



CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO QUE DEBERÍA POSEER EL  
PROFESOR DE MATEMÁTICAS RESPECTO A RAZÓN, PROPORCIÓN Y  
PROPORCIONALIDAD

ANDRÉS AMADO ORDUZ

JORGE MIGUEL MUÑOZ VERA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, D.C.

2015



CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO QUE DEBERÍA POSEER EL  
PROFESOR DE MATEMÁTICAS RESPECTO A RAZÓN, PROPORCIÓN Y  
PROPORCIONALIDAD

ANDRÉS AMADO ORDUZ

JORGE MIGUEL MUÑOZ VERA

ASESOR: EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Trabajo de grado

Presentado para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo de grado es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, D.C.

2015

## RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO QUE DEBERÍA POSEER EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS RESPECTO A RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD
<b>Autor(es)</b>	Amado Orduz, Andrés Muñoz Vera, Jorge Miguel
<b>Director</b>	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 75 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	RAZÓN, PROPORCIÓN, PROPORCIONALIDAD, CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
2. Descripción	
<p>Este trabajo presenta una caracterización de los conocimientos que debería tener el profesor de matemáticas a la luz de lo que reportan investigaciones en Educación Matemática respecto a razón, proporción y proporcionalidad. Esta caracterización se hace a partir de una búsqueda bibliográfica de la cual se obtuvieron 274 documentos entre artículos, libros y tesis de maestría y doctorado, que datan desde el año 1929 hasta el año 2014: por el volumen de documentos encontrados, se toma la decisión de reportar los documentos que están a partir del año 2001 en adelante.</p> <p>Para la organización y posterior caracterización, se realiza un estudio previo que da cuenta de cuáles son los componentes del conocimiento del profesor, a partir de este estudio se establece un modelo de conocimiento y a partir de la aproximación a un estado de arte de razón proporción y proporcionalidad se establecen las categorías de análisis que permiten hacer la caracterización, objetivo principal de este trabajo.</p>	

3. Fuentes
Para el desarrollo de este trabajo se consultaron diversas fuentes bibliográficas que componen dos grupos de fuente, bibliografía respecto al conocimiento del profesor y bibliografía respecto a razón proporción y proporcionalidad. A continuación se mencionan algunas

representativas respecto al tema.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon : Knowing Mathematics for Teaching to Learners ' Mathematical Futures 1.

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389407–.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas, 13–31.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Content Knowledge : Conceptualizing and measuring teachers ' topic-tpacific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <http://doi.org/Article>

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza Y Aprendizaje De La Razón, La Proporción Y La Proporcionalidad: Un Estado Del Arte. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <http://doi.org/10.12802/relime.13.1713>

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181–204.

#### 4. Contenidos

El trabajo de grado está organizado en cinco capítulos a través de los cuales se exponen todo el proceso investigativo desde la formulación del problema hasta las conclusiones que provienen del análisis realizado.

Capítulo 1: Generalidades del estudio. Este capítulo trata de la formulación del problema, los objetivos propuestos la justificación y pertinencia de este trabajo para ser ubicado dentro de una línea de investigación de la Educación del profesor de matemáticas y de la estrategia metodológica.

Capítulo 2: Marco de referencia. Este capítulo da cuenta de los sustentos teóricos que dan soporte al desarrollo de este trabajo, el capítulo expone algunos modelos de los componentes del conocimiento del profesor, así mismo expone el tratamiento de las tendencias investigativas que han girado en torno a razón, proporción y proporcionalidad, y por último se definen las categorías de análisis a través de las cuales se desarrolla toda la clasificación y revisión bibliográfica.

Capítulo 3: Ubicación de la literatura especializada en las categorías definidas. Este capítulo expone el proceso de búsqueda y organización de las diferentes investigaciones reportadas

respecto a razón, proporción y proporcionalidad que fueron consultas por los autores, así mismo justifica su ubicación en cada categoría propuesta para el análisis de los datos.

Capítulo 4: Análisis de la literatura en cada categoría. Este capítulo muestra la interpretación que hacen los autores de la clasificación que se reporta en el capítulo 3, con la cual se da respuesta a la pregunta del problema, la caracterización de cada componente del conocimiento del profesor respecto a razón, proporción y proporcionalidad proviene de los resultados encontrados en cada artículo seleccionado.

Capítulo 5: Conclusiones y proyecciones futuras. Este capítulo expone las conclusiones finales que obtuvieron los autores de todo el proceso de investigación, así mismo se proponen unas cuestiones abiertas que permiten a los autores proyectar nuevas investigaciones en la dirección de la educación del profesor y su relación con RPP.

## **5. Metodología**

La metodología en la que se enmarca este trabajo de grado es de tipo documental-cualitativo; es decir, que las fuentes de información y los datos recolectados provienen de diferentes clases de documentos tales como artículos revistas especializadas, libros o capítulos de libros, tesis de maestría y doctorales, ponencias de memorias de congresos y eventos que estén relacionados con la Educación Matemática y en particular con razón, proporción y proporcionalidad. Y es de carácter cualitativo en tanto los datos que se analizaran no son cuantificables y corresponden a un análisis descriptivo y crítico de acuerdo con la interpretación de los autores, que está sujeto a los resultados encontrados en los diferentes documentos revisados.

El trabajo se desarrolló a través de cinco fases, a saber:

- Estudio de los componentes de la educación del profesor
- Aproximación al estado del arte de razón, proporción y proporcionalidad.
- Constitución de las categorías de análisis
- Organización y clasificación de la bibliografía recolectada
- Descripción y análisis de la bibliografía seleccionada

## **6. Conclusiones**

A partir de todo el proceso de clasificación, revisión bibliográfica, análisis y posterior caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas en torno a razón, proporción y proporcionalidad se dedica este espacio para realizar algunas reflexiones que han surgido durante la

realización de este trabajo.

El conocimiento del profesor de matemáticas es un asunto de interés para la comunidad académica.

Caracterizar el conocimiento del profesor respecto a razón proporción y proporcionalidad permitió ver falencias que existen la formación del profesor.

Los saberes que deberían ser propios del profesor respecto a razón proporción y proporcionalidad pueden tener como fuente de conocimiento los resultados que provienen de las investigaciones en Educación Matemática.

Se reconoce que existen componentes del conocimiento del profesor a los cuales la investigación aporta pocos elementos y por tanto se hace necesario producir investigación en esta vía, como lo es el conocimiento del currículo, y el conocimiento común del contenido

<b>Elaborado por:</b>	Amado Orduz, Andrés Muñoz Vera , Jorge Miguel
<b>Revisado por:</b>	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	21	07	2015
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

## ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "**Caracterización del conocimiento que debería poseer el profesor de matemáticas respecto a razón, proporción y proporcionalidad**", presentado por los estudiantes:

**Jorge Miguel Muñoz Vera - 2014185016 - 80741803**  
**Andrés Amado Orduz - 2014185002 - 79624730**

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con 43 Puntos.

Observaciones:

---

En constancia se firma a los 08 días del mes de septiembre de 2015.

### JURADOS

Directora del Trabajo: Profesor

EDGAR ALBERTO GUACANEME

Jurados:

Profesor

JAIME FONSECA GONZÁLEZ

Profesor

WILLIAM JIMÉNEZ

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	1
1. GENERALIDADES DEL ESTUDIO .....	3
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	3
1.1.1 Ubicación del problema .....	3
1.1.2 Formulación del problema .....	5
1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA .....	7
1.3 OBJETIVOS .....	9
1.3.1 Objetivo general .....	9
1.3.2 Objetivos específicos.....	9
1.4 PROPUESTA METODOLÓGICA .....	10
1.4.1 Fase I Estudio de los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas .	10
1.4.2 Fase II Aproximación a un estado de arte de RPP .....	10
1.4.3 Fase III Constitución de las categorías de análisis .....	11
1.4.4 Fase IV Organización y clasificación de la bibliografía recolectada .....	11
1.4.5 Fase V Descripción y análisis de la bibliografía recolectada .....	12
2 MARCO DE REFERENCIA .....	13
2.1 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS .....	13
2.1.1 El modelo de Shulman .....	14
2.1.2 Modelo de Schoenfeld and Kilpatrick.....	16
2.1.3 Modelo multidimensional de CPM de Godino.....	17
2.1.4 Modelo de Ball Thames y Phelps.....	19
2.1.5 Modelo de Rowland .....	21
2.1.6 Modelo de Stacey .....	22
2.2 RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....	23
2.3 DEFINICIÓN DE LAS CATEGORIAS DE ANÁLISIS .....	26
3 UBICACIÓN DE LA LITERATURA ESPECIALIZADA EN LAS CATEGORÍAS DEFINIDAS.....	31
3.1 CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO (CCK).....	32
3.2 CONOCIMIENTO EN EL HORIZONTE MATEMÁTICO .....	33

3.3	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO (CSKL) .....	34
3.4	CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y DE LOS ESTUDIANTES (KCS).....	35
3.5	CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y LA ENSEÑANZA (KCT) .....	42
3.6	CONOCIMIENTO DEL CURRÍCULO .....	46
4	ANÁLISIS DE LA LITERATURA EN CADA CATEGORÍA .....	48
4.1	RESPECTO A LA PREGUNTA PROPUESTA.....	48
4.2	RESULTADOS DE LA ORGANIZACIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	49
4.3	CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS RESPECTO A RPP DE ACUERDO CON LAS CATEGORIAS DE ANÁLISIS.....	51
4.3.1	Conocimiento común del contenido.....	51
4.3.2	Conocimiento en el horizonte matemático .....	52
4.3.3	Conocimiento especializado del contenido .....	54
4.3.4	Conocimiento del contenido y de los estudiantes.....	55
4.3.5	Conocimiento del contenido y la enseñanza .....	56
4.3.6	Conocimiento del currículo .....	58
5	CONCLUSIONES Y PROYECCIÓN FUTURA .....	60
5.1.1	Respecto a la educación del profesor de matemáticas.....	60
5.1.2	Respecto al conocimiento común del contenido .....	60
5.1.3	Respecto al conocimiento especializado del contenido.....	61
5.1.4	Respecto al conocimiento en el horizonte matemático .....	61
5.1.5	Respecto al conocimiento del contenido y de los estudiantes .....	62
5.1.6	Respecto al conocimiento del contenido y la enseñanza.....	62
5.1.7	Respecto al currículo.....	63
5.1.8	De modo general se concluye.....	63
6	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	65

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado, constituye un análisis descriptivo que proviene de una revisión bibliográfica acerca de las investigaciones reportadas en Educación Matemática que permiten indagar sobre el tratamiento que se le ha dado hasta el momento a la razón, proporción y proporcionalidad (RPP), para determinar las dificultades de aprendizaje, organización curricular, estrategias de aprendizaje y de enseñanza, fundamentación epistemológica, entre otras más que se puedan encontrar. Esto permite inferir lo que un profesor de matemáticas de la Educación Básica y Media debería saber respecto a RPP. Teniendo en cuenta para ello que la bibliografía recolectada y consultada se va a organizar a través del modelo de los componentes del conocimiento del profesor propuesto por Ball, Thames & Phelps (2008) que en el capítulo dos se expondrá.

La propuesta desarrollada tiene como objetivo caracterizar el conocimiento del profesor respecto a RPP, teniendo en cuenta que estos son elementos transversales a todo el currículo de matemáticas en la escuela así como en otras áreas del conocimiento. Además como lo reportan Godino & Fernández (2012), RPP son elementos en los cuales los profesores presentan dificultades en la escuela, ya que su conocimiento respecto a estos asuntos es precario o casi nulo. Estas razones motivan a los autores a realizar una caracterización de este conocimiento.

Este trabajo de grado está organizado en cinco capítulos a través de los cuales se expone el proceso investigativo, desde la formulación del problema hasta las conclusiones que provienen del análisis realizado.

En el primer capítulo se desarrollaran las generalidades del estudio en las cuales se encuentran la formulación del problema, los objetivos propuestos, la justificación y pertinencia de este trabajo para ser ubicado dentro de una línea de investigación de la EPM y de la estrategia metodológica.

En el segundo capítulo se desarrollara el marco de referencia en el que se exponen los sustentos teóricos que dan soporte al desarrollo de este trabajo; se consideran algunos

modelos de los componentes del conocimiento del profesor, así como el tratamiento de las tendencias investigativas que han girado en torno a RPP con las que se definen las categorías de análisis a través de las cuales se desarrolla toda la clasificación y revisión bibliográfica.

En el tercer capítulo se realiza la ubicación de la literatura especializada en las categorías definidas. Este capítulo expone el proceso de búsqueda y organización de las diferentes investigaciones reportadas respecto a RPP que fueron consultas por los autores, así mismo justifica su ubicación en cada categoría propuesta para el análisis de los datos.

El cuarto capítulo muestra el análisis de la literatura en cada categoría de acuerdo a la interpretación que hacen los autores de la clasificación que se reporta en el capítulo 3. Con esto, se da respuesta a la pregunta del problema, la caracterización de cada componente del conocimiento del profesor respecto a RPP proviene de los resultados encontrados en cada artículo seleccionado.

El quinto y último capítulo expone las conclusiones que se obtienen de todo el proceso de clasificación y análisis que se realizó en los capítulos tres y cuatro, las cuales permiten sintetizar y expresar la opinión de los autores respecto al trabajo realizado y los cuestionamientos que el mismo les ha producido.

## 1. GENERALIDADES DEL ESTUDIO

Este capítulo presenta el planteamiento del problema, para lo cual ubica el trabajo en una línea del campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM) y se hace la formulación del problema a tratar. Además de la justificación del problema que permite mostrar el interés para los autores y el interés que reviste este asunto para el campo de investigación, en el cual este trabajo se inscribe.

Por otra parte, el capítulo expone las fases metodológicas mediante las que se abordó el problema y el tratamiento que se dio en cada una de ellas; así mismo se exponen los objetivos, tanto generales como específicos, a alcanzar con la elaboración del trabajo de grado.

### 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1.1 Ubicación del problema

El trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de investigación en la Educación del Profesor de Matemáticas, estudiada por el grupo RE-MATE (Research on Mathematics Teacher Education) de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, que define cuatro objetos de estudio a saber, tal como lo reportan Guacaneme & Mora (2012).

**Las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas.** Esta línea estudia: las acciones que el profesor de Matemáticas lleva a cabo en su desempeño docente, en general en las instituciones educativas; las interacciones en las que el profesor se vincula (casi siempre con colegas) para promover aprendizajes profesionales en comunidades de práctica (de tamaños muy variados); o, el aprendizaje que el profesor logra a partir del estudio personal/individual sobre asuntos que le conmina su práctica.

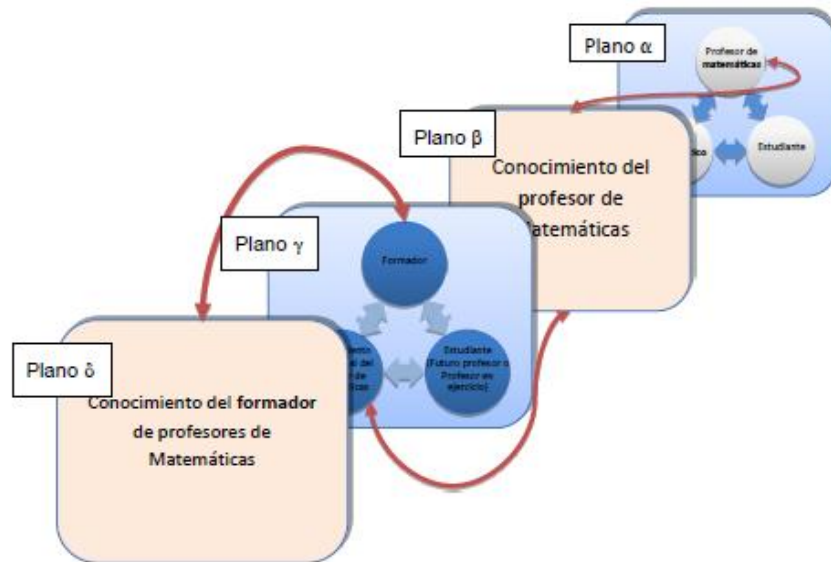
**Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.** Se ocupa del estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; las diferentes expresiones de la relación entre

teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción; o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica.

**Formación de los profesores de Matemáticas.** Contempla el estudio de: las prácticas docentes que realizan los formadores y los procesos de aprendizaje en que se vinculan los futuros profesores o los profesores en ejercicio en el marco de programas de educación de profesores de Matemáticas (sean presenciales, a distancia, virtuales, etc.); las tareas que el formador diseña o propone en el marco de los programas de educación de profesores; o, la gestión del conocimiento de fundamentación conceptual y de las experiencias de formación a través de las prácticas iniciales en los programas de educación de profesores.

**Conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas.** Incluye, de manera análoga a la descripción de la segunda línea/plano reseñada, el estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los formadores de profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los formadores de profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción, de los formadores de profesores; o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica de formación de profesores de Matemáticas.

Para Guacaneme & Mora (2012) en la EPM, los objetos o líneas de estudio anteriormente mencionados constituyen un conjunto de planos en los cuales se ubican sistemas didácticos y los conocimientos de profesores de Matemáticas y de sus formadores. Como se observa en la ilustración 1, el plano  $\delta$  hace referencia al cuarto objeto de estudio, en el plano  $\gamma$  se encuentra el segundo objeto de estudio, en el plano  $\beta$  se ubica el segundo objeto de estudio y en el plano  $\alpha$  se ubica el primer objeto de estudio.



**Ilustración 1. Sistema didáctico de la EPM<sup>1</sup>**

De los cuatro objetos de estudio propuestos por RE-MATE, el problema de investigación se ubica en el plano  $\beta$ , en tanto es el plano que estudia el conocimiento del profesor de Matemáticas, y en consecuencia los autores consideran que los resultados de las investigaciones en EM se deben convertir en un insumo importante para el conocimiento y la formación del profesor; por otra se tiene en cuenta como lo muestran las flechas de la figura 1, que el problema en algún momento tocará los planos  $\alpha$  y  $\gamma$ , debido a que el conocimiento del profesor determina su acción en el aula y por otro lado, parte de su conocimiento proviene de los saberes adquiridos en los programas de formación de los cuales se encarga el formados de profesores.

### 1.1.2 Formulación del problema

De acuerdo a Guacaneme y Mora (2012), La EPM como campo de investigación se ha consolidado en los últimos años como un campo emergente de la EM y cuenta con objetos propios de estudio, entre los cuales se encuentra el conocimiento profesional del profesor

<sup>1</sup> Imagen tomada de Guacaneme & Mora (2012), La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación.

de matemáticas (CPM). Este campo resulta de interés para los autores, quienes consideran que la formación y el conocimiento que tenga el futuro profesor y el profesor en ejercicio determinarán su acción en su desempeño profesional; esta idea que tiene un viso de especulación será verificada y tendrá algunos elementos de sustento en el desarrollo del trabajo, especialmente en el análisis y el desarrollo de las conclusiones. Por lo tanto, se considera importante indagar por el significado que se le da al CPM, por lo que se hace necesario estudiar a autores que se han encargado de definir modelos para el conocimiento del profesor, como por ejemplo Shulman (1987) y en especial para el conocimiento del profesor de matemáticas tales como (Ball & Bass, 2009), Ball, Thames & Phelps (2008), entre otros.

Por otra parte RPP han sido un objeto bastante estudiado en el campo de la Educación Matemática y aun así es un asunto en el cual las investigaciones reportan que existen bastantes dificultades en su aprendizaje, según Obando, Vasco & Arboleda, (2014)

Razones, proporciones y proporcionalidad constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años. Evaluaciones recientes muestran que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, lo que constituye un certero indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y, por esa vía, lograr mayores impactos en el sistema educativo (pág. 59)

Esta afirmación permite preguntar acerca de ¿Cuál es la dirección en la que debe estar orientada dicha investigación? A lo que los autores de este trabajo responden que la investigación a realizar también debe estar enmarcada en la formación del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta que él actúa como un mediador entre el conocimiento y el estudiante. Por tanto, se hace importante caracterizar el conocimiento del profesor respecto a RPP y un primer paso es organizar los resultados que diferentes investigaciones sobre estos elementos se han reportado y así poder determinar saberes que deberían ser propios de un profesor de matemáticas que pretenda trabajar RPP en el aula de clase.

Así, los autores se permiten plantear la siguiente hipótesis de trabajo que aporta a la comprensión del problema: Los resultados de las investigaciones en EM que tienen como objeto de estudio RPP se deben constituir en un insumo para la formación de los profesores

de Matemáticas; en consecuencia de esta hipótesis, los autores consideran importante organizar los resultados que provienen de dichas investigaciones a través de un modelo del conocimiento del profesor para determinar saberes que deberían ser elementos teóricos que constituyan los componentes del conocimiento del profesor respecto a RPP.

Por otra parte el modelo actual de educación en Colombia<sup>2</sup> apunta hacia una formación integral de los individuos, es decir, que sean ciudadanos éticos, y competentes y para ello no es suficiente una educación en la que únicamente se transmiten saberes teóricos y que en muchos casos no son acordes con la realidad, las necesidades sociales, tecnológicas y científicas de los individuos que aprenden. En este proceso de formación de los ciudadanos en la escuela RPP es un elemento clave, así como el proceso de mediación que brinda el profesor entre el saber y el estudiante.

Los autores consideran que la mediación que brinda el profesor debe estar sustentada por todo un conocimiento teórico desde lo disciplinar de las Matemáticas, la Didáctica de las Matemáticas, la Pedagogía y el conocimiento Curricular, por tanto plantean la siguiente pregunta. ¿Cómo los resultados de las investigaciones en Educación Matemática acerca de Razón, Proporción y Proporcionalidad pueden aportar a construir el conocimiento que debería poseer el profesor de matemáticas respecto de estos elementos?

## 1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En primera instancia es importante resaltar que este problema surge como interés personal de los autores que se ve influenciado por su práctica docente y por la experiencia académica en la formación inicial como futuros profesores de matemáticas. En el ejercicio docente han reconocido que RPP es transversal a toda la propuesta curricular de los lineamientos curriculares<sup>3</sup>, ya que en cada tipo de pensamiento RPP se encuentra presente con significados diferentes.

---

<sup>2</sup> En Colombia el MEN define la educación inicial, la educación preescolar la educación básica y la educación media.

<sup>3</sup> Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá.

Por ejemplo, en el pensamiento numérico, el estudio de la estructura multiplicativa está relacionado al concepto de razón y al de proporción, cuando se hacen repartos proporcionales o se establecen relaciones entre medidas de magnitudes; en el pensamiento geométrico, el concepto de proporción se hace presente en el estudio de semejanza entre figuras y el concepto de homotecia; para el pensamiento métrico y de sistemas de medidas, la búsqueda de patrones y relación de medidas pone de manifiesto el pensamiento proporcional de los sujetos que aprenden; en el pensamiento variacional el término de covariación y correlación requieren del estudiante un dominio de la proporcionalidad para estudiar los conceptos de linealidad, y variación inversa; en el pensamiento aleatorio, está presente el uso de razones para el manejo de probabilidades. Mientras que los estándares curriculares proponen el estudio de RPP en diferentes momentos de cada ciclo académico, aquí se mencionan algunos ejemplos encontrados: en el ciclo uno (primero a tercero) “Resuelvo y formulo problemas de variación proporcional” (pag 80) en el ciclo dos (cuarto y quinto) encontramos “Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas” en el ciclo tres (sexto y séptimo) encontramos “Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal, o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos”

A demás, la experiencia vivida por los autores en los programas de formación para profesor de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, les mostro que la formación y los conocimientos recibidos no aportaron suficientes elementos teóricos y prácticos que permitieran reconocer el potencial y el trabajo respecto de RPP que se debe abordar en la escuela. Situación que permite reflexionar acerca del CPM y la manera en que ha sido organizado para tratar un tema tan importante para la escuela como lo es RPP.

Por otra parte el CPM como objeto de estudio tiene un panorama en el cual aún hay muchas preguntas que responder; por ejemplo Kilpatrick (2003<sup>a</sup>, citado en Gómez, 2006) formula los siguientes cuestionamientos:

¿Qué conocimiento matemático, habilidades y disposiciones están involucrados en la enseñanza competente de las matemáticas? ¿Cómo pueden los profesores en

formación, y en ejercicio desarrollar su conocimiento matemático y usarlo más eficazmente en la enseñanza? ¿Qué constituye una oportunidad de aprendizaje profesional en matemáticas, de tal forma que la práctica de la instrucción y su desarrollo sean centrales en su aprendizaje?

Además de interrogantes como estos, también se debe pensar en la relación entre la formación y la práctica docente, ¿Cuáles elementos de la formación son necesarios para la práctica y cómo estos son transmitidos a los futuros profesores?

Por tanto la caracterización del conocimiento del profesor y en particular respecto de RPP es un asunto de interés para el campo, ya que puede proveer de elementos teóricos y prácticos a quienes se ocupan del diseño de los programas de formación inicial y formación avanzada para profesores de matemáticas.

### **1.3 OBJETIVOS**

#### **1.3.1 Objetivo general**

Caracterizar el conocimiento que debería poseer el profesor de matemáticas respecto de la razón la proporción y la proporcionalidad. A través de lo que reporta la investigación en Educación Matemática respecto a estos temas.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

1. Estudiar algunos de los modelos existentes respecto de los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas.
2. Consultar investigaciones realizadas en torno a la razón, la proporción y la proporcionalidad.
3. Clasificar la bibliografía estudiada respecto de la razón, la proporción y la proporcionalidad de acuerdo con un modelo de los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas.

## **1.4 PROPUESTA METODOLÓGICA**

La metodología en la que se enmarca este trabajo de grado es de tipo documental-cualitativo; es decir, que las fuentes de información y los datos recolectados provienen de diferentes clases de documentos, como artículos revistas especializadas, libros o capítulos de libros, tesis de maestría y doctorales, memorias de congresos y eventos que estén relacionados con la Educación Matemática y en particular con RPP. Es de carácter cualitativo, en tanto los datos que se analizaran no son cuantificables y corresponden a un análisis descriptivo y crítico de acuerdo con la interpretación de los autores, que está sujeto a los resultados encontrados en los diferentes documentos revisados y a la clasificación y análisis de las categorías que se proponen.

Las fases a través de las cuales se desarrolla el trabajo de grado se describen a continuación.

### **1.4.1 Fase I Estudio de los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas**

En esta fase los autores estudiaron los modelos que definen y caracterizan los componentes del CPM entre los cuales se encontraron a Shulman (1986), Shulman (1987); Schoenfeld and Kilpatrick (2008); Godino, (2009); Ball, y Schilling (2008); Rowland, Huckstep et al. (2003); Rowland, Huckstep et al. (2005) y Stacey (2008), Rowland (2005), Stacey (2008), Ball(2009) y Ball, Thames & Phelps, (2008). Y de los cuales se toma la decisión de trabajar el modelo de Ball y Bass (2008). Las razones de esta decisión se explicarán en el capítulo 2.

### **1.4.2 Fase II Aproximación a un estado de arte de RPP**

En esta fase los autores estudiaron dos estados de arte realizados por Tourniaire & Pulos, (1985) y Obando, (2014); en estos, se identifican algunas categorías respecto de estudios que se han hecho de RPP, lo que permite realizar una aproximación a las tendencias investigativas y los tipos de investigación que ha realizado la Educación Matemática en torno a RPP.

### **1.4.3 Fase III Constitución de las categorías de análisis**

A partir de las dos anteriores fases, se elaboró una primera rejilla a partir del modelo de Ball, Thames & Phelps, (2008) y la organización de Obando, Vasco y Arboleda (2009). Para definir las categorías de análisis que permitieran clasificar los documentos recolectados. Sin embargo, esta no se tuvo en cuenta, en tanto el cruzar estos dos aspectos no brindaba un panorama adecuado para el análisis posterior.

Luego se decidió tomar el modelo de Ball, Thames & Phelps, (2008) y usar el estado de arte de Obando, Vasco y Arboleda (2009) para redefinir cada componente y centrarlo en el caso de RPP.

### **1.4.4 Fase IV Organización y clasificación de la bibliografía recolectada**

En esta fase los autores procedieron con la ubicación de la lectura que versara sobre RPP, para lo cual se inició una revisión bibliográfica de documentos sobre razón y proporción con archivos provenientes de la biblioteca digital y física del profesor Edgar Guacaneme, de las bases de datos (Dialnet y Ebsco) con las que cuenta la Biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional, así como algunos de los archivos personales de los autores. La búsqueda bibliográfica en las bases de datos se tuvo en cuenta como descriptores los términos “razón”, “proporción” y “proporcionalidad”.

La base de documentos conformada cuenta con 274 documentos entre artículos, memorias libros, capítulos de libros y tesis, que datan desde el año 1929 hasta el año 2014.

Conformada la base de documentos, se realiza una primera organización de acuerdo con el año de publicación y el tipo de documento (v.g., artículo, capítulo de libro, libro, memorias de algún evento, tesis). Esta organización se hizo para identificar el tipo de documentos existentes.

De acuerdo con esta clasificación inicial, se hace una lectura de la macro estructura de los documentos, los resúmenes, cuando son explícitos, o una lectura oceánica de los documentos, con el fin de ubicar cada documentos o partes de estos en las categorías de análisis. Esto se expone en el apartado 2.3.

#### **1.4.5 Fase V Descripción y análisis de la bibliografía recolectada.**

Esta fase constituye el eje central del trabajo e intenta dar respuesta a la pregunta del problema propuesto. El análisis parte de la ubicación de la literatura en las categorías propuestas, pues a través de estas y la luz de lo que reportan los documentos se establecen saberes que deberían ser propios del profesor de matemáticas respecto a RPP. También se analiza la tendencia a los componentes del conocimiento del profesor a las que apuntan las investigaciones revisadas y aquellos aspectos en los cuales se evidencia que no hay investigación o es poca.

## 2 MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo expone el marco de referencia a través de los cuales se analiza la pregunta al problema propuesto. Por una parte, se exhiben los modelos de los componentes del conocimiento del profesor planteados por Shulman (1986, 1987); Schoenfeld and Kilpatrick (2008); Godino (2009); Ball, y Schilling (2008); Rowland, Huckstep et al. (2003); Rowland, Huckstep et al. (2005) y Stacey (2008). Por otra parte se exponen los estados de arte propuestos por Tourniaire (1985) y Obando, Vasco & Arboleda (2014) que evidencian el tratamiento que se ha dado a razón las proporción y proporcionalidad en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas. Finalmente se justifica a elección del modelo propuesto por Hill, Ball, y Schilling, (2008) como categorías de análisis para la organización y la revisión bibliográfica del estudio.

### 2.1 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La investigación referente al conocimiento del profesor de matemáticas como objeto de estudio propio de EPM se ha consolidado en las últimas décadas, como lo referencia Guacaneme y Mora (2012) “los estudios sobre la educación del profesor de matemáticas han tenido internacionalmente un despliegue singular en la última década y media” (pag.105); además señalan que prueba de ello es la existencia de revistas especializadas en la educación del profesor de matemáticas como:

*Journal of Mathematics Teacher Education, Mathematics Teacher Education and Development, Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: e Journal, Mathematics Teaching-Research Journal y e Mathematics Teacher Educator* La publicación de un Handbook sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (Jaworski y Wood, 2008; Krainer y Wood, 2008; Sullivan y Wood, 2008; Tirosh y Wood, 2008), estudios internacionales o de comunidades acerca de la educación del profesor de matemáticas (Ball, 1988; CBMS, 2001; Even y Ball, 2009; Tatto et ál., 2008) (Pág. 105).

En el panorama nacional también reconocen que este campo se ha abierto espacios como: las cinco versiones del Encuentro de programas de formación inicial de profesores de matemáticas (realizadas en Valledupar en 1999 y Bogotá en 2003, 2008, 2011 y 2015), la

mesa de trabajo titulada “Conocimiento didáctico del contenido matemático en la formación de profesores”, realizada en el XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (Bogotá, 2011) y el ECME 13 que tuvo como tema “poner en escena las discusiones que desde la academia, las instituciones escolares y las políticas gubernamentales, se vienen promoviendo sobre la formación inicial y continuada de los maestros y maestras que enseñan matemáticas en la Educación Básica y Media del país (pág. 105).

A consecuencia de todo este movimiento “se han producido múltiples trabajos aportando información sobre la naturaleza y las características del conocimiento que debería tener un profesor para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes” Ball, Thames y Phelps, (2008); Pinto y González, (2008). Se destaca a (Shulman 1986, 1987), como el modelo base del conocimiento del profesor, a partir del cual surgen propuestas posteriores para el caso de los profesores de Matemáticas. Para este caso han surgido modelos desde el campo de la EM, que están centrados en el conocimiento acerca del contenido para la enseñanza de las matemáticas tales como (Rowland, Huckstep et al. 2003; Rowland, Huckstep et al. 2005; Stacey 2008; Turner and Rowland 2008) y otros modelos que no solo centran su atención en el contenido, sino que estudian el CPM de forma más amplia, para lo cual reconocen elementos que no necesariamente están asociados al contenido a enseñar. Como la propuesta para una enseñanza de calidad en las Matemáticas Schoenfeld and Kilpatrick (2008), el modelo de Ball, Thames y Phelps, (2008) y las Categorías de análisis de CPM expuesta por Godino (2009).

A continuación se presentan de manera general los componentes del CPM que se plantean en los modelos citados.

### **2.1.1 El modelo de Shulman**

El trabajo de Shulman (1986) se reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento del contenido para la enseñanza. Inicialmente propuso tres categorías: el conocimiento del contenido de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y conocimiento curricular. El PCK lo describe como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más

relación con la enseñanza” (pág. 9) y también como “esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional” (pág. 8). En otro trabajo posterior, Shulman (1987) propuso siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza y además permiten reconocer componentes que deben integrar la formación de un profesor.

Este modelo por ser el primero en reconocer cómo se debería comprender el conocimiento del profesor no es específico para el caso del profesor de matemáticas, sin embargo es el modelo base con el que autores posteriores redefinen el CPM. Los componentes definidos por Shulman (1987) son:

- **conocimiento del contenido:** que hace referencia al saber disciplinar específico de un área del conocimiento.
- **conocimiento pedagógico general:** entendido como el estudio de la pedagogía y de modelos pedagógicos en general.
- **conocimiento del currículo:** hace referencia al conocimiento que el profesor debe poseer sobre el currículo, el diseño curricular y de propuestas curriculares
- **conocimiento pedagógico del contenido (PCK):** hace referencia al conocimiento en teorías de enseñanza y de aprendizaje; este componente es el que más ha suscitado el interés de los investigadores, en tanto el aprendizaje de las matemáticas depende en gran parte de la forma en que el profesor muestra un saber a sus estudiantes.
- **conocimiento de los estudiantes y sus características:** hace referencia a reconocer las dificultades y las estrategias y las formas en que los estudiantes aprenden.
- **conocimiento de los contextos educativos:** hace referencia al conocimiento que se debe tener del entorno educativo, del contexto social y cultural de la comunidad en la que actúa como profesor.
- **conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación:** se refiere al conocimiento que el profesor debe tener de las políticas educativas y de los objetivos de la formación de los ciudadanos que conforman una comunidad.

Como fuentes de conocimiento para estos componentes, Shulman (año) reconoce cuatro escenarios para la formación del profesor: 1) formación académica en la disciplina a

enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que se adquiere con los años a través de la práctica y el ejercicio de la profesión docente.

### 2.1.2 Modelo de Schoenfeld and Kilpatrick

Conocido como el CPM para la proeficiencia Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen siete dimensiones que deben ser necesarias para la proeficiencia del CPM; este último definido como “la posesión de una gran número de esquemas para hacer frente a las clases genéricas de tarea en un dominio” (Schoenfeld, 1985, pág. 253) para lo cual propone las siguientes dimensiones:

- **Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud:** refiere a que el profesor debe tener múltiples maneras de conceptualizar el contenido a través de formas de representación, tener un profundo conocimiento sobre la materia que le permita saber seleccionar las ideas que serán propuestas a los estudiantes y poder enfrentar los cuestionamientos sobre el contenido que le planteen los estudiantes.
- **Reconocer a los estudiantes como pensantes:** implica que el profesor debe tener la capacidad de comprender cómo piensan los estudiantes y cómo le dan sentido a las matemáticas y cómo pueden construir sus conocimientos.
- **Conocer a los estudiantes como aprendices:** refiere que el profesor debe ser consciente de la forma en que los estudiantes aprenden, y también debe conocer teorías del aprendizaje y de las implicaciones que estas traen para las actividades y las interacciones con los estudiantes en clase.
- **Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje:** determina que el profesor debe tener la capacidad de gestionar entornos propicios de aprendizaje con la intención de crear comunidades intelectuales para que los estudiantes asuman un mayor compromiso en su aprendizaje.

- **Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase:** refiere al manejo de la norma para establecer en el aula de clase comunidades de aprendizaje que interactúen entre sí y sean los artífices de su propio conocimiento.
- **Construir relaciones que apoyen el aprendizaje:** hace referencia a la organización curricular y del contenido para construir relaciones que apoyen el aprendizaje.
- **Reflexionar sobre la propia práctica:** hace referencia a que el profesor debe ser reflexivo acerca de su labor y de su formación para que esta sea continua y lo ayude a mejorar su labor profesional.

### 2.1.3 Modelo multidimensional de CPM de Godino

El modelo propuesto por Godino (2009) establece un sistema de categorías para analizar el CPM basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) propuesto por Godino, Batanero, y Font (2007). Este modelo establece unas facetas y unos niveles de análisis para el CPM.

**Las facetas del modelo son:**

- **Epistémica:** Hace referencia al saber matemático que es relativo al contexto institucional, la distribución en el tiempo de los diversos contenidos matemáticos para su instrucción.
- **Cognitiva:** Hace referencia al conocimiento de los estudiantes respecto a sus ritmos de aprendizaje, errores y dificultades que pueden presentar.
- **Afectiva:** Hace referencia al conocimiento de los estudiantes en sus estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) en relación con los objetos matemáticos y su proceso de estudio.
- **Mediacional:** Hace referencia al conocimiento de recursos tecnológicos y el manejo del tiempo necesario para las diferentes acciones y procesos del aprendizaje.
- **Interaccional:** se refiere a la interacción entre el profesor y el estudiante y a la secuenciación para la negociación de significados.
- **Ecológica:** se refiere al conocimiento de las relaciones en el entorno social, político, económico que soporta el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Los niveles de análisis son:

- **Prácticas matemáticas y didácticas:** Describe las acciones que debe realizar el profesor para proponer las actividades matemáticas que contextualicen los contenidos y así promover el aprendizaje.
- **Configuraciones de objetos y procesos:** Describe los objetos y los procesos matemáticos que intervienen en las prácticas educativas, el objetivo de este nivel es describir la complejidad de los objetos y los significados de las prácticas matemáticas y didácticas, los conflictos que se presentan en su realización y la progresión del aprendizaje.
- **Normas y metanormas:** Describe las reglas, hábitos y normas que condicionan y hacen posible el proceso de educación el cual afecta a cada faceta y sus interacciones.
- **Idoneidad:** Considera la identificación de potenciales mejoras en el proceso educativo de los estudiantes a través de la Didáctica de las Matemáticas.

Los autores consideran el modelo, en forma poliédrica, tomando la base del poliedro como las facetas y la altura como los cuatro niveles de análisis; esto se visualiza en la Ilustración 2 teniendo en cuenta que no son procesos independientes.



**Ilustración 2. Facetas y niveles el CPM**

#### 2.1.4 Modelo de Ball Thames y Phelps

El trabajo de Shulman (1986) se constituye como base para plantear nuevos modelos acerca del conocimiento del profesor. Para el caso específico del conocimiento del profesor de Matemáticas destacamos MKT<sup>4</sup> propuesto en Ball (2000) y Ball, Lubienski y Mewborn, (2001), en los cuales a partir de la observación del trabajo de un grupo de profesores en el aula de matemáticas. Se introduce la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT). En Hill, Ball, & Schilling (2008) y en Ball, Thames y Phelps (2008), se define como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (pág. 374). Los análisis que realizan de la observación del trabajo de los profesores les lleva a clasificar el MKT en dos grandes grupos *Subject Matter Knowledge* (conocimiento del contenido) y el *Pedagogical Content Knowledge* (conocimiento pedagógico del contenido).

**Conocimiento del contenido:** Este componente hace referencia al saber matemático del profesor, es decir, qué y cuáles matemáticas deben ser propias de él. Para hacer una descripción de esas matemáticas Ball et al (2008) dividen el componente en tres subdominios de la siguiente forma:

- **Conocimiento común del contenido:** Se caracteriza como el conocimiento que debe poseer cualquier persona con un nivel básico o medio de educación matemática, lo que implica que no es único para los profesores de matemáticas. Este subdominio muestra el saber hacer, como resolver un problema de cuarta proporcional, Ball et al (2008).
- **Conocimiento en el horizonte matemático:** Ball y sus colegas (2008) lo definen como aquel conocimiento de cómo los temas de matemáticas se relacionan a lo largo de todo el currículum. También incluye una visión útil para ver las conexiones con otras ideas y objetos matemáticas posteriores. En este subdominio se habla también del conocimiento de la trayectoria de un contenido

---

<sup>4</sup> Siglas correspondientes a la expresión inglesa, “Mathematical Knowledge for Teaching”.

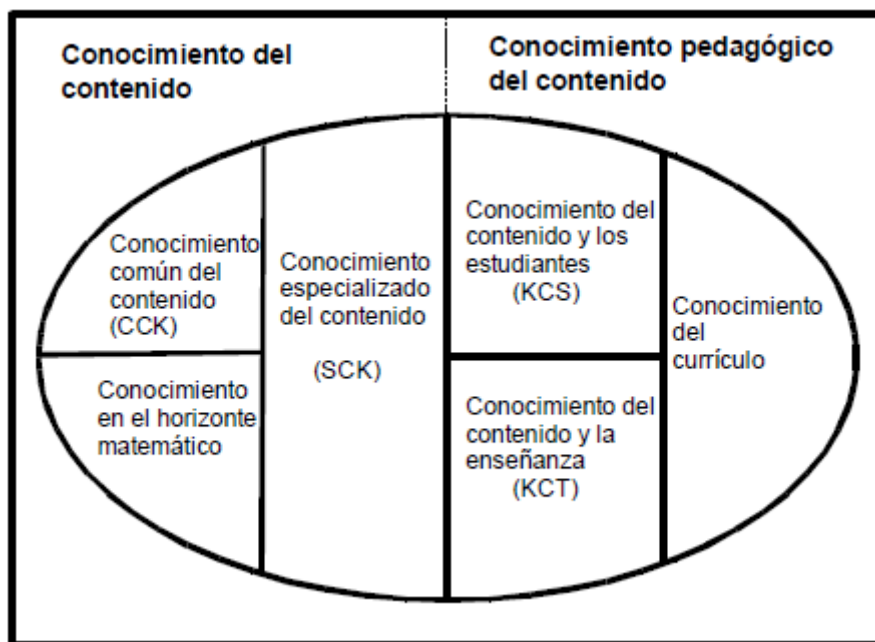
matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones en las matemáticas y por fuera de las matemáticas.

- **Conocimiento especializado del contenido:** Se define como el conocimiento matemático que va más allá del que se espera de cualquier adulto bien educado. A diferencia del conocimiento común del contenido en el que se define el saber hacer, en este subdominio se incluye el saber por qué se hace así, es decir, el profesor debe tener la capacidad de poder explicar la procedencia de un conocimiento y justificar la forma en que se resuelve un problema en Matemáticas.

**Conocimiento pedagógico del contenido:** Este componente es una reorganización de los componentes del modelo de Shulman (1987) salvo el primero, para lo cual Ball y sus colaboradores proponen tres subdominios para definirlo.

- **Conocimiento del contenido y los estudiantes:** Se refiere al conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas, por ejemplo conocer los errores que los estudiantes comenten con mayor frecuencia. El conocimiento acerca de los estudiantes tiene que ver con las estrategias de aprendizaje que ellos usan, las dificultades que presentan y sus esquemas de razonamiento.
- **Conocimiento del contenido y la enseñanza:** Combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre las matemáticas. Se utiliza al momento de realizar acciones en las cuales se tiene que decidir la secuencia de las tareas, con cuál ejemplo iniciar o escoger apropiadamente las representaciones más adecuadas a cada situación Ribeiro et al (2010).
- **Conocimiento del currículo:** Este dominio representa el conocimiento que el profesor debe tener del conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios Sosa et al (2010).

Este modelo tiene la particularidad de redefinir el modelo de Shulman (1987) y pasar de siete componentes a dos componentes con subdominios que intentan organizar y agrupar la propuesta de Shulman como lo muestra la Ilustración 3



**Ilustración 3 Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)**

### 2.1.5 Modelo de Rowland

Rowland y sus colaboradores presentan en el 2003 *“The Knowledge Quartet”* traducido como el cuarto del conocimiento que se define a partir de cuatro componentes del CPM respecto al conocimiento de las matemáticas Rowland, Huckstep (2003); Rowland, Huckstep et al (2005). El objetivo en la investigación y en la propuesta de estos autores centra su atención en indagar ¿Cómo el conocimiento de los profesores sobre las matemáticas se hace visible en la práctica? Para lo cual proponen los siguientes componentes:

- **Fundación:** Hace referencia al conocimiento matemático del profesor y al conocimiento de la literatura en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, así como a las creencias de la naturaleza de la disciplina, los propósitos de las

matemáticas en la escuela y las condiciones en las cuales los estudiantes pueden aprender mejor las matemáticas.

- **Transformación:** Refiere al conocimiento en acción tanto en la planificación de la enseñanza y de su puesta en práctica, implica el uso de las representaciones y cómo los ejemplos que propone y explica el profesor contribuyen al aprendizaje de los estudiantes.
- **Conexión:** Este componente trata sobre la coherencia existente entre la planificación y la ejecución del contenido matemático a enseñar, tanto en la secuencialidad de temas, las conexiones existentes entre estos, como en las demandas cognitivas de los estudiantes, sus ritmos de aprendizaje y las etapas de desarrollo cognitivo.
- **Contingencia:** Aquí se considera que el profesor debería saber detectar aquellos eventos de la clase que parecieran no ser posibles de prever. Tener la disposición de poner en discusión las ideas de los estudiantes y afrontar los cambios que en la clase a causa de esto puedan suceder.

### 2.1.6 Modelo de Stacey

El modelo propuesto por Stacey (2008) al igual que Rowland, Huckstep (2003); Rowland, Huckstep (2005), centra su atención en el conocimiento del contenido que debe ser necesario para la enseñanza, su propuesta la particulariza para el caso del profesor de matemáticas de educación secundaria. Señala además que no tiene sentido separar el conocimiento matemático del PCK ya que para la enseñanza resulta algo inútil. Así Stacey plantea que el conocimiento del contenido matemático apoya al PCK y por tanto propone los siguientes componentes.

- **Conocimientos Matemáticos:** Son los saberes propios de las matemáticas que provienen de la misma disciplina de modo que contenga cualidades especiales para la enseñanza.
- **Experiencias matemáticas en acción:** se refiere a la puesta en acción de las matemáticas teóricas por parte del profesor ya sea a través de la resolución de

problemas, la orientación de proyectos de investigación o la modelación de situaciones del mundo real.

- **Conocimiento acerca de las matemáticas:** se refiere al conocimiento y a la concepción epistemológica y filosófica que el profesor asume de las matemáticas, para lo cual la historia de las matemáticas debe ser una fuente de conocimiento para el profesor.
- **Conocimientos sobre como aprender matemáticas:** refiere al conocimiento en Didáctica de las Matemáticas, en los que se incluye como enseñar matemáticas y como los estudiantes aprenden matemáticas, tener conocimientos de sus errores y dificultades.

Como se verá en la sección 2.3 de estos modelos expuestos se seleccionó solo uno. El cual se considera pertinente para el desarrollo de este trabajo. A continuación se considera pertinente citar los estados de arte de Toruniare (1985) y Obando, Vasco y Arboleda (2104) en tanto se brinda un panorama de las tendencias investigativas en lo que respecta a RPP.

## **2.2 RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

Para Tourniare (1985) el problema de la razón, la proporción y la proporcionalidad se ha reportado en dos vías: el tipo de tareas propuestas a los estudiantes y las estrategias de razonamiento proporcional realizadas por los estudiantes.

En los tipos de tareas se distinguen tres clases:

- Tareas de física: “son tareas que requieren para su éxito la comprensión de algunos principios físicos además de conocimientos sobre proporciones” (pág. 182)
- Problemas de mezclas: Se constituyen de dos elementos a través de los cuales se debe constituir un tercer elemento.
- Problemas de tasa: consiste en situaciones en las que se deben establecer comparaciones y determinar la medida de una magnitud respecto del comportamiento de otra magnitud.

Respecto a las estrategias de razonamiento proporcional se reconocen dos tipos:

- Estrategias correctas: son aquellas que conducen al éxito en el resultado final de la formulación de problema de razonamiento proporcional. **Estrategias multiplicativas** “los términos de una razón se relacionan multiplicativamente y luego esta relación se extiende a la segunda razón” **Estrategias de construcción progresiva** la relación que se establece dentro de una razón es de forma aditiva y luego esta se extiende a la segunda razón.
- Estrategias erróneas: estas estrategias provienen del mal uso que se da a las estrategias correctas, ignorar alguno de los datos del problema, reducir todo a la unidad usar la diferencia en una razón y aplicarla a la otra razón.

Para Obando, Vasco & Arboleda, (2014) el estudio de razón, proporción y proporcionalidad contempla tres grupos: el desarrollo cognitivo, desarrollo epistemológico y desarrollo semiótico – antropológico.

### **El desarrollo cognitivo del sujeto referente a RPP**

Desde la teoría de Piaget se entiende el desarrollo del pensamiento lógico a través del razonamiento proporcional debido que a través de este, el sujeto marca el cambio de las operaciones concretas hacia las operaciones formales. Este desarrollo implica tres aspectos a saber:

- Situaciones que implican razonamiento proporcional (problemas de tasas o de mezclas, de conceptos matemáticos o de otras ciencias, por ejemplo, la física);
- Situación (estructurales –razones enteras o no, lugar de la incógnita en la proporción, complejidad numérica; o de contexto –tipos de situación, tipo de magnitud, familiaridad con la situación, uso de materiales manipulativos).
- Variables de tarea centradas en el estudiante (edad, estadio de desarrollo, capacidad mental, estilo cognitivo, inteligencia, género, actitudes y habilidades)

### **Desarrollo epistemológico**

El desarrollo epistemológico hace referencia a la estructura, la organización y la naturaleza matemática de RPP.

- Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales: hace referencia a situaciones relativas a la construcción de la unidad, la clase de magnitud y la cuantificación de magnitudes.
- Razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar: hace referencia a la comprensión que se tiene de razón y proporción, variación y covariación, mostrando la relación con la multiplicación, la división y las magnitudes.
- Aritmética de las cantidades: Los procesos aritméticos estudiados en la escuela tanto aritméticos como multiplicativos requieren, además de, operar sobre los números que representan las medidas, también operar sobre las cantidades mismas y las magnitudes que representan.
- Campo conceptual de las estructuras multiplicativas: hace referencia a que la construcción de los conceptos relativos al razonamiento proporcional se da en un proceso complejo tal que debe existir coordinación con otros conceptos interrelacionados, coordinación entre tipos de situaciones relacionadas con los conceptos y los procedimientos y uso de diferentes formas de representación implicadas en la construcción de los invariantes operatorios relativos a los conceptos.

Estudios posteriores han permitido agregar nuevos elementos de definición del estudio de RPP que están relacionados con los procesos implicados en la comprensión de los números racionales. Tales como:

- La razón como función.
- Las fracciones en relación con las medidas de magnitudes (intensivas o extensivas).
- El aprendizaje de los números racionales y el desarrollo del razonamiento proporcional.
- El aprendizaje de los números racionales y su relación con la medida de magnitudes.

- Campos de investigación y trayectorias de aprendizaje.
- Las fracciones como un proceso de acomodación de los esquemas de conteo.

### **Desarrollo antropológico y semiótico de RPP**

Bajo este desarrollo de (RPP) estas toman un nuevo sentido, en tanto su comprensión está relacionada con los sistemas de representación y el significado en que se le da a estas a partir de un contexto.

“En el marco de la denominada “Teoría Antropológica de lo Didáctico” (TAD), razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales se comprenden en términos de Organizaciones Matemáticas (OM) complejas definidas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionalmente situadas”. Obando et al (2014. p.70)

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, se hace referencia a centrar el estudio de las mismas en las magnitudes, en particular, “en relación al dominio de las razones (Adjage, 2007; Adjage & Pluinage, 2007). Se deben separar, por un lado, los aspectos de la representación y, por el otro, los aspectos relacionados con las situaciones físico-empíricas. Este trabajo implica proponer a los estudiantes diferentes tipos de situaciones físico-empíricas (razones entre dos cantidades heterogéneas, medida, mezcla, frecuencia, dilataciones y cambio de unidad) a partir de diversos marcos de representación” Obando et al (2014, p.71).

### **2.3 DEFINICIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS**

Este apartado presenta la definición de las categorías que se proponen para el análisis de la literatura consultada, para lo cual se hace un breve análisis de los diferentes modelos citados en el apartado 2.1 y así justificar la elección del modelo de conocimiento del profesor de matemáticas propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008).

La definición de las categorías de análisis para este estudio se constituyó en un elemento fundamental, en tanto permitió conceptualizar acerca del conocimiento del profesor de matemáticas, y tener claridad sobre los diferentes modelos y los diferentes componentes

que estructuran cada modelo citado en el apartado 2.1, por otra parte reconocer las tendencias investigativas respecto a RPP de acuerdo Obando et al (2014).

La propuesta de Shulman (1986, 1987) se reconoce como pionera en la propuesta de modelos que definen el saber propio de los profesores y en sus siete componentes se reconoce una propuesta amplia que contempla todos los saberes propios del profesor. Sin embargo, para nuestro caso consideramos que el componente de conocimientos pedagógicos generales no tiene una incidencia directa en el abordaje de RPP en la escuela como sí lo hace el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, componentes que modelos posteriores le dan un tratamiento específico para el caso del profesor de Matemáticas. Por otra parte los documentos seleccionados son específicos de la EM y no se consideran documentos relacionados con pedagogía en general, por tanto este modelo aunque fue la propuesta inicial, no se tendrá en cuenta.

Las dimensiones propuestas por Schoenfeld & Kilpatrick (2008) tiene similitudes en los componentes del modelo de Shulman (1987) que se refieren al conocimiento de los estudiantes, de la materia y del conocimiento didáctico del contenido. Este lo hace particular para el caso del profesor de matemáticas y se diferencia por incluir una dimensión que define el saber del manejo de la norma y la reflexión sobre la propia práctica. Para este trabajo el estudio de la norma es un caso que es general para el trabajo de las matemáticas en el aula de clase y no constituye parte de los intereses de este estudio.

El modelo de CPM propuesto por Godino (2009), expone un diseño tridimensional de un prisma hexagonal en el que se analizan unos niveles y unas facetas respecto al conocimiento del profesor en el que cada faceta debe ser analizada dentro de un nivel. Para este estudio, la el modelo no es tomada en cuenta, en tanto el nivel que propone el manejo de la norma no se tiene en cuenta en este estudio, ya que los autores consideran este conocimiento como algo general para las Matemáticas y no únicamente para RPP.

Los modelos propuestos por Rowland y sus colegas (2005)<sup>5</sup> y Stacy (2008) caracterizan el conocimiento disciplinar y como este se relaciona con el saber didáctico del contenido sin

---

<sup>5</sup> Este modelo es conocido como “*Quarter knowledge*” Cuarteto del conocimiento. Pero en vista que no todos los modelos tienen nombre, los citaremos por autores.

hacer una separación entre estos dos, ya que sostienen que hacer esta distinción no es conveniente, pues una depende de la otra en el contexto escolar. Sin embargo, para este estudio, este modelo no se toma en cuenta debido a que los autores consideran pertinente caracterizar el conocimiento del contenido respecto a RPP, ya que este es uno de los aspectos en el que las investigaciones que se citaron en este estudio para este componente evidencian que no hay claridad para la formación del profesor de Matemáticas y por tanto se hace necesario reconocer en la literatura si existe algún tipo de descripción que defina este conocimiento.

El modelo de Hill, Ball y Schilling (2008) para este estudio expone un esquema que analiza el conocimiento del profesor desde dos perspectivas: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. Esto le permite a los autores identificar dos grupos para clasificar la literatura seleccionada y así definir las categorías de análisis en las que se pueda mostrar que conocimientos que deberían ser propios del profesor en cada categoría.

A demás permiten describir que falencias o dificultades se evidencian para caracterizar el conocimiento de cada categoría, o si existe alguna tendencia investigativa en los documentos revisados que apunte hacia alguna de las dos categorías propuestas por los autores respecto a RPP.

Por tanto se consideran dos categorías de análisis y en las cuales se definen unos subdominios de análisis.

### **Conocimiento de la materia, conocimiento del contenido**

Esta categoría hacen referencia al saber matemático del profesor en relación a RPP, es decir, qué y cuáles matemáticas deberían ser del dominio de un profesor de matemáticas que trabaja RPP en la escuela. Esta categoría contempla los siguientes subdominios.

- **Conocimiento común del contenido**

Este subdominio se describe la literatura que expone y pone de manifiesto el saber matemático que debe ser básico y conocido por todo profesor de matemáticas respecto a RPP y que además es de dominio de cualquier persona con conocimientos matemáticos. En esta categoría se ubicará la literatura que muestra

el saber-hacer, es decir el saber que permite a cualquier persona resolver situaciones asociadas con RPP.

- **Conocimiento especializado del contenido**

Este subdominio describe la literatura que muestra el saber matemático que va más allá del saber-hacer respecto de RPP, es decir el saber por qué se hace así. Aquí se ubica la literatura que muestra el saber del profesor para estar en la capacidad de explicar la procedencia matemática de los conceptos matemáticos asociados a RPP, así como a los diferentes sistemas de representación e interpretaciones de RPP.

- **Conocimiento en el horizonte matemático**

En este subdominio se ubica la literatura que expone el saber que debe ser propio del profesor respecto del tratamiento de RPP a lo largo del currículo y las conexiones con ideas matemáticas posteriores. Esta categoría también expone el conocimiento de la trayectoria de RPP a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones en las matemáticas y por fuera de las matemáticas. También las habilidades que debe tener el profesor para saber la importancia que tiene RPP durante su trayectoria curricular.

### **Conocimiento Didáctico del contenido**

Esta categoría hace referencia al saber didáctico y pedagógico del profesor en relación con RPP, es decir, el conocimiento en Educación Matemática que describe el tratamiento de RPP en la escuela, en lo curricular, en lo relacionado con el aprendizaje de los estudiantes, los métodos de enseñanza y propuestas de innovación. En esta categoría se incluyen los siguientes subdominios.

- **Conocimiento del contenido y los estudiantes**

En este subdominio se ubica la literatura sobre el conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas en torno a RPP, es decir, conocer los errores que los estudiantes comenten con mayor frecuencia cuando resuelven situaciones que implican RPP, también cómo afectan las interpretaciones y los sistemas de representación de RPP en el aprendizaje de los estudiantes, cuáles son las estrategias y los esquemas de razonamiento empleados por los estudiantes para resolver situaciones de RPP.

- **Conocimiento del contenido y la enseñanza**

En este subdominio se ubica la literatura que combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre las matemáticas respecto a RPP, es decir, la que expone el conocimiento que el profesor pone en juego al momento de realizar acciones, en las cuales tiene que decidir la secuencia y la organización de las actividades y tareas, con cuál ejemplo iniciar, cuál o cuáles son las representaciones apropiadas para abordar situaciones que se relacionan con RPP.

- **Conocimiento del currículo**

En este subdominio se ubica la literatura que muestra cuál es el conocimiento del profesor respecto al conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de RPP su ubicación en el currículo escolar, así como la variedad de materiales educativos disponibles en relación a RPP, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios.

### **3 UBICACIÓN DE LA LITERATURA ESPECIALIZADA EN LAS CATEGORÍAS DEFINIDAS**

Para intentar dar respuesta a las preguntas que se plantean los autores de este trabajo se procedió a realizar una recolección de documentos para una posterior revisión bibliográfica, esta fue realizada teniendo en cuenta los archivos de investigaciones reportadas en Educación Matemática que permitan indagar sobre el tratamiento que se le ha dado hasta el momento a RPP. En una primera etapa fueron tomados documentos provenientes de la biblioteca digital y física del profesor Edgar Guacaneme. Una segunda etapa consistió en realizar la búsqueda en las bases de datos (Dialnet y Ebsco) con las que cuenta la Biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional, tomando como descriptores las palabras “razón”, “proporción” y “proporcionalidad”, así como algunos archivos personales aportados por los autores de este documento, traídos desde su práctica, de la búsqueda bibliográfica en Internet o de documentos elaborados por ellos en otras instancias de su proceso académico.

La base de documentos conformada cuenta con 274 archivos, entre artículos, memorias, libros, capítulos de libros y tesis, que datan desde el año 1929 hasta el año 2014. Conformada la base de documentos respecto del tema a tratar, se realizó una primera organización de acuerdo con el tipo de documento y otra de orden cronológico descendiente de acuerdo al año de publicación (v.g., artículo, capítulo de libro, libro, ponencias publicadas en memorias de algún evento, tesis). Con esta organización se logró identificar el tipo de documentos existentes, hacer una lectura de los resúmenes cuando son explícitos en el documento; cuando no se disponía de resúmenes, entonces se realizó una lectura de las introducciones o una lectura oceánica de los documentos para determinar su contenido. Es a partir de esta lectura que se ubican los documentos en cada una de las categorías propuestas por Ball, Thames, & Phelps, (2008).

Para la clasificación de los documentos se decidió tomar aquellos que fueron publicados a partir del año 2001, ya que los autores de este trabajo consideran que las investigaciones reportadas en estos últimos quince años van acorde con ese despliegue internacional que ha tenido la investigación en EM como lo reporta Guacaneme y Mora (2012).

Además con los cambios que decretó el Ministerio de Educación Nacional a través del Decreto 272 de 1998, con el que establece una división para los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas, pues define la existencia de Licenciaturas en Educación Básica con Énfasis en matemáticas (LEBEM) y de Licenciaturas en Matemáticas (LM), además el artículo tres, literal efe, alude a “...Desarrollar y mantener una actitud de indagación que, enriquecida con teorías y modelos investigativos, permita la reflexión disciplinada de la práctica educativa y el avance del conocimiento pedagógico y didáctico”

Si bien en el Decreto 272 no se establece un lugar para la relación entre investigación y la educación del profesor de Matemáticas, en la normatividad que deviene con posterioridad sí hay varias y diversas alusiones a esta. Lo cual consideran los autores marca un claro viraje en la formación y competencias que deben tener los futuros profesores de matemáticas y en las investigaciones que se derivan de ellas.

Definido el intervalo de tiempo para el análisis de los documentos y seleccionados los mismos, estos se organizaron en los subdominios de las categorías definidas en el apartado 2.3. Por otra parte en la referencia de los documentos se citará el título de cada uno de ellos, buscando guiar de manera más precisa al lector.

### **3.1 CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO (CCK)**

En este subdominio se ubican los siguientes tres documentos, en los cuales se puede evidenciar qué debería ser propio del conocimiento común respecto a RPP:

1. Razonamiento proporcional: conocimiento especializado de contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria (Buforn & Fernandez, 2013). En este artículo los autores muestran los resultados de un estudio en el que se examina el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestro de Educación Primaria en el ámbito del razonamiento proporcional. En ellos se evidencia que los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en usar el significado multiplicativo de la idea de operador.

2. *Interpreting Middle School Students' Proportional Reasoning Strategies: Observations From Preservice Teachers* (Hines & Mc Mahon, 2005). En este artículo, los autores muestran los resultados de una investigación realizada a once futuros profesores de educación media, en la que examinaron las estrategias empleadas por los alumnos para la solución de situaciones que implican razonamiento proporcional.
3. *Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task* (Lo, 2004). En este artículo se reportan los resultados de investigación acerca de las estrategias de solución de problemas de cuarta proporcional y el uso técnicas tales como dibujos o escritura que emplean los futuros profesores de matemáticas en la solución de situaciones que involucran razonamiento proporcional.

### 3.2 CONOCIMIENTO EN EL HORIZONTE MATEMÁTICO

En este subdominio se ubican cuatro documentos los cuales reportan investigación, acerca de la proyección de RPP dentro y fuera de las matemáticas. Es importante subrayar que la mayoría de los artículos ubicados en esta categoría hacen alusión a la historia de la matemática. Los artículos ubicados aquí son:

4. *Noncommutative Geometric Means* (Bathia & Holbrook, 2006). El artículo muestra un estudio de la media geométrica desde su aparición en la época de los griegos y el desarrollo de esta a través del tiempo; además, muestran otras operaciones dentro de las matemáticas las cuales no son conmutativas y haciendo alusión a esto demuestran que la media geométrica no es conmutativa.
5. *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry* (Wildberger, 2006). Por medio de este artículo, el autor demuestra que a través de métodos algebraicos y haciendo uso de las proporciones, se pueden resolver múltiples situaciones de orden trigonométrico sin necesidad de emplear las razones trigonométricas para ello.
6. *Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning* (Davis, 2003). En este artículo, el autor muestra el cambio en el estudio de la razón y el razonamiento proporcional, que ya estaba bien formalizada en Euclides, después de la interpretación de fracción propuesta por Abu Yafar Muhammad ibn Musa al-

Khwarizmi, conocido por sus siglas como "al- Khwarizmi,", ya que mostró que las operaciones en estas fracciones tenían un carácter más o menos mecánico o regular.

7. *Rediscovering a family of means* (Wassell, 2002). Por medio de este artículo el autor muestra un recuento histórico de la definición de media en matemáticas, analiza la aparición y uso de la media aritmética, geométrica y armónica a través del tiempo y hace un análisis de ellas desde el contexto de la teoría de la razón y la proporción.

### **3.3 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO (CSKL)**

En este subdominio se ubican cuatro documentos que establecen distintas perspectivas de los conceptos RPP, para su enseñanza.

8. La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización (Oller & Gairin, 2013). En este artículo los autores hacen una revisión histórica de algunos aspectos relacionados con la proporcionalidad aritmética, como los son: La razón y la proporción. Además señalan su importancia dentro de la investigación en EM y proporcionan una visión más amplia del concepto de razón y proporción.
9. Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria (Rivas, Godino & Castro, 2012). Por medio de este artículo los autores informan sobre los resultados de un proceso instruccional en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas, cuyo objetivo es desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática en futuros maestros de primaria. Los resultados indican que este proceso formativo promueve el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad.
10. Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad (Rivas & Godino, 2012). En este estudio se muestran algunos avances teóricos sobre el constructo “conocimiento del profesor” de matemáticas, y sobre la puesta en práctica de herramientas de análisis epistémico/cognitivo, concebidas y diseñadas con el fin de fomentar el desarrollo de esta forma de conocimiento en la formación de futuros profesores. Se describen las herramientas de análisis utilizadas y se informa sobre la puesta en juego de tales herramientas en una muestra de 50 futuros profesores, al tratar con la resolución de un

problema sobre proporcionalidad. Los resultados señalan la utilidad potencial del uso de dichas herramientas para fomentar el “Conocimiento Matemático para Enseñar” y se concluye con algunas implicaciones de este estudio en la formación de profesores.

11. *Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity: Variation systems modelling in Secondary Education* (García, & Ruiz, 2006). Este artículo muestra parte de un estudio enmarcado desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), respecto a las relaciones funcionales y las relaciones proporcionales en la educación secundaria en España y los cambios en los procesos de modelación en los estudiantes de secundaria en España.

### **3.4 CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y DE LOS ESTUDIANTES (KCS)**

En este subdominio se ubican el mayor número de artículos reportados por la investigación en Educación Matemática, treinta y tres en total. Se muestran los posibles aciertos o desaciertos respecto a la enseñanza de RPP.

12. Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales (Fernández & Llinares, 2012). Este artículo trata un estudio que analiza las relaciones implicativas entre las estrategias usadas por estudiantes de primer curso de educación secundaria en España para solucionar problemas lineales y no lineales. Los resultados muestran la importancia de que los estudiantes comprendan la idea de razón para poder identificar situaciones lineales.
13. *The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school* (Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2011). Este artículo muestra un estudio sobre el desarrollo de pensamiento aditivo y pensamiento proporcional a lo largo de la escuela primaria y secundaria. Muestra cómo el estudiante hace uso de métodos aditivos en problemas de proporcionalidad y de forma similar como hace uso de la proporcionalidad cuando se le plantean problemas de orden aditivo.
14. *Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning* (Modestou & Gagatsis, 2010). En este artículo se propone un nuevo modelo de razonamiento

proporcional basado en datos bibliográficos y de investigación, para lo cual se ayudan de tres pruebas escritas que implican situaciones analógicas, proporcionales y no proporcionales las cuales fueron propuestas a los alumnos de grado 7 a 9. Por medio del estudio de estas pruebas concluyen que el razonamiento proporcional implica manejar analogías verbales y aritméticas, así como la conciencia de discernir las situaciones no proporcionales, que es metacognitivo en la naturaleza.

15. *Discriminating Non-linearity from Linearity: Its Cognitive Foundations in Five-Year-Olds* (Ebersbach, Van Dooren, Goudrian & Verschaffel, 2010). Por medio de este artículo se muestran los resultados de un estudio realizado con niños de kínder, sobre el proceso de reconocimiento que ellos hacen de situaciones de crecimiento lineal y no lineal mediante algunos ejercicios prácticos.
16. Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria (Ruiz, & Lupiáñez, 2009). En este artículo los autores plantean un problema de investigación, el cual consiste en observar y analizar las estrategias que emplean estudiantes de sexto grado en la solución de situaciones de razón y proporción simple directa, para reconocer los procesos de pensamiento y la estructuración de sus respuestas.
17. *The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity* (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008). En este artículo, los autores proporcionan una visión general y un análisis conceptual de la tendencia que tiene el estudiante de utilizar el pensamiento lineal en distintas situaciones, más allá de su aplicabilidad. Luego desarrollan un análisis de las propiedades de la linealidad y sus representaciones en distintos contextos matemáticos.
18. *The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning* (Schwarz, & Linchevski 2007). Muestra la manera en que el diseño de tareas permite cambios profundos en el desarrollo de pensamiento matemático entre pares. A través de un estudio realizado con 60 estudiantes de primeros niveles de secundaria demuestran cómo se puede adaptar el diseño de la tarea con el fin de crear un conflicto cognitivo entre diadas y se demuestra que las estrategias de razonamiento proporcional de los estudiantes no mejoraron como resultado de la discusión; sin embargo, la introducción de una

- hipótesis dispositivo de prueba y la guía del experimentador para dar cabida a opiniones divergentes llevan a los compañeros a un cambio conceptual
19. *How students view the general nature of their errors* (Lannin, Barker, & Townsend, 2007). En este artículo, los autores muestran los resultados de un estudio hecho a dos estudiantes, acerca de cómo observan ellos sus errores en situaciones de razonamiento proporcional y cómo a través de ello se puede construir conocimiento matemático.
  20. *Emploi de mathenpoche et apprentissage: l'exemple de la proportionnalite en sixieme* (Gueudet, 2007). Por medio de este artículo se muestran los resultados de un estudio hecho con niños de grado sexto, a los cual se les permitió interactuar con el programa “*Mathenpoche*”; a través del este, se les suministra una serie de ejercicios sobre proporcionalidad, se observó además la interacción de los niños con el software y el aprendizaje que ellos tuvieron con la implementación del mismo.
  21. Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo<sup>6</sup> y cuantitativo (Ruiz & Valdemoros, 2006). En este artículo los autores muestran el resultado de un trabajo doctoral, el cual presenta la evaluación de una propuesta de enseñanza de los conceptos de razón y proporción, que fue aplicada a un grupo de estudiantes de grado sexto en México, bajo el caso de Paulina y en la que se formula que al mejorar el pensamiento proporcional cualitativo se mejora el pensamiento proporcional cuantitativo y el manejo de algoritmos.
  22. Se cambian fichas por estampas un estudio didáctico sobre la noción de razón “múltiplo” y su vinculación con la multiplicación de números naturales (Block, 2006). El artículo presenta una secuencia didáctica para la enseñanza de ciertos aspectos de la noción de razón. Además muestra los resultados de su aplicación a un grupo de niños de tercero de primaria. Por otra parte analiza algunos aspectos de la relación entre el operador función y la razón constante.
  23. *Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization* (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). En este artículo los autores muestran cómo a través de un estudio realizado con estudiantes de Básica Primaria y Básica Secundaria se encontró que los niños tienden

---

<sup>6</sup> Para los autores de este trabajo hablar de pensamiento proporcional cualitativo es incurrir en un error, se debe hablar de pensamiento proporcional cuantitativo numérico y pensamiento proporcional cuantitativo no numérico que se cree es a lo que alude este autor.

a resolver todo tipo de problemas aplicando razonamiento proporcional, así el problema no involucre la proporcionalidad.

24. *The development of informal proportional thinking in primary school* (Pantziara, & Pitta, 2005). Mediante este artículo se muestran los resultados de un estudio realizado con niños entre 10 y 11 años, en el cual se analizan las estrategias informales empleadas por ellos para resolver problemas de cuarta proporcional, además se intenta analizar el razonamiento cualitativo y cuantitativo empleado por ellos para la solución de las situaciones.
25. *RF01: The significance of task design in mathematics education: examples from proportional reasoning* (Ainley & Pratt, 2005). A través de este artículo intentan analizar la importancia de la tarea en la educación matemática, la influencia en el trabajo de los estudiantes y en su entorno de aprendizaje. Los artículos también muestran que busca el educador matemático con la tarea y como su investigación o su forma de trabajo influye en el desarrollo de la tarea.
26. *Développement du raisonnement proportionnel: potentiel des élèves avant tout enseignement de la proportionnalité* (Oliviera, 2005). A través este artículo se muestran los resultados de un estudio realizado con niños entre 13 y 14 años en Canadá, en el cual se analizan los diferentes tipos de estrategias utilizadas por ellos para entender y resolver problemas de proporción simple, además se busca incentivar el razonamiento cualitativo y cuantitativo de las situaciones planteadas.
27. *Normalising geometrical constructions: a context for the generation of meanings for ratio and proportion* (Psycharis, & Kynigos, 2004). Por medio de este artículo se muestran los resultados de un estudio realizado con estudiantes de 13 años, en el cual a través del uso de un software y diferentes construcciones geométricas se puede llegar a construir los conceptos de razón y proporción.
28. *Mathematics and the Construction of Feminine Gender Identity* (Norton, 2004). En este artículo se muestran los resultados de una intervención realizada con niñas de 6° año, en el cual a través de actividades de desarrollo de pensamiento proporcional, las niñas muestran mayor interés en el desarrollo de tareas y en el estudio de la matemática.

29. *Using Lego Construction to Develop Ratio Understanding* (Norton, 2004). El artículo muestra los resultados de una investigación realizada con niños de 7° año, en el que a través del uso de la tecnología, se realiza el diseño, construcción y evaluación de máquinas simples con engranajes y poleas, con el objetivo de desarrollar pensamiento proporcional de los estudiantes.
30. *Students' improper proportional reasoning: The case of area and volumen of rectangular figures* (Modestou, Gagatsis & Pitta, 2004). Por medio de este artículo muestran un estudio realizado con estudiantes de 12 y 13 años, acerca de la tendencia de los estudiantes a utilizar la linealidad y el razonamiento proporcional para solucionar problemas de área y volumen de figuras rectangulares, así el problema no se pueda resolver con este tipo de razonamiento.
31. *The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning* (Van Dooren, De bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, 2003). En este artículo se muestra evidencia sobre el uso excesivo de la linealidad por parte de los estudiantes, algo que los autores denominan “ilusión de linealidad” y miran la influencia en la enseñanza de la probabilidad. Esto lo desarrollan basado en estudios anteriores realizados por algunos de ellos.
32. *What response times tell of children's behavior on the balance scale task* (Van der Maas, & Jansen, 2003). En este documento se presentan los resultados en cuanto a tiempo y tipo de respuesta de un grupo de estudiantes de 6 a 22 años, sobre el problema de la balanza y como las respuestas dadas por los estudiantes muestran información detallada sobre los procesos cognitivos que emplean en la solución de diversas situaciones del problema.
33. *Diagnostic assessment of children's proportional reasoning* (Misailidou & Williams, 2003). Este artículo propone un banco de problemas de razonamiento proporcional, el cual fue creado a partir de literatura pertinente, y calibrado con una prueba que se aplicó a 303 alumnos; luego, se entrevistan 84 de ellos y con los resultados se establecen una serie de dificultades al respecto en su manera de razonar. Por último, se formó una jerarquía empírica de consecución de razonamiento proporcional de los alumnos, la incorporación de los errores significativos y la escala aditiva.

34. *Using a pattern table to solve contextualized proportion problems* (Sharp & Adams, 2003). Por medio de este artículo muestran cómo a través de la formulación de un problema sobre proporción y la eficacia de la solución del problema, se puede ayudar a los estudiantes de secundaria a construir conocimiento sobre la razón y el pensamiento proporcional.
35. Proporcionalidad. Razones internas y razones externas (Rapetti, 2003). En este artículo analiza los métodos de solución que emplean los estudiantes de primaria y secundaria, para resolver problemas de razones externas (magnitudes diferentes) y de razones internas (magnitudes iguales).
36. *Students' ability in solving proportional problems* (Pittalis, Christou, & Papageorgiou, 2003). Por medio de este artículo los autores muestran la habilidad de los estudiantes de sexto grado para resolver problemas de proporcionalidad simple a través de un modelo que ellos llaman SOLO y el cual permite entender la estructura del razonamiento empleado por los estudiantes para resolver situaciones que involucran razonamiento proporcional.
37. *The development of children's understanding of intensive quantities* (Nunes, Desli, & Bell, 2003). Este artículo analiza las etapas iniciales de comprensión de los niños hacia las cantidades intensivas y extensivas, haciendo primero que todo una diferenciación entre lo que son cantidades intensivas y extensivas. Luego se proponen unas tareas con cantidades este tipo.
38. *From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach* (Nabors, 2003). Por medio de este artículo se muestran los resultados de un trabajo realizado con cuatro estudiantes de séptimo grado y en el cual por medio de la interacción con un programa de computador se le plantearon situaciones de tasa, razón y proporción, para analizar los esquemas de análisis utilizados por ellos.
39. *Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem* (Koellner, 2003). En este artículo presenta la discusión en el entorno de una clase, con un grupo de estudiantes de grado séptimo acerca de un problema tipo que involucra razonamiento proporcional, los autores proporcionan una visión de interpretaciones matemáticas típicas de este problema, así como algunas generalizaciones para otros problemas de este tipo. Las interpretaciones proporcionadas revelan el desarrollo

gradual de razonamiento proporcional desde lo aditivo a entendimientos multiplicativos.

40. *Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning* (Davis, 2003). A través de este artículo habla de la importancia de la relación parte-todo para el desarrollo de pensamiento proporcional en niños y de cómo ellos construyen esta relación a partir de su capacidad de razonar conceptualmente sobre piezas y totalidades, ya que la relación parte-todo se encuentra estrechamente ligada con las habilidades de conteo.
41. *L'utilisation de bases de problèmes en classe de mathématiques. Un exemple avec "La proportionnalité à travers des problèmes"* (Hersant, 2003). El artículo muestra como el uso de software matemático es cada vez más frecuente en las escuelas y en el hogar. "Para el maestro, el uso de software ofrece ventajas, por ejemplo el uso de bases problemas es una manera de gestionar la heterogeneidad de los estudiantes, pero también causa dificultades, ya que cambia la práctica tradicional y priva a los profesores de una parte de sus medios anticipación" Artigue (1990). La integración de software en la enseñanza de las Matemáticas por lo tanto, exige que el profesor piense escenarios, que no siempre están disponibles con el software y parece deseable construir un mínimo conocimiento de cómo los estudiantes utilizan los recursos de software.
42. *A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning* (Clark, Berenson, & Cavey, 2003). Mediante este documento intentan describir la relación entre razones y fracciones y por medio de un estudio fenomenológico reunir pruebas de los maestros, los libros de texto, para recoger la evidencia de sus propias experiencias. También proporcionan los resultados de un estudio para el que han utilizado un modelo para ayudar a analizar los usos de las razones y las fracciones que los estudiantes emplean en la soluciones de problemas relacionados con la proporción.
43. *Crossing the bridge to formal proportional reasoning* (Chapin, & Canavan, 2003). En este artículo comparten algunas de sus experiencias de trabajo con un grupo de estudiantes de séptimo grado que formaban parte del Proyecto Desafío<sup>7</sup>. Discuten la

---

<sup>7</sup> El Proyecto Desafío es una colaboración federal financiada entre una universidad y un colegio del sistema escolar público.

transición de métodos conceptuales informales de los estudiantes para resolver problemas de razonamiento proporcional, a un método más formal de resolver problemas de proporciones, usando una situación similar.

44. *The Development of Children's Rule Use on the Balance Scale Task* (Jansen, & Van der Mass, 2002). Este artículo centra en el desarrollo del razonamiento proporcional en los niños, evaluado por la tarea, usando la balanza Siegler (1976, 1981). Estudia si los niños de edades diferentes utilizan cualitativamente diferentes reglas, y si las normas se utilizan de forma coherente. Problemas de escala de equilibrio no verbal se administraron a 805 participantes entre 5 y 19 años de edad. Un análisis de clases indica que los niños utilizan reglas, que los niños de diferentes edades utilizan diferentes reglas, y que el uso tanto consistente e inconsistente de las reglas ocurre. Se propone un modelo para el desarrollo del razonamiento acerca de la tarea balanza.

### **3.5 CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y LA ENSEÑANZA (KCT)**

En este subdominio se ubican 22 artículos los cuales muestran diversas prácticas de aula y secuencias de trabajo con respecto a RPP, las cuales buscan mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

45. *Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science* (Howe, Nunez, & Bryant, 2011). En este documento muestra una secuencia de trabajo para enseñar algunos conceptos como densidad y velocidad entre otros, los cuales dependen directamente de las relaciones proporcionales.
46. Empleo de la Geometría Dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción (Ruiz, & Lupiáñez, 2010). En este artículo los autores presentan una secuencia de trabajo la cual se brinda como apoyo en la enseñanza de razones y proporciones a través de la Geometría, mediante la utilización de un software de Geometría dinámica. Se propone como una alternativa de enseñanza para RPP.
47. Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional (Gairín, & Escolano, 2009). Por medio de este artículo se muestra una revisión sobre la forma en que son presentados los conceptos de RPP por los libros de texto y los errores que

estas producen en el aprendizaje de estos conceptos en los estudiantes; también hace algunas reflexiones y recomendaciones para hacer más apropiada la enseñanza estos conceptos en el aula.

48. *Teaching Ratio and Rates for Abstraction* (Micheltmore, White, & McMaster, 2007). En este artículo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la razón y la tasa o tasa, partiendo de lo particular y buscando la generalización de estos conceptos, la cual es hallada por los estudiantes en diferentes contextos.
49. *On Direct and Inverse Proportionality* (Halmetoja, et al., 2007). Este artículo está motivado por la manera como los libros de texto presentan el concepto de proporcionalidad directa e indirecta y como se pueden encontrar contraejemplos para estas presentaciones.
50. *L'arithmetisation des grandeurs* (Barbin, 2007). En este artículo presenta una propuesta para trabajar la proporcionalidad en geometría, pero no desde lo numérico, sino desde el tamaño de los objetos geométricos como tamaño y no como magnitud numérica.
51. *An experiment in teaching ratio and proportion* (Adjage & Pluinage, 2007). Muestran en este artículo un resumen del análisis de un experimento realizado con estudiantes de 6° y 7°, dividido en dos partes; una primera parte donde se trabajó la clase “normal” con lápiz y papel dirigido por el docente y una segunda parte que se desarrolla en el marco de un análisis complejo de problemas de razón y proporción, con la ayuda del computador.
52. *Pedagogies for the Engagement of Girls in the Learning of Proportional Reasoning through Technology Practice* (Norton, 2006). En este artículo se muestran los resultados de dos intervenciones hechas en el aula trabajando con niñas de 6 y 7 años, sobre los conceptos de relación y proporcionalidad con la ayuda del manejo del computador que tienen las niñas.
53. *U.S. And Chinese teachers' conceptions and constructions of representations: a case of teaching ratio concept* (Cai & Wang, 2006). En este artículo se exhiben las diferentes formas de presentación del concepto de razón entre los profesores de Estados Unidos y China, y que a pesar de las diversas interpretaciones que tienen de él, los resultados de los americanos y de los chinos no difieren tanto.

54. *Proportional Reasoning* (Whitton, 2004). Por medio de este artículo habla de la importancia del razonamiento proporcional y muestra algunos ejemplos didácticos que se pueden llevar a la escuela para que los alumnos vean la importancia de la razón y la proporción en el desarrollo de competencias que involucra pensamiento proporcional.
55. *The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding* (Person, Berenson & Greenspon, 2004). Este artículo habla del papel que tiene el número en el razonamiento proporcional cuando se trabaja con estudiantes de educación media en Estados Unidos y cómo se puede trabajar con la razón y la fracción.
56. *Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio & proportion in pre-service teacher education* (Ilany, Keret & Ben-Chaim, 2004). Este artículo muestra los resultados de una investigación en la cual se analizó y evaluó el impacto de la aplicación de un modelo de investigación auténtico con actividades que involucran la enseñanza de la razón y proporción. Este modelo fue desarrollado siguiendo estudios piloto los cuales investigan cambios en el conocimiento pedagógico y matemático en futuros profesores de matemáticas en las actividades que involucran razonamiento proporcional.
57. *Exploring proportional reasoning through movies and literatura* (Beckmann, Thompson & Austin, 2004). En este artículo analiza varias películas que pueden ser utilizadas para motivar a los estudiantes y ayudarlos en la construcción de habilidades que pueden desarrollar razonamiento proporcional.
58. *The giants Project* (Weinberg, Hammrich & Bruce, 2003). Los autores de este artículo, a través del proyecto “gigantes”, proponen cuatro actividades que pueden ser usadas por los profesores de matemáticas de primaria y secundaria para enseñar de modo más eficaz el concepto de proporción y desarrollar razonamiento proporcional en los estudiantes.
59. *Fishy fun under the sun* (Moore & Schwarz, 2003). En este artículo se presenta una secuencia de trabajo para hacer más divertidas y prácticas las matemáticas por medio de actividades de experimentación en las cuales se integran las ciencias y la matemática, todo por medio del trabajo cooperativo entre los estudiantes.

60. *The legend of Paul Bunyan* (Buhl, Oursland & Finco, 2003). En este artículo se describe una unidad de trabajo de la escuela media en el tema de medición que incluye tres actividades con el rotulo “la leyenda de Paul Bunyan” como un catalizador para modelar y conectar los conceptos de longitud, área y volumen a escala con un factor y con una razón constante.
61. *Using school lunches to study proportion* (Attia, 2003). Por medio de este artículo comparte una experiencia sobre el uso de los almuerzos escolares para enseñar proporción en su clase de matemáticas de sexto grado. Entre otras cosas, los estudiantes pueden descubrir por sí mismos el consumo de calorías que tienen las opciones de almuerzo escolar construyendo una tabla de calorías, investigando por la Internet, además aplicando un razonamiento y utilizando una hoja de cálculo, calcular la razón y el porcentaje de la comida.
62. *A design for ratio and proportion instruction* (Abrahamson, & Cigan, 2003). En este artículo se describe un método para la enseñanza de razón y proporción en un aula de quinto grado. En el cual se exploraron patrones en la tabla de multiplicar, después los estudiantes discuten la relación vinculando dos filas y dos columnas de diferente tipo como una tabla de razones o cuarta proporcional.
63. Tratamiento de los conceptos de razón y proporción a través de un programa didáctico (Ruiz, & Massieu, 2002). En este artículo se muestra la importancia de la construcción de los conceptos de razón y proporción a través de una secuencia de enseñanza, la cual fue puesta en práctica con un grupo de estudiantes mexicanos que cursaban el sexto grado de Educación Primaria. Se da una fundamentación teórica acorde con los objetivos de la investigación, hay un tratamiento metodológico que inicia con la observación hasta llegar a las entrevistas, las cuales permiten determinar tres estudios de caso.
64. *Diet, ratios, proportions: A healthy mix* (Telese, & Abete, 2002). Por medio de este artículo se muestra como motivar a los alumnos en la clase de matemáticas a través de un programa que busca mejorar la salud por medio de los hábitos alimenticios de los estudiantes, para lo cual es necesario la información nutricional de los productos que ellos consumen y así poder establecer una dieta acorde a sus necesidades a través de la razón entre magnitudes y el razonamiento proporcional.

65. *Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation* (Lachance & Confrey, 2002). Por medio de este artículo discuten un nuevo enfoque para aumentar la comprensión del concepto de número decimal en los estudiantes. En lugar de acercarse a la notación decimal como un tema matemático discreto y separado, este enfoque permite a los estudiantes a trabajar con problemas contextuales a fin de obtener una comprensión sólida de la razón y la proporción. Ya que el uso de su comprensión desde la razón y la proporción permite en los estudiantes construir entendimientos conectados y relacionados de fracciones, decimales y porcentajes.
66. Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad (Fernandez, & Puig, 2002). En este artículo se presentan dos aspectos de un trabajo de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en la etapa primaria (Fernández, 2001). En primer lugar, esbozan el esquema general de la investigación; en segundo lugar, exponen en detalle el análisis fenomenológico de los conceptos en cuestión, siendo este segundo aspecto el objeto central del artículo.

### **3.6 CONOCIMIENTO DEL CURRÍCULO**

En este subdominio se ubican cuatro documentos que muestran los cambios que han evidenciado algunos conceptos dentro del currículo en países como Francia y España, también el tratamiento de los libros de texto a RPP en Colombia.

67. La regla de compañía y la didáctica del reparto proporcional (Navarro, 2006). Este artículo hace un recuento histórico a través de los últimos cinco siglos de lo que él llama “La regla de la compañía”, la cual es una aplicación del reparto proporcional en la que la cantidad a repartir son los beneficios, o pérdidas, de una sociedad. Es una cuestión interesante, porque su evolución nos informa de los cambios que ha habido en la economía y en la enseñanza de la aritmética, hasta su desaparición dentro del currículo en España.

68. *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*. (Hersant, 2005). A través de este artículo muestra la evolución histórica del concepto de proporcionalidad dentro del sistema de educación obligatoria de Francia, desde su interpretación en los problemas de cuarta proporcional en la Aritmetica, donde luego ha sido prácticamente anulada por la linealidad. Además presenta un análisis de la evolución de la transposición didáctica de una tarea clásica, el cálculo de cuarta proporcional
69. *21<sup>st</sup> Century Mathematics* (Seeley, 2004). Este artículo llamado 21 siglos de matemáticas, hace un recorrido histórico de la evolución del currículo en matemáticas desde los años setenta hasta los noventa. En él muestra la importancia de la razón y la proporción, ya que a través de ellos se pueden construir muchos de los conceptos de la matemática escolar.
70. *Proportionality: A unifying theme for the middle grades* (Lanius, 2003). En este artículo muestra la proporcionalidad un concepto esencial que podría decirse, no recibe suficiente atención en los grados intermedios. Sin embargo, es amplio, profundo y lo bastante importante para unificar muchos conceptos en importantes temas de las matemáticas de grados superiores.
71. Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas (Guacaneme, 2002). En este artículo presenta un análisis de algunos textos escolares de matemáticas para grado séptimo que abordan el estudio de la proporcionalidad. Este análisis contempla explícitamente tres objetos de estudio: la estructura general del texto, la configuración interna de las unidades temáticas a través de las cuales se desarrolla el estudio de la proporcionalidad y el tratamiento de algunos temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de la proporcionalidad.

## **4 ANÁLISIS DE LA LITERATURA EN CADA CATEGORÍA**

Este capítulo expone el análisis que se deriva de la revisión bibliográfica, el estudio de los modelos del conocimiento del profesor, la consolidación de las categorías de análisis y del resultado de la clasificación de la literatura seleccionada. Con este se intenta dar una respuesta a la pregunta de investigación que propone este trabajo de grado.

El análisis inicia con los resultados que se observan al ubicar la literatura seleccionada en cada una de las categorías definidas en el apartado 2.3, en tanto que esta ubicación permite ver dar cuenta de la organización de las investigaciones seleccionadas.

Posteriormente se realiza la descripción de los resultados que se observan en las investigaciones seleccionadas y que dan muestra de los saberes que deberían ser propios del profesor de matemáticas respecto de cada componente de su conocimiento en lo concerniente a RPP.

Para el inicio del análisis se debe mencionar que los resultados aquí expuestos no se deben tomar como absolutos, teniendo en cuenta, por una parte, que este tipo de trabajo es pionero sobre la organización de la investigación en EM en relación con el CPM, y además se encuentra muy poca información al respecto de esta relación; por otra parte, la interpretación de los datos obedece a un esquema de un modelo del CPM y por tanto si se tiene en cuenta otro modelo y otros niveles de clasificación, los resultados pueden ser diferentes.

### **4.1 RESPECTO A LA PREGUNTA PROPUESTA**

Responder lo que debería ser un saber propio del conocimiento del profesor de Matemáticas respecto a RPP, es una tarea bastante difícil; de acuerdo a Thompson y Thompson (1996), “no es suficiente comprender el concepto de razón para desarrollar una actividad de enseñanza pertinente sobre ese concepto” esta afirmación implica que existen otros saberes que deberían constituir el conocimiento del profesor respecto a RPP. (pág.\*\*\*).

La literatura reportada en este trabajo brinda un panorama de saberes que deben ser propios del maestro, en tanto los documentos seleccionados evidencian las dificultades que presentan estudiantes y los profesores al momento de afrontar situaciones asociadas a RPP. Autores como Ilany, Keret, y Ben-Chaim (2004, pág. 81, citado en Rivas, 2012) señalan que en la formación inicial de profesores respecto al conocimiento de la proporcionalidad, “encuentran la existencia de lagunas en el conocimiento del contenido de futuros profesores sobre los tópicos enseñados, incluyendo la razón y la proporción”. Además, Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007), Sowder (1998) “señalan que tanto los profesores en formación como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad” (pág.\*\*\*), de lo cual los autores infieren que los profesores desconocen situaciones tales como: la teoría del razonamiento proporcional, la estructura multiplicativa, el tratamiento de RPP como cantidades intensivas o extensivas, las interpretaciones tanto numéricas como geométricas y algebraicas de la proporcionalidad, el razonamiento proporcional cuantitativo numérico y no numérico, los errores y dificultades asociadas al aprendizaje, las dificultades epistemológicas asociadas a estos objetos, los esquemas de representación, la visión de RPP en el horizonte matemático para entender conceptos posteriores como los porcentajes, el cálculo de probabilidades la razón de cambio el concepto de linealidad. Estos son algunos de los saberes que deberían constituir su conocimiento respecto a RPP ya que están apoyados y sustentados en los resultados de las investigaciones en EM que se han encargado de estudiar RPP.

## **4.2 RESULTADOS DE LA ORGANIZACIÓN BIBLIOGRÁFICA**

La extensa literatura encontrada en Educación Matemática que se reporta en el capítulo 3 respecto a razón, proporción y proporcionalidad es una evidencia por una parte de la importancia que éstos elementos tienen en la escuela, lo que implica que el profesor de matemáticas debe apropiarse de ellos desde su formación inicial y además que los programas de formación deberían asegurar en sus planes de estudio que dichos saberes sean brindados al profesor en formación. Por otra parte, se evidencia el interés que tiene la

investigación en Educación Matemática en abordar estos elementos, lo cual debe permitir seguir caracterizando el conocimiento que debería tener el profesor en torno a RPP.

Teniendo en cuenta que de la literatura seleccionada se escogieron los artículos que datan del año 2001 en adelante se obtuvo la organización propuesta en el capítulo 3 que se resume en la siguiente tabla.

<b>Categorías de análisis</b>	<b>Subdominios de análisis</b>	<b>Número de artículos ubicados</b>
<b>Conocimiento del contenido</b>	Conocimiento común del contenido	<b>3</b>
	Conocimiento en el horizonte matemático	<b>4</b>
	Conocimiento especializado del contenido	<b>4</b>
<b>Conocimiento didáctico del contenido</b>	Conocimiento del contenido y de los estudiantes	<b>33</b>
	Conocimiento del contenido y la enseñanza	<b>22</b>
	Conocimiento del currículo	<b>5</b>

Bajo las categorías de análisis tomadas por los autores, se puede observar que las investigaciones seleccionadas han centrado su atención en dos de los componentes formulados por Hill, Ball, y Schilling, (2008): el conocimiento del contenido y de los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza que aluden al conocimiento didáctico del contenido. Mientras que el conocimiento del contenido, es un asunto que muestra pocos avances a la luz de los documentos revisados. Por esto, los autores este trabajo infieren, por una parte que este nivel de investigación en la Educación Matemática puede constituir un indicador del porque los profesores presentan dificultades en abordar estos asuntos en el aula de clase como lo reportan Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007), Sowder (1998) y por otra parte pone de manifiesto preguntas como ¿Quién es el encargado

de investigar acerca del conocimiento del contenido? ¿Cómo los programas de formación de profesores deben atender el asunto del conocimiento del contenido respecto a RPP?, También infieren que estos resultados invitan a desarrollar investigación sobre el conocimiento del contenido respecto a RPP y que sea un insumo en la formación de los futuros profesores.

Otra categoría en la que se evidencia poca investigación es el conocimiento del currículo. En este caso también caben preguntas como ¿Quiénes son los encargados de realizar esta investigación? ¿Cuáles deben ser las fuentes de consulta que permitan encontrar elementos que caractericen el conocimiento del profesor en torno RPP en esta categoría?

### **4.3 CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS RESPECTO A RPP DE ACUERDO CON LAS CATEGORIAS DE ANÁLISIS**

A continuación los autores destacan los siguientes análisis que provienen de todo el proceso de estudio y revisión bibliográfica realizado por los mismos.

#### **4.3.1 Conocimiento común del contenido**

En este subdominio se ubicaron tres artículos reportados en el apartado 3.1 que proponen como tema común de estudio la forma de razonar y de resolver problemas que emplean futuros profesores de matemáticas; en los estudios se proponen una serie de situaciones sobre RPP, que deberían ser fáciles de responder, en tanto, son problemas que se plantean a niños y jóvenes en edad escolar, sin embargo, los resultados de las investigaciones aquí reportadas muestran que los futuros profesores presentaron dificultades para resolver algunas de las situaciones propuestas.

Por ejemplo las situaciones que aluden a proporcionalidad inversa, o situaciones en las que debían encontrar la constante de proporcionalidad para problemas de proporciones directas e inversas, mientras que problemas de cuarta proporcional cuando las magnitudes relacionadas eran de proporción directa no generaban mayores dificultades; sin embargo,

un error frecuente en los futuros profesores se reflejaba cuando resuelven problemas a través de una proporción, incluso cuando estos no aluden a situaciones proporcionales.

En los artículos citados también se evidencia que entre las estrategias usadas por los futuros profesores para resolver las situaciones propuestas se encuentra el conocimiento sobre la regla de tres, el conocimiento de la relación de proporcionalidad  $a:b :: c:d$ , esquemas de razonamiento de tipo aditivo y de tipo multiplicativo. Estos conocimientos no difieren del conocimiento que debe poseer cualquier persona con una instrucción básica de matemáticas, por tanto el conocimiento común del contenido de un profesor no difiere del conocimiento común de las demás personas; sin embargo como lo advierten los investigadores, el poseer este conocimiento no implica que el futuro profesor tenga una comprensión de lo que es RPP.

De este análisis los autores infieren que el conocimiento común del contenido respecto a RPP y su relación con el CPM es asunto que aún no despierta el interés de los investigadores en EM, ante la evidencia que solo tres artículos van en la dirección de esta relación. Por lo cual se considera que existe la necesidad que quienes estudian el CPM aborden esta relación como un reto académico que favorezca el desarrollo del conocimiento del futuro profesor; por otra parte se considera que los programas de formación deben centrar su atención en este asunto, de tal modo que le permita a los futuros profesores reconstruir su conocimiento común respecto a RPP, teniendo en cuenta que los resultados que exponen los investigadores en cada documento, muestran que en la escuela este conocimiento no se ha brindado de una forma exitosa.

### **4.3.2 Conocimiento en el horizonte matemático**

Las investigaciones que se ubicaron en este subdominio no definen el conocimiento en el horizonte matemático asociado a RPP. Sin embargo, se hace mención a conceptos y objetos matemáticos en los cuales son necesarios los conocimientos asociados a RPP. Fernández (2012) afirma que “durante años se ha demostrado que el razonamiento proporcional es extremadamente útil en la interpretación de fenómenos reales”. Esta situación se debe a que muchos de estos fenómenos operan de acuerdo con la estructura de RPP tales como la el porcentaje, la velocidad, la densidad, entre otros.

Por otra parte, Karplus, Pulos & Stage (1983) “describen que el razonamiento proporcional es la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y se constituye en la cimentación de conceptos posteriores en la escuela secundaria”. Esta afirmación refleja la importancia y el lugar que ocupa RPP en la escuela, en tanto pone fin a un ciclo de la formación de los individuos y abre la puerta al acceso a conocimientos de orden superior, por ejemplo el pensamiento variacional el inicio del estudio del álgebra, la comprensión del concepto de probabilidad.

También esta categoría describe que RPP está asociado a problemas de tasas, razones de cambio semejanza, porcentajes pendientes y demás fenómenos naturales y físicos, tal como lo plantea Lamon (2005) “la proporcionalidad desempeña un rol en las aplicaciones dominadas por los principios físicos, temas tales como la ventaja mecánica, la fuerza, la óptica, la acústica, solo por mencionar algunos” (pág. 3).

Un aporte significativo de las investigaciones relacionadas en este subdominio es el de reconocer la contribución de la Historia de las Matemáticas, en tanto deben ser del conocimiento del profesor aquellos aspectos que le muestran cómo ha evolucionado o se ha transformado un objeto o concepto matemático, en este caso particular respecto a RPP. Tener este conocimiento supone en el maestro la oportunidad de tener un panorama más amplio acerca de los conceptos que giran en torno a RPP y determinar como la RPP puede ser usada en diferentes contextos.

Este subdominio pone de manifiesto el hecho que el profesor debe poseer un conocimiento que le permita reconocer RPP en diferentes contextos y en diferentes momentos en el desarrollo del currículo además de las diferentes relaciones y conexiones que tiene RPP en la escuela; lo cual supone nuevamente que los programas de formación tienen la obligación de asumir esta responsabilidad frente a la formación de los futuros profesores y los resultados de las investigaciones aquí reportadas son un insumo que le deben permitir al formador de profesores reflexionar acerca de su misión y la forma en que puede orientar sus cursos para que a los futuros profesores se les brinden herramientas teóricas que le permitan afrontar en su práctica un estudio adecuado de RPP con sus estudiantes.

### 4.3.3 Conocimiento especializado del contenido

Los artículos que se reportan en este subdominio ponen de manifiesto el conocimiento que debe ser propio del profesor que va más allá del saber-hacer. Sin embargo, las investigaciones acerca de este conocimiento, muestran que los docentes en formación y en ejercicio carecen de dicho conocimiento, Rivas Godino y Castro (2012) señalan que “estudiantes para maestro tenían limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad” Los autores de este trabajo suponen que dicha dificultad persiste en tanto los programas de formación no consideran en sus planes de curso como un objeto de estudio a RPP en los cuales se forme al maestro tanto en el conocimiento común como en el conocimiento especializado y que le permita reconocer los diferentes esquemas de representación, y el significado de los objetos asociados a RPP. Las diferentes investigaciones que aquí se reportaron permiten reconocer algunos elementos que deberían constituir el conocimiento del profesor.

Por una parte Godino (2012) propone que la estructura multiplicativa de Vergnaud debe ser un componente esencial para el profesor, mientras que Fernández (2012) plantea que reconocer a las proporciones como cantidades intensivas (relación de aquellas cantidades cuyas medidas pertenecen a la misma magnitud) y extensivas (relación a aquellas cantidades cuyas medidas pertenecen a distintas magnitudes), permite al maestro reconocer los diferentes procedimientos que usan los estudiantes al momento de resolver situaciones asociadas a RPP. Otro conocimiento especializado debe ser el de covariación (la relación existente entre la variación de dos magnitudes, es decir si una magnitud cambia, la otra magnitud también lo hará a través de la relación existente entre ellas)

Otro resultado importante en esta categoría es la vinculación que debe tener la Historia de las Matemáticas en la formación de los profesores Oller & gairin (2013), pues a través de esta es que se puede comprender la evolución y el fundamento epistemológico de los conceptos relacionados a RPP. Este subdominio a consideración de los autores se

constituye en aquel que le permitirá al maestro hacer diferentes conexiones con los subdominios de la categoría del conocimiento didáctico del contenido.

Por tanto la tarea de estudiar el conocimiento especializado del contenido respecto a RPP deberá ser un asunto que atañe a los formadores de futuros profesores y los investigadores de EPM, en tanto les permitirá tener una visión más clara de lo que implica formar a un profesor respecto a estos temas y brindarles una mejor formación.

#### **4.3.4 Conocimiento del contenido y de los estudiantes**

En este subdominio se identifican los errores, las dificultades, las estrategias, y los procedimientos que usan los estudiantes al momento de abordar situaciones relacionadas con RPP. Entre los errores más comunes que se reportan en las investigaciones revisadas refiere a que los estudiantes tienen una fuerte tendencia aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lugar, incluso en situaciones en las que no es aplicable. Este fenómeno se denomina como la “ilusión de linealidad” Van Dooren, De bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel (2003). Esta situación implica en el maestro que su conocimiento debe no solo mostrar al estudiante situaciones de RPP, sino que también debe estar en la capacidad de orientar y mostrar situaciones que no se pueden linealizar o resolver mediante razones o proporciones para romper con este error asociado al aprendizaje de RPP por parte de los estudiantes.

Por otra parte no diferenciar entre magnitudes internas o externas (intensivas o extensivas) constituye una dificultad epistémica en los estudiantes que conduce a cometer errores en el desarrollo de situaciones asociadas a RPP, en este sentido es deber del profesor procura mostrar la diferencia en la interpretación y el uso adecuado que se la da a las proporciones en estas dos concepciones. Fernández & Ilinares (2012) afirman que “Los resultados muestran la importancia que los estudiantes comprendan la idea de razón para poder identificar situaciones lineales”

Respecto al CPM, los resultados de las investigaciones ubicadas en este subdominio invitan a la reflexión que se debe hacer en este campo para que en la formación del futuro profesor

se vinculen los resultados de estas, de tal modo que el futuro profesor pueda reconocer a priori las dificultades y errores que puedan presentar sus estudiantes y así mismo tomar correctivos que desde las investigaciones se proponen, por tanto los programas de formación de atender a la necesidad que tienen los docentes de poder estudiar los errores y dificultades de los estudiantes respecto a RPP.

Así mismo este trabajo pone de manifiesto la necesidad de avanzar en la relación RPP-CPM teniendo en cuenta que en este subdominio los investigadores en EM han avanzado significativamente y estudiar los errores y las dificultades de los estudiantes ha sido de gran interés; mas no hay evidencia de cómo estas investigaciones se han vinculado a la formación de los futuros profesores.

#### **4.3.5 Conocimiento del contenido y la enseñanza**

Este subdominio permite observa a la luz de la cantidad de artículos ubicados aquí, que la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad constituyen un campo de investigación muy amplio; lograr que los estudiantes resuelvan problemas en los que la noción de proporcionalidad se encuentra involucrada, dependen en parte del tipo de tareas las instrucciones brindadas y la secuenciación de las mismas. Los artículos ubicados en este subdominio hacen referencia a prácticas de aulas y secuencias de enseñanza en distintos contextos de las Matemáticas que permiten dar diversas interpretaciones a RPP desde la geometría, el álgebra, el pensamiento cuantitativo numérico y no numérico. El uso de recursos tecnológicos propone nuevas formas de enseñanza de lo relacionado a RPP.

Las tareas que se proponen en los documentos ubicados en este subdominio se corresponden con los tipos de tareas clasificados por Tournaire (1985); se reconocen actividades relacionadas con problemas de tasas, problemas de mezclas, problemas de física, problemas de comparación entre la variación de las medidas de diferentes magnitudes.

Por otra parte, los resultados que reportan estas investigaciones concuerdan con el planteamiento de Tournaire & Pulos, (1985) quienes sugieren que un número considerable de factores relativos al contexto son los responsables de la variedad de respuestas dadas por los sujetos. Esta afirmación debe cuestionar al profesor para que pueda reconocer diferentes contextos y situaciones en las cuales pueda plantear a sus estudiantes situaciones relacionadas con RPP y además conocer las diferentes variables que pueden surgir al momento de plantear un contexto para resolver un problema de RPP.

Por otra parte se destaca que Lamon, (1993) y Smith, (2001, p. 16) consideran como factores contextuales influyentes para el trabajo con RPP: (1) la naturaleza de la situación y la experiencia de los alumnos, (2) el tipo de números involucrados, (3) el carácter de las razones, en y entre las cantidades correspondientes. De estos factores dependen las estrategias y razonamientos que pueda usar un estudiante al abordar una situación de proporcionalidad.

A demás Modestou y Gagatsis, (2010) definen el razonamiento proporcional como un conjunto de habilidades que devienen de un razonamiento analógico, unas rutinas de proporcionalidad y una conciencia meta analógica como se muestra en la ilustración 4

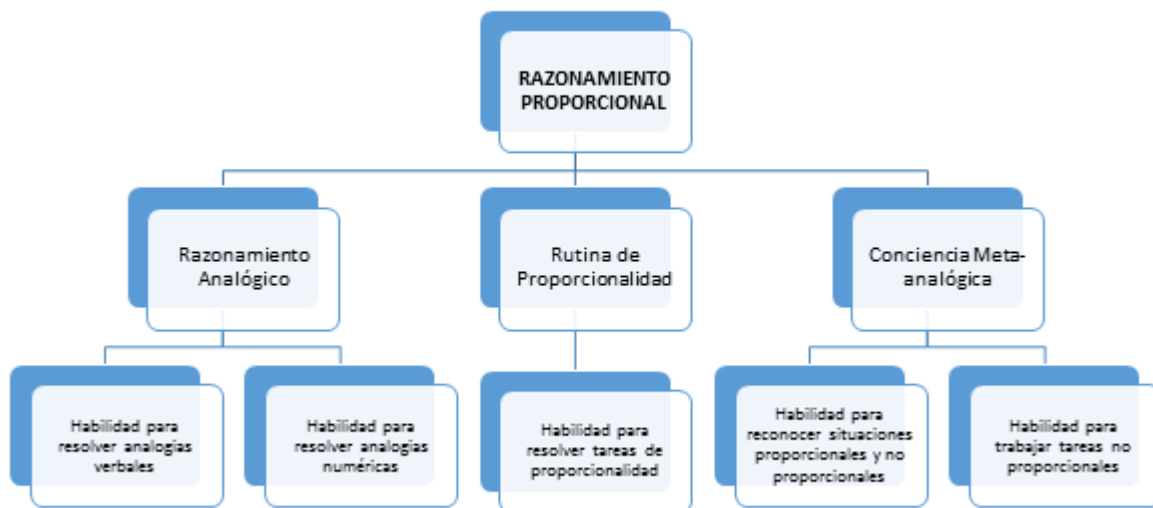


Ilustración 4. Modelo de razonamiento proporcional<sup>8</sup>

Respecto a la formación del profesor, los resultados de las investigaciones ponen a disposición de los futuros profesores y los profesores en ejercicio una gran variedad de estrategias y propuestas metodológicas de enseñanza que les pueden permitir ampliar su repertorio para el aula de clase, por tanto es un deber del profesor adquirir este conocimiento.

Respecto a los programas de formación las investigaciones de este subdominio se proponen nuevamente como un insumo del cual debe disponer el formador de profesores de Matemáticas.

#### 4.3.6 Conocimiento del currículo

En este subdominio se ubicaron cuatro investigaciones, lo que refleja la ausencia de investigación respecto a RPP en el currículo. De las investigaciones reportadas se puede inferir que:

<sup>8</sup> Traducción realizada por los autores del presente trabajo de Modestou & Gagatsis, (2010).

El desarrollo histórico de la transformación de un concepto muestra la ubicación y la relevancia que este tiene dentro del currículo. Navarro (2006) expone el caso del currículo español, en el que se muestra como se transforma el concepto de reparto proporcional y como ha sido relegado en la escuela hasta su desaparición. Hersan (2005) muestra la evolución histórica del concepto de proporcionalidad en el currículo francés. Exponiendo los problemas de cuarta proporcional y el paso a la linealidad de las proporciones. Con este paso al modelo funcional de la proporción, tiende a desaparecer la proporcionalidad aritmética de la escuela.

Para el caso de Colombia se destaca a Guacaneme, (2002) quien muestra un estudio donde se puede observar como a través de los libros de texto se abordan el estudio de la proporcionalidad. Además muestra que en las propuestas curriculares se identifica el estudio de la RPP, para ser desarrollado fundamentalmente en grados quinto y séptimo.

Este subdominio muestra que las investigaciones le pueden indicar al profesor como ha sido la ubicación y el tratamiento que se le ha dado a RPP en la escuela, y como estos elementos son relevados por el concepto de las funciones. Este conocimiento le brinda al profesor elementos para mediar entre el saber y los estudiantes para que ellos pueden hacer una transición del lenguaje de las proporciones al lenguaje de las funciones empleando recursos y herramientas que faciliten dicha transición.

## **5 CONCLUSIONES Y PROYECCIÓN FUTURA**

A partir de todo el proceso de clasificación, revisión bibliográfica, análisis y posterior caracterización del CPM en torno a RPP se dedica este espacio para realizar algunas reflexiones que han surgido durante la realización de este trabajo.

### **5.1.1 Respecto a la educación del profesor de matemáticas**

En primera instancia se resalta la amplia investigación que gira en torno a la educación del profesor y en este caso particular del profesor de matemáticas, los resultados encontrados en este aspecto permiten reconocer que la EPM es un campo de investigación que se sigue consolidando, en tanto la caracterización del conocimiento del profesor es un asunto de interés para los investigadores. Sin embargo se aclara que la relación RPP-CPM es un asunto al cual no se le ha brindado el espacio que merece en la comunidad académica y el resultado de este trabajo invita a que se asuma el trabajo en esta relación.

### **5.1.2 Respecto al conocimiento común del contenido**

La relación que existe entre la EPM y lo que el profesor debería saber respecto a RPP presenta avances en esta dirección en el que algunos autores han orientado su visión a trabajar este asunto. Las dificultades que se presentaron para definir y caracterizar el conocimiento común del contenido son una muestra de dicha situación en tanto no se encontró algún documento en específico que definiera de forma clara y precisa estos saberes. Situación que sustenta la hipótesis planteada al inicio de este trabajo, la cual conlleva a las dificultades que presentan los maestros en ejercicio y en formación al momento de abordar en su ejercicio docente situaciones relacionadas con la RPP, pues no se tiene claro cuál es el conocimiento común y disciplinar que sustenta el trabajo de RPP en clase. No se identifican fuentes de conocimiento diferentes a las que les pueda ofrecer un libro de texto para el desarrollo y preparación de una clase.

Esta situación plantea interrogantes tales como ¿Quién y cómo define lo que es el conocimiento común del contenido respecto a RPP?; ¿Los formadores de profesores y las instituciones formadoras tienen claro cuál es ese conocimiento para que sea orientado y brindado a los futuros profesores?, ¿Los programas de las instituciones formadoras de futuros profesores incluyen en sus actividades situaciones que favorezcan la formación en este aspecto?

### **5.1.3 Respetto al conocimiento especializado del contenido**

En esta categoría se reconocen elementos teóricos que definen algunos aspectos claves en el CPM respecto a RPP por ejemplo al hablar de las estructuras multiplicativas y hablar de cantidades intensivas o extensivas, reflejan cómo la Educación Matemática ha tratado de definir estos aspectos. Sin embargo, los resultados que evidencian algunas de las investigaciones revisadas es que los maestros en ejercicio y en formación no se han apropiado de estos elementos, en tanto sus aprendizajes en estos aspectos no han sido relevantes ni se les ha tratado con la importancia del caso. Esta situación lleva nuevamente a plantearse preguntas acerca de cómo está orientada y bajo que parámetros se organizan y diseñan los programas de formación docente y los elementos que realmente se les brindan a los futuros profesores para ejercer su profesión.

Otro resultado importante en esta categoría es la vinculación que debe tener la historia de las Matemáticas en la formación de los profesores, pues a través de esta es que se puede comprender la transformación y el fundamento epistemológico de los conceptos relacionados a RPP.

### **5.1.4 Respetto al conocimiento en el horizonte matemático**

Reconocer el horizonte matemático hacia el cual apunta RPP no se ve reflejado de forma clara en las investigaciones revisadas, sin embargo se reconoce la importancia de tener clara la orientación del conocimiento sobre RPP que se imparte en la escuela. Pues no tener claro dicho horizonte refleja el estado actual del aprendizaje de estos asuntos en la escuela

donde RPP se brinda como un conocimiento más que se basa en la solución de ejercicios y la aplicación de algoritmos que no le permite al estudiante hacer las conexiones entre otros conceptos matemáticos y otras disciplinas del saber en la escuela.

Por una parte los autores consideran necesario incorporar el Estudio de la Historia de las Matemáticas en la formación de los profesores, en tanto esta brinda una visión amplia de las matemáticas, por otra parte surge la inquietud de ¿Qué matemáticas se requieren para la escuelas?, es más importante saber más matemáticas o saber más sobre las matemáticas, la clase de conocimientos matemáticos útiles para el profesor en la escuela; los autores consideran que en los programas de formación se intenta emular la formación de un matemático puro, y lo que este estudio refleja respecto a RPP es que esa formación no es suficiente y por otra parte no es coherente con las situaciones que se abordan en la escuela respecto a RPP.

#### **5.1.5 Respecto al conocimiento del contenido y de los estudiantes**

En esta categoría se concentró el mayor número de investigaciones revisadas lo cual muestra hacia donde apunta la investigación en Educación Matemática y que es coherente con las tendencias investigativas de esta ciencia en tanto uno de sus asuntos de interés es cómo aprenden los estudiantes y todos los fenómenos que ocurren alrededor de este aprendizaje. Sin embargo surge la pregunta de cuánto sabe el maestro respecto a lo que estas investigaciones reportan. ¿Cuál es el puente o medio de comunicación que le permite al maestro tener acceso a este conocimiento?, ¿Qué alternativas ofrecen los programas de formación inicial de profesores para difundir y tomar como insumo de enseñanza estos resultados presentados por las investigaciones?

#### **5.1.6 Respecto al conocimiento del contenido y la enseñanza**

En esta categoría se concentró gran parte de los documentos revisados, lo cual muestra la tendencia de la investigación en Educación Matemática y cómo la investigación se ha preocupado por identificar las dificultades de tipo epistemológico y antropológico de los

objetos matemáticos, es decir, como las representaciones y los contextos afectan el significado que se le atribuye a un objeto matemático, en este caso particular para RPP, así mismo se evidencia una estructura y varias organizaciones desde diversos autores que definen el esquema del razonamiento proporcional en los estudiantes, aspecto que debería ser propio del conocimiento del profesor.

### **5.1.7 Respecto al currículo**

Se evidencia la necesidad de que la investigación en Educación Matemática se apropie de esta categoría y genere mayor producción a nivel de documentos y materiales didácticos los cuales permitan al profesor de matemáticas establecer diversas actividades y manejos dentro de su clase, buscando favorecer el desarrollo de pensamiento matemático en sus estudiantes.

### **5.1.8 De modo general se concluye**

La investigación que se reporta en los artículos seleccionados para este trabajo y respecto a RPP se centra en gran medida en solo dos de los subdominios utilizados, el conocimiento del contenido y del estudiante y en el conocimiento del contenido y de la enseñanza, lo cual permite observar un claro sesgo por parte de los investigadores en Educación Matemática.

Por otra parte se debe reflexionar acerca del papel que le compete a las instituciones formadoras de futuros profesores de matemáticas respecto a los vacíos en la formación de jóvenes en temas como RPP, ya que la investigación reporta que los estudiantes para profesor de matemáticas tienen dificultades para reconocer situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en usar el significado multiplicativo de la idea de operador Buforn y Fernández (2013).

Se debe destacar la importancia que tiene el desarrollo curricular de conceptos como RPP en el conocimiento especializado del contenido que debe tener el futuro profesor de matemáticas y que le permita utilizar distintas representaciones para un mismo contenido.

Por tanto la relación RPP-CPM se debe constituir en un reto académico para quienes se interesan por la investigación de la Educación del profesor de Matemáticas, y dicho reto debe estar apoyado en los resultados de EM que se constituyen en insumo para la formación de los futuros profesores, para el caso de Colombia Se debe investigar la forma en que razonan los futuros profesores y brindarle las herramientas en los programas de formación para que ellos tengan la oportunidad de reconstruir su conocimiento, así los programas de formación deben atender a las necesidades que se denotan desde el esquema que se propuso para el análisis el cual permite identificar aquellos aspectos en los que la formación del profesor debe tener una mayor atención.

Por último se plantea la idea que las propuestas metodológicas de los programas de formación se orienten mediante los resultados de la investigación para que atiendan de una forma más consiente las necesidades académicas de los futuros profesores.

## 6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adjage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité: complexité et enseignement au début du collège. *Pétit X*, 74, 5-33.
- Ball, D. L., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389407–.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon : Knowing Mathematics for Teaching to Learners ' Mathematical Futures 1.
- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389407–.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas, 13–31.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Content Knowledge : Conceptualizing and measuring teachers ' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <http://doi.org/Article>.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). Adding it up: Helping children learn Mathematics. Washington, DC: National Academy Press.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza Y Aprendizaje De La Razón, La Proporción Y La Proporcionalidad: Un Estado Del Arte. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <http://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181–204.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching Mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

