



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores



Departamento de Física
UPN

Aplicación De Los Espinores Como Un Enfoque Geométrico Para El Estudio De La Teoría Especial De La Relatividad: El Caso De Las Transformaciones de Lorentz

Por:

Cristian David Lombana Sánchez

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Física

Asesor:

Mg. Yesid Javier Cruz Bonilla

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C., Colombia

2025

Índice general

Introducción	VIII
Problema de Investigación	IX
Objetivos	XIV
Objetivo General	XIV
Objetivos Específicos	XIV
1. Nociones de Relatividad Especial	1
1.1. Crisis de la Física a Finales del Siglo XIX	1
1.1.1. Principio de Galileo - Transformaciones de Galileo	15
1.2. Postulados de la Teoría Especial de la Relatividad	18
1.2.1. Sincronización de Relojes y Simultaneidad	20
1.3. Transformaciones de Lorentz	23
1.3.1. Consecuencias de las Transformaciones de Lorentz	25
2. Elementos de Topología y Espinores	29
2.1. Transformaciones Lineales	29
2.1.1. Rotaciones y Traslaciones	31
2.2. Definición de Grupo	35
2.3. Grupo de Rotaciones $SO(3)$	41
2.4. Grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ y Otros	43
2.5. Variedad Espacio-Tiempo (Minkowski)	50
2.6. Breve Recuento Histórico Sobre Los Espinores	52
2.7. Definición de Espinor Por Élie Cartan	54
2.7.1. Espinor y Tensor Euclidiano	56
2.8. Álgebra de Clifford	59
2.9. Álgebra de Espinores	62
2.9.1. Rotaciones	62
2.9.2. Reflexiones	63
2.9.3. Producto Entre Espinores	63
3. Transformaciones de Lorentz en el Formalismo Espinorial	67
3.1. Matriz de Spín L	68
4. Aplicación de los Espinores al Campo Electromagnético	73
4.1. Tensor y Espinor de Campo Electromagnético	73
Conclusiones	79
Referencias	81

Anexos	85
Anexo A: Ecuación de Onda Bajo Transformaciones de Galileo	85
Anexo B: Propiedades de las Transformaciones Lineales	87
Anexo C: Representaciones Irreducibles	88
Anexo D: La Propuesta de Élie Cartan	89
Anexo E: Tensor de Campo Electromagnético	91
Anexo F: Espinor de Campo Electromagnético	93

Índice de figuras

1.1.	Aberración Estelar (Elaboración Propia).	2
1.2.	Suma de Vectorial (Elaboración Propia).	3
1.3.	Fuente de luz y espejo moviéndose a velocidad v relativa al “éter” (Elaboración Propia).	7
1.4.	Interferómetro de Michelson (Elaboración Propia).	8
1.5.	Hendrik Antoon Lorentz (OpenAI, 2025c).	12
1.6.	Onda en Σ Con respecto al éter (Elaboración Propia).	15
1.7.	Onda en Σ' (Elaboración Propia).	15
1.8.	Marcos de Referencia Σ' y Σ (Elaboración Propia).	16
1.9.	Jules Henri Poincaré (OpenAI, 2025d).	18
1.10.	Albert Einstein (OpenAI, 2025b).	19
1.11.	Maya de Relojes (Elaboración Propia).	20
1.12.	Sincronización (Elaboración Propia).	21
1.13.	Simultaneidad (Elaboración Propia).	21
1.14.	Propagación de la onda primer momento (Elaboración Propia).	22
1.15.	Propagación de la onda segundo momento (Elaboración Propia).	22
1.16.	Trayectorias (Elaboración Propia).	25
2.1.	Transformación Lineal (Elaboración Propia).	30
2.2.	Condiciones de una Transformación Lineal (Elaboración Propia).	30
2.3.	Traslación (Elaboración Propia).	31
2.4.	Rotación (Elaboración Propia).	32
2.5.	Rotación Cuadrado (Elaboración Propia).	37
2.6.	Tasa transformándose en un donut (Elaboración Propia).	38
2.7.	NO hay puntos “ceranos” (Elaboración Propia).	41
2.8.	Rotaciones de Flechas (Elaboración Propia).	53
2.9.	Élie Joseph Cartan (OpenAI, 2025e).	54
2.10.	Cinta de Möbius (Elaboración Propia).	56
2.11.	Rotación alrededor de z (Elaboración Propia).	58
2.12.	Producto Cuña (Elaboración Propia).	60
3.1.	Modelo de A. Einstein (1905) (Elaboración Propia).	71
3.2.	Modelo de H. Minkowsky (1908) (Elaboración Propia).	72
3.3.	Modelo de E. Cartan (1913) (Elaboración Propia).	72
4.1.	Campo Electromagnético (Elaboración Propia).	73
4.2.	(A la Derecha) Wolfgang Rindler y (A la Izquierda) Roger Penrose (OpenAI, 2025a).	77

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi familia por el apoyo y la motivación que me dieron no solo durante la realización de este trabajo sino también durante toda mi carrera. Solo queda decirles infinitas gracias a mi madre Norma Patricia Sánchez Aguirre, quien es el motor de mi vida, a Katherin Daniela Lombana Sánchez y Yuliana Alexandra Lombana Sánchez, dos hermanas incondicionales por las cuales siempre quiero salir adelante. Cada día de mi vida es más hermoso gracias a ustedes.

Le doy gracias a la vida por darme amigos que hicieron de mi paso por la universidad una aventura llena de buenos momentos, llena de amor por el conocimiento y el estudio. Gracias a Daniel Ricardo Rojas, Brayan Alexander Castro, Andrés Mateo Meneses y Yersson Steven's Rincon, por todas las experiencias que vivimos, incluyendo los malos momentos en los que siempre estuvimos el uno para el otro. Gracias a ustedes por las charlas sobre el universo y las matemáticas, que de alguna manera me ayudaron a entender mejor la física.

Gracias a los profesores del departamento de física Yesid Javier Cruz y Sandra Bibiana Ávila por creer en mi e inspirar mi amor por el conocimiento y la enseñanza, ojala la vida me de la oportunidad de volver a verlos en la academia y estudiar el universo con la pasión y el encanto que les caracteriza.

Finalmente doy gracias a la Universidad Pedagógica Nacional por darme la oportunidad de aprender ciencias, de acercarme a la academia, de viajar a otros lugares y de conocer amigos y profesores geniales.

Dedicatoria

Esta tesis va dedicada a dos personas por las cuales mi vida tiene sentido.

A mi sobrino Ian Martín Lombana, quien nació un 11 de junio del 2020, casi al mismo tiempo que incié mi licenciatura, juntos hemos recorrido un mundo nuevo a partir de ese día. Ojalá un día puedas leer esto y entender lo mucho que te amo.

A mi madre Norma Patricia Sánchez, una mujer luchadora que logro sacar adelante a sus tres hijos, que nunca se rindió ante la adversidad de la vida. Ella es grande y noble de corazón, su benevolencia supera la de cualquier otro ser del universo. Solo queda decirle a mi madre que esto es por y para ella. Si el universo me diera la oportunidad de volver a nacer... lo haría solo con la condición de que tú vuelvas a ser mi mamá. Te amo. Siempre seguiré tus palabras:

“ ... Si uno se sienta a llorar ante la desgracia no se llega a ningún lado. Uno debe levantarse, secarse las lagrimas y seguir viviendo... ”

Introducción

La Teoría Especial de la Relatividad (TER) fue publicada en 1905 por Albert Einstein en un artículo titulado “*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*”, trayendo consigo una revolución en la física teórica, el pensamiento y la cultura del siglo XX. Todo esto debido a la reestructuración de los conceptos clásicos de espacio y tiempo dados por Newton. Aunque el reconocimiento no fue inmediato, con el tiempo la teoría se afianzo en los académicos, generando un nuevo paradigma entre la comunidad científica, afectando no solo a la física sino que también a la filosofía, el arte y la cultura en general (A. M. Ron, 2005). Dicha teoría tiene la capacidad de explicar muchos fenómenos, y de dar respuestas a muchas preguntas, lo que la hace una teoría de alto interés, por lo que se han planteado muchas alternativas para su estudio, como podría ser el caso del formalismo espinorial introducido por Élie Cartan en 1913, que tiene la capacidad de expresar las transformaciones de Lorentz, usadas en relatividad para comparar medidas de marcos en movimiento.

En el presente trabajo se estudian los espinores en la TER. Para lo cual en el capítulo 1 se presenta un recorrido histórico-conceptual sobre la crisis de la física a finales del siglo XIX, la noción de éter y los aportes de Albert Einstein de 1905 que justifican el surgimiento de la TER. El capítulo 2 introduce los elementos matemáticos necesarios para el estudio del formalismo espinorial, como los grupos de simetría, la topología y el álgebra de Clifford, sirviendo como base para comprender su estructura geométrica, todo esto para dar una discusión acerca del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ y su relación con las rotaciones, lo que permitirá establecer una conexión entre dicho grupo y el grupo de los espinores $SL(2, \mathbb{C})$, los cuales serán definidos a partir de trabajo de Élie Cartan. En el capítulo 3 se estudia cómo las transformaciones de Lorentz pueden reformularse en el formalismo espinorial, articulando la teoría de grupos con la relatividad. Finalmente, el capítulo 4 aplica el formalismo espinorial al campo electromagnético, estableciendo su equivalencia con la notación tensorial tradicional, mostrando sus ventajas geométricas y didácticas.

Problema de Investigación

Teoría Especial de la Relatividad

La TER desarrollada por Albert Einstein (1879 - 1955) en 1905 presentó una revolucionaria y nueva forma de abordar la física, entre los muchos problemas de la época, solucionó el conflicto del *éter* que exigía la teoría de Maxwell para la propagación de ondas electromagnéticas. Por otra parte Lorentz había encontrado que tanto la teoría de Newton como la de Maxwell presentaban inconsistencias al momento de relacionar observadores inerciales, por un lado la Mecánica Newtoniana transforma bajo Galileo pero la teoría electromagnética de Maxwell requería de nuevas transformaciones, las de Lorentz ([Janssen, 2005](#)), las cuales relacionan las medidas de un observador inercial Σ respecto a otro Σ' .

La TER llegó bajo este panorama, en el cual ayudó a dar claridad y solucionar conflictos¹, por lo que se hace de vital urgencia para los licenciados desarrollar enfoques que profundicen detalles conceptuales para fomentar el pensamiento crítico ([Levrini, 2014](#)). Además de esto, la TER, se encuentra contemplada en la física moderna (toda la física desarrollada entre los siglos XIX y XX), y por ello es de suma importancia su aprendizaje y estudio a detalle ([Perez y cols., 1986](#)). Adherido a esto, la revolución tecnológica hace uso de sus desarrollos para generar nuevas herramientas que mejoren el avance en las ciencias exactas y aplicadas.

La TER presenta un cambio conceptual que puede ser de ayuda para la comprensión de la física clásica, ya que permite contrastar conceptos y ponerlos a prueba en torno a discusiones sobre un mismo fenómeno. También cabe mencionar el interés de los estudiantes por comprender el universo y sus diferentes fenómenos. Con base en esto se hace necesario y urgente para los licenciados, desarrollar mecanismos alternativos que planteen la teoría con diferentes enfoques que tengan como objetivo una comprensión más profunda.

Como mencionaba anteriormente, la TER propone un cambio conceptual, que en principio no es intuitivo, lo que en sí configura una tarea difícil al momento de su enseñanza. Como ejemplo de ello, la TER trae consigo un nuevo planteamiento de los conceptos de espacio y tiempo, que distan mucho de la concepción de Newton, y, en este punto, es importante tener claro estos conceptos desde esa perspectiva clásica. Pero, como mencionan

¹Como la incompatibilidad entre la mecánica de clásica y el electromagnetismo, la ausencia de necesidad del “éter luminífero”, las transformaciones de Galileo inadecuadas para velocidades altas, etc.

(Perez y Solves, 2003) los alumnos en algunos casos no reconocen estos atributos newtonianos del espacio como lo son la continuidad, homogeneidad, isotropía, etc., al no tener estas nociones es difícil asimismo generar un cambio en los conceptos. Este, entre muchos dilemas, esto lleva a la necesidad de proponer diferentes formas de llegar a una teoría con el fin de tener alternativas para estudiar y asimismo comprender. Estos cambios conceptuales vienen de la mano de un tratamiento geométrico desde la visión de Minkowski, como lo muestra el artículo *Caracterización del Espacio-Tiempo de Minkowski* (Vargas, 2009). Esta es la forma tradicional de estudiar la TER, llevada a cabo de manera geométrica, haciendo uso por ejemplo de los vectores, las matrices y los tensores, esto de la mano de un análisis algebraico para llegar así a construir las transformaciones de Lorentz representadas en matrices de 4×4 . Esta es la forma tradicional de tomar el curso, pero muchas veces estos conceptos abstractos no permiten que los estudiantes terminen de interiorizar la teoría, ya que se ha evidenciado que en algunos casos los estudiantes no han cambiado los conceptos anteriores por los nuevos presentados, adherido a que en algunos casos el aprendizaje es superficial y no permite extrapolar el conocimiento a situaciones externas a la formalización de la teoría (Perez y Solves, 2003). Además es poco intuitivo a la hora de hacer notar las simetrías espacio-temporales o la geometría asociada que nos lleva a reflexionar sobre causalidad, invarianza, etc (Redish, 2005). Por otra parte, existen otros formalismos geométricos que permiten llegar a esta teoría y que pueden llegar a presentar una alternativa a la hora de abordarla, como lo son, los espinores.

El Formalismo Espinorial

Por otra parte, las matemáticas, para ser más exactos los formalismos matemáticos, dan a la física un medio por el cual expresar y dar explicaciones a los diferentes fenómenos naturales, su relación es íntimamente compleja pero que a su vez, es la que desarrolla el entendimiento e interpretación de los fenómenos. Este es el caso del formalismo espinorial desarrollado en 1913 por Élie Cartan e introducido en la física por Paul A. Dirac en un intento por unificar la mecánica cuántica con la relatividad. Aquí, se crea un ente matemático para dar explicación a cierto fenómeno particular de la mecánica cuántica, el espín, pero que a su vez puede ser usado en la TER para expresar las Transformaciones de Lorentz, lo que lleva a otra manera de formalizar la relatividad de Einstein. En trabajos

anteriores, como el de *Análisis de la notación espinorial como formalismo para la enseñanza de la física moderna* (Verano, 2023), donde se trabaja el concepto de manera amplia, tanto para la mecánica cuántica como para la TER. Allí se hace un excelente tratamiento, por lo que en el presente trabajo se profundizara el concepto a detalle en TER con el fin de crear una herramienta alternativa y detallada sobre el formalismo espinorial en la TER que brinde a los licenciados un tratamiento alternativo. Con esto en mente, se ha revisado los contenidos de los cursos de relatividad especial y se evidencia que el formalismo espinorial no se encuentra en los contenidos temáticos. A su vez es poco el desarrollo que se encuentra a la hora de estudiar y querer profundizar los conocimientos relacionados con esta temática.

Es aquí donde el formalismo espinorial puede presentar otro enfoque para el estudio de la TER, con desarrollos geométricos, algunas nociones de la teoría de grupos y la topología. Además, algunos problemas de la TER se hacen mas fáciles cuando son aproximados con los espinores, a diferencia del tratamiento tensorial que se realiza de manera tradicional, sumado a esto, pueden dar una alternativa más detallada del espacio-tiempo a diferencia de los tensores ((Prat, 2009)). Lo interesante de los espinores, es que dan una estructura geométrica más rica, además de presentar herramientas didácticas para entender mucho mejor algunos conceptos o ideas, como pueden ser las simetrías del espacio-tiempo (Penrose y Rindler, 1984). Tomando las palabras de Misner, Thorne y Wheeler:

“El formalismo espinorial unifica la elegancia matemática con la física fundamental, revelando la geometría oculta del espacio-tiempo”.

(Misner y cols., 1973)

En la actualidad tanto la mecánica cuántica como la TER hacen parte de la física moderna, los pilares de la tecnología, pero, presenta dificultades serias que constituyen una problemática en la enseñanza de la física (Perez y cols., 1986). Por tal motivo se hace de vital importancia para los profesores crear mecanismos que faciliten su comprensión desde diferentes contextos, por ello el espinor configura una herramienta de profundización para presentar un tratamiento alterno al estudio de la TER.

En torno a la discusión anterior, se plantea la siguiente pregunta problema:

¿Qué elementos conceptuales y geométricos aporta el formalismo espinorial como alternativa para el estudio de las Transformaciones de Lorentz?

Metodología

Para la presente investigación se hará uso de una metodología cuantitativa basada en el uso de herramientas matemáticas rigurosas para mostrar con claridad las posibilidades y alcances del formalismo espinorial en el contexto de la TER. Particularmente se abordarán las transformaciones de Lorentz y el comportamiento del campo electromagnético desde la perspectiva de observadores en distintos marcos de referencia inerciales. Se tomó esta metodología debido a la capacidad de producir datos rigurosos, precisos y replicables lo que fortalece la confianza en las conclusiones y en la integridad del conocimiento generado, además de lograr una objetividad superior que reduce la presencia de sesgos y facilita la comprobación de hipótesis basadas en la teoría existente ([Hernández-Sampieri y cols., 2013](#)), como es el caso de la TER.

La base teórica estará proporcionada principalmente por los desarrollos de Élie Cartan en su libro de 1913 titulado “*The Theory Of Spinor*” ([Élie Cartan, 1984](#)) donde se hace un estudio riguroso y detallado sobre la teoría espinorial. Allí se muestra como estos objetos encapsulan de manera natural las simetrías del grupo de Lorentz. Esta perspectiva se complementará con el trabajo realizado por Misner, Thorne y Wheeler en su libro “*Gravitation*” ([Misner y cols., 1973](#)) donde se profundiza más en la aplicación de los espinores a la relatividad especial y general, complementando así un marco teórico robusto y riguroso.

Con estas referencias y el enfoque metodológico permitirá realizar cálculos explícitos y comparaciones cuantitativas del comportamiento del campo electromagnético visto desde distintos observadores inerciales. Así, se logrará no solo mostrar el uso de los espinores como herramienta teórica, sino que también explorar su potencial pedagógico para la enseñanza de la TER y el electromagnetismo en niveles de pregrado.

Objetivos

General

Analizar los aportes conceptuales y geométricos que ofrece el formalismo espinorial, para el estudio de las transformaciones de Lorentz en el marco de la TER, destacando su potencial como herramienta alternativa para el estudio de la física moderna.

Específicos

1. Desarrollar un breve repaso sobre la TER desde la problemática generada en el siglo XIX alrededor de éter y el campo electromagnético.
2. Presentar un desarrollo de conceptos (teoría de grupos, álgebra de Clifford, topología) y un breve análisis histórico acerca del surgimiento del espinor a partir de los trabajos de Élie Cartan.
3. Implementar el concepto de espinor para el análisis de las transformaciones de Lorentz, comparando su formulación con el tratamiento tradicional.
4. Aplicar el concepto de espinor para el caso del campo electromagnético en la TER, estableciendo su equivalencia con la notación tensorial y analizando sus ventajas.

Capítulo 1

Nociones de Relatividad Especial

1.1. Crisis de la Física a Finales del Siglo XIX

El siglo XIX es una etapa muy interesante y diversa para la humanidad, ya que en dicho siglo se consolidan las ciencias, en particular se dominan, hasta cierto punto, los efectos eléctricos y magnéticos para luego formar una de las principales áreas de la física, el electromagnetismo, y todo esto de la mano de los grandes físicos como Hans Christian Ørsted (1777-1851), Michael Faraday (1791-1867), James Clerk Maxwell (1831-1879), entre otros. En esta gran etapa, Maxwell da a conocer sus celebres ecuaciones (1.7, 1.8, 1.9 y 1.10) que describen las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos, además, estas permitieron formalizar a la óptica en dicho marco.

No todo era color de rosa en esta época, ya que la física llegaría a una encrucijada en varios de sus modelos, por ejemplo las ecuaciones de Maxwell aun no lo eran todo, quedaban interrogantes respecto a como interactuaba el campo electromagnético con los cuerpos cargados y además en movimiento, en otras palabras no existía una “electrodinámica de los cuerpos en movimiento”. Por otra parte, el problema de la radiación de cuerpo negro, la estructura de la materia, entre muchos, eran problemas que aún poseían desperfectos. Los modelos creados para entender el funcionamiento de la luz también llegarían a ser cuestionados, y más en esta época, ya que los fenómenos ópticos eran los que mayoritariamente recibían atención. Los primeros modelos acerca de la estructura de la luz datan del siglo XVII, en dos textos de nombres *Micrographia* de 1665 escrito por Robert Hooke (1635-1703) (Hooke, 1665) y *Traité de la lumière* de 1690 escrito por Christiaan Huygens (1629-1695) (Huygens, 1690). Si bien el texto de Hooke trata sobre biología, la luz en ambos textos se entendía como una onda propagándose sobre un medio, modelo *ondulatorio*. A raíz del estudio de

las ondas se sabía que estas necesitan de un medio para poder propagarse, y que la velocidad depende de las propiedades del medio, por ejemplo las ondas de sonido requieren del aire para poder propagarse, un cambio en la presión del aire o en la temperatura de este modificarían la velocidad del sonido. Con esto en mente se esperaba que la luz estuviera soportada de un medio para poder propagarse, a este medio se le llamo *éter*, y debía tener ciertas propiedades, como por ejemplo, tener una gran rigidez para que las ondas electromagnéticas pudieran moverse por él a grandes velocidades, además, este no debería tener fuerzas de rozamiento con los planetas ya que el movimiento de estos depende únicamente de la ley de gravitación universal (J. M. S. Ron, 1983).

Otra alternativa a la estructura de la luz era la teoría *corpuscular*, en la cual la luz estaría formada por pequeños corpúsculos. Esta teoría la desarrollaría Isaac Newton (1643-1727) en su celebre obra *Opticks* de 1704 (Newton, 1704). Es importante mencionar que, aunque Newton planteaba un modelo corpuscular de la luz, este no terminaba de comprometerse finalmente con un modelo en si, además de aceptar la existencia del éter, no como un medio para la propagación de la luz sino como un medio que interaccionaba con los corpúsculos para producir fenómenos de refracción.

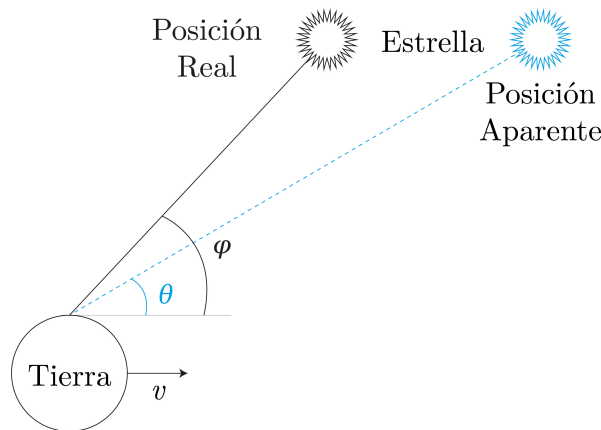


Figura 1.1: Aberración Estelar (Elaboración Propia).

En este punto de la historia, con dos teorías contrarias enfrentándose por explicar un mismo fenómeno, se hace urgente llegar a un experimento que permitiera por fin seleccionar una. Es para 1728 que James Bradley (1693-1762) descubre la *aberración estelar*, fenómeno que consiste en la diferencia de la posición aparente de una estrella y su posición real, debida a la combinación de la velocidad del observador v y la velocidad de la luz c , entendiendo la velocidad de la luz finita. La figura 1.1 nos muestra una

representación gráfica del fenómeno. Bradley explico este fenómeno con la teoría corpuscular, asumiendo que dichos corpúsculos no son afectados por la atracción gravitatoria de la tierra, dando a esta cierto privilegio por encima de la teoría ondulatoria, y además con los principios de la mecánica newtoniana.

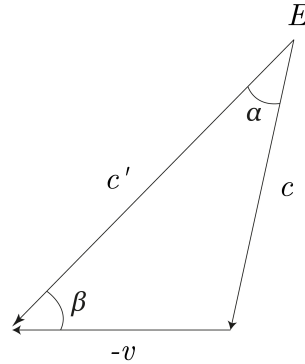


Figura 1.2: Suma de Vectorial (Elaboración Propia).

Para explicarlo supongamos que la tierra se encuentra en reposo y que una estrella ubicada en el punto E como se muestra en la figura 1.2, se mueve con velocidad $-v$ (donde $v = 30 \text{ km/s}$ es la velocidad de la tierra alrededor del sol) y c es la velocidad de la luz emitida por la estrella. Por tanto c' sera la velocidad de la luz que mide un observador en la tierra, con esto se tiene que:

$$c' = c - v \quad (1.1)$$

Es de notar que en la ecuación (1.1) la velocidad de la luz depende de la dirección, y también del observador, si esta o no en movimiento. Aplicando el Teorema del Seno en el triángulo de la figura 1.2, se tiene que:

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \beta \quad (1.2)$$

como $v \ll c$ se puede aproximar la ecuación (1.2) a:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \quad (1.3)$$

Donde v/c a veces es llamada la *constante de aberración*. Aquí (ecuación 1.3) se ve precisamente como la velocidad cambia dependiendo del ángulo de observación.

A pesar del obstáculo que significó la explicación de Bradley para la teoría ondulatoria, esta no se quedo atrás, ya que para 1802 Thomas Young (1773-1829) retomaría la teoría en una sección de su *Of The Analogy Between Light And Sound* (Young, 1802) en la que proponía nuevamente una

teoría ondulatoria donde el éter tenía un cierto papel; la diferencia en la velocidad de la luz en los diferentes medios se explicaba a base de la diferencia existente entre las densidades que poseía el mismo éter en dichos medios. Los trabajos de Young culminarían en 1807 con la publicación de su *Course Of Lectures On Natural Philosophy* (Young, 1807), donde estudiaba el famoso experimento de interferencias dadas por la luz al cruzar una pantalla con dos rendijas.

Como parte de la defensa que Young tenía a favor de la teoría ondulatoria, intentaría en 1804 explicar el fenómeno de la aberración estelar. Considerando la luz como una onda, el hecho que la onda aparezca en la dirección de c' parece indicar que el movimiento de la tierra a través del éter no afecta al mismo medio ni al movimiento, en otras palabras la tierra no arrastra consigo al éter. En palabras de el mismo Young:

“Al considerar el fenómeno de la aberración de las estrellas estoy dispuesto a creer que el éter luminífero impregna la sustancia de todos los cuerpos materiales con pequeña o nula resistencia...”

(J. M. S. Ron, 1983)

En este punto se puede ver como la cuestión de si la tierra arrastraba consigo al éter, construía una problemática no solo para la óptica sino también para el electromagnetismo. Si bien hoy en día se tienen en cuenta los planteamientos de Young, en esa época fueron de poca relevancia debido a que la teoría newtoniana poseía prestigio y renombre. De hecho, algunos científicos como William Herschel (1738-1822) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) aun seguían intentando desarrollar la óptica con la teoría corpuscular, particularmente François Arago (1786-1853) es quien llega a la conclusión de que la aberración de la luz en un medio ópticamente denso sería diferente según como la luz procedente de una estrella le atravesase en la misma dirección y sentido que el movimiento de la tierra o en sentido opuesto. Desde el punto de vista de la teoría corpuscular, la velocidad con respecto a la tierra de las partículas de luz emitidas por una estrella depende de la dirección del movimiento de la tierra. Con esto, en el caso de la luz atravesando un prisma, se debería observar una diferencia en el ángulo de desviación del orden de v/c . Sin embargo, Arago pondría en 1808-1809 a prueba esta hipótesis llegando a un resultado nulo. A la discusión llegaría Augustin-Jean Fresnel (1788-1827), a quien Arago le escribiría informándole de sus experimentos y de su imposibilidad para darles explicación alguna en base a la teoría corpuscular. Fresnel contestaría en una carta publicada en los *Annales de Chimie*, donde exponía lo siguiente:

1. La teoría corpuscular de la luz no parecía la más probable, porque para ser compatible con los resultados experimentales de Arago habría que suponer (como ya el propio Arago indico):

“... que los cuerpos luminosos transmiten a las partículas de la luz un número infinito de velocidades diferentes, y que estas partículas únicamente afectan al órgano de la visión cuando viajan a una de estas velocidades, o al menos entre límites muy próximos, de manera que un aumento o disminución en una diezmilésima parte es más que suficiente para evitar su detección”.

(Fresnel, 1819)

2. La teoría ondulatoria de la luz, en la cual los cuerpos materiales atraviesan el éter sin arrastrarlo, haría que impajaritadamente la velocidad de la luz fuese diferente si se mide en direcciones diferentes, pensaba Fresnel. También planteaba que la posibilidad de que ciertos cuerpos con índices de refracción mayor que el del vacío (como el prisma de Arago) arrastraban *parcialmente* al éter.

Para explicar este fenómeno Fresnel propone que la densidad “*eterea*” de cualquier cuerpo es proporcional al cuadrado de su índice de refracción (n), y que cuando este se encuentra en movimiento arrastra consigo parte del éter. Con esto desarrolla el “*Coefficiente de Arrastre de Fresnel*”.

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Una consecuencia del coeficiente es que ahora la velocidad c_e (velocidad con respecto al éter), de la luz en un medio en movimiento (un prisma colocado en la tierra) estaría dada por:

$$c_e = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$$

(En el caso que $n = 1$, se tiene que $c_e = c$ como era de esperarse en el éter vacío).

El coeficiente tuvo cavidad en la escena científica por un tiempo, ya que daba cuenta sobre los experimentos realizados por Arago, aunque Fresnel lo había ideado para explicar un solo fenómeno. Esto cambiaría en 1851 cuando Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) descubrió su utilidad

mediante un experimento. Con esto el coeficiente se convertía en un factor que toda teoría debería tener en cuenta. Más adelante sería un hecho que se convertiría en uno de los principales problemas que Hendrik Antoon Lorentz (1853-1902) intentaría resolver desde el marco de la teoría electromagnética.

La historia no terminaría aquí como es de saberse, si bien el planteamiento de Fresnel era interesante, no era el único que existía. Es de precisar que Young, Arago y Fresnel creían que con la teoría ondulatoria no se podía explicar el fenómeno de la aberración estelar si se suponía que la tierra arrastraba completamente al éter. A esto llegaría George Gabriel Stokes (1819-1903) a rechazar lo anterior mencionado, en una publicación de 1845, en la cual suponía que el éter era arrastrado por la tierra de la misma manera que las capas de un fluido son arrastradas, debido a la fricción, cuando un fluido pasa a través de él, por esto Arago obtenía un resultado nulo, ya que si el prisma también está en reposo con respecto al éter, no se obtendría un efecto diferente. Stokes fue capaz de demostrar, en condición de irrotacionalidad por parte del éter, los datos experimentales observados tendrían más sentido. Tiempo después Lorentz mostraría los errores en la teoría de Stokes, sin embargo, para ese entonces la teoría de Fresnel y Stokes parecían las más probables (J. M. S. Ron, 1983).

Como se ha evidenciado hasta ahora, la situación con el éter proporciona una visión adecuada para entender los experimentos ópticos que llegaría a realizar Albert Abraham Michelson (1852-1931). La teoría de Fresnel planteaba que la tierra no arrastraba al éter consigo; existe un arrastre pero parcial, en otras palabras la tierra se mueve con respecto al éter (que de alguna manera es el espacio absoluto de Newton), una consecuencia de esto es que si medimos el tiempo que tarda un rayo de luz en ir entre dos puntos de la superficie de la tierra, debe ser diferente dependiendo del movimiento de este, de si es en el sentido del movimiento de la tierra, u opuesto. En principio Michelson se aventuro a experimentar solo, intento medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter.

Ya Maxwell había señalado que las medidas de la velocidad de la luz c y la velocidad v de la tierra respecto al éter aparece en un segundo orden (v^2/c^2), ya que el efecto era considerado muy pequeño para ser medido. Para esto se calcula el tiempo que demora un pulso de luz para ir y volver a un espejo. La figura 1.3 nos ejemplifica una fuente de luz con un espejo a una distancia L . Si se supone que ambos se mueven a una velocidad v respecto al éter, la mecánica clásica predice que la luz se moverá hacia el espejo con una velocidad $c - v$ y regresará con velocidad $c + v$ (ambas

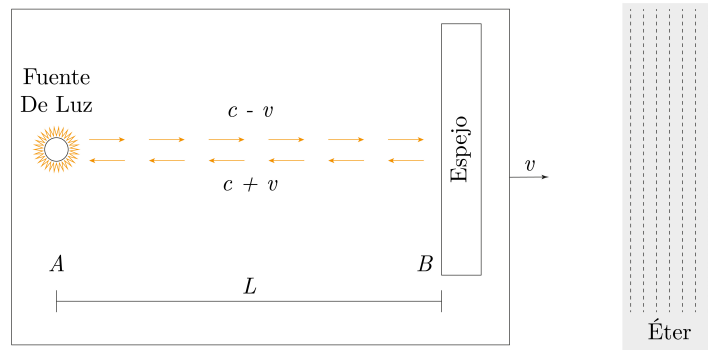


Figura 1.3: Fuente de luz y espejo moviéndose a velocidad v relativa al “éter” (Elaboración Propia).

respecto al espejo y la fuente). Con ello, el tiempo en el viaje total, ida y regreso, sera:

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Como v es mucho menor que c , se utiliza el desarrollo del binomio de la forma:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \dots \quad \text{Para } x \ll 1$$

Aplicando:

$$t_1 \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \quad (1.4)$$

Si se toma v como la velocidad orbital de la tierra al rededor del sol, se tiene que $v = 3 \times 10^4 \text{ m/s} = 10^{-4}c$ y $v^2/c^2 = 10^{-8}$. Con esto la corrección que tiene en cuenta el movimiento de la tierra es realmente pequeña. En este punto Michelson se dio cuenta que aunque el efecto es demasiado pequeño para ser medido directamente, debería ser posible medir v^2/c^2 mediante una media diferencial. Michelson crea un interferómetro con el fin de tomar dicha medida (Tipler, 1986).

Suponga que el interferómetro (Ver figura 1.4) esta orientado de tal forma que la dirección del haz transmitido por el divisor de haces coincida con la dirección supuesta de la tierra. Así, la ecuación 1.35 da el resultado clásico para el tiempo t_1 del haz transmitido. Como el haz transmitido se mueve perpendicularmente (respecto a la tierra) a la velocidad de la tierra, la velocidad de este haz respecto a nuestro planeta (en concordancia con la mecánica clásica) es la diferencia vectorial $u = c - v$ y su modulo es $\sqrt{c^2 - v^2}$; de modo que el tiempo de ida y vuelta para el haz es de:

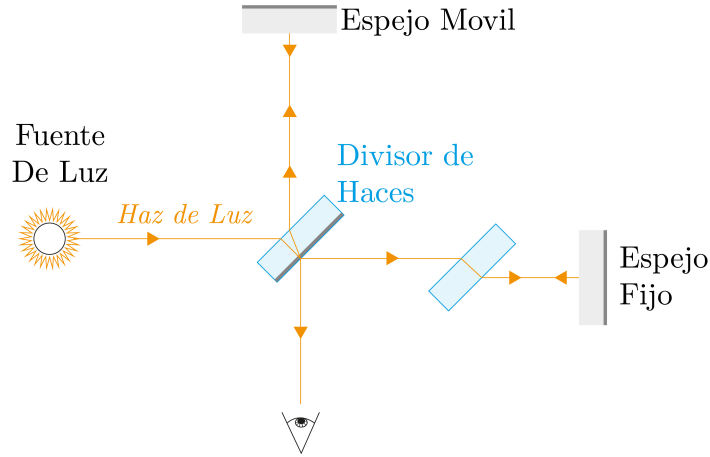


Figura 1.4: Interferómetro de Michelson (Elaboración Propia).

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

Existiendo así una diferencia de tiempos:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{Lv^2}{c^3}$$

Esta diferencia se detecta observando la interferencia de los dos haces de luz. Debido a la dificultad que representa conseguir que los dos trayectos sean de igual longitud con la precisión requerida, se observa el diagrama interferencial entre los dos haces y luego se gira el aparato completo 90° . Por otra parte la diferencia total de $2\Delta t$ es igual a una diferencia de trayectos $2c\Delta t$. Las franjas de interferencias observadas en la primera orientación deberán desplazarse en un numero de franjas ΔN :

$$\Delta N = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2}$$

Donde λ es la longitud de onda de la luz. En un primer intento Michelson, en 1881, L valía aproximadamente $1,2 \text{ m}$ y λ era de 590 nm . Para el valor de $v^2/c^2 = 10^{-8}$ se esperaba que el ΔN fuese $0,04$ franjas. Aunque los errores debido a la experimentación eran del mismo orden de magnitud, al no observar ningún desplazamiento Michelson señaló que la tierra no se movía respecto al éter. Para 1887, Michelson repitió el experimento con Morley, en el famoso interferómetro de Michelson-Morley, donde se utilizó un sistema mejorado, que permitiera girar el aparato sin introducir un desplazamiento de franjas debido a deformaciones mecánicas y aumento la longitud del trayecto efectivo L hasta 11 m aproximadamente mediante

una serie de reflexiones múltiples. Con esto se esperaba que el ΔN fuese alrededor de 0,04 franjas, aproximadamente de 20 a 40 veces el valor mínimo posible de observar. Nuevamente, no se observó ningún desplazamiento (Tipler, 1986). Estos experimentos generaron una crisis en la física clásica, crisis de la que solo pudieron salir en primer lugar H. Lorentz, H. Poincaré y A. Einstein. Es de notar que los experimentos de Michelson solo analizaban una cuestión óptica, de la cual surgió una forma de entender la teoría de arrastre de Fresnel. De igual manera que el éter se adentró en la teoría electromagnética de Maxwell, un éter que nació en y para la óptica.

Como ya mencionamos anteriormente, para esta época aun no se había desarrollado una electrodinámica, no solo estaba en crisis la óptica, sino que también los fenómenos electromagnéticos, no habían acuerdos generales ni siquiera cuales eran los principios teóricos. Por ende era de esperarse que existieran diferentes teorías, a modo de ejemplo, en Alemania uno de los países que donde más se movía el tema, habían varias teorías desarrolladas, entre ellas las más respetadas eran la electrodinámica de Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) de 1846 y la electrodinámica de Franz Ernst Neumann (1798-1895) de 1845. Si bien ambas tuvieron un gran desarrollo la que más sonó fue la de Weber, ya que estaba inmersa en la tradición newtoniana, con fuerzas de acción a distancia, y basada en dos hipótesis:

1. *La corriente eléctrica consiste en dos fluidos de partículas eléctricas moviéndose en sentidos opuestos.*
2. *La fuerza entre dos partículas es central, instantánea y de acción a distancia, viniendo dada por:*

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \quad (1.5)$$

(J. M. S. Ron, 1983)

donde e_1 y e_2 son las cargas de las partículas, r es la distancia que las separa y dr/dt es la velocidad respecto al éter (absoluto), lo que muestra que aun no hay relatividad, ya que la aceleración es absoluta. Es de notar como Weber en la ecuación 1.5 esta generalizando la Ley de Coulomb, siendo dependiente no solo de la distancia que les separa sino también del movimiento relativo que pueden tener las cargas con respecto al éter (marco absoluto). Los críticos de esta, apelaban a como esta dependencia del movimiento afectaba al principio de conservación de la energía. Pero fue en 1861 que Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) usando

la electrodinámica de Weber creo la suya, modificándola de tal manera que la energía de dos electrones E situados en coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , es:

$$E = -\frac{e_1 e_2}{2rc^2} \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{\partial y_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial t} - \frac{\partial z_2}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (1.6)$$

Un aspecto importante a mencionar de la formulación de Riemann (ecuación 1.6), es que de alguna manera privilegiaba las contribuciones de Maxwell al postular una velocidad finita para la propagación de las acciones eléctricas, además de estar planteada en términos de energías potenciales.

Es importante mencionar las contribuciones de Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz (1821-1894) a la electrodinámica, a la par de lo que Maxwell estaba creando, a lo que de cierto modo el mismo Helmholtz ayudo a formar desde su perspectiva newtoniana. No solo ayudo a compartir la electrodinámica de Maxwell, sino que también ayudo a eliminar la posición privilegiada que poseía la teoría de Weber, con el argumento de que los fenómenos eléctricos y magnéticos no podían propagarse en el espacio infinito con velocidad infinita. A la par de presentar argumentos Helmholtz publico en 1870 un articulo en el que comparaba las diferentes teorías, con el fin clasificar y sistematizar, labor que solo pudo contribuir con el apoyo a la teoría de Maxwell. Finalmente Helmholtz dio su ultimo aporte cuando encomendó a su discípulo Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) realizar los experimentos que lo llevarían al descubrimiento de la radiación electromagnética (J. M. S. Ron, 1983).

James Clerk Maxwell (1831-1879) se perpetuaría en la historia de la física con sus ecuaciones (1.7, 1.8, 1.9 y 1.10), publicadas en *A Treatise On Electricity And Magnetism* (Maxwell, 1873) donde hizo realidad en 1864 la posibilidad de tener una teoría unificada de los fenómenos eléctricos y magnéticos, claro esta, basado en el trabajo experimental de Michael Faraday (1791-1867). Con estas cambiaría el estado de toda la investigación teórica de los fenómenos electromagnéticos.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.10)$$

Empezando por la **Ley de Gauss** (1.7); la cual establece la divergencia del campo eléctrico $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ es proporcional a la densidad de carga eléctrica ρ , en otras palabras nos explica la relación entre el flujo del campo eléctrico \vec{E} a través de una superficie cerrada con la carga neta encerrada por dicha superficie. Es importante resaltar como divergen las líneas de \vec{E} , ya que estas lo hacen desde una carga positiva hacia una carga negativa. En segundo lugar esta la **Ley de Gauss Para El Campo Magnético** (1.8); indica que la divergencia del campo magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ es nula, dicho de otra forma las líneas de los campos magnéticos \vec{B} deben ser cerradas, lo que tiene como consecuencia la inexistencia de los monopolos magnéticos. En tercer lugar esta la **Ley De Faraday-Lenz** (1.9); habla sobre como el rotacional del campo eléctrico $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ es la derivada parcial del campo magnético \vec{B} con respecto al tiempo t . En otras palabras plantea como la variación de un campo magnético \vec{B} en el tiempo t induce un campo eléctrico \vec{E} . Finalmente la **Ley De Ampère Generalizada** (1.10); esta plantea que sobre un conductor (un alambre) por el cual circula una densidad de corriente \vec{J} , esta provocara la aparición de un campo magnético \vec{B} rotacional alrededor del alambre, de tal manera que \vec{B} y \vec{J} van en la misma dirección. Es importante resaltar que inicialmente Maxwell planteo 20 ecuaciones, fue Oliver Heaviside (1850-1925) quien agrupo las ecuaciones y las formulo en la notación vectorial actual (Tipler, 1986).

En la nueva teoría propuesta por Maxwell el éter aun tenia un papel, llenaba todo el espacio y tenia un lugar tanto en los fenómenos ópticos como en los electromagnéticos. Además, un dato sobresaliente es que la nueva teoría traía consigo algo que de cierto modo, ya las electrodinámicas anteriores traían entrevisto; la luz no es más que un fenómeno electromagnético. Con esto, la óptica se convertiría en electrodinámica.

Con estas nuevas ecuaciones (1.7, 1.8, 1.9 y 1.10), que describían, como se ha evidenciado, la variación del campo electromagnético (de alguna manera el éter con propiedades electromagnéticas), pero en si, no describían como tal la electrodinámica de cuerpos en movimiento. La teoría de Maxwell lo que hacia era tratar a la materia como si fuera una mera modificación del éter, lo que lleva a pensar que la materia y el éter se mueven al unisono, lo que en si ya propone una contradicción con la propuesta de Fresnel. En resumen, aun hacia falta una electrodinámica para los cuerpos en movimiento y deducir los resultados de Fresnel.

La historia estaría a medias si se pasa por alto los aportes de Hendrik

Antoon Lorentz (1853-1928) (ver figura 1.5) a la física, ya que su contribución es grande y laboriosa. Lorentz empezaría con la enorme tarea de unificar la estructura de la física, basado en los trabajos de Maxwell y Fresnel, a quienes tubo la oportunidad de estudiar en Holanda, donde estudiaría su licenciatura. Todo empieza con su tesis doctoral de 1875 titulada *Sobre la Reflexión y Refracción de la Luz*, donde discute la teoría de la luz de Fresnel para luego analizar la teoría de la luz en el marco de la electrodinámica de Maxwell. En este punto ya Lorentz tenía en mente la idea “atómica” de la electricidad, con el electrón como unidad fundamental, basado claro está en las ideas de Weber y Clausius.

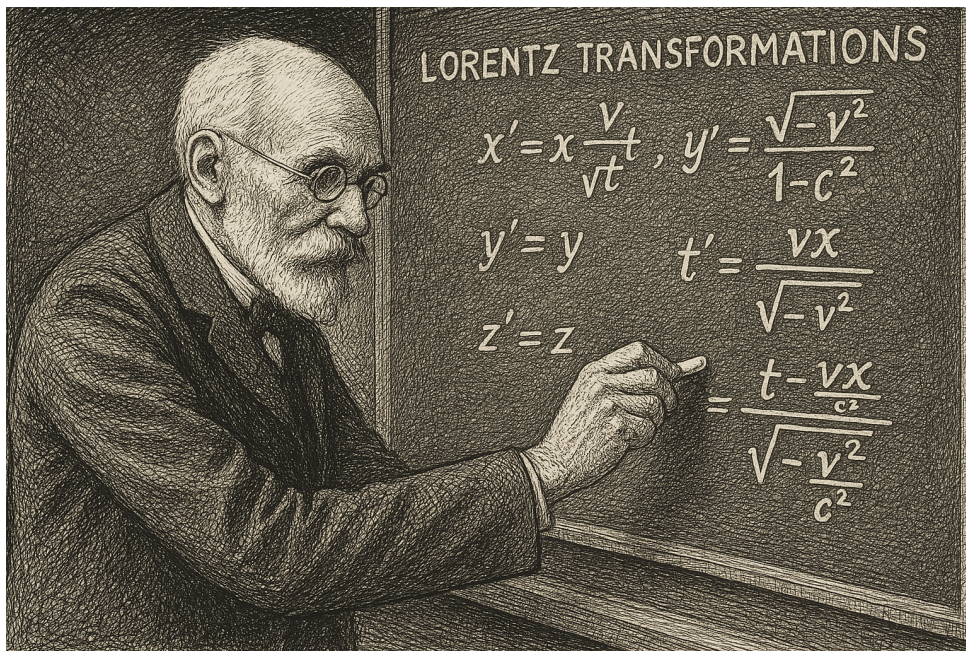


Figura 1.5: Hendrik Antoon Lorentz (OpenAI, 2025c).

En 1869 Lorentz publica “*De l’influence du Mouvement De La Terre Sur Les Phenomenes Lumineux*” (Lorentz, 1892a), en el cual se empiezan a tocar los temas que lo llevarían más adelante a lo que hoy se conoce como las *transformaciones de Lorentz*. En este artículo se analizaba hasta que punto el éter influye en el movimiento de los cuerpos que lo atraviesan, en síntesis, analizar el *coeficiente de arrastre* parcial de Fresnel, donde el objetivo era negar el arrastre en absoluto. Lorentz suponía que el éter era el mismo dentro y fuera de la materia, con el argumento de que el cambio en la velocidad de la luz en un medio activamente óptico y en movimiento, se debe a la interacción de las moléculas con el éter. Lorentz entendía la interacción de las ondas de luz con el éter de tal manera que los iones de la materia oscilaran creando ondas más pequeñas que al interferir con ellas mismas y con la radiación incidente se veían modificadas, haciendo que de

alguna manera la velocidad pareciera depender de la frecuencia de la luz, lo que causaría el fenómeno de la dispersión.

En 1892 Lorentz publica *“La théorie Électromagnétique de Maxwell et Son Application Aux Corps Mouvements”* (Lorentz, 1892b), donde trabaja los problemas ópticos llevándolos a otro nivel, abriendo camino a un área de investigación llamada *la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, área que terminaría con la llegada de la teoría especial de la relatividad años más tarde. En este artículo nuevamente Lorentz reitera que el éter no se ve afectado por la materia, no participa en el movimiento de esta, y además que no posee propiedades físicas. Para diferenciar materia y éter Lorentz usaba la siguiente definición:

“Llamaré materia a todo aquello que pueda ser asiento de corrientes eléctricas y de movimientos electromagnéticos. El nombre éter se aplicará a todo lo que no es materia ponderomotriz¹”

(J. M. S. Ron, 1983)

Lo que Lorentz buscaba respecto a los fenómenos dinámicos, en palabras de el nuevamente, era:

“...reducirlos a uno solo, el más simple de todos, y que no es otro que el movimiento de cuerpos eléctricos. Se verá que sin examinar a fondo la relación [existente] entre materia ponderomotriz y éter, se puede establecer un sistema de ecuaciones que describe adecuadamente sucesos en un sistema de tales partículas... Todos los cuerpos ponderomotrices contienen una multitud de pequeñas cargas, positivas y negativas, y los fenómenos eléctricos son producidos por el desplazamiento de esas partículas. De acuerdo con esta concepción, una carga eléctrica está constituida por un exceso de partículas que tienen un signo definido, una corriente eléctrica es una verdadera corriente de estos corpúsculos y en un aislante ponderomotriz existe un “desplazamiento eléctrico” cuando las partículas eléctricas incluidas son desplazadas de su posición de equilibrio”.

(J. M. S. Ron, 1983)

Es de notar que ahora las fuerzas que surgían de la interacción entre dos partículas era solo el resultado entre ambas, no necesitaban de un

¹Ponderomotriz: que tiende a producir movimiento de un cuerpo.

medio para su propagación, solo requerían de una velocidad, posición y aceleración. Lorentz trataba de unir la electricidad con las ecuaciones de Maxwell, en este sentido las partículas interactuaban con el éter creando perturbaciones que afectarían a otras partículas. Retomando las palabras de Lorentz:

“Las fórmulas... que expresamos nos proporcionan por una parte la fuerza que el éter ejerce sobre una de estas partículas. Si esta fuerza depende del movimiento de las otras partículas, es porque este movimiento ha modificado el estado del éter; asimismo, el valor de la fuerza en un cierto instante, no está determinado por las velocidades y aceleraciones que estos pequeños cuerpos tienen en aquel instante; en realidad se origina en movimientos que han tenido lugar antes.”

(J. M. S. Ron, 1983)

Aquí, se refería a lo que hoy en día se conoce como fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = \rho \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1.11)$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica y \vec{v} su velocidad con respecto al éter, \vec{E} el campo eléctrico y \vec{B} el campo magnético. La fuerza de Lorentz (ecuación 1.11) es complementaria con las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 1.7, 1.8, 1.9 y 1.10). Para Lorentz estas ecuaciones eran inseparables del éter, validas únicamente en un marco de referencia en reposo con respecto al éter. En este punto, las ecuaciones de Maxwell si bien representaron un avance importante para la electrodinámica, aun no significaban la teoría última.

Con todos estos elementos básicos, Lorentz se pone en la tarea de encontrar el campo debido a una densidad de carga en movimiento con respecto al éter. Para llevar a cabo esto, debía encontrar una ecuación de onda que relacionara los marcos de referencia. A partir de las ecuaciones de Maxwell se tiene la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

Esto suponiendo que la onda se mueve a lo largo del eje x , en el marco de referencia Σ como se muestra en la figura 1.6.

De igual manera en un marco en movimiento Σ' .

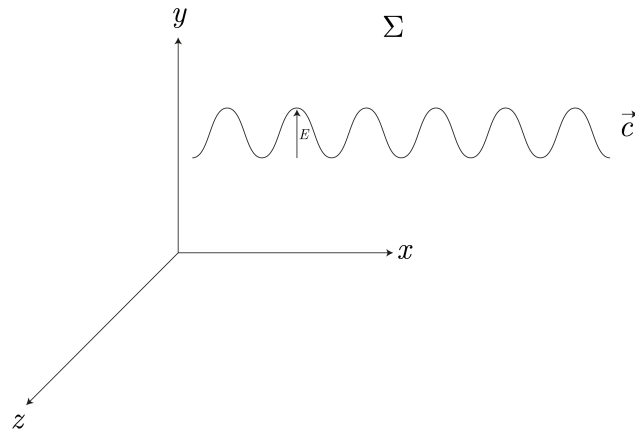


Figura 1.6: Onda en Σ Con respecto al éter (Elaboración Propia).

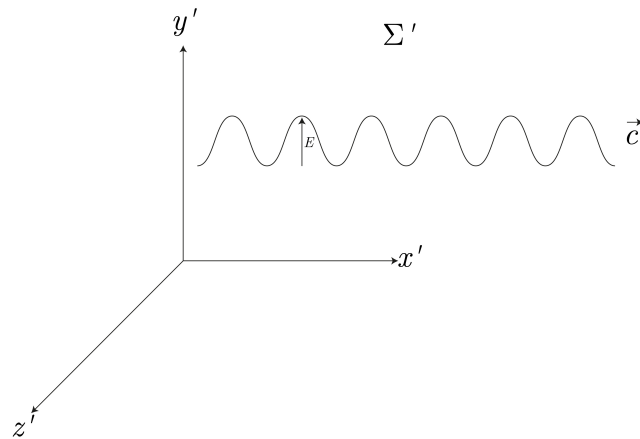


Figura 1.7: Onda en Σ' (Elaboración Propia).

Una vez planteada la situación, Lorentz aplicó lo que él denominaba *como uno de los pilares de la física*, las transformaciones de Galileo, bajo las cuales se regía la mecánica newtoniana.

1.1.1. Principio de Galileo - Transformaciones de Galileo

Antes de seguir con el desarrollo de Lorentz es importante precisar que son las transformaciones de Galileo. En principio, es de recordar que un sistema de referencia inercial es aquel que, desde su punto de observación satisface la primera ley de Newton, es decir, todo cuerpo que este exento de fuerzas externas permanecerá en su mismo estado, ya sea de reposo o velocidad constante.

El principio de relatividad Galileana propone que las leyes de la mecánica clásica son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales. Esto supone la propagación instantánea de cualquier señal en mecánica clásica

o newtoniana. Dicha mecánica es invariante ante las transformaciones de Galileo siempre y cuando la masa del sistema permanezca constante. Para este caso, dos o mas observadores están de acuerdo respecto a la simultaneidad de los sucesos siempre y cuando todos midan el mismo tiempo, lo que significa que sus relojes están sincronizados.

Las leyes para transformar la posición y el tiempo entre marcos de referencia inercial se denominan transformaciones de Galileo. Estas abarcan las traslaciones del origen de tiempos y traslaciones espaciales a velocidad constante; supongamos dos marcos de referencia, donde Σ' se mueve a velocidad v respecto a Σ , aquí ocurre un evento en el punto P con coordenadas $P(x, y, z)$ en Σ y coordenadas $P(x', y', z')$ en Σ' como se muestra en la figura 1.8.

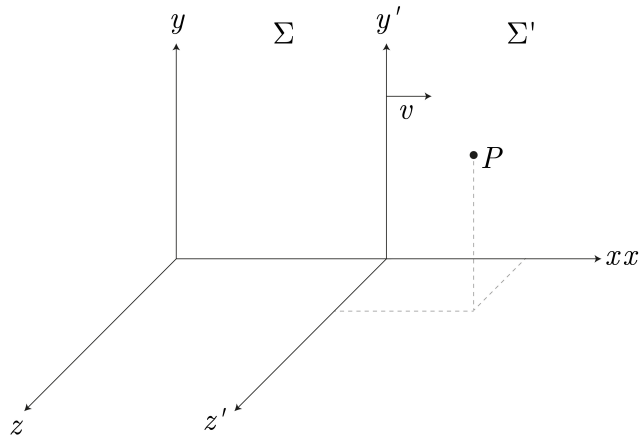


Figura 1.8: Marcos de Referencia Σ' y Σ (Elaboración Propia).

De esta forma las transformaciones de Galileo en un tiempo $t = t' = 0$ (en el origen del movimiento), quedan expresadas:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &\rightarrow \Sigma' & \Sigma' &\rightarrow \Sigma \\
 x' = x - vt &\rightarrow & x = x' + vt' & \\
 y' = y &\rightarrow & y = y' & \\
 z' = z &\rightarrow & z = z' &
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Continuando con el desarrollo de Lorentz, se plantean las ecuaciones de onda para cada marco de referencia:

$$\text{Para } \Sigma: \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

$$\text{Para } \Sigma': \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} \quad (1.15)$$

Aplicando² 1.14 y 1.15 a 1.13, se tiene para el caso de Σ' :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t' \partial x'} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} \quad (1.16)$$

Como se evidencia en la ecuación (1.16), la onda depende de la velocidad v del marco, además no se parece a una ecuación de onda normal. Con esto Lorentz descubre que las ecuaciones de Maxwell no transforman bajo las transformaciones de Galileo, dicho de otra manera las ecuaciones de Maxwell no son covariantes bajo estas transformaciones (Landáu, 1975). Una vez llegado a esta situación, Lorentz se ve obligado a crear unas transformaciones que le permitan llegar a una ecuación de onda “estandar”. Es importante señalar que para Lorentz, esto significaba un tratamiento matemático y nada más, que no tenía un significado físico.

Finalmente Lorentz descubre las transformaciones que permiten encontrar el campo debido a una densidad de carga en movimiento con respecto al éter. Es importante tener esto en cuenta, ya que Lorentz intentaba resolver un problema en particular de la electrodinámica, donde aun subsiste el éter como parte fundamental y, aun no se cambia el paradigma ni del espacio ni del tiempo, es más, en la parte final del artículo “*The Relative Motion of the Earth and the Ether*” de 1892 Lorentz (Lorentz, 1892c) dedujo teóricamente el coeficiente de arrastre de Fresnel. Como mencione anteriormente Lorentz no encontraba significado físico a las transformaciones, y a día de hoy sabemos que en el análisis de estas radica la clave para llegar a la teoría especial de la relatividad. Con las nuevas transformaciones no se invalidaron las transformaciones de Galileo, solo que estas serán validas en el marco de la teoría clásica de la mecánica, osea con velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz, o para ser mas exactos en el orden de v/c . Adherido a esto Lorentz llego a plantear una explicación en torno a la contracción de las longitudes en la dirección del movimiento, como respuesta a la interacción de las moléculas con el éter, idea que tampoco era del todo suya, ya que George Francis Fitzgerald (1851-1901) ya había hablado del tema, eso si, sin ninguna ecuación.

Para concluir esta parte, es de resaltar como ya mencione anteriormente el trabajo de Jules Henri Poincaré (1854-1912), a quien poco se menciona, y quien según algunos autores es el verdadero creador de la teoría especial

²Ver Anexo A

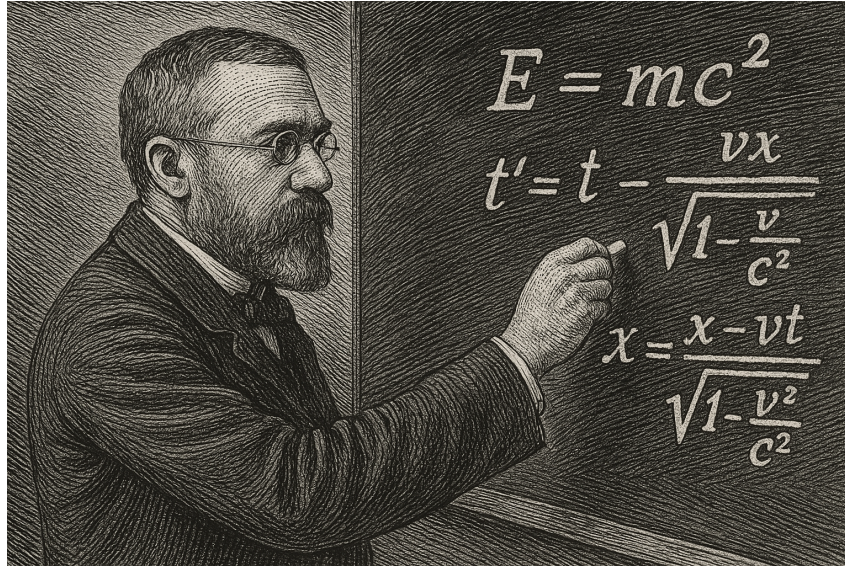


Figura 1.9: Jules Henri Poincaré ([OpenAI, 2025d](#)).

de la relatividad, ya que llego a esta mediante un tratamiento netamente topológico, donde las transformaciones de Lorentz forman un grupo. En algunos de sus libros como *“El Valor de la Ciencia”* de 1905 ya ponía en cuestión la simultaneidad de los eventos, pero al igual que Lorentz solo intentaba solucionar cuestiones alrededor de la electrodinámica, tanto así que el entendimiento de Poincaré alrededor de la masa era de naturaleza electromagnética. En el libro *“Ciencia y Metodo”* de 1908 Poincaré desarrolla el principio de relatividad de manera inductiva, pero es aquí, donde en contra parte, quienes no le dan la autoría se cuestionan la importancia que Poincaré daba al principio de relatividad, ya que en estos detalles radica la teoría especial de la relatividad. En resumen, la teoría especial de la relatividad no fue creada solo por Einstein, sino que más bien fue un desarrollo en conjunto en el que Lorentz y Poincaré también fueron partícipes.

1.2. Postulados de la Teoría Especial de la Relatividad

La teoría de la relatividad especial puede deducirse a partir de dos postulados, propuestos por Albert Einstein (1879-1955) en un artículo que lleva como nombre *“sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento”* que publicó un 30 de junio de 1905, cuando tenía tan solo 26 años. Estos dos postulados, enunciados de modo sencillo precisan:

1. **Postulado:** *Principio de Relatividad.* “Las leyes de la física son las

mismas en todo sistema de referencia inercial.”

(Tipler, 1986)

El primer postulado no se plantea por primera vez en el artículo de Einstein, ya que fue formulado por G. Galilei para la mecánica clásica alrededor de 1600, Einstein lo amplió para la física en general. Este dice que, una vez que las leyes de la física se han definido en un sistema de referencia inercial, son aplicables a cualquier otro sistema, dicho de otra manera tanto la forma matemática de las leyes de la física como el valor de las constantes son las mismas independiente del marco de referencia que se use. También plantea que si estamos en un marco de referencia inercial y no tenemos información externa, no podemos saber por medio de ningún experimento si estamos en movimiento constante o en reposo.

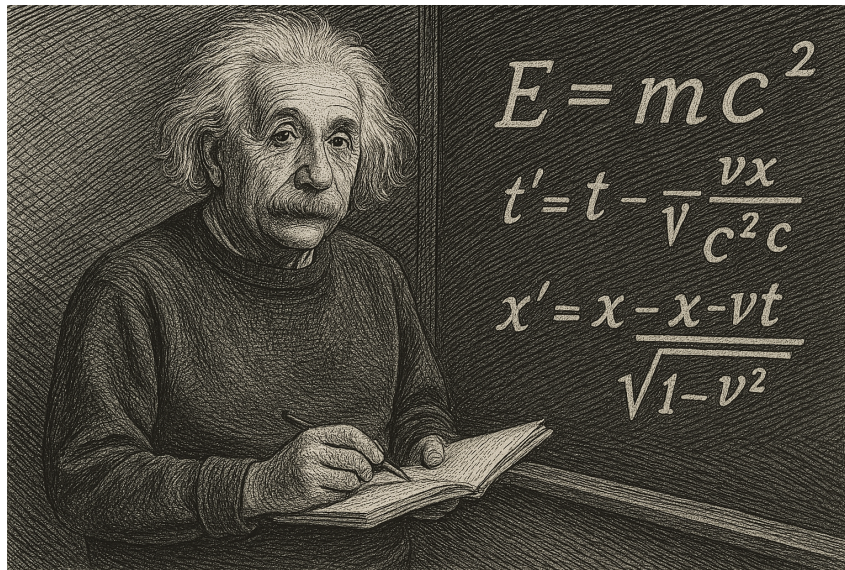


Figura 1.10: Albert Einstein (OpenAI, 2025b).

2. **Postulado:** *Invarianza de c.* “La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los observadores y tiene el valor de c , independientemente del estado de movimiento de la fuente.”

(Tipler, 1986)

El segundo postulado plantea que la velocidad de la luz es una constante (siempre tiene el mismo valor $299792,458 \text{ km/s}$) que no depende de la fuente ni del movimiento relativo que esta posea. Este resultado

tiene implicaciones experimentales y teóricas las cuales tardaron en llegar a tener el valor que tienen hoy en día. Experimentalmente con los experimento ya mencionados de Michelson y Morley, y teóricamente por los desarrollos de Maxwell de sus ecuaciones donde proponía que la luz era una onda electromagnética que poseía una velocidad constante.

1.2.1. Sincronización de Relojes y Simultaneidad

Uno de los conceptos más importantes en física es el evento, el cual tiene como especificación un lugar donde ocurre y un momento en el que sucede. Un evento puede ser la emisión de una partícula o de un destello de luz, la absorción de una partícula, una colisión, etc.

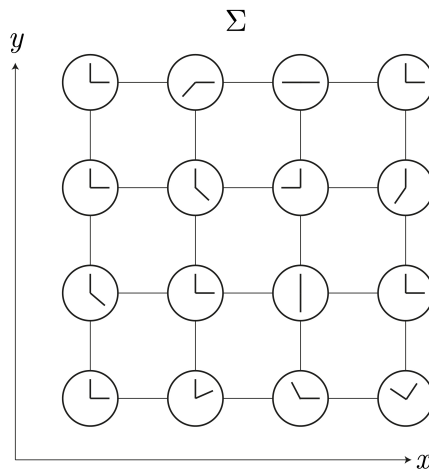


Figura 1.11: Maya de Relojes (Elaboración Propia).

A raíz del segundo postulado, el cual nos dice que la velocidad de la luz es finita, nos deja como consecuencia que el tiempo en los diferentes puntos del espacio no pueden ser los mismos, ya que para informar un tiempo de un punto A a otro punto B , la información viajara a la velocidad de la luz. Suponga una maya cuadrada en la cual en cada intersección esta ubicado un reloj, como se muestra en la figura 1.11.

Ahora, para sincronizar los relojes de un punto A y un punto B (que marquen el mismo tiempo $t_A = 0$ y $t_B = 0$) estos deben tener en cuenta la distancia que los separa d y la velocidad con la que la luz se mueve en el espacio c , como se muestra en la figura 1.12. Con esto en mente, para que el reloj en B marque la misma hora que en A deberá tener en cuenta el tiempo que tarda la señal en llegar del punto A (t_{AB}), de tal manera que:

$$t_B = t_A + t_{AB} \quad (1.17)$$

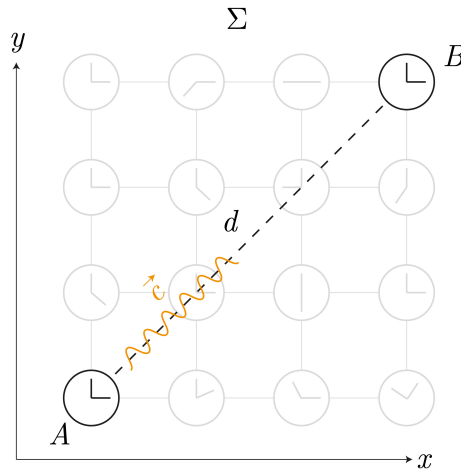


Figura 1.12: Sincronización (Elaboración Propia).

Como la luz recorre la distancia d a una velocidad c , el tiempo t_{AB} queda expresado:

$$t_{AB} = \frac{d}{c} \tag{1.18}$$

Reemplazando 1.18 en 1.17:

$$t_B = t_A + \frac{d}{c} \tag{1.19}$$

De esta manera el reloj en B marcará la misma hora que en A . El tiempo en este marco de referencia Σ se denomina tiempo local o propio. Los relojes sincronizados en el marco de referencia Σ no estarán sincronizados en ningún otro sistema que se mueva con respecto Σ .

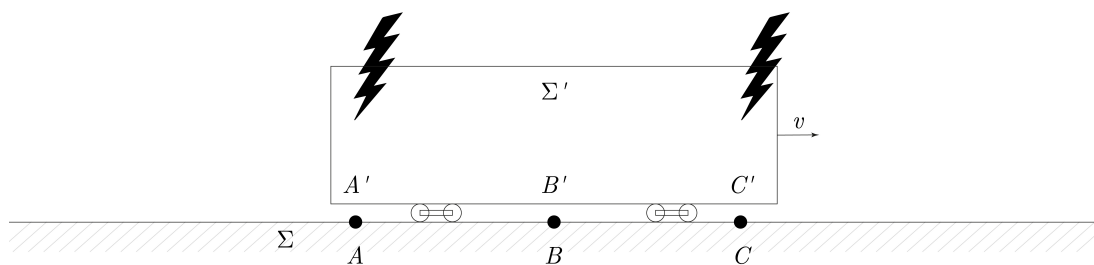


Figura 1.13: Simultaneidad (Elaboración Propia).

Por otra parte, el segundo postulado también deja como conclusión que los eventos no pueden ser simultáneos, ya que dependen de la velocidad finita a la que se propaga la luz. Suponga ahora un tren (Σ') que se mueve

con velocidad $v \approx c$ con respecto a una estación (Σ) como se muestra en la figura 1.13. En los extremos del tren A' y C' cae un rayo, de tal manera que deja marcas en la estación en los puntos A y C .

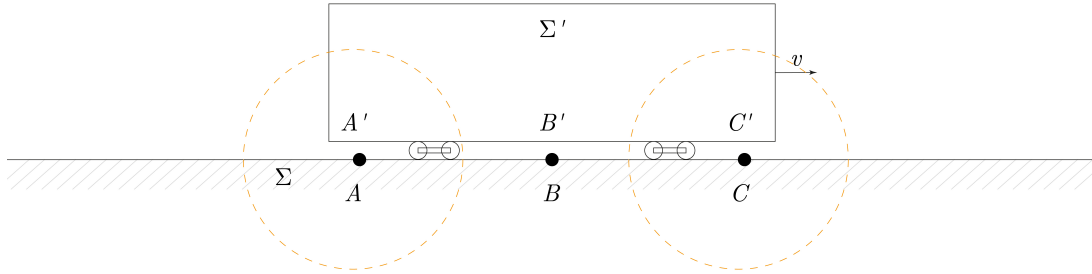


Figura 1.14: Propagación de la onda primer momento (Elaboración Propia).

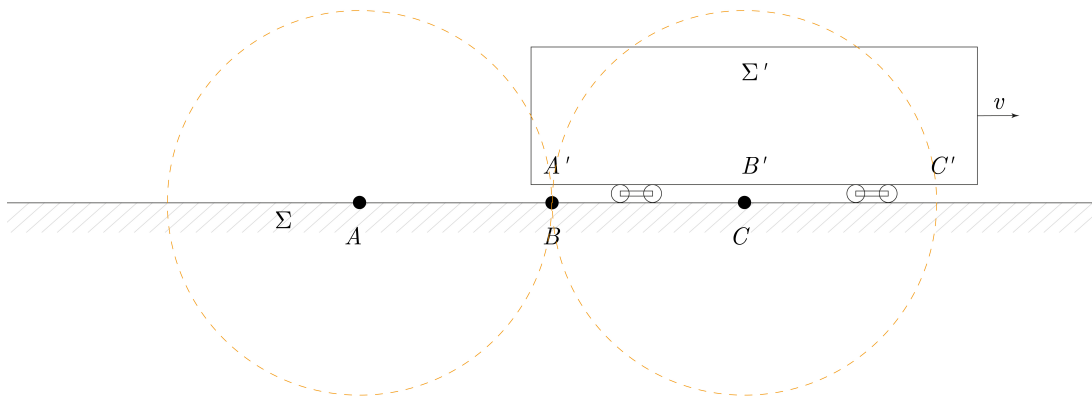


Figura 1.15: Propagación de la onda segundo momento (Elaboración Propia).

En el medio del tren se ubica un observador B' , de igual manera en la estación, en medio de los puntos A y C se ubica un observador B . Analizando lo que observa B tenemos que la onda de luz tiene que recorrer la misma distancia de A hacia B que de C hacia B , por lo que este ve que los rayos ocurrieron al mismo tiempo, o sea que son simultáneos para B como se muestra en la figura 1.15. En contra parte, B' no podría decir lo mismo, ya que al moverse a una velocidad $v \approx c$ el rayo que cae en A' nunca le llega, a diferencia del rayo en C' que sí le llega, como se muestra en la figura 1.15. Con esta situación tenemos que la simultaneidad es relativa al observador, a diferencia de como se pensaba en la mecánica clásica, donde la simultaneidad es absoluta (Tipler, 1986).

1.3. Transformaciones de Lorentz

Como se expuso anteriormente la relatividad de la simultaneidad es una consecuencia del segundo postulado. De igual manera una consecuencia de del primer postulado son las transformaciones de Lorentz, ya que estas nos relacionan la equivalencia entre dos observadores inerciales, osea, como relacionan mediciones el uno con el otro. En mecánica clásica se relacionan estas medidas con las transformaciones de Galileo (cuando $v \ll c$), como vimos anteriormente estas no satisfacen la electrodinámica pero no solo eso, tampoco satisfacen ciertos casos de la mecánica (cuando $v \approx c$), que es caso que estamos analizando, por lo que se requieren unas transformaciones que si permitan relacionar los observadores (Janssen, 2005).

Nuevamente retomemos el caso de la figura 1.8, donde tenemos un marco Σ en reposo y Σ' en movimiento con velocidad v respecto a Σ a lo largo del eje x y x' . En el punto P ocurre un evento con coordenadas (x, y, z) en Σ y (x', y', z') en Σ' . Debido a que la el movimiento es en el eje x y x' (longitudinal) solo tendremos en cuenta la transformación sobre estas (x, t) y (x', t') . Como el movimiento es horizontal la transformación en principio debe ser lineal:

$$x' = Ax + Bt \quad ; \quad t' = Cx + Dt \quad (1.20)$$

Donde los coeficientes A, B, C y D son funciones de v y c . Como el origen del sistema Σ esta en reposo respecto a este sistema, satisface por tanto la condición $x = 0$, de tal manera que 1.20 queda:

$$x' = Bt \quad ; \quad t' = Dt \quad (1.21)$$

Derivando 1.21 respecto a t' tenemos:

$$-v = \frac{B}{D} \quad (1.22)$$

Es negativo ya que es la velocidad con la que Σ' ve alejarse a Σ . De igual manera el origen de Σ' esta en reposo respecto a si mismo, $x' = 0$, asi:

$$Ax + Bt = 0 \quad (1.23)$$

Derivando 1.23 respecto a t :

$$Av + B = 0 \quad (1.24)$$

Comparando 1.22 y 1.24 se nota que $A = D$ y que $B = -vA$. De esta manera se tiene que 1.20 queda:

$$x' = A(x - vt) \quad ; \quad t' = A \left(\frac{C}{A} + t \right) \quad (1.25)$$

Para determinar A y C suponga el caso cuando $t = t' = 0$ (cuando los orígenes de ambos marcos de referencia satisfacen que $x = x' = 0$) se emite una señal de luz desde el origen que se expande como una esfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1.26)$$

El radio r de la señal de luz esférica sera ct . Así:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (1.27)$$

Para el marco Σ' la señal también se expande en forma de esfera a velocidad c , como lo menciona el segundo postulado. Por lo que también tendrá la misma forma.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (1.28)$$

Organizando 1.27 y 1.28:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (1.29)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (1.30)$$

Igualando 1.29 y 1.30:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (1.31)$$

Dado que $y = y'$ y $z = z'$:

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$$

Multiplicando por (-1) :

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \quad (1.32)$$

Sustituyendo 1.32 en 1.25, encontramos el valor de los coeficientes.

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad C = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Con esto llegamos a que las ecuaciones 1.20 quedan:

$$t' = \frac{t + (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad (1.33)$$

Las ecuaciones 1.33 son las transformaciones de Lorentz, las mismas que ya mencionamos anteriormente para el problema de la electrodinámica. Es importante mencionar nuevamente que las transformaciones de Lorentz no invalidan las transformaciones de Galileo, ya que las de Galileo son validas cuando $v \ll c$ (por ello la mecánica clásica es valida para casos cotidianos) y las de Lorentz cuando $v \approx c$, el caso de los fotones y en algunos casos las partículas subatómicas. Estas transformaciones se pueden simplificar renombrando $\gamma = 1/(1 - (v/c)^2)$, llamado el factor de Lorentz, quedando así:

$$t' = \gamma(t + (v^2/c^2)x) \quad ; \quad x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad (1.34)$$

También es común nombrar $\beta = v/c$, que hace referencia a la velocidad relativa respecto a la luz (Janssen, 2005).

1.3.1. Consecuencias de las Transformaciones de Lorentz

Ahora, analizando el tiempo de un evento que sucede en un marco de referencia Σ en reposo y un marco de referencia Σ' en movimiento con respecto al primero.

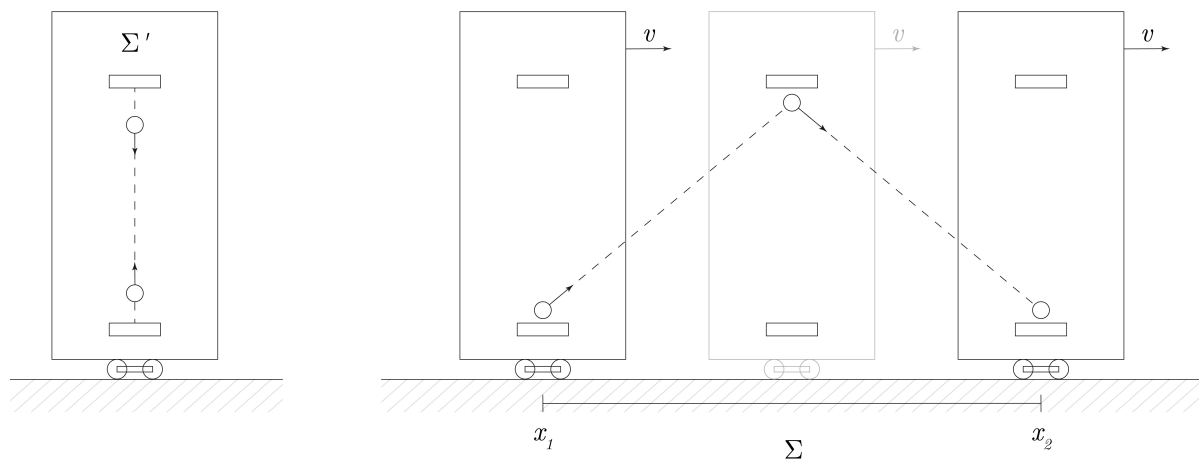


Figura 1.16: Trayectorias (Elaboración Propia).

Suponga un tren en el cual una pelota rebota entre dos paredes como se muestra en la figura 1.16, a la izquierda se ve la trayectoria que hace la pelota desde el marco de referencia Σ' (en movimiento), y a la izquierda la trayectoria que hace la pelota vista desde el marco Σ (en reposo). Analizando la situación en Σ' , se tiene que el evento ocurre en el mismo punto del “espacio” (perteneciente a Σ') debido a que según este no hay

movimiento en el eje x' , por tanto $x'_1 = x'_2$, y el tiempo que tarda estará dado por:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (1.35)$$

Para el caso de Σ el punto de partida de la pelota (x_1) es diferente al punto de llegada (x_2), de tal manera que el tiempo ($\Delta t = t_2 - t_1$) que dura la pelota en hacer el recorrido queda expresado según las transformaciones de Lorentz:

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v/c^2)x'_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ; \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v/c^2)x'_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$\Delta t = \frac{t'_2 + (v/c^2)x'_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - \frac{t'_1 + (v/c^2)x'_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} [t'_2 + (v/c^2)x'_2 - t'_1 - (v/c^2)x'_1]$$

como $x'_1 = x'_2$, tenemos:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} [t'_2 - t'_1] \quad (1.36)$$

Remplazando 1.35 en 1.36:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (1.37)$$

Se evidencia que $\Delta t' < \Delta t$, osea que cada observador tiene su propio tiempo en el espacio, a este hecho se le llama dilatación temporal. Es de resaltar que el tiempo, bajo este análisis, pierde su condición de absoluto, lo que también lleva atrae la conclusión de que este no existe. Todo esto para el caso de cuando $v \approx c$. Al tiempo $\Delta t'$ se le denomina tiempo propio, y al tiempo Δt tiempo impropio (Tipler, 1986).

Conviene destacar que, en este contexto, no solo el tiempo resulta alterado, sino que las longitudes también se ven afectadas, lo cual tiene implicaciones fundamentales en la comprensión del fenómeno. Finalmente se medirá el anden que se muestra en la figura 1.16. Según Σ' la distancia medida desde de este es $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, de tal manera que:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad ; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$\Delta x' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} [x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1]$$

Como las medidas se toman al mismo tiempo ($t_1 = t_2$):

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} [x_2 - x_1]$$

Como $x_2 - x_1$ es la medida del anden Δx desde el marco Σ , por tanto:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (1.38)$$

De igual manera que con el tiempo, los observadores miden longitudes diferentes, ya que en la ecuación 1.38 $\Delta x' > \Delta x$. A este efecto se le denomina contracción de longitud o de Lorentz. A la longitud $\Delta x'$ se le denomina longitud propia (L_0) y a Δx longitud impropia (L) (Tipler, 1986), así:

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad (1.39)$$

Capítulo 2

Elementos de Topología y Espinores

En este capítulo están los fundamentos matemáticos que construyen un marco formal y riguroso para el análisis espinorial de las transformaciones de Lorentz. El desarrollo de estos conceptos no es al arbitrario; el formalismo espinorial requiere de estructuras del álgebra lineal, la teoría de grupos, la topología y el álgebra de Clifford, sin las cuales su análisis no sería posible, además de evitar captar la riqueza geométrica que aportan los espinores al estudio de la relatividad especial.

Presentar estos elementos desde un enfoque visual y accesible permite no solo hacer un análisis matemático preciso, sino también enriquecer el tratamiento pedagógico del tema. Por esta razón, en este capítulo se incluirán ejemplos concretos y representaciones geométricas que ayudarán a visualizar las estructuras involucradas. Así, el lector no especializado en matemáticas avanzadas podrá seguir el desarrollo posterior.

2.1. Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales son funciones, con su respectivo dominio y codominio, los cuales en este caso particular son espacios vectoriales. Dicho de otra manera las transformaciones lineales cogen un vector que vive en un espacio y mediante un medio de transporte (función) lleva dicho vector a otro espacio, conservando ciertas propiedades¹ esenciales.

Con el espacio vectorial V y W se tiene una regla que transforma vectores de V a vectores en W .

$$T(v) = Av = w \tag{2.1}$$

$T(v)$ es la función que transforma el vector v de \mathbb{R}^3 mediante la matriz A de 3×3 en w .

¹Ver Anexo B

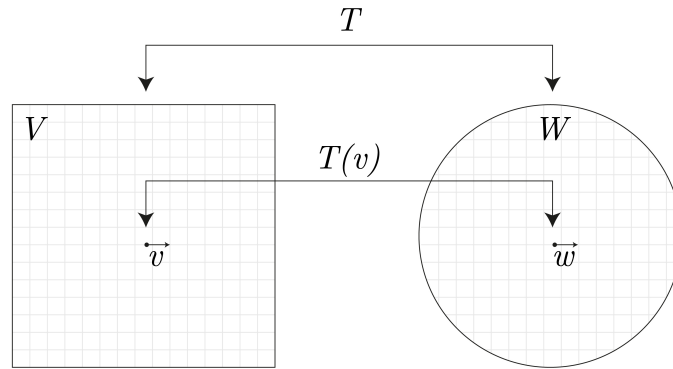


Figura 2.1: Transformación Lineal (Elaboración Propia).

Pero no todas las transformaciones que lleven vectores de un espacio V a W son transformaciones lineales, ya que deben cumplir las siguientes condiciones:

$T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si:

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \quad (2.2)$$

$$T(k \cdot v) = k \cdot T(v) \quad \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

La ecuación 2.2 habla sobre dos vectores u y v que viven en un espacio V pueden ser transportados a W como la suma de $u + v$ en la transformación o como la suma de las transformaciones de cada vector. Por otro lado la ecuación 2.3 plantea que si un vector es alargado k veces es lo mismo que alargar toda la transformación k veces (recuerde que k es un escalar) (Grossman, 1996). En la figura (2.2) se ejemplifica como se ven estas condiciones necesarias.

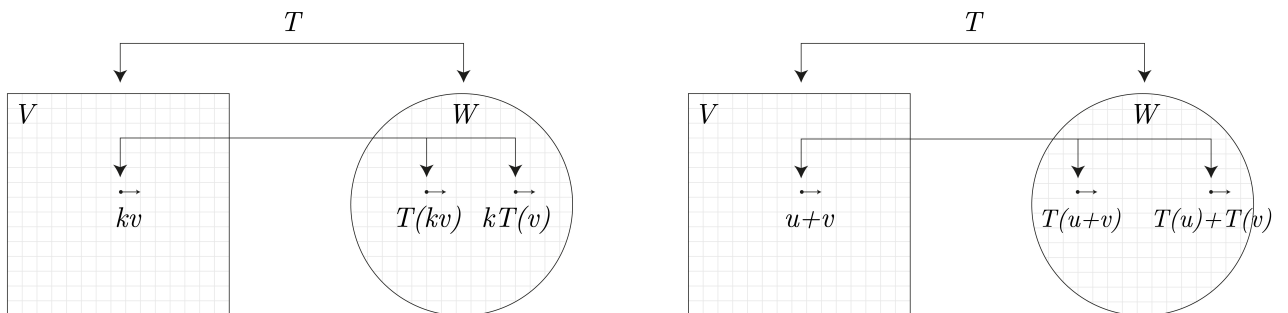


Figura 2.2: Condiciones de una Transformación Lineal (Elaboración Propia).

2.1.1. Rotaciones y Traslaciones

Las rotaciones y traslaciones son ejemplos de transformaciones lineales.

La traslación simplemente desplaza los puntos en una dirección sin cambiar su orientación, forma o tamaño. En otras palabras una traslación mueve puntos u objetos cierta distancia en cierta dirección, sin alterar en absoluto alguna propiedad física del objeto.

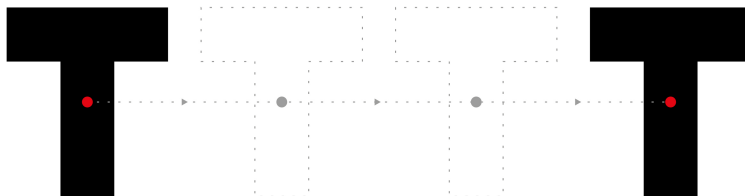


Figura 2.3: Traslación (Elaboración Propia).

Las traslaciones pueden representarse con matrices, para el caso de una traslación en 3 dimensiones (\mathbb{R}^3) su matriz asociada es de la forma:

$$T_{\text{traslación}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde t_x y t_y son las cantidades de desplazamiento en las direcciones x e y . Es una matriz 4×4 ya que se usan coordenadas homogéneas². La multiplicación de esta matriz por un vector P (donde se encuentra el punto u objeto) en coordenadas homogéneas da el resultado final de la traslación (Grossman, 1996).

$$T(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A modo de ejemplo considere un cubo en el espacio tridimensional con un vértice en el punto $P(4, 5, 9)$ y los otros vértices definidos en relación a este punto. Se quiere trasladar el cubo 4 unidades en la dirección del eje x , 2 unidades en la dirección del eje y y 5 unidades en la dirección

²Coordenadas alternativas para trabajar en el espacio euclídeo.

del eje z . De tal manera que la traslación queda definida por la matriz $T = (t_x, t_y, t_z, 1) = (4, 2, 5, 1)$. Así:

$$T(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se ha trasladado el cubo con vértice en el punto $P(4, 5, 9)$ al punto $P(8, 7, 14)$.

Por otra parte, como ya se mencionó, la rotación también es un ejemplo de transformación lineal. Una rotación es un movimiento dado en un espacio definido que conserva al menos un punto en su posición inicial (Figura 2.4) y sus dimensiones.

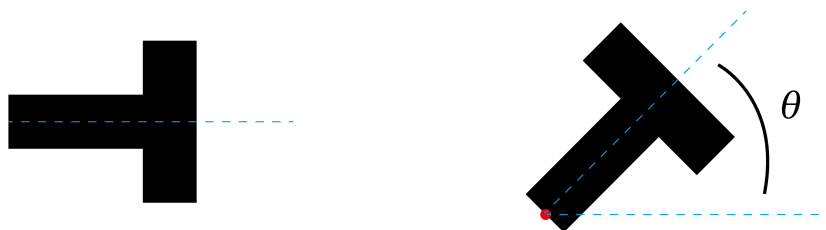


Figura 2.4: Rotación (Elaboración Propia).

Las rotaciones, al igual que las traslaciones, también se pueden representar mediante matrices, en el caso de una rotación en 2 dimensiones (\mathbb{R}^2):

$$R_{\text{rotación}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Es una matriz 2×2 , donde θ es el ángulo de rotación. Una rotación en 3 dimensiones (\mathbb{R}^3) al rededor del eje z :

$$R_{z\text{-rotación}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Es una matriz 3×3 . Recuerde que bajo rotaciones en (\mathbb{R}^3) los vectores preservan la norma y el producto punto, lo que la hace una matriz ortogonal y además con determinante $+1$. Si se quiere rotar un vector v , multiplicamos esta matriz R por v :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos(\theta) - v_y \sin(\theta) \\ v_x \sin(\theta) + v_y \cos(\theta) \\ v_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para ejemplificar, suponga el vector $v = (3, 2, 4)$, el cual se quiere rotar $45^\circ = \pi/4$. Para ello aplique la matriz de rotación:

$$R(\pi/4) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos(\pi/4) - 2 \sin(\pi/4) \\ 3 \sin(\pi/4) + 2 \cos(\pi/4) \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$R(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 5\sqrt{2}/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Como se evidencia, el vector $v = (3, 2, 4)$ fue rotado a $v = (\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}/2, 4)$.

En 1908 Hermann Minkowsky introduce una interpretación geométrica de las transformaciones de Lorentz Λ (1.34) como rotaciones hiperbólicas espacio-temporales, coordenadas 4-dimensionales (3 coordenadas espaciales y 1 temporal, $(\mathbb{R}^{3,1})$). Esto, en la conferencia del 21 de septiembre de 1908 titulada “*Raum und Zeit*” (espacio y tiempo) ante la Sociedad de Científicos Naturales Alemanes y Médicos en Colonia, Alemania (Minkowski, 1990).

Así como una rotación cambia la orientación espacial de un objeto sin alterar sus dimensiones, una transformación de Lorentz cambia las coordenadas espacio-temporales sin alterar la “*distancia*” en el espacio-tiempo, conocida como el intervalo de espacio-tiempo, que se mantiene invariante. Las transformaciones de Lorentz pueden representarse de manera matricial.

$$x_i = \Lambda x'_i \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $x_0 = ct$. Como ya se evidenció γ es el factor de Lorentz y β es la velocidad relativa. Si se analiza solamente los ejes x y t , se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\gamma & \gamma \\ \gamma & \beta\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

y además de ello, gracias a Minkowski se sabe que $\gamma = \cosh(\theta)$ y $\beta\gamma = \sinh(\theta)$, donde θ está relacionado con la velocidad del marco en movimiento, la matriz (2.9) queda:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \\ \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Si se comparan las ecuaciones (2.5, 2.6 y 2.10) se evidencia algo de similitud entre las matrices, por lo que se tiene el primer indicio de que las transformaciones de Lorentz son rotaciones. Para demostrarlo, se definen unas transformaciones, pero primero se harán explícitas las transformaciones en x_1 y x_0 :

$$x_0 = x'_1 \sinh(\theta) + x'_0 \cosh(\theta) \quad (2.11)$$

$$x_1 = x'_1 \cosh(\theta) - x'_0 \sinh(\theta) \quad (2.12)$$

Ahora, sea la transformación:

$$x_0 \rightarrow ct \quad \text{Tiempo Luz}$$

$$x_0 \rightarrow ict \quad \text{Tiempo Luz Imaginario}$$

Multiplicamos x_0 y x'_0 por la unidad imaginaria i en las ecuaciones 2.12 y 2.11:

$$x_0 i = x'_1 \sinh(\theta) + x'_0 i \cosh(\theta)$$

$$x_1 = x'_1 \cosh(\theta) + x'_0 i \sinh(\theta)$$

De las identidades trigonométricas hiperbólicas se tiene que: $i \sinh(\theta) = \sin(i\phi)$ y $\cosh(\theta) = \cos(i\phi)$, aplicando esto queda:

$$x_0 i = x'_1 \sinh(\theta) + x'_0 i \cosh(\theta) \quad (2.13)$$

$$x_1 = x'_1 \cos(i\phi) + x'_0 \sin(i\phi)$$

Multiplicando la ecuación 2.13 completa por i , para finalmente tener:

$$x_0 = -x'_1 \sin(i\phi) + x'_0 \cos(i\phi)$$

$$x_1 = x'_1 \cos(i\phi) + x'_0 \sin(i\phi)$$

Reorganizando términos:

$$\begin{aligned}x_0 &= x'_0 \cos(i\phi) + x'_1 \sin(i\phi) \\x_1 &= x'_0 \sin(i\phi) + x'_1 \cos(i\phi)\end{aligned}$$

En el formalismo matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(i\phi) & \cos(i\phi) \\ \cos(i\phi) & -\sin(i\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Comparando la ecuación 2.14 con la ecuación 2.5 y 2.6 se evidencia que son iguales, por lo que se puede decir oficialmente que las transformaciones de Lorentz son rotaciones en el espacio-tiempo de Minkowski (4-dimensional) (Tatum, 2021). En pocas palabras la transformaciones de Lorentz son rotaciones con un ángulo imaginario.

2.2. Definición de Grupo

La teoría de grupos es un área de estudio fundamental en las matemáticas, ya que estudia las estructuras algebraicas denominadas grupos. Se desarrolló en un proceso extenso que tomo más de dos siglos a manos de varios matemáticos quienes investigaban problemas en la teoría de números, la geometría, la teoría de ecuaciones, etc. El surgimiento del estudio de la teoría de grupos esta altamente relacionado con la resolución de ecuaciones algebraicas, puntualmente, a las ecuaciones polinómicas de grado mayor a cuatro. Cerca del siglo XVIII, aun era un enorme problema determinar métodos generales para solucionar ecuaciones de quinto grado y superior.

Un primer desarrollo pudo darse a manos de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), quien, en su obra de 1771, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Lagrange, 1771), introdujo lo que ahora se conoce como teoría de permutaciones en su intento de estudiar las soluciones de las ecuaciones algebraicas. Lagrange descubrió que las raíces de las ecuaciones polinómicas podían ser permutadas y que ciertas propiedades de estas permutaciones estaban relacionadas con la posibilidad de resolver la ecuación por radicales (Gray, 2018). Aunque Lagrange no desarrolló una teoría formal de grupos, su trabajo sentó las bases para los desarrollos posteriores.

A principios del siglo XIX, el matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822) fue el primero en abordar directamente el problema de la insolubilidad de las ecuaciones de quinto grado. En 1799, Ruffini publicó un trabajo

en el que argumentaba que las ecuaciones de quinto grado no podían resolverse por radicales, a menos que ciertas permutaciones de las raíces tuvieran una estructura particular. Aunque su prueba no fue completamente rigurosa, fue un paso importante hacia la comprensión de la estructura de las soluciones de las ecuaciones polinómicas en términos de permutaciones.

El desarrollo definitivo de la teoría de grupos como un área autónoma de las matemáticas se debe al genio de Évariste Galois (1811-1832). En 1832, con tan solo 20 años, presentó una teoría que explicaba por qué no se podían resolver por radicales las ecuaciones polinómicas de grado mayor a cuatro. Introdujo el concepto de lo que hoy se conoce como grupo de Galois, una estructura algebraica que describe cómo las raíces de una ecuación polinómica pueden permutarse entre sí sin cambiar la estructura algebraica de la ecuación (Tignol, 2001). Galois demostró que la posibilidad de resolver una ecuación por radicales dependía de la estructura del grupo de Galois asociado a la ecuación. Si este grupo tenía una estructura particular “soluble”, entonces la ecuación podía resolverse por radicales; si no, la ecuación no era soluble de esa forma. Aunque su trabajo no fue completamente reconocido durante su vida, fue fundamental para el desarrollo posterior de la teoría de grupos.

Después de Galois, la teoría de grupos continuó desarrollándose, en parte gracias al trabajo de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Fue uno de los primeros en sistematizar el estudio de las permutaciones y los grupos. Publicó varios trabajos en los que estudió las propiedades de los grupos de permutaciones, introdujo el concepto de conjugación en grupos, y probó teoremas fundamentales sobre la estructura de los grupos, como el teorema de Cauchy, que establece condiciones bajo las cuales un grupo tiene un subgrupo de un orden particular.

El matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) fue otro de los pioneros en la teoría de grupos, y su trabajo consolidó y amplió las ideas de Galois y Cauchy. En su “*Monumental Obra Traité des Substitutions et des Équations Algébriques*” de 1870 (Jordan, 1870), Jordan sistematizó la teoría de los grupos de permutaciones y aplicó estas ideas a la teoría de las ecuaciones algebraicas. La “forma de Jordan”, un concepto que hoy es fundamental en álgebra lineal, también lleva su nombre, aunque está relacionada más con matrices que con grupos.

Paralelamente al desarrollo de la teoría de grupos en el contexto del álgebra, los grupos también comenzaron a jugar un papel fundamental en geometría, gracias al trabajo de Felix Klein (1849-1925) y su Erlanger Programm (1872), que propuso estudiar la geometría como el estudio

de las propiedades de los objetos que son invariantes bajo un grupo de transformaciones. Este enfoque geométrico tuvo una gran influencia en el desarrollo posterior de la teoría de grupos, particularmente en el contexto de la geometría diferencial y la teoría de Lie.

Un grupo (G, \otimes) es un conjunto G no vacío en el cual está definida una operación binaria interna \otimes . En otras palabras un grupo es una colección de objetos y una operación que permita relacionar dicha colección. Para que G y \otimes formen un grupo, se deben cumplir los siguientes axiomas:

1. **Clausura o Cerradura:** \otimes es una operación interna, es decir, toma dos elementos de G y devuelve otro elemento de G . Formalmente $\otimes : G \rightarrow G$.
2. **Asociatividad:** Dado 3 elementos $\{a, b, c\} \in G$ con una operación \otimes cualquiera, se debe cumplir que $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.
3. **Elemento Neutro:** En G debe existir un elemento (único) neutro e , de tal manera que dado $\{a, b\} \in G : a \cdot e = a ; e \cdot a = a$.
4. **Elemento Inverso:** En G debe existir un elemento inverso a^{-1} , de tal manera que dado $\{a, b\} \in G : a \cdot a^{-1} = e ; a^{-1} \cdot a = e$.

Para ilustrar el concepto de grupo, considere un cuadrado y las posibles simetrías que preservan su forma. Estas simetrías incluyen las rotaciones del cuadrado, que forman un grupo conocido como el grupo de rotación de un cuadrado, o grupo diédrico D_4 (grupo de simetría de un polígono regular).

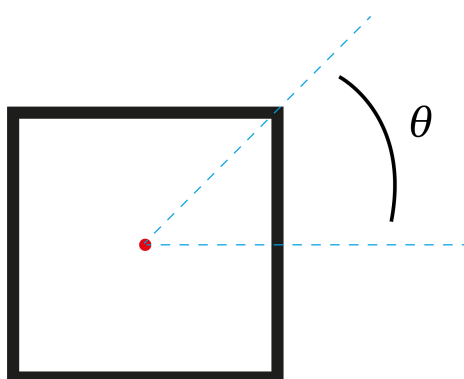


Figura 2.5: Rotación Cuadrado (Elaboración Propia).

Un cuadrado puede rotarse en torno a su centro (Ver figura 2.5) para los valores de θ igual a 0° , 90° , 180° y 270° . Estos son los cuatro elementos del

conjunto G de rotaciones del cuadrado que mantienen su forma. Si se nombra: $r_0 = 0^\circ$, $r_1 = 90^\circ$, $r_2 = 180^\circ$ y $r_3 = 270^\circ$ se puede definir una operación de composición (\otimes), que en este caso es simplemente “hacer una rotación después de otra”. Esta operación es cerrada, porque cualquier composición de dos rotaciones todavía es una rotación del cuadrado. También es asociativa, tiene un elemento identidad (r_0), y cada rotación tiene un inverso: por ejemplo, la rotación de r_1 tiene como inversa a la rotación r_3 ya que:

$$90^\circ + 270^\circ = 360^\circ \equiv 0^\circ$$

Esta estructura de las rotaciones es un grupo finito, ya que tiene un número finito de elementos (cuatro rotaciones) y satisface como ya se evidenció, las cuatro propiedades necesarias para ser un grupo.

Con la definición, surgen diferentes tipos de grupos, particularmente es de interés los grupos discretos y continuos, pero para ello se usarán algunas definiciones.

Topología: Se define a la topología como el estudio de las propiedades de los espacios que son invariantes bajo transformaciones continuas, como lo puede ser el estiramiento, la deformación, la contracción o torsión pero no cambios como una rasgadura. En otras palabras, la topología es matemática cualitativa, que estudia las características de los objetos que se mantiene constantes al sufrir cambios en su forma o tamaño. El ejemplo más conocido en topología es el de la tasa y el toro (anillo o donut). Estos objetos pueden considerarse como equivalentes debido a que uno es una deformación continua de el otro (Ver figura 2.6), sin romperse o generar aberturas adicionales. Ambos tienen una propiedad topológica en común, ambos tienen un solo agujero. A simple vista esta equivalencia no parece evidente en términos tradicionales de la geometría que se conoce pero es fundamental en topología para analizar las deformaciones continuas y así poder considerar ciertos objetos como equivalentes (Munkres, 2000).

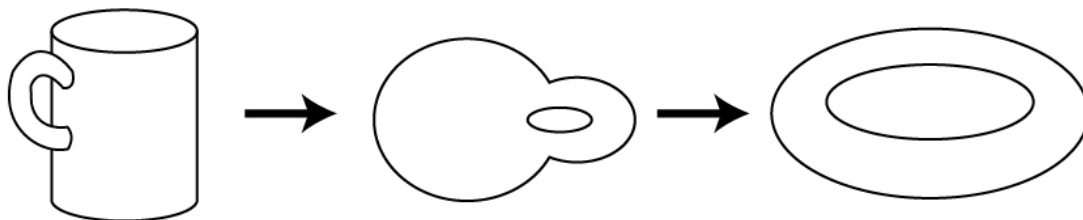


Figura 2.6: Tasa transformándose en un donut (Elaboración Propia).

Formalmente: Sea G un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de G se dice que es una topología sobre G si:

- I. G y el conjunto vacío \emptyset , pertenecen a τ .
- II. La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en τ pertenece a τ .
- III. La intersección de dos conjuntos cualesquiera de τ pertenece a τ .

Por ejemplo, considere el conjunto $G = \{a, b, c\}$. Una topología sobre G podría definirse como: $\{\{\emptyset\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.

La topología se basa en la noción de “Espacio Topológico” un conjunto de puntos que poseen una estructura denominada “Topología” la cual especifica los subconjuntos “abiertos”. Los espacios topológicos se definen mediante axiomas que a su vez permiten analizar y estudiar conceptos de convergencia, la compacidad y la continuidad. El par (G, τ) se le denomina **Espacio Topológico**.

A modo de ejemplo considere las siguientes topologías:

Topología Discreta: La topología discreta de un conjunto G es la topología dada por el conjunto potencia $P(x) = 2^x$ de G . Esto significa que cada subconjunto de G es abierto.

Tome $G = \{a, b, c\}$. Su topología discreta (T) estará determinada de la siguiente manera:

$$T = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Donde cada subconjunto, como $\{a, b\}$ o $\{a, c\}$ es abierto. Esto la convierte a la topología discreta en la más “fina”, ya que garantiza la máxima la cantidad de conjuntos abiertos permitidos.

Topología Indiscreta: La topología indiscreta de un conjunto G no vacío, esta dada por $T = \{\emptyset, G\}$, en otras palabras solo se consideran abiertos el conjunto vacío \emptyset y el conjunto mismo G .

Considere un conjunto $G = \{a, b, c\}$, por ende la topología (T) sobre este sera: $T = \{\emptyset, a, b, c\}$

Sobre un conjunto G la cantidad de topologías se encuentra entre la discreta y la indiscreta ([Munkres, 2000](#)).

Grupo Topológico: Es una terna (G, τ, \otimes) que cumple los siguientes axiomas:

- I. (G, τ) es un espacio topológico.
- II. (G, \otimes) forman un grupo (no siempre abeliano).
- III. La función $G \times G \rightarrow G$ es continua.

IV. La función $G \rightarrow G$ es continua.

Grupo Discreto

Los grupos discretos son una clase de grupos que se distinguen por tener una estructura topológica en la que cada punto forma un conjunto abierto, lo que significa que los elementos del grupo están “separados” entre sí en términos topológicos.

En términos generales, un grupo G es un conjunto dotado de una operación binaria (generalmente denotada como multiplicación o suma) que satisface las cuatro propiedades básicas de un grupo, además de tener una estructura topológica donde cada subconjunto de un solo elemento es un conjunto abierto. Esto implica que la topología en G es la topología discreta, en la que todos los subconjuntos de G son abiertos. Como consecuencia, no hay acumulación entre los elementos; es decir, cualquier sucesión que converge en G debe ser constante a partir de algún término en adelante.

Uno de los ejemplos más básicos de un grupo discreto es el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} bajo la operación de suma.

1. Operación de grupo: La operación en \mathbb{Z} es la suma de enteros, donde para cualesquiera dos enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ la operación está dada por $m + n$.
2. Elemento neutro: El elemento neutro en \mathbb{Z} es el número 0, ya que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $n + 0 = n$.
3. Elemento inverso: El inverso de un número $n \in \mathbb{Z}$ es $-n$ dado que $n + (-n) = 0$.
4. Topología: Si \mathbb{Z} se dota de la topología discreta, entonces cada conjunto que contiene un solo número entero $\{n\}$ es abierto.

En este contexto, \mathbb{Z} es un grupo discreto, ya que cualquier función que defina la operación de suma en \mathbb{Z} es continua, y no hay puntos “cercaños” en términos topológicos. En la figura (2.7) se muestra un punto (p, q) y se evidencia como no hay puntos “cercaños” a él en sus proximidades.

Grupo Continuo

Los grupos continuos, también conocidos como grupos de Lie, son una clase de grupos que también son variedades topológicas³. Estos grupos combinan las propiedades algebraicas de un grupo con las propiedades geométricas y topológicas de una variedad, lo que los convierte en una herramienta fundamental en muchas áreas de la matemática y la física.

³Ver sección 2.5

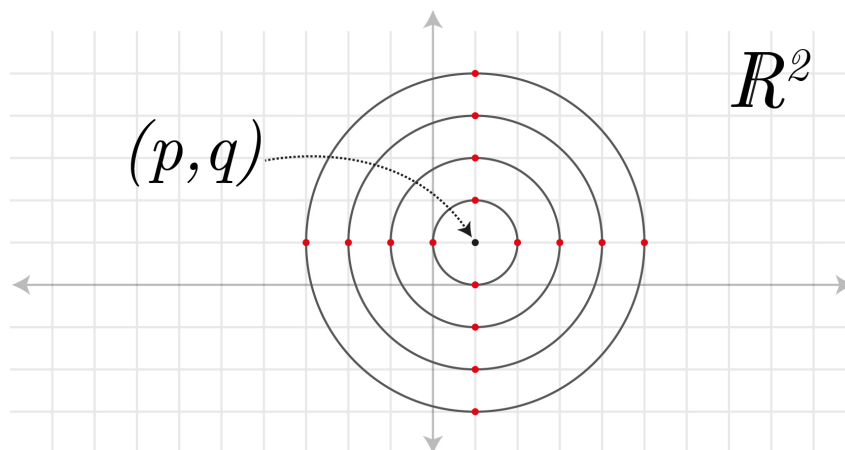


Figura 2.7: NO hay puntos “cercaños” (Elaboración Propia).

Formalmente, un grupo continuo es un grupo G que es también una variedad topológica, y para el cual las operaciones de grupo (multiplicación y la operación inversa) son funciones continuas. Esto significa que:

- I. La multiplicación $\mu: G \times G \rightarrow G$, dada por $\mu(g, h) = gh$ es continua con respecto a la topología de G
- II. La inversión $\iota: G \rightarrow G$, dada por $\iota(g) = g^{-1}$, es continua.

Aquí, una variedad topológica es un espacio que localmente se parece al espacio euclidiano \mathbb{R}^n (es decir, para cada punto del grupo, existe un entorno que es homeomorfo⁴ a \mathbb{R}^n para algún n). La continuidad de las operaciones garantiza que las estructuras algebraicas y topológicas del grupo se integren de manera coherente (Munkres, 2000).

2.3. Grupo de Rotaciones $SO(3)$

Este grupo es un clásico ejemplo de grupos continuos, además de ser de gran interés para el estudio del grupo de Lorentz. Se define el grupo $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) como un grupo continuo y ortogonal de las rotaciones tridimensionales. Este grupo está compuesto por el conjunto de matrices 3×3 ortogonales⁵ con determinante igual a 1. Físicamente, $SO(3)$ representa todas las rotaciones que se pueden dar en el espacio tridimensional. Además, es un grupo triparamétrico, lo que significa que toda rotación puede ser representada por un vector $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en \mathbb{R}^3 paralelo

⁴Es una función continua y biyectiva entre dos espacios topológicos, cuya inversa también es continua; en términos sencillos, es una transformación que conserva la estructura topológica, es decir, la “forma” esencial del espacio.

⁵Una matriz es ortogonal si posee inversa y esta es igual a su traspuesta.

al eje de rotación y con una magnitud igual al ángulo de rotación, siguiendo la regla de la mano derecha. La estructura del grupo esta dada por la composición de giros, osea que estas son transformaciones lineales ya que sientos estrictos el grupo $SO(3)$ es un subgrupo del grupo lineal general (del que se tomará más adelante), el cual esta conformado por todas las transformaciones lineales invertibles ([Gilmore, 2013](#)). Este grupo cumple:

1. Operación de grupo: En $SO(3)$ la operación de grupo es la composición de rotaciones. Cada elemento del grupo puede representarse como una matriz 3×3 ortogonal con determinante igual a 1. Si $A, B \in SO(3)$, su producto es simplemente la multiplicación matricial AB .
2. Elemento neutro: El elemento neutro es la matriz identidad I , que corresponde a la rotación nula (es decir, no hacer ninguna rotación).
3. Elemento inverso: El inverso de una rotación es su rotación opuesta, que también está en $SO(3)$.
4. Topología: La topología en $SO(3)$ es heredada de la topología estándar en el espacio de matrices 3×3 . Específicamente, $SO(3)$ es una variedad topológica tridimensional compacta sin borde⁶.

Las matrices en $SO(3)$ son un subconjunto de las matrices que pueden representar transformaciones lineales. Específicamente, $SO(3)$ representa las transformaciones lineales que son rotaciones puras en el espacio tridimensional, es decir, preservan la longitud de los vectores y el ángulo entre ellos, manteniendo así la estructura geométrica del espacio. Pero también, el grupo $SO(3)$ esta relacionado con las transformaciones afín, las cuales son transformaciones lineales más un vector b en \mathbb{R}^3 el cual representa una traslación.

$$T(v) = Av + b = w$$

Cuando A es una matriz en $SO(3)$, la transformación afín $T(v) = Av + b$ describe una rotación seguida de una traslación. Esta es una transformación rígida o isométrica en $SO(3)$, lo que significa que la distancia entre puntos se preserva. Las transformaciones rígidas son un subconjunto de las transformaciones afines en las cuales la parte lineal es una rotación.

⁶Una variedad topológica sin borde es aquella en la que cada punto tiene un entorno que se parece localmente al espacio euclidiano completo, sin “orillas” ni “límites”.

2.4. Grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ y Otros

Son el conjunto de todas las transformaciones lineales que preservan la métrica de Minkowski⁷ en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones definido por la métrica de la ecuación 2.15. Este grupo incluye transformaciones como rotaciones espaciales y cambios en el sistema de referencia que preservan la velocidad de la luz y la estructura del espacio-tiempo en la relatividad especial. Estas transformaciones pueden ser clasificadas en propias o impropias y ortocronas ($SO^+(1, 3)$) o no-ortocronas, dependiendo de si preservan o invierten la orientación temporal y espacial (Jillana, 2024). Matemáticamente, una transformación Λ pertenece a $SO(1, 3)$ si satisface:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

donde Λ es una matriz 4×4 , Λ^T es la transpuesta de Λ y η la métrica de Minkowski anteriormente mencionada. Esta métrica define la estructura del espacio-tiempo, con una coordenada temporal y tres coordenadas espaciales.

El grupo $SO(1, 3)$ puede descomponerse en varios subgrupos importantes. Entre los más destacados se encuentran:

- **Rotaciones Espaciales $SO(3)$:** Detalladas anteriormente, son un subgrupo que describe las rotaciones en las tres dimensiones espaciales. Estas transformaciones preservan la distancia en el espacio tridimensional.
- **Boosts de Lorentz:** Transformaciones que describen cómo las coordenadas espaciales y temporales se mezclan cuando se pasa de un sistema de referencia inercial a otro que se mueve a una velocidad constante con respecto al primero.
- **Reflexiones Temporales y Espaciales:** Aunque $SO(1, 3)$ describe solo las transformaciones que preservan la orientación del espacio-tiempo (determinante igual a 1), el grupo completo $O(1, 3)$ también incluye reflexiones temporales y espaciales, grupo de Poincaré el cual será precisado aquí.

Es importante resaltar que este grupo es un subgrupo del grupo general lineal, que se verá más adelante.

⁷A diferencia de $SO(3)$, que representa rotaciones en el espacio euclídeo tridimensional, el grupo $SO(1, 3)$ conserva la métrica de Minkowski.

Grupo de Poincaré \mathcal{P}

El grupo de Poincaré o grupo inhomogéneo (\mathcal{P}), extiende el grupo de Lorentz al incluir también las traslaciones en el espacio y el tiempo. Además de las transformaciones de Lorentz, el grupo de Poincaré también abarca las simetrías de traslación que preservan la estructura del espacio-tiempo de Minkowski. Esto lo convierte en el grupo de simetría completo de la relatividad especial, abarcando todas las posibles transformaciones que dejan inalteradas las leyes de la física en este marco. Matemáticamente se expresa como el producto semidirecto⁸ (\rtimes) del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ más el grupo de traslaciones $\mathbb{R}^{1,3}$.

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes SO(1, 3)$$

La variedad espacio-temporal de Minkowski es el escenario geométrico donde operan los grupos de Lorentz y Poincaré. El grupo de Lorentz describe las simetrías locales que preservan la estructura interna de la métrica de Minkowski, mientras que el grupo de Poincaré generaliza esto a un grupo de simetrías más amplio que incluye también las traslaciones ([Jillana, 2024](#)). Juntos, estos grupos definen las simetrías fundamentales del espacio-tiempo en la relatividad especial, lo que permite la formulación de las leyes físicas de manera coherente en cualquier marco de referencia inercial, lo cual se planteará más adelante en el formalismo espinorial.

Grupo General Lineal $GL(n, F)$

El grupo general lineal, denotado como $GL(n, F)$, es el grupo de todas las matrices invertibles de $n \times n$ sobre un campo F (que puede ser los números reales, complejos, etc.). Las matrices en este grupo representan transformaciones lineales que preservan la estructura vectorial del espacio. Formalmente se define como:

$$GL(n, F) = \{A \in M(n, F) | \det(A) \neq 0\}$$

donde $M(n, F)$ es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ con entradas en F . Además de esto el grupo $GL(n, F)$ cumple con las condiciones de grupo (Cerradura, Identidad e Inverso mencionadas anteriormente en la definición de grupo) más la condición de un grupo no abeliano, la No Conmutatividad: es decir, $AB \neq BA$ en la mayoría de los casos.

⁸Grupo que extiende otro dos grupos bajo ciertas proposiciones adicionales.

El grupo $GL(n, F)$ tiene una estructura rica que puede ser analizada a través de sus subgrupos y representaciones. Por ejemplo, el grupo especial lineal $SL(n, F)$ es un subgrupo de $GL(n, F)$ que consiste en matrices con determinante 1:

$$SL(n, F) = \{A \in GL(n, F) | \det(A) = 1\}$$

Las matrices en $GL(n, F)$ representan transformaciones lineales que pueden ser aplicadas a vectores en un espacio vectorial de dimensión n además se utilizan para describir cambios de coordenadas y estructuras de variedades diferenciables. Por ejemplo, si consideramos una variedad diferenciable, las transformaciones de cambio de coordenadas pueden ser descritas utilizando matrices del grupo $GL(n)$. Esto permite estudiar las propiedades de las variedades mediante herramientas algebraicas, como el cálculo de la topología y la geometría diferencial.

El Grupo Ortogonal $O(n, F)$

El grupo ortogonal $O(n, F)$ juega un papel crucial en la preservación de la geometría del espacio a través de transformaciones lineales que mantienen el producto interno de los vectores. se define formalmente como:

$$O(n, F) = \{A \in GL(n, F) | A^T A = I_n\}$$

donde A^T es la matriz transpuesta de A e I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Esto significa que las matrices en $O(n, F)$ son aquellas que, al ser multiplicadas por su transpuesta, producen la matriz identidad. El grupo ortogonal se relaciona directamente con la geometría de espacios euclidianos. Las matrices ortogonales representan rotaciones y reflexiones en el espacio, lo que significa que preservan distancias y ángulos. Esto es fundamental en aplicaciones que requieren conservar la estructura geométrica.

Grupos de Lie Completos

Los grupos de Lie son estructuras matemáticas fundamentales que combinan las propiedades de los grupos algebraicos con las variedades diferenciables. Un grupo de Lie es un grupo que también tiene la estructura de una variedad diferenciable. Esta combinación permite utilizar las herramientas del cálculo diferencial para estudiar propiedades de los grupos, lo cual es especialmente útil en física teórica, geometría y análisis.

Formalmente, un grupo de Lie G es un conjunto con una operación de grupo (multiplicación) que es suave, es decir, que las operaciones de multiplicación y de inversión son funciones diferenciables cuando se consideran como funciones entre variedades. Los grupos de Lie pueden ser finitos o infinitos, y se clasifican según sus dimensiones y otras propiedades topológicas y algebraicas. Algunos ejemplos de ellos son: el $GL(n, \mathbb{R})$, el $SL(n, \mathbb{R})$ y del que se tomará más adelante el $SO(n)$.

Los grupos de Lie completos son una subclase particular de grupos de Lie que tienen propiedades adicionales relacionadas con la completitud de sus espacios de Lie, lo que permite un tratamiento más robusto de ciertas operaciones y resultados matemáticos. En términos generales, un grupo de Lie se dice que es completo si para cada campo vectorial invariante a la derecha en G , el flujo global de ese campo existe para todos los tiempos. Esta condición garantiza que ciertas soluciones a ecuaciones diferenciales (asociadas a campos vectoriales en el grupo de Lie) puedan extenderse indefinidamente en el tiempo (Gilmore, 2013).

Por ejemplo, considere el grupo $SO(3)$ que describe las rotaciones en el espacio tridimensional. Este grupo es completo, lo que significa que cualquier rotación puede realizarse de manera continua sin restricciones de tiempo. Esto es esencial en la física para modelar sistemas dinámicos que evolucionan continuamente en el tiempo.

Propiedades de los Grupos de Lie Completos

Los grupos de Lie completos tienen varias propiedades interesantes que los hacen útiles tanto en teoría como en aplicaciones prácticas:

1. **Conectividad y Completitud:** Todos los grupos de Lie conexos y compactos son completos. Esto es importante porque muchos grupos de simetría en física (como $SO(n)$ o $SU(n)$) son compactos y, por lo tanto, completos.
2. **Exponencial de Lie:** La función exponencial en un grupo de Lie completo mapea toda el álgebra de Lie (el espacio tangente en la identidad) en el grupo de Lie, y lo hace de manera global. Esto permite una relación directa entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie mismo, facilitando el estudio de la estructura del grupo.
3. **Relación con las Geodésicas⁹:** En geometría, la completitud de

⁹Trayectoria más corta entre dos puntos en una superficie o espacio curvo, análoga a una línea recta en el espacio plano.

un grupo de Lie está relacionada con la completitud geodésica de la métrica de Killing en el grupo. Esto significa que las geodésicas, pueden extenderse indefinidamente sin dejar el grupo.

Grupo $O(n)$

El grupo $O(n)$ (Ortogonal Group) es un ejemplo de un grupo de Lie, que contiene todas las matrices ortogonales $n \times n$ que preservan el producto escalar en un espacio vectorial n -dimensional. Una matriz A pertenece a $O(n)$ si cumple la condición:

$$A^T A = I$$

donde A^T es la matriz transpuesta de A , e I es la matriz identidad de dimensión n . Las matrices ortogonales tienen la propiedad de que preservan las longitudes de los vectores y los ángulos entre ellos, lo que significa que describen transformaciones como rotaciones y reflexiones en un espacio euclidiano. En la relatividad especial, el análogo del grupo $O(n)$ es el grupo de Lorentz, que se denota como $O(3, 1)$ o $SO(3, 1)$.

Grupo $SO(n)$

El grupo $SO(n)$ (Special Orthogonal Group) es otro ejemplo de grupos de Lie completos. Presenta una estructura matemática fundamental que describe las rotaciones en un espacio de n dimensiones. En el contexto de la física, y más específicamente en la teoría de la relatividad especial, $SO(n)$ juega un papel crucial al permitir la descripción precisa de las simetrías y las transformaciones que preservan ciertas propiedades geométricas y físicas, como lo son los ya mencionados grupos $SO(3)$ y $SO(1, 3)$, anteriormente mencionado.

En definición, el grupo $SO(n)$ es el grupo de todas las matrices ortogonales $n \times n$ con determinante $+1$. Estas matrices describen rotaciones en un espacio euclidiano de n dimensiones. Formalmente:

- Una matriz A pertenece a $SO(n)$ si A es ortogonal, es decir, si $A^T A = I$, donde A^T es la matriz transpuesta de A e I es la matriz identidad.
- Además, el determinante de A debe ser $+1$

Este grupo es un subgrupo del grupo ortogonal general $O(n)$. Mientras $O(n)$ incluye reflexiones y rotaciones, $SO(n)$ solo incluye rotaciones que preservan la orientación.

El grupo $SO(n)$ tiene varias propiedades importantes que lo hacen relevante tanto en matemáticas como en física:

1. **Conectividad:** $SO(n)$ es un grupo conexo para cualquier $n \geq 2$. Esto significa que cualquier rotación en $SO(n)$ puede transformarse en otra rotación mediante un camino continuo dentro del grupo.
2. **Dimensionalidad:** El grupo $SO(n)$ tiene dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Por ejemplo, $SO(2)$ tiene dimensión 1 (ya que solo hay un ángulo de rotación en dos dimensiones), mientras que $SO(3)$ tiene dimensión 3, lo que corresponde a las tres coordenadas angulares (ejes de rotación) en el espacio tridimensional.
3. **Álgebra de Lie:** Asociada al grupo $SO(n)$ está su álgebra de Lie, denotada por $\mathfrak{so}(n)$, que consiste en todas las matrices antisimétricas $n \times n$. El álgebra de Lie proporciona una descripción local del grupo y es esencial para estudiar sus propiedades infinitesimales y su relación con ecuaciones diferenciales.

Álgebra de Lie

La estructura algebraica que describe las propiedades infinitesimales de un grupo de Lie se conoce como álgebra de Lie. Un grupo de Lie muestra simetrías continuas a gran escala, mientras que el álgebra de Lie muestra simetrías a nivel infinitesimal. Esto explica cómo las transformaciones se comportan cerca de la identidad del grupo.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial sobre un campo (usualmente los números reales o complejos) dotado de un producto bilineal llamado conmutador o corchete de Lie, denotado como $[X, Y]$, que satisface las siguientes propiedades:

1. **Bilinealidad:** $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ para a, b en el campo subyacente.
2. **Antisimetría:** $[X, Y] = -[Y, X]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. **Identidad de Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Los elementos del álgebra de Lie se pueden pensar como generadores de las transformaciones infinitesimales del grupo de Lie asociado ([Gilmore](#),

2013). Si un grupo de Lie tiene una matriz de representación G dependiente de un parámetro continuo, el álgebra de Lie se obtiene derivando G con respecto a ese parámetro en la identidad:

$$X = \left. \frac{dG(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

Donde X es un elemento del álgebra de Lie y θ es el parámetro.

Álgebra de Lie del Grupo $SO(1, 3)$

El grupo $SO(1, 3)$ es un grupo de Lie, lo que significa que sus elementos pueden ser parametrizados de manera continua y se puede definir una estructura algebraica subyacente conocida como álgebra de Lie. El álgebra de Lie asociada a $SO(1, 3)$ está generada por seis generadores, tres correspondientes a rotaciones (J_i) en el espacio tridimensional en el plano (xy , yz y zx) y tres a boosts de Lorentz (K_i) que son transformaciones que mezclan el tiempo y el espacio en una dirección específica. Estas relaciones de conmutación entre los generadores son:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

donde i es la unidad imaginaria, ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita e i, j, k son índices especiales (Arfken y cols., 2011). Para ejemplificar considere los generadores de rotación J_1 y de boost K_1 :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí, J_1 corresponde a una rotación alrededor del eje x en el plano yz , y K_1 corresponde a un boost en la dirección x .

Las relaciones de conmutación entre los generadores son fundamentales en el álgebra de Lie. Estas relaciones definen la estructura algebraica del álgebra de Lie de $SO(1, 3)$. Para los generadores J_i y K_i , las relaciones de conmutación pueden interpretarse como sigue:

- **Conmutación de Rotaciones:** En otras palabras lo que esta relación $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ muestra es que la composición de dos rotaciones infinitesimales es totalmente equivalente a una tercera rotación infinitesimal. Esto es coherente con la intuición clásica de que las rotaciones en diferentes planos pueden combinarse en una rotación.
- **Conmutación entre Rotaciones y Boosts:** La relación $[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$ dice cómo las rotaciones afectan a los boosts. Una rotación seguida de un boost en una dirección diferente es equivalente a un boost en una dirección nueva.
- **Conmutación de Boosts:** La relación $[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$ implica que la composición de dos boosts en diferentes direcciones es equivalente a una rotación. Esto refleja cómo las velocidades relativas y los cambios en la dirección del movimiento pueden generar efectos de rotación en relatividad especial.

Las transformaciones de Lorentz, que forman el grupo $SO(1, 3)$, pueden expresarse como exponentes de los generadores de su álgebra de Lie. Para una pequeña transformación parametrizada por un valor pequeño ϵ , la transformación puede escribirse como:

$$\Lambda(\epsilon) = e^{\epsilon X}$$

donde X es un generador del álgebra de Lie (ya sea un J_i o un K_i). Para pequeñas ϵ , esta expresión se puede aproximar como:

$$\Lambda(\epsilon) \approx I + \epsilon X$$

Esta expresión describe cómo se aplican las transformaciones de Lorentz de manera infinitesimal, lo que es útil para estudiar perturbaciones pequeñas en sistemas físicos.

2.5. Variedad Espacio-Tiempo (Minkowski)

Con la interpretación geométrica del espacio y tiempo de Minkowsky en 1908, llega también una nueva visión matemática del espacio-tiempo como una variedad, un tipo especial de espacio topológico que, de manera local, se asemeja al espacio euclidiano. Esto significa que, aunque la estructura global de una variedad puede ser compleja y curvada, localmente no lo es (Misner y cols., 1973). Formalmente una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico M que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. **Localmente Euclidiana:** Para cada punto $p \in M$, existe un entorno $U \subset M$ tal que U es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Esto significa que, cerca de cualquier punto, la variedad se comporta como el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .
2. **Numerabilidad:** M satisface la segunda condición de numerabilidad, lo que significa que tiene una base numerable para su topología. Esto es importante para garantizar que el espacio no sea “demasiado grande” en términos de la estructura topológica.
3. **Hausdorff:** M es un espacio Hausdorff, lo que significa que para cualquier par de puntos distintos en M , existen entornos disjuntos alrededor de cada punto. Esto asegura que los puntos sean separables en términos topológicos.

Un buen ejemplo podrían ser los grupos de Lie, específicamente podríamos citar el \mathbb{R}^n , o de nuevo el grupo $SO(3)$, los cuales son un tipo especial de grupo que a su vez es una variedad diferenciable, lo que significa que la estructura del grupo y la estructura de la variedad están intrínsecamente ligadas. En un grupo de Lie, las operaciones de grupo (multiplicación y tomar el inverso) son funciones suaves, es decir, son diferenciables.

Una variedad espacio-temporal de Minkowski es una variedad cuatridimensional que combina las tres dimensiones espaciales con una dimensión temporal en un solo marco unificado. En este espacio-tiempo, los eventos se describen mediante coordenadas que indican tanto su posición en el espacio como su ubicación en temporal. Sus características son:

1. **Dimensionalidad:** La variedad de Minkowski es de cuatro dimensiones, con tres dimensiones espaciales (usualmente denotadas como x, y, z) y una dimensión temporal (denotada como t).
2. **Métrica:** La clave del espacio-tiempo de Minkowski es su métrica, representada por el elemento de línea (ds^2), que difiere de la métrica euclidiana en que el tiempo tiene un signo diferente. La métrica de Minkowski se escribe como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.15)$$

donde ds es el intervalo espacio-temporal, c es la velocidad de la luz, dt es el diferencial de tiempo, y dx, dy, dz son los diferenciales de las coordenadas espaciales. Alternativamente, se puede expresar en el formalismo tensorial como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.16)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, que tiene la forma $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ en coordenadas cartesianas.

3. **Causalidad:** En este espacio-tiempo, las relaciones causales entre eventos (es decir, qué eventos pueden influir en otros) están determinadas por el cono de luz, una estructura geométrica que separa los eventos accesibles o influenciados entre sí a la velocidad de la luz de aquellos que no lo son.

2.6. Breve Recuento Histórico Sobre Los Espinores

El espinor está relacionado con un concepto de la mecánica cuántica, particularmente en una propiedad física de las partículas elementales llamada el *espín*. Esta propiedad es similar al momento angular intrínseco, pero no puede ser visualizada de manera clásica, ya que es una propiedad cuántica. Una forma interesante de imaginar el espín, la da Stephen Hawking (1942-2018): piense en las partículas como si fueran peonzas o trompos girando sobre un eje bien definido (es importante precisar que esto es un ejemplo pedagógico y que NO representa fielmente la realidad de las partículas, ya que estas NO poseen un eje bien definido).

Lo que el espín de una partícula representa, es como se ve la partícula desde distintas direcciones. Si una partícula posee espín 0, esto lo podríamos imaginar como un punto, ya que se ve igual desde cualquier dirección. Ahora imagine una partícula con espín 1, esta podría asemejarse a una flecha, ya que parece diferente desde distintas direcciones, y solo si se gira 360° parecerá la misma. Una partícula de espín 2 se puede asimilar como una flecha con dos cabezas, la cual necesitaría media vuelta, o sea 180° , para verse igual, como se evidencia en la figura 2.8. Hasta el momento se ve simple el asunto, pero lo cierto es que existen partículas para las cuales no es suficiente una vuelta (360°), estas requieren de dos vueltas completas para que se vean iguales. Estas partículas poseen espín de $1/2$ (Hawking, 1988). Como se evidencia el espín es una propiedad que relaciona las rotaciones, tema que es de interés para estudiar en relatividad especial. El primer experimento en el cual se mostró el espín se da en el siglo XX, por los físicos Otto Stern (1888-1969) y Walther Gerlach (1889-1979), con su famoso experimento de Stern-Gerlach en 1922, donde se sometía un haz de átomos de plata (colimados) a un campo magnético generado por un

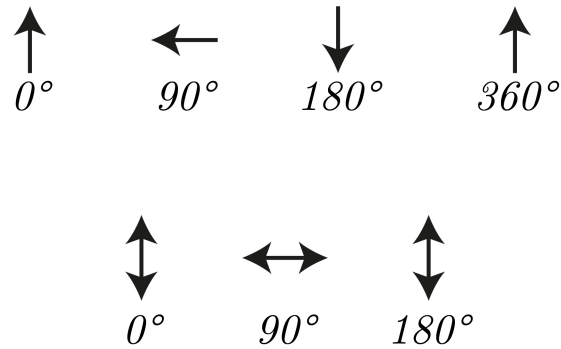


Figura 2.8: Rotaciones de Flechas (Elaboración Propia).

imán, con el fin de determinar la componente del momento magnético en la dirección del gradiente del campo. Dicho experimento fue replicado y corroborado en 1927 por Phips y Taylor con átomos de hidrógeno en su estado base (Spinel, 2009). Es importante precisar que el espín es una propiedad física de las partículas y el espinor es un elemento matemático que surge en conjunto con el concepto físico.

Los espinores surgen en 1913 de la mano de Élie Cartan (1869-1951), y fueron nombrados por Paul Ehrenfest (1880-1933) en sus trabajos sobre el espín (Tomonaga, 1998). Cartan investigaba las representaciones lineales de grupos simples y como estas proporcionan una representación lineal del grupo de rotaciones ($GL(n, F)$) en un espacio n dimensional (Élie Cartan, 1984). En su libro publicado de manera póstuma, titulado “*Theory Of Spinors*” de 1984 desarrolla un “tratado” en el cual pretende explicar a detalle que es un espinor de manera geométrica, ya que según el, la poca bibliografía del momento no era tan precisa y clara al tratar el concepto, más bien eran demasiado formales y poco intuitivas.

Las primeras aplicaciones se dieron en física de partículas, primero con el trabajo de 1927 de Wolfgang Pauli (1900-1958) en sus matrices de espín y luego con la ecuación de Dirac en 1928 (esta es una ecuación de onda relativista que describe las amplitudes de probabilidad para un electrón solo), en la cual surgen los espinores de Dirac o biespinores, los cuales están relacionados con el grupo de Lorentz ($SO(1, 3)$). Dicha ecuación requirió con el tiempo diversas reformulaciones por diversos autores, en las cuales surgieron más y diferentes definiciones del espinor. Por mencionar algunos están los espinores de Van Der Weerden (1903-1996) desarrollados en 1929, y los de Hermann Weyl (1885-1955). Es desde 1928 a 1933 que físicos como Vladímir Aleksándrovich Fock (1898-1974), el ya mencionado Hermann Weyl y Erwin Schrödinger (1887-1961) descubrieron que la ecua-

ción de onda para el electrón de Dirac se podía formular en términos de la relatividad general (Castillo, 1986).

2.7. Definición de Espinor Por Élie Cartan

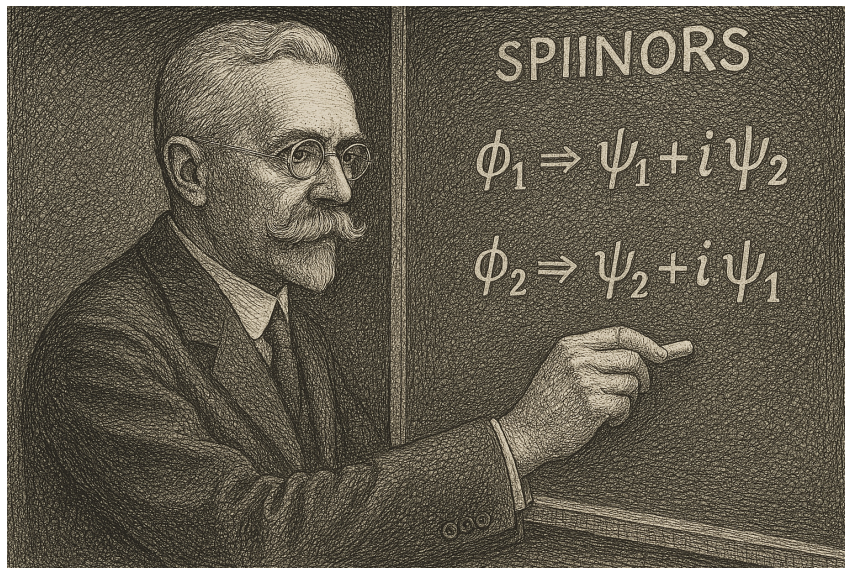


Figura 2.9: Élie Joseph Cartan (OpenAI, 2025e).

En esta subsección se trabajará el texto ya mencionado de Élie Cartan titulado “*Theory Of Spinors*” de 1984, para definir el espinor y analizar algunas temáticas.

Planteado un espacio tridimensional E_3 con un sistema de coordenadas ortogonales, donde se da un vector isotrópico¹⁰ (x_1, x_2, x_3) con longitud igual a cero.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (2.17)$$

Es de resaltar que la ecuación (2.17) es una forma cuadrática¹¹, y que según el álgebra lineal, estas se pueden trabajar como formas bilieales. De la misma forma, esta se puede reescribir como la suma de una forma bilineal simétrica más una forma bilineal antisimétrica. Además, se sabe que con el método de Lagrange con el cual se puede reducir una forma cuadrática a una suma de cuadrados o como se le conoce comúnmente “completar el cuadrado”, se encuentran las componentes ξ_0 y ξ_1 del vector isotrópico.

¹⁰Un vector isotrópico es aquel de normal igual a cero. Esto implica que es un vector complejo.

¹¹Forma cuadrática o forma bilineal simétrica: Aplicación que asigna a cada elemento de x de un espacio vectorial, un elemento del cuerpo sobre el que está construido el espacio vectorial. Un ejemplo de ello pueden ser los elementos de línea (ds).

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_0^2 - \xi_1^2 \\x_2 &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2) \\x_3 &= -2\xi_0\xi_1\end{aligned}$$

Hallando ξ_0 y ξ_1 , se tiene que:

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}} \quad (2.18)$$

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}} \quad (2.19)$$

Es importante notar que NO es posible dar una elección precisa en los signos para un vector isotrópico, lo que hará que la solución varíe continuamente con el vector. A modo de ejemplo considere una rotación de ξ_0 alrededor de $0x_3$ sobre el eje x_3 mediante un ángulo α . Teniendo en cuenta que $x_1 - ix_2$ habla de la orientación del vector, se multiplica por $e^{-i\alpha}$ y por continuidad ξ_0 se multiplica por $e^{-i\alpha/2}$. Note que para el caso de $\alpha = 2\pi = 360^\circ$, el vector isotrópico habrá de volver a su posición inicial, pero como ξ_0 es multiplicado por $e^{-i2\pi/2} = e^{-i\pi}$ que por identidad de Euler $e^{-i\pi} = -1$ su valor tiene signo opuesto al inicial. Haciendo un breve análisis entre vectores y espinores, se puede decir que en comparación a los vectores, los espinores al ser rotados una vuelta (2π) presentan un signo opuesto al inicial. Estas ecuaciones (2.18 y 2.19) serían las componentes que forman a los espinores, y con todo ello se puede decir que de alguna forma los espinores son vectores isotrópicos con una “dirección” o “polarización”, que en el caso de un ángulo de 2π el vector isotrópico queda “polarizado” (Élie Cartan, 1984). Ahora surge una pregunta ¿Cuántas vueltas debe dar el espinor para que vuelva a su posición inicial con su “polarización” inicial? Pues tome el caso de dos vueltas enteras, o sea 4π . Reemplazando en el ángulo se tiene que $e^{-i4\pi/2} = e^{-2i\pi}$, que sería $e^{-2i\pi} = 1$, como se evidencia, en efecto, el espinor apunta en la misma “polarización” que al principio, en otras palabras el espinor necesita dos vueltas enteras para poder quedar igual que al principio, una visualización didáctica de visualizar esta idea se ve en la cinta de Möbius como se evidencia en la figura 2.10.

Por otra parte, es interesante ver como los espinores pueden ser comparados, no solo con los vectores, sino también con los tensores.

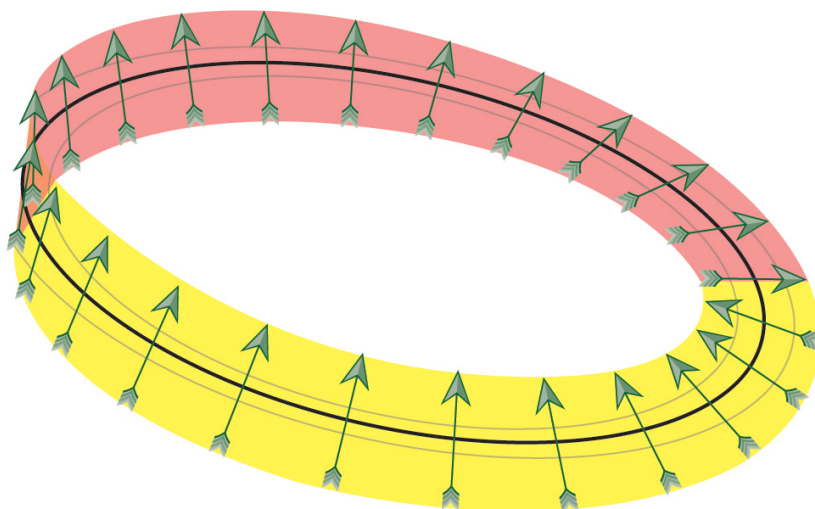


Figura 2.10: Cinta de Möbius (Elaboración Propia).

2.7.1. Espinor y Tensor Euclidiano

Para poder generar una comparación se debe primero definir lo que Cartan en su texto llama Tensor Euclidiano, para así poder analizar la frase “*un espinor es un tensor euclidiano*”. Dado un tensor asociado a un grupo de rotaciones G , definido por una representación lineal, con componentes $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$, donde r es el número de componentes que constituyen el objeto, se produce un efecto que hace que las componentes $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ coincidan con el objeto $(u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_r)$, cuyas componentes u'_i se deducen de u_i por la transformación dada (rotación o reflexión). Se pueden restringir la familia de objetos (u) bajo ciertas condiciones algebraicas para que las componentes de la representación lineal tengan una interpretación concreta.

- I. Las componentes de $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ de la familia de objetos restringidas no satisfacen ninguna relación lineal con coeficientes constantes.
- II. Las relaciones algebraicas que determinan la familia restringida deben permanecer invariantes bajo transformaciones de la representación lineal.

(Élie Cartan, 1984)

A esta familia de objetos se le denomina **Tensor Euclidiano**, asociada a un punto cero. Dos tensores euclidianos serán equivalentes si ambos vienen de una misma representación lineal del grupo de rotaciones. Recuerde que las componentes de un tensor transforman linealmente bajo

las transformaciones ortogonales (osea rotaciones y reflexiones) del espacio euclidiano. Ahora bien, considere una rotación o reversión tridimensional definida bajo la regla de transformación:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\x'_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 \\x'_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3\end{aligned}$$

Donde $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ son los cosenos directores¹² de cada una de las tres direcciones ortogonales, garantizando que se preserve la distancia y los ángulos. Luego, se tienen un espinor (ξ_0, ξ_1) que guarda la información del vector isotrópico (x_1, x_2, x_3) y su espinor asociado a la transformación inversa (ξ'_0, ξ'_1) , el cual está relacionado mediante ecuaciones cuadráticas:

$$\xi'^2_0 = \frac{1}{2}[(\alpha - i\alpha')x_1 + (\beta - i\beta')x_2 + (\gamma - i\gamma')x_3] \quad (2.20)$$

Esta expresión se puede reescribir¹³ como una combinación cuadrática de ξ_0, ξ_1 :

$$\xi'^2_0 = \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_0^2 - (\gamma - i\gamma')\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(-\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_1^2$$

Con este cuadrado perfecto puede notar que ξ'_0, ξ'_1 son combinaciones lineales de ξ_0, ξ_1 .

Analice el caso de una rotación en el plano xy , con un ángulo de rotación θ alrededor del eje z (ver figura 2.11), para lo que se tiene los cosenos directores:

$$\begin{cases} \alpha = \cos \theta, & \beta = -\sin \theta, & \gamma = 0 \\ \alpha' = \sin \theta, & \beta' = -\cos \theta, & \gamma' = 0 \\ \alpha'' = 0, & \beta'' = 0, & \gamma'' = 1 \end{cases}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación del espinor (2.20):

$$\xi'^2_0 = \frac{1}{2}[(\cos \theta - i \sin \theta)x_1 + (-\sin \theta + i \cos \theta)x_2]$$

¹²Los cosenos directores son los coeficientes que representan proyecciones de sistemas coordenados ortogonales.

¹³Para ello se usa el discriminante $(b^2 - 4ac)$ y así se obtiene un cuadrado perfecto, haciendo que se cumpla la condición de isotropía.

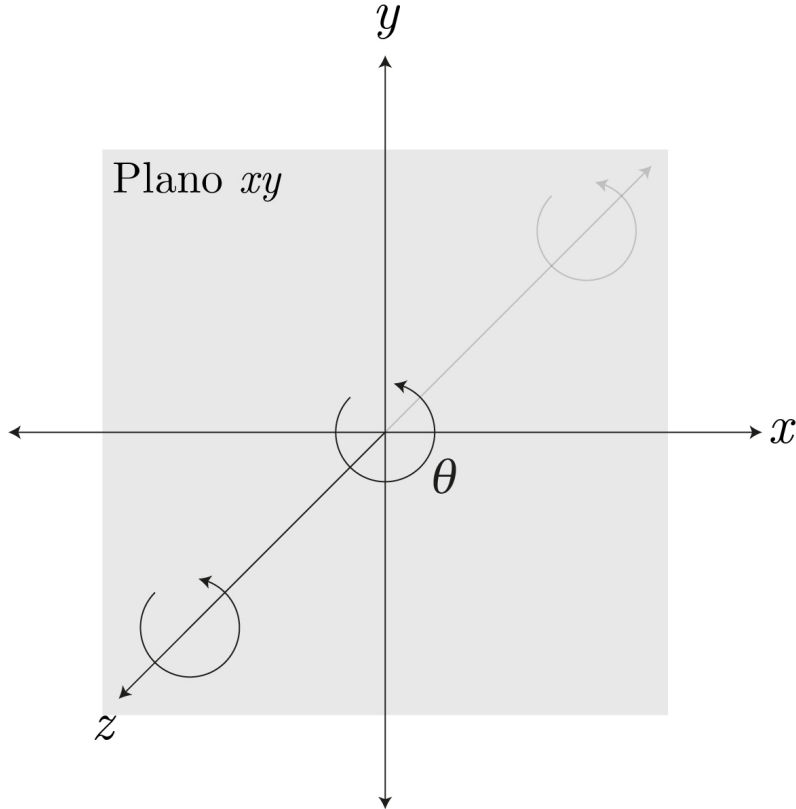


Figura 2.11: Rotación alrededor de z (Elaboración Propia).

$$\xi_0'^2 = \frac{1}{2}e^{-i\theta}(x_1 + ix_2) \quad \Rightarrow \quad \xi_0' = e^{-i\theta/2}\xi_0 \quad (2.21)$$

Analizando un poco la ecuación (2.21) es de resaltar que ξ_0' , ξ_1' transforman como una matriz de rotación compleja de espinores. Este ejemplo ayuda a asimilar un poco mejor el símil de los espinores con los tensores ya que en este caso se puede evidenciar la naturaleza tensorial de los espinores bajo transformaciones euclidianas.

Ahora, analice las matrices asociadas para las direcciones isotrópicas del vector asociado al espinor (ξ):

$$\begin{cases} \xi_0 x_3 + \xi_1(x_1 - ix_2) = 0 \\ \xi_0(x_1 + ix_2) - \xi_1 x_3 = 0 \end{cases}$$

Revisando a detalle los coeficientes de la matriz, es de notar que estos pueden ser importantes. Expresando la base en la que se encuentran las direcciones isotrópicas asociadas con el espinor (ξ):

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_3 \right) \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Aquí es donde se evidencia la importancia de estas bases, ya que como se evidencia son las matrices de Pauli¹⁴ (σ_i) con sus respectivas bases asociadas e_1, e_2 y e_3 .

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donde $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y$ y $\sigma_3 = \sigma_z$. De tal manera que:

$$(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3) \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 0$$

Por otra parte, hallando el determinante¹⁵ de la matriz de coeficientes, se tiene:

$$\det \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Nuevamente estamos rectificando la naturaleza de vector isotrópico.

Ya se ha definido los espinores en términos de un vector isotrópico y su relación con los tensores euclidianos, ahora para poder apreciar mejor las propiedades de los espinores se debe desarrollar su álgebra, pero para ello se debe conocer primero el álgebra de Clifford.

2.8. Álgebra de Clifford

Para entender mucho mejor de que va esta álgebra, primero se desarrollara su nacimiento. Para el año de 1806 el matemático Jean-Robert Argand (1768-1822) estudiaba formas geométricas de representar números complejos, para lo que asignaba el número complejo $(a + bi)$ con el par (a, b) en el plano cartesiano. Esto lo llevo a relacionar la multiplicación de números complejos con rotaciones¹⁶ en el plano \mathbb{R}^2 , así se tenía una forma algebraica de representar rotaciones en \mathbb{R}^2 (Moraga, 2019). De esto surge una pregunta ¿Se puede encontrar una forma algebraica para representar

¹⁴Las matrices de Pauli son representaciones matriciales de las componentes del operador de espín (\hat{S}_i) para partículas con espín 1/2, como lo puede ser el electrón (Spinel,2009).

¹⁵Esto mediante el álgebra de endomorfismo. Dado un espacio vectorial V sobre el cual se tiene un campo K , el conjunto de todas las transformaciones lineales de V se les llama álgebra de endomorfismo de V .

¹⁶Las rotaciones se pueden expresar como el conjunto de números complejos de norma 1.

rotaciones en \mathbb{R}^3 ? A dicho problema se le halló solución en 1844 bajo los trabajos de William Rowan Hamilton (1805-1865), donde implementó un espacio vectorial parecido al de los complejos, con dimensión 3 sobre \mathbb{R} , solo que aquí, es imposible crear un producto cerrado, por lo que tuvo que pensar en un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{R} , que define el álgebra de los cuaterniones¹⁷. Con esta álgebra ya es posible expresar rotaciones en \mathbb{R}^3 mediante cuaterniones, para los cuales el producto entre ellos está definido por:

$$ab = \langle a, b \rangle + a \times b \quad (2.23)$$

Donde $\langle a, b \rangle$ es el producto punto o escalar en \mathbb{R}^3 y $a \times b$ es el producto cruz en \mathbb{R}^3 . Esta definición posee algunos límites ya que como se sabe el producto cruz está definido solo para \mathbb{R}^3 , pero para \mathbb{R}^4 no es útil, debido a que aquí existen infinitas formas de obtener un vector perpendicular entre dos vectores, además el producto cruz no es asociativo.

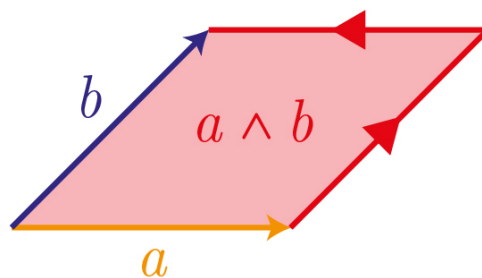


Figura 2.12: Producto Cuña (Elaboración Propia).

El mismo año en el que Hamilton descubrió los cuaterniones, Hermann Grassman (1809-1877) introduce el producto exterior (bivector) o producto “cuña”¹⁸ (\wedge) para obtener algunas propiedades de los planos sin hacer uso del concepto de perpendicularidad, como ejemplo práctico, puede dar cuenta del área¹⁹ de un paralelogramo formado por dos vectores (ver figura 2.12). Este trabajo fue ignorado por un tiempo, hasta que en 1876 William Clifford (1845-1879) combina las ideas de Hamilton y Grassman para estudiar el movimiento de cuerpos rígidos en espacio de dimensión arbitraria combinando la ecuación 2.23 con el producto cuña, teniendo como resultado el producto de Clifford o producto geométrico:

¹⁷Al igual que los complejos son una extensión de los reales, los cuaterniones también son una extensión de los reales que añade unidades imaginarias (i, j y k), tales que: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

¹⁸El producto cuña entre dos vectores es llamado bivector.

¹⁹Esta área tiene la particularidad de estar orientada, nótese que en la figura 2.12 se ve en rojo la orientación del área en contra de las manecillas del reloj.

$$ab = \langle a, b \rangle + a \wedge b \quad (2.24)$$

Clifford muere joven, impidiendo la difusión de su trabajo. Es para 1880 que Rudolph Lipschitz (1832-1903) usa el álgebra de Clifford para desarrollar los conceptos a nivel geométrico de las reflexiones y rotaciones. Por otra parte recuerde el trabajo ya mencionado de Cartan de 1913 donde también estudiaba las representaciones del grupo especial ortogonal $SO(n)$ (Ver sección 2.4), donde se da cuenta que para este grupo existen representaciones que no se pueden expresar en el formalismo tensorial, por lo que recurre a los espinores bajo la estructura del álgebra de Clifford que ya mismo se verá.

El álgebra de Clifford o álgebra geométrica (grupo $CL(3,0)$) es una extensión del álgebra lineal, que como estructura matemática incluye el producto geométrico (ecuación 2.24), y es capaz de unificar y generalizar los conceptos de vectores, productos escalares, cruzados y exteriores, codificando la información métrica (magnitudes) y la orientación en el plano, esto lo hace de la siguiente manera; Dada una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ las reglas a seguir son:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\eta_{ij} \quad (2.25)$$

Donde η_{ij} es la métrica que posee el espacio, ya sea euclidiana o de Minkowsky. Esta estructura da la posibilidad de unificar las rotaciones y reflexiones en una sola operación, y sin la necesidad de recurrir a las matrices. Es de resaltar que el producto geométrico es antisimétrico, o sea que:

$$ba = \langle a, b \rangle - a \wedge b \quad (2.26)$$

De esto se deduce que:

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(ab + ba) \quad (2.27)$$

y

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \quad (2.28)$$

Con ello, quedan definidos el producto punto o interno ($\langle a, b \rangle$) y el externo en términos del producto geométrico (Doran y Lasenby, 2003). Con esto queda definida el álgebra de Clifford.

2.9. Álgebra de Espinores

En principio recuerde las matrices Pauli, ya que estas son la forma matricial de los generadores del álgebra de Clifford, dicho de una manera más técnica son el cubrimiento universal del grupo ortogonal del espacio. Como es de interés para este trabajo analizar rotaciones, es de resaltar que las matrices de Pauli cumplen una relación de anticonmutatividad, vinculadas al álgebra de Clifford:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}I \quad \text{y} \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI$$

Recuerde que estas matrices están relacionadas con los espinores, por tanto los espinores son elementos del álgebra de Clifford, que de cierto modo están codificando las relaciones de anticonmutación de los vectores base. Con ello, se puede representar el grupo de rotaciones $SO(n)$ con matrices sobre espinores (como el caso anterior donde expresamos las direcciones isotópicas de un vector, ecuación 2.22), generalizando las matrices de Pauli para casos de dimensión superior (Élie Cartan, 1984).

2.9.1. Rotaciones

Los espinores aparecen en el álgebra de Clifford naturalmente para representar rotaciones, mediante rotors (R) sin usar matrices de 4×4 , que actúan sobre vectores (a) mediante transformaciones de tipo:

$$a' = Ra\tilde{R}$$

Esto permite hacer rotaciones en cual quier la dimensión que se desee y con cualquier métrica. Los espinores en este caso, mediante multiplicaciones están generando transformaciones del espacio vectorial.

Para el caso de las rotaciones en relatividad especial, estos rotors se pueden expresar como el producto de dos reflexiones²⁰. Si consideramos una rotación S con su par de reflexiones A y B o sea $S = AB$, los espinores transforman $\xi' = S\xi$. Una rotación de ángulo θ alrededor de \hat{n} (siendo L el vector unitario) se expresa según los parámetros de Euler-Olinde-Rodrigues:

$$S = \cos \frac{\theta}{2} \pm i\hat{n} \sin \frac{\theta}{2}$$

²⁰Sección 10 de Cartan, 1984.

Para el caso de AB es $+$ y para BA es $-$. Este también muestra que para el caso de una rotación de una vuelta $\theta = 2\pi$ se tiene signo opuesto, como vimos anteriormente.

2.9.2. Reflexiones

Ahora revise el caso de las reflexiones dadas en un hiperplano²¹ que pasa por el origen, de normal unitaria a que actúa sobre un espinor ξ de tal modo que:

$$\xi' = A\xi$$

Donde A es la matriz asociada a a . A modo de ejemplo tome $a = e_3$, así $A = \sigma_3$ asociada al eje z , lo que da como consecuencia que: $\xi'_0 = \xi_0$ y que $\xi'_1 = -\xi_1$.

2.9.3. Producto Entre Espinores

Según el trabajo de Cartan, el producto $(\xi_\alpha \xi'_\beta)$ de dos espinores ξ_α y ξ'_β no es una multiplicación directa, sino mas bien una operación que descifra la estructura geométrica, dando como resultado un tensor de orden superior. Estos generan cuatro componentes $(\xi_0 \xi'_0, \xi_0 \xi'_1, \xi_1 \xi'_0, \xi_1 \xi'_1)$ las cuales no son independientes bajo transformaciones del grupo de rotaciones (Castillo, 1992). Debido a ello, se descompone el producto en dos partes, simétrica (vector) y antisimétrica (trivector).

- **Simétrica (Vector):** Para es caso hay tres componentes $(\xi_0 \xi'_0, \xi_0 \xi'_1 + \xi_1 \xi'_0, \xi_1 \xi'_1)$ que transforman como un vector bajo rotaciones. Por ejemplo, si $\xi = \xi'$ estas se convierten en el vector isotrópico (ecuaciones 2.7, 2.7 y 2.7).
- **Antisimétrica (Trivector):** Aquí se tiene una componente $(\xi_0 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_0)$ que corresponde a un tensor de rango 3 antisimétrico que es invariante ante rotaciones, pero para el caso de una reflexión cambia de signo.

Para garantizar la invarianza, Cartan introduce la matriz C :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

²¹Plano que divide el espacio tridimensional en dos partes.

Cuyas propiedades (2.29) generan un vector asociado al par de espinores.

$$C^T = -C \quad \text{y} \quad C^2 = -I \quad (2.29)$$

Por otra parte, cuando se tienen dos espinores conjugados ($\bar{\xi}$) en un espacio real, euclidiano, este se encontrara definido por $iC\xi$. De tal manera que el producto $\bar{\xi}^T \xi$ da lugar a un escalar invariante ($\xi_0 \bar{\xi}_0 + \xi_1 \bar{\xi}_1$) y a un bivector invariante (tensor antisimétrico de orden 2).

Para generalizar el producto espinorial a n -dimensional, se hace uso del álgebra de Clifford. Los espinores son parte de un espacio de dimensión 2^n , por lo que su producto se descompone de las componentes a p -vectores antisimétricos de rango 2:

$$\xi \otimes \xi' = \sum_{p=0}^n A^p$$

Donde A^p es un tensor irreducible bajo el grupo $\mathbf{Spin}(n)$ ²².

Grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Este grupo es importante para relacionar los espinores con las transformaciones de Lorentz. El grupo especial lineal complejo de 2 dimensiones, son todas las matrices de 2×2 con entradas complejas y determinante igual a 1.

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det A = 1\}$$

Este es un grupo de Lie complejo de 6 dimensiones reales. También es un doble recubrimiento²³ del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$. Los espinores son parte de este grupo, y con esto se crea la matriz que ayudará a representar las transformaciones de Lorentz.

En resumen el espinor es un objeto matemático de dos componentes imaginarias (\mathbb{C}^2) que esta íntimamente relacionado con vectores isotrópicos mediante sus componentes y también guarda relación con los tensores, ademas de incorporar las matrices de Paulí. Es importante mencionar que los espinores transforman bajo el grupo de Lorentz restringido²⁴ $SO^+(1, 3)$, el cual es una proyección $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$, osea un homomorfismo²⁵,

²²Grupo Espinorial: Es un doble cubrimiento del grupo $SO(n)$.

²³Esto quiere decir que para cada transformación de Lorentz hay dos matrices asociadas del grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

²⁴Propias y ortócronas.

²⁵Función que preserva las operaciones de dichos objetos.

lo que explica por qué es necesaria una rotación de 4π para regresar un espinor a su estado inicial recuperando su simetría, además, ambos grupos tienen una topología suave, o sea indiscreta, con lo que forma estructuras continuas (grupos de Lie y variedades continuas). Por otro lado, los espinores forman un fibrado²⁶ sobre el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ en la cual su variedad está ligada localmente a la de Minkowski, la cual es un invariante topológico.

²⁶Es una función continua suryectiva de un espacio topológico E a otro espacio topológico B .

Capítulo 3

Transformaciones de Lorentz en el Formalismo Espinorial

Ahora, se propondrán las transformaciones de Lorentz (ecuación 1.34) en el formalismo espinorial¹. Para ello se usará la matriz de spín L y la matriz X que trae consigo codificada las coordenadas espacio-temporales² (t, x, y, z) , esta es similar a la matriz 2.22 solo que incluyendo ya la coordenada temporal. Una transformación de Lorentz se puede representar:

$$\begin{aligned} X' &\rightarrow X \\ X' &= LXL^* \end{aligned} \tag{3.1}$$

En este caso, L es una generalización de la matriz de rotación (finita o infinitesimal) perteneciente al grupo $SL(2, \mathbb{C})$, además es importante recordar que en el capítulo 2 se demostró como las transformaciones de Lorentz se pueden representar como una rotación con ángulo complejo (ecuación 2.14). Por tanto, la matriz X queda definida:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{bmatrix} \\ X &= t + (x \cdot \sigma_i) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Una transformación de Lorentz esta definida por el hecho de que el elemento de linea o métrica (ecuación 2.15) permanezca invariante, para que esto sea así, debe cumplirse que:

$$\det X = \det X'$$

¹Esto gracias a las formas irreducibles, ver anexo C.

²En unidades naturales $c = 1$.

Para que esto se cumpla, el determinante de L debe ser igual a 1 (Misner y cols., 1973). Con lo que se tiene:

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

3.1. Matriz de Spín L

Ahora definiendo la matriz L , a partir de boost³ ($d\alpha$) y rotaciones infinitesimales ($d\theta$) alrededor de un eje (\hat{n}) descritas por la matriz de spín:

$$L = 1 - \left(\frac{i}{2}\right) (\sigma_x d\theta_{yz} + \sigma_y d\theta_{zx} + \sigma_z d\theta_{xy}) + \left(\frac{1}{2}\right) (\sigma_x d\alpha_{yz} + \sigma_y d\alpha_{zx} + \sigma_z d\alpha_{xy})$$

Los términos relacionados con la rotación se agrupan en $d\theta(\sigma_i \cdot \hat{n})$ y los relacionados con los boost quedan en $(\sigma \cdot d\alpha)$, así:

$$L = 1 - \left(i\frac{d\theta}{2}\right) (\sigma_i \cdot \hat{n}) + \left(\sigma_i \cdot \frac{d\alpha}{2}\right) \quad (3.3)$$

Reemplazando 3.3 en 3.1:

$$X' = \left[1 - \left(i\frac{d\theta}{2}\right) (\sigma_i \cdot \hat{n}) + \left(\sigma_i \cdot \frac{d\alpha}{2}\right)\right] X \left[1 + \left(i\frac{d\theta}{2}\right) (\sigma_i \cdot \hat{n}) + \left(\sigma_i \cdot \frac{d\alpha}{2}\right)\right]$$

Incluyendo las matrices X que representa las coordenadas de un marco, y X' las del otro.

$$X' = \left[1 - \left(i\frac{d\theta}{2}\right) (\sigma_i \cdot \hat{n}) + \left(\sigma_i \cdot \frac{d\alpha}{2}\right)\right] [t + (x \cdot \sigma_i)] \dots \\ \dots \left[1 + \left(i\frac{d\theta}{2}\right) (\sigma_i \cdot \hat{n}) + \left(\sigma_i \cdot \frac{d\alpha}{2}\right)\right]$$

Aplicando el producto entre matrices de spín⁴, se puede reducir el lado derecho de la ecuación ya que se puede despreciar algunos términos de segundo orden por ser infinitesimales:

$$X = t + (x \cdot \sigma_i) + t(x \cdot d\alpha) + d\theta(\hat{n} \times x) \cdot \sigma_i + (x \cdot d\alpha)$$

Reemplazando la matriz X :

³Impulsos

⁴ $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = (a \cdot b) + i\sigma \cdot (a \times b)$

$$t' + (x' \cdot \sigma_i) = t + (x \cdot \sigma_i) + t(x \cdot d\alpha) + d\theta(\hat{n} \times x) \cdot \sigma_i + (x \cdot d\alpha)$$

Comparando los coeficientes de 1 y de las matrices de Pauli (σ_i), y despejando se tiene que:

$$t' = t + (x \cdot d\alpha) \quad (3.4)$$

$$x' = x + td\alpha + d\theta(\hat{n} \times x) \quad (3.5)$$

Estas ecuaciones coinciden con una transformación infinitesimal de Lorentz, un boost $d\alpha$ y una rotación $d\alpha$. Es interesante mencionar que estos boosts son transformaciones hiperbólicas que pertenecen al grupo $SL(2, \mathbb{C})$ (Penrose y Rindler, 1984). Ahora, para obtener transformaciones finitas, se debe hacer que el $d\theta$ y $d\alpha$ varíen con relación a un parámetro τ :

$$\omega = \hat{n} \frac{d\theta}{d\tau}, \quad \lambda = \frac{d\alpha}{d\tau}$$

Esta composición de transformaciones conlleva a poner la transformación en términos de una exponencial de la forma:

$$L = \exp \left[\frac{1}{2} (\alpha - \theta \hat{n}) \cdot \sigma_i \right]$$

Donde $\alpha = \lambda\tau$ codifica la información sobre la rapidez del boost y $\omega\tau = \hat{n}\theta$ la información sobre la rotación. Analice el caso de un boost puro en la dirección \hat{n}_λ , osea sin rotación ($\theta = 0$), la exponencial se convierte en series de Taylor:

$$L = \cosh \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (\hat{n}_\lambda \cdot \sigma_i) \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Nuevamente reemplazando esto en la ecuación de las transformaciones de Lorentz (3.1):

$$X' = \left[\cosh \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (\hat{n}_\lambda \cdot \sigma_i) \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] [t' + (x' \cdot \sigma_i)] \left[\cosh \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (\hat{n}_\lambda \cdot \sigma_i) \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Haciendo uso de las siguientes identidades trigonométricas y de las propiedades de las matrices de Pauli:

$$\cosh^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{\alpha}{2} = \cosh(\alpha)$$

$$2 \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cosh \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \sinh(\alpha)$$

Se tiene:

$$t' = t \cosh \alpha + \sinh \alpha (n_\lambda \cdot x) \quad (3.6)$$

$$x' = \underbrace{[\hat{n}_\lambda t(\sinh(\alpha)) + \hat{n} \cosh(\alpha)(\hat{n}_\lambda \cdot x)]}_{\text{Transformación sobre la misma línea}} + \underbrace{[x - \hat{n}_\lambda(x \cdot \hat{n}_\lambda)]}_{\text{Perpendicular a } x} \quad (3.7)$$

El parámetro α (rapidez) está relacionado con $\beta = v/c$ mediante:

$$\beta = \tanh(\alpha), \quad \cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh(\alpha) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.8)$$

(Misner y cols., 1973)

Si se desea realizar dos transformaciones de Lorentz arbitrarias, esta será el resultado de operar:

$$L_{\text{Resultante}} = L(\alpha_2)L(\alpha_1) \quad (3.9)$$

Ahora, para hacer explícita la relación de las transformaciones de Lorentz con los espinores⁵, se pondrán algunas ecuaciones en términos espinoriales como lo hicimos en la definición.

$$\underbrace{X'}_{\xi'_i} = \underbrace{L}_\Lambda \underbrace{X}_{\xi_i} \underbrace{L^*}_{\Lambda^*}$$

Es de precisar que la matriz X y X' es un espinor representado en una matriz de 2×2 , y que la matriz L corresponde a una transformación de Lorentz (Λ) por tanto la ecuación 3.1 quedaría:

$$\xi'_i = \Lambda \xi_i \Lambda^* \quad (3.10)$$

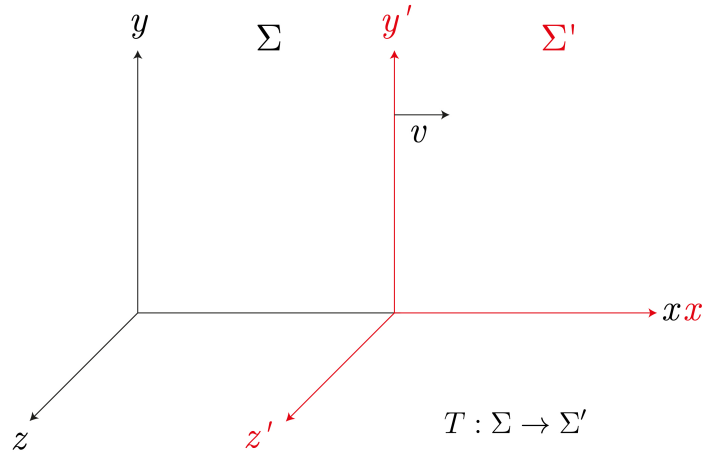
Nótese que ξ'_i tiene como sub índice i , el cual representa las coordenadas, siendo $i = 0$ la temporal e $i = 1, i = 2$ e $i = 3$ las coordenadas espaciales o también $i = 0 = t, i = 1 = x, i = 2 = y$ y $i = 3 = z$. De tal manera que las ecuaciones 3.6 y 3.7 quedan:

$$\xi'_0 = \xi_0 \cosh \alpha + \sinh \alpha (\hat{n}_\lambda \cdot \xi_1) \quad (3.11)$$

⁵En el formalismo espinorial, cualquier vector del espacio de Minkowski x^μ puede representarse mediante una matriz hermítica $\xi = x^\mu \sigma_\mu$, donde σ_μ son las matrices de Pauli ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Bajo una transformación de Lorentz representada por $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$, dicha matriz se transforma como $\xi' = \Lambda \xi \bar{\Lambda}$, lo que garantiza que ξ' siga siendo hermítica y represente correctamente el vector transformado x'^μ .

$$\xi'_1 = [\hat{n}_\lambda \xi_0 (\sinh(\alpha)) + \hat{n} \cosh(\alpha) (n_\lambda \cdot \xi_1)] \quad (3.12)$$

Es importante precisar que aunque el espinor representa un rotación, aquí en las transformaciones de Lorentz no hay una rotación física si no geométrica, ya que lo que esta pasando físicamente, es que estamos analizando la medida desde un observador en reposo (Σ) y de igual manera la medida de un observador en movimiento (Σ').



$$t' = \gamma(t + (v^2/c^2)x) \quad ; \quad x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z$$

Figura 3.1: Modelo de A. Einstein (1905) (Elaboración Propia).

Con el fin de analizar con mayor claridad estos conceptos, se tomará como punto de partida la propuesta de Einstein en 1905 (figura 3.1), donde las transformaciones de Lorentz eran lineales, traslaciones de los marcos en referencia, con un dominio en \mathbb{R}^3 . Aquí se manejan vectores que permiten realizar las transformaciones preservando la norma, etc.

Por otro lado, en 1908 Minkowsky introduce las coordenadas espacio-temporales (figura 3.2), donde las transformaciones se convierten en rotaciones hiperbólicas con ángulo imaginario, bajo el dominio $\mathbb{R}^{3,1}$. Este espacio se encuentra relacionado con una variedad, que localmente es un espacio euclidiano, 4-dimensional, donde se representan los eventos como un punto en este espacio, permitiéndonos estudiar mejor las relaciones causales.

Finalmente, en 1913 Cartan elaboro una propuesta alternativa⁶ para el estudio de las transformaciones de Lorentz (figura 3.3), precisando mejor los espinores, elementos geométricos de 2×2 pertenecientes a \mathbb{C}^2 los cuales hacen parte del álgebra geométrica de Clifford, que dieron más relevancia a las rotaciones en la teoría especial de la relatividad.

⁶Ver anexo D

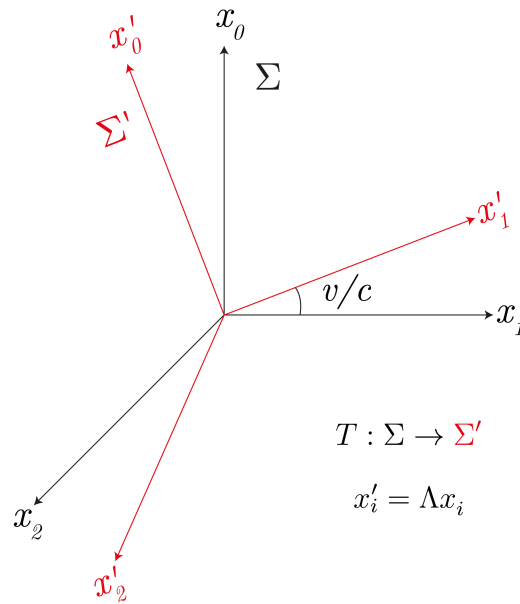


Figura 3.2: Modelo de H. Minkowsky (1908) (Elaboración Propia).

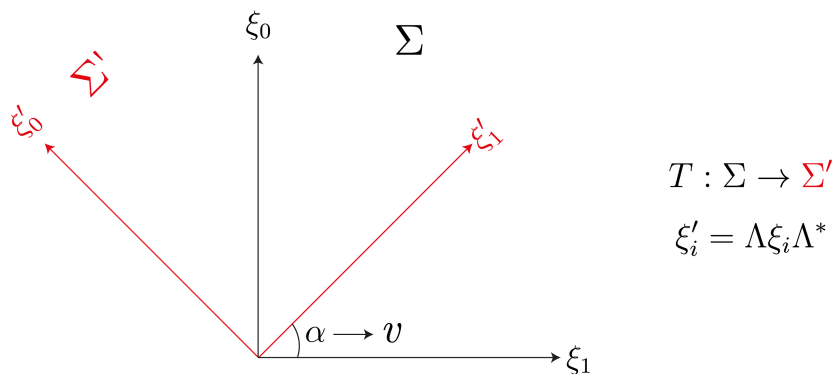


Figura 3.3: Modelo de E. Cartan (1913) (Elaboración Propia).

El formalismo espinorial aplicado a las transformaciones de Lorentz no es puramente matemático, sino que revela la estructura del espacio-tiempo, reinterpreta las transformaciones en el contexto de las rotaciones en un espacio complejo. A través del estudio de la matriz espinorial de Lorentz, se ha evidenciado cómo los espinores permiten entender de forma más refinada y profunda los fenómenos asociados a los cambios de marco de referencia inercial.

Para finalizar este capítulo, es de mencionar que en muchos cursos de relatividad especial este enfoque no es presentado. Por ello, esta propuesta alternativa cobra relevancia tanto por su poder teórico como por su potencial didáctico. Adoptar una visión espinorial no solo permite enriquecer el formalismo tradicional, sino que también posibilita nuevas formas de estudiar conceptos fundamentales de la relatividad especial de manera geométrica y visual.

Capítulo 4

Aplicación de los Espinores al Campo Electromagnético

En el presente capítulo se estudiará el campo electromagnético, cotidianamente representado mediante un tensor antisimétrico y de orden 2, pero que también puede ser expresado en el formalismo espinorial. Este cambio de notación no solo da una reformulación algebraicamente elegante, sino que también presenta una ventaja procedimental a la hora de realizar cálculos con el campo electromagnético en relatividad especial.

4.1. Tensor y Espinor de Campo Electromagnético

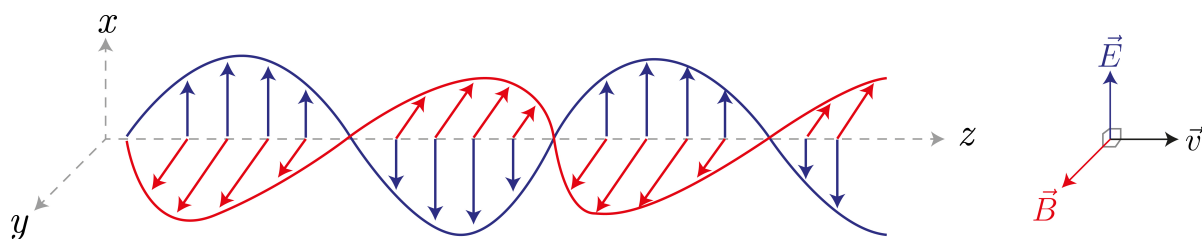


Figura 4.1: Campo Electromagnético (Elaboración Propia).

En teoría clásica del electromagnetismo se trabaja al campo eléctrico \vec{E} y campo magnético \vec{B} como entidades separadas, sin embargo en la teoría especial de la relatividad, estos campos son unidos en un solo objeto geométrico: *el tensor de campo electromagnético*, ó también llamado el *tensor de Faraday*, el cual es covariante (invariante bajo transformaciones de Lorentz). Este surge a raíz de estudiar el movimiento de cargas expuestas a un campo, donde se aplican las ecuaciones de Maxwell (1.7, 1.8, 1.9 y 1.10) y el principio de mínima acción (Landau y Lifshitz, 1971) o a partir

de la cuadrifuerza de Lorentz ([Fisicalandia, 2021](#))¹. El tensor de campo electromagnético ($F^{\mu\nu}$) está definido de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Donde A_μ es un cuadvivector que guarda información del potencial:

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$$

Siendo ϕ el potencial eléctrico escalar y \vec{A} el potencial vector magnético. Haciendo explícitas las 6 componentes de $F^{\mu\nu}$ (3 de \vec{E} y 3 de \vec{B}), un tensor antisimétrico² bajo la convención de signos del espacio-tiempo de Minkowsky con métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Este tensor ($F^{\mu\nu}$) físicamente tiene sus ventajas, ya que hace que las ecuaciones de Maxwell sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz, las reduce a solo dos ([Ley de Gauss \(\$\vec{E}\$ \)](#) y [Ampère-Maxwell](#) y [Ley de Gauss \(\$\vec{B}\$ \)](#) y de [Faraday](#)) y unifica electricidad y magnetismo como la manifestación de un solo campo.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \mu_0 J^\nu \quad (\text{Ley de Gauss } (\vec{E}) \text{ y Ampère-Maxwell})$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (\text{Ley de Gauss } (\vec{B}) \text{ y de Faraday})$$

Donde $J^\nu = (\rho, \vec{J})$ es la 4-corriente eléctrica y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico. De igual manera, este tensor se puede representar en el formalismo espinorial³ del grupo $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} [(E_\mu + iB_\mu) \sigma_{ij}^\mu] \quad (4.2)$$

Donde $\mu = x, y, z$. Este es un espinor simétrico de rango 2, lo que implica que $\xi_{ij} = \xi_{ji}$. Físicamente esta simetría aparece cuando se estudian campos sin masa, como es el caso del campo electromagnético que estamos analizando ([Penrose y Rindler, 1984](#)). Analice el caso de un campo eléctrico

¹Ver anexo E

²En unidades naturales $c = 1$.

³Esto a partir del tensor de campo electromagnético, ver anexo F

$\vec{E} = (E_0, 0, 0)$ y un campo magnético $\vec{B} = (0, 0, 0)$, cuyo espinor asociado es:

$$\xi_{ij} = \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Es importante notar que, al lado derecho de la ecuación (4.3) se tiene la matriz de Pauli σ_{ij}^z . Suponiendo que la rotación ($d\theta$) es de 0, 1 rad, con dirección $n = (0, 0, 1)$ y para el boosts ($d\alpha$) este se encontrara en el dirección $(0, 1, 0)$, con lo que se tiene una transformación de Lorentz (ver ecuación 3.3):

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{2} ((0, 1)\sigma_z - i(0, 1)\sigma_y)$$

Recuerde que la transformación de Lorentz se da mediante la ecuación (3.10):

$$\xi'_{ij} = (1 + \epsilon)\xi_{ij}(1 + \epsilon)^*$$

Donde ϵ es:

$$\epsilon = \frac{i}{2} ((0, 1)\sigma_z - i(0, 1)\sigma_y)$$

Expandiendo⁴, se tiene:

$$\xi'_{ij} = \xi_{ij} + \epsilon\xi_{ij} + \xi_{ij}\epsilon^*$$

Sustituyendo ϵ :

$$\xi'_{ij} = \xi_{ij} + \frac{i}{2} ((0, 1)\sigma_z - i(0, 1)\sigma_y) \xi_{ij} - \xi_{ij} \frac{i}{2} ((0, 1)\sigma_z + i(0, 1)\sigma_y)$$

Sustituyendo ξ_{ij} :

$$\begin{aligned} \xi'_{ij} &= \frac{E_0}{2}\sigma_z + \frac{iE_0}{4} ((0, 1) [\sigma_z, \sigma_z] - i(0, 1) [\sigma_z, \sigma_y]) \dots \\ &\dots - \frac{iE_0}{4} ((0, 1) [\sigma_z, \sigma_z] + i(0, 1) [\sigma_z, \sigma_y]) \end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva y los conmutadores:

$$[\sigma_z, \sigma_z] = 0 \quad ; \quad [\sigma_z, \sigma_y] = 2i\sigma_x$$

⁴Con series de Taylor.

Se tiene:

$$\xi'_{ij} = \frac{E_0}{2}\sigma_z + \frac{E_0}{4}(0, 1)2i\sigma_x + \frac{E_0}{4}(0, 1)2i\sigma_x$$

Reordenando:

$$\xi'_{ij} = \frac{E_0}{2}\sigma_z + \frac{2}{4}(0, 1)iE_0\sigma_x + \frac{2}{4}(0, 1)iE_0\sigma_x$$

$$\xi'_{ij} = \frac{E_0}{2}\sigma_z + (0, 05)iE_0\sigma_x + (0, 05)iE_0\sigma_x$$

Simplificando:

$$\xi'_{ij} = \frac{E_0}{2}\sigma_z + (0, 1)iE_0\sigma_x$$

Reorganizando y reemplazando $0, 1 = 1/10$:

$$\xi'_{ij} = \frac{iE_0}{10}\sigma_x + \frac{E_0}{2}\sigma_z$$

Este nuevo espinor (ξ'_{ij}) corresponde a un campo:

$$\vec{E}' = ([1/10]E_0, 0, [1/2]E_0) \quad \mathbf{y} \quad \vec{B}' = ([1/10]E_0, 0, 0) \quad (4.4)$$

Analizando la situación inicial, se parte de un campo $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$ y $\vec{B} = (0, 0, 0)$ desde un marco de referencia en reposo (observador en reposo Σ), al cual se le aplico una transformación de Lorentz, para que un marco en movimiento (observador en movimiento Σ') calculara este campo desde su marco, quedando $\vec{E}' = ([1/10]E_0, 0, [1/2]E_0)$ e introduciendo un campo $\vec{B}' = ([1/10]E_0, 0, 0)$ que en principio no existía y fue producido por σ_x a causa de los campos en rotación y los boots (se evidencia en la componente x debido a la presencia de i). Este ejercicio muestra como el espinor de cierta forma simplifica las transformaciones de Lorentz en campos electromagnéticos, ya que la rotación y el boots modifican tanto la orientación de los campos como la magnitud de los mismos. Es importante resaltar que bajo estas transformaciones se preserva la la métrica del espacio.

Para solucionar este mismo ejercicio de manera tensorial, se debe escoger la transformación de Lorentz (Λ) en el formalismo matricial que vimos en el capítulo 2 en la ecuación 2.8, donde la transformación esta expresada en una matriz de 4×4 y realizar una doble multiplicación tensorial con $F^{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda_{\beta}^{\nu}F^{\alpha\beta}$$

Esta transformación ayuda a descifrar las componentes de $F^{\mu\nu}$ según la matriz Λ . Este proceso puede sonar en principio no muy extenso, pero cuando operamos tensores, se debe realizar multiplicaciones de matrices, en este caso de 4×4 , como el tensor $F^{\mu\nu}$ es de orden 2 tiene 2 índices, donde cada uno transforma de manera independiente, osea que para cada uno se tiene una matriz de Lorentz, proceso que es largo y de mucho cuidado para no errar en el proceso.

Como se a evidenciado, el espinor desde sus orígenes en las matemáticas puras en 1913 de la mano de Cartan, a ayudado a describir rotaciones, transformaciones y magnitudes físicas, como es el caso de los trabajos en mecánica cuántica de Paul Dirac, donde en 1928 formulo su ecuación para describir partículas de espín $1/2$ como el electrón, que requieren de un campo que transforma como un espinor bajo el grupo de Lorentz ($SO(1, 3)$), y es aquí donde el espinor encuentra por primera vez su espacio en la física (Dirac, 1928). En los años 1930 y 1940 se siguieron haciendo aplicaciones en electrodinámica cuántica y luego en cromodinámica cuántica.

Durante los años de 1970 y 1980 David Hestenes realiza estudios del álgebra geométrica, logrando entender los espinores como elementos del álgebra asociada a un espacio-tiempo. Esto permitió entender mejor las rotaciones, boots y campos electromagnéticos (Doran y Lasenby, 2003).

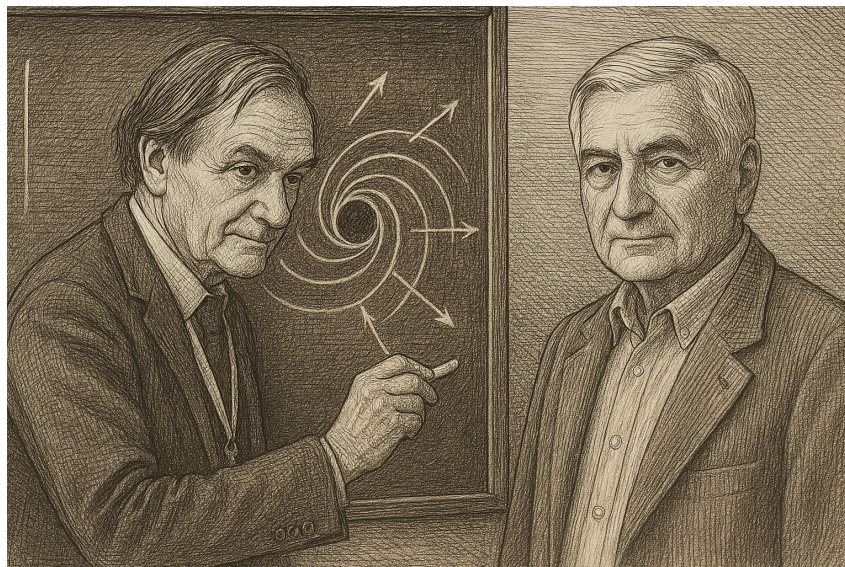


Figura 4.2: (A la Derecha) Wolfgang Rindler y (A la Izquierda) Roger Penrose (OpenAI, 2025a).

El esplendor de los espinores no termino aquí ya que en los trabajos de 1984 de Roger Penrose y Wolfgang Rindler, son usados para describir geometrías, y campos sobre espacio-tiempo curvos, además de presentar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en la teoría general de la

relatividad, en palabras de ellos:

*“... en los problemas modernos de la Cosmología y el Modelo Estándar, existe la necesidad de explicar como en el origen del universo, y durante el Big Bang, la gravedad junto con las otras tres fuerzas de la naturaleza (interacción nuclear fuerte, interacción nuclear débil y electromagnetismo), trazaron el destino y la evolución de toda la materia y la energía de nuestro universo. O en otras palabras, habría una explicación teórica del origen del universo, si se entiende como describir cuánticamente a la gravedad. Por esta razón, si se piensa que la **teoría de los espinores**, puede tener un papel importante en el proceso de formular una versión cuántica de la gravedad, entonces esto sería muy importante a su vez, en la explicación de los procesos que dieron origen a nuestro universo.”*

(Penrose y Rindler, 1984).

En este texto los autores resaltan la importancia de los espinores para describir la gravedad y con ello crear modelos que lleven a comprender el mismo universo, su evolución y lo más importante, hacia donde va.

Actualmente los espinores siguen siendo cruciales en el desarrollo de nueva física, en computacional cuántica, teorías de supersimetría, como ejemplo, en teorías gauge (en español teorías de “calibre”) los espinores ayudan describir las interacciones fundamentales entre partículas, y las simetrías que mantienen las leyes físicas invariantes bajo transformaciones locales. De hecho, el actual modelo estándar de la física de partículas es una teoría gauge (Ryder, 1996).

Conclusiones

- En el primer capítulo, se cumplió el objetivo de presentar un recorrido histórico-conceptual sobre la crisis de la física a finales del siglo XIX, destacando cómo esta condujo al desarrollo de la TER. La discusión sobre el éter, la incompatibilidad entre mecánica clásica y electromagnetismo, y los aportes de Lorentz, Poincaré y Einstein fueron abordados con rigurosidad. Además, este recuento histórico, pone en la mesa algunos nombres de científicos y matemáticos que pocas veces son mencionados cuando se estudia la TER, como puede ser el caso de H. Poincaré, a quien se le intenta hacer justicia, mencionando sus desarrollos y aportes.
- En un segundo momento, se presentaron algunos conceptos acerca de las diferentes transformaciones, para relacionar las transformaciones de Lorentz con las rotaciones, punto clave que dio un primer indicio para relacionarlas con los espinores, lo que permite trabajar marcos en rotación. Luego se dieron algunas definiciones desde la teoría de grupos y la topología, lo que dio un lenguaje para poder desarrollar a profundidad los espinores, y hablar de sus cualidades en dicho lenguaje, como lo son los recubrimientos, y las propiedades de los grupos $SO(1, 3)$ y $SL(2, \mathbb{C})$. Estos permitieron realizar un análisis global a través de la clasificación de las representaciones de los mismos grupos, bajo un número finito de parámetros, y es gracias a esto que se pueden evidenciar las simetrías del espacio-tiempo. También, se encontró que los espinores poseen una correspondencia con vectores isotrópicos y tensores euclidianos. Desde una perspectiva de los espacios planos, los espinores pueden ser representados como una matriz compleja, mostrando también que los espinores poseen una naturaleza tensorial bajo transformaciones euclidianas. Esto muestra que los espinores tienen la misma capacidad de dar representaciones matemáticas al igual que vectores y tensores. Toda esta base teórica sólida ayudó a introducir el espinor a partir de los trabajos de Élie Cartan, cumpliendo así con el segundo objetivo de la investigación.

- Estudiando el formalismo espinorial de la mano de Élie Cartan, partiendo de vectores isotrópicos y su correspondencia con tensores euclidianos, se evidencian las grandes posibilidades presentadas por los espinores para transformar preservando ciertas propiedades como la norma, además de mostrar implícitamente por su naturaleza, rotaciones de la mano de las matrices de Pauli (σ_i), hecho que interesa al momento de estudiar las transformaciones de Lorentz, ya que estas geoméricamente también representan rotaciones con un ángulo imaginario.

Todo esto, presenta una alternativa para estudiar las transformaciones como entes geoméricos y descubrir nuevas propiedades que planteen nuevas formas de concebir los mismos conceptos, como evidenciamos con el formalismo espinorial.

- Finalmente, se utilizaron los espinores a manera de ejemplo a través del campo electromagnético, y se pudo mostrar como los espinores guardan la misma información que un tensor. Analizando el tensor de campo electromagnético ($F^{\mu\nu}$), se evidencia que este es 2 veces contravariante y antisimétrico, de orden 2, con 6 componentes (3 de \vec{E} y 3 de \vec{B}), representado en matrices de 4×4 , mientras que el espinor de campo electromagnético (ξ_{ij}) es menos robusto, respecto a la cantidad de componentes, ya que este es de 2×2 , con componentes imaginarias, simétrico ($\xi_{ij} = \xi_{ji}$), otra ventaja del formalismo espinorial, ya que matemáticamente es un factor que facilita los cálculos, haciéndolos mucho más prácticos, cortos y rápidos al momento de analizar el campo desde diferentes observadores. Esta representación espinorial del campo electromagnético da una formulación poderosa, que unifica y simplifica los conceptos del electromagnetismo clásico con la TER.

Con esta tesis queda evidenciada la importancia de los espinores tanto en la tradición que tienen en la física con los trabajos de Penrose, Rindler, Dirac, etc, como en los posibles trabajos que se puedan realizar a futuro con el formalismo espinorial para trabajar la física moderna, donde la relación física-matemática se hace cada vez más profunda, interesante y con capacidades cada vez más refinadas a la hora de descifrar algunos fenómenos. También es importante resaltar como algunos fenómenos se pueden abordar desde distintos modelos matemáticos igualmente equivalentes, (tensor de campo electromagnético y el espinor de campo electromagnético que dan cuenta del mismo fenómeno), lo que muestra el carácter convencional de dichos modelos.

Referencias

- Arfken, G. B., Weber, H. J., y Harris, F. E. (2011). *Métodos matemáticos para físicos* (7.^a ed.). Elsevier / Editorial Diana.
- Castillo, T. (1986). De la ecuación de Dirac a los espinores. *Revista Mexicana de Física*.
- Castillo, T. (1992). Spinors in three dimensions. *Revista Mexicana de Física*.
- Córdón, L. (2011, junio). *Transformaciones de Galileo y Lorentz*. <https://multiblog.educacion.navarra.es/lcordonm/files/2011/06/Transformaciones-de-Galileo-y-Lorentz.pdf>. (Artículo en línea, acceso en 06-06-2025.)
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A*, 117(778), 610–624. doi: 10.1098/rspa.1928.0023
- Doran, C., y Lasenby, A. (2003). *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press.
- Fiscalandia. (2021). *Electromagnetismo 4, tensor de campo electromagnético*. <https://fisicalandia.com/fisica-clasica/tensor-de-campo-electromagnetico/>. (Accedido el 08-06-2025)
- Fresnel, A.-J. (1819). Mémoire sur la diffraction de la lumière. *Annales de Chimie et de Physique*, 10, 339–475.
- García, I. R. (2009). *Representación espinorial de la propagación de ondas electromagnéticas* (Tesis de licenciatura). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
- Gilmore, R. (2013). *Grupos, teoría de Lie y sus aplicaciones* (2.^a ed.). Madrid: Reverté.
- Gray, J. (2018). *A history of abstract algebra: From algebraic equations to modern algebra*. Springer.
- Grossman, S. I. (1996). *Álgebra lineal*. Mc Graw Hill Interamericana.
- Hawking, S. W. (1988). *Historia del tiempo: Del big bang a los agujeros negros*. Editorial Crítica.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista-Lucio, P. (2013). *Metodología de la investigación* (6.^a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hooke, R. (1665). *Micrographia: or some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses, with observations and inquiries thereupon*. London: Royal Society. (Facsímiles y versiones modernas disponibles en repositorios digitales como Project Gutenberg o la Biblioteca del Congreso)

- Huygens, C. (1690). *Traité de la lumière: où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion et dans la refraction, et particulièrement dans l'étrange refraction du cristal d'islande*. Leiden: Pierre van der Aa. (Edición original. Facsímiles disponibles en Gallica y otros archivos digitales.)
- Janssen, B. (2005). Breve repaso de la relatividad especial.
- Jillana, J. (2024). *Teoría cuántica de campos*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des Équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars. Descargado de <https://archive.org/details/traitedessubsti00jorduoft>
- Lagrange, J.-L. (1771). Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 251–326. Descargado de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90199p/f259.item> (Disponible en línea en la Biblioteca Nacional de Francia)
- Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1971). *Teoría clásica de los campos* (4.^a ed.). Barcelona: Editorial Reverté.
- Landáu, L. D. (1975). *The classical theory of fields, yevgueni mijáilovich lífshits*. Butterworth-Heinemann.
- Levrini, O. (2014). Resultados de la investigación en educación en física como lentes para analizar libros de texto, reconocer detalles críticos y promover el pensamiento. el caso especial de la enseñanza y el aprendizaje de la relatividad especial. *Revista de Enseñanza de la Física*, 26(1), 7–21. doi: 10.55767/2451.6007.v26.n1.9514
- Lorentz, H. A. (1892a). De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 25, 363–552.
- Lorentz, H. A. (1892b). *La théorie électromagnétique de maxwell et son application aux corps mouvants*. Leiden: Brill. (Publié dans Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, supplément au tome 25)
- Lorentz, H. A. (1892c). The relative motion of the earth and the ether. *Verslagen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1, 74–79. (Primera formulación de las ideas que llevarían a las transformaciones de Lorentz)
- Maxwell, J. C. (1873). *A treatise on electricity and magnetism* (Vols. 1–2). Oxford: Clarendon Press. (Primera edición en dos volúmenes)
- Minkowski, H. (1908). Espacio y tiempo. En M. Ángel Sánchez Ron (Ed.), *El principio de la relatividad* (pp. 151–167). Madrid: Alianza Editorial. (Traducción del original alemán: Raum und Zeit (1908))
- Misner, C. W., Thorne, K. S., y Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman.
- Moraga, M. A. C. (2019). Álgebras de clifford. *Pontificia Universidad Católica de Chile*.
- Munkres, J. (2000). *Topology*. Prentice Hall.

- Newton, I. (1704). *Opticks: or, a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light*. London: Royal Society. (Primera edición. Facsímiles disponibles en bibliotecas digitales.)
- OpenAI. (2025a). *Representación artística de rindler y penrose en un pizarrón*. <https://chat.openai.com/>. (Imagen generada por inteligencia artificial mediante ChatGPT)
- OpenAI. (2025b). *Retrato de albert einstein con fórmulas de la relatividad especial*. <https://chat.openai.com/>. (Imagen generada por inteligencia artificial mediante ChatGPT)
- OpenAI. (2025c). *Retrato de h. a. lorentz con transformaciones de lorentz en el pizarrón*. <https://chat.openai.com/>. (Imagen generada por inteligencia artificial mediante ChatGPT)
- OpenAI. (2025d). *Retrato de henri poincaré con ecuaciones de la relatividad especial*. <https://chat.openai.com/>. (Imagen generada por inteligencia artificial mediante ChatGPT)
- OpenAI. (2025e). *Retrato de Élie cartan con fórmulas espinoriales en el pizarrón*. <https://chat.openai.com/>. (Imagen generada por inteligencia artificial mediante ChatGPT)
- Penrose, R., y Rindler, W. (1984). *Espinores y espacio-tiempo, vol. 1: Cálculo de dos espinores y campos relativistas*. Cambridge University Press. (Traducción del original inglés: Spinors and Space-Time, Vol. 1)
- Perez, Senet, y Solves. (1986). Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. *Revista de Enseñanza de la Física*.
- Perez, y Solves. (2003). Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad. *Revista de Investigación y Experiencias didácticas*(135-146).
- Prat, A. P. R. (2009). Espinores en variedades lorentzianas.
- Redish, E. F. (2005). Problem solving and the use of math in physics courses. En *Proceedings of the world view on physics education in 2005: Focusing on change*. New Delhi, India. Descargado de <https://arxiv.org/abs/physics/0701081>
- Ron, A. M. (2005). *Einstein y la relatividad: historia de una revolución*. Barcelona: Crítica.
- Ron, J. M. S. (1983). *Origen y desarrollo de la relatividad*. Alianza Editorial S.A.
- Ryder, L. H. (1996). *Teoría cuántica de campos para físicos*. Barcelona: Editorial Reverté. (Traducción de: Quantum Field Theory for Physicists. Ver capítulo 8, p. 380 para la estructura de gauge del modelo estándar.)
- Spinel, C. (2009). *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica no relativista*. Editorial Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Física.

- Tatum, J. (2021). *The lorentz transformation as a rotation*. Descargado 2025-05-03, de [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_\(Tatum\)/15%3ASpecial_Relativity/15.07%3A_The_Lorentz_Transformation_as_a_Rotation](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_(Tatum)/15%3ASpecial_Relativity/15.07%3A_The_Lorentz_Transformation_as_a_Rotation) (LibreTexts Physics)
- Tignol, J. P. (2001). *Galois' theory of algebraic equations*. World Scientific.
- Tipler, P. A. (1986). *Física* (Vol. 2). Editorial Reverté S.A.
- Tomonaga, S.-I. (1998). «*lecture 7: The quantity which is neither vector nor tensor*». The story of spin, University of Chicago Press.
- Vargas, M. A. (2009). Caracterización del espacio-tiempo de minkowski. *Repositorio Universidad Pedagógica Nacional*.
- Verano, R. (2023). Analisis de la notacion espinorial como formalismo para la enseñanza de la física moderna. *Repositorio Universidad Pedagógica Nacional*.
- Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields, volume 1: Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Young, T. (1802). On the analogy between the principles of waves and the principles of sound. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 92, 12–48. (Presentado en 1801, publicado en 1802)
- Young, T. (1807). *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts* (Vols. 1–2). London: Joseph Johnson. (Obra en dos volúmenes)
- Élie Cartan. (1984). *Theory of spinors*. The University of Chicago Press.

Anexos

Anexo A: Ecuación de Onda Bajo Transformaciones de Galileo

Expresando las derivadas parciales en términos de x' y t' :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

Derivando:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d(x - vt)}{dx} = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{\partial x'}{\partial t'} + \frac{\partial(vt')}{\partial t'} = v \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{dt}{dx} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{v} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \quad (\text{A.6})$$

Reemplazando las derivadas en [A.1](#):

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial t'} \quad (\text{A.7})$$

Volviendo a derivar respecto a x :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial t'} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} \cdot \frac{1}{v} \right) + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial x} \cdot 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \cdot \frac{1}{v} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 E}{\partial x' \partial t'} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} \quad (\text{A.12})$$

Como $t = t'$, tenemos que:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \quad (\text{A.13})$$

Combinado las ecuaciones (1.14), (A.12) y (A.13) obtenemos que,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \quad (\text{A.14})$$

Reordenando:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} \quad (\text{A.15})$$

Anexo B: Propiedades de las Transformaciones Lineales

Propiedad 1: La imagen del vector nulo en V es el vector nulo en W .

$$T(0_v) = 0_w \quad (\text{A.16})$$

Propiedad 2: La imagen del vector $-v$ es igual al opuesto de la imagen de v .

$$T(-v) = -T(v) \quad (\text{A.17})$$

Propiedad 3: Consideremos r cantidad de vectores en el espacio vectorial V :

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_r \in V$$

Donde se propone la combinación lineal:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \dots + k_rv_r$$

A la cual aplicamos una transformación T que va de V a W , y teniendo en cuenta las propiedades enunciadas en la definición, se tiene que:

$$T(k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \dots + k_rT(v_r) \quad (\text{A.18})$$

Como vemos una transformación lineal “transporta” combinaciones lineales de V a W , conservando así los escalares de la combinación lineal.

Anexo C: Representaciones Irreducibles

Una representación irreducible se da cuando un espacio vectorial carece de subespacios invariantes debido a los grupos. Dicho de otra manera es un homomorfismo, es decir, una forma de asociar a cada elemento del grupo una transformación lineal en el espacio vectorial.

El grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ no es simplemente conexo¹, lo cual impide que todas sus representaciones sean completamente reducibles como el caso de $SO(3)$. Por esta razón se trabaja frecuentemente con su recubrimiento universal $SL(2, \mathbb{C})$, que sí es conexo y permite construir representaciones irreducibles adecuadas para describir partículas con espín.

Una representación irreducible del grupo de Lorentz en términos de espinores se clasifica por los pares (j_1, j_2) , donde j_1 y j_2 tienen que ser números semienteros, los cuales indican las representaciones del producto de grupos $SU(2) \times SU(2)$, que corresponde al álgebra compleja del grupo de Lorentz (ver sección 2.4 del capítulo 2). Por ejemplo, la representación $(1/2, 0)$ corresponde a espinores de Weyl izquierdos, mientras que $(0, 1/2)$ corresponde a espinores de Weyl derechos. Por otra parte, la representación $(1/2, 1/2)$ da lugar a vectores de cuatro componentes, es decir, a los cuadvectores de Minkowski.

Estas representaciones muestran cómo el uso de espinores permite reconstruir la estructura del espacio-tiempo en relatividad especial desde un enfoque fundamental y algebraico. Esta clasificación es importante, ya que permite construir objetos físicos, como campos cuánticos o tensores, a partir de componentes espinoriales (Weinberg, 1995).

¹Que no tiene una partición del conjunto en otros dos conjuntos no vacíos.

Anexo D: La Propuesta de Élie Cartan

El grupo $O(1, 3)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales de espacio de Minkowsky ($\mathbb{R}^{1,3}$) que mantiene invariante la forma cuadrática del intervalo espacio-temporal. El problema de este grupo para poder representar las transformaciones de Lorentz radica en que este no es conexo, por tanto, se tiene que recurrir al grupo $SO^+(1, 3)$ el cual si es conexo y con determinante $+1$, además preserva la orientación temporal. Pero esto no es todo, ya que esto significa que existen bucles cerrados en el grupo que no pueden ser deformados continuamente a un punto. Esta propiedad tiene consecuencias importantes al momento de construir representaciones lineales del grupo. En física, esto se traduce en el hecho de que las representaciones espinoriales no pueden construirse directamente sobre $SO^+(1, 3)$, sino que requieren considerar su cubierta doble, un grupo que lo recubre de manera biunívoca (salvo por el signo), y que sí es simplemente conexo.

La propuesta de Élie Cartan en su obra *The Theory of Spinors*, radica en la relación que tiene el grupo de Lorentz $SO^+(1, 3)$ y $SL(2, \mathbb{C})$, el cual actúa sobre los espinores. Cartan demostró que $SL(2, \mathbb{C})$ es la cubierta doble universal del grupo $SO^+(1, 3)$:

$$SO^+(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

donde $SO^+(1, 3)$ al ser conexo incluye la identidad como ya mencionamos, y $SL(2, \mathbb{C})$ es el doble recubrimiento. En este caso los espinores transforman:

$$\xi' = S\xi \tag{A.19}$$

donde S es una matriz que pertenece a $SL(2, \mathbb{C})$. Esta acción, no necesariamente permite una transformación en el espacio de Minkowski, sino que se requiere de una representación sobre el álgebra de Pauli. Cartan aprovechó que para cada vector $x^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ se encuentra asociada una matriz hermitica de 2×2 (X):

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

Y como se evidencia, esta trae consigo las matrices de Pauli σ_μ . Así, cuando se da una transformación S se tiene:

$$X \rightarrow X' = SX S^\dagger \tag{A.21}$$

Con esta transformacion se preserva el determinante de X que es a su vez el intervalo de Minkowsky. Con todo esto, se tiene una implementación espinorial de la transformación de Lorentz sobre el espacio de Minkowski.

Anexo E: Tensor de Campo Electromagnético

Partiendo de la fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.22})$$

Analizando esta ecuación (A.22) nos damos cuenta que tenemos una 3-fuerza (\mathbf{f}) y 3-velocidad (\mathbf{v}), pero, en relatividad especial necesitamos trabajar en términos de cuadrifuerzas (\mathbf{F}), así:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} E/c \\ p^x \\ p^y \\ p^z \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Donde \mathbf{P} es el cuadrimomento y E la energía. Es de precisar que usaremos \mathbf{E} para el campo eléctrico. Derivando las componentes de \mathbf{P} , para obtener los términos de \mathbf{F} :

$$\frac{dE}{d\tau} = \gamma \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c} = \gamma e \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c} = \frac{\gamma e}{c} (E_x v^x + E_y v^y + E_z v^z) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \gamma \frac{dp_x}{dt} = \gamma e (E_x + v^y B_z - B_y v^z)$$

$$\frac{dp_y}{d\tau} = \gamma \frac{dp_y}{dt} = \gamma e (E_y - v^x B_z + B_x v^z)$$

$$\frac{dp_z}{d\tau} = \gamma \frac{dp_z}{dt} = \gamma e (E_z + v^x B_y - B_x v^y)$$

Con esto, podemos reescribir A.23 de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \gamma e \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ v^x \\ v^y \\ v^z \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Podemos notar que la matriz de 4×4 corresponde a un tensor de orden 2, el tensor de campo electromagnético F_{ν}^{μ} . En notación de Einstein queda:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = e F_{\nu}^{\mu} v^{\nu} \quad (\text{A.26})$$

Normalmente el tensor de campo electromagnético se presenta en componentes covariantes ($F_{\mu\nu}$), lo que se consigue con un poco de gimnasia de índices, multiplicando por el tensor métrico en el espacio de Min-

kowski, aplicando el producto matricial de tensores usando la signatura $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$:

$$\eta_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Usando unidades naturales $c = 1$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Anexo F: Espinor de Campo Electromagnético

La representación en el formalismo espinorial del campo electromagnético es capaz de representar el tensor $F^{\mu\nu}$ como un objeto simétrico de dos índices espinoriales (ξ_{ij}). El tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico y contiene 6 componentes independientes, y además, tiene la capacidad de guardar el campo eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{B}):

$$E^i = F^{0i} \quad B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}$$

Definiendo el bivector complejo auto-dual:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}$$

donde el dual de Hodge² es:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

A partir de esto, se crea un cuatrivector complejo:

$$\mathcal{F}^\mu = E^\mu + iB^\mu \quad (\text{A.30})$$

Con esto se puede construir un objeto del formalismo espinorial, totalmente simétrico y de dos índices ξ_{ij} a partir de \mathcal{F}^μ y haciendo uso de las matrices de Pauli extendidas, osea que $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$, actuando sobre índices espinoriales:

$$\sigma_{ij}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Teniendo así:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^\mu\sigma_{ij}^\mu \quad (\text{A.31})$$

Como se considera que $E^\mu = (0, \vec{E})$ y $B^\mu = (0, \vec{B})$ ³ y reemplazando [A.30](#) en [A.31](#), se obtiene:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}[(E_\mu + iB_\mu)\sigma_{ij}^\mu] \quad (\text{A.32})$$

Dándonos así, el campo electromagnético en el formalismo espinorial ([García, 2009](#)).

²Es un operador lineal dentro del álgebra exterior, ver sección 2.8 del capítulo 2

³Esta forma permite agrupar los campos en un solo vector complejo.