en magnitud y \hat{r}_1 en dirección, es decir:

$$\vec{r}_1 = r_1 \hat{r}_1 \quad (1)$$

Suponiendo que la masa m_1 describe una posible circunferencia, la posición de esta masa con respecto a su posición inicial \vec{r}_1 está en términos del arco que recorre $d\vec{r}_1$ que es igual a la variación del ángulo θ_1 . Por ello, el desplazamiento $d\vec{r}_1$ de la masa m_1 es equivalente a la siguiente expresión:

$$d\vec{r}_1 = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 \quad (2)$$

Donde $d\vec{r}_1$ es la variación de la posición siendo igual a l_1 , que nos muestra la distancia que hay entre la masa m_1 y el soporte. El término $d\theta_1$ indica la variación del ángulo θ_1 en la dirección $\hat{\theta}_1$.

Para la masa m_2 , el vector posición \vec{r}_{12} es igual a r_{12} en magnitud y \hat{r}_{12} en dirección, ya que el movimiento de la masa m_2 depende del movimiento de la masa m_1 , considerando que la masa m_2 está sujeta a la masa m_1 (figura 6).

$$\vec{r}_{12} = r_{12} \hat{r}_{12} \quad (3)$$

De forma análoga, se halla la variación del vector \vec{r}_{12} y se expresa de la siguiente manera:

$$d\vec{r}_{12} = l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2 \quad (4)$$

Ahora el vector \vec{r}_2 nos proporciona información sobre la posición de la masa m_2 con respecto al origen, por tal razón se suman las posiciones \vec{r}_1 (Ec. 2) con \vec{r}_{12} (Ec. 3), obteniendo la siguiente expresión:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = r_1 \hat{r}_1 + r_{21} \hat{r}_{21} \quad (5)$$

Por consiguiente, la variación del vector \vec{r}_2 es:

$$d\vec{r}_2 = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_{12} \quad (6)$$

Reemplazando cada expresión en la ecuación 6, se obtiene:

$$d\vec{r}_2 = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 + l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2 \quad (7)$$

1.2.2 Velocidades de las masas

Al evolucionar el sistema, en un instante de tiempo, se tiene un cambio en las coordenadas generalizadas y por lo tanto se puede definir las velocidades generalizadas. En este caso las velocidades son equivalentes a la variación de las coordenadas generalizadas que son los desplazamientos con respecto al tiempo de cada masa.

Derivando la ecuación 2 $d\vec{r}_1 = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1$ con respecto al tiempo, se tiene la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{dt} &= l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \hat{\theta}_1 \\ \vec{v}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Se realiza el mismo tratamiento para la ecuación 7, se tiene que:

$$\vec{v}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \quad (9)$$

1.2.3 Magnitud de la velocidad

Teniendo en cuenta que la velocidad de la masa m_1 está dada por la ecuación 8, entonces su magnitud será:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1) \cdot (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1) \\ \|\vec{v}_1\|^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Por lo tanto el producto punto entre los vectores unitarios de la magnitud de la velocidad, anteriormente definida, están dadas por:

$$(\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) = \|\hat{\theta}_1\| \|\hat{\theta}_1\| \cos \beta_{\theta_1 \theta_1}$$

$$(\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) = 1$$

Entonces la magnitud de la velocidad de la masa m_1 quedará expresada como:

$$\|\vec{v}_1\|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (11)$$

De manera análoga, la magnitud de la velocidad de la masa m_2 está expresada por:

$$\|\vec{v}_2\|^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \cdot (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \quad (12)$$

Después de realizar el producto punto de las sumatorias, obtenemos:

$$\|\vec{v}_2\|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2) \quad (13)$$

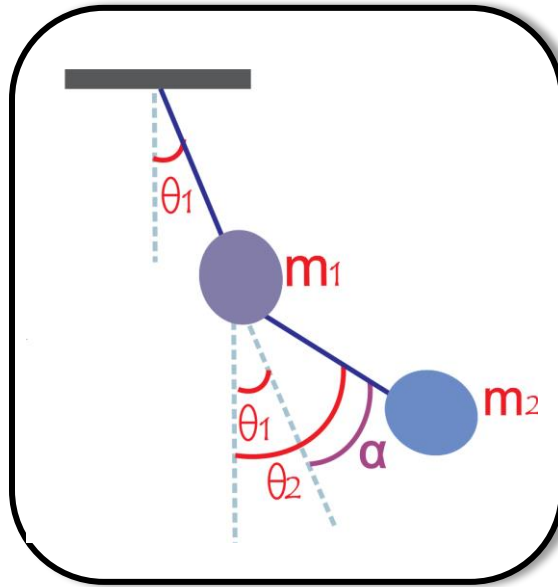


Figura 7. Representación del ángulo formado entre los vectores unitarios $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

El producto punto entre $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ tiene que ver con el ángulo que forman los dos ángulos θ_1 y θ_2 . Para encontrar el ángulo formado entre los dos vectores unitarios (α), se puede obtener trasladando el ángulo θ_1 hacia el ángulo θ_2 (figura 7). Entonces el ángulo α será la diferencia que hay entre el ángulo θ_2 y el ángulo θ_1 :

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 \quad (14)$$

Resolviendo el producto punto entre los vectores unitarios $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$. Teniendo en cuenta la definición del producto punto se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) &= \|\hat{\theta}_1\| \|\hat{\theta}_2\| \cos(\alpha) \\
 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) &= \|\hat{\theta}_1\| \|\hat{\theta}_2\| \cos(\theta_2 - \theta_1) \\
 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) &= \cos(\theta_2 - \theta_1)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Remplazando las expresiones de los productos punto de los vectores unitarios, finalmente se obtiene que la magnitud de la velocidad es:

$$\|\vec{v}_2\|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \tag{16}$$

1.3. ESTADO DE MOVIMIENTO

Para definir el estado de movimiento es necesario precisar unas variables dinámicas que caractericen este estado. Estas variables dinámicas se conocen como momentos generalizados, con los que se designan los movimientos independientes que tiene el sistema.

Los movimientos generalizados son variables que son independientes de las variables de configuración. Desde esta perspectiva, la configuración y movimiento no son cualidades diferentes del sistema. Se considera que para hablar de movimiento se reduce a estudiar el cambio de configuración y la rapidez con que se efectúa este cambio de movimiento y la forma como lo hace (Ayala y Barragan, 2013).

En el momentum generalizado se debe pensar en el movimiento como una cualidad independiente, susceptible de ser medida, sin tener que remitirse necesariamente a los cambios de configuración. Por ello, se tiene la posibilidad de relacionar los cambios de configuración y los cambios de movimiento.

1.3.1 Momentum generalizado

El momento generalizado está asociado a cada coordenada generalizada, es decir el movimiento independiente del sistema cuando varía el ángulo θ_1 y el ángulo θ_2 , como muestra la siguiente ecuación, la cual muestra las proyecciones de los momentos lineales y angulares en las variaciones o desplazamientos de las coordenadas de configuración:

$$p_j dq_j = \sum_{i=1}^2 \vec{p}_i \cdot d\vec{r}_{ij} \quad (17)$$

Como se tienen dos coordenadas generalizadas, se obtienen dos momentos generalizados, resultando, donde d_{θ_1} y d_{θ_2} son las variaciones de las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 :

$$p_{\theta_1} d_{\theta_1} = \vec{p}_1 \cdot d\vec{r}_{1\theta_1} + \vec{p}_2 \cdot d\vec{r}_{2\theta_1} \quad (18)$$

$$p_{\theta_2} d_{\theta_2} = \vec{p}_1 \cdot d\vec{r}_{1\theta_2} + \vec{p}_2 \cdot d\vec{r}_{2\theta_2} \quad (19)$$

Partiendo de la definición de momentum:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (20)$$

Las expresiones (18) y (19) se verán modificadas de la siguiente manera:

$$p_{\theta_1} d_{\theta_1} = m_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{r}_{1\theta_1} + m_2 \vec{v}_2 \cdot d\vec{r}_{2\theta_1} \quad (21)$$

$$p_{\theta_2} d_{\theta_2} = m_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{r}_{1\theta_2} + m_2 \vec{v}_2 \cdot d\vec{r}_{2\theta_2} \quad (22)$$

Ahora bien, reemplazando las velocidades de las masas m_1 y m_2 se calculan los momentos generalizados para cada una de las coordenadas generalizadas.

Para la partícula m_1 , se obtiene:

$$p_{\theta_1} d_{\theta_1} = m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \cdot l_1 d_{\theta_1} \hat{\theta}_1 + [m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \cdot (l_1 d_{\theta_1} \hat{\theta}_1)]$$

$$p_{\theta_1} d_{\theta_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 [\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1] d_{\theta_1} + [m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1 [\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1] d_{\theta_1} + l_2 l_1 \dot{\theta}_2 [\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2] d_{\theta_1})]$$

Teniendo en cuenta los productos punto entre los vectores unitarios, como se demostró en el cálculo de la magnitud de la velocidad (acápite anterior), tenemos que:

$$p_{\theta_1} d_{\theta_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 d_{\theta_1} + m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) d_{\theta_1}$$

Al sintetizar al máximo la ecuación (21) se obtiene el momentum generalizado respecto a la coordenada generalizado θ_1 :

$$p_{\theta_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (23)$$

Para la masa m_2 , se obtiene de manera análoga al de la masa m_1 el momentum, resultando:

$$p_{\theta_2} d_{\theta_2} = m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \cdot (l_2 d_{\theta_2} \hat{\theta}_2)$$

$$p_{\theta_2} d_{\theta_2} = m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1 (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_1) d_{\theta_2} + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 d_{\theta_2} (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2)$$

Simplificando:

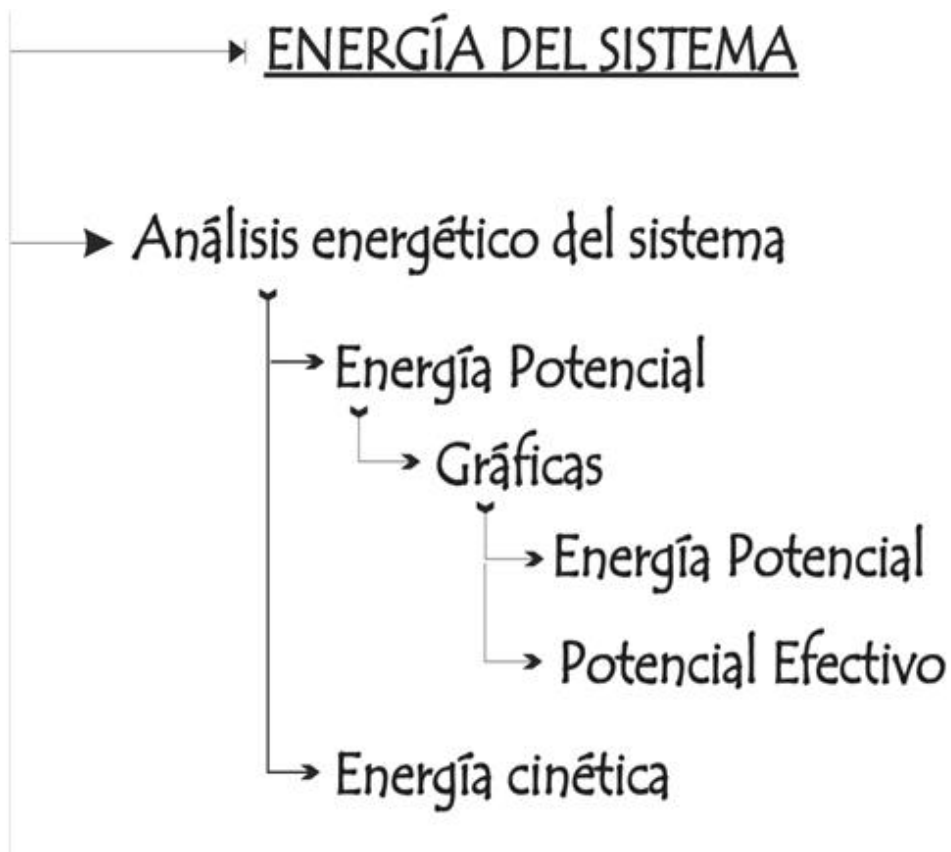
$$p_{\theta_2} d_{\theta_2} = m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) d_{\theta_2} + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 d_{\theta_2}$$

$$p_{\theta_2} = m_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2) \quad (24)$$

Otra forma de representar los momentos generalizados es por medio de matrices, como un sistema de ecuaciones, es decir:

$$\begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 l_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

2. ENERGÍA DEL SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL



2.1 ENERGÍA POTENCIAL DEL SISTEMA

Para obtener la energía potencial del sistema, se hace a través del diagrama de fuerzas de cada una de las masas que se muestra en la figura 8. De esta manera nos permite comprender las fuerzas que hacen trabajo sobre el sistema y así poder realizar la integral del producto punto de estas fuerzas con cada una de las variaciones de la posición $d\vec{r}_i$.

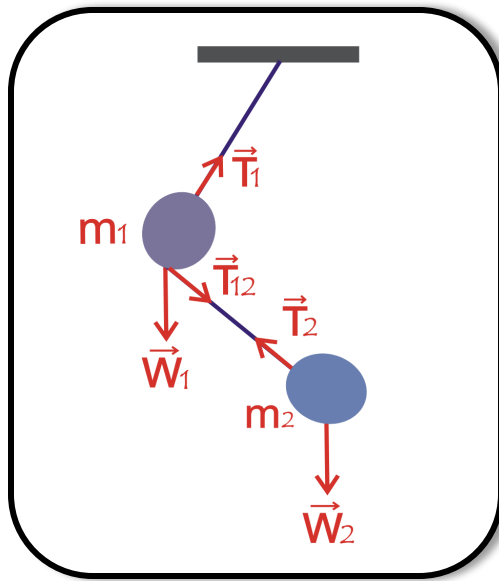


Figura 8. Diagrama de fuerzas de las masas del péndulo doble plano.

Para describir cada una de las fuerzas y sus respectivas direcciones, es necesario tener en cuenta que el eje coordenado está dado por los vectores unitarios \hat{z} , \hat{r}_1 , \hat{r}_2 , $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

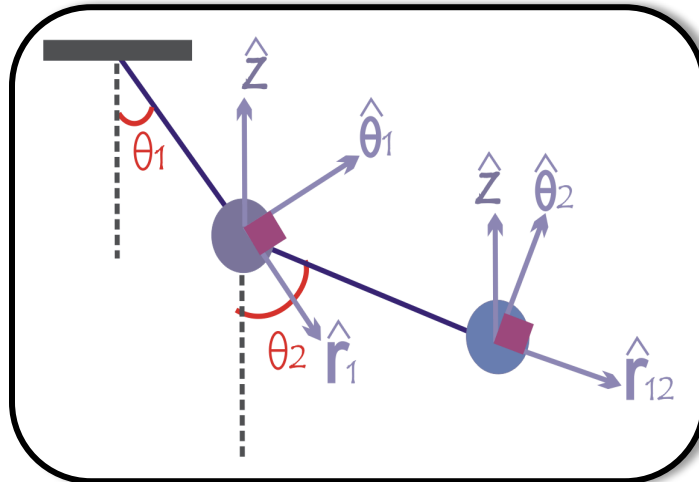


Figura 9. Eje coordenado.

Con base en la anterior figura se expresa cada una de las fuerzas con sus respectivas direcciones:

Masa 1	Masa 2
$\vec{W}_1 = m_1 g (-\hat{z})$	$\vec{W}_2 = m_2 g (-\hat{z})$
$\vec{T}_1 = T_1 (-\hat{r}_1)$	$\vec{T}_{12} = T_2 (\hat{r}_{12})$ $\vec{T}_2 = T_2 (-\hat{r}_{12})$

Por lo tanto la sumatoria de fuerzas para cada una de las masas es:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{W}_1 + \vec{T}_1 \quad (26)$$

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{W}_2 + \vec{T}_{12} + \vec{T}_2 \quad (27)$$

A partir de la definición de la energía potencial se deduce la del péndulo doble plano:

$$\Delta U = - \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{ij} \quad (28)$$

Reemplazando las ecuaciones: 2, 6, 26 y 27 en la ecuación 28, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta U = - & \left[\int (\vec{W}_1 \cdot d\vec{r}_1) + \int (\vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1) + \int (\vec{W}_2 \cdot d\vec{r}_1) + \int (\vec{W}_2 \cdot d\vec{r}_2) + \int (\vec{T}_{12} \cdot d\vec{r}_1) \right. \\ & \left. + \int (\vec{T}_{12} \cdot d\vec{r}_2) + \int (\vec{T}_{12} \cdot d\vec{r}_1) + \int (\vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo el producto punto entre las fuerzas y los desplazamientos se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta U = - & \left[\int W_1 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) + \int T_1 l_1 d\theta_1 (\hat{r}_1 \cdot \hat{\theta}_1) + \int W_2 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) \right. \\ & + \int W_2 l_2 d\theta_2 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_2) + \int T_{12} l_1 d\theta_1 (\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1) + \int T_{12} l_2 d\theta_2 (-\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_2) \\ & \left. + \int T_2 l_1 d\theta_1 (-\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1) + \int T_2 l_2 d\theta_2 (\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_2) \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que algunos de estos productos punto entre vectores unitarios son perpendiculares y ortogonales, el resultado es igual a cero y la expresión queda reducida a:

$$\begin{aligned} \Delta U = - & \left[\int W_1 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) + \int W_2 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) + \int W_2 l_2 d\theta_2 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_2) \right. \\ & \left. + \int T_{12} l_1 d\theta_1 (\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1) + \int T_2 l_1 d\theta_1 (-\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1) \right] \end{aligned}$$

Los productos $(\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1)$ y $(-\hat{r}_{12} \cdot \hat{\theta}_1)$ de las tensiones \vec{T}_{12} y \vec{T}_2 son la representación del acople del sistema ya que el trabajo realizado por las dos tensiones se anula entre ellas porque son de igual magnitud, quedando la energía potencial de la siguiente manera:

$$\Delta U = - \left[\int W_1 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) + \int W_2 l_1 d\theta_1 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_1) + \int W_2 l_2 d\theta_2 (-\hat{z} \cdot \hat{\theta}_2) \right] \quad (29)$$

Como estos productos punto no son perpendiculares entre sí, es necesario mirar el ángulo que relaciona a cada pareja de vectores unitarios para aplicar la definición del producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|A\| \|B\| \cos \alpha_{AB}$.

Inicialmente debemos conocer el ángulo que se forma entre $-\hat{z} \wedge \hat{\theta}_1$ y $-\hat{z} \wedge \hat{\theta}_2$:

- Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_1$:

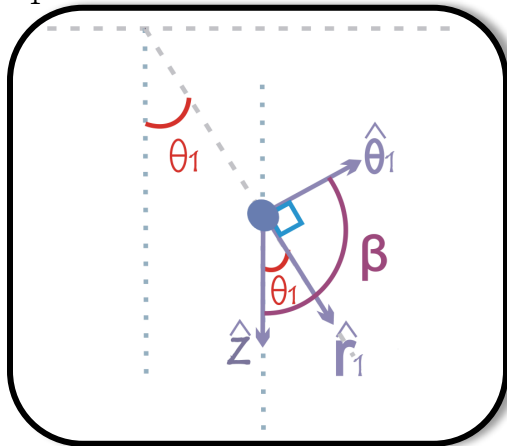


Figura 10. Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_1$.

Se puede observar que la resta de los ángulos $\hat{\theta}_1$ con β es un ángulo de 90° , por lo tanto se tendría que:

$$\beta - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \theta_1$$

- Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_2$:

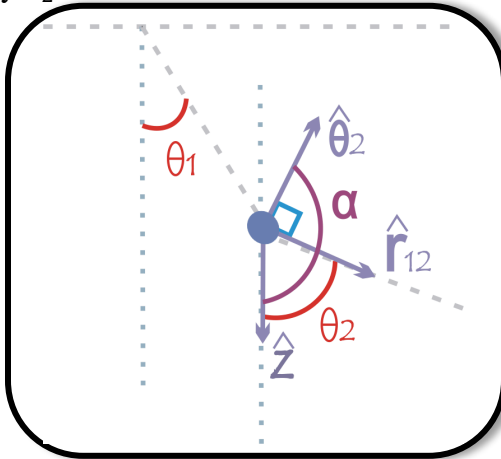


Figura 11. Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_2$.

Se puede observar que el ángulo que forman los vectores unitarios $\hat{\theta}_2$ y \hat{r}_{12} es de 90° , por lo tanto se tendría que:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta_2$$

Retomando la ecuación (29) de la energía potencial del sistema y reemplazando el producto punto entre cada pareja de vectores unitarios tendríamos que:

$$\Delta U = - \left[\int_0^{\theta_1} W_1 l_1 d\theta_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) + \int_0^{\theta_1} W_2 l_1 d\theta_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) + \int_0^{\theta_2} W_2 l_2 d\theta_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_2 \right) \right]$$

Sustituyendo por las identidades trigonométricas de los ángulos complementarios, tenemos:

$$\Delta U = - \left[\int_0^{\theta_1} W_1 l_1 d\theta_1 \sin \theta_1 + \int_0^{\theta_1} W_2 l_1 d\theta_1 \sin \theta_1 + \int_0^{\theta_2} W_2 l_2 d\theta_2 \sin \theta_2 \right]$$

Y sacando las constantes de las integrales queda:

$$\Delta U = - \left[W_1 l_1 \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\theta_1 + W_2 l_1 \int_0^{\theta_1} \sin \theta_1 d\theta_1 + W_2 l_2 \int_0^{\theta_2} \sin \theta_2 d\theta_1 \right]$$

$$\Delta U = -[W_1 l_1 \cos \theta_1 + W_2 l_1 \cos \theta_1 + W_2 l_2 \cos \theta_2] \quad (30)$$

La energía potencial del sistema finalmente esta descrita por:

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (31)$$

2.1.1 Potencial efectivo

El potencial efectivo está definido como la suma del potencial centrífugo y el potencial de interacción gravitacional (Hacar, 2009). En el sistema estudiado del péndulo doble se puede evidenciar por medio del cálculo de la energía potencial que el sistema no posee potencial efectivo, ya que sobre el sistema actúan únicamente potenciales gravitacionales. También se puede evidenciar que en el sistema no hay constantes de movimiento, por ejemplo la velocidad no es constante, arrojando momentos p_{θ_1} y p_{θ_2} variables, por esta razón no se podría dibujar un potencial efectivo.

2.2 ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA

Como ya se ha calculado la energía potencial del sistema, lo siguiente será calcular la energía cinética. Para este caso, la energía cinética solo depende de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados. Por ende se puede usar la siguiente expresión:

$$H = H(q_j, p_j) = \sum p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Con la siguiente demostración se logra llegar a la energía cinética:

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - (t - u)$$

El lagrangiano de un sistema es denotado como la diferencia de la energía cinética con respecto a la energía potencial. Disponemos a hacer esos tipos de remplazos bajo una transformación de Legendre, obteniendo:

$$U + T = \sum p_j \dot{q}_j - (T - U)$$

Una vez realizada la transformación de Legendre, se halla la energía cinética de un sistema que solo depende de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados, obteniendo:

$$T = \frac{1}{2} \sum p_j \dot{q}_j$$

Aplicando esta expresión al sistema del péndulo doble plano, la expresión queda de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 p_{\theta_j} \dot{\theta}_j \quad (32)$$

Con lo anterior se puede realizar el cálculo de la energía cinética. Para ello, hay que tener en cuenta los momentos generalizados dado que estos son los que proporcionan información del sistema.

Para el cálculo de la energía cinética hay que expresar las coordenadas generalizadas en términos de los momentos generalizados. Es importante resolver el sistema de ecuaciones (23) y (24). Para realizarlo utilizaremos un método de solución que consiste en encontrar la inversa de la matriz de transformación que se expresa como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \hat{A} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de transformación queda expresada en la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1^2[(m_1+m_2) - m_2 l_2 \cos^2(\theta_2)]} & \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_1)}{m_2 l_1 l_2 [(m_1+m_2) - m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]} \\ \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_1)}{m_2 l_1 l_2 [(m_1+m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} & \frac{(m_1+m_2)}{m_2 l_2^2 [(m_1+m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

A partir de todo este tratamiento algebraico se puede determinar la energía cinética, con base en la ecuación 33.

En general la expresión se muestra de la siguiente manera:

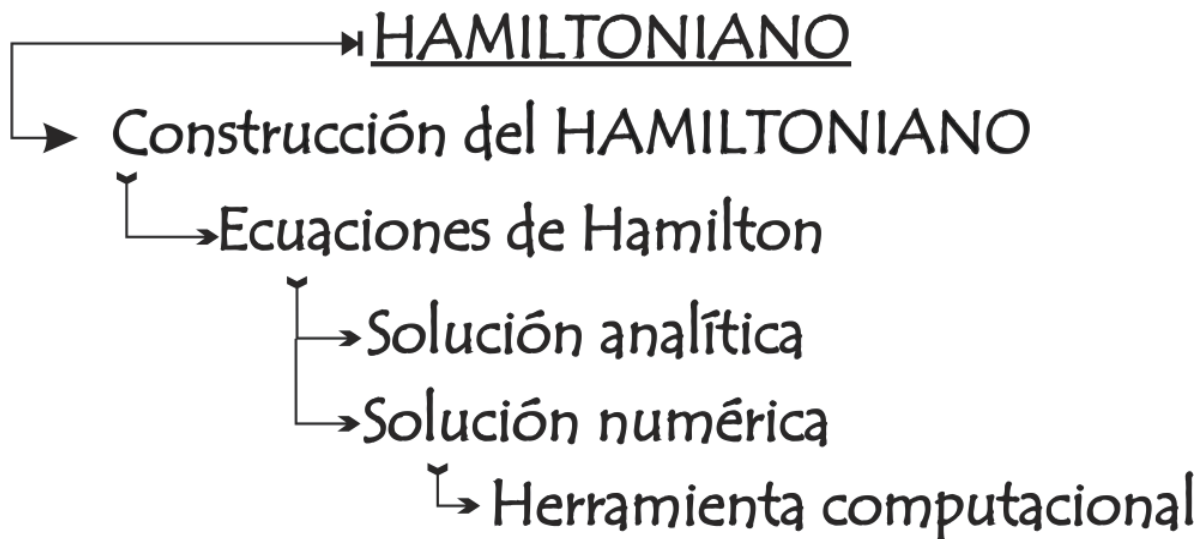
$$T = \frac{1}{2} [p_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + p_{\theta_2} \dot{\theta}_2]$$

Es decir que la energía cinética del sistema queda definida por la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{p_{\theta_1}^2}{l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} - 2 \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 m_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} + \frac{p_{\theta_2}^2 (m_1 + m_2)}{m_2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} \right] \quad (34)$$

La energía cinética del sistema determina la evolución temporal del sistema, prediciendo el comportamiento para determinados casos. La cual es una herramienta para el desarrollo del hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de Hamilton.

3. EVOLUCIÓN DEL ESTADO DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL



3.1 HAMILTONIANO DEL SISTEMA

El hamiltoniano será el que describe el estado de un sistema mecánico, cuando el sistema evoluciona con el tiempo, el estado de configuración y de movimiento también lo hacen. Un cambio de configuración implica un cambio en el movimiento y viceversa. Por eso es posible establecer una relación entre los dos estados por medio de una relación funcional (Ávila, 2009).

La descripción que se puede realizar del análisis de la evolución temporal del sistema, involucra la energía cinética y potencial del sistema mecánico, es decir, a cada cambio de configuración se le asocia un cambio de movimiento (Medina, 2007). Por lo anterior, el hamiltoniano permite abstraer información más completa de la evolución del sistema en su estado general referente a la configuración y el movimiento.

Las leyes de la dinámica de un sistema mecánico se pueden deducir del principio de Hamilton que se enunciará a continuación:

$$H = T(P, \theta_j, \dot{\theta}_j) + U \quad (35)$$

Todo sistema mecánico se caracteriza por una función lagrangeana o Hamiltoniana, que solo depende de las posiciones, velocidades y de los momentos generalizados. Dichas variables caracterizan de manera completa el estado de movimiento del sistema (J. Isaza, D. Campos, 2002). Por lo tanto, el Hamiltoniano queda expresado de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_{\theta_1}^2}{l_1^2[(m_1+m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} - 2 \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 m_2 [(m_1+m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} + \frac{p_{\theta_2}^2 (m_1+m_2)}{m_2 l_1^2 [(m_1+m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} \right] + [-W_1 l_1 \cos \theta_1 - W_2 l_1 \cos \theta_1 - W_2 l_2 \cos \theta_2] \quad (36)$$

3.2 LAS ECUACIONES DE HAMILTON

El hamiltoniano asocia los cambios de configuración a cambios de movimiento del sistema, interpretándolo como un sistema conservativo, es decir, los cambios de configuración del sistema se verán compensados con cambios de movimiento, de manera tal, que el cambio sea nulo y el hamiltoniano se comporte como una constante (Barragan, 2005). Para describir los cambios de la magnitud de la configuración y del movimiento, se hace a partir de la derivada parcial de la función Hamiltoniana con respecto a las coordenadas generalizadas y a los momentos generalizados.

A partir de los cambios en el estado mecánico del sistema, expresados en dH, es posible dotar al espacio de fases de una estructura dada por la siguiente relación (Ayala y Barragan, 2013):

$$\begin{bmatrix} p_{\dot{\theta}_1} \\ p_{\dot{\theta}_2} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} \\ -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Es así que este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, contienen toda la información dinámica del sistema. Realizando las derivadas parciales de las cuatro ecuaciones de Hamilton se conoce la información dinámica del sistema del péndulo doble plano y estas se presentan de forma separada.

Derivando parcialmente el hamiltoniano con respecto a la variable θ_1 se obtiene la variación del momento generalizado $p_{\dot{\theta}_1}$ resultando:

$$p_{\dot{\theta}_1} = \left[\frac{l_1^2 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) p_{\theta_1}^2}{[l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]} + \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) (m_2 l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)] + 2 l_1 l_2 m_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1))}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + [m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1] \right] \quad (38)$$

Derivando parcialmente el hamiltoniano con respecto a la variable θ_2 se obtiene la variación del momento generalizado $p_{\dot{\theta}_2}$ resultando:

$$p_{\dot{\theta}_2} = \left[\frac{-l_1^2 m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) p_{\theta_2}^2}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) [m_2 l_1 l_2 (m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)] - 2 m_1^2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1)}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} - \frac{m_2^2 l_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) p_{\theta_2}^2}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + (m_2 g l_2 \sin \theta_2) \right] \quad (39)$$

Derivando parcialmente el hamiltoniano con respecto al momento generalizado p_{θ_1} se obtiene la variación de la coordenada generalizada $\dot{\theta}_1$ resultando:

$$\dot{\theta}_1 = \left[\frac{p_{\theta_1} [l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]} - \frac{p_{\theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1) [m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} \right] \quad (40)$$

Derivando parcialmente el hamiltoniano con respecto al momento generalizado p_{θ_2} se obtiene la variación de la coordenada generalizada $\dot{\theta}_2$ resultando:

$$\dot{\theta}_2 = \left[\frac{p_{\theta_1} \cos(\theta_2 - \theta_1) [m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + \frac{p_{\theta_2} [m_2 l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{m_2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]^2} \right] \quad (41)$$

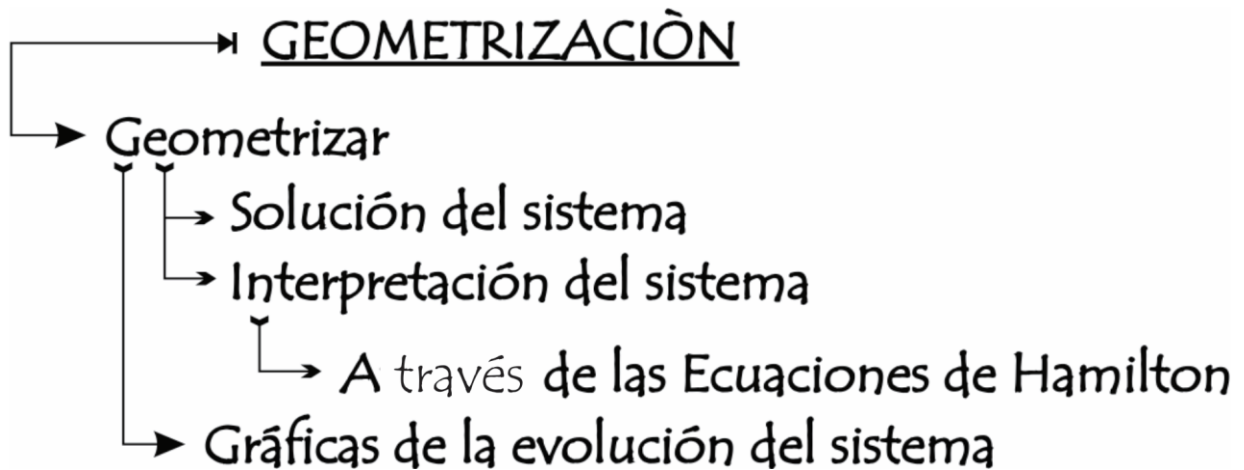
3.2.1 Solución numérica de las ecuaciones de Hamilton

Para la solución de las ecuaciones de Hamilton, se utilizó el método de Runge-Kutta que es un método genérico iterativo, explícito, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales acopladas por medio del compilador C++. Dicho algoritmo fue realizado por los estudiantes Walter García, Germán Cuellar y Omar Vargas en el año 2014, tomado del libro métodos numéricos (Robles, Garcia, 2006). Posteriormente se modificaron las condiciones dinámicas y las ecuaciones de Hamilton del programa para el interés de este trabajo de investigación (ver anexo 1). Este programa permite tener una descripción de las ecuaciones diferenciales, con el fin de obtener los momentos generalizados y las coordenadas generalizadas, como una evolución temporal del sistema del péndulo doble.

Para reescribir las ecuaciones de Hamilton en el lenguaje de programación C++, se requiere un estado inicial para que el método de solución permita variar las condiciones iniciales del sistema del péndulo doble. Es decir, se puede hacer un análisis del sistema describiendo un estado inicial que determina el estado siguiente, formando así un sistema cíclico que permite ver el sistema en cualquier intervalo de tiempo. Para ello, se definen, en primer lugar, las constantes del sistema m_1 , m_2 , l , R , g , el tiempo inicial, el tiempo final y el número de pasos o iteraciones a realizar por el método numérico.

En segundo lugar, para reescribir las ecuaciones de Hamilton en el lenguaje de programación de C++, se necesita un estado inicial para que el método proporcione un resultado. En síntesis, lo que arroja el programa es una tabla de datos y unas gráficas en las que se relaciona el tiempo con cada valor p_{θ_1} , p_{θ_2} , θ_1 y θ_2 para poder observar y analizar el comportamiento del sistema.

4. GEOMETRIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES E INTERPRETACIONES DEL SISTEMA DEL PÉNDULO DOBLE PLANO VERTICAL



Con las soluciones de las ecuaciones de Hamilton, que se obtuvieron a partir del programa C++, se modelaron dos casos cambiando las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas para así analizar la evolución del sistema, para cada una de las masas. Representando la evolución del sistema en el espacio de fase extendido con el tiempo y cuatro dimensional con los momentos generalizados p_{θ_1} y p_{θ_2} y las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 .

Las siguientes gráficas nos brindan información de la evolución del sistema del péndulo doble, que se obtuvieron del programa graficador gnuplot. Estas gráficas se asimilan a dos comportamientos, que se dan cuando se trabajan sistemas acoplados:

- El primer comportamiento semejante a las figuras de Lissajous, ya que describen el resultado de la composición de dos movimientos armónicos simples con dos direcciones perpendiculares (French, 2006). Dichas figuras de Lissajous muestran diferencias de fase inicialmente distintas, al hacer una comparación entre la superposición de dos vibraciones armónicas sobre una misma recta y generándose una superposición ortogonal.

- El segundo comportamiento es similar a las funciones cuasi-periódicas, estas son funciones periódicas, cuyo periodo depende de la forma en que se aproxime racionalmente algún cuasi-periodo, quiere decir que no alcanza simultáneamente su máximo y mínimo (Aguedas, 2007).

A continuación se evalúan dos casos para predecir cómo es el comportamiento y movimiento del sistema, a partir de gráficas:

- ❖ **CASO I:** Considerando a los ángulos inicialmente como $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 0^\circ$ (Figura 12), se evaluó para un tiempo de 20 segundos, las masas tienen de magnitud 5 Kg, la cuerda tiene una extensión de 1 m y los momentum inicialmente son de 0 Kg*m/s, el comportamiento que se obtuvo del sistema es el siguiente:

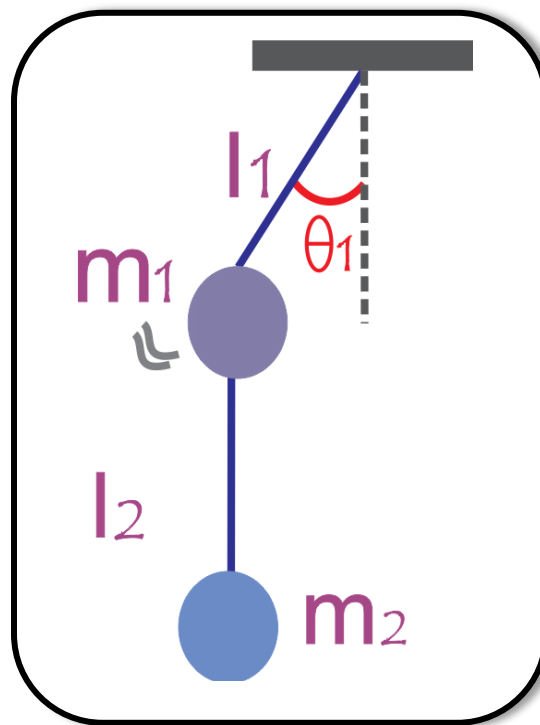
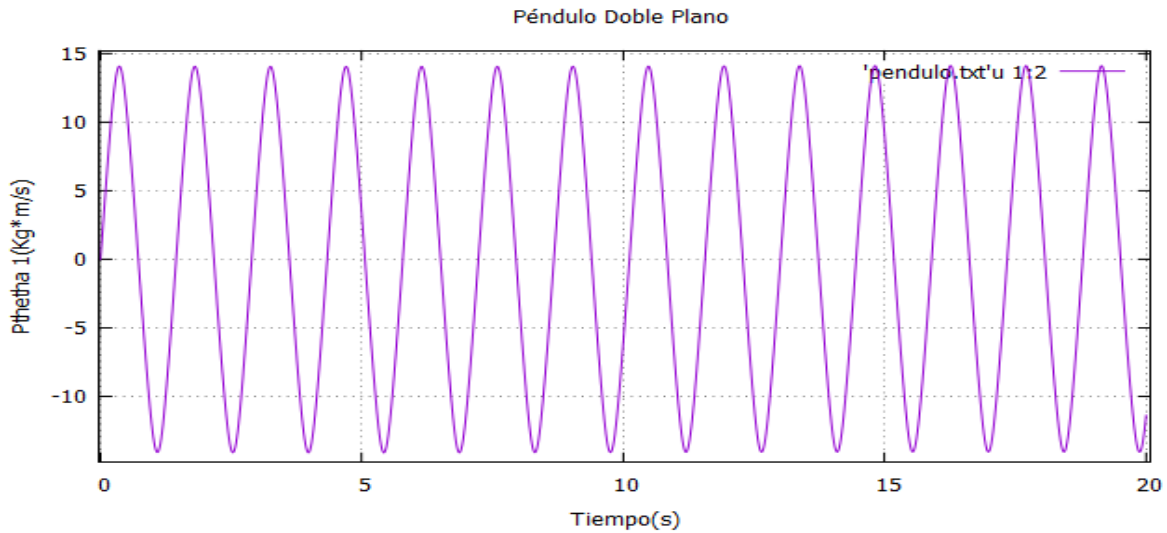


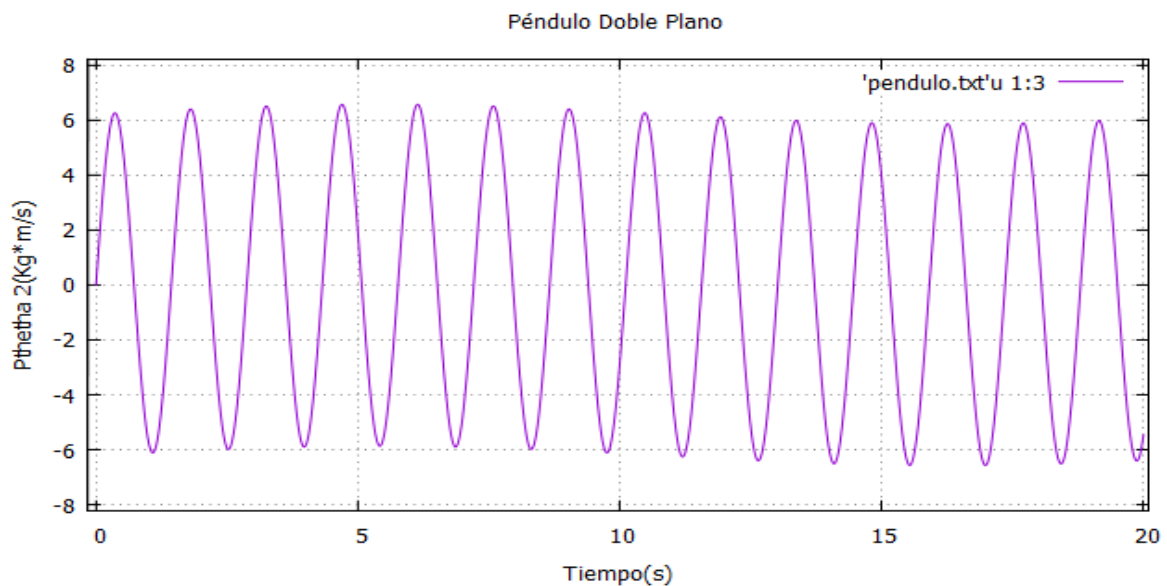
Figura 12. Representación de las condiciones iniciales del caso I.

- Gráfica del momentum p_{θ_1} contra el tiempo



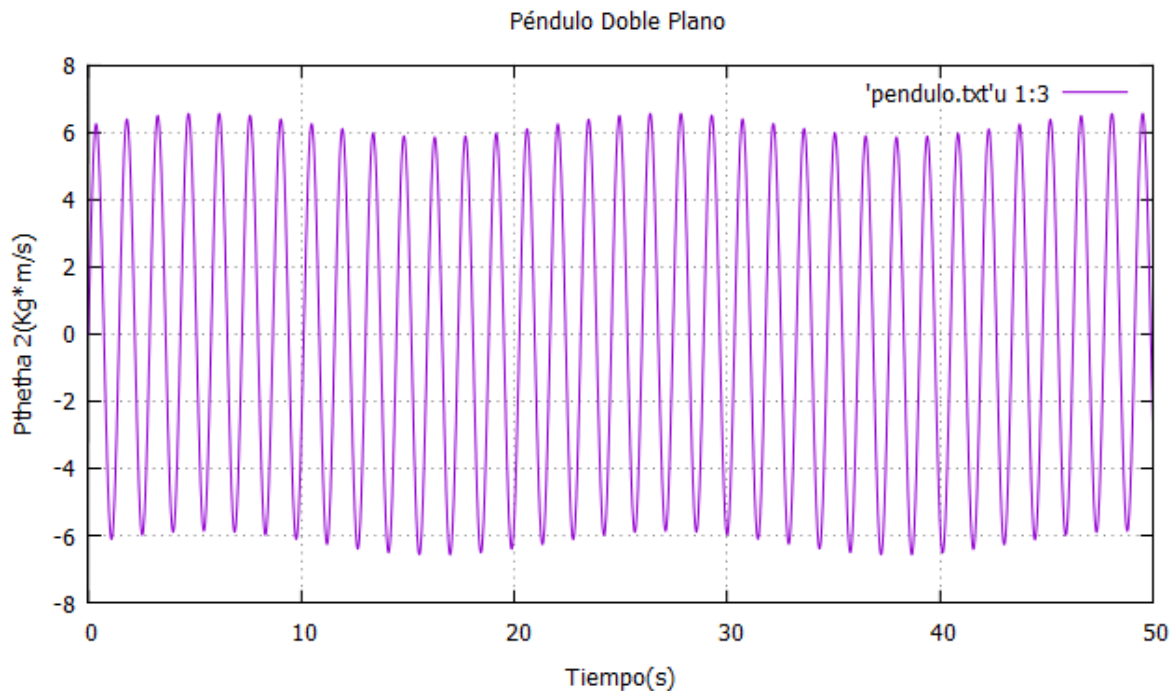
La gráfica muestra que el momentum p_{θ_1} está variando periódicamente con respecto al tiempo, ya que las oscilaciones se repiten en intervalos iguales de tiempo y siempre en el mismo orden. Los puntos de las crestas y los valles en la gráfica indican los máximos del momentum p_{θ_1} donde la masa m_1 se encuentra, en su punto de equilibrio de movimiento. Cuando el momentum p_{θ_1} en la gráfica es igual a cero, la masa m_1 se encuentra en el punto máximo de movimiento y el momentum es mínimo en ese instante de tiempo.

- Gráfica del momentum p_{θ_2} contra el tiempo

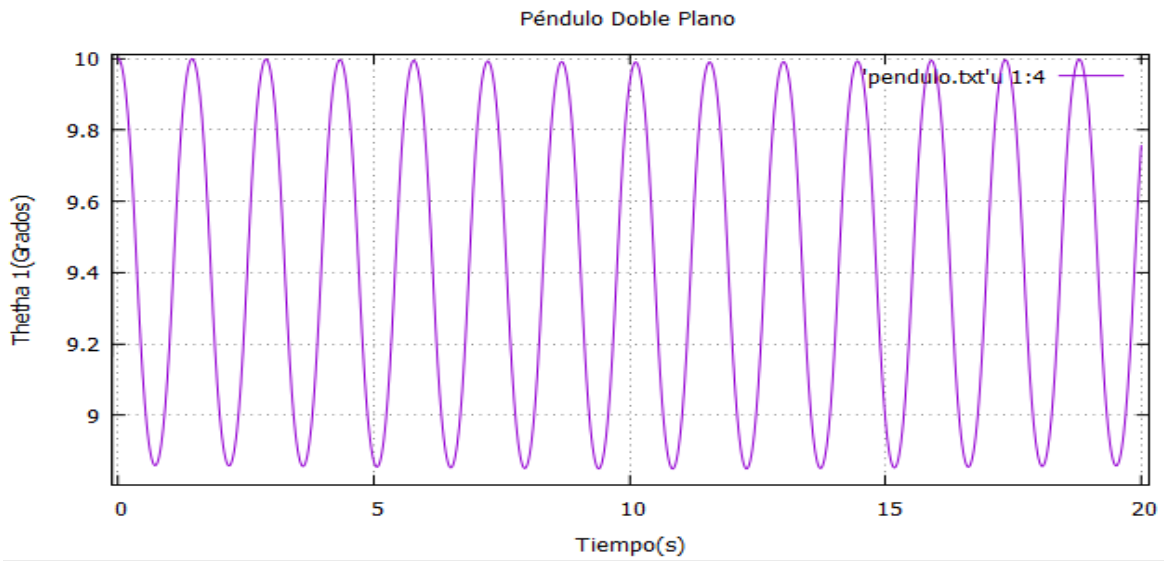


Esta gráfica muestra el acople entre el movimiento de las masas m_1 y m_2 . Esto significa que el momentum p_{θ_2} de la masa m_2 se ve afectada por la masa m_1 . Cuando dos osciladores idénticos se acoplan, aparecen dos formas de movimiento armónico colectivo; la primera ocurre con la simple yuxtaposición de dos osciladores que varían en fase con la misma frecuencia que tendría cada uno aisladamente. La segunda, implica la aparición de una nueva frecuencia que le permite al sistema oscilar libremente como un todo (Guerrero, 2004).

En esta gráfica se puede observar que el sistema se comporta como la primera forma de movimiento, anteriormente mencionada. Evidenciando que el movimiento de oscilación de la masa m_1 se encuentra yuxtaponiéndose al movimiento de oscilación de la masa m_2 , ya que se evidencia en la gráfica que hay un cambio en la amplitud de la oscilación no en magnitud, pero si en la ubicación de está, disminuyendo positivamente después de los 10 segundos y aumentando negativamente, si el análisis del sistema se hiciera en un tiempo mayor se puede observar que se forma una curva de yuxtaposiciones, como se observa en la siguiente gráfica:

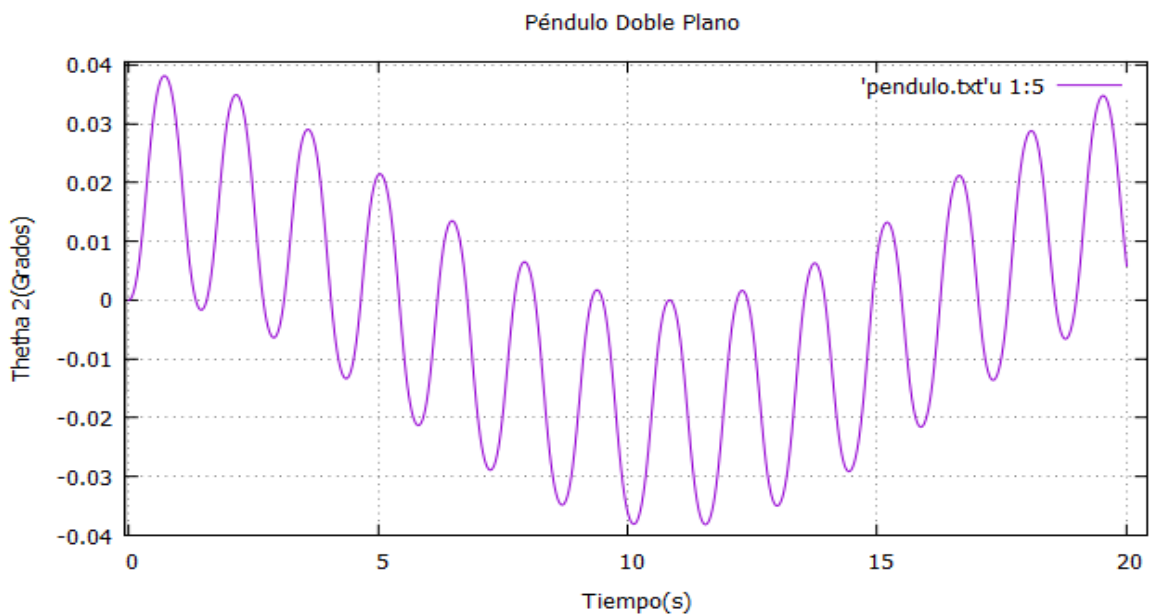


- Gráfica del ángulo θ_1 contra el tiempo:



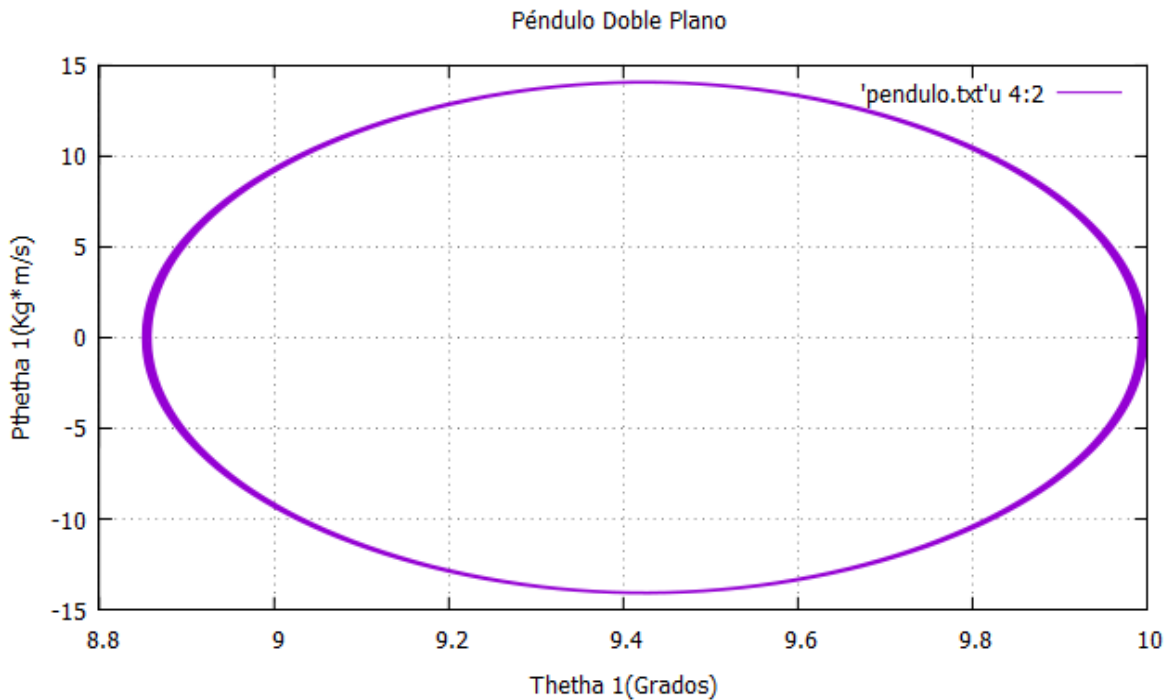
En esta gráfica se puede observar que el ángulo θ_1 de la masa m_1 oscila periódicamente con el tiempo y la variación de esta, se no se ve afectada por la variación masa m_2 . Por ende, se puede observar una gráfica de oscilación de un péndulo simple.

- Gráfica del ángulo θ_2 contra el tiempo:



En esta gráfica es evidente la yuxtaposición de oscilaciones, ya que la variación del ángulo θ_2 depende completamente de la variación del ángulo θ_1 , pues la masa m_1 “jala” a la masa m_2 causando la variación de la amplitud de movimiento. Realizando el ángulo θ_2 variaciones pequeñas de 0.04 grados, mientras el ángulo θ_1 oscila con una magnitud de 10 grados.

- Gráfica del momentum p_{θ_1} contra el ángulo θ_1



Podemos observar en la gráfica los máximos y mínimos de movimiento de la masa m_1 , ya que muestra zonas cerradas de oscilación, análogamente al de un péndulo simple, es decir, cuando p_{θ_1} es cero el péndulo se encuentra en los extremos de movimiento, como se observa en el diagrama de fase del péndulo simple (*Figura 14*).

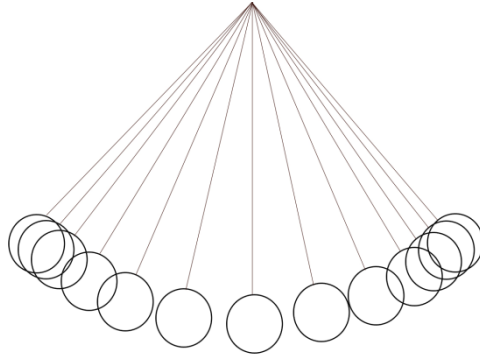


Figura 13. Simulación del movimiento del péndulo simple, imagen tomada de http://www.fisicanet.com.ar/fisica/elasticidad/ap03_ecuaciones_del_movimiento_armonico_simple.php.

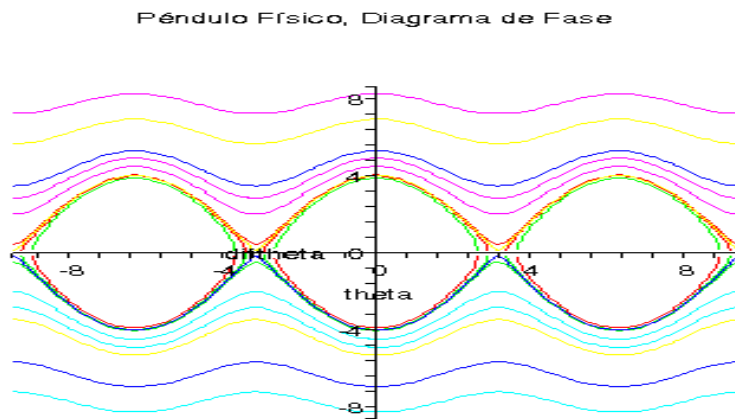
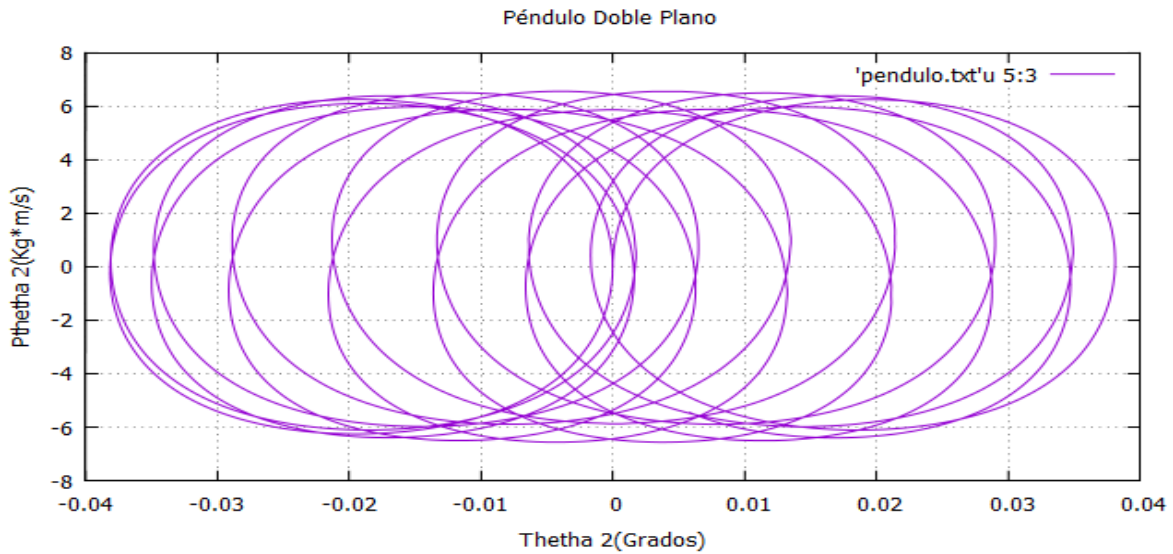


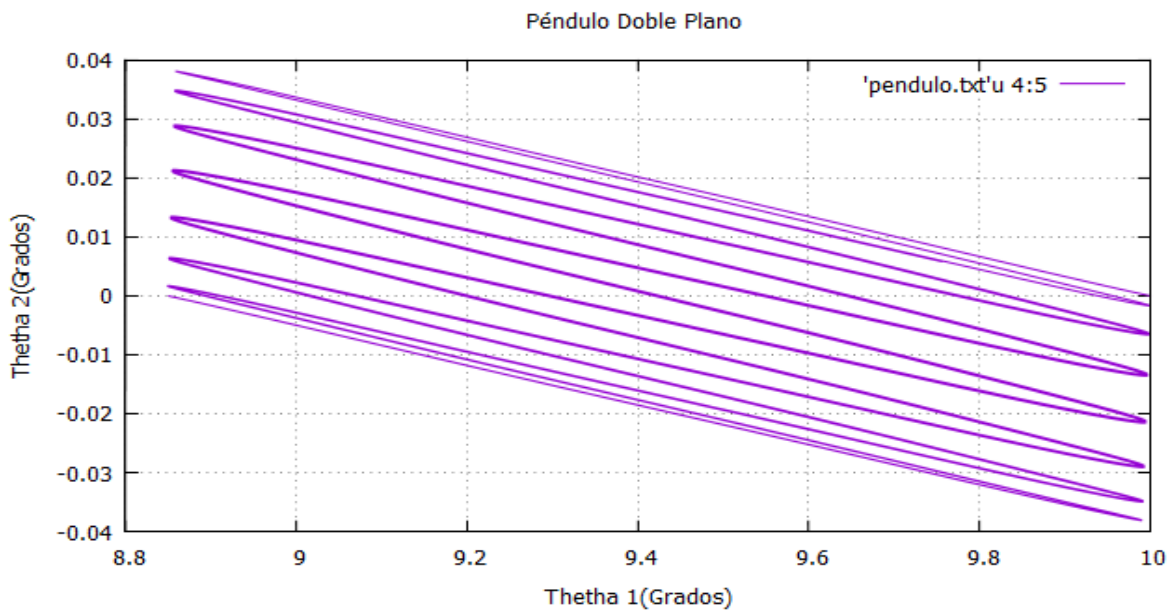
Figura 14. Diagrama de fase del péndulo simple, imagen tomada de <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/maple/Simulaciones.html>.

- Gráfica del momentum p_{θ_2} contra el ángulo θ_2



Esta gráfica, al igual que la anterior, muestra zonas cerradas de oscilación que nos permite observar los máximos y mínimos de movimiento, pero la diferencia notable es el acoplamiento de las masas y la interacción entre ellas al mostrar que el movimiento de la masa m_2 se ve afectado por la masa m_1 .

- Gráfica del ángulo θ_2 contra el ángulo θ_1



Se puede concluir, de esta última gráfica, que el ángulo θ_1 tiene una amplitud aproximada de 1.8 grados, mientras que el ángulo θ_2 tiene una amplitud de 0.04 unidades. Indicando que la masa m_1 no varía proporcionalmente con la masa m_2 .

El primer caso nos proporciona el siguiente análisis: los péndulos al tener la misma longitud desde el punto de oscilación permiten tener igual periodo de oscilación, sin embargo, el sistema puede mostrar un desfase cuando las masas estén oscilando. Al poner en un ángulo diferente al punto de equilibrio al ángulo θ_1 le permitió a la masa m_1 variar de una forma significativa mayor al ángulo θ_2 .

- ❖ **CASO II:** Considerando a los ángulos inicialmente como $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 10^\circ$ (Figura 12), se evaluó para un tiempo de 20 segundos, las masas tienen de magnitud 5 Kg, la cuerda tiene una extensión de 1 m y los momentum inicialmente son de 1 Kg*m/s², el comportamiento que se obtuvo del sistema es el siguiente:

Los momentums en este caso fueron trabajados inicialmente con 1 Kg*m/s², ya que si la condición inicial fuera 0 Kg*m/s² el sistema no presentaría ningún comportamiento gráficamente.

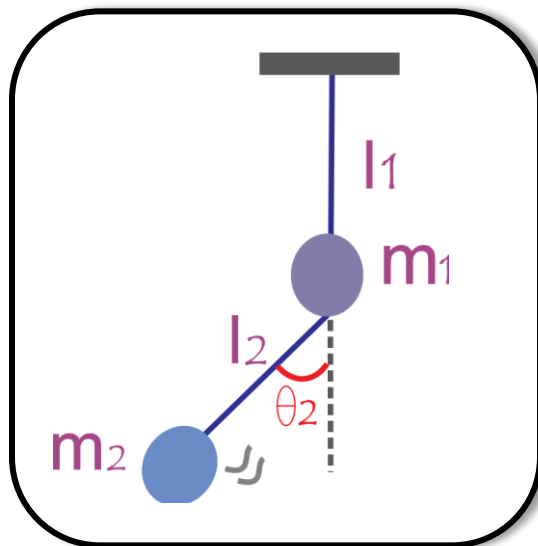
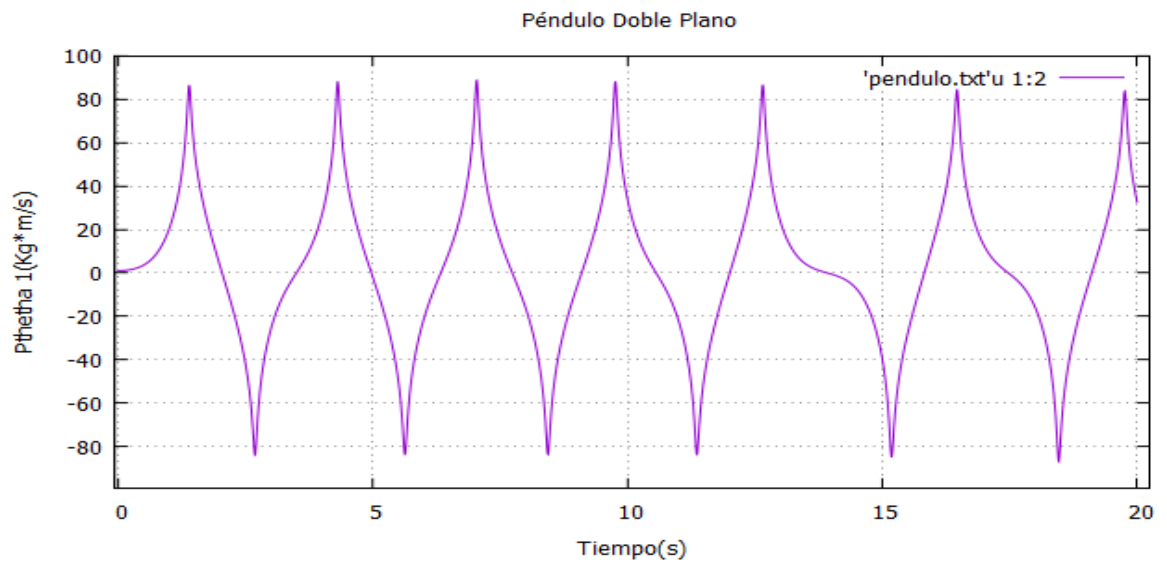


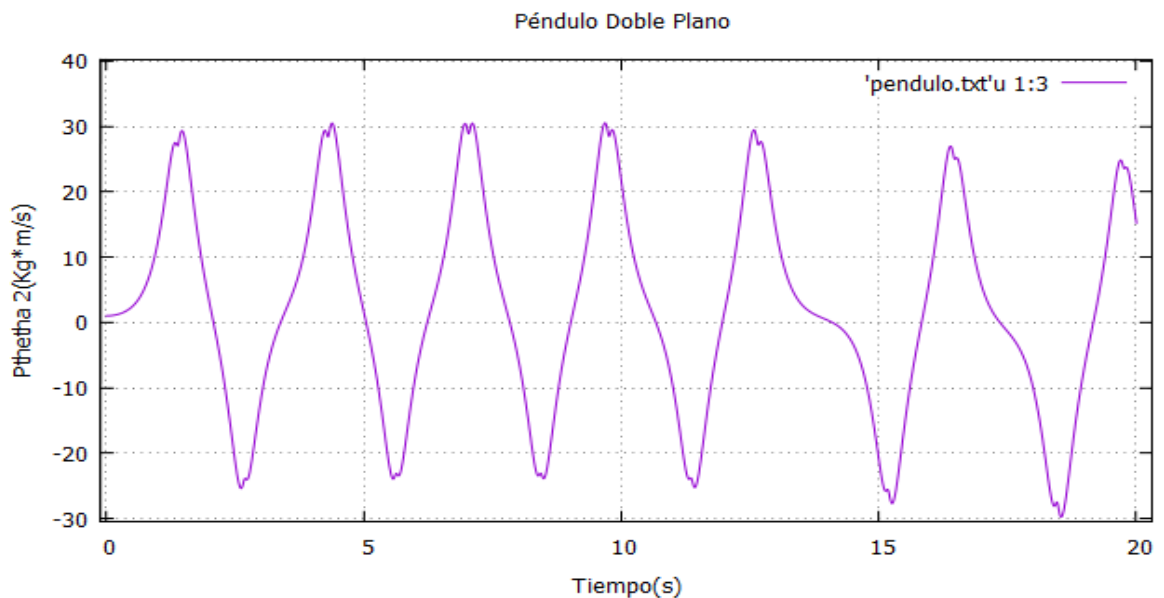
Figura 15. Representación de las condiciones iniciales del caso II.

Las siguientes graficas presentan un comportamiento diferente al primer caso, ya que en estas no se evidencia un movimiento armónico, ya que no hay oscilaciones periódicas con respecto al tiempo, en estas se evidencian distorsiones, que son asociadas a las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas.

- Gráfica del momentum p_{θ_1} contra el tiempo

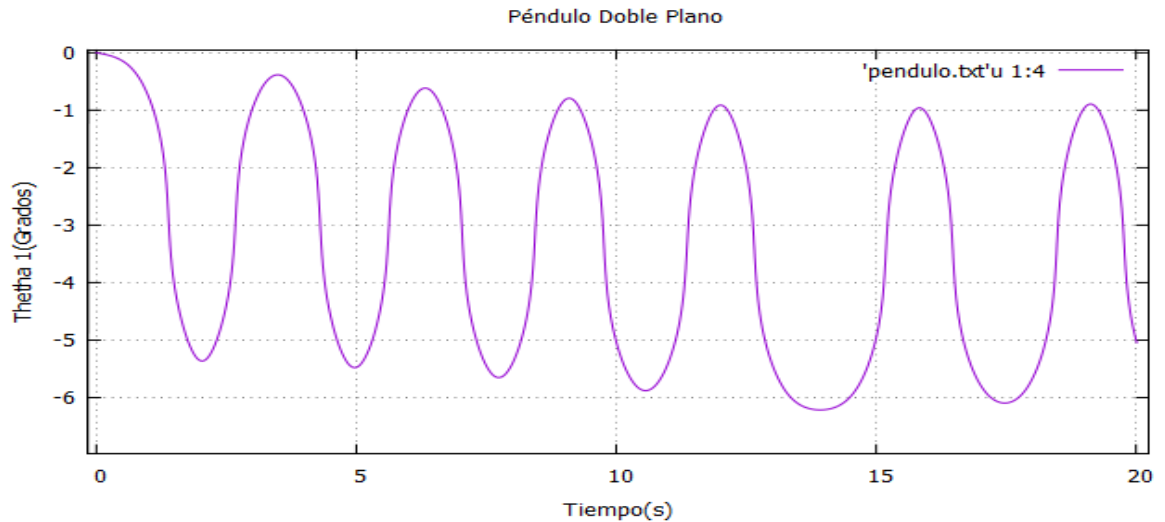


- Gráfica del momentum p_{θ_2} contra el tiempo



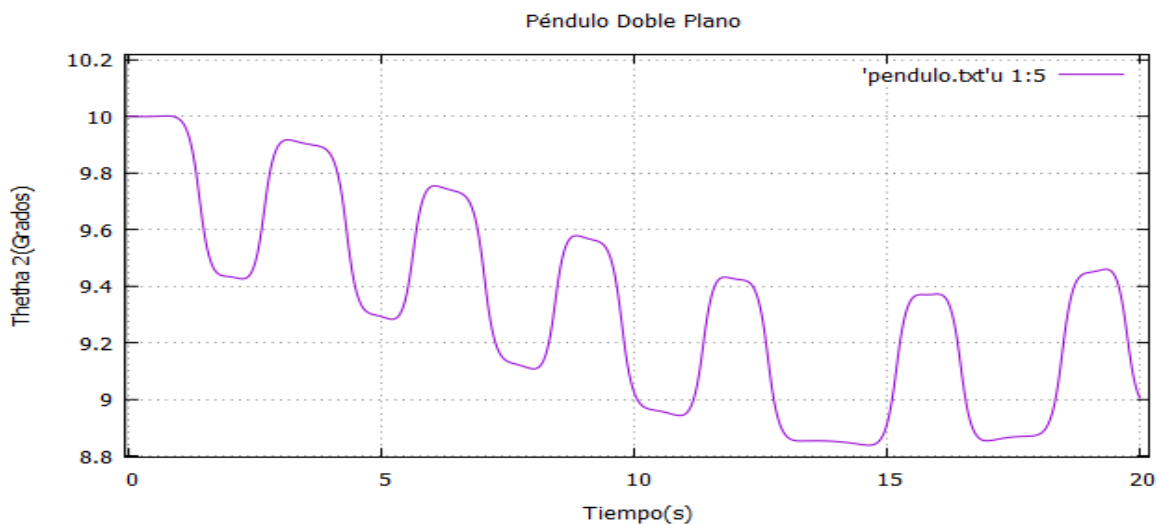
Estas graficas de los momentums p_{θ_1} y p_{θ_2} con respecto al tiempo tienen un comportamiento continuo cuasi-periódico, ya que alcanzan sus máximos y mínimos. Cuyo periodo dependen de la forma en que se aproxima racionalmente algún cuasi-periodo repitiéndose continuamente la forma de su comportamiento (Aguedas, 2007).

- Gráfica del ángulo θ_1 contra el tiempo



Esta grafica muestra un comportamiento periódicamente oscilatorio para el ángulo θ_1 variando entre cero y aproximadamente 5 grados en magnitud. Con algunos desfases en la oscilación ya que presenta una amortiguación a partir de los 12 segundos aproximadamente.

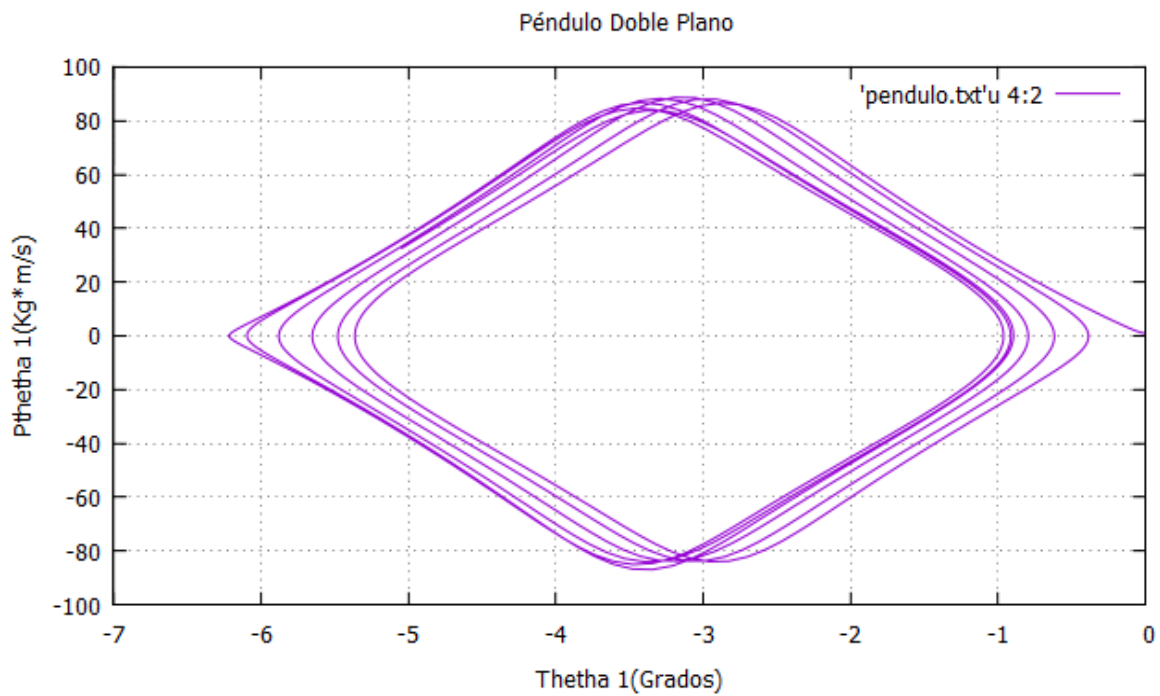
- Gráfica del ángulo θ_2 contra el tiempo



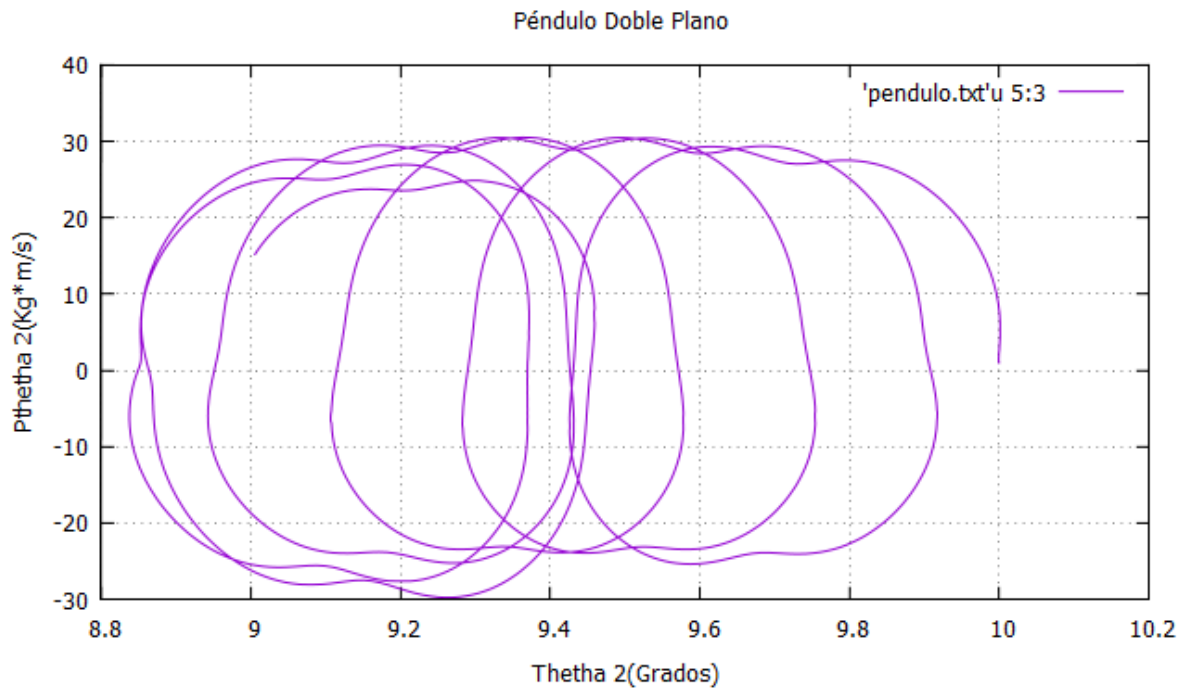
Esta grafica muestra que la magnitud de oscilación del ángulo θ_2 es de 0.6 grados en magnitud. También se observa que se tiene una yuxtaposición en la variación de la coordenada generalizada de la masa m_2 , debido a la influencia del movimiento de la masa m_1 que “jala” por decirlo así a la masa m_2 .

- Gráfica del momentum p_{θ_1} contra el ángulo θ_1

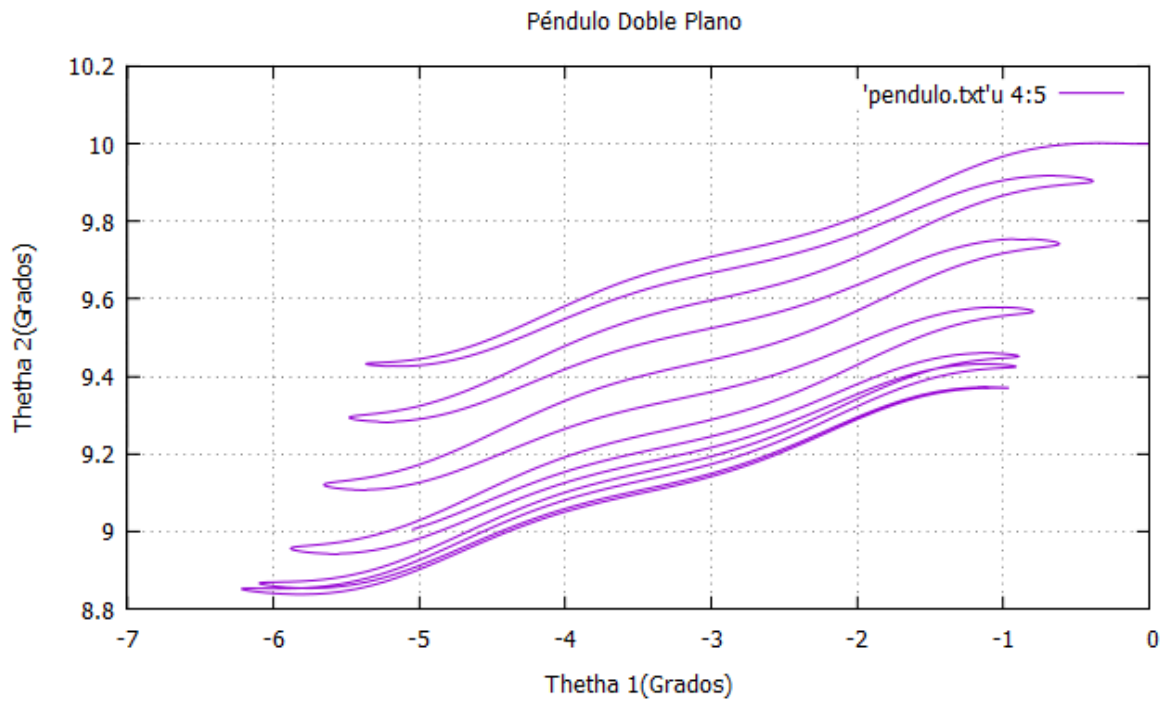
Las gráficas de la variación de los momentos generalizados con respecto a las coordenadas generalizadas muestran también zonas cerradas de oscilación en las que se puede observar los máximos y mínimos de movimiento para este caso.



- Gráfica del momentum p_{θ_2} contra el ángulo θ_2



- Gráfica del ángulo θ_2 contra el ángulo θ_1 :



Esta gráfica muestra un movimiento de mayor amplitud para la masa m_1 en comparación a la masa m_2 . Se puede evidenciar que mientras m_1 se mueve con un ángulo de magnitud 5 grados, m_2 lo hará con un ángulo de 0,6 grados.

Se puede decir que hay una predominancia en el movimiento de la masa m_1 con respecto a la masa m_2 , ya que aunque ahora la condición inicial del ángulo θ_2 es de 10 grados sigue teniendo oscilaciones pequeñas a diferencia de la masa m_1 .

IV. GLOSARIO MECÁNICA DE HAMILTON

Teniendo en cuenta que la perspectiva que se utilizó en el trabajo es la referente al tópico de Mecánica de Hamilton, Mecánica Cuántica y Caos, las definiciones que se presentan a continuación fueron tomadas de las lecturas trabajadas en esta clase (Ayala y Barragan, 2013)

Coordenadas generalizadas:

Son las variables que se deben definir para determinar la configuración del sistema, estas coordenadas generalizadas, pueden ser distancias, ángulos e incluso otras magnitudes; su número es igual al número f de grados de libertad del sistema, cuando el conjunto considerado es linealmente independiente, y se designa usualmente por q_j , donde $j=1, \dots, f$. Tomada de la lectura 1-parte b.

Diagrama de fase del sistema:

Es la representación de la evolución del sistema dado por un conjunto de curvas del espacio de fase. Tomada de la lectura 2-parte a.

Estado de configuración:

El estado de configuración es una de las cualidades del sistema asociada a la geometría y variables de los cambios de todos los posibles estados. Para caracterizar el estado de configuración del sistema, se hace necesario asociar a cada grado de libertad una variable, llamada coordenada de configuración o generalizada. Tomada de la lectura 1-parte a.

Estado mecánico:

Está definido por dos cualidades o propiedades del sistema, su configuración y su movimiento. Tomada de la lectura 1-parte a.

Ecuaciones de Hamilton:

Las ecuaciones de Hamilton están definidas como los cambios en el estado mecánico del sistema, expresados en dH para describir los cambios de la magnitud de la configuración y del movimiento de la evolución de los sistemas. Tomada de la lectura 2-parte a.

Energía cinética:

Está definida como el trabajo realizado por el sistema para cambiar su movimiento, esta es la medida del cambio que experimenta el sistema cuando cambia su movimiento. Tomada de la lectura 2-parte a.

Energía potencial:

Se define como el trabajo que se realiza sobre el para cambiar su configuración (separar dos cuerpos que se atraen; ello explica el signo negativo en su definición), podemos decir que el cambio de la energía potencial es la medida del cambio que experimenta el sistema cuando cambia su configuración. Tomada de la lectura 2-parte a.

Espacio de fase:

Es el espacio definido por las variables de configuración del sistema, (las coordenadas generalizadas q_j y las variables del movimiento (los movimientos generalizados del sistema P_j). Tomada de la lectura 2-parte a.

Estado de movimiento:

El estado de movimiento está definido por las variables dinámicas del sistema que caracterizan el movimiento. Estas variables dinámicas se conocen como momentos generalizados, con los que se designan los movimientos independientes que tiene el sistema. Tomada de la lectura 1-parte a.

Grados de libertad:

Con los grados de libertad del sistema, se hace referencia al número de movimientos independientes en los cuales se pueda descomponer un movimiento arbitrario, o también al número de variables independientes con las cuales se pueda especificar la configuración del sistema. Tomada de la lectura 1-parte a.

Hamiltoniano del sistema:

Es la energía, asumida como función de las variables del estado mecánico del sistema y se designa usualmente por $H(q_j, p_j)$ o por $H(q_1, q_2, q_3, \dots, q_f, p_1, p_2, p_3, \dots, p_f)$. O brevemente por $H(q, p)$ es la función que conecta los cambios de configuración con los cambios de

movimiento del sistema. Sería también función del tiempo para el caso en el que la energía no se conserve. Tomada de la lectura 2-parte b.

Ligaduras o Restricciones:

Son aquellas partes móviles del sistema que actúan como mecanismos de interacción entre las partes móviles propias del sistema (el cuerpo que pende de la cuerda en un péndulo) o de restricción de movimiento, que se consideran con masa despreciable (La cuerda en el caso del péndulo), y que no son tomadas como componentes. Tomada de la lectura 1-parte a.

Momentums generalizados:

Son las variables dinámicas con los que se designan los movimientos independientes experimentados por el sistema, por ende su número también coincide con el número de grados de libertad del sistema, estas variables se designan por p_j , donde $j=1, \dots, f$ y pueden ser componentes de momentos lineales, componentes de momentos angulares e incluso otras magnitudes. Tomada de la lectura 1-parte b.

V. LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1. Esquema general del péndulo doble plano vertical.</i>	8
<i>Figura 2. Representación General del primer caso para el grado de libertad uno.....</i>	9
<i>Figura 3. Representación General del segundo caso para el grado de libertad dos.</i>	9
<i>Figura 4. Representación del Sistema “Movimiento del péndulo doble plano vertical” asociándole las coordenadas generalizadas.</i>	11
<i>Figura 5. Representación de los intervalos del péndulo doble plano vertical, tomando como ejemplo a la masa m_1.</i>	12
<i>Figura 6. Representación de los vectores; posición y unitarios del sistema del péndulo doble plano vertical.</i>	12
<i>Figura 7. Representación del ángulo formado entre los vectores unitarios $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.</i>	15
<i>Figura 8. Diagrama de fuerzas de las masas del péndulo doble plano.</i>	20
<i>Figura 9. Eje coordenado.</i>	20
<i>Figura 10. Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_1$.</i>	22
<i>Figura 11. Vectores unitarios $-\hat{z}$ y $\hat{\theta}_2$.</i>	23
<i>Figura 12. Representación de las condiciones iniciales del caso I.</i>	32
<i>Figura 13. Simulación del movimiento del péndulo simple, imagen tomada de http://www.fisicanet.com.ar/fisica/elasticidad/ap03_ecuaciones_del_movimiento_armonico _simple.php.</i>	37
<i>Figura 14. Diagrama de fase del péndulo simple, imagen tomada de http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/maple/Simulaciones.html.</i>	37
<i>Figura 15. Representación de las condiciones iniciales del caso II.</i>	39

VI. CONCLUSIONES

- La caracterización para el sistema del péndulo doble desde el análisis de la formulación Hamiltoniana, exige una asignación de coordenadas propias de la geometría del sistema (Esférica con el ángulo de azimutal constante y radio constante) permitiendo que el concepto de movimiento independiente, vinculado a la idea de grado de libertad, deje asociar fácilmente y de manera intuitiva coordenadas y magnitudes (cualidades) tales como; configuración y movimiento acomodándose a la configuración curva en el caso del péndulo doble.
- Al ser el sistema del péndulo doble plano vertical un sistema acoplado, se observa en la anulación de términos en la energía potencial (Ecuación 31, página 24), las ecuaciones de movimiento (Ecuación 25, página 18), las soluciones y el análisis de las soluciones que para una de las masas el movimiento se ve afectado por el movimiento de la otra masa, como se observa en la velocidad del sistema, ya que la velocidad de la masa m_1 no se ve afectada por la masa m_2 (Ecuación 8, página 14), pero cuando se realiza el cálculo de la velocidad de m_2 se puede observar que esta depende de la velocidad de la masa m_1 por estar sujeta a esta (Ecuación 9, página 14) y la expresión de la suma de velocidades se hace para obtener la velocidad de la masa m_2 con respecto al origen de movimiento.
- La energía potencial está descrita a partir de las fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema y las variaciones de las posiciones de las masas. Para el sistema del péndulo doble en particular está definida por tres términos, en los cuales uno de esos términos da cuenta del acople de las masas, ya que muestra que el trabajo realizado por la masa m_2 dependerá de la variación del ángulo θ_1 de la masa m_1 , y los otros dos términos son los trabajos de cada una de las masas variando con sus respectivas coordenadas generalizadas.
- La función Hamiltoniana posibilita la regulación de los cambios de configuración con los cambios en el movimiento, a partir de las ecuaciones diferenciales acopladas de

Hamilton, ya que al contener toda la información de la evolución del sistema, permiten interactuar con la dinámica del sistema o con la evolución del sistema del péndulo doble plano, prediciendo el comportamiento a futuro de las masas.

- Al realizar el análisis de la evolución del sistema a partir de dos casos en particular variando las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas o de configuración, permitió observar el movimiento, el periodo de oscilación de cada una de las masas con respecto al tiempo y el espacio de fase del sistema del péndulo doble.
- La geometrización de las ecuaciones de Hamilton muestra que en algunas condiciones el sistema acoplado del péndulo doble plano, puede presentar comportamientos semejantes al del péndulo simple, si se analizan las masas por separado y este comportamiento es más común para la masa m_1 (Figura ángulo θ_1 contra el tiempo en el Caso I, página 35), que para la masa m_2 , ya que el comportamiento en esta masa se ve afectado por la masa m_1 , mostrando una evidente yuxtaposición de los osciladores que varían en fase con la misma frecuencia (Figura ángulo θ_2 contra el tiempo en el Caso I, página 35).
- La geometría de los momentums generalizados con respecto a sus correspondientes coordenadas generalizadas se presenta de manera análoga a la del péndulo simple (Grafica del momentum p_{θ_1} contra el ángulo θ_1 , página 36 y Grafica del momentum p_{θ_2} contra el ángulo θ_2 , página 38), mostrando zonas cerradas de oscilación, permitiendo obtener la información de los máximos y mínimos de movimiento del sistema del péndulo doble plano.
- El programa que se utilizó para la solución presenta limitaciones en el análisis de la evolución del sistema como por ejemplo en el Caso II, ya que al examinar el movimiento de la masa m_1 (Gráfica del ángulo θ_1 contra el tiempo) en un tiempo final muy grande de 50 segundos el sistema muestra un comportamiento caótico en el segundo 30 el ángulo sube a 70° , con variaciones bruscas por decirlo así con periodos y oscilaciones discontinuas.

VII. BIBLIOGRAFÍA

- Aguedas, V. (2007). Máximos y mínimos de funciones cuasiperiódica. *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones*, 157-164.
- Ávila, D. I. (2009). *Representaciones del movimiento Representaciones del movimiento de una partícula condicionada a una simetría tipo toroidal y su relación con otras. Una aplicación conceptual y didáctica de la Mecánica Hamiltoniana*. Universidad Pedagógica Nacional: Tesis de grado. Licenciatura en Física. Bogotá D.C.
- Ayala y Barragan. (2013). *Topico Mecánica Hamiltoniana, Mecánica cuántica y caos*. Bogotá: Licenciatura en Física UPN.
- Ayala, Barragan. (2013). *Representación geométrica de las coordenadas generalizadas en la Mecánica Hamiltoniana*. Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ayala, M. M. (2006). *Los análisis histórico-críticos y la recontextualización de saberes científicos*. Bogotá: Proposicoes.
- Barragan, J. (2005). *Representación de la mecánica Hamiltoniana con formas diferenciales. Estudio de caso: Péndulo esférico*. Tesis de grado. Licenciatura en Física. Bogotá D. C: Universidad Pedagógica Nacional.
- French. (2006). *Vibraciones y ondas*. Barcelona España: Reverte.
- Galaxia. (1998). *Física 10*. Bogotá: Voluntad.
- Giancoli. (2007). *Física, sexta edición*. Mexico: Pearson prentice hall.
- Goldstein. (1987). *Mecánica Clásica*. Barcelona: Reverté.
- Guerrero, A. (2004). *Oscilaciones y Ondas*. Bogotá D. C: Universidad Nacional de Colombia.
- Hacar, A. (2009). *Mecánica Lagrangeana*. San Francisco, California: Alqua.
- J. Isaza, D. Campos. (2002). *Prolegómenos a sistemas dinámicos*. Bogotá D. C.: Universidad Nacional de Colombia.

- Landau y Lifshitz. (1965). *Mecánica*. Barcelona: Reverté.
- Marion. (1975). *Dinámica Clásica de las partículas y sistemas*. Bogotá: Reverté S.A.
- Medina, M. (2007). *Tratamiento del caso de los dos cuerpos desde la Mecánica de Hamilton*. Bogotá: Pre-impresos estudiantes 1.
- Nacional, M. d. (2006). Estándares Básicos de Competencias. *Revolución Educativa Colombia Aprende*, 9.
- Ochoa, D. (2004). El péndulo en Newton, Hamilton y los sistemas Caóticos. *Trabajo de Pregrado*, Universidad Pedagógica Nacional.
- Robles, Garcia. (2006). *Métodos numéricos en ingeniería. Practicas con Matlab*. Universidad de Oviedo: Ediuno.
- Santillana. (1995). *Física 10. Movimiento, fuerzas, energia fluidos y termodinamica*. Bogotá.
- Soldovieri. (2010). *Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton*. Universidad de Zulia: Copyringht.
- Tipler. (1978). *Física*. España: Reveré.

VIII. ANEXOS

Anexo 1. Idioma de programación; método numérico Runge-Kutta de orden 2, compilado en Dev C++

```
#include <iostream>

#include <fstream>

#include <cmath>

using namespace std;

const double g=9.8;//gravedad m/s^2

const double l=1;// long cuerda, m

const double m1=5;// m

const double m2=5;

const double l2=1;

//declaración de funciones

double f(const double & t, const double x[],const int & i)

{ double den,den1,den3,den2;

den=pow(1*1*(m1+m2)-m2*cos(x[3]-x[2])*cos(x[3]-x[2]),2);

den1=pow(m2*1*12*(m1+m2)-m2*cos(x[3]-x[2])*cos(x[3]-x[2]),2);

den2=(m1+m2)-m2*cos(x[3]-x[2])*cos(x[3]-x[2]);

den3=pow(m2*1*1*(m1+m2)-m2*cos(x[3]-x[2])*cos(x[3]-x[2]),2);

if (0==i) return -(((1*1*m2*sin(x[3]-x[2])*cos(x[3]-

x[2])*x[0]*x[0])/(den))+(x[0]*x[1]*sin(x[3]-

x[2])*m2*1*12*den2+2*1*12*m2*m2*cos(x[3]-x[2])*sin(x[3]-x[2])*x[0]*x[1]*cos(x[3]-
```

```

x[2]))/(den1)+(m2*m2*1*1*cos(x[3]-x[2])*sin(x[3]-
x[2])*x[1]*x[1]))/(den3)+(m1*g*1*sin(x[2])+m2*g*1*sin(x[2]));

    if(1==i)return ((1*m2*cos(x[3]-x[2])*sin(x[3]-x[2])*x[1]*x[1))/(den))-
((x[0]*x[1]*sin(x[3]-x[2])*m2*1*12*den2-2*1*12*m2*m2*cos(x[3]-x[2])*sin(x[3]-
x[2])*x[0]*x[1]*cos(x[3]-x[2]))/(den1))+((m2*m2*1*1*cos(x[3]-x[2])*sin(x[3]-
x[2])*x[1]*x[1]))/(den3))-(m2*g*12*sin(x[2]));//hecho por walo

    if(2==i) return -(((x[0]*1*1*den2)/(den))-((x[1]*cos(x[3]-
x[2])*m2*1*12*den2)/(den1)));

    if( 3==i) return -((x[0]*cos(x[3]-
x[2])*m2*1*12*den2)/(den1)+(x[1]*m2*1*1*den2)/(den3));

}

//& =modo de una variable

//en la f void=xn+1=xn+x´(tn,xn)h

void rk4(const double &t, double x[],const double &h,const int &nNum){

    double hHalf=h/2;

    double t1[nNum],t2[nNum],t3[nNum];

    double k1[nNum],k2[nNum],k3[nNum],k4[nNum];

    int i;

    for(i=0;i<nNum;i++) t1[i]=x[i]+0.5*(k1[i]=h*f(t,x,i));

    for(i=0;i<nNum;i++) t2[i]=x[i]+0.5*(k2[i]=h*f(t+hHalf,t1,i));

    for(i=0;i<nNum;i++) t3[i]=x[i]+(k3[i]=h*f(t+hHalf,t2,i));

    for(i=0;i<nNum;i++) k4[i]=h*f(t+h,t3,i);

    for(i=0;i<nNum;i++) x[i]+=(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i])/6;

```

```

    }

int main(){

    ofstream g("pendulo.txt"), c("pendulo.plt");

    int i, N=4;

    double t, x[N],t0,tfinal,paso;

    t0=0;

    tfinal=20;

    paso=0.008; //aproximación

    x[0]=0; //ptheta1

    x[1]=0; //ptheta2

    x[2]=10; //theta1

    x[3]=0; //theta2

    g<<t0<<" "<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<<x[2]<<" "<<x[3]<<endl;

    for(t=t0;t<tfinal;t+=paso){

        rk4(t,x,paso,N);

        g<<t+paso<<" "<<x[0]<<" "<<x[1]<<" "<<x[2]<<" "<<x[3]<<endl;

    }

    g.close();

    //se empieza a configurar al pendulo.txt

    c<<"set grid"<<endl;

    c<<"set title 'Péndulo Doble Plano '"<<endl;

```

```
c<<< "set xlabel 'Thetha 1(Grados)'"<<<endl;

c<<<"set ylabel 'Pthetha 1(Kg*m/s)'"<<<endl;

c<<<"plot 'pendulo.txt'u 4:2 w l"<<<endl; //porque son 5 datos en la hoja txt el 1 es el
tiempo 2 es pthetha1 ... y así sucesivamente

// c<<<"replot 'pendulo.txt'u 4:2 "<<<endl;

c.close();

system("pause");

return 0;

}
```