

**ESTUDIO DEL FORMALISMO ASOCIADO A LOS ESPINES $1/2$ Y 1
PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA ESPÍN-ESTADÍSTICA EN
CURSOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**

JUAN DAVID RUIZ

Documento para optar por el título de Licenciado en física

Asesora

Sandra Bibiana Avila Torres

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Física

Línea de Profundización la Enseñanza de la Física y la Relación Física Matemática

Bogotá D.C, Colombia

2024

DEDICATORIA

Le dedico el resultado de este trabajo con mucho amor a mi madre que me impulsa a ser mejor cada día y a nunca rendirme por mis sueños. Por su esfuerzo y determinación al ayudarme a cumplir mis sueños va esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar mi total gratitud a todas las personas que estuvieron involucradas en el proceso de realización y culminación del presente trabajo.

En primer lugar, quiero agradecer a los maestros que apoyaron mi proceso académico, iniciando con mi directora de tesis Sandra Bibiana Avila Torres a quien le guardo un respeto y admiración infinita, por su guía y recomendaciones para el desarrollo del trabajo, pero sobre todo por su forma de inspirar pasión por las ciencias con todos los estudiantes con los que trabaja y con cada curso que dicta, si no fuera por su curso de mecánica cuántica este trabajo no existiría. Además, quiero agradecer al profesor Fernando Espitia por su orientación en elementos de la investigación y por mostrar de una forma curiosa y rigurosa de entender la física, el tema central de la investigación surgió en su curso de física estadística, uno de los cursos que redefinieron mi forma de ver la física. Ambos son mi estandarte de cómo debe ser un maestro.

Quiero agradecerles a todos mis amigos y compañeros que estuvieron presentes en la elaboración del documento, su compañía, risas y bromas durante este proceso fueron el mejor impulso para continuar.

No puedo dejar de lado a mi familia que estuvo a mi lado dando palabras de aliento para no rendirme y seguir adelante como siempre me inculcaron.

Finalmente, quiero agradecer a cada persona que estuvo presente durante este periodo dándome ánimo, una parte de ustedes va a estar en el trabajo y de forma sincera tienen toda mi gratitud.

TABLA DE CONTENIDO

GRAFICAS	6
INTRODUCCIÓN	7
CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA.....	8
Contexto Problemático	8
Pregunta Orientadora.....	12
Objetivos	12
<i>Objetivo General</i>	12
<i>Objetivos Específicos</i>	12
Antecedentes	13
CAPÍTULO 1: UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO A LA PRIMERA INTERPRETACIÓN DEL TEOREMA	15
1.1 Boltzmann y la Primera Interpretación de la Física Estadística	16
1.2 La Estadística de Bose (1924)	20
1.3 La Estadística de Fermi (1926).....	23
1.4 El Espín en las Teorías de Partículas.....	26
1.5 Formalización del Teorema Espín-Estadística	32
CAPÍTULO 2: EL ESPÍN DE NÚMERO 1/2 Y 1	35
2.1 Partículas Indistinguibles	35
2.2 La Indistinguibilidad y el Principio de Exclusión de Pauli	38
2.3 El Espín y la Simetría Rotacional.....	41
2.3.1 El formalismo del espín $\frac{1}{2}$	41
2.3.2 Simetría rotacional grupo SU2	45
2.3.3 El fotón y el espín 1	49
2.3.4 El formalismo de matrices de Pauli aplicadas en el espín 1	53
2.3.5 Simetría rotacional grupo SO3	55
2.4 La Indistinguibilidad Desde la Simetría Rotacional del Espín.....	59
CAPÍTULO 3: LAS DISTRIBUCIONES DE PARTÍCULAS Y LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS	63
3.1 Las Funciones Simétricas en la Descripción del Fotón	64

3.2	Las Funciones Antisimétricas en la Descripción de Electrón.....	67
3.3	Sobre el Espín en Estadística: Caso desde las Clases de Mecánica Cuántica	68
3.3.1	Material para clases de M.C: la historia del espín y sus características desde los grupos de Lie	69
3.3.2	Material para clases de M.C: la indistinguibilidad y el teorema espín-estadística	72
	CONCLUSIONES	81
	REFERENCIAS	83

GRAFICAS

Gráfica 1: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$	76
Gráfica 2: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$ y $n_{x1} = 1$, $n_{x2} = 2$	77
Gráfica 3: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$ y $n_{x1} = 1$, $n_{x2} = 3$	77
Gráfica 4: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 3$ - $n_{x1} = 3$, $n_{x2} = 2$ y $n_x = 4$ - $n_{x1} = 4$, $n_{x2} = 2$	78

INTRODUCCIÓN

El teorema espín-estadística es usado en cursos de física estadística para introducir las estadísticas cuánticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, donde usualmente se presenta como si fuera un postulado establecido por Pauli para diferenciar los tipos de sistemas de partículas indistinguibles con los cuales se está trabajando. Sin embargo, la explicación de este se abarca en cursos posteriores como en teoría cuántica de campos. Particularmente en esta investigación se muestra que las bases del mismo se pueden encontrar en la formulación de la mecánica cuántica y, sobre todo, en el formalismo que tiene el espín de fotones y electrones al considerarse en un sistema de N partículas. Por lo que, estudiar el origen del teorema implica una reevaluación del concepto de espín, de tal forma que este pueda ser comprendido desde un curso de mecánica cuántica.

Esta investigación se encuentra dividida en cuatro apartados, con el objetivo de generar un material de estudio para cursos de mecánica cuántica sobre la enseñanza del espín usando el teorema espín-estadística desde las características de partículas con espines $\frac{1}{2}$ y 1 , usando una metodología de investigación documental.

En la primera parte del documento se hace una contextualización de la problemática, se propone la pregunta que orientó la investigación, se muestran los objetivos planteados por el autor y se presentan los antecedentes del proyecto. Luego, el primer capítulo se centra en dar una contextualización histórica de las bases del teorema resaltando elementos claves que permitieron la conexión del espín y la descripción estadística. Posteriormente en el segundo capítulo se hace un hincapié en el principio de indistinguibilidad de las partículas, para lo cual se analiza la formalización de las funciones de onda simétricas y antisimétricas planteadas por Dirac y el espín propuesto por Pauli, para después caracterizar a las matrices de espín $\frac{1}{2}$ y 1 como parte de los grupos de Lie SU_2 y SO_3 .

Finalmente, en el capítulo 3 se describen a las funciones de onda simétricas y antisimétricas desde una postura estadística, culminando con una ruta de trabajo para clases de mecánica cuántica que tiene en cuenta la solución del problema de una partícula en un pozo de potencial unidimensional modificado para considerar el teorema espín-estadística, posteriormente se dan las conclusiones y la bibliografía.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Contexto Problemático

Al examinar la misión y visión del programa de Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), se puede destacar que éste busca el acercamiento de la ciencia y en especial de la física al contexto de las aulas en Colombia, por medio de egresados que puedan promover un cambio continuo en el sector educativo. Con ello se deja implícito que los estudiantes de la licenciatura deben estar inmersos en su contexto, es decir, que deben estar al pendiente de las necesidades de este, como sujetos activos que no dejan de lado la formación constante.

Por lo que, se espera que estos estudiantes en su formación estén contextualizados con su entorno y desarrollen habilidades para entenderlo. Bajo esta perspectiva, al comprender que el entorno es regido por la física moderna, clases como relatividad especial o mecánica cuántica terminan siendo una parte importante para el aprendizaje de los futuros licenciados en física. Entonces estas teorías cobran una mayor importancia en el currículo universitario de carreras afines a la ciencia, pues dejan de ser clases preparatorias para estudios subsecuentes, y se toman como clases necesarias para el profesional en formación.

Enfocando la situación al estudio de la mecánica cuántica, se puede decir que ésta constituye una base para el entendimiento en investigaciones actuales, como en física de altas energías con estudios de interacción de partículas, siendo a su vez una clase obligatoria dentro de la carrera de pregrado de los licenciados en física de la UPN. Esta da elementos necesarios para acercarse a la forma en que funcionan objetos del día a día, como, por ejemplo, al tener conocimiento sobre fenómenos como el efecto fotoeléctrico, se puede dar un acercamiento al funcionamiento de paneles solares o incluso de teléfonos inteligentes. Por lo tanto, el analizar cómo se enseña la mecánica cuántica desde el contexto universitario para la formación de licenciados cobra relevancia, al dar bases necesarias para este tipo de investigaciones.

Haciendo una revisión de cómo es la enseñanza de la mecánica cuántica en el contexto universitario, algunos estudios muestran que el currículo de enseñanza ha sido el mismo desde hace 80 años y no ha cambiado drásticamente en mucho tiempo, por ejemplo, Mario Belloni

señala lo siguiente en su artículo “Open Source Physics Curricular Material for Quantum Mechanics”:

La mecánica cuántica es quizás la materia más enseñada en el plan de estudios de ciencias físicas, sin embargo, la forma en que se enseña no ha cambiado significativamente desde la década de 1940. [...]. De hecho, los estudios han demostrado que existe muy poca diferencia entre la comprensión conceptual de la mecánica cuántica de los estudiantes de pregrado y posgrado en la mayoría de los cursos de física y química. (Belloni, Wolfgang, & Brown, 2007)

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la mecánica cuántica puede estar quedando rezagada al no abarcar temáticas más actuales o que denoten una relación más explícita de la forma en que puede ser llevada al contexto educativo. Por lo cual, la clase en general se explica desde la mecánica cuántica primitiva, para luego introducir la notación de Dirac; a partir de este formalismo matemático, se introducen los postulados de la mecánica cuántica y siguiendo este hilo, la forma en la que se enseña, tiene la intención de presentar al estudiantado el cambio de pensamiento desde la física clásica hasta la mecánica cuántica. Sin embargo, en el estudio de Bayram Akarsu titulado “An extensive Study of Teaching / Learning Quantum Mechanics in College” se presentan algunas problemáticas de la enseñanza-aprendizaje de la mecánica cuántica en universidades, uno de estos problemas es la forma en que la enseñanza es llevada a cabo mediante el currículo antes mencionado; en este estudio se evidencia que los estudiantes sufren de problemas a nivel matemático, destacando que el enfoque a un nivel conceptual quita atención de la parte matemática y esta termina siendo pesada, a tal punto de generar una confusión en ellos. Como dice uno de los maestros a cargo de enseñar este curso en la investigación: “... los estudiantes captan el contenido del trabajo del curso, pero las pesadas herramientas matemáticas involucradas y las matemáticas esenciales se utilizan demasiado y dificultan el trabajo de los estudiantes.” (Akarsu, 2010)

Por lo tanto, desde lo presentado por Akarsu se evidencia que hay un desfase entre lo aprendido conceptualmente y los desarrollos matemáticos propios de la teoría, y entonces, el currículo además de ser antiguo también tiene inconvenientes, ya que los estudiantes parecen no lograr el entendimiento de manera general del curso enfocándose o en las matemáticas o en el análisis conceptual.

A pesar de este panorama, se encuentra en la literatura algunas alternativas para introducir los conceptos de la mecánica cuántica en los cursos de pregrado. Tal es el caso del libro *Quantum Mechanics* de McIntyre, D. H; aquí el autor genera un currículo que parte de la característica del espín del electrón $\frac{1}{2}$ y del fotón con valor de 1, para denotar la relación conceptual y matemática de la mecánica cuántica, pues a través del experimento de Stern-Gerlach logra evidenciar un cambio conceptual, que lleva al lector al cambio de la mecánica clásica a la cuántica, con ello introduce la notación de Dirac y así llevar la parte matemática y conceptual de la mano, llegando a la siguiente afirmación: “La sencillez de los sistemas spin $\frac{1}{2}$ y spin 1 permite a los alumnos centrarse en estas nuevas características, que van en contra de la mecánica clásica.” (McIntyre, 2022)

De lo anterior, se muestra que el espín presenta una opción para abarcar de forma alterna la mecánica cuántica, dado que en su introducción muestra un cambio conceptual respecto a la mecánica clásica, algo esencial para ver la necesidad de una nueva formulación. A su vez estos sistemas dan el abordaje matemático necesario para el entendimiento del formalismo propio de la mecánica cuántica que luego se utiliza en los cursos de física estadística, evidenciando con ello una relación entre lo conceptual y el formalismo matemático.

Por supuesto que cambiar el currículo de mecánica cuántica, respecto a los temas que se abordan en el aula es un trabajo extenso, sin embargo, a través de la enseñanza del espín se presenta una alternativa para iniciar dicho cambio, teniendo en cuenta lo señalado por McIntyre, D. H, quien enfatiza que el espín muestra la necesidad del cambio de pensamiento de la física clásica a la física cuántica, además de usar la formalización propia de la mecánica cuántica para afianzar su uso en el curso.

Sin embargo, el enfoque desde el currículo tradicional hace difícil evidenciar las ventajas de introducir el espín en los cursos como concepto que articule las formulaciones matemáticas con un fenómeno físico y su interpretación, como es el caso de libros como “Introducción a la mecánica cuántica” de Luis de la Peña o las lecturas de Feynman sobre Mecánica Cuántica en "Física Volumen 3"; en la estructura mostrada en estos documentos (que es diseñada a partir de la forma de enseñar dicho curso por los autores) el espín tiene una sola intención, mostrar una propiedad intrínseca de las partículas, pero sin evidenciar sus utilidades como el de introducir

una forma más clara de entender los fenómenos cuánticos de superposición o de esclarecer su matemática afianzando la notación de Dirac.

Al revisar el contexto local se encuentran textos como el de Yeison Javier Cuesta Beltrán y Carlos Javier Mosquera Suárez, en donde hablan de su experiencia a la hora de enseñar mecánica cuántica y dejan implícito que su estructura es regida por este currículo pues como se menciona “En buena medida la organización temática de los cursos se adecúa a partir del orden propuesto por los libros de texto” (Beltrán & Suárez, 2021) en donde el libro utilizado aquí es el de “Principles of Quantum Mechanics” de Shankar, un libro que tampoco remarca las ventajas del uso del espín y que se centra en la matemática, resaltando la poca relación entre el análisis conceptual y matemático que presenta el currículo. Por lo que, surge la idea de potenciar su enseñanza, para así contribuir con un abordaje alternativo del concepto de espín en cursos de mecánica cuántica, modificando en cierta medida su presentación y fomentando una enseñanza alternativa a través del teorema espín- estadística.

Este teorema es tradicionalmente presentado en cursos de mecánica estadística a la hora de entrar en la explicación de la distribución de partículas cuánticas y se muestra como una forma de caracterizar a las partículas y la respectiva estadística a seguir. Sin embargo, dada la forma en que fue publicado por el mismo Pauli se asume como un postulado para tener en cuenta a la hora de trabajar con sistemas de partículas con un espín definido; puntualmente, teniendo en cuenta que las partículas con espín entero siguen la distribución de Bose- Einstein y las de espín semientero siguen la de Fermi-Dirac por medio del principio de exclusión de Pauli. Teniendo en cuenta que no se profundiza en su explicación de manera extensa, uno de los propósitos del trabajo es brindar a los futuros licenciados herramientas conceptuales que les permita una alternativa de enseñanza para la comprensión del concepto de espín.

Por lo tanto, estudiar las partículas con diferentes espines ($\frac{1}{2}$, 1) permite hacer un acercamiento para entender el teorema. Además, explicarlo en las clases de mecánica cuántica permitiría afianzar aún más los métodos vistos en el curso, para su apartado conceptual y formalismo introduciendo temas para su utilización posterior en cursos como física estadística.

Pregunta Orientadora

Teniendo en cuenta lo presentado en el contexto problemático, se plantea un estudio de tipo disciplinar, donde se aborden las partículas con dos espines distintos (teniendo en cuenta que estos son parte del modelo estándar de partículas) para tener una nueva forma de presentar el teorema de espín-estadística y proponerlo para el curso de mecánica cuántica. Esto con el fin de formar una alternativa de enseñanza en el curso de la Universidad Pedagógica Nacional, donde se afiancen temas del curso en su parte formal y conceptual, esperando reducir los vacíos conceptuales y, por tanto, se den bases para un aprendizaje posterior de teorías más avanzadas. Por lo cual, se plantea la siguiente pregunta problema:

¿Cómo a partir del estudio de espines $\frac{1}{2}$ y 1 se puede abordar el teorema espín-estadística como una alternativa para la enseñanza del espín en cursos de mecánica cuántica?

Objetivos

Objetivo General

Establecer una ruta de trabajo para la enseñanza del espín en cursos de mecánica cuántica usando el teorema espín-estadística desde las características de partículas con espines $\frac{1}{2}$ y 1.

Objetivos Específicos

1. Construir un marco histórico que contextualice el surgimiento del teorema espín-estadística entre las décadas de 1920 y 1930, para resaltar los elementos que permitieron la introducción del espín en la descripción estadística.
2. Describir las características de los espines $\frac{1}{2}$ y 1 para el abordaje de las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac.
3. Mostrar un caso en el cual se evidencie la diferencia en la solución con interpretación estadística al caracterizar el sistema con espines $\frac{1}{2}$ y 1.

Antecedentes

Teniendo en cuenta la revisión inicial de bibliografía, se presentan los antecedentes que permiten visualizar la contextualización de la temática, en este caso al rededor del teorema espín-estadística, que es parte del objetivo general de la investigación. Además, se muestran investigaciones que dan una perspectiva en la enseñanza de la mecánica cuántica y del espín. Por lo tanto, se escogieron los siguientes antecedentes:

1. El artículo “Rotational invariance and the spin-statistics theorem” de Paul O’Hara de la universidad de Illinois, en el cual se trabaja con la invarianza rotacional en estados cuánticos como causa del principio de exclusión de Pauli usando notación de Dirac y con lo cual se llega a una clasificación de sistemas cuánticos con estados unidos y no unidos que corresponden a una estadística específica. Desde esta propuesta se plantea una nueva perspectiva del teorema espín-estadística. Para la presente investigación la forma en que el autor realiza el análisis ayudó a vislumbrar otra forma de entender la estadística de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, lo cual aporta al trabajo brindando un nuevo entendimiento de la estadística, alejado de los libros tradicionales que hablan de ella y del teorema espín-estadística, ya que en este documento se retoman las ideas de principio de exclusión, estadística de Bose-Einstein y Fermi-Dirac de forma sintética y precisa para su posterior análisis en relación con la invarianza rotacional y así llegar con ello al teorema.

2. El artículo “La enseñanza de conceptos fundamentales de Mecánica Cuántica a alumnos de graduación en Física” Glauco Cohen F. Pantoja, Marco Antonio Moreira y Victoria Elnecave Herscovitz de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul de Brasil del año 2014, estudia la adquisición y retención de conceptos de mecánica cuántica, partiendo de la enseñanza de temas estructurados desde el currículo tradicional; abarcando el cambio de pensamiento de física clásica a física cuántica, notación de Dirac y culminando con la ecuación de Schrödinger que llega al concepto probabilístico. Aquí los autores señalan que particularmente las concepciones probabilísticas son el problema fundamental a la hora de entender la mecánica cuántica, además de resaltar la importancia del conocimiento previo para su entendimiento. Por lo cual, este documento aportó al presente trabajo dando una perspectiva de los problemas generados a la hora de proponer un currículo de mecánica cuántica, lo cual ayuda a la

investigación al dar un panorama más claro del currículo tradicional que hace parte de la problemática del texto.

3. El estudio “Práctica de enseñanza de un profesor universitario de física cuántica en Colombia, diagnóstico” de Yeison Javier Cuesta Beltrán y Carlos Javier Mosquera Suárez de 2021 de la Universidad Distrital, para el Congreso Internacional Sobre Formación de Profesores de Ciencia. En este documento se caracteriza la enseñanza de un maestro de física cuántica en cursos de licenciatura en el país. Este aporta a la presente investigación, contextualizándola en el entorno de las licenciaturas en Colombia, pues el material de investigación o propuestas en cursos de mecánica cuántica en la ciudad es muy limitado.

CAPÍTULO 1: UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO A LA PRIMERA INTERPRETACIÓN DEL TEOREMA

El teorema de espín-estadística se aborda en cursos de física estadística, pues permite caracterizar la estadística de un sistema desde las propuestas realizadas en el siglo XX, donde se manejan conceptos pertenecientes a la mecánica cuántica. Como se señala en el libro de enseñanza de física estadística “Curso De Física Teórica Volumen 5: Física Estadística” de L. D. Landau and E. M. Lifshitz:

Si la temperatura de un gas ideal (a una densidad dada) es lo suficientemente baja, la estadística de Boltzmann se vuelve inaplicable y se debe idear una estadística diferente, en la que los números medios de ocupación de los diversos estados cuánticos de las partículas no se supongan pequeños. Esta estadística, sin embargo, difiere según el tipo de funciones de onda por las que se describe el gas cuando se considera como un sistema de N partículas idénticas. (Landau & Lifshitz, 1969)

Entonces desde esta perspectiva, la estadística propuesta por Boltzmann en el siglo XIX no es suficiente para la explicación de los casos abordados en la mecánica cuántica, donde, se resalta la diferencia en las funciones de onda que describen el sistema y, por tanto, la forma en que los sistemas se abordan desde la física estadística tendrá diferente formalismo.

Aquí el teorema se encarga de distinguir un sistema particular según una de las dos estadísticas que cumplen con este objetivo desde la mecánica cuántica: la estadística de Bose-Einstein (1924) y la estadística de Fermi-Dirac (1926). Para la caracterización de estos sistemas se usa como elemento focalizador al “espín”¹. Entonces se da por hecho que si el espín de las partículas de un sistema de N partículas tiene número entero seguirán la estadística de Bose y, por otro lado, si el sistema tiene número de espín semientero, este seguirá la estadística de Fermi.

¹ Si bien el espín se define desde la interpretación de Pauli como una propiedad intrínseca del electrón: “Si se intenta tratar las fuerzas y momentos causados por *el momento del propio electrón*” (Pauli W. E., 1927, pág. 602) se puede definir como: una característica intrínseca al campo asociado a cada tipo de partícula “El espín es intrínseco o inherente, es decir, es una característica fija del campo ondulatorio que no depende de las circunstancias ambientales” (Ohanian, 1986, pág. 504)

Sin embargo, la demostración de este teorema se deja de lado para ser presentado como un postulado y se establece que para entender su desarrollo se involucran conceptos más avanzados que la física estadística, como lo menciona Feynman en “The Feynman Lectures on Physics: Mecánica Cuántica”:

Esto conduce a una pregunta interesante: ¿Por qué las partículas con espín semientero son fermiones cuyas amplitudes se suman con signo menos, mientras que las partículas con espín entero son bosones cuyas amplitudes se suman con el signo positivo? Pedimos disculpas por no poder darles una explicación elemental. Pauli ha dado una explicación partiendo de argumentos complicados de la teoría cuántica de campos y de la relatividad. Ha demostrado que necesariamente las dos deben ir juntas, pero no hemos podido encontrar un modo de reproducir sus argumentos a un nivel elemental (Feynman, Leighton, & Sands, 1971, pág. 71).

Teniendo en cuenta el panorama que se presenta desde los libros de texto, en el presente capítulo se resaltan los elementos que llevaron a la conexión entre la estadística y el espín, desde el surgimiento de los análisis en mecánica cuántica de la estadística y, por tanto, brindará un marco histórico que permita acercar la idea de espín en la estadística sin en uso de la teoría cuántica de campos. Es de resaltar que el propósito del trabajo no es un análisis histórico profundo respecto al surgimiento de las estadísticas cuánticas, sino dar un breve contexto al lector sobre la terminología que se usará en los siguientes capítulos y vislumbrar las relaciones que permiten hablar en estas dos estadísticas respecto al espín.

1.1 Boltzmann y la Primera Interpretación de la Física Estadística

Inicialmente desde la perspectiva histórica antes de 1925 (previo a la formalización de la mecánica cuántica), el espín y la estadística fueron temas que no tenían relación. Para comprender un poco de esto hay que entender que el desarrollo de la física estadística nace en el siglo XIX, un tiempo donde teorías como el electromagnetismo de Maxwell cobran vida y junto a él la teoría termodinámica propuesta por Boltzmann (responsable de traer los métodos estadísticos a la física). Ahora bien, aunque estas teorías se construían para interpretar fenómenos físicos, desde el pensamiento de la época, su objetivo era ser descritas desde la mecánica newtoniana como lo menciona (Jaynes, 1967) “El dogma oficial en ese momento (siglo XIX) era

que todos los hechos de la física debían explicarse en términos de la mecánica newtoniana; particularmente el de las partículas que interactúan a través de fuerzas centrales.” (Jaynes, 1967)

En el caso particular de la termodinámica se dio pie a un análisis estadístico, a partir de los trabajos del físico Ludwig Boltzmann, quien en 1868 hace la primera referencia a un análisis estadístico en la teoría termodinámica, específicamente lo realiza en su artículo “Estudios sobre el equilibrio de energía cinética entre puntos materiales en movimiento”. Aquí Boltzmann discute sobre los principios mecánicos presentes en los teoremas del calor mecánico, y donde a partir de ello, establece un teorema para la probabilidad de posiciones y velocidades de los puntos de un material (Boltzmann, 1868).

De este artículo de Boltzmann se pueden resaltar dos aspectos importantes: en primera instancia se encuentra el concepto de “puntos”, puesto que aquí usa esta palabra para caracterizar a los diferentes elementos individuales constituyentes del sistema; es decir, Boltzmann al hablar de “puntos” hace referencia a moléculas o partículas y por lo tanto, evidencia que para hablar de estadística desde la termodinámica en sistemas macroscópicos, es necesario el uso de elementos individuales microscópicos con características de posición y momento, los cuales, en conjunto den cuenta de características macroscópicas como la temperatura. Puntualmente este aspecto Boltzmann lo describe en las conclusiones mediante el abordaje de *equilibrio de energía cinética*, lo cual establece como:

Sin embargo, esta prueba también llena un vacío dejado en la solución de todos los demás problemas; muestra no sólo que el equilibrio de energía cinética tiene lugar para esta distribución de velocidades, sino también que lo mismo no es posible de ninguna otra manera. (Boltzmann, 1868, pág. 96)

Con esta conclusión Boltzmann establece que el equilibrio energético es equivalente a la media de las distribuciones de velocidades de los “puntos” del material, lo cual era un concepto que no se había trabajado previamente en termodinámica, y algo a remarcar, es que con ello Boltzmann describe a la termodinámica en términos de partículas (elementos de importancia para la mecánica cuántica) y excluye cualquier otra explicación, pues es por este análisis colectivo que se puede llegar a explicar el fenómeno macroscópico.

El segundo aspecto importante del artículo de Boltzmann, se encuentra el uso de métodos estadísticos, puesto que, si bien la estadística en esta época ya tenía un desarrollo previo a la teoría termodinámica, el uso de ésta dentro de la física no era algo común. Sin embargo, para el desarrollo de su trabajo, Boltzmann logra vincular definiciones estadísticas para hablar de los análogos mecánicos con la termodinámica, como menciona Hajime Inaba en su texto “El desarrollo de la teoría de colectividad: Una nueva mirada a la historia de la mecánica estadística” donde se hace un recorrido histórico partiendo de los trabajos de Boltzmann para el desarrollo de la definición de colectividad estadística:

En particular, confiando sobre argumentos combinatorios y la definición de probabilidad en términos de tiempo de permanencia, (Boltzmann) demostró el teorema de que la energía cinética promedio de todos los puntos materiales de un sistema, debe ser el mismo cuando la energía cinética total permanece constante. (Inaba, 2015, pág. 3)

Es decir que, para que en un sistema termodinámico se encuentre el equilibrio de energía que menciona Boltzmann, es necesario el análisis desde el movimiento cinético de los “puntos” de forma microscópica y, por tanto, solo se puede derivar esta explicación a partir de la distribución estadística de velocidades de estos “puntos”.

A partir de la formulación de Boltzmann, los métodos estadísticos empiezan a ser considerados en termodinámica, pero realmente se consolidan hasta 1876, cuando Harry William Watson publica su libro “Un tratado sobre la teoría cinética de Gases”, donde ilustra algunos propuestos físicos con el método estadístico. Posteriormente Maxwell en 1877 hace una revisión y crítica de este documento, llegando a la idea de usar estos métodos para una generalización más certera del teorema propuesto por Boltzmann. Puntualmente Maxwell lo menciona de la siguiente forma:

La aplicación de este método a sistemas que constan de un gran número de cuerpos está fuera de discusión. Por tanto, hacemos uso de otro método que podemos llamar el método estadístico, debido a su analogía con los métodos empleados para tratar con las fluctuaciones de una gran población. (Maxwell, 1877)

En esta afirmación es evidente que los métodos usados previamente a la propuesta de Boltzmann son insuficientes para el abordaje de sistemas termodinámicos tratados desde un

análisis microscópico y, por tanto, Maxwell establece un punto de partida para empezar a desarrollar una propuesta de análisis con base en los métodos estadísticos, con la intención de llegar a lo descrito por Boltzmann en 1868. Es así como Maxwell establece las bases de la física estadística, partiendo de la definición de colectividad estadística² y del uso de estados para referirse a los distintos casos en que los sistemas están teniendo en cuenta las condiciones particulares de los mismos. Finalmente, Maxwell describe la forma en que una función de distribución, que tiene en cuenta a todos los elementos del sistema, puede caracterizar al sistema de forma macroscópica tal como afirma Inaba al hablar del trabajo de Maxwell:

Una vez que una función que representa la distribución se vuelve constante, permanecerá inalterada en cualquier momento posterior. En el estado estacionario, la energía cinética promedio es la misma para diferentes partes del sistema. Esto representa la condición de igualdad de temperatura de las dos partes del sistema. (Inaba, 2015, pág. 7)

Es decir, que al tener en cuenta la distribución estadística de estos “puntos” se explica el equilibrio térmico de un sistema, una idea que resuena con la de Boltzmann de 1868 pues Maxwell complementa lo realizado por él.

A partir de estos trabajos, Boltzmann en 1881 publica una crítica a la propuesta de Maxwell, resaltando los aspectos más importantes de este en relación con los contrastes que encontró con su artículo de 1868, con lo cual, Boltzmann llega a una forma de adaptar su definición de ensamble estadístico, uno en el que toma en cuenta la interacción entre los elementos microscópicos y las condiciones externas del sistema, algo que marcó sus trabajos subsecuentes en el periodo de 1880; época donde estos también fueron impulsados con los desarrollos del físico Hermann Helmholtz, quien mostró una relación análoga entre el comportamiento mecánico de sistemas monocíclicos y los sistemas termodinámicos, lo cual motivó a Boltzmann en sus investigaciones durante esta década (Inaba, 2015, pág. 10).

Un aspecto importante respecto a la aceptación de las teorías de Boltzmann y Maxwell se encuentra en la academia, donde, posterior a la década de 1890, el físico Josiah Willard Gibbs en

² La colectividad o ensamble estadísticos desde esta perspectiva es una propuesta en la cual un sistema macroscópico estará compuesto de copias virtuales del mismo con características similares al sistema, donde estas representaran los estados posibles del sistema. Es decir, se maneja un sistema de n coordenadas y , por tanto, n momento, tal que, para ser constante se plantea que: $dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = dq'_1 \dots dq'_n dp'_1 \dots dp'_n$

sus clases presenta el desarrollo de la teoría termodinámica partiendo de los artículos de Boltzmann, Maxwell y Hemholtz. Este abordaje en las aulas muestra la eficacia y aceptación de la formulación de la termodinámica a partir de la estadística, además, porque a partir de las notas clases de los cursos de Gibbs, en 1902 se publica en un libro titulado “Principios Elementales” en el cual se formaliza a la física estadística y este documento se convierte en una base para el estudio de la teoría.

A partir de este breve recorrido por la formalización de la termodinámica desde el abordaje estadístico, se puede decir que en el inicio la física y la estadística eran estudios individuales los cuales, debido a la propuesta de Boltzmann, se vinculan en el estudio de sistemas termodinámicos por medio de un análisis mecánico de sistemas microscópicos, que permitieran dar cuenta de las características macroscópicas. Después con autores como Maxwell, Helmholtz y Gibbs, esta teoría se consolida en la física estadística propiamente. Se resalta que para hablar de ella hay que tener en cuenta dos características: la primera es la *colectividad*, pues para hacer dicha descripción estadística hay que descomponer un sistema macroscópico en copias virtuales del mismo, algo que Boltzmann llama “*puntos*” (y que después serán llamados partículas), un aspecto importante que cambia la forma en que se concibe el análisis de un sistema con muchos cuerpos y que será retomado en las posteriores formalizaciones, y la segunda dado que este comportamiento individual debe responder a fenómenos macroscópicos, como es el caso de la energía total del sistema, los llamados “puntos” y el promedio estadístico de la energía cinética de éstos responden a la energía promedio del sistema.

1.2 La Estadística de Bose (1924)

Siguiendo con la idea planteada en la sección anterior, la mecánica estadística nace con el objetivo de describir la teoría termodinámica en términos de la mecánica newtoniana, lo cual trae consigo el uso de métodos estadísticos a la física. Por lo cual, el análisis de sistemas macroscópicos a partir de sus elementos microscópicos (moléculas o partículas) es lo que se le puede definir como estadística para lo que concierne al presente trabajo.

Por lo tanto, al seguir la línea de tiempo, se puede destacar que la mecánica estadística encuentra una nueva formulación a partir de las teorías físicas que emergen a comienzos del siglo XX, puntualmente desde la mecánica cuántica. Para visualizar cómo la mecánica cuántica juega

un papel crucial en el desarrollo de una nueva forma de estadística, hay que señalar que a comienzos del siglo nace una nueva forma de entender a la radiación en la solución planteada por Max Planck en sus estudios realizados con el cuerpo negro. Aquí se plantea que el comportamiento del cuerpo negro era descrito a partir de la cuantización de la energía. Posterior a ello en 1905 Einstein en su artículo llamado “Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz” argumenta la idea de la cuantización de energía y plantea una nueva forma de comprender a la radiación:

Según la suposición que se propone hacer, la propagación de un haz de luz desde un punto no se distribuye continuamente en espacios más y más crecientes, sino que el mismo consiste en un número finito de cuantos de energía localizados en puntos del espacio, los cuáles se mueven sin partirse y sólo pueden ser absorbidos o emitidos como un todo. (Einstein, 1905)

Con lo anterior surge la idea de analizar a la radiación como un todo a partir de sus elementos constituyentes, es decir, cuantos de luz, por lo que, es de aquí donde se establece posteriormente el planteamiento estadístico, algo que es realizado por el físico Satyendra Nath Bose en el año de 1924. Bose en su artículo “La ley de Planck y la hipótesis cuántica de la luz” realiza un análisis estadístico a la radiación teniendo en cuenta la distribución de cuantos, con lo cual, llega a la misma solución planteada por Max Planck para el problema del cuerpo negro y que es retomada por Einstein para su artículo de 1905.

Aquí hay que resaltar que desde 1924 se empieza a hablar del término de partículas como constituyentes primordiales y de fotones como partículas de radiación y, por tanto, Bose utiliza este término en su artículo, sin embargo, no se menciona el comportamiento corpuscular-ondulatorio los fotones como uno solo y, por tanto, la discusión de partícula como onda o corpúsculo se deja de lado. Por lo que, se asume que Bose en su primer acercamiento a la estadística toma a los fotones como cuantos de energía, que son descritos de forma ondulatoria, tal como afirma George Sudarshan en una nota sobre la relación de Bose y el nacimiento de la teoría cuántica: “Debemos concluir que los fotones pueden ser partículas, pero no se comportan como se espera ingenuamente que se comporten las partículas. Habría que hacer una revisión del concepto de partícula.” (Sudarshan, 1994)

Ahora hay que destacar que en su artículo Bose para determinar la distribución de cuantos, se guía del método combinacional de Boltzmann para así encontrar las diferentes distribuciones de acuerdo con el número de ocupación de estos (ecuación 1). Con lo cual, se trae la idea de constituyentes indistinguibles, y, por tanto, nace la idea de un análisis con una distribución con partículas indistinguibles, así como se afirma en el texto de Paula Mallol Travesset donde analiza el origen de la estadística de Bose-Einstein: “El hecho de repartir los cuantos en las diferentes células sin especificar qué cuanto va a cada celda y solo enfocarse en cuántos cuantos van a cada celda hace posible deducir la indistinguibilidad asignada.” (Travesset, 2018, pág. 2)

$$P(\nu) = \prod \frac{\left(\frac{8\pi V \nu^2}{c^3}\right)}{p_0(\nu)! p_1(\nu)! p_2(\nu)! \dots} \quad (1)$$

En la ecuación 1 se da el número de distribuciones posibles en el sistema de la forma $P = \prod_{\nu} P(\nu)$ donde este es dado por el número total de celdas de acuerdo con la frecuencia $A(\nu) = \left(\frac{8\pi V \nu^2}{c^3}\right)$, que nace de la relación entre el espacio de fase y el rango de frecuencia, la cual está sobre las distribuciones con su número de ocupación, donde $p_n(\nu)$ es el número de celdas conteniendo a los n fotones, es decir, que no se distingue que fotón va en cada celda específicamente.

Posteriormente Einstein en su artículo titulado “Teoría cuántica del gas ideal monoatómico” realiza un análisis similar al de Bose, pero en vez de trabajar con fotones trabaja con moléculas de masa m , lo cual da la introducción un término conocido como parámetro de degeneramiento, con el cual se demuestra que la estadística propuesta para los fotones tiene un límite el cual es la estadística clásica (la propuesta por Boltzmann y Maxwell): “Este hecho permitió a Einstein concebir la teoría clásica de los gases ideales como un caso límite de la nueva teoría cuántica.” (Travesset, 2018, pág. 3)

Por lo tanto, se puede mencionar que la estadística propuesta por Bose se construye a partir de responder a la teoría de la mecánica cuántica, dando una descripción alterna a la radiación de cuerpo negro propuesta por Planck, esto se logra gracias a concebir a la luz como una composición de elementos llamados cuantos de energía o también llamados fotones. Algo que Planck no esclarece en su propuesta, pero que dota a la luz y en general a cualquier tipo de

radiación con características susceptibles de abordar desde la mecánica estadística. Un aspecto importante que se resalta de la descripción de Bose, es la forma en que se trabaja con el sistema microscópico, recordando que para Boltzmann este análisis se logra a partir de los “puntos”, aquí se trabaja con los “cuantos” de luz. Por lo tanto, se puede interpretar que en la estadística de Bose estas partículas dejan de ser virtuales y se establecen como un elemento con identidad desde la mecánica cuántica.

Sin embargo, en la descripción que hace Bose de los cuantos no se define a los mismos y, por tanto, no es claro desde aquí si el fotón se puede considerar como partícula. Aun así, se le atribuye una característica de indistinguibilidad entre ellos como se ve en la ecuación 1, además de proponerse como un caso límite de la estadística propuesta por Boltzmann y Maxwell gracias a los desarrollos de Einstein.

1.3 La Estadística de Fermi (1926)

Antes de hablar de la propuesta estadística posterior a la de Bose, hay que destacar que para esta época las partículas que se consideraban como partículas esencialmente, eran el electrón y el protón, algo que como se dijo en el inciso anterior dejaba la incógnita de considerar a los fotones como una partícula, además de explicar su comportamiento.

Teniendo en cuenta el desarrollo de la teoría atómica, el físico Ernest Pauli en enero de 1925 propone, en un estudio del átomo, el famoso principio de exclusión³, en el artículo titulado “Sobre la conexión entre la terminación de los grupos de electrones en el átomo y la estructura compleja de los espectros”. Este principio termina siendo importante por dos motivos: El primero es su relación con el comportamiento de los electrones, dado que Fermi se basa en este principio para realizar su propuesta estadística y que dista de la propuesta de Bose pues aquí los números de ocupación juegan un papel importante; Y el segundo es por su relación con el espín, pues Pauli se hace referencia a esta propiedad antes de ser evidenciada experimentalmente tiempo después.

³ El principio de exclusión como se daba en el capítulo anterior explica que un electrón no puede ocupar los mismos números cuánticos que otro electrón, por lo tanto, dos electrones deben tener números cuánticos distintos entre sí. Por lo tanto, el intercambio de dos electrones debe ser distinto del intercambio de dos bosones pues estos últimos tienen la característica de ocupar los mismos números cuánticos.

Entonces Pauli comienza este artículo recapitulando las relaciones encontradas por sus investigaciones del efecto Zeeman, donde se menciona al espín del electrón:

Por la presente se sugiere, este u otro confrontarse con el hecho de que la estructura de doblete de los espectros alcalinos, así como el efecto Zeeman anómalo, son causados por una ambigüedad de las propiedades teóricas cuánticas del electrón luminoso que no se puede describir clásicamente. (Pauli W. , 1925)

De esto se puede decir que el espín del electrón para Pauli es la causa de la estructura de doblete los espectros alcalinos⁴. Y es con esta premisa y analizando los desarrollos de la teoría atómica que llega a proponer su principio:

Nunca puede haber dos o más electrones equivalentes en el átomo para los que los valores de todos los números cuánticos n, k_1, k_2, m_1 (o, lo que es lo mismo, n, k_1, m_1, m_2) coincidan en campos fuertes. Si un electrón está presente en el átomo para el cual estos números cuánticos (en el campo externo) tienen valores específicos, entonces este estado está "ocupado" (Pauli W. , 1925).

Es decir, que el electrón ya tiene una condición de distribución y es con esto que Fermi en marzo de 1926 teniendo en cuenta el teorema de Nernst desarrolla una propuesta en su artículo “Para la cuantificación del gas monoatómico ideal” para la distribución de moléculas en un gas, que, desde las suposiciones ya establecidas, termina siendo una distribución de electrones:

Si la ley del calor de Nernst también debe seguir siendo válida para el gas ideal, se debe suponer que las leyes de los gases ideales a bajas temperaturas se desvían de las clásicas. [...]. Para todas las teorías de degeneración se están convirtiendo en suposiciones más o menos arbitrarias sobre el comportamiento estadístico de las moléculas, o en base a su cuantificación. En el presente trabajo solo utiliza la suposición hecha por primera vez por Pauli y basada en numerosos hechos espectroscópicos [...] (Fermi, 1926)

⁴ El doblete de espectros alcalinos hace referencia al par de líneas de espectro en los materiales alcalinos que antes se consideraban como muchas líneas desde el estudio de espectroscopia de 1925: Desde que los espectrómetros fueron lo suficientemente sensibles y se les dotó de un alto poder de resolución, los espectroscopistas se dieron cuenta de que muchas de las líneas espectrales no eran sino dos, tres o más líneas muy juntas. A estos grupos se les denominó multipletes. (CRUZ-GARRITZ, CHAMIZO, & GARRITZ, 1991, pág. 306)

Aquí se puede resaltar como se dijo anteriormente que Fermi se guía de la propuesta de Nernst para desarrollar una teoría estadística para la distribución de electrones teniendo en cuenta los desarrollos de Pauli y sobre todo al espín del electrón que está presente de manera implícita en los estudios espectroscópicos como se mencionaba anteriormente.

También cabe resaltar que el trabajo de Fermi dista del propuesto por Bose y Einstein por su desarrollo estadístico, pues si bien Bose toma de inspiración los trabajos de Boltzmann, Fermi trata de alejarse de la forma en que se establece la propuesta estadística de Boltzmann, aunque termina llegando a ideas estadísticas, como se afirma en su trabajo: “El propósito del presente trabajo es desarrollar un método para cuantificar el gas ideal, que en nuestra opinión es posible independiente de suposiciones arbitrarias sobre el comportamiento estadístico de moléculas de gas” (Fermi, 1926).

Por lo que, se puede destacar que la importancia de su propuesta radica en su realización independiente de las teorías estadísticas ya existentes y, sin embargo, termina dando cuenta de un análisis estadístico, así como se afirma en el texto “Elementos indistinguibles en los orígenes de la cuántica estadística. El caso de las estadísticas de Fermi-Dirac”, en este documento se hace una reconstrucción histórica de la estadística de Fermi-Dirac y se afirma que: “Así, Fermi establece explícitamente la falta de independencia estadística en su enfoque, al tiempo que lo diferencia del postulado por Einstein” (Enric Pérez, 2022, pág. 3), donde al hablar *del postulado de Einstein* hace referencia a los estudios desarrollados partiendo de la estadística de Bose, que se recuerda está usando los métodos estadísticos de Boltzmann.

Además, se pueden encontrar aspectos fundamentales en la concepción de partícula, pues si bien Fermi idea su propuesta basada en moléculas como puntos materiales al igual de Boltzmann, al usar la energía cuantizada y el principio de exclusión introduce conceptos de la teoría cuántica, sin embargo, al igual que Bose no se adentra a la concepción de una distribución con partículas tomadas con un comportamiento dual onda-partícula. Pero al igual que Bose, Fermi llega a la idea de partículas idénticas unas de otras, trayendo otra vez la indistinguibilidad entre partículas en un análisis estadístico: “No hace falta decir que el la indistinguibilidad de los elementos tiene, en este contexto, el mismo significado que en la estadística clásica.” (Enric Pérez, 2022, pág. 3)

Por lo que, teniendo en cuenta la energía del sistema dada por una energía cuantizada y con la limitante del teorema de Nernst, se llega a una configuración de elementos dependientes de los diferentes niveles de energía y se tiene en cuenta el principio de exclusión para las partículas (ver ecuación 2), como lo presenta el mismo Fermi:

En el sentido explicado anteriormente, es el número de arreglos de moléculas N_s en los sitios Q_s de energía dada por $E = h\nu$. Por lo tanto, encontramos la expresión para P (probabilidad del sistema) donde se obtienen los valores más probables de los N_s buscando el máximo de P con las restricciones... (Fermi, 1926)

$$P = \prod_s \frac{Q_s!}{N_s! (Q_s - N_s)} \quad (2)$$

Finalmente, si bien la estadística de Fermi nace sin tener en cuenta los métodos estadísticos de Boltzmann, la condición propia de los electrones dada por el principio de exclusión de Pauli dio como resultado una descripción estadística, algo que sorprendió incluso al mismo Fermi. Teniendo en cuenta estos resultados, se puede hablar de una condición estadística dada por las partículas mismas cuando se trabajan desde la descripción de la mecánica cuántica y sobre todo se resalta que esta descripción cuántica contempla al espín del electrón, aunque en este punto no se menciona de forma explícita. Además, es notable cómo en la estadística de Fermi se emplea la misma condición de indistinguibilidad mencionada por Boltzmann y Bose, denotando a esta como una característica fundamental en la descripción estadística independientemente del tipo de partículas con las que se esté trabajando.

1.4 El Espín en las Teorías de Partículas

Como se pudo evidenciar en los apartados anteriores el desarrollo de la estadística poco tuvo que ver con el espín de las partículas, aunque si bien se menciona a este en el desarrollo de la propuesta de Fermi, se toma como un número cuántico teórico pero que no es referente para distinguir con estas las propuestas de Fermi y Bose. Así que antes de hablar del teorema que finalmente los relaciona, se hablara del espín mismo y de cómo este fue influenciado por las teorías referentes al comportamiento y descripción de las partículas.

Retomando desde el inciso anterior, el espín del electrón fue teorizado para responder al efecto Zeeman, por lo que, en principio fue considerado como el cuarto número cuántico, uno que solo respondía al electrón dada la propuesta del modelo atómico. Sin embargo, es el físico Ralph de Laer Kronig quien apunta la idea del espín como resultado de un electrón girando, como se resalta en el texto “El espín del electrón y su historia” de Eugene D. Commins, en este documento se hace una pequeña contextualización del nacimiento de la idea de espín: “Su imagen mental del electrón era la de una diminuta esfera clásica giratoria, y su interpretación del cuarto número cuántico de Pauli fue que el eje de espín podría señalar solo dos direcciones (opuestas)” (Commins, 2012, pág. 135)

A pesar de esto Kronig abandona su idea al ser criticado por Bohr y Pauli sobre su interpretación del electrón desde la visión clásica, donde esta tenía incoherencias con la relatividad especial de Einstein, además de proponer al espín como un grado de libertad del sistema. Y es en noviembre de 1925 que Samuel Abraham Goudsmit y George Eugene Uhlenbeck llegan a una idea similar que Kronig pero que oficialmente da a conocer la idea del espín del electrón:

Por lo tanto, para estar de acuerdo con los hechos, se deben hacer las siguientes exigencias a este modelo: a) La relación entre el momento magnético del electrón y el momento mecánico debe ser el doble para la autorrotación que para el movimiento orbital. b) Las diferentes orientaciones de R al plano orbital (o K) del electrón deben poder profundizar en la explicación del doblete de la relatividad, quizás en conexión con una regla de promedio de HEISENBERG-WENTZELSH. (Uhlenbeck & Goudsmit, 1925)

Sin embargo, al igual que con Kronig, Pauli rechazó esta idea. Adjunto a esto la teoría cuántica si bien tenía desarrollos no se consideraba aún como parte de una rama formal de la física, y realmente la cuántica tenía aún muchas dificultades para reconciliar las propuestas teóricas, la interpretación de estas y las evidencias experimentales. Pero es en julio de ese mismo año que Heisenberg propone en su artículo “Sobre la reinterpretación teórica cuántica de las relaciones cinemáticas y mecánicas” el abordaje matricial para la teoría cuántica, dando un formalismo a la teoría señalando que: “Si un método para determinar datos teórico-cuánticos a

través de relaciones entre cantidades observables, como el que aquí se propone, ya podría considerarse satisfactorio desde un punto de vista fundamental...” (Heisenberg, 1925)

Hasta este punto se puede mencionar entonces que la teoría con el espín y el desarrollo de la mecánica cuántica como teoría formal, se dieron en la misma época, pero fueron llevadas por aparte. Como se mostró, primero se hizo una formalización de la teoría para después a partir de este proponer uno que involucrase al espín. Y es al año siguiente cuando nace el formalismo equivalente al de Heisenberg, la mecánica cuántica ondulatoria. Es entonces que el físico Erwin Schrödinger propone trabajar el formalismo cuántico, partiendo de funciones de onda: “ W es la función de acción, es decir h la integral temporal de la función de Lagrange $T - V$ a lo largo de un camino del sistema en función de la posición final y el tiempo.” (Schrödinger, 1926) Por lo que, Schrödinger se basa en el principio de mínima acción para realizar su descripción ondulatoria.

Cabe resaltar que, en un principio, esta función se propone a partir del formalismo de la mecánica de Hamilton y, por lo tanto, Schrödinger consive a las partículas como ondas tal cual, pero esta interpretación es cambiada por Born a una probabilística, como se menciona en el texto de Shan Gao donde se investiga sobre el significado de la función de onda:

Schrödinger originalmente consideró la función de onda como una descripción de la onda física real. Pero este punto de vista encontró serias objeciones y pronto fue reemplazado por la interpretación de probabilidad de Born (Born 1926), que se convierte en la interpretación estándar de la función de onda en la actualidad. (Gao, 2011, pág. 4125)

Por lo que, desde este formalismo las partículas que tienen un comportamiento corpuscular-ondulatorio se describen a partir de funciones de onda dependientes de los grados de libertad del sistema. Con lo cual, se puede hacer una relación con el espín, pues desde el planteamiento de Kronig se hace referencia a que el espín es un grado de libertad del sistema. Y es a partir de esto que, al año siguiente en 1927 Pauli a través del formalismo de la mecánica cuántica de Schrödinger, realiza un formalismo para el espín del electrón como lo menciona en el artículo publicado en ese año: “Se muestra cómo formular la mecánica cuántica del electrón magnético según el método de funciones propias de Schrödinger” (Pauli W. E., 1927).

Es de resaltar que en este mismo artículo es donde se proponen las matrices de Pauli. Sin embargo, se puede destacar que, hasta este punto al hablar del espín, significaba hablar solamente una propiedad de las partículas, es decir, del electrón y protón. Y no es hasta que Dirac en ese mismo año en su artículo “La Teoría Cuántica de la Emisión y Absorción de Radiación” es que formaliza al fotón como partícula, atribuyendo de forma implícita también la propiedad de espín:

También se demostrará que el hamiltoniano que describe la interacción del átomo y las ondas electromagnéticas puede hacerse idéntico al hamiltoniano para el problema de la interacción del átomo con un conjunto de partículas que se mueven con la velocidad de la luz y que satisfacen el criterio de la estadística de Bose-Einstein, mediante una adecuada elección de la energía de interacción de las partículas. (Dirac P. , 1927)

Con lo anterior, además se puede evidenciar de forma implícita una primera caracterización de los fotones mediante la estadística de Bose - Einstein dado que se les puede atribuir la propiedad de espín. Si se amplía el panorama y se compara lo que Dirac propone para la luz, la propiedad del espín, que inicialmente solo se propone para el tratamiento de los electrones mediante la estadística de Fermi, ahora se establece también para el fotón, pero con una categoría diferente a la de los electrones y en consecuencia deben caracterizarse mediante la estadística de Bose.

Con este artículo además se propone una primera distinción entre electrones y fotones a partir de sus funciones de onda:

La onda, cuya intensidad debe interpretarse en la primera de estas dos formas, aparece en la teoría sólo cuando se trata de un conjunto de partículas asociadas que satisfacen las estadísticas de Einstein-Bose. Por lo tanto, no existe tal onda asociada con los electrones. (Dirac P. , 1927)

Algo a remarcar de este artículo es que Dirac usa para los fotones el formalismo del uso de funciones simétricas para diferenciarse de los electrones. Algo similar ya había propuesto en 1926 en su artículo “Sobre la teoría de la mecánica cuántica” donde formaliza a los electrones a partir de funciones antisimétricas y propone el uso de funciones simétricas en otros casos:

Hay dos formas de elegir el conjunto de ψ_{mn} para satisfacer las condiciones. Podemos tomar $a_{mn} = b_{mn}$, lo que hace que cada ψ_{mn} sea una función simétrica de los dos electrones, de modo que el lado izquierdo de $(A\psi_{mn} = \sum_{m'n'} \psi_{m'n'} A_{m'n'.mn})$ sea simétrico y solo se requieran funciones propias simétricas para su expansión, o podemos tomar $a_{mn} = -b_{mn}$, que hace que sea antisimétrico, de modo que el lado izquierdo de $(A\psi_{mn} = \sum_{m'n'} \psi_{m'n'} A_{m'n'.mn})$ es antisimétrico y solo se requerirán funciones propias antisimétricas para su desarrollo. (Dirac & Fowler, 1926)

Desde lo anterior entonces se intuye que hay dos tipos de funciones: simétricas y antisimétricas, algo que desde su artículo de 1927 evidencia en la forma de diferenciar la estadística de Bose y la estadística de Fermi desde el formalismo de la mecánica cuántica ondulatoria mediante su función de onda. Además, se debe aclarar que Dirac parte del principio de exclusión para ello y, por tanto, este es el que dará cuenta de estas funciones de onda, por lo que, si el principio relaciona al espín, entonces este es una característica importante para la estadística, evidenciando que el teorema espín estadística no parte de un postulado, sino que surge del análisis de las funciones de onda que caracterizan el tipo de partículas:

Una función propia antisimétrica se desvanece de manera idéntica cuando dos de los electrones están en la misma órbita. Esto significa que en la solución del problema con funciones propias antisimétricas no puede haber estados estacionarios con dos o más electrones en la misma órbita, que es solo el principio de exclusión de Pauli. (Dirac & Fowler, 1926)

Por lo anterior, se puede seguir infiriendo que el principio de Pauli dictamina la función de onda y, por tanto, la estadística a seguir, pero sobre todo al relacionarla con los trabajos de Fermi también al espín y su valor específico que lo vincula para la descripción del electrón.

Ahora al examinar su artículo de 1927 y trabajar a los fotones como funciones simétricas, se puede distinguir una diferencia en su descripción alrededor del principio de exclusión el cual solo aplica para funciones antisimétricas, algo que se comprueba posteriormente cuando el valor del espín se encuentra de valor entero diferente al del electrón que es semientero, como se menciona en el texto de Commins:

Además, a modo de demostración de que estas ideas son bastante generales, Ohanian usó una forma simétrica del tensor de energía-momento para un campo de Maxwell polarizado circularmente para derivar expresiones separadas para los momentos angulares orbital y de espín de ese campo, y así llegó a una imagen intuitiva del espín del fotón. (Commins, 2012, pág. 154)

Hay un punto clave sobre este artículo, debido a que da la apertura para el desarrollo de la teoría cuántica de campos, la teoría subsecuente a la mecánica cuántica, donde ahora las partículas como el electrón o el fotón no solo se pueden representar como funciones de onda, sino, que se pueden interpretar como perturbaciones de diferentes campos y, por tanto, la representación de estas pasa de realizarse en términos de funciones de onda a ser descritas en términos de ecuaciones de campos. Además, se deben tener en cuenta las correcciones relativistas, algo que no estaba presente en el desarrollo de la teoría. En este abordaje, el espín fue totalmente influenciado en su descripción para las teorías de representación de partículas propuesta, pues el espín se toma desde valores enteros o semienteros y entonces para el fotón se empieza a usar la notación tensorial como se muestra en la ecuación 3. A propósito de esta representación Fierz dice lo siguiente:

Queremos considerar campos de ondas clásicos libres de fuerza, que pueden ser asignados por medio de la cuantización de campo relativista según Jordan y Pauli, partículas con masa m y espín $\hbar f$. f debe ser un entero positivo. Un campo de ondas de este tipo puede describirse en el caso libre de fuerzas mediante un tensor mundial simétrico, generalmente complejo, $A_{ik\dots l}$ de rango f (índices f), ... (Fierz, 1939)

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} A_{ik\dots l} = k^2 A_{ik\dots l} \quad (3)$$

Por otro lado, dada la propuesta de Dirac de formalizar al espín del electrón en una ecuación de onda (en su ecuación homónima), dejó como resultado que para la representación de espines semienteros como el electrón se usará la notación espinorial, expresada en la ecuación 4. El análisis que le da Fierz a esta ecuación se presenta como: “Los campos a los que las partículas con un espín medio numerado f ($f = \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$) pueden ser asignados pueden, por supuesto, no ser representados por tensores, sino por espinores ("medio-tensores")” (Fierz, 1939).

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} a_{\delta\rho\dots}^{\lambda\mu\dots} = k^2 a_{\delta\rho\dots}^{\lambda\mu\dots} \quad (4)$$

Sin embargo, hasta este punto se dejará solamente señalado el tratamiento desde la teoría cuántica de campos, ya que no se abordará en el presente trabajo al no hacer parte explícita de los propósitos planteados.⁵

Por lo tanto, se puede evidenciar que el espín y la estadística fueron objetos de estudios llevados por su propio camino hasta que el formalismo de la mecánica cuántica y en concreto Pauli denoto al espín como una propiedad de las partículas con una concepción propia dentro de la rama de la cuántica. Y donde si bien al principio el fotón no fue considerado como partícula, es en 1927 cuando es considerado como una por Dirac. Y es este mismo quien vincula de forma implícita a ambos, pues aquí el espín se muestra como numero cuántico y, por tanto, juega un rol importante en el principio de exclusión, donde esté a su vez dictamina la forma de función de onda que rige qué estadística seguir si la de Bose o Fermi.

1.5 Formalización del Teorema Espín-Estadística

Ahora bien, como se ha mostrado en el capítulo la relación entre el espín y la estadística desde un comienzo fueron llevados por caminos distintos, hasta 1926 cuando Dirac en su formalismo cuántico ondulatorio propone las ideas de funciones simétricas y antisimétricas para la distinción de partículas. Sin embargo, ante la nueva teoría de campos, este formalismo quedó de forma implícita, por lo que, en 1939 finalmente se presenta el teorema que relaciona de forma explícita al espín y la descripción estadística. En su artículo “Sobre la teoría relativista de partículas libres de fuerza con cualquier espín” el físico Markus Fierz llega a esta demostración en su estudio de la teoría de campos relativista con espines arbitrarios, como lo menciona en su texto: “Ocurre que dando el espín y la masa de la partícula ya está claramente definido el campo correspondiente; además, la estadística de la partícula está fijada por el espín” (Fierz, 1939)

⁵ Para entender el tratamiento espinorial revisar el artículo “A Canonical Field Theory with Spinors” de Jack Heller y Peter G. Bergmann del año 1951 (HELLER & BERGMANN, 1951) donde se trabaja con ecuaciones de teorías de campo bajo un tratamiento espinorial o revisar el capítulo 10 titulado “spinors” del libro “Quantum Field Theory and the Standard Model” de Matthew D. Schwartz del año 2014 donde se trabaja el formalismo de la teoría cuántica de campos desde los espinores (Schwartz, 2014).

Aunque no es el propósito del trabajo de Fierz, en este texto se abunda en un análisis en conjunto de la representación matemática y conceptual de la teoría cuántica de campos en relación con ecuaciones de campo tensoriales y la ecuación de Dirac, con lo que se llega al teorema como se menciona en su texto: “Desde la perspectiva anterior, la supuesta relación entre el espín y la estadística parece demostrarse matemáticamente de una manera sencilla.” (Fierz, 1939, pág. 21)

Sin embargo, es hasta el año siguiente en 1940 que Pauli formalmente se encarga de demostrar este teorema en un escrito propio para ello, uno que inicialmente es presentado para una conferencia que, al ser cancelada, se decide publicar como texto, este artículo es llamado “La conexión entre el espín y las estadísticas”. Donde cabe resaltar que el artículo, si bien se centra en relacionar estos temas de estudio, es una demostración donde se vincula la teoría cuántica de campos con la relatividad y que, sin embargo, retoma ideas de la formalización de la mecánica cuántica ondulatoria como lo son operadores de construcción y destrucción.

Es entonces que para entender un poco como se desarrolla esta prueba, en primer lugar, se tienen en cuenta que las funciones de onda para espines enteros conmutan y espines semienteros anticonmutan. Consecuente a esto se propone un campo de espín 0 libre de interacciones, por lo tanto, se aplican reglas de conmutación. En segundo lugar, se aplica la invarianza Lorentz para que estas reglas se cumplan, es decir, se introduce la conexión con la relatividad. Finalmente, al repetir esto con reglas de anticonmutación se sigue manteniendo la prueba. Con lo cual, se comprueba que a través del cambio de conmutadores y anticonmutadores, es decir, espines enteros por semienteros, la conexión con la relatividad especial se mantiene y en especial que el campo al describir partículas diferentes da cuenta de una conexión entre este tipo de partículas (su estadística) con su número de espín.

Finalmente, se puede mencionar la distinción que tuvo la física estadística del espín. La física estadística nace con Boltzmann como una forma de describir la termodinámica en términos de la mecánica de Newton, con autores como Maxwell que complementaron esta teoría, culminando con su formalización gracias a Gibbs. Por otro lado, con el desarrollo de la mecánica cuántica se dieron pie a dos formalismos de la estadística de acuerdo con los dos tipos de partículas: el fotón y el electrón. A pesar de nacer de distintos autores y contextos, estas estadísticas comparten una característica en común y que se puede destacar como fundamental,

la indistinguibilidad, pues con ella es que se logra obtener en ambos casos los resultados estadísticos. Esta característica cobra mayor relevancia cuando el principio de exclusión se basa en ello para generar como propone Dirac en 1927, la descripción de las dos estadísticas partiendo de dos funciones de onda diferentes. Con lo cual, se puede definir a la misma como el objeto focal para el teorema espín-estadística.

En este punto se aclara, que el abordaje que se realizó en el capítulo de los documentos que de manera histórica dieron pie a la construcción de las estadísticas y el teorema espín-estadística, tiene como propósito mostrar la línea de investigaciones relacionadas, y que a pesar de en algunas ocasiones no están conectadas directamente, comparten elementos para la descripción de los sistemas estadísticos. Fundamentalmente se encuentra que las diferencias en las estadísticas cuánticas se establecen de acuerdo con el tipo de partícula de manera natural mediante el espín, no solo tomando a éste como una imposición para el uso de una u otra estadística, lo cual se aclarará de forma analítica en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2: EL ESPÍN DE NÚMERO $1/2$ Y 1

Habiendo descrito brevemente de manera histórica la relación que tuvo el considerar de manera conjunta el espín y la estadística, ahora se puede hablar de una descripción matemática de ello, la cual se manejará bajo el formalismo de la mecánica cuántica ondulatoria pues es con este formalismo que los trabajos de 1920 hacen el desarrollo del espín y dan la explicación de sistemas de partículas. Para ello entonces se adentrará en el formalismo para los espines $1/2$ y 1 (que son los números de espín que aparecen en el modelo estándar de partículas).

2.1 Partículas Indistinguibles

Para el análisis propuesto en términos de la mecánica cuántica ondulatoria, en primer lugar, se hablará del concepto de partículas indistinguibles y con ello se hará una primera conexión con la estadística dado su uso desde la estadística de Bose y Fermi, además de presentar la notación que se usará a lo largo del presente documento.

Inicialmente, hablar de estadística implica hablar de ciertos constituyentes microscópicos que dan cuenta de efectos macroscópicos, como lo hizo Boltzmann al estudiar de forma mecánica las copias virtuales del sistema macroscópico (lo que denomina “puntos”) y dar cuenta de la energía de un sistema. Y si bien, a estos elementos se les dio la etiqueta de partículas, no se trabajará una definición puntual de ellas, por lo que, para lo que concierne al presente trabajo al referirse a una partícula desde la mecánica cuántica, solo se tomará en cuenta su descripción matemática desde las funciones de onda.

Ahora bien, al representar a un conjunto de partículas, la idea de indistinguibilidad termina siendo un factor importante en la estadística, pues esta es la idea que tienen en común los trabajos de Bose y Fermi. Por tanto, para comprender esta idea hay que tener en cuenta dos perspectivas, la primera desde un aspecto experimental y la segunda desde el apartado conceptual; desde la primera, se puede presentar el escenario donde no hay una forma de etiquetar a las diferentes partículas de un sistema, es entonces que, si se presenta un escenario donde, al igual que Boltzmann, se quiere analizar un material que está constituido por diferentes partículas, no hay forma de distinguir a cada una de estas en un tiempo específico o a lo largo de

un intervalo de tiempo, como se menciona en el texto “Etiquetas de partículas y teoría de partículas indistinguibles en mecánica cuántica” (Redhead & Teller, 1992), escrito que discute sobre la distinguibilidad de las partículas en el ámbito de la física estadística, ellos señalan que:

Las partículas del mismo tipo, con las mismas propiedades intrínsecas, se denominan Indistinguibles. Esto se debe a que, experimentalmente, no se puede distinguir entre partículas indistinguibles. Por ejemplo, si tenemos electrones e_1 y e_2 , uno con espín-z hacia arriba y otro con espín-z hacia abajo, no existe una forma experimental de saber cuál es el que tiene espín hacia arriba y cuál es el que tiene espín hacia abajo. (Redhead & Teller, 1992, pág. 204)

Lo cual nos indica que efectivamente al estudiar sistemas de partículas en los cuales físicamente no es posible realizar una distinción entre los elementos que lo constituyen, tal como lo señalan, en el apartado experimental es necesario hablar de una indistinguibilidad. Esta reflexión lleva a la segunda perspectiva, pues al hacer una representación matemática de un sistema con más de dos partículas, para cualquier observador no habrá forma de distinguir una partícula de otra.

Desde esta perspectiva, se puede hablar del estado de una partícula representado como una función que depende de sus grados de libertad $\psi(x, y, z)$, es decir que depende de un vector posición \vec{r} , esto si queremos hablar de la función en términos del espacio de fase, por lo cual se puede representar como $\psi(\vec{r})$.

Ahora, para un sistema de partículas indistinguibles se asume un número arbitrario de estas, de tal forma que haya un sistema de N partículas indistinguibles. En esta situación se tendrá como representación del sistema a la función $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N)$, la cual en mecánica cuántica es el estado del sistema, también llamada función de onda, que da cuenta de la amplitud de probabilidad de todo el sistema en términos de la posición de cada una de las partículas. Aquí, para entender la indistinguibilidad hay que comprender de manera general, que la función de onda dará cuenta de una misma probabilidad, ya sea que cada \vec{r}_N se intercambie, o que una u otra tengan las mismas características, de modo que:

$$|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)|^2 = |\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)|^2 \quad (5)$$

En este caso, en la ecuación 5 se establece que al cambiar las posiciones de las partículas 1 y 2, la magnitud de la función de onda permanece invariante, por lo que, se puede entender que en un sistema donde una de las partículas es intercambiada por otra, no afectara la descripción del sistema de manera global por un observador; como afirma Aram Harrow en sus lecturas de la clase de física cuántica, con respecto a la notación de las partículas indistinguibles:

$\{(\vec{r}_1, \vec{p}_1), (\vec{r}_2, \vec{p}_2), \dots, (\vec{r}_N, \vec{p}_N)\}$ (Podemos prohibir que dos partículas tengan posiciones y momentos exactamente idénticos, o podemos permitir que $\{. . .\}$ denote un conjunto múltiple, es decir, un conjunto con la posibilidad de elementos repetidos.) Esta notación pretende expresar que las partículas no tienen identidades individuales, y que no hay existencia física o diferencia matemática entre lo que llamamos partícula 1, partícula 2, etc. (Harrow, 2016, pág. 2)

Esto es lo mismo que encuentra Bose y Fermi en sus análisis de la estadística pues, al dar cuenta de efectos macroscópicos, exhiben que las características particulares de cada elemento por sí mismo no son relevantes dentro de los análisis para el sistema en general.

Particularmente al retomar la ecuación 1, $P(\nu) = \prod \frac{\left(\frac{8\pi V \nu^2}{c^3}\right)}{p_0(\nu)! p_1(\nu)! p_2(\nu)! \dots}$, se puede afirmar que Bose parte de examinar el espacio de fase de cada cuanto de energía con una frecuencia ν dada, en un volumen específico V y con ello logra llegar al número de celdas correspondientes a un intervalo de frecuencia A_ν representado como:

$$A(\nu) = \left(\frac{8\pi V \nu^2}{c^3}\right) \quad (6)$$

Sin embargo, al pasar a calcular a la probabilidad termodinámica, es decir, las formas en las que los N cuantos se reparten en dichas celdas (punto donde aplica el método empleado por Boltzmann), las distribuciones posibles toman en cuenta solo el número de cuantos y no a cada cuanto de forma particular, de tal forma, que es indistinguible tomar uno u otro.

De manera similar se encuentra la definición de Fermi, quien en 1926 retoma la idea de elementos con características similares (indistinguibles) de su artículo de 1924 titulado “Consideración sobre la cuantización de los sistemas que contienen elementos ideales”. En dicho

artículo se utiliza al modelo atómico de Sommerfeld e identifica que para un análisis con átomos deben considerarse elementos idénticos entre sí:

En este trabajo pretendo mostrar cómo hay razones que nos llevan a creer que el fallo se debe más bien a la insuficiencia de las condiciones de Sommerfeld y a las órbitas estáticas de aquellos sistemas que, independientemente de que se admita o no la separación de variables, contienen algunas condiciones idénticas (en el caso del átomo de helio, por ejemplo, los dos electrones son indistinguibles entre sí). Que en algunos casos sea necesario modificar las leyes cuánticas debido a que el sistema a cuantificar está formado por elementos idénticos, parece muy plausible... (Fermi, 1924, pág. 146)

Con lo anterior se puede resaltar que Fermi, para su estadística, se basa en que los electrones son indistinguibles entre sí, por lo tanto, se puede decir que la consecuencia de que sus desarrollos den en términos de una descripción estadística puede ser atribuida a esta característica de indistinguibilidad la cual, por lo tanto, se puede relacionar con el principio de exclusión que en principio era al que se le atribuía dicha consecuencia.

Por lo tanto, como se puede mencionar la indistinguibilidad ya es tomada como una característica importante para ambos autores (Bose y Fermi), dado que la utilizan en sus respectivos desarrollos, bajo el formalismo de la mecánica cuántica. Tal como se mencionaba en la estadística de fermi, esta característica de indistinguibilidad, al ser atribuida al principio de exclusión, puede llevar a una relación entre la indistinguibilidad y el principio de Pauli.

2.2 La Indistinguibilidad y el Principio de Exclusión de Pauli

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, para encontrar una relación entre la indistinguibilidad y el principio exclusión hay que retomar la ecuación 5, pues en ella se encuentra dicha característica, sin embargo, al trabajarla de forma tal que la probabilidad sea la misma en las dos partes de la igualdad entonces se puede reescribir la ecuación de forma que queden dos opciones para cumplir esta condición:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \pm \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) \quad (7)$$

Ahora recordando el capítulo anterior, en 1926 Dirac propone la existencia de dos tipos de funciones (una para cada estadística) una simétrica y una antisimétrica, las cuales varían

dependiendo del signo encontrado desde el principio de exclusión. Por lo tanto, bajo esta suposición la ecuación 7 representa el mismo principio de exclusión propuesto por Pauli, al dar dos resultados de funciones de onda dependiendo de respectivo signo.

Por lo tanto, aquí se cumple con que la probabilidad bajo el cuadrado integrable de la función que representa el estado del sistema es equivalente al intercambio de dos grados de libertad del sistema. Esto se aplica para el caso del sistema de dos partículas, o lo que es lo mismo intercambiar dos partículas en el sistema, donde dicho intercambio implica cambiar dos grados de libertad del sistema, con lo cual se encuentra que la función de onda puede cambiar de forma a obteniendo como resultado una simétrica o antisimétrica, con tal de cumplir esto mismo.

Ahora desde las clases de mecánica cuántica se explica este cambio de signo como consecuencia del principio de exclusión de Pauli, sin embargo, su explicación se asume a través de aplicar el operador de paridad a la función de onda del sistema, es decir, que la permutación de un grado de libertad es representada a través de un operador llamado “operador de paridad” el cual afecta al sistema cambiando su signo. Sin embargo, como se afirma desde las notas de clase física-química de La Escuela Politécnica Federal de Zúrich (Physical Chemistry V, 2013), si bien la permutación se puede explicar por la condición de paridad del sistema, su significado respecto a la estadística no es una consecuencia de este operador, es decir, el signo resultante: “Nota al margen: la necesidad de que la función de onda del sistema sea una función propia del operador de paridad no tiene nada que ver con el principio de Pauli.” (Physical Chemistry V, 2013, pág. 1).

Por lo tanto, hay otra razón para el cambio de dicho signo y para entenderlo se puede remontar a la explicación de Dirac en su artículo de 1926; allí se propone que un electrón dentro de un átomo no puede tener los mismos números cuánticos⁶ que otro electrón, por lo tanto, y al considerar a estos números como grados de libertad del sistema hace que su indistinguibilidad se vea alterada:

“Se plantea la cuestión de si los dos estados (mn) y (nm), que son físicamente indistinguibles, ya que sólo se diferencian por el intercambio de los dos electrones, deben

⁶ Los números cuánticos son números que representan la ubicación y energía de los electrones dentro del átomo. Existen cuatro números cuánticos: n, l, m_l, m_s donde el número m_s es el número de espín, n el número que da cuenta del orbital y es el número cuántico principal, l el número cuántico secundario o azimutal y m_l es el número cuántico magnético. (Hernández, 2018)

contarse como dos estados diferentes o como un solo estado.” (Dirac & Fowler, 1926, pág. 667)

Aquí Dirac plantea el caso donde dos electrones en dos niveles de energía diferentes n y m diferentes a los números cuánticos principal y magnético, por lo que, para evitar confusiones se cambiaran a dos niveles de energía arbitrarios c y d y se hablaran de un nivel de energía después del intercambio como c' y d' . Entonces se propone la situación en la cual una función de onda para ambas partículas (la partícula c en el nivel c y la partícula d en el nivel d) debe seguir la forma:

$$\psi_{cd} = \psi_c(x_1, y_1, z_1, t)\psi_d(x_2, y_2, z_2, t) \quad (8)$$

Donde se propone la indistinguibilidad bajo el intercambio de posición de 2 partículas como $\psi_c(x_1, y_1, z_1, t)\psi_d(x_2, y_2, z_2, t) = \psi_d(x_1, y_1, z_1, t)\psi_c(x_2, y_2, z_2, t)$, es decir, que se debe cumplir con el cambio a cualquier nivel de energía, por lo que, la partícula ψ_c puede permanecer en su posición que se llamara c' o puede cambiar al otro nivel que se llamara d' y lo mismo para la segunda partícula ψ_d que puede permanecer en su posición d' o cambiar a la posición c' , de forma que se mantenga un cambio de la forma $cd \rightarrow c'd'$ y $cd \rightarrow d'c'$. Para mantener una sola función de onda lo que se hace es rescribir la función del sistema en términos de una combinación lineal de esos dos posibles estados en los que pueden estar las dos partículas, tal que:

$$\psi_{cd} = a_{cd}\psi_c(x_1, y_1, z_1, t)\psi_d(x_2, y_2, z_2, t) + b_{cd}\psi_d(x_1, y_1, z_1, t)\psi_c(x_2, y_2, z_2, t) \quad (9)$$

Aquí las constantes a y b contienen información sobre la indistinguibilidad entre los diferentes cambios, como menciona en el texto de Dirac:

... dos funciones propias independientes deben dar lugar a dos filas y columnas en las matrices (identificadas por la combinación de funciones con las constantes a y b que representan el cambio de signo u observable que produce dicho cambio). Si vamos a tener sólo una fila y una columna en las matrices correspondientes a (cd) y (dc) , debemos encontrar un conjunto de funciones propias cd de la forma (como se ve en la ecuación 9) donde a_{cd} y b_{cd} son constantes, cuyo conjunto debe contener sólo una función ψ_{cd} correspondiente tanto al cambio de (cd) como al de (dc) . (Dirac & Fowler, 1926, pág. 668)

Por lo que, para describir la función de onda en términos de una sola constante (ver ecuación 10) donde $\psi_{c'd'}$ representa la función de onda al cambiar ya sea $cd \rightarrow c'd'$ o $cd \rightarrow d'c'$ y $A_{c'd'.cd}$ es la constante que contiene ambas posibilidades, se debe tener en cuenta que o bien $a_{cd} = b_{cd}$ o por otro lado que $a_{cd} = -b_{cd}$:

$$A\psi_{cd} = \sum_{c'd'} \psi_{c'd'} A_{c'd'.cd} \quad (10)$$

Para ambos casos se tienen dos resultados distintos y es que si $a_{cd} = b_{cd}$ la función ψ_{cd} da cuenta de una función de onda $\psi_{c'd'}$ simétrica⁷ pues esta no tiene ningún límite que no sea impuesto por el sistema o contexto mismo⁸, sin embargo, por otro lado, como se ve en la ecuación 11 la función de onda bajo la condición de que $a_{cd} = -b_{cd}$ da cuenta que esta debe ser 0 y para solucionarlo esta debe adquirir una forma diferente, puntualmente una forma antisimétrica:

$$\psi_{cd} = b_{cd}[\psi_d(x_1, y_1, z_1, t)\psi_c(x_2, y_2, z_2, t) - \psi_c(x_1, y_1, z_1, t)\psi_d(x_2, y_2, z_2, t)] = 0 \quad (11)$$

Pero es de resaltar que el desarrollo de Dirac no presenta una conceptualización física, pues su análisis se basa en el algebra requerida para respetar el formalismo establecido, por lo que, se necesita de un desarrollo más conceptual. Por lo tanto, se adentrará en el análisis del formalismo del espín algo con lo cual se espera llegar a los resultados propuestos por Dirac.

2.3 El Espín y la Simetría Rotacional

2.3.1 El formalismo del espín $\frac{1}{2}$

Para entender como el espín juega un papel fundamental dentro de la indistinguibilidad y, por tanto, dentro del principio de exclusión hay que entender el formalismo del espín. Por lo que,

⁷ $\psi_{mn} = b_{mn}[\psi_m(x_1, y_1, z_1, t)\psi_n(x_2, y_2, z_2, t) + \psi_n(x_1, y_1, z_1, t)\psi_m(x_2, y_2, z_2, t)]$ La función de onda de esta forma no es antisimétrica pues su resaltado no se anula.

⁸ Hay que tener claro que aquí al formular que la función de onda $\psi_{m'n'} \neq 0$ se debe tener en cuenta Dirac se refiere a la forma de esta, es decir, que debe ser representada a través de una matriz fila o columna, por lo tanto, $\psi_{m'n'} = 0$ se refiere no a su interpretación por indistinguibilidad, tal que: $\psi_{mn} - \psi_{nm} = 0$ dando $\psi_{mn} = \psi_{nm}$ que tiene la forma de una función simétrica, sino, que $\psi_{mn} - \psi_{nm} = 0$ hace que $\psi_{m'n'}$ no sea ni una matriz fila o columna, es decir, que tiene la forma de una función antisimétrica por consecuencia de tener una forma distinta para respetar la igualdad.

desde el artículo de Pauli de 1927 se parte de la idea de un electrón rotando bajo su eje como proponían Goudsmit y Uhlenbeck, sin embargo, aquí se le da un tratamiento bajo la formalización de la mecánica cuántica, tal que, se propone una función de onda estacionaria para representar el caso donde los valores propios sean $s_z = \frac{1}{2}\hbar$ y $s_z = -\frac{1}{2}\hbar$ (por la rotación con respecto de un eje en este caso del eje z) como se esperaba desde el efecto Zeeman⁹ (mismo estudio del cual Pauli menciona al espín por primera vez) y por lo tanto, esta función depende de los grados de libertad del sistema, es decir, de sus coordenadas espaciales y de su rotación φ :

$$\int |\psi(q, \varphi)|^2 dq_1 dq_2 dq_3 d\varphi = 1 \quad (12)$$

Sin embargo, al tener dos valores esperados Pauli reescribe la función de onda de $\psi(q, \varphi)$ en términos de dos funciones, $\psi_\alpha(q, \varphi)$ y $\psi_\beta(q, \varphi)$, cada una para cada valor esperado de la rotación:

$$\psi_\alpha(q, \varphi) \rightarrow s_z = \frac{1}{2}\hbar$$

$$\psi_\beta(q, \varphi) \rightarrow s_z = -\frac{1}{2}\hbar$$

Por lo tanto, desde la condición de cuadrado integrable o normalización se obtiene:

$$\int (|\psi_\alpha|^2 + |\psi_\beta|^2) dq_1 dq_2 dq_3 d\varphi = 1 \quad (13)$$

Y la misma en términos de la relación de ortogonalidad:

$$\int (\psi_{\alpha,u} \psi_{\alpha,r}^* + \psi_{\beta,u} \psi_{\beta,r}^*) dq_1 dq_2 dq_3 d\varphi = 0 \text{ para } r \neq u \quad (14)$$

Sin embargo, para tener en cuenta a s_x , s_y y s_z , Pauli propone una solución, un ansatz donde estos operadores satisficieran propiedades de conmutación, tal que, propone una serie de ecuaciones de transformación lineal de la forma como se ve en la ecuación 15: “Esto sugiere que

⁹ Este efecto es importante no solo porque da cuenta de los valores propios del espín del electrón, sino, porque también abre la posibilidad para espines semienteros de diferentes valores como 3/2 y 5/2, es decir, abre la posibilidad a los espines semienteros.

hagamos el ansatz para los operadores de espín $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ que satisfacen las relaciones que son transformaciones lineales de ψ_α y ψ_β ” (Pauli W. E., 1927, pág. 608)

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_x(\psi_\alpha) &= \psi_\beta, & \hat{s}_x(\psi_\beta) &= \psi_\alpha \\ \hat{s}_y(\psi_\alpha) &= -i\psi_\beta, & \hat{s}_y(\psi_\beta) &= i\psi_\alpha \\ \hat{s}_z(\psi_\alpha) &= \psi_\alpha, & \hat{s}_z(\psi_\beta) &= -\psi_\beta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Llegando con estas definiciones a la estructura de las matrices de Pauli que son las encargadas de caracterizar al espín del electrón:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2} \hbar \sigma_i \quad (17)$$

Aquí se rescata que, si bien Pauli realiza el desarrollo partiendo de la mecánica cuántica ondulatoria, se puede llegar a las mismas matrices y resultados partiendo de la mecánica cuántica matricial (que es el desarrollo que se trabaja en cursos iniciales de mecánica cuántica), por lo tanto, se pueden evidenciar dos aspectos importantes; el primero, que Pauli impone un análisis conceptual sobre sus resultados pues el ansatz correspondiente responde, además de a unas transformaciones lineales, a una idea y esta es que el espín debe ser una rotación. Estos resultados son una prueba de ello, si el espín aquí tiene una descripción rotacional es por la concepción que permea al mismo autor para ello; sin embargo, como segundo aspecto importante se tiene que al trabajar con el formalismo matricial, que responde a reglas de ortogonalidad, se encuentran los mismos resultados, permitiendo con ello llegar a que si bien el espín no rota (porque desde este formalismo no se concibe como ello) si exhibe una descripción rotacional, porque a eso apuntan estas matrices. Por lo que, en esta descripción matricial para el espín en z se establecen dos kets de estado propios del operador de espín que se representan como¹⁰:

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_z|+\rangle &= \frac{1}{2} \hbar |+\rangle \rightarrow |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{s}_z|-\rangle &= -\frac{1}{2} \hbar |-\rangle \rightarrow |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

¹⁰ Se puede revisar la deducción de las matrices de Pauli para el electrón bajo este formalismo de la notación de Dirac desde el capítulo 3 titulado “Theory of Angular Momentum” del libro “Modern Quantum Mechanics” de J.J. Sakurai (Sakurai, 1994, pág. 177).

Al establecer cómo se encuentran los operadores de espín en y y en x a partir de los estados propios de z , se encuentra la misma representación de los operadores de espín descritos en la ecuación 17

Y a partir de ello se pueden plantear los elementos conocidos como espinores que al ser generalizados para ser de orden n resultan ser los mismos objetos mencionados en el artículo de Fierz de 1939 y que se toman como los elementos encargados de describir a los campos de espín semientero. Cabe aclarar que esta no será la notación del trabajo y queda solo aclaratoria pues el espín del electrón dentro de la ecuación de Schrödinger está vinculado a estos elementos. Por lo que, partiendo de aquí para los electrones de espín $\frac{1}{2}$ se pueden definir como:

$$|\gamma\rangle = |+\rangle\langle +|\gamma\rangle + |-\rangle\langle -|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} \langle +|\gamma\rangle \\ \langle -|\gamma\rangle \end{pmatrix} = \chi \rightarrow \chi = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad (19)$$

En esta ecuación se puede denotar a un estado γ en su descripción en términos de la identidad de producto exterior donde el mismo puede ser escrito como una composición de vectores fila positivos y negativos y esto es lo que se conoce como un espinor de dos componentes (Sakurai, 1994, pág. 164).

Con ello se pueden destacar dos aspectos importantes del espín: la primera es que, si bien el espín $\frac{1}{2}$ no describe una rotación del electrón, su formalización se encuentra asociada con la representación de una. Esto se debe a que nace desde esta idea, pues Pauli concibe una rotación desde el formalismo de la mecánica cuántica como se ve en la función de onda descrita para el sistema, sin embargo, desde la descripción de la mecánica cuántica matricial, sin partir de la idea de una rotación se llega a la misma representación y como se vio las relaciones de transformación lineal de Pauli y de ortogonalidad desde la representación matricial concluyen lo mismo, por lo tanto, se puede plantear que el espín $\frac{1}{2}$ se describe por medio de una representación rotacional. Finalmente, en segundo lugar, que el espín $\frac{1}{2}$ será definido por las matrices de Pauli, es decir, que estos elementos son de importancia para el espín pues sin ellas no hay una descripción de este.

Por lo mismo, es que es necesario comprender esta descripción rotacional, pues el espín del electrón, gracias a ello adquiere una simetría rotacional, por lo que, el espín del fotón (que se define de la misma forma con matrices de Pauli) también tiene una simetría rotacional y por lo

tanto, es esta característica la que define al espín y por conclusión, a la indistinguibilidad de partículas, es decir, es la responsable del cambio de establecer funciones simétricas o antisimétricas dadas por el principio de exclusión. Para complementar esta idea se estudiarán las propias matrices de Pauli para ambas partículas y así comprender su relación con el principio de exclusión.

2.3.2 Simetría rotacional grupo SU2

Como se dijo anteriormente el propósito de este inciso es identificar qué características tienen las matrices de Pauli, por lo tanto, al revisar la teoría de grupos se pueden destacar a las matrices como elementos de un grupo específico conocido como grupo de Lie¹¹. Para ello hay que recordar que la teoría de grupos estudia a los conjuntos de elementos con respecto de una operación dada, por lo tanto, los grupos de Lie son aquellos cuyos elementos son matrices (G), las cuales a su vez pueden caracterizar diferentes grupos de Lie dependiendo del tamaño y tipo de matrices involucradas como elementos del grupo, y como característica del grupo se define bajo la operación binaria el producto (\cdot) entre matrices, por tanto se representa a los grupos de Lie como: (G, \cdot) .

Al revisar las matrices de Pauli que caracterizan al espín $\frac{1}{2}$, se encuentra que son matrices complejas 2×2 , por lo que, el grupo de Lie que describe estas características es el grupo SU2 (matrices de determinante 1, unitarias y en un espacio 2×2) (Miguela, 2021). Al caracterizar este grupo se definen los objetos en el espacio vectorial complejo de 2 dimensiones, tal que:

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\} \quad (20)$$

Ahora como se dijo previamente, el espín tiene asociado una característica de rotación y lo que se quiere mostrar es cómo se pueden deducir las matrices de Pauli para los sistemas de espín $\frac{1}{2}$ a partir de una rotación, por esto se mostrará que responden a las características propias de este tipo de transformación. Para una matriz de rotación se presenta el invariante bajo la rotación por medio del producto escalar el cual debe tener la forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, dado que, al aplicar una

¹¹ Un grupo de Lie es un conjunto de forma algebraica, que tiene su uso en la física por su uso desde la interpretación de simetrías que son parametrizadas por variables reales y que además tiene una interpretación geométrica como un espacio topológico. (Hall, 2013, pág. 333)

rotación por medio de una transformación, el invariante debe ser la magnitud del vector representada por el producto escalar.

Por ello es por lo que surgen los elementos de transformación \mathbf{u} de tal forma que $(\mathbf{u}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, es decir, se debe establecer un conjunto de matrices asociadas a la transformación por rotación del grupo SU2 que mantengan invariante a la magnitud de los vectores del espacio; en este caso los vectores representarán los estados del sistema desde la interpretación de la mecánica cuántica matricial, con ello se identifica que estos elementos al pertenecer al grupo SU2 cumplen que $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = I$ ¹². ahora al establecer en una transformación específica $\mathbf{u}(\theta)$ donde θ es un parámetro propio de la rotación, se propone que la transformación como una rotación tendría la forma de $\mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta C}$, por lo tanto, C es una matriz que va a depender de las características del grupo.

Para ello hay que pensar en una rotación infinitesimal $\mathbf{u}(d\theta)$, tal que $\lim_{d\theta \rightarrow 0} \mathbf{u}(d\theta) = I$ (Miguela, 2021, pág. 14), por lo tanto, se define esta rotación como:

$$\mathbf{u}(d\theta) = (I + d\theta A) \quad (21)$$

Es decir que toda rotación infinitesimal se puede considerar como la matriz identidad más una transformación infinitesimal, donde se establece que esta matriz A cumple con que $A^\dagger = -A$ ¹³, sin embargo, en mecánica cuántica se debe cumplir la condición que las matrices sean hermíticas para que den cuenta de observables del sistema, por lo mismo, se puede describir esta matriz A en términos de una matriz hermítica, de tal forma que:

$$A = a\beta \quad (22)$$

Donde a es un escalar y β es una matriz hermítica, de esta forma se puede destacar que se cumple esta condición cuando $A = i\beta$ ¹⁴ y por tanto la rotación infinitesimal queda como

¹² Por definición del producto escalar $(\mathbf{u}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\mathbf{x})^\dagger \mathbf{u}\mathbf{x}$, por tanto, $(\mathbf{u}\mathbf{x})^\dagger \mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{x}^\dagger \mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}$, es decir, que $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = I$, donde I es la matriz identidad.

¹³ Para cumplir que con que $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = I$ entonces $(I + d\theta A)^\dagger (I + d\theta A) = I$ donde $I^2 = I$ y $d\theta^2 = 0$ por lo que, $I + d\theta A + d\theta A^\dagger = I$ y, por tanto: $A^\dagger = -A$

¹⁴ Para cumplir que $A^\dagger = -A$ entonces $(a\beta)^\dagger = -a\beta \rightarrow a^* \beta^\dagger = -a\beta \rightarrow a^* = -a$ donde a^* es el compuesto conjugando, de tal forma que para que se cumpla la igualdad $a = x + iy$ donde x y y pertenecen a los números reales, por lo que, $x - iy = -x - iy$ y, por tanto, para que $x = -x$ entonces $x = 0$ dejando que $a = i$.

$\mathbf{u}(d\theta) = (I + id\theta\beta)$, al generalizar para un $\mathbf{u}(\theta)$ esta queda en términos de esta matriz hermítica β :

$$\mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta\beta} \quad (23)$$

Con esta generalización se pueden ir aclarando más de las características del grupo, donde se encuentra que el determinante de esta matriz se expresa como¹⁵:

$$\det \mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta \text{Tr}\beta} \quad (24)$$

Por la condición de que los valores de la traza para una matriz hermítica son reales, se establece la magnitud de este determinante de la forma:

$$|\det \mathbf{u}(\theta)| = 1 \quad (25)$$

Sin embargo, para que no solamente sea la magnitud, sino, que el determinante sea tal cual 1, se da con que la traza de la matriz β es igual a 0 (Javier Garcia, 2017), de tal forma que:

$$\text{Tr}\beta = 0 \quad (26)$$

Esta condición define al llamado grupo especial, dado que el determinante de las matrices es igual 1 y cumple con la condición $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = I$. Entonces este es el conjunto de matrices unitarias, complejas y 2×2 descritas como (Miguela, 2021):

$$SU2 = \{ \mathbf{u} / \det \mathbf{u} = 1; \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = I \} \quad (26)$$

Ahora bien, por sus características se va a mostrar que este grupo se acopla a las matrices y representación de Pauli, identificando el conjunto de matrices β , dado que las matrices de transformación \mathbf{u} dependen de ellas. De esta forma, se propone una matriz 2×2 con componentes complejas donde cumpla con la condición de ser hermítica $\beta^\dagger = \beta$ la cual se puede construir de la siguiente forma:

¹⁵ Como β es una matriz hermítica tiene valores propios de la forma $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ por lo tanto en la base de β entonces $u_\beta = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta\lambda_2} \end{pmatrix}$ por lo que su determinante es $\det u_\beta = e^{i\theta\lambda_1 - \lambda_2}$ es decir, que se puede describir como $\det u_\beta = e^{i\theta \text{Tr}\beta}$. Donde λ_1 y λ_2 son números reales.

$$\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (27)$$

En este caso, a y d son números reales que cumplen la condición de la traza $Tr\beta = 0$ y $b^* = c$ para que sea hermítica, dado que son números complejos. De esta forma se construye la matriz β de la siguiente forma (Rubio, 2020, pág. 22):

$$\beta = \begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & -a \end{pmatrix} \quad (28)$$

Al factorizar los valores de a , c y d para describir la matriz en términos de una suma, se obtienen las matrices de Pauli:

$$\begin{pmatrix} a & c - id \\ c + id & -a \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Y, por lo tanto, para este grupo la matriz β se puede expresar como:

$$\beta = c\sigma_x + d\sigma_y + a\sigma_z \quad (30)$$

Volviendo a la matriz de transformación, para el caso de una rotación en el espacio de dos dimensiones, esta queda determinada a partir de las matrices de Pauli de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta(c\sigma_x + d\sigma_y + a\sigma_z)} \quad (31)$$

Adicionalmente con este resultado se puede establecer un vector unitario de la forma:

$$\hat{n} = \sqrt{c^2 + d^2 + a^2} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2 + a^2}} \hat{i}, \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2 + a^2}} \hat{j}, \frac{a}{\sqrt{c^2 + d^2 + a^2}} \hat{k} \right) \quad (32)$$

Aquí la matriz de rotación que se estableció solo depende de las matrices de Pauli donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} \quad (33)$$

Aquí se llega a un resultado interesante para analizar desde la perspectiva del trabajo, ya que las matrices de Pauli para el caso de la rotación dadas las condiciones descritas se establecen como los generadores de la rotación, y por tanto la conexión que se quería establecer queda demostrada bajo el desarrollo presentado.

De lo anterior se puede destacar que bajo la caracterización de las matrices de Pauli se puede llegar a una representación de estas bajo la teoría de grupos de Lie. Entonces al contemplar que las matrices de Pauli son matrices 2×2 , complejas, con determinante 1 y unitarias se pueden asignar al grupo SU2, el cual para ser descrito hace uso de un generador de rotaciones que, por condiciones de las mismas características del grupo, culminan con la aparición de las matrices de Pauli, pero usadas para representar al generador de las rotaciones. Por lo tanto, se puede destacar que, si bien Pauli considera al espín como una rotación y permea a su descripción de ella, tanto bajo el formalismo matricial de la mecánica cuántica, como la de la misma teoría de grupos de Lie se cumple con esta descripción del espín, por lo que, si bien el espín, no es una rotación debe estar relacionado con ellas.

2.3.3 El fotón y el espín 1

Como se discutió en el capítulo anterior, el fotón como partícula fue descrito hasta 1927 por Dirac y no es hasta tiempo después cuando se trae la idea de que el fotón tiene valor de espín 1, por lo que, hasta ese periodo el espín del fotón tenía solo un valor entero necesariamente para ser descrito desde una función simétrica. Sin embargo, para comprender la relación que puede tener el espín $\frac{1}{2}$ y 1, hay que entender por qué el espín del fotón tiene dicho valor.

En primer lugar, hay que destacar que, en el caso de un electrón en un átomo, hablar del espín es hablar de las condiciones magnéticas del sistema, por lo tanto, si se describe a un electrón en un orbital del átomo, hay que considerar adicionalmente su momento orbital, de tal forma que se habla de un momento angular total de la forma:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \quad (34)$$

Donde \hat{L} es el operador de momento angular orbital y \hat{S} es el operador de espín o momento angular intrínseco (aquí hay que pensar en el electrón girando sobre su eje, pero esta rotación no corresponde con una rotación en el espacio de tres dimensiones que usualmente se trabaja en física).

Desde esta descripción, se puede iniciar el análisis para el caso de un fotón, pues a pesar de ser diferente al caso del electrón que orbita un núcleo, desde la descripción clásica se puede

considerar como una onda electromagnética que al interactuar con partículas asociadas conserva momento lineal, de tal forma que también puede conservar un momento angular. De esta forma desde la electrodinámica clásica, el momento angular total ya tenía una descripción matemática¹⁶:

$$J = \epsilon_0 \int r \times [E \times B] dV \quad (35)$$

Donde J es el momento angular total, ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío, r es un vector radial, E es el campo eléctrico y B el campo magnético, siendo toda la expresión integrada bajo un volumen. Al describir en términos del potencial vectorial \mathcal{A} esta ecuación, se puede reescribir de la forma¹⁷:

$$J = \epsilon_0 \int \sum_i E_i r \times \nabla \mathcal{A}_i dV + \epsilon_0 \int E \times \mathcal{A} dV \quad (36)$$

Por lo que, se presenta que el momento de espín para el fotón se puede escribir de la siguiente forma:

$$s = \epsilon_0 \int E \times \mathcal{A} dV \quad (37)$$

Aquí se aclara que, para llegar a esta definición, se tomó en cuenta el desarrollo realizado por Andrews & Babiker en su trabajo titulado “The angular momentum of the light” donde establecen que:

La analogía con el operador del momento angular en la teoría cuántica sugiere la asociación de la primera parte con el momento angular orbital (en la ecuación 36). La segunda parte, sin embargo, depende claramente de la naturaleza vectorial del campo y, por tanto, de su polarización, lo que hace que sea natural asociarlo con el espín. (Andrews & Babiker, 2013, pág. 7)

¹⁶ Teniendo en cuenta que $J = r \times g$ donde $g = \epsilon_0(E \times B)$ y representa la densidad de momento lineal y, por lo tanto, si se expresa en un espacio de tres dimensiones se obtiene la ecuación 35.

¹⁷ Teniendo en cuenta a $E = -\nabla A$ y $B = \nabla \times A$ entonces $J = \epsilon_0 \int dV [E_i(r \times \nabla)A_i + E \times A - \nabla_i(E_i r \times A)] = \epsilon_0 \int [E_i(r \times \nabla)A_i + E \times A] - \epsilon_0 \int (r \times A)E \cdot ds$

Ahora, retomando esta definición de espín para una onda monocromática se propone un campo monocromático, para lo cual se usa la notación compleja. De esta forma, la ecuación 36 cambia de forma¹⁸, alrededor de este cambio Allen, Padgett, & Babiker mencionan que:

Estas densidades (*refiriéndose a las densidades de momento lineal y angular total*) pueden integrarse en todo el espacio para dar el momento lineal total y el momento angular asociados con el campo. Para campos monocromáticos utilizamos la notación compleja (Allen, Padgett, & Babiker, 1999)

$$J = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int \sum_i E_i^* (r \times \nabla) E_i dV + \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int E^* \times E dV \quad (37)$$

De tal forma que ahora el espín se puede describir como:

$$S = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int E^* \times E dV \quad (38)$$

Con lo que se puede identificar que, al menos desde la física clásica, el espín ya hacia parte de la descripción de los fotones siendo tratados como ondas electromagnéticas, pero las consecuencias de esta descripción son presentadas por Allen, Padgett, & Babiker como:

Sin embargo, es posible separar el campo electromagnético J en dos partes de calibre invariante que pueden denominarse espín y orbital. Este término orbital es similar al momento angular externo, ya que se define en relación con un punto o eje de referencia. El término de espín se denomina parte intrínseca, ya que es independiente de la elección de esta referencia. (Allen, Padgett, & Babiker, 1999)

De acuerdo con ello es que se puede hacer una aproximación inicial al valor del espín del fotón ya que, como se dijo en el capítulo anterior, su demostración matemática hace parte de la cuantización del campo electromagnético. Entonces se hará uso de la aproximación paraxial¹⁹ y se utilizará el termino de helicidad ϑ que se define desde el ejemplo de la polarización como la

¹⁸ Aquí se e campo eléctrico y magnético cambian a $E = \frac{1}{2}(\tilde{E}e^{-i\omega t} + \tilde{E}^*e^{i\omega t})$ y $B = \frac{1}{2}(\tilde{B}e^{-i\omega t} + \tilde{B}^*e^{i\omega t})$

¹⁹ Para esta aproximación se usa la ecuación de onda paraxial $i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u$ desde esta aproximación “se puede tener una onda electromagnética plana polarizada cuyo vector eléctrico depende de la posición transversal.” (Allen, Padgett, & Babiker, 1999)

componente de espín en dirección de la propagación. Esta se describirá de la misma manera que espín, de tal forma que tomada como operador sus valores propios serán los mismos del espín, es decir, $\pm 1\hbar$.

Una de las características de esta aproximación es que la función está en términos de coordenadas cilíndricas $u(r, \varphi, z)$ y con lo cual, teniendo en cuenta la densidad de momento lineal que desde esta aproximación tiene la forma de:

$$g = \frac{\epsilon_0 \omega l |u|^2}{r} \quad (39)$$

Teniendo en cuenta que la definición del momento angular total da como resultado que $J_z = \epsilon_0 \omega l |u|^2$ y, además con energía $w = \epsilon_0 \omega^2 |u|^2$ da como resultado la siguiente relación:

$$\frac{J_z}{w} = \frac{l}{\omega} \quad (40)$$

Que al tener en cuenta la helicidad que se presenta para una polarización circular da como resultado:

$$\frac{J_z}{w} = \frac{l}{\omega} - \vartheta \frac{r}{2\omega} \frac{1}{|u|^2} \frac{\partial |u|^2}{\partial r} = \frac{l + \vartheta}{\omega} \quad (41)$$

Esta ecuación es importante pues si desde la ecuación 40 se implica que hay un momento angular orbital por rayo o fotón dado $\frac{\omega l}{\omega k} = \frac{l\lambda}{2\pi}$ entonces con esta expresión implica además que cada fotón tiene un momento angular orbital y espín $\frac{\omega(l+\vartheta)}{\omega k} = \frac{(l+\vartheta)\lambda}{2\pi}$ cuyo valor va a ser dado dependiendo de la dirección de la polarización circular si es a la derecha o a la izquierda: “Cuando se integra sobre el haz, se encuentra que la relación entre el momento angular de espín y la energía depende solo de ϑ , que para luz polarizada circularmente hacia la izquierda y hacia la derecha es ± 1 ” (Allen, Padgett, & Babiker, 1999).

Desde lo anterior se puede destacar que el espín visto desde la electrodinámica clásica también se puede describir como una propiedad intrínseca, pues al analizarse la onda monocromática desde la polarización queda en la misma tener un comportamiento particular con respecto del campo magnético, sin embargo, al contrario del espín del electrón, aquí con la helicidad ϑ se hace evidente que el espín está relacionado con la rotación, pero al hablar desde

una descripción con ecuaciones de Maxwell complejas, se habla de una rotación en el espacio de los complejos. Por lo tanto, en los primeros acercamientos con el espín $\frac{1}{2}$ y 1 estos son tomados como rotaciones en el espacio complejo, por otro lado, al determinar que el espín del electrón no puede ser una rotación formal, pero si está vinculado a una, entonces al espín 1 estar descrito por matrices de Pauli, este también tendrá una relación con las rotaciones así no represente una.

2.3.4 El formalismo de matrices de Pauli aplicadas en el espín 1

Entonces partiendo del hecho que el espín del fotón tiene valor más y menos uno, al igual que en el caso del electrón se puede encontrar una descripción del operador de espín para este. Por lo tanto, teniendo en cuenta la ecuación 17 que como se dijo es la encargada de caracterizar al espín del electrón se hará un análisis equivalente pero ahora con el fotón. De acuerdo con ello el operador sería descrito de la siguiente forma:

$$\hat{S}_i = \hbar \sigma_i \quad (42)$$

Donde σ_i representa las matrices de Pauli que para este caso no se encuentran de la misma forma que para el caso del electrón. Por lo que, aunque el presente trabajo se encarga de hacer un análisis desde la mecánica cuántica ondulatoria para encontrar dichas matrices se hará uso de la mecánica cuántica matricial pues es con ella que se puede acercarse de forma práctica a estas matrices.

Es entonces que como primera característica está el considerar las reglas de conmutación del operador de espín del electrón dadas en términos de las matrices de Pauli de la forma:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_i, \hat{S}_j] &= i\varepsilon_{ijk} \hat{S}_k \\ [\hat{S}^2, \hat{S}_i] &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Estas son las reglas de conmutación para los operadores de espín $\frac{1}{2}$, y que deben cumplirse desde la representación mediante las matrices de Pauli, en donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita que indica un orden en la permutación ya sea par e impar, por lo tanto, el fotón debe seguir estas reglas para encontrar sus matrices y de manera consecuente las matrices deben seguir esto para llegar a las matrices del fotón.

Ahora, tomando una base arbitraria dentro del conjunto formulado en el espacio de Hilbert de la forma $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \rightarrow N \times N$, donde se toma para N dimensiones, en primera instancia se generalizará para una de las componentes del espín y su vector cuadrado:

$$\hat{s}_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle \rightarrow \hat{s}^2|m\rangle = \hbar c|m\rangle \quad (44)$$

De lo cual se obtiene una estructura para el operador de espín que, desde la representación matricial, parte de un valor máximo M hasta un valor mínimo m , y tiene la forma de:

$$\hat{s}_z = \begin{pmatrix} \langle M|s_z|M\rangle & \cdots & \langle M|s_z|m\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle m|s_z|M\rangle & \cdots & \langle m|s_z|m\rangle \end{pmatrix} \quad (45)$$

De manera tal que también conociendo la forma de \hat{s}^2 es una matriz identidad de la forma $\hat{s}^2 = \hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces, se obtiene una generalización para las matrices de Pauli de cualquier valor de espín. De ello se obtienen dos resultados importantes, el primero relacionado a la capacidad del número de espín que puede obtener una partícula, pues si bien desde el efecto Zeeman se conocen valores de números semienteros, estos números tienen un límite físico que está dado por:

$$N = 2s + 1 \quad (46)$$

Esta es la expresión de las dimensiones para las matrices, es decir, que, si bien las matrices se pueden obtener de un número infinito para el espín, son las dimensiones físicas las que limitan el número de espín. Por lo que, de acuerdo con ella para un espín de valor 1 se necesita un campo de acción de 3 dimensiones mientras que para un espín de $\frac{1}{2}$ se necesita un campo de acción de 2 dimensiones, por lo tanto, una de las diferencias claras de acuerdo con el valor del espín es que este actúa en dimensiones diferentes para cada partícula con valor distinto.

Por otro lado, se obtienen las siguientes expresiones que definen los operadores de espín para su valor en x y y (el z se obtiene de acuerdo con la ecuación 44 pues este valor de espín es el que se usa para el desarrollo de x y y):

$$\langle m_1|s_x|m_2\rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{s(s+1) - m_2^2} + m_2 \delta_{m_1, m_2-1} + \sqrt{s(s+1) - m_2^2} - m_2 \delta_{m_1, m_2+1} \right) \quad (47)$$

$$\langle m_1 | s_y | m_2 \rangle = \frac{\hbar i}{2} \left(\sqrt{s(s+1) - m_2^2 + m_2} \delta_{m_1, m_2-1} - \sqrt{s(s+1) - m_2^2 - m_2} \delta_{m_1, m_2+1} \right) \quad (48)$$

$$s_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle \quad (49)$$

De acuerdo con estas expresiones y siguiendo la idea planteada anteriormente, la simetría rotacional generada tiene que plantearse para matrices de dimensiones mayores, dado su campo de acción, por tanto, para encontrar los operadores de espín desde las matrices de Pauli para el espín 1 quedan de la siguiente forma como matrices 3×3 :

$$s_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; s_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; s_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

De acuerdo con lo anterior se puede expresar la importancia de la descripción del espín del electrón, pues es con ella que se hace la generalización para matrices de Pauli de cualquier valor, por lo que, se deja implícito que las matrices tanto del espín 1 como la de espín $\frac{1}{2}$ tienen las mismas características bajo el formalismo de la mecánica cuántica, como sus reglas de conmutación (algo que se explicará en el siguiente inciso). Y finalmente, se puede resaltar que existe una diferencia notable entre el espín $\frac{1}{2}$ y 1 y es la dimensión de acción pues además de ser matrices con diferentes dimensiones estas necesitan un espacio diferente, siendo para los electrones un espacio de dos dimensiones y para los fotones un espacio de tres dimensiones, por lo que, su comportamiento ya dista entre ellos.

2.3.5 Simetría rotacional grupo SO3

Ahora al igual que se hizo con el grupo SU2 y las matrices de espín $\frac{1}{2}$ se hará el comparativo de estas matrices 3×3 con un grupo específico, para este caso se hará el análisis con las matrices del grupo de Lie SO3 (matrices especiales ortogonales y de 3 dimensiones matriciales) esto a razón de la composición de las características que exhiben las matrices encontradas (ecuación 50).

Entonces, este grupo consta como ya se mencionó de matrices que cumplen con la condición de hacer la operación de multiplicación entre ellas (\mathbf{G}, \cdot). También el ser especiales cumplen con que su determinante sea 1, $\det \mathbf{G} = 1$, y al ser ortogonales cumplen con la condición de que $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = I$. Para entender, estas características se comprenderán de forma inductiva (de la misma forma en la que se analizó el valor de espín 1), por lo que, se presentara desde una rotación en un plano, pues esto es lo que representa el espín para el fotón desde la polarización, es decir, una rotación ya sea por helicidad positiva o negativa.

Por lo tanto, al comprender una rotación en dos dimensiones la matriz de rotación correspondiente queda determinada partiendo de la siguiente transformación de coordenadas (Rubio, 2020, pág. 17):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (52)$$

La ecuación se encuentra en un cambio de coordenadas normales a unas primadas, pues se quiere pasar de un sistema de coordenadas a otro y este cambio se ve dado un parámetro α también llamado ángulo de rotación, en donde se ve involucrada una transformación de cambio de coordenada a coordenada, dictado por una matriz 2×2 , que cumple las características de ser ortogonal, pues su misma inversa es su transpuesta de la forma $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$ y su determinante es 1:

$$\det \mathbf{G} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (53)$$

De esta manera se puede denotar a este grupo de la siguiente forma:

$$SO2 = \{ \mathbf{G}_{2 \times 2} / \det \mathbf{G} = 1; \mathbf{G}\mathbf{G}^T = I \} \quad (54)$$

Cabe aclarar que es de este grupo y de esta matriz en particular que nace el elemento $\mathbf{u}(\theta) = e^{\theta \gamma}$, pues este representa las rotaciones o transformaciones generadas por rotación, por lo que, desde un punto de vista matemático este grupo se explica primero que el grupo SU2.

Volviendo al grupo SO3, se establece una relación análoga con las rotaciones en dos dimensiones en la ecuación 55. Nótese que la forma de las matrices del grupo h presentadas aquí, se da dependiendo del eje en el cual se está viendo la rotación, por ejemplo, si se tiene una rotación del plano x, y el eje de rotación quedará descrito por el eje z y por tanto se le da la

unidad y así con las demás rotaciones. Aunque para encontrar cada una se sigue con las reglas de transformación para las tres dimensiones como se hizo en la transformación 52.

$$\mathbf{h}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \mathbf{h}_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \mathbf{h}_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Sin embargo, las matrices aún no están generalizadas o son las representantes del grupo, y por lo tanto se hace necesario revisar, al igual que en el grupo SU2, el generador de rotaciones $\mathbf{u}(\theta) = e^{\theta\gamma}$ para el grupo SO2 y luego pasar al SO3. Entonces, de forma equivalente a la ecuación 21, se establece una rotación o transformación de la forma:

$$\mathbf{u}(\theta) = I + d\theta\gamma \quad (56)$$

Aquí el cambio se da de acuerdo con las características del grupo pues la matriz de transformación γ debe respetar que $\mathbf{u}\mathbf{u}^T = I$ de forma que:

$$(I + d\theta\gamma)^T(I + d\theta\gamma) = I \quad (57)$$

Con lo cual se puede concluir que²⁰:

$$\gamma + \gamma^T = 0 \quad (58)$$

Y se puede postular una matriz con la forma exhibida en 59, que respete dicha conclusión, esta generará una rotación de acuerdo con un ángulo θ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

De esta manera el generador de las rotaciones para el grupo SO2 queda de la forma:

$$\mathbf{u}(\theta) = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \quad (60)$$

²⁰ Aquí $(I + d\theta\gamma)^T(I + d\theta\gamma) = I \rightarrow (I + d\theta\gamma^T)(I + d\theta\gamma)$ se reparten identificando que la multiplicación por la identidad es el mismo objeto $I + d\theta\gamma^T + d\theta\gamma + (d\theta\gamma^T)^2 = I$ y donde $(d\theta\gamma^T)^2$ se puede despreciar por su orden y, por tanto, $\gamma + \gamma^T = 0$.

Extendiendo este análisis para el grupo SO3, ahora se hace el mismo análisis al descrito para la ecuación 55, aquí se establecen los generadores de la rotación en 3 dimensiones, quedando de la siguiente forma²¹ (Javier Garcia, 2017):

$$\mathbf{d}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{d}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{d}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Por lo tanto, se puede definir:

$$SO3 = \{ \mathbf{d}_{3 \times 3} / \det \mathbf{d} = 1; \mathbf{d} \mathbf{d}^T = I \} \quad (62)$$

Sin embargo, hasta este punto para el grupo solo se han tomado números reales y como se ha identificado durante todo el capítulo, una característica del espín es su descripción en términos de números complejos, como se evidenció en el artículo de Pauli para el espín del electrón en su descripción de la matriz y que está en términos de imaginarios o en la condición para el fotón al trabajar con las ecuaciones de Maxwell con valores complejos, por lo que, se puede concluir, a partir de lo dicho, que el espín además tiene una condición de trabajar en un espacio complejo. Por lo tanto, para expandir este grupo se hará uso de las propiedades de la conmutación (que en mecánica cuántica encuentra su utilidad al identificar dos observables que puedan ser medidos sin incluir algún principio de incertidumbre), de la forma que al conmutar los elementos de este grupo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j] &= 0 \rightarrow i = j \\ [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] &= -\mathbf{d}_3 \leftrightarrow [\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_1] = \mathbf{d}_3 \\ [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3] &= \mathbf{d}_2 \leftrightarrow [\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_1] = -\mathbf{d}_2 \\ [\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3] &= -\mathbf{d}_1 \leftrightarrow [\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_2] = \mathbf{d}_1 \end{aligned} \quad (63)$$

De esta manera al dejar esta conmutación igual pero equivalente en términos de complejos se generan nuevos elementos de la forma $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = -i(-i)\mathbf{d}_3 = -i\mathbf{J}_3 \rightarrow \mathbf{J}_3 = (-i)\mathbf{d}_3$ y, por tanto:

²¹ Nótese que esta forma respeta la forma en la que se dan las matrices enumeradas en 55, sin embargo, se pueden encontrar por su cambio de coordenadas, es decir, para su componente \mathbf{d}_x se tiene un sistema de ecuaciones de la forma $y = y + \varepsilon z \rightarrow d_x = \begin{bmatrix} (1 & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} (0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \\ (0 & -1 & 0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donde ε es el parámetro que indica que tanta rotación se hace.

$$J_1 = -id_1; J_2 = -id_2; J_3 = -id_3 \quad (64)$$

Y ahora estos elementos de acuerdo con las expresiones encontradas forman las siguientes matrices (García, Miller, & Esteves, pág. 2):

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Las cuales siguen las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J^2, J_j] &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Por tanto, estos elementos son equivalentes al grupo SO3, por lo que, el generador de rotaciones se puede definir como:

$$\mathbf{u}(\theta) = e^{i\theta J} \quad (67)$$

Para estas expresiones se hace una comparativa con las encontradas en la ecuación 43, ya que son las mismas reglas de conmutación, por lo tanto, partiendo de estos elementos se llega a las matrices de Pauli para el espín del fotón y con ello concluye que los elementos y características del grupo SO3 son fundamentales para encontrar las matrices de Pauli del fotón pues es por su propiedades de ortogonalidad, se pueden encontrar las reglas de conmutación necesarias para hacer un análisis desde el algebra de Lie que lleve a la construcción de la expresiones que construyan a las matrices del espín 1, como se menciona en el texto “El grupo de Poincaré y sus representaciones unitarias: Las representaciones de espín continuo” de Carles Manuel Martorell Argemí: “Las representaciones irreducibles del álgebra SO(3) están caracterizadas por un autovalor de momento angular J” (Argemí, 2020), con lo cual, se menciona que los elementos que caracterizan a este grupo SO3 los identifica un elemento (valor de espín) que también caracteriza la descripción del mismo desde las matrices de Pauli.

2.4 La Indistinguibilidad Desde la Simetría Rotacional del Espín

A lo largo de este capítulo se ha reincidido en una característica y es que la esencia del principio de exclusión reside en la indistinguibilidad, reside en el identificar que cuando se encuentra un sistema de N partículas idénticas no hay alguna forma de diferenciar a una de otra,

sin embargo, el mismo tiene la capacidad de diferenciar entre los tipos de partículas, entonces el principio responde de forma diferente a cuando se habla de partículas Bosonicas o Fermionicas, es decir, fotones o electrones. Por lo tanto, reconociendo que estos tienen diferente espín, se puede intuir que este es la característica que distingue este comportamiento del principio, por lo que, de ser así se puede construir significado alterno para el mismo y de manera consecuente también al espín.

Iniciando con el principio de exclusión, este se define a partir de los números cuánticos, pero desde su representación para sistemas de N partículas, estos ya no se pueden tomar como factores determinantes para su diferenciación como una totalidad y en su distribución general, pues aquí el único número determinante es el espín, este es el responsable de dar cuenta de la distribución del sistema, dado que dependerá de si su valor es 1 o $\frac{1}{2}$. Para ello se tiene que plantear la ecuación como se hacía desde la ecuación 7:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \pm \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$$

Aquí el origen del cambio de signo ya no es atribuido al operador de paridad en el sistema, o al algebra atribuido a las posibilidades de tipo de funciones que puede tomar como planteaba Dirac, pues en ambos casos el signo es sobre impuesto a condiciones que son consecuencia de dicho cambio, por lo tanto, para ambos casos el mismo cambio de signo es producido por las funciones que son alteradas por dicho cambio. Por lo que, desde el análisis con los grupos de Lie se puede ver que esto es causado por el espín de valor 1 o $\frac{1}{2}$. Tal que, reconociendo que el espín representado mediante matrices, del grupo SU2 para electrones con valor de espín $\frac{1}{2}$ y del grupo SO3 para fotones con valor de espín 1, entonces se produce un efecto matemático.

Del grupo SU2 al grupo SO3 se presentará un homomorfismo de la forma $SU2 \rightarrow SO3$, lo cual significa que habrá una función f , tal que, cumple con la condición de que pueda pasar de un grupo a otro. Es decir, que se mapea de un grupo a otro, para lo cual se propone el siguiente ejemplo donde desde los generadores de la rotación se proponga una rotación de 2π alrededor del eje z:

$$\begin{aligned} SO3 \rightarrow \mathbf{u}(2\pi) &= e^{i2\pi J_z} = I \\ SU2 \rightarrow \mathbf{u}(2\pi) &= e^{i2\pi \sigma_z} = -I \end{aligned} \quad (68)$$

Con lo cual, se puede evidenciar que para el espín de valor 1, una rotación completa se da en un giro de 2π o 360° . Sin embargo, para el espín de valor $\frac{1}{2}$, un giro se completa en 4π , es decir, que una rotación para el espín $\frac{1}{2}$ representa dos rotaciones para el espín 1. De esta manera desde el espín 1, al hacer una rotación en 2π para el espín $\frac{1}{2}$, solo se hace media vuelta, por lo que, para el espín $\frac{1}{2}$ solo pueden existir dos valores para la rotación: 1 (cuando se hace una vuelta completa) y -1 (se hace media vuelta), como se propone en el principio de exclusión de Pauli, como menciona Carles Argemí:

Por tanto, para la representación $j = 1$ (y para cualquier representación entera) una rotación 2π opera como una rotación total en el espacio de representaciones; mientras que, por otro lado, para $j = 1/2$ (y también para toda representación semientera) opera cambiando la orientación (como rotación en ángulo π). La identidad se consigue con una rotación de ángulo 4π . (Argemí, 2020)

Por lo anterior, entonces se puede interpretar que el sistema en sí mismo trata de mantenerse indistinguible y examina al espín del sistema comparándolo de manera implícita, haciéndolo rotar y en dado caso de no completar la identidad con una vuelta recae un tipo de partícula específica, además de tener en cuenta el campo de acción de la misma simetría rotacional examinada en la ecuación 46, $N = 2s + 1$, donde la misma al ocupar un espacio de acción mayor también decidiría el comportamiento del sistema.

Finalmente, para cerrar el análisis descrito en este capítulo, en primera instancia se puede definir al principio de exclusión como un principio dependiente del espín para diferenciar a los tipos de partículas, en donde se puede interpretar que el mismo sistema intenta mantenerse indistinguible incluso para el tipo de partícula. Esto se evidencia en su mapeo de grupo a grupo en el homomorfismo presente, dada la condición de rotación, es decir, que se hace un mismo análisis para ambos espines, pero es por su condición matricial que recae en dos valores distintos: al hacer un mapeo y rotar una vuelta completa o se completa en su totalidad denotando que se habla del fotón de valor de espín 1 o se completa solo la mitad de la misma exhibiendo el comportamiento de electrón con valor de espín $\frac{1}{2}$. Por otro lado, se puede inducir que también el mismo sistema examina los campos de acción dados por el espín, que dependiendo de si es de número 1 necesita 3 dimensiones de acción o si es de número $\frac{1}{2}$ se requiere 2 dimensiones de

acción y dependiendo del valor de dimensiones, se inclina por una forma de función diferente a la otra. De esta manera se propone describir la ecuación 7 antes mencionada de la forma:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = e^{i\theta\delta} \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) \quad (69)$$

Donde se presenta la misma indistinguibilidad presentada por Pauli y Dirac pero que es totalmente dependiente del valor de espín del sistema de partículas pues el valor de δ depende del tipo de espín si es 1 o $\frac{1}{2}$ y donde el parámetro θ indica la rotación (que para el caso en que se trabaja de indistinguibilidad es de 2π), por lo que, dependiendo de si se habla de un espín de valor 1, que necesita de una matriz del grupo SO3, dará como resultado 1, pero que si es de valor de espín $\frac{1}{2}$, al pertenecer sus matrices al grupo SU2 dará como resultado un -1 y un 1, que como se mencionaba anteriormente la rotación al ser dada en 2π , para este grupo se dará solo media vuelta y por lo tanto, necesita de otra media vuelta para ser completado.

Y por otro lado, se puede decir que, si bien se puede definir al espín como una propiedad intrínseca de las partículas, este no es una rotación como lo pensaba Pauli, sino, una condición de indistinguibilidad rotacional presente en cada tipo de partícula, pues es descrito por medio de una simetría rotacional demostrado desde su estructura matemática, las matrices, que siguen reglas como las presentadas por ser unitarias, ortogonales o de determinante igual a 1, y que para ambos casos del espín del fotón y el electrón son partes fundamentales para el generador de rotaciones dentro de los grupos SO3 y SU2 respectivamente.

CAPÍTULO 3: LAS DISTRIBUCIONES DE PARTÍCULAS Y LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

Si bien en el capítulo anterior se discutió el análisis con respecto a la propiedad del espín, el teorema espín-estadística relaciona también a la estadística, por tanto, antes de llegar a un análisis completo se necesita comprender como se puede representar a las distribuciones estadísticas dentro del marco de la mecánica cuántica. Para ello, es de resaltar que se hablara solo de dos distribuciones específicas la de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, desde aquí se omite a la estadística propuesta por Boltzmann dado que la misma esta realizada sin contemplar las propiedades de la mecánica cuántica. Por lo tanto, se iniciará partiendo del mismo principio de exclusión interpretado en el capítulo anterior para ir llevando un hilo consecuente que guie a un análisis final que será dado con la solución de un ejercicio de mecánica cuántica ondulatoria que puede ser llevado a clases introductorias de mecánica cuántica.

Desde lo visto en el capítulo anterior el espín por su descripción matricial determina la forma de indistinguibilidad del sistema, por lo que, para adentrarse en la descripción de las consecuencias del cambio de signo en el principio de exclusión se tiene que comprender que para el intercambio de fotones (desde un apartado más interpretativo) no generara algún cambio en el sistema, primero viéndolo por la simetría de rotación del espín, que por ser parte del grupo SO_3 no genera algún cambio en el comportamiento del mismo, a causa de su análisis al rotar una vuelta completa, y segundo, viéndolo que por causa de su comportamiento estadístico desde la estadística de Bose, estos no tienen restricciones sobre su posición específica que se hacía referencia con las celdas específicas o volúmenes específicos con una frecuencia determinada. Diferente a la estadística de Fermi donde los electrones no pueden compartir sus mismos números cuánticos, es decir, que su número de espín debe cambiar y es el responsable de cambiar su forma de función de onda con respecto de los fotones.

Con ello se quiere denotar, que el cambio o permutación entre partículas para un ensamble de N partículas va a ser diferente para los fotones y electrones, y esta se puede dar de forma par o impar, definido a partir de un operador \hat{P}_{ij} que intercambia partículas i y j y es el llamado operador de paridad. Es entonces que para este caso se considera un hamiltoniano del sistema (ya sea para fotones o electrones) de la forma:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla^2 + \sum_i V_{ext}(r_i) + V(r_1, \dots, r_N) \quad (70)$$

Su importancia radica en las reglas de conmutación que tiene con respecto del operador \hat{P}_{ij} , con el cual, se debe conservar la simetría de indistinguibilidad y, por lo tanto, al aplicar un intercambio este hamiltoniano debe seguir siendo el mismo (Peña, 1991, pág. 569). Por lo tanto, la permutación al ser aplicada sobre una eigenfuncion (que respete la simetría al igual que el hamiltoniano) tendrá el eigenvalor de la forma $\lambda_{ij} = \pm 1$. De esta manera, se puede entender porque, en primera instancia este era el responsable de atribuir el comportamiento, es decir el cambio de signo, al principio de exclusión, sin embargo, al ser considerado para la paridad de un sistema, este operador solo dictamina la forma de las funciones de onda, mas no su comportamiento, pues como se dijo en el capítulo anterior, es atribuido al espín, por lo que, si la permutación es par entonces $a_{\hat{P}_k} = 1$ se hablara de funciones de onda simétrica y de ser impar $a_{\hat{P}_k} = (-1)^{r_{P_k}}$ una antisimétrica, y la forma de ellas es respectivamente (Peña, 1991, pág. 572):

$$\begin{aligned} \psi^{Sym} &= c \sum_{P_k} \hat{P}_k \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \psi^{Ant} &= c \sum_{P_k} (-1)^{r_{P_k}} \hat{P}_k \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (71)$$

En estas ecuaciones se representan la forma de las funciones de las posibles combinaciones de las N partículas del sistema, donde P_k representa las permutaciones, c es la constante de normalización del sistema y el $(-1)^{r_{P_k}}$ se encarga de denotar a la función antisimétrica con el comportamiento antes establecido que tiene valores $\lambda_{ij} = -1$ o $\lambda_{ij} = 1$ dependiendo del tipo de permutación, por lo cual, es el que representa a los electrones de espín $\frac{1}{2}$ que por su condición del grupo SU2 dan cuenta de una semirotacion en la rotación del sistema en 2π .

3.1 Las Funciones Simétricas en la Descripción del Fotón

Teniendo en cuenta el capítulo 1 se puede destacar que Bose al proponer su estadística describe al sistema de N fotones para casos particulares, como lo es un gas de fotones, por lo que, si la mecánica cuántica da cuenta de la descripción de partículas entonces estos mismos

deben ser descritos bajo este formalismo también, por lo que, al analizar a los fotones bajo esta teoría se puede destacar dos cosas de su comportamiento: la primera siendo su reacción bajo la indistinguibilidad que se ve reflejado en la forma de sus funciones de onda y la segunda desde su comportamiento viendo al sistema de N fotones como “cuantos” de energía de cómo se propone en un inicio con Bose y Einstein. Por lo que, en primer lugar, teniendo en cuenta lo presentado en el inciso anterior se puede particularizar que, para una función de onda simétrica como la mostrada en la ecuación 71, su constante de normalización puede obtener la siguiente forma:

$$\psi^{Sym} = \sqrt{\frac{N_1! N_2! N_3! \dots}{N!}} \sum_{P_k} \hat{P}_k \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \dots \psi_N(x_N) \quad (72)$$

Donde las partículas denotadas con la forma ψ_i se encuentran en el estado i correspondientemente, de tal manera que la suma de $\sum_i \psi_i = N$, es decir, se tenga un sistema de N partículas, por lo que, el número total de términos en la función es dado por $\frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots}$ (Landau & Lifshits, 1967, pág. 277). Pero también es de resaltar que, aquí siguiendo el principio de exclusión, al tener en cuenta que los estados de cada partícula van a ser u ocupados (1) o no ocupados (0) entonces las $N_i=1$ (Peña, 1991, pág. 601). De forma que la función simétrica adquiere la forma de:

$$\psi^{Sym} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_k} \hat{P}_k \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \dots \psi_N(x_N) \quad (73)$$

Cabe resaltar que desde la estadística de Bose como se exponía anteriormente desde su base propone que no hay restricción en los niveles de ocupación de los fotones, por lo que, al menos desde esta formulación, las funciones de onda no deben tener ninguna restricción y por lo mismo, esta debe estar compuesta desde una forma lineal, y no hay ninguna consideración posterior para trabajar con este tipo de función de onda (dependiendo del contexto del que se trabaje).

Por otro lado, en segundo lugar, teniendo en cuenta esta distribución, que no tiene en cuenta los números de ocupación, sino, su frecuencia recordando que se trabaja con “cuantos” al menos desde la postulación de Bose, entonces se manejaran cuantos de energía $E = h\nu$, por lo que, de querer analizar a una función de onda que tenga en cuenta a los fotones, entonces se

puede hacer una relación teniendo en cuenta a la ecuación de Broglie, puesto que esta relaciona a los “cuantos” con longitud de onda λ con su momento p , de tal forma que se puede encontrar su función de onda en términos de su momento gracias al espacio de fase, tal que se encuentra una función de la forma:

$$\int \tilde{\psi}(p, t) d^3p = 1 \quad (74)$$

Y dada su relación con la ecuación de Broglie²², su forma desde la ecuación de Schrödinger es como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(p, t) = c|p| \tilde{\psi}(p, t) \quad (75)$$

En la ecuación se presenta la evaluación de la función de onda que se toma desde un caso donde no hay potenciales y se puede interpretar como partículas libres, donde se toma la magnitud del momento para hablar de una magnitud escalar dada su relación con la energía y de que su sentido vectorial es dado por la misma función. Ahora bien, esta tiene su solución de la forma (Río, 1991, pág. 360):

$$\tilde{\psi}(p, t) = \tilde{\psi}(p, t_0) e^{-i \frac{c|p|}{\hbar} (t-t_0)} \quad (76)$$

Y teniendo en cuenta que se puede pasar del espacio de fase, es decir, desde su descripción en términos de momento a posición con la transformada de Fourier entonces:

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \hbar^3} e^{i \frac{px}{\hbar}} \tilde{\psi}(p, t) \quad (77)$$

Con lo que, se puede analizar que al igual que se propone en la estadística de Bose, que tomando a la función de onda $\psi(x, t)$ como “cuantos” estos pueden ser localizados bajo una región denotada por la ecuación de Broglie $\lambda_0 = \frac{h}{p_0}$ donde λ_0 y p_0 son la longitud de onda y momento medios, por lo que, su ubicación va a estar determinada por una relación con su frecuencia ν determinada.

²² Recordando que la ecuación de Broglie es $\lambda = \frac{h}{p}$ y la longitud de onda en términos de frecuencia es $\lambda = \frac{c}{\nu}$ entonces $\frac{c}{\nu} = \frac{h}{p} \rightarrow \frac{c}{\nu} p = h \rightarrow cp = h\nu$, por lo que, $cp = E$

De acuerdo con ello, relacionando a esto con la estadística de Bose se puede decir, que haciendo la comparativa entre la descripción estadística y la cuántica entonces, cuando se menciona que los “cuantos” van a estar distribuidos de acuerdo a su número de ubicación, se quiere decir que la función de onda al ser simétrica tendrá en cuenta una solución lineal que no dependerá de condiciones de su forma para determinar su distribución explicando que los “cuantos” puedan tener los mismos números cuánticos. Además, que al decir que estas distribuciones dependen de la frecuencia ν donde no se distingue que fotón va en cada celda específicamente, se habla que la ecuación de Schrödinger al tener en cuenta a la energía dada por la cuantización de la energía, entonces tendrá explícita una relación de distribución dictada por ella y que se puede relacionar a la frecuencia por medio de la ecuación de Broglie, donde por la misma forma de la función de onda esta al no tener en cuenta números de ocupación solo será definida bajo un rango específico que es dado por su misma frecuencia.

3.2 Las Funciones Antisimétricas en la Descripción de Electrón

Ahora al analizar a los electrones como se propone desde la estadística de Fermi, se tiene que recordar que estos cumplen con tener una condición con sus números de ocupación, por lo que, este no debe ser el mismo para dos electrones, es decir, que dos electrones no pueden tener los mismos números cuánticos, pero al resaltar el capítulo anterior, si bien su indistinguibilidad es dada por espín, la respuesta de la función de onda es adquirir esa característica de paridad impar, por lo tanto, en primer lugar al igual que en el caso del fotón la constante de normalización debe tener en cuenta los números de ocupación N_i pueden ser ocupados o no, es decir, 1 o 0, por lo que, $N_i = 1$ y por tanto, la constante será la misma:

$$\psi^{Ant} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_k} (-1)^{r_{P_k}} \hat{P}_k \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (78)$$

Sin embargo, por la paridad impar la función de onda al contrario de la del fotón que no tiene restricción alguna con respecto de su forma, si tendrá una y es que por el factor de paridad $a_{\hat{P}_k} = (-1)^{r_{P_k}}$ esta función tendrá soluciones tanto positivas como negativas, por lo que, la función dependiendo de su permutación tendrá un cambio de signo, hará que esta tenga una forma distinta, de la forma:

$$\psi^{Ant} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_i(x_1) & \psi_j(x_1) & \dots & \psi_k(x_1) \\ \psi_i(x_2) & \psi_j(x_2) & \dots & \psi_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_i(x_N) & \psi_j(x_N) & \dots & \psi_k(x_N) \end{vmatrix} \quad (79)$$

La forma de la función está determinada por un elemento llamado determinante de Slater que es presentado en el trabajo por John Clarke Slater de 1929 para su artículo “The theory of complex spectra” (Slater, 1929) donde representa a la función de onda como un determinante, que, al intercambiar algún estado en dicha matriz, se necesita necesariamente de un cambio de signo, lo cual respeta la idea de función antisimétrica que se presenta aquí y sobre todo que al estar acompañada por una constante de normalización $c = \frac{1}{\sqrt{N!}}$ Entonces en el caso de anularse el determinando bajo la condición de cuadrado integrable esta constante será la que normalizara el sistema.

Para este caso teniendo en cuenta la estadística de Fermi y relacionado con la primera introducción del principio de exclusión, es a causa de la distribución de electrones por su estadística que se genera la distribución de electrones en el átomo representado en la configuración electrónica, por lo que, desde esta forma de función de onda se llega a la misma configuración. Donde por el determinante de Slater y la condición de minimización por los orbitales óptimos para los números cuánticos de espín, se llega a esta configuración expuesta en términos de multiplicadores de Lagrange:

$$\hat{f}\Psi_k = \varepsilon_k \Psi_k \quad (80)$$

3.3 Sobre el Espín en Estadística: Caso desde las Clases de Mecánica Cuántica

Retomando la problemática de la investigación sobre la enseñanza de la mecánica cuántica, se puede señalar que la enseñanza de la misma depende de los maestros y de los contextos en donde es enseñada, sin embargo, si el currículo es el que trae problemas a los estudiantes como se muestra en el texto de Akarsu (Akarsu, 2010) entonces, si bien la investigación no tiene como propósito modificarlo por completo, lo que se establece es una forma de potenciar al mismo usando al espín y el teorema espín-estadística para ello. Por lo tanto, se plantea una ruta de trabajo de tal forma, que un maestro de mecánica cuántica de la

UPN pueda usarla como base para afianzar los problemas presentados a razón del currículo de acuerdo con las dinámicas que el mismo proponga para dicho curso.

Es entonces que esta ruta se puede dividir en tres partes: la primera una introducción al espín desde un apartado histórico, la segunda una interpretación a las matrices de Pauli bajo el generador de rotaciones de acuerdo con los grupos de Lie SU_2 y SO_3 y finalmente una discusión mediante la solución del ejercicio clásico de una partícula en una caja de potencial unidimensional, pero con una modificación y es proponerlo para un sistema de 2 partículas indistinguibles que en un caso se trabajen como electrones y en otro como fotones.

La razón de la estructura propuesta, que está dividida en tres partes, se basa en lo descrito el artículo de María Mercedes Ayala titulado “Los análisis histórico-críticos y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades” del año 2006, pues aquí se hace una crítica sobre la formación de docentes en física desde un apartado netamente “disciplinar”, una perspectiva comparable con lo que ocurre con el currículo tradicional en mecánica cuántica, dada la forma de llevar a cabo la enseñanza del curso a través de análisis conceptuales basados en la matemática o solamente matemáticos, por tanto la inicial construcción histórica y el desarrollo posterior que se encuentra con relación a la investigación realizada se considera una propuesta viable para potenciar el currículo.

3.3.1 Material para clases de M.C: la historia del espín y sus características desde los grupos de Lie

En primera instancia retomando los textos usados en la enseñanza de la mecánica cuántica como el “Introducción a la mecánica cuántica” de Luis de la Peña, las lecturas de Feynman sobre Mecánica Cuántica en "Física Volumen 3" o el “Principles of Quantum Mechanics” de Shankar, se puede destacar que el tratamiento del espín se da de forma netamente matemática, y no se incide en su historia o en su formalismo bajo la mecánica cuántica ondulatoria, por lo tanto, este se maneja para caracterizar a la notación de Dirac y proponer otra propiedad cuántica. Sin embargo, como menciona Ayala:

... la historia se ha planteado como un recurso para el trabajo del maestro de ciencias, en cuyo uso debe ser formado, y a la que se puede acudir con diferentes propósitos y, por ende, examinar desde diferentes planos: desde el plano de la motivación y de la

caracterización de la “naturaleza” del conocimiento científico; pasando por el plano del rescate de argumentos para mostrar la ciencia como una actividad donde juega la razón; al plano de estrategia didáctica, en la medida en que el establecimiento de paralelos entre el desarrollo científico y el desarrollo del conocimiento individual permite derivar elementos para el diseño de actividades en el aula, tendientes ya sea a posibilitar la implementación del enfoque constructivista o a facilitar la comprensión y uso de un concepto, de una ley o de una teoría. (Ayala M. M., 2006)

Por lo que, el comprender sobre la historia de las ciencias puede ayudar desde los diferentes planos mencionados por Ayala, donde se puede destacar el plano de estrategia didáctica, pues de esta manera el maestro en formación tendrá más herramientas para comprender el fenómeno y si lo que se quiere es potenciar el aprendizaje del espín, se necesita de un análisis histórico. Al tener en cuenta esto, el espín puede ser revisado bajo esta perspectiva, destacando su historia, como lo que se establece en el inciso 1.4 de la presente investigación titulado “El Espín en las Teorías de Partículas”, aquí se menciona cómo este nace como efecto cuántico relacionado al efecto Zeeman, en donde el espín inicialmente se define como un efecto magnético, para luego pasar a ser un número cuántico en el principio de exclusión. Posteriormente se resalta cómo en su proceso de ser definido como propiedad intrínseca, involucra también el desarrollo del formalismo de la mecánica cuántica dando como resultado su definición por medio de las matrices de Pauli, vistas en los cursos dictados por el currículo tradicional bajo el formalismo de la notación de Dirac.

Aquí hay que resaltar que se requiere el uso de elementos de la investigación como el análisis del desarrollo de Pauli, descrito en el inciso 2.3.1 titulado “El formalismo del espín $\frac{1}{2}$ ” pues aquí bajo la formulación ondulatoria se llega a un *ansatz* que respeta una simetría rotacional y que es corroborado bajo el formalismo de la notación de Dirac, donde el estudiantado puede identificar más de la concepción del espín como una propiedad intrínseca de una partícula y que la misma tiene una relación con una simetría rotacional. Además, de que es importante destacar que, en el apartado histórico, el espín fue considerado para partículas, por lo que, el fotón también tiene esta propiedad y, por lo tanto, hay que mencionar el desarrollo de la consideración del fotón y electrón como partículas (introduciendo la noción de estadística).

En segundo lugar, está el analizar o generar un interés por parte del estudiantado a que complemente sus saberes, por lo tanto, partiendo del análisis histórico se plantean dos situaciones problema para que los estudiantes puedan comprender más del espín y el curso; es para ello que se usan los desarrollos de la investigación sobre el teorema espín-estadística. Para continuar con la aplicación en los cursos, se propone usar como base “la implementación del enfoque constructivista” (Ayala M. M., 2006) mencionada por Ayala en el plano de la estrategia didáctica, por lo que, retomando el texto de Gil Pérez titulado “Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación” de 1993 se retoma el papel de la historia de la ciencia para la enseñanza de la misma, se puede destacar que esta propuesta se da bajo un enfoque constructivista como menciona Ayala:

La idea central del modelo de aprendizaje de las ciencias como investigación que proponemos consiste, como acabamos de ver, en el tratamiento de situaciones problemáticas abiertas de interés, a través de las cuales los alumnos puedan participar en la construcción de los conocimientos (Pérez, 1993, pág. 204)

Por lo que, desde este enfoque se plantean situaciones problema que parten del análisis histórico para que el estudiantado pueda comprender mejor los temas vistos del curso. Algo para destacar del artículo antes mencionado es que en este se plantea un cambio de currículo de los programas de ciencias, para que estos tomen en cuenta una postura constructivista.

Es entonces que, como segunda parte para la ruta de trabajo, queda en el maestro guiar una actividad para que los estudiantes puedan caracterizar a las matrices de Pauli bajo los criterios del grupo de Lie $SU(2)$ donde se relacione al generador de rotaciones, pues como se vio en el segundo capítulo el generador de rotaciones del grupo es el que contiene a las matrices de Pauli, además de seguir denotando la relación de estas con la simetría rotacional. También, este enfoque permite continuar expandiendo la idea del espín como propiedad de partículas, hablando de las matrices de espín para fotones, donde de manera similar, se puedan caracterizar a estas matrices desde el grupo $SO(3)$, todo esto desde lo descrito en el inciso 2.3 titulado “El Espín y la Simetría Rotacional”. Es de destacar que, si bien se muestra una ruta de trabajo, se deja a criterio del maestro generar el tipo de actividad para llegar a lo planteado en la presente investigación.

3.3.2 Material para clases de M.C: la indistinguibilidad y el teorema espín-estadística

Finalmente, se propone realizar una discusión dirigida por el maestro y realizada por los estudiantes dividida en dos partes: la primera centrada en la indistinguibilidad y la segunda desde el teorema espín-estadística. Para la primera discusión, se plantea mostrar el concepto de indistinguibilidad como se discute en los incisos 2.1 y 2.2 titulados “Partículas Indistinguibles” y “La Indistinguibilidad y el Principio de Exclusión de Pauli” relacionándolos con la conclusión del capítulo dos desde la ecuación 68: $SO3 \rightarrow \mathbf{u}(2\pi) = e^{i2\pi J_z} = I$ $SU2 \rightarrow \mathbf{u}(2\pi) = e^{i2\pi \sigma_z} = -I$ pues aquí dada las características del grupo $SO3$ y $SU2$ se genera un cambio de signo que afecta a la condición de indistinguibilidad, por lo que, se espera que con ello el estudiantado pueda comprender de forma conceptual al espín como se da en el inciso 2.4 titulado “La Indistinguibilidad Desde la Simetría Rotacional del Espín” donde ahora se puede hablar del espín como una característica de indistinguibilidad rotacional del sistema.

Adicionalmente, queda abierta la discusión para comprender qué implicaciones tiene el cambio de signo producido por el espín y es aquí donde entra en la idea de funciones simétricas y antisimétricas. Para ello, se plantea utilizar un ejercicio tradicional para esta clase, el de una partícula en un pozo de potencial en una dimensión, donde hay que recordar que el problema se plantea de la siguiente manera:

Considere a una partícula de masa m , con energía E dentro de un pozo o caja de potencial en una dimensión con una arista de una longitud d , donde se debe cumplir con que el potencial V depende de condiciones de frontera, tal que:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si esta dentro de la longitud; } 0 \leq x \leq d \\ \infty, & \text{Si no esta dentro de la longitud; } x \leq 0; x \geq d \end{cases}$$

y la idea es encontrar los niveles de energía y la función de onda del sistema.

La solución del problema considera usar la ecuación estacionaria de Schrödinger y su intención es evidenciar la cuantización de la energía, sin embargo, bajo la perspectiva de esta investigación, se considera para entender el comportamiento distintivo de las partículas de espines diferentes. Entonces, se propone que partiendo de la indistinguibilidad en la ecuación 69

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = e^{i\theta\delta}\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$, se llegue a entender las consecuencias del cambio de espín en un sistema de partículas, de tal forma que se llegue a la expresión del principio de exclusión de la forma $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \pm\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$ donde la consecuencia de ello se explica por medio de funciones simétricas y antisimétricas.

Aquí hay que retomar la interpretación de Dirac de 1926 donde planteaba una estructura de ecuaciones de la forma: $\psi = a\psi_{12} \pm b\psi_{21}$ donde a y b eran constantes que variaban al ser de la forma $b = a$ y $b = -a$ dependiendo de si era una función de simétrica o antisimétrica. Desde lo mencionado en este capítulo, se adquiere otra interpretación y es la condición antes de simetrización²³ que se explica de la siguiente forma: la función del sistema ψ al contemplar una indistinguibilidad en los sistemas de partículas donde dos estados son iguales, es decir, $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$, dará como resultado un sistema representado como una combinación lineal de los dos estados, pues aquí, las funciones de onda se solapan de la forma:

$$\psi(x) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2) \quad (81)$$

Cabe mencionar que la función de onda presentada se puede utilizar para un sistema de pocas partículas, además que la misma teniendo en cuenta la simetrización, representará el mismo ensamble, pues para ambos casos no abra alguna condición que restrinja el comportamiento de la función de onda (sin tener en cuenta las propias condiciones que pueda tener el sistema), es decir, que para ambos casos el intercambio de x_1 y x_2 no alterara el comportamiento de la misma, siendo la función de todo el sistema una combinación lineal de ambas.

Por otro lado, para cuando se tiene la condición que $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \pm\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$, se tiene que de forma similar:

$$\psi(x) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2) = 0 \quad (82)$$

²³ La condición de simetrización es la trabajada en las ecuaciones: (73) $\psi^{Sym} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_k} \hat{P}_k \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \dots \psi_N(x_N)$ y (78) $\psi^{Ant} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_k} (-1)^{r_{P_k}} \hat{P}_k \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ donde esta es la descrita al tomar las funciones de onda permutadas con constante de normalización (que toma en cuenta número de ocupación), es decir, la condición de simetrización es la que tiene en cuenta la estadística del sistema. (Río, 1991, pág. 356)

En esta ecuación se debe tener en cuenta que para ser trabajada se propone el determinante de Slater, pues, si ante el intercambio propuesto para los x_1, x_2 en las funciones de onda se obtienen funciones de onda iguales, la función de onda del sistema no existe y si son diferentes si existe, entonces, se puede decir que el determinante se encarga de normalizar y dar cuenta de la existencia de la función de onda del sistema.

Por lo que, volviendo al caso de la partícula en el pozo, al haber hecho la indistinguibilidad entre más de una partícula, denotando que el cambio de signo es producido en dicha igualdad por el espín, se generara una consecuencia y es que la función de onda debe cambiar en su comportamiento, debe ser diferente. Para ello se usará el caso del pozo de potencial unidimensional pero expuesto para dos partículas idénticas de dos tipos: electrones y fotones. Aquí hay que remarcar que al trabajar con un sistema de solo dos partículas se usará la interpretación de Dirac y no se ahondará en la formalización de simetrización pues esta es expuesta para un caso de más partículas, sin embargo, como se habló anteriormente, la misma interpretación de Dirac guía al análisis estadístico expuesto con esta simetrización.

Por lo que, partiendo del enunciado:

Considere a dos partículas con energía E dentro de un pozo o caja de potencial en una dimensión de longitud d , donde se debe cumplir con que el potencial V depende de condiciones de frontera, tal que:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si esta dentro de la longitud; } 0 \leq x \leq d \\ \infty, & \text{Si no dentro de la longitud; } x \leq 0; x \geq d \end{cases}$$

Entonces, encuentre la constante de normalización considerando que las dos partículas son fotones y discuta sobre la normalización cuando las dos partículas son electrones.

Para ello hay que considerar la solución para una partícula dentro del pozo:

$$\psi = B \operatorname{sen} \left(\frac{n_x \pi x}{d} \right) \quad (83)$$

Aquí d es la longitud del pozo, n_x es el nivel de energía donde está ubicada la partícula y se debe considerar que para llegar a dicho resultado se normaliza la función de onda

considerando que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ donde la constante de normalización es $B = \sqrt{\frac{2}{d}}$.

Para el caso de los fotones se debe considerar desde la indistinguibilidad para partículas con espín 1 (bosones) dado por: $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$, por lo que, la función de onda bajo la condición antes de sinterización es:

$$\psi_{fot} = B_1 \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_1}{d} \right) C_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_2}{d} \right) + B_1 \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_2}{d} \right) C_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_1}{d} \right) \quad (84)$$

Por lo que, considerando $B_1 C_2 = D$ pues son constantes entonces:

$$\psi_{fot} = D \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_1}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_2}{d} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_2}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_1}{d} \right) \right] \quad (85)$$

Ahora hay que remarcar que en la ecuación 85 se expone una condición donde sin importar los intercambios de n_{x1} y n_{x2} o de x_1 y x_2 la función de onda existirá y no abra alguna restricción en la misma que pueda hacer que se anule. Por lo tanto, para encontrar la constante de normalización se usa la condición de cuadrado integrable de forma que²⁴:

$$D^2 \int_0^d \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_1}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_2}{d} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_2}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_1}{d} \right) \right]^2 dx_1 dx_2 = 1 \quad (86)$$

Aquí ocurren dos cosas, la primera es que al considerar que las partículas al no tener restricción en su forma y estar definidas bajo el dominio de x , entonces se puede plantear un escenario donde $x_1 = x_2 = x$, pues se puede determinar que el intercambio en su indistinguibilidad estará dado por su ubicación de acuerdo al nivel de energía n_{xi} , al igual, que sucedía con el caso de Dirac al explicar las funciones simétricas y antisimétricas, donde proponía un intercambio en sus niveles de energía c y d ²⁵. Y segundo, que la forma en que se resuelven las integrales es la misma que en el caso de una sola partícula, por lo que, obtienen una solución de la forma:

$$4D^2 \left[\frac{1}{2} d \right] \left[\frac{1}{2} d \right] = 1 \quad (87)$$

²⁴ Donde se tiene en cuenta que $\psi_{12} = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ y $\psi_{21} = \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)$ y, por lo tanto, se puede solucionar separación de variables

²⁵ Aquí la función de onda cambia su forma a $\psi_{fot} = D \left[2\operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x}{d} \right) \right]$ y, por tanto, al normalizar $4D^2 \left[\int_0^d \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n_{x1}\pi x}{d} \right) dx_1 \int_0^d \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n_{x2}\pi x}{d} \right) dx_2 \right] = 1$

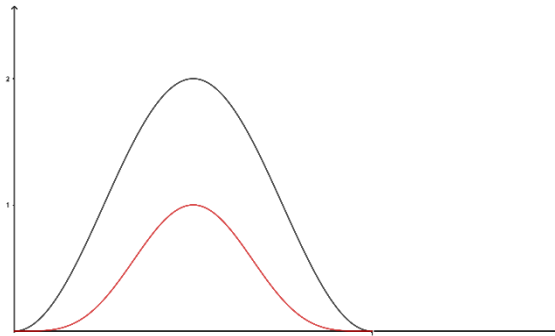
Por lo que, $D = \frac{1}{d}$ de forma que la función de onda para dos fotones dentro del pozo sería de la forma:

$$\psi_{fot} = \frac{1}{d} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x1} \pi x}{d} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_{x2} \pi x}{d} \right) \right] \quad (88)$$

De esta manera se puede ver que bajo un mismo nivel de energía n_{x1} se obtiene la gráfica 1.

Aquí, se puede ver que la probabilidad de encontrar a los fotones es más baja en comparación con una sola partícula, teniendo a los fotones en un mismo nivel de energía, pues al encontrarlos en la misma posición es menor que encontrar a una sola partícula en una posición específica. Sin embargo, para ambos casos convergen en el centro. Y algo que se debe remarcar, es que la función de onda existe para este caso en el que $n_{x1} = n_{x2} = 1$.

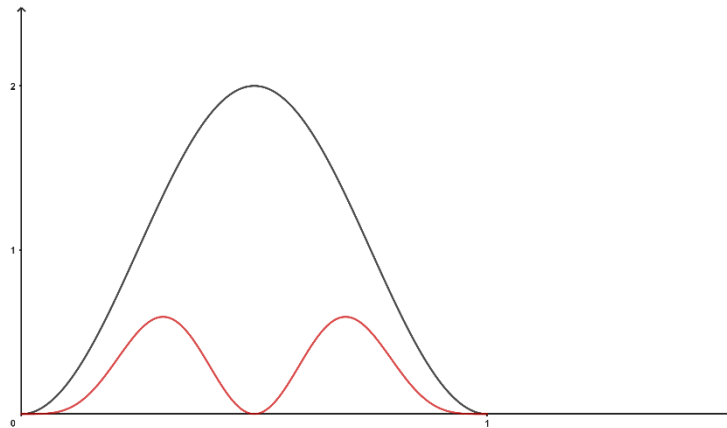
Gráfica 1: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$



Nota: En el grafico se ve de color negro a la función solución para una partícula dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1} = 1$ y en color rojo a la función de onda de los fotones dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1}=1$ y $n_{x2} = 1$.

Ahora al tener diferentes niveles de energía, por ejemplo, un $n_{x1} = 1$ y un $n_{x2} = 2$, es decir, aumentar el nivel de energía para uno de los fotones se obtiene la gráfica 2:

Gráfica 2: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$ y $n_{x1} = 1$, $n_{x2} = 2$

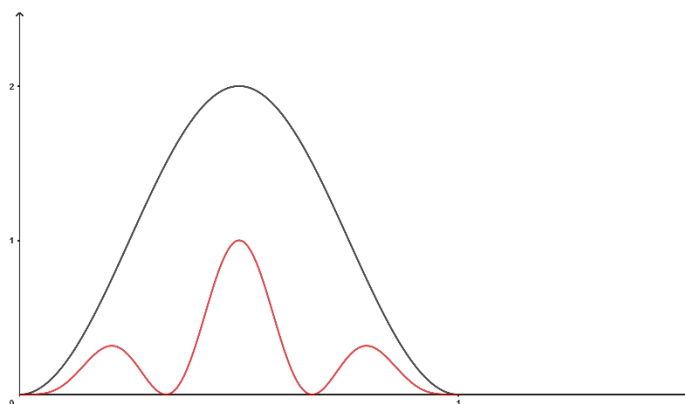


Nota: En el grafico se ve de color negro a la función solución para una partícula dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1} = 1$ y en color rojo a la función de onda de los fotones dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1}=1$ y $n_{x2} = 2$.

De esta manera puede ver que la probabilidad de encontrar a los fotones en dos niveles de energía distinto sigue siendo más baja que al considerar una sola en su primer nivel de energía, sin embargo, ahora que están en dos niveles energía diferente la forma de la función es una combinación de las funciones de cada una por separado, es decir, que las ondas se solapan y sin embargo, dentro de la caja es más probable encontrarlas en dos posiciones igual de probables, denotando esa indistinguibilidad en el intercambio de un nivel a otro.

Ahora bien, cuando se hace en $n_{x1} = 1$ y un $n_{x2} = 3$ se obtiene lo que se presenta en la Gráfica 3.

Gráfica 3: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 1$ y $n_{x1} = 1$, $n_{x2} = 3$

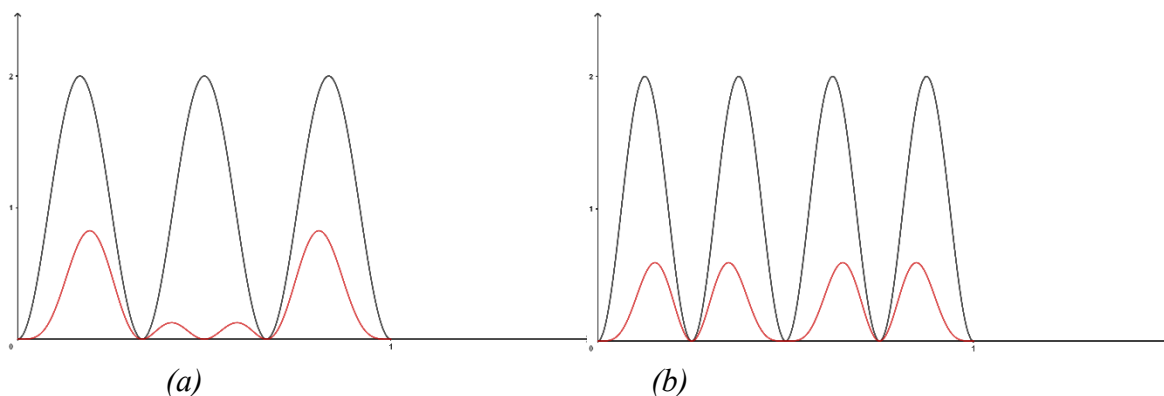


Nota: En el gráfico se ve de color negro a la función solución para una partícula dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1} = 1$ y en color rojo a la función de onda de los fotones dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1}=1$ y $n_{x2} = 3$.

Ahora al establecer un valor de energía $n_{x2} = 3$, se puede ver como la probabilidad de encontrar a los fotones en los niveles se distribuye de forma lineal de acuerdo con las combinaciones posibles en las que se pueden encontrar, es decir, que al aumentar a un tercer nivel de energía la probabilidad se reparte en tres partes. De forma simétrica, si se aumentan los niveles de energía en los que se puede encontrar uno de los dos fotones, se aumentarían su probabilidad de encontrarlo de acuerdo con los niveles de energía se aumente.

Sin embargo, al variar los niveles de energía del primer fotón, se encuentra la siguiente relación:

Gráfica 4: Función de onda ψ_{fot} en función de la posición bajo cuadrado integrable para $n_x = 3$ - $n_{x1} = 3$, $n_{x2} = 2$ y $n_x = 4$ - $n_{x1} = 4$, $n_{x2} = 2$



Nota: En el gráfico a se ve de color negro a la función solución para una partícula dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1} = 3$ y en color rojo a la

función de onda de los fotones dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1}=3$ y $n_{x2} = 2$. En el grafico b se ve de color negro a la función solución para una partícula dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1} = 4$ y en color rojo a la función de onda de los fotones dentro de la caja a una distancia $d = 1$ y a un nivel de energía $n_{x1}=4$ y $n_{x2} = 2$.

Con estas graficas se puede ahora evidenciar un comportamiento totalmente simétrico en la función de onda, pues al variar de forma impar los niveles de energía, es decir, proponer niveles de energía n_{xi} impares la función de onda se disipa en el centro, pues es más probable encontrar una combinación impar que un par, es decir, es menos probable encontrar a los fotones en el mismo lugar, sin embargo, al variar de forma par los niveles de energía n_{xi} se encontrara una función de onda con probabilidad de ser encontrados, similar a la de encontrar una partícula por si sola.

Finalmente, como último punto de análisis para la discusión que se lleve a cabo para la clase, se necesita hablar de la normalización de la función de onda de los electrones, de acuerdo con ello y a la estructura antes de la sinterización, la ecuación queda como:

$$\psi_{ele} = D \left[\text{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_1}{d} \right) \text{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_2}{d} \right) - \text{sen} \left(\frac{n_{x1}\pi x_2}{d} \right) \text{sen} \left(\frac{n_{x2}\pi x_1}{d} \right) \right] \quad (89)$$

Donde es de resaltar que al contrario de con la función de los fotones aquí para que la función de onda no sea 0, se es necesario que tanto n_{x1} como n_{x2} y x_1 y x_2 sean diferentes entre sí y pues de no serlo la función de onda se anula, por lo que, se es necesario que para los electrones no se compartan los mismos números, por ello, es que el principio de exclusión es explicado con la misma indistinguibilidad pues al ser aplicada a electrones desde la simetrización de Dirac es natural que los números cuánticos no sean los mismos.

Finalmente, para cerrar este capítulo se puede hablar de como las funciones simétricas y antisimétricas son la consecuencia de la simetría rotacional del espín dentro de la indistinguibilidad de un sistema de N partículas, algo que si bien puede explicar el operador de paridad este no es el responsable de atribuir el cambio de signo a la igualdad que representa la indistinguibilidad. Además, que con la noción de estas funciones es que se puede conectar a la estadística, trayendo consigo la idea base del teorema espín-estadística, pues la simetría rotacional del espín cambia el comportamiento estadístico que puedan tener las partículas. Ahora al ser llevado al contexto educativo, se puede trabajar mediante el caso del pozo de potencial

unidimensional donde al tomar la solución de dicho problema y caracterizarla al caso de fotones y electrones se puede concluir que para el caso de dos fotones, la función de onda resultante será una combinación lineal de dos funciones de onda, donde la misma tendrá existencia incluso si comparten todas las mismas características, distinto de la función de onda de los electrones que no permite igualdad en sus elementos, trayendo la idea del principio de exclusión y como este se explica a su vez con la indistinguibilidad.

CONCLUSIONES

- El abordaje histórico presentado en la primera parte del trabajo permitió hacer la distinción especial entre física estadística y las estadísticas cuánticas, dado que, mientras que la física estadística se originó con Boltzmann, como un medio para describir la termodinámica en términos de la mecánica newtoniana, es el espín el que permitirá distinguir las estadísticas cuánticas de acuerdo con el formalismo Bose y Fermi, para fotones y electrones. Allí, si bien estas descripciones dan cuenta de ideas diferentes planteadas por los autores, comparten un rasgo común que puede destacarse como esencial, la indistinguibilidad. Esta característica es la que permite la conexión con el espín, dado que este es el generador del comportamiento (cambio de signo) en el principio de exclusión que consecuentemente, da una descripción de dos estadísticas basadas en dos funciones de onda diferentes, como propuso Dirac en 1927.
- Es de destacar que, si bien se puede definir al espín como una propiedad intrínseca de las partículas, este no es una rotación como lo pensaba Pauli, sino, una condición de indistinguibilidad rotacional presente en cada tipo de partícula, dado que es descrito por medio de una simetría rotacional. Particularmente se mostró que las matrices, que siguen reglas dentro de los grupos SO_3 y SU_2 son las que permiten llegar a la interpretación de las matrices de Pauli como el generador de las rotaciones y, por tanto, describir las condiciones propias para los electrones y los fotones. Algo que da razón al cambio de signo en la función de onda que tiene en cuenta el principio de exclusión, pues el sistema genera una rotación de 2π para cualquier ensamble de partículas indistinguibles, pero dado que el generador de rotación es diferente para fotones y para electrones, se obtendrán dos resultados diferentes: dará positivo para el caso de ser espín 1 y dará solución positiva y negativa para el caso de ser espín $\frac{1}{2}$.
- Si bien se puede explicar el cambio de signo por medio del operador de paridad no es este el que genera este cambio de signo, sino, el espín, dado que de este se generan las funciones de onda simétricas y antisimétricas como proponía Dirac, que son explicadas de mejor forma, teniendo en cuenta a la descripción estadística. Llevado al contexto educativo, trabajando desde el caso de una partícula en pozo de potencial unidimensional, se puede aclarar que la función de onda resultante para fotones será una combinación lineal de dos funciones de

onda, donde la misma tendrá existencia incluso si comparten todas las mismas características, distinto de la función de onda de los electrones que no permite igualdad en sus elementos, trayendo la idea del principio de exclusión.

REFERENCIAS

- Akarsu, B. (2010). An extensive Study of Teaching / Learning Quantum. doi:arXiv:1002.4975v1
- Allen, L., Padgett, M., & Babiker, M. (1999). IV The Orbital Angular Momentum of Light. In L. Allen, M. Padgett, & M. Babiker, [*Progress in Optics*] (Vol. 39, pp. 291-372). Scotland, UK. doi:10.1016/S0079-6638(08)70391-3
- Andrews, D. L., & Babiker, M. (2013). *The angular momentum of the light*. Cambridge University Press.
- Argemí, C. M. (2020). *El grupo de Poincaré y sus representaciones unitarias: Las representaciones de espín continuo*. Universidad de Valladolid.
- Ayala, M. M. (1999). LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA PARA LA FORMACIÓN DE. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 6. doi://doi.org/10.17227/ted.num6-5663
- Ayala, M. M. (2006). Los análisis histórico-críticos y la recontextualización de saberes científicos. *Pro-Posições*, 19-37.
- Belloni, M., Wolfgang, C., & Brown, D. (2007). Open Source Physics Curricular Material for Quantum Mechanics. *Computing in Science and Engineering*. doi:10.1109/MCSE.2007.80
- Beltrán, Y. J., & Suárez, C. J. (2021). PRÁCTICA DE ENSEÑANZA DE UN PROFESOR UNIVERSITARIO DE FÍSICA CUÁNTICA EN COLOMBIA, DIAGNÓSTICO. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*. .
- Boltzmann, L. (1868). Studien Uber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. 58, 517-560.
- Bose, S. N. (1924, Diciembre). Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Physik*, 26, 178-181. doi:https://doi.org/10.1007/BF01327326
- Close, R. A. (1963). *An introduction to wave mechanics*.
- Commins, E. D. (2012). *Electron Spin and Its History*.
- CRUZ-GARRITZ, D., CHAMIZO, J. A., & GARRITZ, A. (1991). Descubrimiento del espín electrónico y complementación del modelo de Lewis-Langmuir. In *ESTRUCTURA ATOMICA UN ENFOQUE QUIMICO* (p. 306). USA: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Dirac, P. (1927). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 243-265. doi:10.1098/rspa.1927.0039

- Dirac, P. A., & Fowler, R. H. (1926). On the theory of quantum mechanics.
doi:<https://doi.org/10.1098/rspa.1926.0133>
- Einstein, A. (1905, marzo 17). Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz. *Annalen der Physik*, 132-148.
- Enric Pérez, J. I. (2022). Indistinguishable elements in the origins of quantum statistics. The case of Fermi–Dirac statistics. *The European Physical Journal*.
doi:<https://doi.org/10.1140/epjh/s13129-021-00033-6>
- Fermi, E. (1924). Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici.
- Fermi, E. (1926, Marzo 24). Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases. 902-912.
doi:[10.1007/bf01400221](https://doi.org/10.1007/bf01400221)
- Feynman, R., Leighton, R., & Sands, M. (1971). *The Feynman Lectures on Physics: Mecánica Cuántica* (Vol. III). Panamá: Fondo Educativo Interamericano.
- Fierz, M. (1939). Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 3-37.
- Gao, S. (2011). Meaning of the wave function. *International Journal of Quantum Chemistry*, 4124-4138.
- García, V. D., Miller, C. G., & Esteves, R. D. (n.d.). *Spin, Helicidad y Polarización del Fotón*. México D.F.
- Hall, B. C. (2013). *Quantum Theory for Mathematicians*. New York : Springer .
- Harrow, A. (2016). 8.06 Spring 2016 Lecture Notes:4. Identical particles.
- Heisenberg, W. (1925, Julio 29). Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. 879-893. doi:<https://doi.org/10.1007/BF01328377>
- HELLER, J., & BERGMANN, P. G. (1951). A Canonical Field Theory with Spinors. *PHYSICAL REVIEW*, 665-670. doi:[10.1103/physrev.84.665](https://doi.org/10.1103/physrev.84.665)
- Hernández, J. G. (2018). *NUMEROS CUANTICOS CONFIGURACION ELECTRÓNICA*. CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO.
- Inaba, H. (2015). The development of ensemble theory: A new glimpse at the history of statistical mechanics. *The European Physical Journal H*, 40, 489-526.
doi:<https://doi.org/10.1140/epjh/e2015-60034-2>
- Javier Garcia. (2017, Julio 5). Grupos de Lie - Capítulo 4 DEDUCCION MATRIZ ROTACIÓN. Youtube. Retrieved from Grupos de Lie - Capítulo 4 DEDUCCION MATRIZ ROTACIÓN:
https://www.youtube.com/watch?v=P_jGXf6fjGc&list=PLAnA8FVrB18DTFTMP8kXbDnRJHQKqfjaw&index=4

- Javier Garcia. (2017, Diciembre 7). Grupos de Lie - SU(2) [video]. Youtube. Retrieved from Grupos de Lie - SU(2): <https://www.youtube.com/watch?v=eNHazVFM4TI&list=PLAnA8FVrBI8DTFTMP8kXbDnRJHQKqfjaw&index=8>
- Jaynes, E. T. (1967). Foundations of probability theory and statistical mechanics. In *Delaware seminar in the foundations of physics* (pp. 77-101). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. (1969). *Course of Theoretical Physics: Statistical Physics* (Second ed., Vol. 5). Institute of Physical Problems.
- Landau, L., & Lifshits, Y. (1967). *Mecánica Cuántica (Teoría no-relativista)* (2da ed., Vol. 3). Barcelona: Reverté.
- Maxwell, J. K. (1877). A Treatise on the Kinetic Theory of Gases. *Nature*, 16, 242-246. doi:<https://doi.org/10.1038/016242a0>
- McIntyre, D. H. (2022). *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Miguela, A. P. (2021). *Introducción a la Teoría de Grupos y aplicación a la Física Molecular*. Universidad de Sevilla.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN], Coalición Latinoamericana para la Excelencia Docente. (2022, Mayo). *La formación docente en Colombia: nota técnica*. Universidad de los Andes & Universidad de La Sabana, Bogotá, D.C.
- Ohanian, H. C. (1986). *What is spin?* American Journal of Physics. doi:<https://doi.org/10.1119/1.14580>
- O'Hara, P. (2003). Rotational invariance and the spin-statistics theorem. *Foundations of Physics*, 1349-1368.
- Pantoja, G. C., Moreira, M. A., & Herscovitz, V. E. (2014). La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica cuántica a alumnos de graduación en física. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 9(1), 22-39.
- Pauli, W. (1925). Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. 765-783. doi: W. Pauli (1925). Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. 765-783. doi:[10.1007/bf02980631](https://doi.org/10.1007/bf02980631)
- Pauli, W. E. (1927). Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. 601-623. doi:[10.1007/bf01397326](https://doi.org/10.1007/bf01397326)
- Peña, L. d. (1991). *Introducción a la MC*.
- Pérez, D. G. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las Ciencias*, 197-212.

- Physical Chemistry V.* (2013). Retrieved from Ethz.ch: https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/chab/physical-chemistry/ultrafast-spectroscopy-dam/documents/lectures/spectroscopyFS13/exercisesFS13/PCV_solution_03.pdf
- Redhead, M., & Teller, P. (1992). Particle Labels and the Theory of Indistinguishable Particles in Quantum Mechanics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 201-218. doi:10.1093/bjps/43.2.201
- Río, C. S. (1991). *Física Cuántica*.
- Rubio, R. S. (2020). *Aproximación a los grupos de Lie en física a través de un hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller*. Valladolid.
- Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. Los Angeles : University of California .
- Schrödinger, E. (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem . 489-527. doi:10.1002/andp.19263840602
- Schwartz, M. D. (2014). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge university press.
- Slater, J. C. (1929). The theory of complex spectra .
- Sudarshan, G. (1994). Quantum Theory. In S. N. Calcutta, *S N Bose : The Man and His Work Part I : Collected Scientific Pape* (pp. 7-11).
- Travesset, P. M. (2018). Origin and foundations of Bose-Einstein statistical mechanics.
- Uhlenbeck, G. E., & Goudsmit, S. (1925, Noviembre). Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons. . 953-954. doi:10.1007/bf01558878
- Watson, H. W. (1876). *A Treatise on the Kinetic Theory of Gases*.