Propuesta de módulo para el diseño de recursos en GeoGebra, utilizando como ejemplos características y propiedades de la función.

Autoras:

Evelia López

Nilsa Ysabel Molas Zaracho

Trabajo de grado para optar por el título de
Magister en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá - noviembre, 2024

Propuesta de módulo para el diseño de recursos en GeoGebra, utilizando ejemplos de características y propiedades de la función.

Autoras:

Evelia López

Nilsa Ysabel Molas Zaracho

Directores:

Mg. Tania Julieth Plazas Merchán

Mg. William Alfredo Jiménez Gómez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá - noviembre, 2024

Agradecimientos

A Dios por guiarnos, acompañarnos en nuestras vidas y permitir cursar esta Maestría.

A nuestros asesores de trabajo de grado, los profesores Tania Plazas y William Jiménez, por su paciencia, dedicación y apoyo incondicional en la orientación y construcción de este trabajo de grado. Sus valiosas ideas y aportes que fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo de grado.

A los profesores de la Maestría en Docencia de las Matemáticas por toda la ayuda recibida, tanto en lo académico como en lo logístico, para que nuestra estadía en el país fuera acogedora.

Dedicatoria

A Dios, por haberme permitido dar un paso adelante, ayudándome a lograr mis objetivos guiándome con mucho amor y bondad.

A mi familia, cuyos integrantes me han dado su apoyo incondicional en cada proyecto personal y profesional.

Evelia López.

A mi hija Verónica Isabel, quien es el motor de mi vida.

A mis padres Eligio y Delia, por el apoyo incondicional en cada proyecto.

A mis hermanos, quienes siempre me toman de la mano para luchar con todas las fuerzas para alcanzar el proyecto que anhelo.

A mis amigos y compañeros de trabajo que han creído en mí y, me han apoyado y motivado para seguir adelante en este proceso.

Nilsa Ysabel Molas Zaracho.

Tabla de contenido

Introducción 10
1. Justificación 12
1.1. Inquietud Pedagógica 12
1.2. Antecedentes 15
1.3. Objetivos 19
1.3.1 Objetivo General 19
1.3.2. Objetivos Específicos 20
2. Marco de Referencia 21
2.1. GeoGebra 21
2.1.1. Módulo y Recurso 28
2.2. Características del Objeto Matemático: Función 31
2 .3. TPACK 41
3. Metodología 46
3.1. Marco Metodológico 46
3.1.1. Estrategia Investigativa 46
3.2. Población 51
4. Descripción y análisis a priori del Módulo 52
4.1. Secciones del Módulo 52
4.1.1. Herramientas Básicas. 52
4.1.2. Casillas de Entrada 60
4.1.3. Casillas de Verificación. 70
4.1.4. Botones 81
4.1.5. Tablas de Datos 90
4.2. Evaluación a los usuarios sobre los contenidos del Módulo 95
Referencias 102

Índice de figuras

Figura 1 *Logo de GeoGebra.* 22
Figura 2 *Vistas de GeoGebra.* 24
Figura 3 *Libro de GeoGebra Evelia y Nilsa.* 27
Figura 4 *Estructura del TPACK* 42
Figura 5 *Orden de configuración de las secciones del módulo* 50
Figura 6 *Introducción de Herramientas Básicas* 53
Figura 7 *Video explicativo de Herramientas básicas* 53
Figura 8 *Vista algebraica y gráfica de GeoGebra* 55
Figura 9 *Vista de hoja de cálculo y su representación gráfica* 55
Figura 10 *Vista de graficador de 3 dimensiones* 55
Figura 11 *Vista de cálculo de probabilidad* 55
Figura 12 *Vista de protocolo de construcción* 55
Figura 13 *Gráfica de la función con dominio restringido a la función principal* 55
Figura 14 *Gráfica de la función con dominio restringido por el intervalo entre tres y quince* 55
Figura 15 *Ejemplo del recurso de herramientas básicas* 58
Figura 16 *Introducción de la sección de casillas de entrada* 60
Figura 17 *Vídeo explicativo de la sección de casillas de entrada* 61
Figura 18 *Asignar el número asociado al deslizador* 62
Figura 19 *Definición del número en la barra de entrada* 62
Figura 20 *Selección del menú de casillas de entrada* 62
Figura 21 *Configuración de los componentes* 62
Figura 22 *Manipulación de las propiedades de los componentes* 62
Figura 23 *Manipulación y cambio de número de los componentes* 62
Figura 24 *Definición de dos funciones cuadráticas* 63
Figura 25 *Visualización de los componentes en la pantalla* 63
Figura 26 *Configuración del texto* 63
Figura 27 *Menú punto sobre objeto* 63
Figura 28 *Observación del comportamiento del punto sobre objeto* 63
Figura 29 *Ejemplo del recurso de casillas de entrada* 69
Figura 30 *Introducción de casillas de verificación* 71
Figura 31 *Video explicativo de casillas de verificación* 72
Figura 32 *Activación de casillas de verificación* 73
Figura 33 *Variable booleana de GeoGebra* 73
Figura 34 *Configuración de las casillas de verificación parte I* 74
Figura 35 *Vista de variables booleanas* 74
Figura 36 *Definición de funciones crecientes y decrecientes* 74
Figura 37 *Cambio de color de las funciones* 74
Figura 38 *Activación de la segunda vista gráfica* 74
Figura 39 *Vinculación de las casillas de verificación a las funciones* 74
Figura 40 *Asociación de las funciones con la casilla de verificación* 75
Figura 41 *Cambios en la configuración de la casilla PRUEBA* 78
Figura 42 *Configuración de los textos* 78

Figura 43 *Asociación de las casillas de verificación con las variables booleanas.* 78
Figura 44 *Denominación de etiquetas* 78
Figura 45 *Condiciones específicas para que el objeto se muestre en pantalla.* 78
Figura 46 *Visualización de la respuesta correcta (verdadera) o incorrecta (falsa)* 78
Figura 47 *Ejemplo del recurso utilizado en la sección de casillas de verificación.* 80
Figura 48 *Introducción de la sección botones* 82
Figura 49 *Video instructivo sobre botones* 82
Figura 50 *Definir deslizador* 85
Figura 51 *Generar la función* 85
Figura 52 *Generación del botón PAR* 85
Figura 53 *Generación del botón IMPAR* 85
Figura 54 *Visualización de las funciones* 86
Figura 55 *Animación de los botones* 86
Figura 56 *Condiciones para mostrar el objeto* 86
Figura 57 *Configuración del botón Inicio* 86
Figura 58 *Ejemplo del recurso de la sección de botones* 89
Figura 59 *Introducción de la sección de tablas de datos* 91
Figura 60 *Vídeo explicativo de la sección de tablas de datos* 91
Figura 61 *Vista de hoja de cálculo* 93
Figura 62 *Registro en hoja de cálculo del punto A* 93
Figura 63 *Registro en hoja de cálculo del punto B* 93
Figura 64 *Configuración del deslizador* 93
Figura 65 *Ejemplo del recurso de la sección de tabla de datos* 94
Figura 66 *Presentación de la evaluación del módulo* 96
Figura 67 *Función par.* 107
Figura 68 *Función Impar.* 107
Figura 69 *Prueba de la recta horizontal.* 108
Figura 70 *Ejemplo de Función Inversa.* 109
Figura 71 *Función Creciente y Decreciente.* 109
Figura 72 *Función definida por partes.* 110
Figura 73 *Desplazamiento vertical I.* 110
Figura 74 *Desplazamiento vertical II.* 110
Figura 75 *Desplazamiento horizontal.* 111
Figura 76 *Elongación o compresión vertical.* 112
Figura 77 *Elongación o compresión horizontal.* 112
Figura 78 *Función Constante.* 113
Figura 79 *Función lineal.* 113
Figura 80 *Función cuadrática.* 113
Figura 81 *Función con valor absoluto.* 114
Figura 82 *Funciones exponenciales.* 114
Figura 83 *Funciones logarítmicas.* 114
Figura 84 *Funciones polinomiales.* 115
Figura 85 *Funciones racionales.* 115

Figura 86 *Función seno.* 115
Figura 87 *Función coseno.* 116
Figura 88 *Función tangente.* 116
Figura 89 *Suma de funciones.* 117
Figura 90 *Resta de funciones.* 117
Figura 91 *Multiplicación de funciones.* 118
Figura 92 *División de funciones.* 118
Figura 93 *Gráfico f(g(x)).* 119
Figura 94 *Gráfico g(f(x)).* 119
Figura 95 *Vista algebraica.* 119
Figura 96 *Vista hoja de cálculo.* 120
Figura 97 *Vista gráfica.* 120
Figura 98 *Vista gráfica 2D.* 120
Figura 99 *Vista Gráfica 3D.* 121
Figura 100 *Vista de cálculos de probabilidad.* 121
Figura 101 *Vista CAS.* 121
Figura 102 *Vista de creación de libros en GeoGebra* 122
Figura 103 *Vista Classroom o GeoGebra Classroom* 122
Figura 104 *Presentación del formulario* 123
Figura 105 *Pregunta y resultado del nivel educativo* 123
Figura 106 *Pregunta y respuesta sobre dispositivos electrónicos.* 124
Figura 107 *Pregunta y respuesta sobre si GeoGebra requiere internet* 124
Figura 108 *Pregunta y respuesta sobre el interés para conocer su utilidad* 124
Figura 109 *Pregunta y respuesta de profesores sobre aportes del software a la enseñanza* 125
Figura 110 *Pregunta y respuesta sobre interés por la capacitación* 125

Índice de Tablas

Tabla 1 Problemáticas y potencialidades 18
Tabla 2 Organización de las secciones del módulo en GeoGebra 50
Tabla 3 Criterios de evaluación para profesores 96

Introducción

En el presente documento se expone el trabajo de grado para optar por el título de Magister en Docencia de las Matemáticas, modalidad profundización de la Universidad Pedagógica Nacional.

Este trabajo describe una propuesta de módulo que se pretende implementar con los profesores de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania de Paraguay, a través de capacitaciones utilizando GeoGebra. El objetivo principal es desarrollar un módulo de aprendizaje que permita a los profesores familiarizarse con las diversas herramientas que ofrece GeoGebra. A través de este módulo de aprendizaje, se busca no solo mejorar las competencias tecnológicas de los profesores, sino también enriquecer sus prácticas pedagógicas, proporcionando herramientas que los conduzcan a desarrollar actividades con tecnología en el aula que generen una clase de matemáticas dinámica y significativa.

Se espera que, al finalizar el desarrollo del módulo de aprendizaje, los profesores se sientan capacitados para implementar GeoGebra en sus clases y así potenciar el aprendizaje de sus estudiantes.

Este documento está organizado en cinco capítulos así: Justificación, Marco de Referencia, Metodología, Diseño y Evaluación del Módulo y Conclusiones.

En el primer capítulo, se presenta la inquietud pedagógica en el cual se expone la motivación de la propuesta, la revisión de los antecedentes, el objetivo general y los objetivos específicos.

En el segundo capítulo, se presenta el marco de referencia conformado por los siguientes elementos: i) GeoGebra: En este apartado se exponen las características del software, sus beneficios y las distintas vistas que lo conforman. ii) Características del objeto matemático función: en este apartado se describen aspectos como las propiedades, transformaciones, tipos, operaciones y composición del objeto matemático función, que se utiliza en los ejemplos del módulo. iii) Aquí se da a conocer el TPACK, las siete dimensiones que la configuran y las decisiones tomadas alrededor de esta propuesta dado que se optó por el conocimiento tecnológico del contenido (TCK).

En el tercer capítulo, se describe el diseño metodológico. Se expone el enfoque investigativo, la estrategia investigativa implementada y la descripción de la población a la cual va dirigido el módulo.

En el cuarto capítulo, en el primer punto se presenta la descripción del módulo de aprendizaje diseñado disponible en https://www.geogebra.org/u/eveliaynilsa17 , el cual está dividido en cinco secciones, además se presenta la estructura cada sección. En el segundo punto se expone la evaluación a los usuarios sobre los contenidos del módulo de aprendizaje.

Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones de la propuesta, en relación con los objetivos y las experiencias adquiridas de las autoras, tanto de índole conceptual como personal.

1. Justificación

En este apartado se presenta la inquietud pedagógica que motiva el trabajo de grado, destacando la experiencia de las autoras durante las visitas guiadas a las clases de matemáticas, también que los cursos de capacitación en TIC ofrecidos por el Ministerio de Educación y Ciencias son limitados. Además, se detallan los antecedentes que sustentan el trabajo de grado, los cuales provienen de tesis anteriores. Finalmente, este apartado culmina con la presentación de los objetivos, tanto generales como específicos.

1.1. Inquietud Pedagógica

En las últimas décadas, la tecnología ha avanzado de manera acelerada en todo el mundo, lo que ha llevado a que muchos países propongan y desarrollen proyectos educativos innovadores. En el año 1994 la Reforma Educativa paraguaya incluyó en el currículo una disciplina denominada Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Bajo esta reforma, se han implementado iniciativas como *Paraguay Educa y Juntos por la Educación*, que buscan fortalecer las competencias digitales de los profesores y enseñar habilidades para la vida, (Mora, 2019).

La Reforma Educativa en Paraguay incluyó Las TIC en cada ciclo iniciando con la Educación Escolar Básica (EEB), desde el primer ciclo y avanzando gradualmente hasta el tercer ciclo en 2001. En el año 2002, como parte del *Proyecto Reforma Joven*, la reforma continuó con la Educación Media del Bachillerato, implementándose de manera escalonada, desde el primer curso hasta el tercer curso.

En el marco de esta Reforma, se plantea el *Plan Nacional de Educación 2024* y el *Plan Nacional 2030 de la Transformación Educativa*. A través del *Programa de Mejoramiento de la Calidad Educativa* entre los años 2015 y 2018 se empezó a impulsar el equipamiento de instituciones educativas con herramientas tecnológicas. Es importante destacar que estos planes buscan introducir cambios significativos para mejorar la práctica pedagógica de los profesores. Estos cambios se implementan a través de la búsqueda de estrategias colaborativas entre colegas y mediante capacitaciones que abordan temas relevantes en beneficio de la labor de los profesores de matemáticas. Las capacitaciones las desarrollan los Institutos de Formación Docente y las Supervisiones Educativas, la función de esta última es acompañar la labor del profesor.

Las autoras de este trabajo de grado se desempeñan como técnicas docentes pedagógicas, en Supervisiones Educativas. Las técnicas docentes pedagógicas son funcionarias docentes administrativas, que entre otras funciones tiene “acompañar y contribuir al desarrollo eficaz de la enseñanza y aprendizaje”, “capacitar a docentes para la implementación del currículo a nivel nacional” (Ministerio de Educación y Ciencias [MEC], 2007). En ese marco, en 2023 realizaron observaciones de clases de matemáticas donde se corroboró la ausencia del uso de herramientas digitales como material de apoyo para el desarrollo de sus clases, encontrando que cuentan con herramientas digitales como notebook, Smartphone, entre otras.

Adicionalmente, se realizó una encuesta a los profesores de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania(Paraguay), quienes han sido parte de las observaciones; la encuesta fue hecha el 27 de noviembre de 2023, en la que participaron 33 profesores. Esta encuesta se llevó a cabo a través de un formulario de Google con el objetivo de conocer los intereses de los profesores de matemáticas en el uso del software GeoGebra como recurso de apoyo. Los resultados mostraron que, en las zonas de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania, un 93.8% de los profesores considera que GeoGebra puede hacer más efectiva la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, el 100% de los encuestados está interesado en conocer los beneficios del software. La totalidad de los profesores manifestó estar abiertos a recibir capacitaciones sobre la utilidad de GeoGebra como herramienta de apoyo en el aula. Los resultados de esta encuesta se pueden encontrar en el Anexo C.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Paraguaya ha habilitado cursos para la formación de profesores en el uso de la tecnología en el aula. Sin embargo, estos cursos enfrentan limitaciones, como la poca cantidad de cupos disponibles y el enfoque genérico del uso de las TIC, que se centran en herramientas como Office 365, Classroom y Jamboard, pero no abordan específicamente el uso de la TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con Córdoba y Ardila (2016), GeoGebra es un software que contribuye al desarrollo de habilidades como el diseño, la representación y la resolución de problemas que requieren análisis y relaciones entre las partes. Según los autores, GeoGebra es especialmente adecuado para que los profesores aprendan a desarrollar tareas en diversas disciplinas matemáticas, ya que ofrece una amplia gama de recursos accesibles.

Santos Trigo (2009) menciona que es relevante establecer una agenda de actualización de los maestros en servicio, sugiriendo que un plan de capacitación los estará motivando a mejorar la enseñanza, en este caso de matemática. Con base en estos antecedentes se ha considerado propicio y necesario desarrollar capacitaciones a profesores de matemáticas en servicio, con el fin de fortalecer sus competencias en la utilización de GeoGebra; en ese sentido, se hace la apuesta por la formación continua de los profesores buscando innovación y transformación de la enseñanza las matemáticas.

En la educación media del bachillerato de Paraguay se trabaja la variación, específicamente en el tratamiento de funciones. En el primer curso del nivel medio se inicia con la unidad temática función y tipos de funciones, lo cual se profundiza en el segundo y tercer curso respectivamente. Por tanto, se considera apropiado que las herramientas de GeoGebra sean ejemplificados con algunos elementos relacionados con el objeto matemático función. Por lo anterior, se propone diseñar un módulo de aprendizaje, dirigido a profesores en servicio, de modo que conozcan y utilicen diferentes herramientas de GeoGebra. De manera que los profesores puedan implementar como recurso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este caso específico, se realiza el trabajo usando como pretexto las funciones, algunas características y propiedades relacionadas con este objeto matemático.

1.2. Antecedentes

En este apartado, se ofrece una breve descripción de investigaciones que son relevantes para la propuesta de este trabajo de grado. En primer lugar, se mencionan dos estudios que abordan elementos conceptuales relacionados con la clasificación de recursos tecnológicos utilizados en la enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, se hace referencia a dos investigaciones que se centran en la formación continua de los profesores en ejercicio. Se presentan cuatro documentos (tres de Colombia y uno internacional) seleccionados de un total de doce encontrados en diferentes repositorios. Estos documentos, que corresponden a tesis de grado, que analizan la relación entre el uso de GeoGebra y el acceso a cursos de capacitación para profesores de matemáticas.

En primer lugar, en la tesis de grado de Arévalo y Cáceres (2022), se abordan las distintas funcionalidades de GeoGebra y se presenta la evolución en el uso adecuado de GeoGebra de los profesores Brallan y Joseph desde que iniciaron su formación como estudiantes hasta su práctica. Uno de los temas centrales de la investigación es cómo las herramientas que ofrece GeoGebra han enriquecido su experiencia profesional en la enseñanza de matemáticas.

Los autores destacan las funcionalidades de GeoGebra como un medio de interacción, describiéndolo como una pizarra interactiva que permite a los usuarios dibujar, construir y experimentar mediante las diferentes herramientas preestablecidas y las indicaciones que aparecen en pantalla. Gracias a la práctica y al aprendizaje de diversas construcciones con GeoGebra durante su formación, enfatizan la importancia de realizar procedimientos de exploración y visualización, señalando cómo el software facilita la interacción a través de funciones como el arrastre y las vistas personalizables.

Comparten sus experiencias de manera que, a partir de lo que han realizado, lograron identificar características y propiedades de objetos con facilidad, incluso sin la supervisión directa del profesor. Tal como menciona Jiménez (2018), ellos mismos debían resolver las actividades, lo que cual permitió trabajar y profundizar en el aprendizaje de GeoGebra de forma autónoma.

En segundo lugar, Quiroga y Jaimes (2020), presentan cómo el uso de GeoGebra puede incidir en las interacciones durante la sesión de clase entre estudiantes y profesor.

Los autores diseñaron tareas que se desarrollaron en cuatro sesiones con estudiantes de grado décimo y once, para trabajar resolución de problemas mediados por GeoGebra. Las interacciones directas de los estudiantes con el recurso GeoGebra facilitaron la conexión con los objetos matemáticos tales como función, derivadas, pendiente de una recta y pendiente de una curva. Dado que los recursos fueron diseñados para fomentar estas relaciones. Además, para promover procesos de cambio y variación, característicos del pensamiento variacional, es crucial considerar ciertos aspectos como la modelación de situaciones problema, verificación de propiedades, representaciones, entre otros. Durante las clases que se utilizaron recursos de GeoGebra a fin de vivenciar y explorar los aspectos mencionados más adelante.

En tercer lugar, Caicedo (2017), mediante su trabajo de grado, propone la capacitación a profesores como parte de su formación continua.

La autora, frente al rol del maestro y la tecnología, describe cómo una profesora asumió el papel de facilitadora en el proceso de enseñanza. Esto implicó un cambio de su rol como experta en contenidos, a un rol enfocado en facilitar el aprendizaje, lo que requirió el diseño de experiencias educativas para sus estudiantes, fomentó la interacción entre ellos, promovió el autoestudio y estimuló su motivación.

El estudio de Caicedo (2017), permitió reconocer que la profesora a la que se le analizó su práctica facilitó experiencias colaborativas y mantuvo una constante explicación, lo que contribuyó a fortalecer el aprendizaje de cada estudiante. La metodología adoptada combinó elementos de la pedagogía tradicional con enfoques de aprendizaje significativo, logrando así los objetivos de enseñanza y aprendizaje. Se reconoció el potencial de los estudiantes y se valoraron las actividades planificadas para asegurar un proceso educativo exitoso, integrando el uso de TIC.

En esta investigación, los entornos tecnológicos se implementaron a través del uso de tabletas, que aportaron un valor añadido a la transformación de la práctica educativa. Se observó una mayor fluidez en el desarrollo de las clases diseñadas para cada intervención, y el agrado de los estudiantes se reflejó en los diarios de campo que escribieron al finalizar cada clase. Esto generó una satisfacción tanto personal como profesional para la profesora tras diseñar las intervenciones.

En cuarto lugar, Cisneros (2022), usa el modelo TPACK para proponer procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas con GeoGebra.

El investigador aborda la integración de los contenidos, pedagógicos y tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas. La investigación se fundamenta en el modelo pedagógico del conocimiento del profesor mencionado más arriba, la cual ofrece a los profesores una nueva perspectiva sobre la educación al incorporar tecnologías.

Tras realizar una encuesta a los profesores sobre su interés en incorporar herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, se llevó a cabo una capacitación para 11 profesores en el marco del modelo pedagógico del profesor, TPACK. Esta formación se centró en un enfoque pedagógico orientado a la modelación y graficación, una rama de la matemática educativa, e incluyó la implementación de GeoGebra como herramienta.

Al finalizar la capacitación, se observó un cambio significativo en la percepción de los profesores respecto a la utilización de recursos tecnológicos en su práctica educativa. Además, los profesores adquirieron habilidades y conocimientos en el ámbito de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicamente en el uso de software matemático, lo que les permitió abordar los contenidos desde una nueva perspectiva didáctica respaldada por teorías educativas y el modelo pedagógico del profesor, TPACK.

Después de revisar las investigaciones referenciadas, se evidencia que los dos primeros documentos ofrecen información sobre diversas herramientas y usos de GeoGebra en la práctica del profesor. Por otro lado, los dos últimos documentos se centran en la incorporación de las TIC en las clases de matemáticas, a través de capacitaciones dirigidas a los profesores. Basados en las investigaciones se concluye que, estas coinciden en que la inclusión de las TIC y específicamente un software GeoGebra, impacta positivamente en la enseñanza teniendo en cuenta que es un apoyo para el profesor de matemática. Entre tanto el presente trabajo de grado se fundamenta en los documentos mencionados y tiene como objetivo diseñar un módulo que enseñe a otros educadores las herramientas y funcionalidades de GeoGebra para utilizarlo en las clases de matemáticas. Al capacitar a los profesores en el uso de GeoGebra, se les facilitará la inclusión de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en sus clases de matemáticas. Además, el módulo diseñado también busca enseñar a los profesores a crear sus propios recursos, que podrán utilizar posteriormente con sus estudiantes.

Tabla 1

Problemáticas y potencialidades

AUTOR/ES	PROBLEMÁTICA	POTENCIALIDADES RECONOCIDAS
Arévalo y Cáceres (2022)	Reflexionaron acerca de sus experiencias como estudiantes de Licenciatura y luego como profesores, analizando las distintas situaciones que se dieron en el aula.	Buscan comprender cómo las herramientas digitales contribuyen al proceso de aprendizaje y qué conocimientos se transmiten y adquieren, reconociendo que GeoGebra no solo promueve saberes relacionados con las matemáticas, sino también en el ámbito personal.
Quiroga y Jaimes (2020)	Identifican que los contenidos asociados al pensamiento variacional se limitaron a procedimientos algorítmicos, sin dar lugar a procesos de modelación ni involucrar situaciones cercanas al contexto de los estudiantes.	Generan tareas basadas en problemas contextualizados que promueven el cambio y la variación, mediadas por recursos de GeoGebra. Se determinan las ventajas que representan cada recurso para resolver las tareas planteadas y la pertinencia de cada uno.
Caicedo (2017)	Reflejó la falta de inclusión de TIC como material de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje.	Con la inclusión de TIC como herramientas de apoyo a las clases, se espera que se refleje un mayor entusiasmo y participación de los estudiantes, lo cual se tradujo en un mejor rendimiento académico.
Cisneros (2022)	Se observó un bajo rendimiento de los estudiantes en pruebas internacionales.	Se propone una innovación en la metodología de enseñanza de los profesores, apoyada en el modelo TPACK, para encaminar procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con GeoGebra.

Nota: Problemas y potencialidades encontradas en antecedentes. Elaboración propia.

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar un módulo en GeoGebra que le brinde herramientas al profesor de matemáticas para estructurar recursos en GeoGebra, que pueda implementar con sus estudiantes del nivel medio de Paraguay.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Determinar las diferentes herramientas de GeoGebra que se incluirán en el módulo, teniendo en cuenta su potencial para generar recursos que los profesores puedan usar con sus estudiantes.
- Determinar características de objetos matemáticos: propiedades de la función, tipos de funciones para ejemplificar las herramientas de GeoGebra en el módulo.
- Diseñar secciones del módulo para que los profesores generen sus propios recursos.

2. Marco de Referencia

A continuación, se presenta el marco de referencia dividido en tres sesiones: GeoGebra, su fundador, las perspectivas, las vistas, herramientas y finalidades. Respecto a las características del objeto matemático función se define, también se mencionan las propiedades, transformaciones, tipos de funciones, las cuatro operaciones con funciones y la composición de funciones. En relación al modelo pedagógico del conocimiento del profesor, TPACK se define y se mencionan las siete dimensiones, con la aclaración de que para este trabajo de grado se trabaja con la dimensión del conocimiento tecnológico del contenido.

2.1. GeoGebra

La competencia matemática del profesor se relaciona con la capacidad de emplear diversas habilidades tecnológicas que se refieren al razonamiento matemático, con el fin de abordar situaciones del entorno del estudiante. Con esto se busca centrase en las capacidades, habilidades y destrezas necesarias para llevar a cabo procesos como el pensamiento crítico, el razonamiento, la argumentación, la modelación y la resolución de problemas, donde son fundamentales los conocimientos matemáticos, las operaciones, el lenguaje simbólico y las herramientas tecnológicas (García, 2014, 2018; OCDE, 2013, citados en Vaillant et al, 2020).

La incorporación de las TIC en la educación presenta numerosos beneficios, ya que proporcionan recursos que se ajustan a la realidad contemporánea. No obstante, como profesores, es importante reconocer que cualquier transformación requiere tiempo y se realiza de manera gradual. Según lo señalado en el artículo de Santos - Trigo (2009), el objetivo de las TIC es respaldar la enseñanza, es decir, complementar y facilitar el trabajo del profesor de matemáticas. Estas herramientas tecnológicas están diseñadas para hacer que la labor del profesor sea más accesible y eficaz.

Si bien es cierto que hay otros programas disponibles para la enseñanza, GeoGebra se distingue por su amplia variedad de opciones que trascienden la simple tarea de dibujar o construir. Este software, en realidad, proporciona una diversidad de herramientas que permiten no solo crear representaciones visuales, sino también formular diferentes tipos de tareas y representaciones.

Figura 1

Logo de GeoGebra.

GeoGebra

Nota: Captura de pantalla Logo de GeoGebra. Recuperado de *www.geogebra.org.com*

Como lo menciona Arteaga et al (2019, p. 104) el programa “GeoGebra fue desarrollado por Markus Hohenwarter como parte de su tesis de Maestría en Educación Matemática, presentada en 2002 en la Universidad de Salzburgo, Austria”.

Hohenwarter buscaba proporcionar a los profesores más herramientas además de la geometría dinámica en un solo software, con un enfoque específico al incluir el cálculo simbólico. Esto se debía a que la mayoría de los programas de cálculo simbólico presentaban dificultades de uso. Por lo tanto, aprovechó la interfaz más sencilla y accesible de los softwares de geometría dinámica para desarrollar GeoGebra, un software que incluía la geometría dinámica y el cálculo simbólico.

Como mencionan Arteaga et al. (2019), GeoGebra es un software libre que se ha popularizado a nivel mundial. Muchos profesores, desarrolladores e investigadores han participado en la traducción y mejora de GeoGebra, añadiendo nuevas funciones y diseñando material didáctico para su uso en las clases de matemáticas. Actualmente, existe el Instituto

GeoGebra Internacional, que cuenta con institutos locales en varios países, donde interactúan personas interesadas en el desarrollo y uso de GeoGebra. Su creador, Hohenwarter (2014, citado en Arteaga et al., 2019), conceptualizó GeoGebra como “un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo” (p. 104).

GeoGebra ofrece tres perspectivas distintas para cada objeto matemático: una vista gráfica, una vista numérica y una vista algebraica, además de una hoja de cálculo, las cuales pueden ser vistas por separado en el anexo B. Esta diversidad permite observar los objetos matemáticos a través de tres representaciones diferentes: gráfica (como puntos y gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos y ecuaciones) y en celdas de una hoja de cálculo. Cada representación está vinculada dinámicamente a las demás, de modo que cualquier cambio realizado en una de ellas se refleja automáticamente en las otras, sin importar cuál fue la original (Arteaga et al., 2019)

Existen dos versiones de GeoGebra, el descargable para dispositivos Android, iOS, Windows y macOS, y una versión que se usa en línea. A continuación, se describe cada una de las vistas de GeoGebra, tal como propone Arteaga et al. (2019)

Vista algebraica (descargable o Suite Calculadora) constituida por coordenadas de puntos, ecuaciones, ángulos, deslizadores, etc. En la vista algebraica se muestran las representaciones algebraicas y numéricas de los objetos representados en las otras vistas del software.

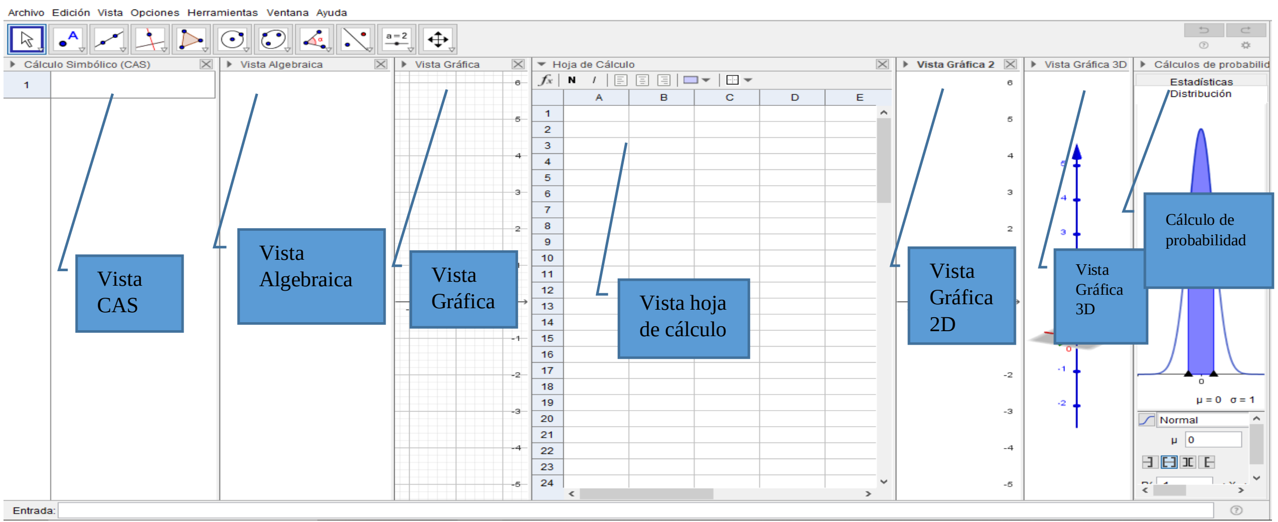
Celda de *hojas de cálculo*.

La *vista gráfica* constituidos por puntos, gráficos de funciones.

La versión más actual del programa es la *seis*, la cual ofrece las siguientes vistas que se vinculan dinámicamente:

Figura 2

Vistas de GeoGebra.



Nota: Captura de pantalla de las diferentes vistas de GeoGebra. Elaboración propia.

Vista gráfica 2D calculadora Geometría: En esta vista se pueden realizar construcciones geométricas utilizando puntos, rectas, segmentos, polígonos, cónicas, etc. También se pueden realizar operaciones tales como intersección entre objetos, traslaciones, rotaciones, etc. Además, se pueden graficar funciones, curvas expresadas en forma implícita, regiones planas definidas mediante desigualdades, etc.

Vista gráfica 3D: En esta vista se pueden representar, además de los objetos mencionados para la vista gráfica 2D, planos, esferas, conos, poliedros, funciones de dos variables.

Vista de Probabilidades y Estadística: Esta vista contiene representaciones de diversas funciones de distribución de probabilidad y permite calcular la probabilidad de las mismas en un determinado intervalo. También ofrece una calculadora que permite realizar test estadísticos.

Vista CAS (Cálculo Simbólico): Permite realizar cálculos en forma simbólica (derivadas, integrales, sistemas de ecuaciones, cálculo matricial, etc.).

GeoGebra dispone de un manual de ayuda creado por Markus Hohenwarter y Judith Hohenwarter, el manual proporciona instrucciones detalladas para su uso y está disponible en el sitio web: https://geogebra.github.io/docs/manual/es/.

GeoGebra representa una revolución en la educación matemática, ya que proporciona varios recursos necesarios para trabajar con diferentes bloques de contenido. Esto elimina la necesidad de utilizar algunos programas de geometría, cálculo simbólico, hojas de cálculo o estadística de forma aislada, ya que todo está integrado en GeoGebra.

En el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas, se ha reconocido durante décadas el valor de utilizar softwares matemáticos debido a las claras ventajas pedagógicas en los cuales se han destacado características educativas de los softwares matemáticos. Como su gran capacidad de almacenamiento, la habilidad para simular fenómenos naturales difíciles de observar en la realidad, la interactividad con el usuario y la posibilidad de implementar un proceso de aprendizaje y evaluación individualizada, entre muchas otras aplicaciones educativas que estos programas ofrecen (López et al., 2005, citados en Córdoba et al., 2015).

Un software como GeoGebra permite el diseño de tareas y el desarrollo de actividades en las que los estudiantes pueden explorar para determinar características de los objetos matemáticos y tomar decisiones, reflexionar, comprobar, conjeturar, razonar.

Entre las ventajas de GeoGebra tenemos: Es un software libre, por lo tanto, su descarga es gratuita. Puede ser trabajado en línea o no (versión descargable). No solo permite trabajar contenidos geométricos, sino que permite relacionar las vistas gráficas con el álgebra. Tiene herramientas para trabajar análisis funcional, estadística, calculo. La flexibilidad y variedad de herramientas y funciones de GeoGebra dan la posibilidad de proponer actividades de diferente tipo, de acuerdo con la población a quien va dirigida y los objetivos de la clase.

Herramientas y funcionalidades de GeoGebra

GeoGebra ofrece *Aplicaciones GeoGebra* y *Recursos GeoGebra*, todos accesibles desde el *sitio web de GeoGebra (www.geogebra.org).*

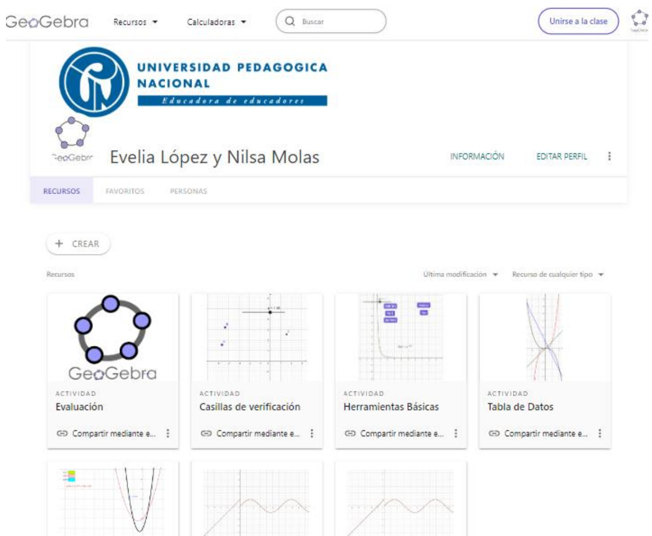
Reestructurar para claridad: 'El sitio web de GeoGebra cuenta con una plataforma donde se publican recursos diseñados por institutos, junto a tutoriales para el uso de las herramientas, aplicaciones en línea y actividades para estudiantes. Este está organizado por líneas matemáticas (geometría, algebra, calculo, trigonometría, estadística). Los recursos se encuentran alojados en el sitio web, son *Actividades* en línea y *Libros*, y pueden ser compartidos en *GeoGebra Classroom* y *Google Classroom.*

Creación de libros en GeoGebra

Para la creación de libros en GeoGebra, primero se debe realizar el registro en la página de GeoGebra con una cuenta de Google. Cuando se haya realizado el registro hay que crear el perfil en GeoGebra. Luego de crear la cuenta e ingresar al sitio web de *GeoGebra* por primera vez se podrá completar el perfil agregando información personal. Si el usuario lo desea puede agregar su nombre, que uso hace de *GeoGebra*, género, año de nacimiento, ubicación e idioma preferido. Una vez que se tenga el perfil en GeoGebra aparece la opción crear, al dar clic en crear se visualizan otras opciones como: carpeta, actividad, libro y subir. Los libros permiten organizar actividades y son útiles para el trabajo colaborativo.

Figura 3

Libro de GeoGebra Evelia y Nilsa.



Nota: Captura de pantalla de la página del Libro de GeoGebra Evelia López y Nilsa Molas. Elaboración propia.

También es importante mencionar que el módulo de aprendizaje mencionado por la

En relación con el uso de GeoGebra en la educación, Mesa (1996) aborda una experiencia en el aula después de la introducción de una calculadora gráfica. La autora destaca el contraste entre las expectativas del profesor al decidir incorporar este nuevo material didáctico y los hechos que realmente ocurren en el aula.

Según Mesa (1996), GeoGebra es una herramienta apropiada para que los profesores aprendan a desarrollar tareas en matemáticas, ya que proporciona una variedad de recursos que están disponibles para los docentes, incluyendo la calculadora gráfica. La autora señala que esta herramienta permite a los profesores contar con un material didáctico adicional para complementar la enseñanza de las matemáticas.

Además de la calculadora gráfica, GeoGebra ofrece otras herramientas, como la visualización de datos y la resolución de ecuaciones, que pueden enriquecer la enseñanza de las matemáticas. Los profesores pueden utilizar estas herramientas para diseñar tareas desafiantes y significativas que promuevan el pensamiento crítico y la resolución de problemas. GeoGebra es fácil de utilizar para los estudiantes, lo que implica que el profesor ya no es el único poseedor de la verdad en el aula. Esta accesibilidad y facilidad de uso fomenta la participación activa de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La calculadora gráfica permite a los estudiantes interactuar directamente con los conceptos matemáticos, explorar diferentes representaciones y experimentar con ellos. Esto les brinda la oportunidad de construir su propio conocimiento y desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Sin embargo, es responsabilidad del profesor garantizar que los estudiantes adquieran los conceptos matemáticos necesarios, tengan nociones de representación simbólica y utilicen adecuadamente el recurso tecnológico, en este caso, la calculadora gráfica. El profesor debe desempeñar un papel activo en la enseñanza y guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, asegurándose de que no se salten pasos importantes y comprendan plenamente los fundamentos teóricos detrás de las representaciones gráficas.

Es necesario que el profesor proporcione una estructura y orientaciones adecuadas, estableciendo los objetivos de aprendizaje claros y diseñando actividades que integren el uso de la calculadora gráfica de manera efectiva. Esto implica establecer momentos de reflexión y discusión en el aula, donde los estudiantes compartan sus resultados, formulen preguntas y analicen las implicaciones de las representaciones gráficas en relación con los conceptos subyacentes.

2.1.1. Módulo y Recurso

Teniendo en cuenta los elementos mencionados en los párrafos anteriores y la estructura del diseño del trabajo se procedió a conceptualizar módulo, sección y recurso:

Según la Real Academia Española, (2023) módulo es definido como unidad educativa que forma parte de un programa de enseñanza.

Así también González (2015) precisa que, módulo es una unidad de aprendizaje de contenido ejecutor y dinámico. Tiene carácter interdisciplinar y sistémico en el que se integran docencia, investigación y servicio. Su estructuración es con base a las competencias profesionales como núcleo central, mientras que, las secciones en las que se divide el módulo, se pueden definir como subgrupos que forman parte del módulo.

De acuerdo a la Universitas Muhammadiyah Malang, (2021) un módulo de aprendizaje es un conjunto estructurado de recursos e instrucciones que permite a los estudiantes adquirir conocimientos o habilidades de manera autónoma. Actúa como una guía tanto para educadores como para alumnos, facilitando el estudio independiente y el dominio de contenidos específicos.

Universitas Muhammadiyah Malang, (2021) cuenta con características propias, tales como:

- Instrucción propia: cuando el profesor/usuario del módulo puede realizar las tareas/actividades un módulo de aprendizaje de forma independiente, con o sin orientación del profesor.
- Accesible: la practicidad del módulo lo vuelve sencillo y de fácil acceso para el aprendizaje. Los medios de aprendizajes son asequibles para entender y hacer uso de ello, lo cual facilita al estudiante para desarrollar el módulo de aprendizaje.
- Adaptativo: Los módulos de aprendizaje requieren tener características adaptativas para adaptarse a los tiempos. Es decir, demanda actualización constante para que esté renovado siempre.

- Coherencia El siguiente carácter de entender el módulo de aprendizaje en su conjunto es la consistencia. La consistencia que se quiere decir aquí es desde el punto de vista técnico.

- Secuencial: los pasos a seguir son claros y se vuelven complejos gradualmente, para fomentar las habilidades a través de dificultades.

- Autónomo: el usuario/profesor tiene acceso al módulo y puede comenzar a trabajar sin la intervención del tutor e ir avanzando siguiendo los pasos que contempla la instrucción del módulo.

- Integral: el módulo contiene temas relevantes del currículo, lo que da ventaja porque es significativo para fomentar la competencia en el tema abordado.

- Cohesivo: los temas del módulo están bien organizados, lo cual facilita el manejo al estudiante.

Funciones del módulo de aprendizaje: para el caso de este módulo dirigido a profesores en servicio, se ha considerado tres funciones:

- Material Didáctico Independiente: El módulo de aprendizaje se convierte en un recurso autónomo que permite a los estudiantes aprender sin depender del profesor para explicaciones detalladas. Esto fomenta su creatividad y les ayuda a adquirir conocimientos de manera independiente, aliviando la carga de trabajo de los docentes y permitiéndoles enfocarse en una enseñanza de calidad.
- Herramienta de Evaluación: Además de proporcionar contenido educativo, el módulo sirve como un medio para evaluar el progreso del aprendizaje de los estudiantes. Permite que cada alumno verifique su comprensión y detecte posibles áreas de mejora, facilitando así la intervención oportuna en caso de dificultades.

- Material de Referencia: El módulo también actúa como una fuente de consulta, ya que contiene explicaciones e información adicional relevante. Su contenido de calidad y confiable lo convierte en un recurso útil para estudiantes y profesores en la búsqueda de información complementaria, mejorando así la experiencia de aprendizaje.

La preparación adecuada de un módulo de aprendizaje es clave para que cumpla con estas funciones, promoviendo un aprendizaje más independiente y reduciendo la dependencia de la instrucción directa del profesor.

En cuanto a recurso, la Real Academia Española, (2023) refiere que es un medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende. En ese sentido, para este caso particular, recurso es un medio, un espacio a través del cual los profesores ponen en práctica lo aprendido en el video instructivo donde se les enseña cómo identificar y utilizar las herramientas de GeoGebra.

Agregando a lo anterior los diseñadores de GeoGebra definen los recursos de GeoGebra como materiales didácticos interactivos creados con las aplicaciones matemáticas de la suite *GeoGebra (*www.geogebra.org*)*. Es por esta razón en el presente trabajo y en libro de GeoGebra se mantiene esta denominación de “recurso”, dado que estos aplicativos fueron preparados para que los profesores ejerciten sus habilidades y posteriormente diseñen sus propios recursos.

2.2. Características del Objeto Matemático: Función

De acuerdo con lo expresado por Swokowski, et al., (2009), se define función como una correspondencia entre dos conjuntos D y E, tal que asigna a cada elemento x de D exactamente un elemento y de E.

De esta manera el elemento x de D es el resultado de f. El conjunto D es el dominio de la función. El elemento y de E es el valor de f en x (o la imagen de x bajo f) y se lee "f de x." El rango de f es el subconjunto R de E formado por todos los posibles valores para x en D.

Propiedades de las funciones

En este apartado veremos algunas propiedades de las funciones (En el anexo A se pueden ver algunos ejemplos de estas propiedades).

Funciones pares: La función f es par si para toda x en su dominio $f(x) = f(-x)$.

Funciones impares: Una función f se denomina impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio.

Función uno a uno y sus inversas: Una función f con dominio D y rango I es uno a uno si se cumple que: Si $x \neq y$, x y y pertenecientes a D entonces $f(x) \neq f(y)$ y siempre que $f(a) = f(b)$, $f(a)$ y $f(b)$ pertenecientes a R entonces $a = b$.

Prueba de la recta horizontal: Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal interseca su representación gráfica más de una vez.

Función inversa: La función g es la función inversa de una función f uno a uno con dominio D y rango R, siempre que se cumpla la siguiente condición para toda x de D y toda y de R.

$$y = f(x) \ si \ y \ solo \ si \ x = g(y)$$

F**unciones crecientes y decrecientes**

La función f es creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

La función f es decreciente en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Funciones definidas por partes: Cuando una función se define utilizando diferentes fórmulas o expresiones matemáticas en diferentes intervalos o regiones de su dominio, se le conoce como una función definida por partes. Esto significa que la función no se puede representar mediante una sola fórmula o función, sino que requiere varias fórmulas para describir su comportamiento en todo el dominio. La gráfica de una función definida por partes no será una curva continua, sino que estará compuesta por segmentos o trozos separados, cada uno correspondiente a una de las fórmulas que definen la función en diferentes intervalos o condiciones.

Para representar estas funciones definidas por partes, se utilizan las llamadas "condicionales lógicos". Estas condicionales tienen una estructura que incluye una condición y una consecuencia. La condición especifica el intervalo o rango de valores del dominio en el que se aplica determinada fórmula, mientras que la consecuencia es la expresión matemática que se usa para calcular el valor de la función en ese intervalo.

Transformación de funciones

Desplazamientos verticales: Sea $y = f(x)$, una función y c un número real positivo. $y = f(x) + c$ si sumamos c a la función, $y = f(x) + c$ la gráfica de esta se desplaza hacia arriba c unidades, dado que a la coordenada y de cada punto en la gráfica se le suma el número real positivo c. Si restamos c a la función, $y = f(x) - c$ la gráfica de esta se desplaza hacia abajo c unidades, dado que a la coordenada y de cada punto en la gráfica se le resta el número real positivo c.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$**:** Si tiene $y = f(x)$, para que la gráfica se desplace horizontalmente a la derecha una distancia c, entonces $y = g(x) = f(x - c)$ con $c > 0$. Mientras que $y = h(x) = f(x + c)$ con $c > 0$ la gráfica se desplaza horizontalmente a la izquierda con distancia c. Los desplazamientos horizontales y verticales también se conocen como traslaciones.

Elongación o compresión vertical: Dada la gráfica de $y = f(x)$. La gráfica de f se alarga verticalmente, si se multiplica la función por un factor c, con $c > 1$.

La gráfica de f se comprime verticalmente, si se multiplica la función por un factor c si $0 < c < 1$.

Elongación o compresión horizontal de la gráfica $\boldsymbol{y = f(x)}$: La gráfica de f se comprime horizontalmente si se multiplica la variable por un factor c, con $c > 1$.

La gráfica de f se elonga horizontalmente si se multiplica la variable por un factor c con $0 < c < 1$

Tipos de funciones

Funciones lineales: Llamamos función lineal a las funciones polinómicas de primer grado, es decir, una función cuya representación es una recta. Existen diferentes tipos de funciones lineales:

Función constante: es una función lineal por la cual el rango no cambia sin importar cual miembro del dominio es usado. $f(x_2) = f(x_2)$ para cualquier x_1 y x_2 en el dominio.

Función lineal general: La función lineal se define por la ecuación $f(x) = mx + b$ ó $y = mx + b$ llamada ecuación canónica, en donde m es la pendiente de la recta y b es el intercepto con el eje y.

Funciones cuadráticas: es una función polinómica de segundo grado. Es decir, tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo $a \neq 0$

Esta forma de escribir la función se denomina forma general.

La gráfica de una función cuadrática siempre es una parábola. Las parábolas abren hacia arriba s$i\ a > 0$ o abre hacia abajo $si\ a < 0$.

Además de la orientación, el coeficiente a es la causa de la amplitud de la función: cuanto mayor es $|a|$, más rápido crece (o decrece) la parábola, por lo que es más cerrada.

Funciones con valor absoluto: Es una función que contiene una expresión algebraica dentro de los símbolos de valor absoluto.

El valor absoluto de un número es la distancia del número al punto cero.

La función padre de valor absoluto, escrita como $f\ (\ x\ )\ =\ |\ x\ |$, está definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Funciones exponenciales: la función f definida por $f(x) = a^x$ para todo número real x se denomina función exponencial con base a, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Funciones Logarítmicas: las funciones del tipo $y = log_a x$ llamadas logarítmicas son la inversa de la función exponencial $y = a^x$

Sea a un número real positivo diferente de 1. El logaritmo de x con base a está definido por: $y = log_a x$ si y solo si $x = a^y$para toda $x > 0$ y todo número real y.

Funciones polinomiales: si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, entonces $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $an \neq 0$

Funciones racionales: una función f es una función racional si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f está formado por todos los números reales excepto los ceros del denominador $h(x)$.

Funciones Trigonométricas: se puede interpretar geométricamente funciones trigonométricas de números reales si se utiliza una circunferencia unitaria U, es decir, una circunferencia de radio 1, con centro en el origen O de un plano de coordenadas rectangulares. La circunferencia U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea t un número real tal que $O < t < 2\pi$ y se denota con α el ángulo de la medida t en radianes. En la imagen se observa que $B(x, y)$ es el punto terminal de α y la circunferencia unitaria U y donde z es la longitud del arco de la circunferencia de $A(1,0)$ a $B(x, y)$. Haciendo uso de la fórmula $z = r\alpha$ para la longitud de un arco de circunferencia con, $r = 1$ y $\alpha = t$ se distingue que

$$z = r\alpha = 1(t) = t$$

Por lo tanto, t puede ser considerada como la longitud en radianes del ángulo α o como la longitud del arco de la circunferencia AB en U.

El análisis realizado indica la forma en que se puede asociar, con cada número real t, un punto único $B(x, y)$ en U. Al punto $B(x, y)$ es posible denominarlo punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a t. Las coordenadas (x, y) de B se pueden usar para hallar las seis funciones trigonométricas de t.

$\operatorname{sen} t = y$ $\qquad\qquad \cos t = x$ $\qquad\qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (si\ x \neq 0)$

$\csc t = \frac{1}{y}\ (si\ y \neq 0)$ $\qquad \sec t = \frac{1}{x}\ (si\ x \neq 0)$ $\qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (si\ y \neq 0)$

Se resalta que la función cosecante es la inversa de la función seno, que la función secante es la inversa de la función coseno y la función cotangente es la inversa de la función tangente.

Operaciones con funciones

Las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse varias expresiones.

Se define la operación de funciones de la siguiente manera:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ siempre que } g(x) \neq 0$$

Composición de Funciones

La composición de funciones es el método de utilizar una función como entrada de otra función, lo que da lugar a una nueva función única, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de $f(x)$ el valor de $g[f(x)]$, a esto se le conoce como composición de funciones $(gof)(x) = g[f(x)]$ (se lee f seguida de g).

Se optó por ejemplificar el uso de las herramientas de GeoGebra con aspectos relacionados con la función por dos motivos: el primero, porque es usual encontrar tutoriales para usar GeoGebra para la enseñanza de la Geometría, sin embargo, utilizar las herramientas de GeoGebra como casillas de entrada, casillas de verificación o botones ejemplificado por funciones es poco usual; y segundo, porque la función es un objeto matemático incluido en el currículo de la educación media del Paraguay.

En este sentido, Gómez y Mesa (1998) mencionan que los estándares de currículo y evaluación en matemáticas del NCTM (1991) proponen tener en cuenta cuatro aspectos fundamentales en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Estos aspectos son: la selección de tareas matemáticas valiosas, el manejo del discurso en el salón de clase, la creación de un entorno apropiado para el aprendizaje y el análisis de la enseñanza y el aprendizaje. Los NCTM sostienen que los estudiantes deben desarrollar el pensamiento variacional mediante tareas que lo fomentan en un contexto adecuado. Por lo tanto, al utilizar GeoGebra para ejemplificar estos aspectos en el tratamiento de la función, se busca no solo enriquecer la práctica pedagógica de los profesores, sino también asegurar que su enseñanza sea eficaz y significativa en el área de matemáticas.

Sobre el mismo punto, Fiallo y Parada (2018) presentan al cambio y la variación como núcleo conceptual del cálculo, en ella se requiere identificar y utilizar variables, como cantidades medibles que se modifican cuando las situaciones en que ocurren cambian. Presentan unos tipos de variables a los cuales los estudiantes deberían manifestar algún interés:

- Variación directa o inversa: se da cuando una variable se incrementa (o disminuye) en una razón similar.
- Variación acelerada: se da cuando una variable se incrementa uniformemente, una segunda se incrementa en una razón creciente.
- Variación convergente: se da cuando una variable se incrementa sin límite y la otra se aproxima a un valor límite.
- Variación cíclica: se da cuando una variable se incrementa uniformemente, mientras que la otra se incrementa y tiene una disminución en cierto ciclo que se repite.
- Variación escalonada: se da cuando una variable se incrementa, la otra cambia a saltos.

Según Fiallo y Parada (2018) hay procesos matemáticos a través de los cuales se desarrollan habilidades como resolver problemas, comunicar, representar, proponer, comparar y ejercitar procedimientos, y razonar y demostrar.

En el proceso de comunicar ideas sobre la variación resalta el hecho que los estudiantes intercambian las ideas y plantean críticas reflexivas con los demás y ponen en tela de juicio los argumentos de otros. Así también desarrollan una comunicación más clara y coherente de las comprensiones mediante explicaciones verbales, notaciones y representaciones matemáticas adecuadas para explicar las ideas sobre cambio o variación.

En cuanto a la representación de la variación Moreno (2014, citado en Fiallo y Parada, 2018) menciona que los objetos matemáticos tienen una naturaleza semiótica por lo que se puede entrar en contacto con estos objetos matemáticos mediante algunas de sus representaciones. En este caso, en la cognición matemática los sistemas de representación ya sean aritméticos, geométricos, algebraicos, métricos, gráficos, analíticos, gestuales, etc., desempeñan un papel fundamental de mediación. Sin estos sistemas de representación no sería posible acceder a los objetos matemáticos, pues estos no tienen una existencia independiente de sus representaciones.

Según Moreno (2014, citado en Fiallo y Parada, 2018) los objetos matemáticos no tienen una existencia previa y autónoma, sino que dependen de los sistemas de representación a través de los cuales se les da forma y se les puede acceder. Estos sistemas de representación son los que permiten a los estudiantes interactuar y comprender los conceptos matemáticos.

Una distinción clave que plantea Moreno (2014, citado en Fiallo y Parada, 2018) es que las representaciones dinámicas, como las que se pueden generar con GeoGebra, permiten a los estudiantes pasar a un nuevo nivel de interpretación. A diferencia de las representaciones estáticas, las dinámicas se pueden explorar mediante el movimiento, lo cual abre la puerta a nuevas estrategias de exploración y justificación de problemas matemáticos.

Acerca del proceso de razonar sobre fenómenos de variación Fiallo y Parada (2018) señalan que el razonamiento deductivo es una forma de pensar que surge de la necesidad de asegurar la validez de una afirmación. En el ámbito matemático, la manera de lograr esta validez es a través de la demostración deductiva. Sin embargo, como plantea Polya (1966, citado en Fiallo y Parada, 2018), gran parte de nuestro conocimiento más allá de las matemáticas y la lógica formal consiste en conjeturas que apoyamos mediante un razonamiento plausible.

Desde la didáctica de las matemáticas, se ha propuesto que el objetivo de una demostración no es sólo mostrar la validez de un teorema, sino también explicitar las razones y el razonamiento que sustentan dicha validez. Para que los estudiantes desarrollen habilidades demostrativas, es crucial que primero puedan elaborar conjeturas a través de procesos como la exploración, visualización, experimentación, análisis, descubrimiento, generalización y deducción de relaciones, propiedades y regularidades matemáticas.

El uso de herramientas como GeoGebra fomenta continuamente que los estudiantes formulen conjeturas a partir de sus indagaciones. Cuando se les exige explicar, verificar, justificar o validar esas conclusiones, se estimula el desarrollo de sus habilidades demostrativas, de modo que no sólo conjeturen, sino que también fundamenten y demuestren sus afirmaciones.

Para representar un objeto matemático se debe comprender y para ello hay que conocer. Para Rico (2009) conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, mientras que, las representaciones matemáticas se entienden como todas aquellas herramientas, signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos. Con las herramientas, tablas, fórmulas, signos o gráficos los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.

Al utilizar GeoGebra como recurso, se amplían las posibilidades de representación matemática, ya que esta herramienta combina elementos gráficos y algebraicos de manera interactiva. Con GeoGebra, los profesores podrán explorar visualmente las propiedades de las funciones, manipular parámetros y observar cómo cambian las representaciones gráficas en tiempo real. Esto facilita la comprensión de conceptos clave, como el comportamiento de la función, las operaciones con funciones y las transformaciones de funciones.

Por lo tanto, es necesario que los profesores promuevan el uso adecuado de la tecnología en el aula, fomentando la integración de representaciones simbólicas y gráficas, así como la comprensión de cómo se relacionan entre sí. Esto implica diseñar actividades que permitan a los estudiantes conectar las representaciones simbólicas con las gráficas, utilizando la tecnología

2 .3. TPACK

El modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) fue propuesto por los profesores Punya Mishra y Mattew J. Koehler, de la Universidad Estatal de Míchigan, entre los años 2006 y 2009.

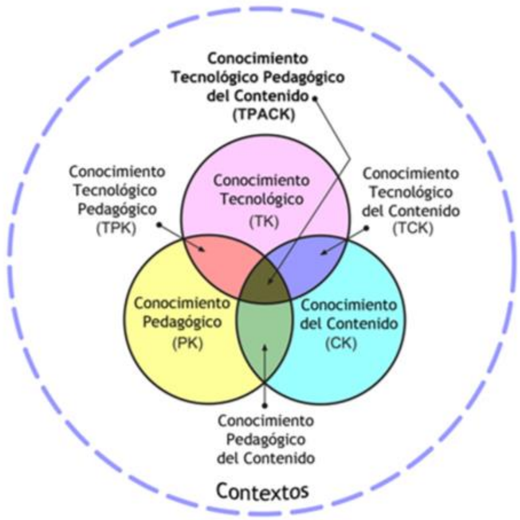
Las nuevas tecnologías han avanzado significativamente y este progreso se refleja en el desarrollo de herramientas tecnológicas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Enseñar matemáticas con tecnología implica más que simplemente dominar las habilidades técnicas; también requiere comprender la dinámica de la interacción entre las herramientas tecnológicas, el contenido matemático y las prácticas pedagógicas (Koehler y Mishra, 2005).

El modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) propuesto por Koehler y Mishra (2007) y analizado en profundidad por Willermark (2017), identifica los diferentes tipos de conocimiento que los profesores deben dominar para integrar efectivamente las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en sus prácticas de enseñanza los cuales son conocimiento disciplinar, conocimiento pedagógico y el conocimiento de las tecnologías educativas.

Este marco conceptual va más allá del simple dominio de habilidades técnicas, al reconocer la compleja interacción entre el conocimiento del contenido disciplinar, el conocimiento pedagógico y el conocimiento tecnológico. Según este modelo, la enseñanza eficaz con tecnología requiere que los profesores logren una integración armónica de estos tres dominios de conocimiento.

Figura 4

Estructura del TPACK



Nota: Tomado de Koehler y Mishra (2009, p.63)

Basado en la en figura 4 el modelo TPACK resulta de la intersección compleja de los tres tipos primarios de conocimiento: Contenido (CK), Pedagógico (PK) y Tecnológico (TK). Estos conocimientos no se tratan de forma aislada, sino que se abordan también en los 4 espacios de intersección que generan sus interrelaciones: Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK), Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) y Conocimiento del Contenido Pedagógico Tecnológico (TPACK o TPCK).

El conocimiento del contenido (CK) es el conocimiento que tienen los profesores sobre la disciplina que se va a aprender o enseñar. Como había mencionado Shulman (1986), este conocimiento incluiría conocimiento de conceptos, teorías, ideas, marcos organizacionales, conocimiento de evidencia y pruebas, así como prácticas y enfoques establecidos para desarrollar dicho conocimiento. El conocimiento y la naturaleza de la investigación difieren mucho entre campos, y los profesores deben comprender los fundamentos del conocimiento más profundo de las disciplinas en las que enseñan. En el caso de la matemática, por ejemplo, esto incluiría el conocimiento de teoremas, postulados y prácticas, y el razonamiento basado en evidencia. A tal razón este conocimiento recomienda que el profesor conozca y domine el contenido a enseñar.

El conocimiento pedagógico (PK) se refiere a la comprensión profunda que poseen los profesores sobre los procesos y métodos de enseñanza y aprendizaje. Esto abarca diversos aspectos tales como: objetivos y valores educativos, comprensión del aprendizaje, estrategias de enseñanza, gestión del aula, planificación y evaluación. El conocimiento pedagógico implica una comprensión profunda de las teorías del aprendizaje cognitivas, sociales y del desarrollo, y cómo aplicarlas de manera práctica en el contexto del aula y la enseñanza (Mishra & Koehler, 2006).

El conocimiento tecnológico (CK) es un conocimiento sobre las diferentes tecnologías, como libros, tiza y pizarra, y tecnologías digitales, esto incluye el conocimiento de los sistemas operativos y el hardware de la computadora, y la capacidad de usar conjuntos estándar de herramientas de software, como procesadores de texto, hojas de cálculo, navegadores y correo electrónico (Mishra & Koehler, 2006).

Conocimiento pedagógico del contenido (PCK): es el conocimiento pedagógico aplicable a la enseñanza del contenido. Este conocimiento incluye saber qué enfoques de enseñanza se ajustan al contenido, y también, saber cómo se pueden organizar los elementos del contenido para una mejor enseñanza (Mishra & Koehler, 2006).

Conocimiento del contenido tecnológico (TCK): es el conocimiento sobre la manera en que la tecnología y el contenido se relacionan recíprocamente. Aunque la tecnología restringe los tipos de representaciones posibles, las nuevas tecnologías a menudo ofrecen representaciones más nuevas y variadas, además mayor flexibilidad en la navegación a través de estas representaciones. Los profesores necesitan saber no solo la disciplina que enseñan, sino también la manera en que la disciplina puede modificarse mediante la aplicación de la tecnología (Mishra & Koehler, 2006, p.1028).

Conocimiento pedagógico tecnológico (TPK): es el conocimiento de la existencia, los componentes y las capacidades de varias tecnologías a medida que se utilizan en la enseñanza y los entornos de aprendizaje y a la inversa, conocer cómo la enseñanza puede cambiar como resultado del uso de tecnologías particulares (Mishra & Koehler, 2006, p. 1028).

El **TPACK** es un nuevo marco de conocimientos del profesor que surge de la interacción e integración entre el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico y el conocimiento tecnológico, es diferente de los conocimientos de estos tres conceptos individualmente. El PACK es:

> la base de la enseñanza efectiva con la tecnología requiere una comprensión de la representación de conceptos usando habilidades tecnológicas y pedagógicas que usan las tecnologías de manera constructiva para enseñar contenidos, saberes sobre qué hace que un concepto sea difícil o fácil para aprender y sobre cómo la tecnología puede ayudar a abordar algunos de los problemas que atraviesan los estudiantes, saberes entorno a los conocimientos previos de los alumnos, teorías de conocimiento, y saberes sobre cómo las tecnologías pueden ser usadas para construir un conocimiento existente para desarrollar nuevas epistemologías o fortalecer otras (Koehler et al., 2015, p.17).

La relación entre la tecnología y el conocimiento de contenidos es fundamental para la educación. Esta relación, conocida como TCK (Technological Content Knowledge), implica comprender cómo la tecnología influye en las prácticas y el conocimiento de una disciplina, y cómo el contenido también puede determinar el uso de ciertas tecnologías. La elección de tecnologías en el aula permite nuevas posibilidades de representación y navegación del conocimiento.

Para ser precisos, los profesores deben dominar no solo el contenido matemático, sino también poseer una profunda comprensión de cómo ese contenido puede transformarse a través del uso de tecnologías específicas como GeoGebra. Deben saber qué tecnologías son más apropiadas para abordar el aprendizaje en sus áreas, y cómo el contenido puede dictar o incluso cambiar la tecnología que se utiliza.

Esta relación entre tecnología y conocimiento de contenidos es bidireccional y debe ser cuidadosamente comprendida por los profesores para desarrollar herramientas tecnológicas adecuadas y aprovechar al máximo las posibilidades que ofrecen en la enseñanza y el aprendizaje. En este trabajo de grado, el foco se centrará en una dimensión de este modelo pedagógico del conocimiento del profesor, específicamente el conocimiento tecnológico del contenido (TCK). Esto es relevante, ya que el conocimiento del contenido por parte del profesor, junto con su capacidad para entender las necesidades tecnológicas específicas para impartir sus clases, es fundamental para una enseñanza más eficiente.

3. Metodología

Considerando los objetivos del presente trabajo de grado, en este capítulo se describen los aspectos metodológicos de la misma. En el primer apartado se presenta el Marco Metodológico; en él se describe los elementos del experimento de enseñanza utilizada como estrategia del trabajo. Así mismo detallan los elementos del experimento de enseñanza tomadas en cuenta para la realización del diseño del módulo.

3.1. Marco Metodológico

A continuación, se presenta la ruta metodológica seguida para el desarrollo del trabajo de grado y que se considera afín a los objetivos de este. Inicialmente se hace una presentación la estrategia investigativa, los instrumentos a través de los cuales se registra las actividades y las fases que se tuvo en cuenta, estas técnicas basadas en Camargo (2021) y Molina et al., (2011). A través de la estrategia de diseño, “*experimento de enseñanza”* se pretende explicar los pasos seguidos para el desarrollo del trabajo de grado y su posterior implementación en Paraguay. Es importante mencionar que la prueba piloto del módulo diseñado en este trabajo de grado no será implementada de manera inmediata, sino al regreso de las autoras a Paraguay.

3.1.1. Estrategia Investigativa

La estrategia investigativa empleada es la de diseño, ya que el eje central del trabajo de grado se enfoca en el "Diseño de tareas o material didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático". En particular, se hará un acercamiento a la estrategia conocida como “*experimento de enseñanza”* dado que se reconoce que en las aulas de los colegios de Paraguay el uso de GeoGebra como recurso es limitado, el objetivo es facilitar a los profesores para que conozcan y utilicen diferentes herramientas para enseñar matemáticas.

Camargo (2021) define las estrategias investigativas de diseño como aquellas en las que los investigadores se preguntan “¿qué pasaría sí?” en relación con un fenómeno específico. Esta estrategia se enfoca en explorar situaciones complejas y socialmente relevantes, analizando los posibles efectos de diseños o intervenciones en el fenómeno de interés. Esto implica la creación de escenarios controlados y diseñados para observar cómo ciertas condiciones o cambios pueden influir en el fenómeno estudiado. Además, refleja un compromiso por comprender las relaciones existentes entre la práctica y los instrumentos, ya sean recursos didácticos o herramientas conceptuales (Molina et al., 2011).

Desde la perspectiva de Cobb y Gravemeijer (2008, citados por Molina et al., 2011), “un experimento de enseñanza debe desarrollarse en tres etapas: i) Diseño, elaboración y preparación del experimento; ii) Implementación; iii) Ejecución del análisis de los datos obtenidos en la etapa de implementación” (p. 79).

Estas etapas están distribuidas tal como de detalla a continuación:

> En la *primera etapa* se tienen en cuenta las siguientes acciones: Definir el problema de investigación, los objetivos con los cuales se pretende lograr la modificación de la enseñanza; construir una trayectoria hipotética de aprendizaje; realizar el diseño de la secuencia de manera justificada y diseñar los instrumentos para la recolección de los datos.
>
> En la *segunda etapa* se presentan tres momentos:
>
> Antes de cada sesión de clase se cuenta con información previa del trabajo que se realiza en el aula, se identifican los objetivos e instrucciones de la sesión de clase, se elaboran hipótesis sobre los posibles resultados que se puedan obtener en el desarrollo de la clase.

> En cada intervención se recoge información de lo que ocurre en las sesiones de clase, incluyendo aquellas acciones o decisiones que se toman durante las intervenciones. Analizar los datos recogidos en la intervención.
>
> Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.
>
> Después de cada intervención se hace analiza los datos recogidos en la intervención, luego se revisa, y en su caso se reformula, las hipótesis/conjeturas de investigación.
>
> En la *tercera etapa* se recopila la información y se organizan las evidencias recogidas en la etapa de experimentación. Se selecciona la información que serán los datos para el análisis de la investigación. Se analizan el conjunto de datos, lo que implica: a) distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. b) identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador – profesor que contribuyen a dichos cambios. (Molina et al, 2011, p. 80)

En particular, se implementa la estrategia del experimento de enseñanza, ya que este método busca interpretar cómo la implementación de GeoGebra como material de apoyo podría afectar la enseñanza de los profesores. Se aclara que es un acercamiento al experimento de enseñanza porque no se cumplen todas las etapas citadas más arriba, dado que solo se realizó el diseño y no la experimentación; esto, debido al limitado tiempo para elaborar este trabajo de grado y la población a la cual va dirigida (profesores de Paraguay).

Este trabajo se desarrolló en las siguientes etapas:

Primera etapa

1) Se definió la inquietud pedagógica: basados en las vivencias de las responsables del trabajo, lo cual queda plasmado en el apartado 1.1 de la Justificación.
2) Establecer objetivos: tanto el objetivo general como los objetivos específicos quedaron definidos y se encuentran en el apartado 1.3 de la Justificación.
3) Organizar la trayectoria hipotética: para este trabajo fueron, definir el objeto matemático, definir las herramientas de GeoGebra a enseñar a los profesores, definir los recursos, todo esto se presentó en el Marco de Referencia y la descripción y análisis a priori del módulo.
4) Diseñar el módulo: definir los contenidos del módulo, teniendo en cuenta las características y funciones del módulo de aprendizaje. Evaluación a los usuarios sobre los contenidos del módulo, los cuales están alojados en el apartado 4.1 y 4.2 del capítulo Descripción y análisis a priori del módulo.

Segunda etapa

En este proceso del *experimento de enseñanza* se hizo un análisis de las posibles dificultades que podrían presentarse al implementar el módulo, errores y recomendaciones; estos elementos forman parte de la evaluación a priori del trabajo los cuales estarán en el apartado 4.2 del capítulo de descripción y análisis a priori del módulo.

Respecto al módulo quedó configurado en cinco secciones y estas a su vez quedaron ordenados de la siguiente manera y cada uno con el propósito para el cual fue creado:

Tabla 2

Organización de las secciones del módulo en GeoGebra

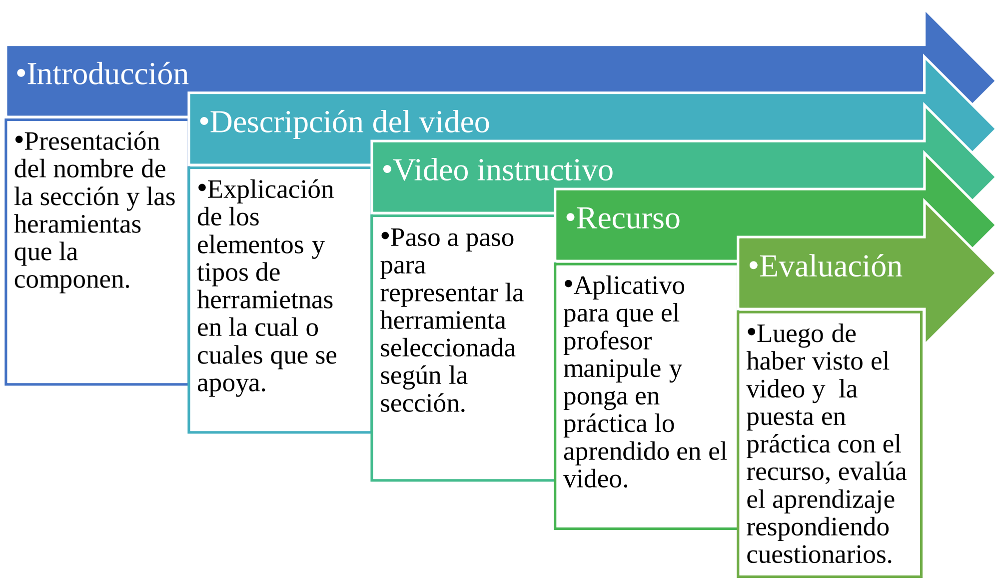
Nombre de sección	Propósito
Herramientas básicas	Reconocer algunas herramientas básicas de GeoGebra. En particular, las relacionadas con gráficas de funciones.
Casillas de entrada	Reconocer el uso y el funcionamiento de las casillas de entrada en GeoGebra, que son elementos de comunicación del usuario con el programa que agrega interactividad a una construcción permitiendo que el usuario tome el control sobre la misma.
Casillas de verificación	Realizar representación visual de una variable booleana y la caja de diálogo que es un modo conveniente de añadirle al campo correspondiente la condición de visibilidad a varios objetos simultáneamente y a la vez hacer selecciones múltiples de un conjunto de opciones.
Botones	Manipular botones de GeoGebra que permiten a los usuarios representar funciones y realizar diversas acciones como: configurar para que estos se animen, aparezcan o desaparezcan y se reinicien de manera automática.
Tablas de datos	Introducir, organizar y analizar datos en forma de tabla, similar a una hoja de cálculo, permitiendo una integración fluida entre el álgebra, la geometría y el análisis de datos.

Nota: Esta tabla muestra cómo está ordenado las secciones del módulo en GeoGebra y el propósito de cada sección.

De eso se desprende la configuración de las secciones, quedando organizado según se muestra en el siguiente esquema:

Figura 5

Orden de configuración de las secciones del módulo



Nota: Orden de configuración de las secciones del módulo. Elaboración propia.

Para finalizar, se presenta un cuestionario Google Forms, para que los profesores de nivel medio de Paraguay evalúen su experiencia con el módulo diseñado. El enlace para acceder al cuestionario está disponible en el apartado 4.1 del capítulo descripción y análisis a priori del módulo.

3.2. Población

El trabajo de grado está dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio del bachillerato en San Juan Nepomuceno y Nueva Germania, (Paraguay). El nivel medio de la educación paraguaya comprende el primer, segundo y tercer curso del bachillerato. Los profesores que enseñan en este nivel se denominan profesores catedráticos, ya que su compromiso es cumplir con una cierta cantidad de horas cátedra (1 hora cátedra = 40 minutos) mensuales en los cursos mencionados. Estas horas están distribuidas de la siguiente manera: primer curso, 22 horas cátedra; segundo curso, 18 horas cátedra; y tercer curso, 13 horas cátedra.

Al finalizar la Maestría y regresar a Paraguay, se pretende establecer mecanismos para implementar el trabajo de grado desarrollado con los profesores de matemáticas de las zonas de influencia mencionadas. Para gestionar estas iniciativas, se buscará colaborar estrechamente con las Supervisiones de cada ciudad, considerando que esta es una estrategia efectiva para asegurar la participación de los profesores, ya que pueden convocar y movilizar a los profesores de sus respectivas áreas.

4. Descripción y análisis a priori del Módulo

En este capítulo presentaremos el diseño del módulo dirigido a profesores en ejercicio del Nivel Medio de Paraguay elaborado en la página de GeoGebra www.geogebra.org y su evaluación.

4.1. Secciones del Módulo

El módulo disponible en https://www.geogebra.org/u/eveliaynilsa17, consta de cinco secciones: herramientas básicas, casillas de entrada, casillas de verificación, botones y tablas de datos. En cada sección se presenta el propósito de la herramienta, los elementos de la función involucrados y un video explicativo que permite al profesor usuario visualizar el uso de las herramientas de GeoGebra. Posteriormente, en el apartado de recursos, el profesor puede poner en práctica lo aprendido, ejercitándose y ensayando tantas veces como desee para diseñar sus propios recursos. Finalmente, en el apartado de evaluación, se mide el aprendizaje alcanzado en cada sección desarrollada.

4.1.1. Herramientas Básicas.

Propósito de la sección: Reconocer algunas herramientas básicas de GeoGebra. En particular, las relacionadas con gráficas de funciones.

Elementos matemáticos involucrados:

Representación gráfica de funciones.

Función definida por partes.

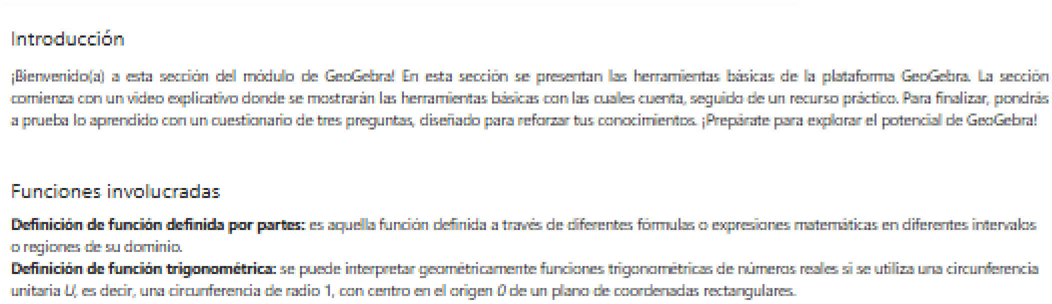
Funciones trigonométricas.

Descripción de la sección:

1) **Introducción:** En este apartado se realiza una descripción de lo que se encuentra en la sección. Esta parte será similar para todas las secciones.

Figura 6

Introducción de Herramientas Básicas


Introducción

¡Bienvenido(a) a esta sección del módulo de GeoGebra! En esta sección se presentan las herramientas básicas de la plataforma GeoGebra. La sección comienza con un video explicativo donde se mostrarán las herramientas básicas con las cuales cuenta, seguido de un recurso práctico. Para finalizar, pondrás a prueba lo aprendido con un cuestionario de tres preguntas, diseñado para reforzar tus conocimientos. ¡Prepárate para explorar el potencial de GeoGebra!

Funciones involucradas

Definición de función definida por partes: es aquella función definida a través de diferentes fórmulas o expresiones matemáticas en diferentes intervalos o regiones de su dominio.
Definición de función trigonométrica: se puede interpretar geométricamente funciones trigonométricas de números reales si se utiliza una circunferencia unitaria *U*, es decir, una circunferencia de radio 1, con centro en el origen *O* de un plano de coordenadas rectangulares.

Nota: Captura de pantalla de la introducción de la sección de herramientas básicas disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

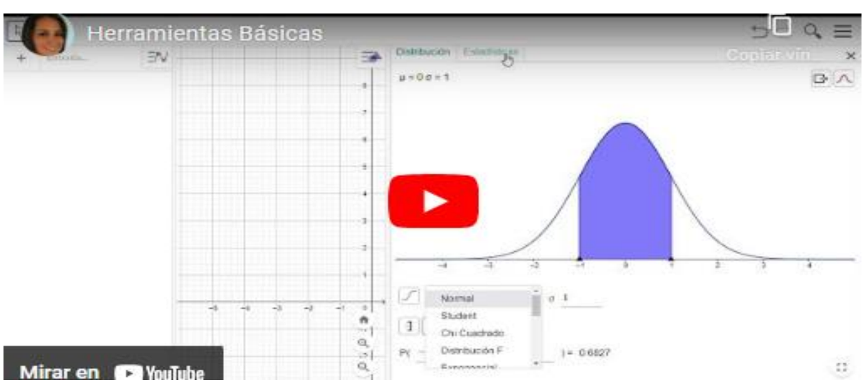
Definición de función definida por partes: es aquella función definida a través de diferentes fórmulas o expresiones matemáticas en diferentes intervalos o regiones de su dominio.

Definición de función trigonométrica: **s**e puede interpretar geométricamente funciones trigonométricas de números reales si se utiliza una circunferencia unitaria U, es decir, una circunferencia de radio 1, con centro en el origen O de un plano de coordenadas rectangulares

2) Video

Figura 7

Video explicativo de Herramientas básicas



Nota: Captura del vídeo publicado en el libro de GeoGebra sobre herramientas básicas disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

El video comienza presentando la interfaz general de GeoGebra describiendo las vistas gráficas con las que cuenta el software, explicando que las mismas dependen de la versión de GeoGebra que se tenga:

La *primera* vista es la vista algebraica la cual permite ingresar objetos en la barra de entrada y tener su representación.

La *segunda* vista es la gráfica y las representaciones geométricas. Esta se puede configurar para tener o no el plano cartesiano y su cuadrícula.

La *tercera* vista es la vista de hoja de cálculo que permite realizar manipulación de objetos, insertar objetos algebraicos en la vista gráfica o hacer listas, generar secuencias, entre otros, allí se pueden ingresar los objetos algebraicos por ejemplo $x - 1$ y automáticamente se genera su representación gráfica.

La *cuarta* vista es la del graficador de tres dimensiones, el graficador de tres dimensiones permite generar funciones entre variables, funciones vectoriales y objetos geométricos de tres coordenadas, por ejemplo al dar clic en la vista gráfica o en la vista algebraica se tienen objetos de dos dimensiones, sin embargo al seleccionar el graficador de tres dimensiones se tienen superficies, planos, esferas, entre otros, así como las representaciones más amplias entre ellas, aunque se mantienen relaciones como el de la tangente y el de la bisectriz que son del graficador de dos dimensiones.

La *quinta* es la vista de cálculo simbólico, con la misma se tiene la posibilidad de hacer cálculos con variables por ejemplo en la barra de entradas ingresar dos variables en una variable $(x - a)$ y en la otra variable $(x + a)$ sin definir ninguna de las dos variables, el mismo programa asigna sus valores a las variables y hace cálculos simbólicos, en este caso binomio. Mediante esta vista también se pueden desarrollar cálculos, tanto numéricos como simbólicos, así como las principales operaciones algebraicas incluyendo derivadas, integrales, resolución de ecuaciones, diferenciales, el número, la circunferencia construida.

Figura 8

Vista algebraica y gráfica de GeoGebra

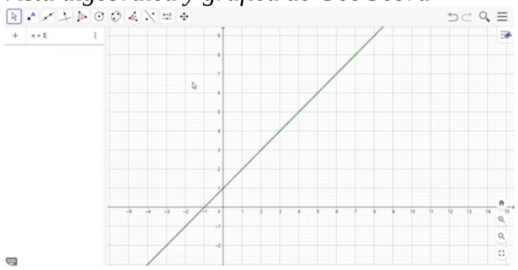


Figura 9

Vista de hoja de cálculo y su representación gráfica

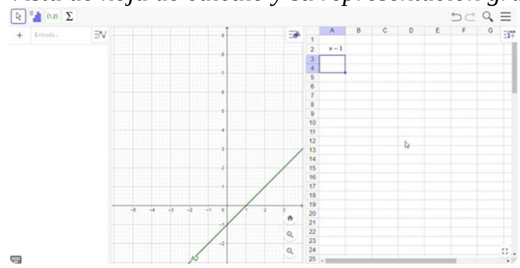


Figura 10

Vista de graficador de 3 dimensiones

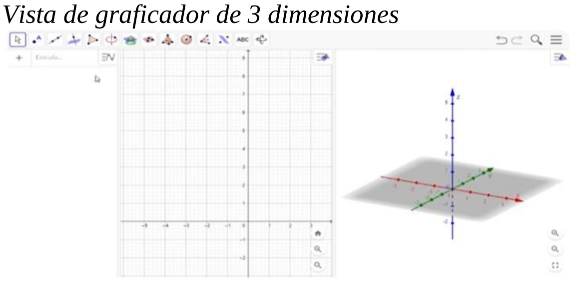


Figura 11

Vista de cálculo de probabilidad

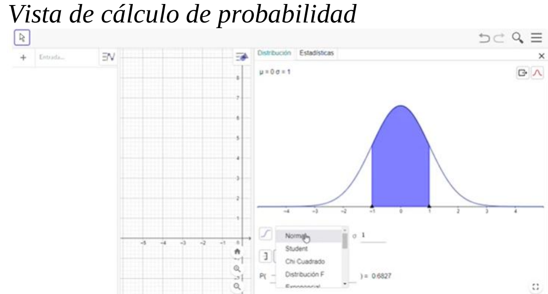


Figura 12

Vista de protocolo de construcción

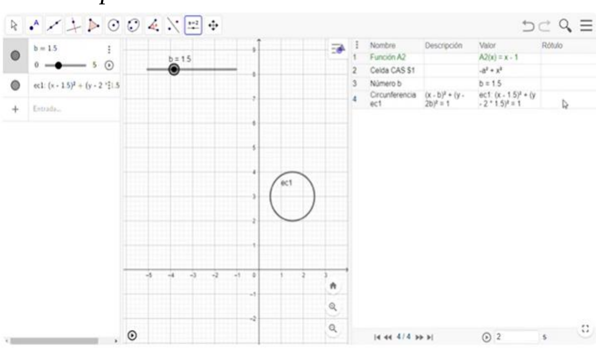


Figura 13

Gráfica de la función con dominio restringido a la función principal

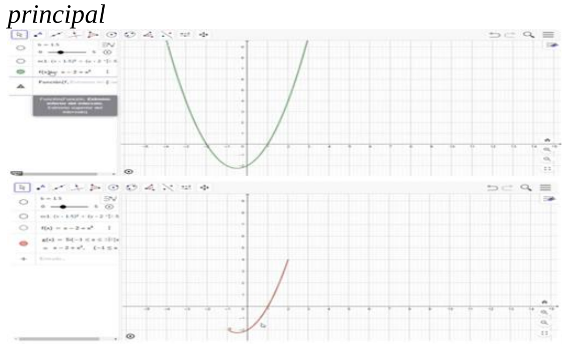
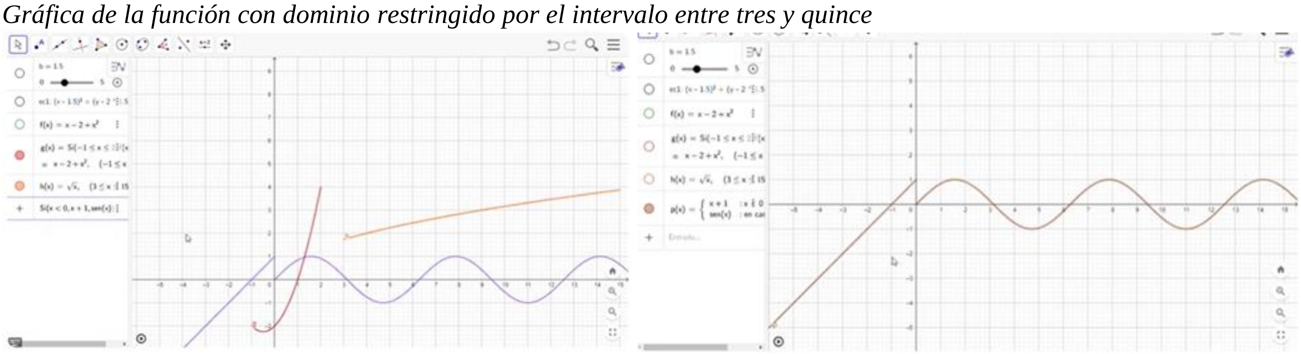


Figura 14

Gráfica de la función con dominio restringido por el intervalo entre tres y quince



La *sexta* es la vista de cálculos de probabilidad, que es una herramienta que permite hacer cálculos de probabilidades sobre las diferentes distribuciones, las más usuales son las normales, con ella se pueden realizar cálculos de intervalos de confianza para medias y proporciones o diferencias de medias, además en esta ventana se tiene la posibilidad de calcular pruebas de hipótesis.

La *séptima* vista es la del protocolo de construcción, el protocolo de construcción da la posibilidad de ver el paso a paso de todas las construcciones que uno vaya realizando, por ejemplo se puede definir un deslizador, este deslizador estará definido por el intervalo 0 y 5 con un incremento de $0{,}5$, el deslizador será horizontal, se va repetir una sola vez, y genera un número en una barra, esta barra genera movimiento el cual nos permitirá determinar el valor del número o una aproximación del mismo.

Se define un objeto geométrico, la circunferencia ingresando en la barra de entrada $(x-b)^2+(y-2b)^2=1$ y así se obtiene la circunferencia con centro en b y $2b$, radio 1 donde el b es el deslizador. Ahora se procede a animar el deslizador para observar su comportamiento, se anima el deslizador y a medida que avanza, también se mueve el objeto geométrico. Una vez que está en movimiento y queremos que se detenga en un punto dado, se debe dar clic en el botón que está ubicado en la parte inferior izquierda y automáticamente el objeto se detiene, y así vemos el protocolo de construcción y observamos que se tiene la función.

La vista de protocolo de construcción, es interesante para preparar una clase con anticipación, permite tener ya lista toda la construcción del contenido matemático a ser abordado y llevarlo para compartir con los estudiantes a modo de video donde se muestra el paso a paso, esto es una facilidad que brinda la vista de protocolo de construcción.

Luego de presentar las vistas en el video, se observa algunas formas de graficar una función. Veremos algunas herramientas para ello se oculta la vista de protocolo de construcción en el menú y todos los objetos que estuvo construyendo. La primera forma es introduciendo directamente una función por ejemplo $f(x) = x - 2 + x^2$ y si hacemos zoom se observa la primera función. La siguiente forma es escribiendo en el comando, función y seleccionar el segundo elemento, hacer que esta función sea con dominio restringido a la primera función. Entonces escribimos $función(f, -1,2)$ donde f es la denominación de la función con intervalo entre menos uno y dos, si ocultamos la función principal se observa solo la función con dominio restringido que es parte de la función principal.

Otra forma es escribiendo nuevamente función en el comando, seleccionar el segundo elemento para hacer que esta sea una $función(\sqrt{x}, 3,15)$. Así se obtiene la notación de la función con dominio restringido por el intervalo entre tres y quince, la última forma es con el comando sí, escribir en la barra de entrada sí y se selecciona el último elemento para hacer una función con una condición y una consecuencia, que será una función a trozos o definida por partes. Entonces le daremos la condición que x sea < 0, entonces será $x + 1$ y si no va ser $seno\ de\ x$ en la barra de entrada se escribe de la siguiente manera: $Si(x < 0\ entonces = x + 1, si\ x > 0\ entonces = \ sen(x)$, ahí se observa que si x es menor a cero se obtiene una función lineal, si x es mayor a cero tenemos una función trigonométrica, y estas son algunas formas de graficar funciones.

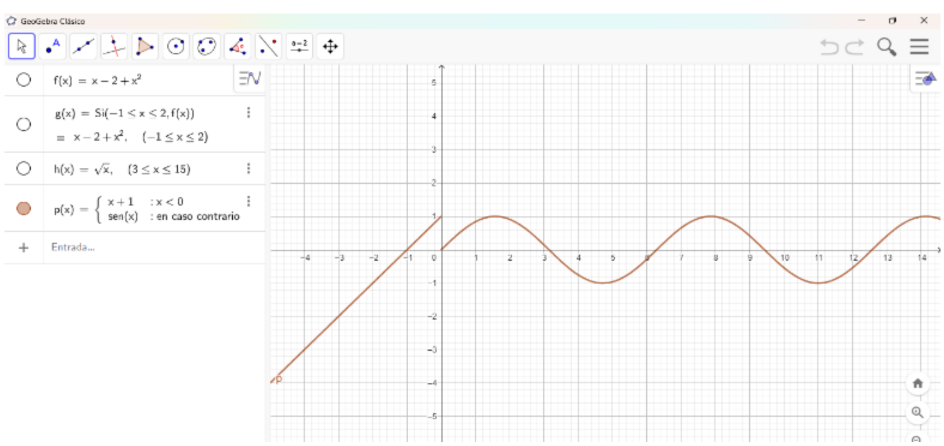
3) Recurso

Para el ejemplo de esta sección se hizo un recurso para que el usuario pueda manipularlo. La primera forma es introducir directamente en la barra de entrada una función, en este caso $f(x) = x - 2 + x^2$. La segunda forma es escribir en la barra de entrada el comando función, seleccionando el segundo elemento y hacer que esta función sea con dominio restringido a la función principal. Así, escribimos $función\ (f, -1{,}2)$ donde f es la denominación de la función con intervalo entre menos uno y dos, si ocultamos la primera función se observa solo la función con dominio restringido que es parte de la función definida anteriormente. Luego en el comando se escribe nuevamente función y se selecciona el segundo elemento para hacer que esta sea una $función\ (\sqrt{x}, 3{,}15)$ y así se obtiene la notación de la función con dominio restringido por el intervalo entre tres y quince.

La última forma que veremos es escribiendo en la barra de entrada sí y se selecciona el último elemento para hacer una función con una condición y una consecuencia, que será una función a trozos o definida por partes. Entonces le daremos la condición que x sea menor a cero entonces será $x + 1$ y si no, va ser $seno\ de\ x$ en la barra de entrada se escribe de la siguiente manera $Si\ (x < 0, entoces\ x + 1, si\ x > 0, entonces\ sen(x)$ y ahí se observa que si x es menor a cero se obtiene una función lineal, si x es mayor a cero tenemos una función trigonométrica.

Figura 15

Ejemplo del recurso de herramientas básicas



Nota: Captura de pantalla del ejemplo del recurso sobre gráfica de funciones disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

4) Evaluación

Para la sección del módulo de herramientas básicas se proponen dos preguntas y una tarea.

¿Cuáles son las vistas con las que cuenta GeoGebra?

Se espera que el profesor indique que GeoGebra cuenta con las siguientes vistas: la vista algebraica, la vista gráfica, la de cálculo simbólico, la de cálculo de probabilidad, la de tabla de datos y el protocolo de construcción.

¿Cuál es la utilidad del protocolo de construcción?

La utilidad del protocolo de construcción en cambio es desconocido o muy poco conocido incluso para los que tienen un conocimiento básico del software de GeoGebra, por ende, será una pregunta con más dificultad para responder por parte de los profesores.

Pero al observar el video y manipular el ejemplo se espera que el profesor conozca sobre la utilidad del protocolo de construcción y sepa cómo emplearlo y sacarle provecho para planear las clases con los estudiantes, ya que el mismo da acceso a una tabla interactiva que expone todos los pasos de construcción y permite rehacer el boceto realizado, paso a paso usando la Barra de Navegación que aparece al pie de su Cuadro de Diálogo.

Crea una tarea utilizando las herramientas básicas de GeoGebra

Una vez observado el video y el ejemplo del recurso podrán realizar sin mayores dificultades recursos utilizando las herramientas básicas de GeoGebra, las cuales podrán utilizar con sus estudiantes.

En cuanto a las posibles dificultades de los profesores a la hora de trabajar con las herramientas básicas serán las de poder observar las distintas vistas con las que cuenta GeoGebra, ya que las vistas clásicas como la gráfica y geométrica son las más conocidas, luego para utilizar las otras se debe ir habilitando o deshabilitando cada vista adicional, lo cual podría generar confusiones o dificultades, en especial para el docente que se está iniciando en el uso del recurso.

4.1.2. Casillas de Entrada

Propósito de la sección: Reconocer el uso y el funcionamiento de las casillas de entrada en GeoGebra, que son elementos de comunicación del usuario con el programa que agrega interactividad a una construcción permitiendo que el usuario tome el control sobre la misma.

Elementos matemáticos involucrados:

Representación gráfica de funciones.

Funciones cuadráticas

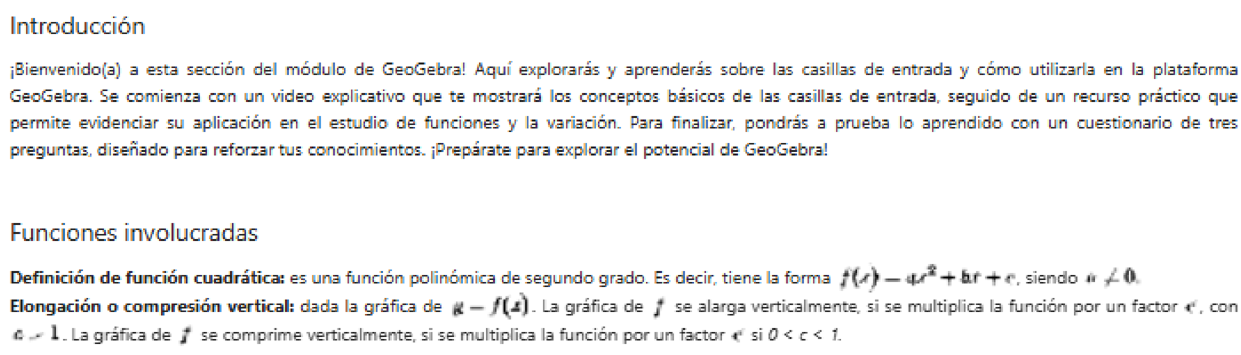
Transformaciones de funciones.

Descripción de la sección:

1) Introducción: Se inicia con una descripción de lo que se encontrará en la sección.

Figura 16

Introducción de la sección de casillas de entrada



Introducción

¡Bienvenido(a) a esta sección del módulo de GeoGebra! Aquí explorarás y aprenderás sobre las casillas de entrada y cómo utilizarla en la plataforma GeoGebra. Se comienza con un video explicativo que te mostrará los conceptos básicos de las casillas de entrada, seguido de un recurso práctico que permite evidenciar su aplicación en el estudio de funciones y la variación. Para finalizar, pondrás a prueba lo aprendido con un cuestionario de tres preguntas, diseñado para reforzar tus conocimientos. ¡Prepárate para explorar el potencial de GeoGebra!

Funciones involucradas

Definición de función cuadrática: es una función polinómica de segundo grado. Es decir, tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0$.
Elongación o compresión vertical: dada la gráfica de $g = f(x)$. La gráfica de f se alarga verticalmente, si se multiplica la función por un factor c, con $c > 1$. La gráfica de f se comprime verticalmente, si se multiplica la función por un factor c si $0 < c < 1$.

Nota: Captura de pantalla de la introducción de la sección de herramientas básicas disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

Definición de función cuadrática: es una función polinómica de segundo grado. Es decir, tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo $a \neq 0$.

Definición de transformación de funciones:

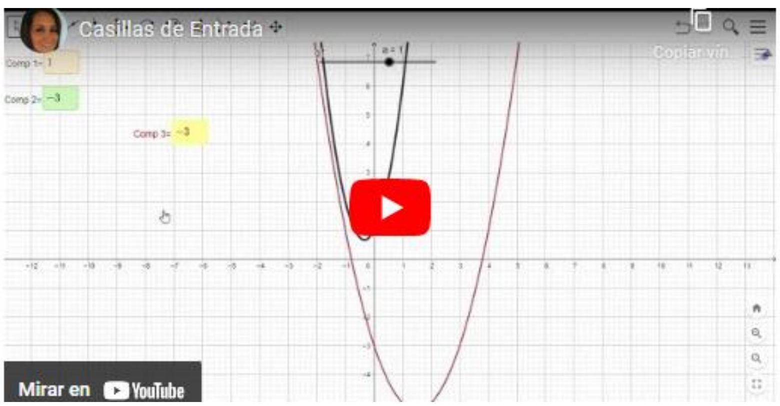
- Elongación o compresión vertical**:** dada la gráfica de $y = f(x)$. La gráfica de f se alarga verticalmente, si se multiplica la función por un factor c, con $c > 1$.

  La gráfica de f se comprime verticalmente, si se multiplica la función por un factor c si $0 < c < 1$.

2) Video

Figura 17

Video explicativo de la sección de casillas de entrada



Nota: Captura de pantalla del video explicativo de la sección casillas de entrada disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

Lo *primero* que se hace es definir tres números, y estas a su vez pueden ser definidas de dos maneras distintas, la primera es asociando a un deslizador, por defecto el programa lo define en un intervalo de entre -5 y 5, el usuario le debe agregar un incremento de 1.

Si al definir los demás números no se quiere que esté definido o restringido a un intervalo entonces directamente eso se puede hacer en la barra de entrada y escribir el número, en este caso $b = 0$ y $c = 0$, de esa manera ya se tiene los tres coeficientes definidos.

Seguidamente se define la casilla de entrada, ingresando en el mismo menú del deslizador ya que ahí se encuentra el botón que corresponde casilla de entrada. Luego de seleccionar el menú de casilla de entrada y al hacer clic en la pantalla se selecciona rótulo, es importante aclarar que el rótulo es distinto a la variable de asignación. Por ejemplo para este caso, al coeficiente de x^2 le vamos a llamar $Comp\ 1 =$, el símbolo igual se le agrega porque este será el texto que acompañará a la barra de entrada y se selecciona el objeto vinculado, que es la variable a, entonces el componente dos $Comp\ 2 =$ vinculado a la variable b y el componente 3, $Comp\ 3 =$ vinculado a la variable c.

Figura 18
Asignar el número asociado al deslizador

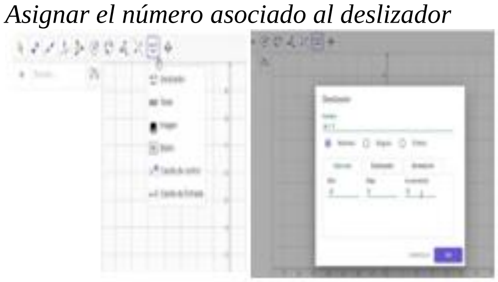


Figura 19
Definición del número en la barra de entrada

Figura 20
Selección del menú de casillas de entrada

Figura 21
Configuración de los componentes

Figura 22
Manipulación de las propiedades de los componentes

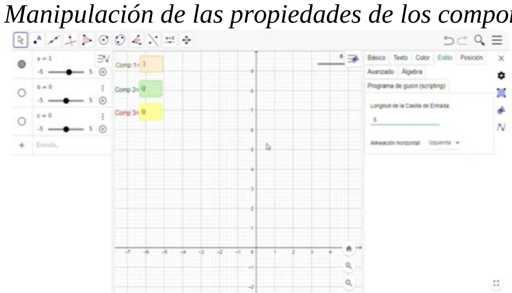


Figura 23
Manipulación y cambio de número de los componentes

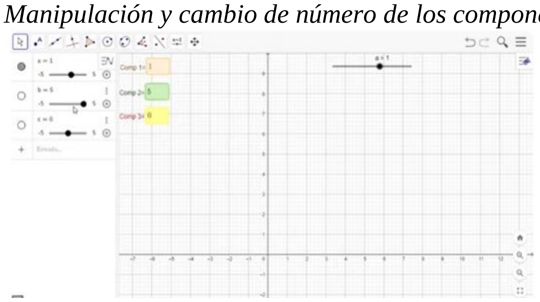


Figura 24
Definición de dos funciones cuadráticas

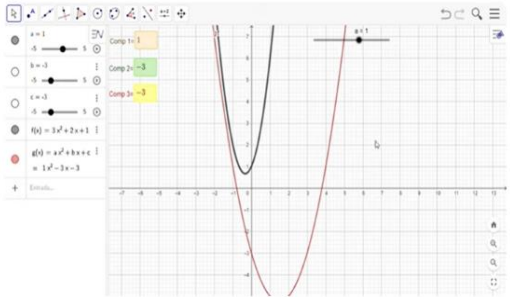


Figura 25
Visualización de los componentes en la pantalla

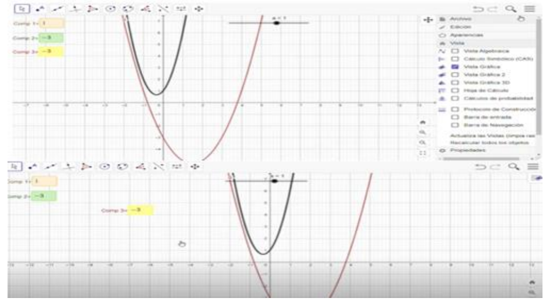


Figura 26
Configuración del texto

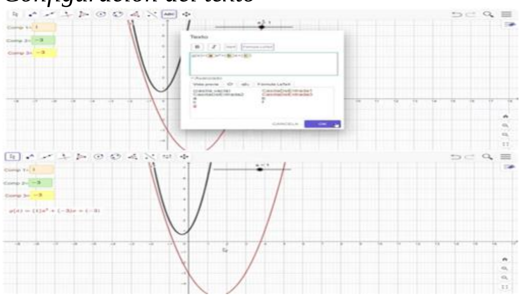


Figura 27
Menú punto sobre objeto

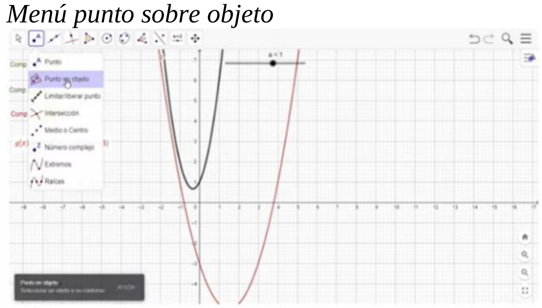
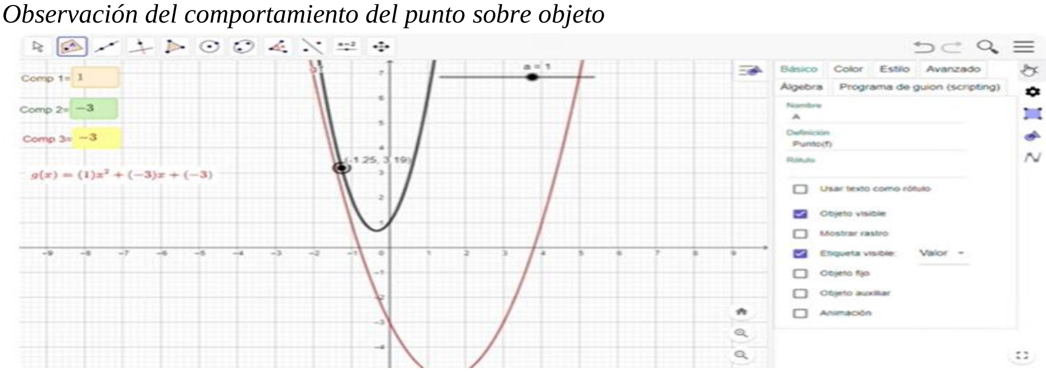


Figura 28
Observación del comportamiento del punto sobre objeto



Hecho esto ya se tienen configuradas las tres casillas de entrada; se puede notar que las etiquetas son distintas a las variables. Para ordenar los mismos se les quita la fijación de la pantalla dando clic derecho sobre cada uno y desmarcando la opción fijar pantalla. Se ordenan de a uno en el lugar correspondiente y luego a volver a fijar la pantalla.

A los componentes se los puede manipular, en propiedades hacerle algunos cambios, en este caso cambiando los colores de cada uno, el color de primer plano que viene a ser el color del texto y el color de fondo que viene a ser de la casilla misma, la sugerencia es que los colores de primer plano sean de color oscuro y el color de fondo sea un poco más claro, pero eso ya es a criterio de cada usuario. También se puede modificar en estilo la longitud de la casilla de entrada, en este caso es dando clic derecho sobre la casilla, luego en propiedades, color de fondo en verde oscuro y el primer plano en verde más claro, y la longitud de la casilla en 5.Así, para cada componente, y de esa manera ya están modificadas todas las casillas de entrada.

Se puede observar que en la casilla los números asignados por defecto están definiendo las variables numéricas, es decir los componentes con respecto a las variables de la barra de entrada. Por ejemplo, si se cambia el valor del componente de 2 por 5 automáticamente también el valor de b cambia, es decir, la casilla de entrada permite hacer cambios de variables sin hacer cambio de nombres, se pueden obtener nuevos valores numéricos pero la variable sigue teniendo la misma denominación y esto permitirá trabajar con funciones u objetos que el usuario podrá modificar, pero que el nombre de las variables no cambiarán, este es el recurso con el que se estará trabajando.

Ahora se define una función cuadrática en la barra de entrada, se escribe entonces $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y allí se obtiene la función, a la misma se le pueden hacer cambios en color, darle un color negro y en estilo cambiar el grosor del trazo 8 o 9 para que sea bien visible. Luego se define una nueva función y para ello se cambian los valores numéricos de los componentes 2 y 3, poniendo -3 y -3 respectivamente. Entonces la función generada será $g(x) = ax^2 + bx + c$, obteniendo de esa manera una nueva función.

Podemos observar que si se cierra la vista algebraica y si se hace zoom los componentes permanecen estáticos en la pantalla y solo se mueven las gráficas, es decir, se mantiene en su posición absoluta, también se puede ver aquí que si quitamos la fijación absoluta y hacemos zoom entonces al mover la pantalla también se mueve el componente o la casilla.

Por tanto, la actividad estará basada en la variación, podemos solicitar al usuario que manipule los componentes 1, 2 y 3 (cambiar los valores de los componentes) para que lleve a otras transformaciones. De acuerdo al ejemplo propuesto, la transformación de la función roja respecto a la función negra sería la actividad.

Si además, se agrega un texto con fórmula látex de la función $g(x)$, con la recomendación que las variables sean colocadas dentro de paréntesis para evitar confusiones en la notación respecto a los signos. Con esta recomendación, se abre paréntesis y en la opción avanzado, seleccionando el logo de GeoGebra se encuentran las variables (a, b, c). Entonces completamos la función como sigue $g(x) = (a)x^2 + (b)x + (c)$ y queda listo. En la opción propiedades se pueden hacer algunas modificaciones al texto, para que este con la función tengan el mismo color, rojo. Como es un texto se puede mover de tal forma que quede debajo de los componentes y fijarlo en la pantalla, de tal forma que al hacer zoom estos permanezcan fijos en la pantalla.

De esta manera tenemos cómo se utilizan los componentes, las casillas de entrada, algunas variables numéricas, algunas ediciones de texto en látex y también el recurso donde el usuario trate de mover los componentes de la función alterándola hasta conseguir la función que desea. Por ejemplo, tendrá que usar la característica de la ecuación cuadrática donde $\frac{-b}{2a}$, estas son las coordenadas del vértice x en este caso particular. También se pueden colocar algunos puntos sobre la función. Por ejemplo, en GeoGebra en la opción de puntos sobre objeto, la cual se encuentra en el segundo ícono del menú está la opción de puntos sobre objeto.

El punto se puede colocar en cualquier parte de la gráfica y en propiedades cambiarle el color para que tenga el mismo color, negro que la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. En este caso se le puede dar también la propiedad al punto para que el usuario pueda observar los valores, entonces podrá mover el punto que permanecerá siempre en la curva y a su vez podrá obtener las coordenadas, los valores de las coordenadas o hacer aproximaciones en términos de transformación, además le dará la posibilidad al usuario de hacer cambios en el zoom de las coordenadas para poder mirar el punto de una manera más eficiente.

3) Recurso

Esto se ejemplificó a partir de las transformaciones de funciones y sus diferentes desplazamientos donde podemos notar que al alterar la función también se altera su representación gráfica, pero sin alterar las casillas de entrada, tal como se observa en el vídeo y en el ejemplo del recurso.

Lo *primero* que se hace es definir tres números, esto se puede hacer de dos maneras. La primera manera es asociando a un deslizador, seleccionando el menú donde se encuentra el deslizador para así poder definirlo en un intervalo de entre -5 y 5 agregando un incremento de 1. La segunda manera es escribiendo en la barra de entrada el número $b = 0$ y $c = 0$, de esta forma ya se tiene los tres coeficientes definidos.

Lo *segundo* es definir la casilla de entrada, en el penúltimo menú de GeoGebra se selecciona de casilla de entrada y al hacer clic en la pantalla se selecciona rótulo, es importante aclarar que el rótulo es distinto a la variable de asignación. Por ejemplo para este caso, al coeficiente de x^2 le vamos a llamar $Comp\ 1 =$, el símbolo igual se le agrega porque este será el texto que acompañará a la barra de entrada y se selecciona el objeto vinculado, que es la variable

a, entonces el componente dos $Comp\ 2 =$ vinculado a la variable b y el componente 3, $Comp\ 3 =$ vinculado a la variable c.

Para ordenar los mismos se les quita la fijación de la pantalla, dando clic derecho sobre cada uno y desmarcando la opción fijar pantalla. Se ordenan uno a uno, y en el lugar que el usuario decida, luego se vuelve a fijar en la pantalla. También se pueden hacer cambios a través del menú propiedades, para este ejemplo modificando los colores de cada componente. El color de primer plano que viene a ser el color del texto y el color de fondo que viene a ser de la casilla misma, se opta por colocar un color oscuro al texto y color claro a la casilla de entrada. También se puede modificar en estilo la longitud de la casilla de entrada, eligiendo la longitud 5 para estas casillas, de esa manera ya están modificadas todas las casillas de entrada.

Lo *tercero* que se hace es definir una función cuadrática, en la barra de entrada se escribe la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. A la misma se pueden hacer cambios en color, en propiedades darle un color negro y en estilo cambiar el grosor del trazo en 8 0 9 para que sea bien visible.

Seguidamente se define una nueva función y para ello se cambian los valores numéricos de los componentes 2 y 3, poniendo -3 y -3 respectivamente. Entonces, la nueva función generada es $g(x) = ax^2 + bx + c$, obteniendo esta función, dando clic derecho en propiedades para realizar cambios de color u otro cambio que se desee. Se cierra la vista algebraica y si se hace zoom los componentes permanecen estáticos en la pantalla y solo se mueven las gráficas, es decir, se mantiene en su posición absoluta. Pero, si quitamos la fijación absoluta y hacemos zoom entonces al mover la pantalla también se mueven los 3 componentes o la casilla.

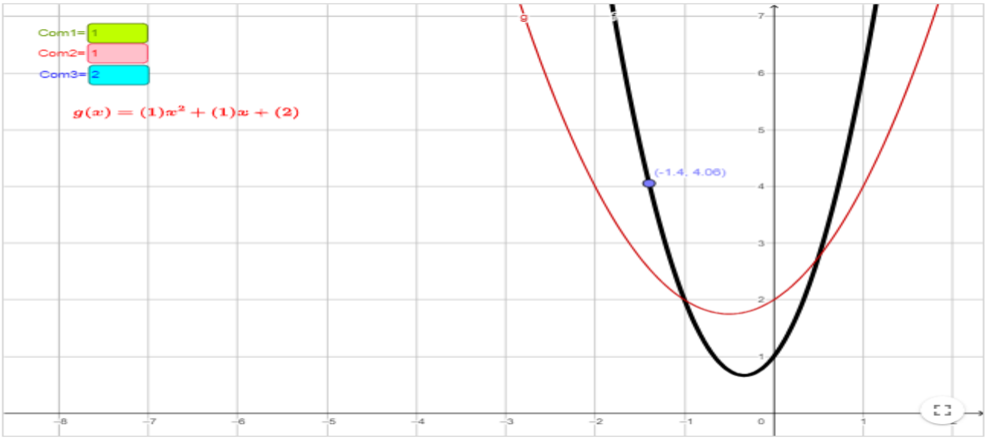
Lo *cuarto* es agregar un texto, la opción de texto se encuentra en el mismo menú de casillas de entrada, el mismo se genera con fórmula látex, la función $g(x) =$ colocando cada variable en paréntesis para evitar confusiones en la notación respecto a los signos principalmente, se abre paréntesis y en avanzado en el logo de GeoGebra se encuentran las variables. Entonces completamos la ecuación $g(x) = (a)x^2 + (b)x + (c)$ y ya queda listo, en propiedades se hacen algunas modificaciones al texto para que sea del mismo color que la función $g(x)$, en decir, el color de fondo será blanco y el color de primer plano será rojo.

Se puede mover el texto de la función hasta situar debajo de los componentes y fijarlo en la pantalla para que al hacer zoom como a la casilla de entrada estos permanezcan fijos en la pantalla.

Lo *quinto* que se hace, es colocar un punto sobre la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, en la opción de puntos sobre objeto, que se encuentra en el segundo ícono del menú, ponemos el punto en cualquier parte de la primera función $f(x)$ y en propiedades cambiarle el color para que sea igual a la gráfica, negra. En la opción propiedades dar al punto nombre y valor, para que el usuario pueda observar los valores. Así podrá mover el punto y obtener los valores de las coordenadas, hacer aproximaciones en términos de transformación, además le dará la posibilidad al usuario de hacer cambios en el zoom de las coordenadas para alcanzar mirar el punto de una manera más eficiente.

Figura 29

Ejemplo del recurso de la sección de casillas de entrada



Nota: captura de pantalla del ejemplo del recurso tomada de la sección de casillas de entrada disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

4) Evaluación

Para la sección del módulo de casillas de entrada se proponen dos preguntas y una tarea.

¿Para qué sirven las casillas de entrada?

Se espera que el profesor reconozca la utilidad de las casillas de entrada, respondiendo que las mismas sirven para crear actividades interactivas o tareas de exploración en GeoGebra, ya que permite a los usuarios concentrarse en diferentes aspectos de una figura o en propiedades específicas de una construcción matemática.

¿Cómo se configuran los componentes?

Se espera que el profesor responda que los componentes se configuran a partir del menú de casillas de entrada, introduciendo un rótulo y vinculando objetos de acuerdo con cada variable definida.

Diseña un recurso utilizando las casillas de entrada en GeoGebra

Una vez que el profesor observe el video y manipule el recurso disponible, se espera que pueda diseñar para su propio recurso utilizando las casillas de entrada vistas en la sección, la cual luego podrá utilizarlo con sus estudiantes.

Con relación a las posibles dificultades que pueden tener los profesores a la hora de utilizar este recurso es que, si no se configuran de la manera correcta los componentes y deslizadores, estos no se modificarán adecuadamente a medida que se modifican los números ingresados y vinculados a cada componente, cuando se usa el doble signo igual, hay que asegurarse de colocarlos adecuadamente. Para los textos en látex utilizar paréntesis en casos de ecuaciones, para poder observar la transformación que ocurre con la función y por ende con el gráfico respectivo.

4.1.3. Casillas de Verificación.

Propósito de la sección: La tercera sección del módulo son las casillas de verificación, que son una representación visual de una variable booleana y la caja de diálogo que es un modo conveniente de añadirle al campo correspondiente la condición de visibilidad a varios objetos simultáneamente y a la vez hacer selecciones múltiples de un conjunto de opciones.

Elementos matemáticos involucrados:

Representación gráfica de funciones.

Funciones crecientes y decrecientes.

Funciones polinómicas.

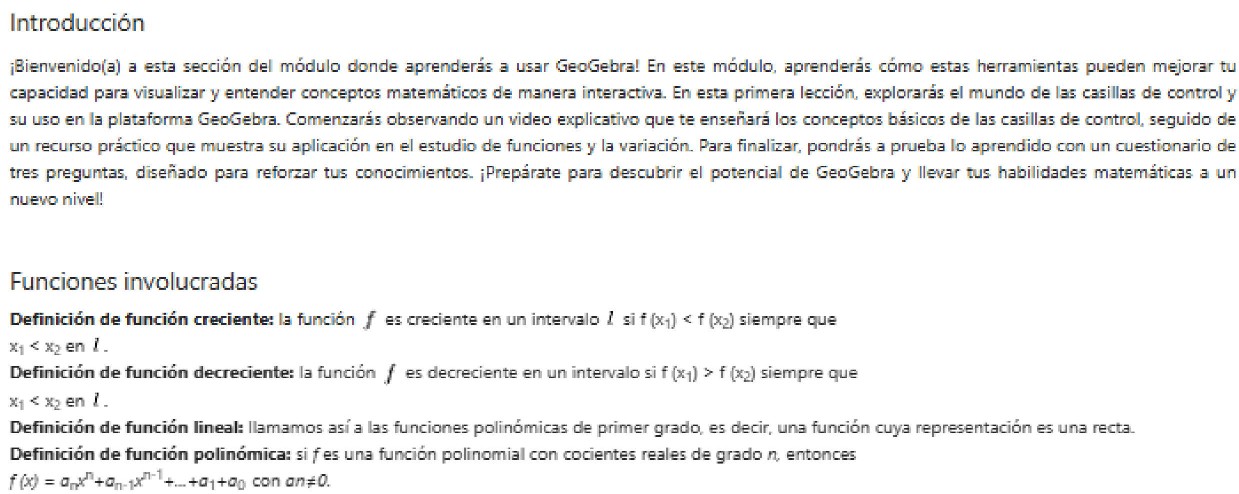
Evaluación de funciones.

Descripción de la sección:

1) **Introducción:** En este apartado de la sección se realiza una descripción de lo que se encuentra en la sección

Figura 30

Introducción de casillas de verificación


Introducción

¡Bienvenido(a) a esta sección del módulo donde aprenderás a usar GeoGebra! En este módulo, aprenderás cómo estas herramientas pueden mejorar tu capacidad para visualizar y entender conceptos matemáticos de manera interactiva. En esta primera lección, explorarás el mundo de las casillas de control y su uso en la plataforma GeoGebra. Comenzarás observando un video explicativo que te enseñará los conceptos básicos de las casillas de control, seguido de un recurso práctico que muestra su aplicación en el estudio de funciones y la variación. Para finalizar, pondrás a prueba lo aprendido con un cuestionario de tres preguntas, diseñado para reforzar tus conocimientos. ¡Prepárate para descubrir el potencial de GeoGebra y llevar tus habilidades matemáticas a un nuevo nivel!

Funciones involucradas

Definición de función creciente: la función f es creciente en un intervalo I si f (x_1) < f (x_2) siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Definición de función decreciente: la función f es decreciente en un intervalo si f (x_1) > f (x_2) siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Definición de función lineal: llamamos así a las funciones polinómicas de primer grado, es decir, una función cuya representación es una recta.

Definición de función polinómica: si *f* es una función polinomial con cocientes reales de grado *n*, entonces $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$ con $an \neq 0$.

Nota: Captura de pantalla de la introducción de la sección de casillas de verificación disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

Definición de función creciente: La función f es creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Definición de función decreciente: la función f es decreciente en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

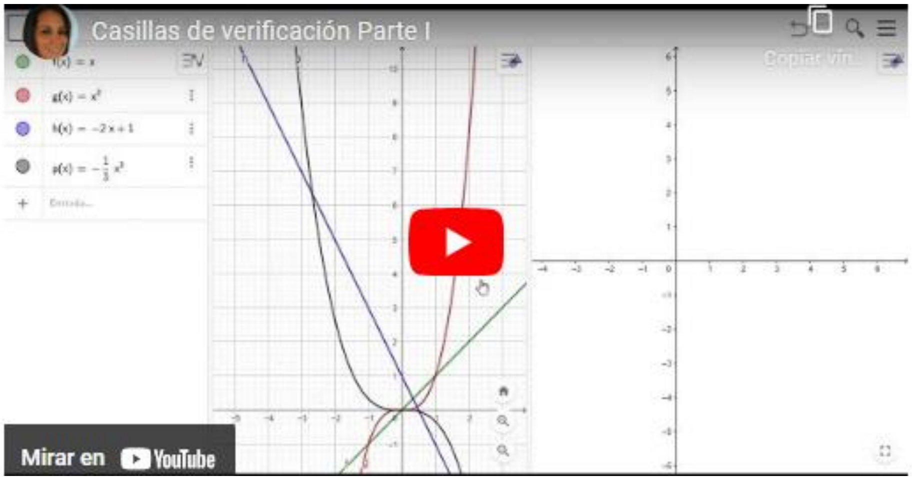
Definición de función lineal: Llamamos así a las funciones polinómicas de primer grado, es decir, una función cuya representación es una recta.

Definición de función polinómica: **si** f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, entonces $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $an \neq 0$

2) Video

Figura 31

Video explicativo de casillas de verificación



Nota: Captura de pantalla del video explicativo sobre casillas de verificación disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

Video parte I:

Al iniciar el video se menciona que lo primero que se debe conocer es cómo activar las casillas de verificación, para ello hay que dar clic en el último menú y seleccionar el que diga casillas de control, hacer clic en la pantalla y solicita un rótulo donde se debe escribir a, clic en ok y la casilla queda establecida.

Podemos notar entonces que el valor asignado por GeoGebra en la vista algebraica es el de $True$ o verdadero porque es una variable booleana por ende será $True$ o $False$ (verdadero o falso). Por ejemplo, al desmarcar la casilla, el mismo automáticamente se vuelve falso y es lo que permite graficar algunos elementos de GeoGebra y asociar a una casilla de verificación para aparecer o desaparecer dependiendo del valor de verdad de la variable.

Siguiente paso es definir una función $f(x) = x$ y se asocia a la casilla de verificación (la casilla se establece tal como se lo ha descrito más arriba) pero esta vez asociando la función a la casilla que se establece en el mismo menú de casillas de verificación en rótulo se escribe a y en la parte de abajo donde dice Objetos, desplazamos la flecha y ya muestra la opción de función f, se selecciona, clic en ok y la misma ya queda establecida.

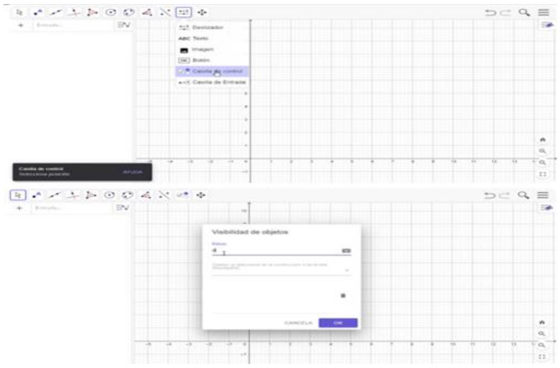
Si la casilla de verificación está activada, es decir, marcada, la opción es verdadera, si se desactiva o desmarca la opción es false. Automáticamente desactiva tanto la función como la vista gráfica de las casillas de verificación, como son variables booleanas se pueden tener asociadas a la vista de objetos bajo alguna condición. Por tanto, se puede diseñar un Quiz y pedirle al usuario que evalúe utilizando Casillas de verificación. Basados en esta idea se diseña una evaluación de correcto o incorrecto, como así también vamos a mirar cómo aparecer y desaparecer textos con algunas condiciones.

Para realizar el Quiz se define un conjunto de funciones, para este caso serán establecidas funciones crecientes y decrecientes, como la función creada con anterioridad (lineal) es una función creciente ya lo dejamos y se definen las demás. Creamos la segunda función creciente (polinómica) escribiendo en la barra de entrada $g(x) = x^3$.

Luego se crea la tercera función en este caso una función decreciente (lineal) $h(x) = -2x + 1$ y una cuarta función (polinómica) $p(x) = -\frac{1}{3}x^3$ que será la otra función decreciente, ahí ya se tiene entonces el conjunto de funciones. A través de la propiedad otorgamos colores a las funciones crecientes y decrecientes. A las funciones crecientes marcamos con verde y roja, las funciones decrecientes serán de color azul y la naranja las funciones, colores que GeoGebra asocia automáticamente.

Figura 32
Activación de casillas de verificación

Figura 33
Variable booleana de GeoGebra



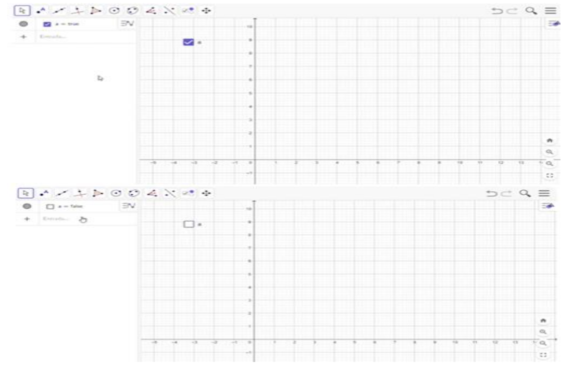


Figura 34

Configuración de las casillas de verificación parte I

Figura 35

Vista de variables booleanas

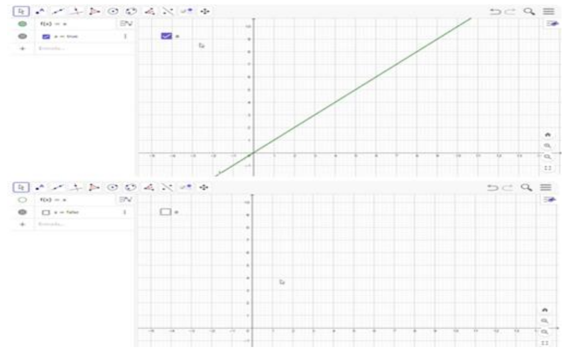


Figura 36

Definición de funciones crecientes y decrecientes

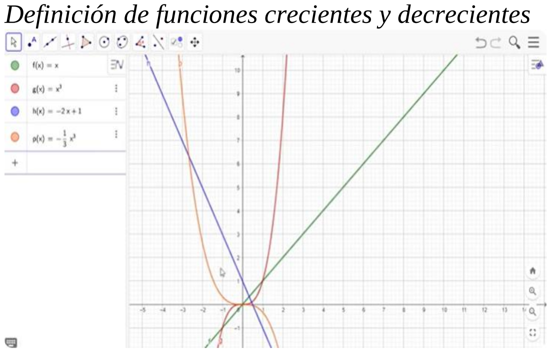


Figura 37

Cambio de color de las funciones

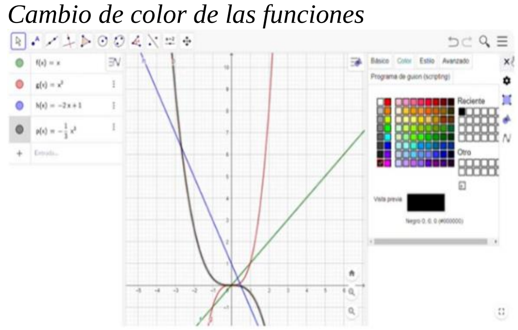


Figura 38

Activación de la segunda vista gráfica

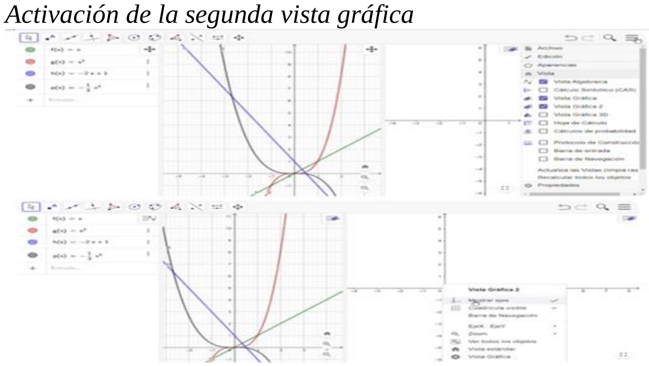


Figura 39

Vinculación de las casillas de verificación a las funciones

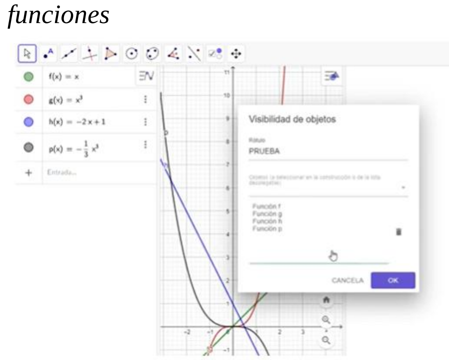
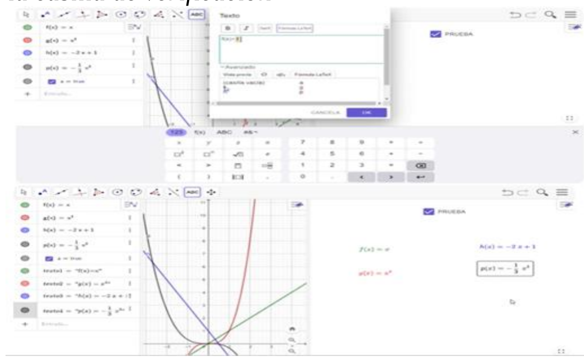


Figura 40

Asociación de las funciones con la casilla de verificación



Pero para que los colores sean bien diferentes y no cree confusiones para el usuario se cambian los colores, en este caso el color de la función naranja, para ello hacer clic e ir en propiedades, color y se le cambia el color a negro. Entonces ya se tienen definidas las cuatro funciones, dos crecientes y dos decrecientes.

Ahora se procede a activar una segunda vista gráfica, para ellos se selecciona la barra de menú disponible a la derecha y dar clic en vista gráfica dos y ya se activa la segunda vista gráfica, entonces en esta primera vista gráfica se dejan las funciones para establecer en la segunda las casillas de verificación. Como en la segunda vista gráfica no se utilizará ningún objeto matemático entonces se desmarca el plano cartesiano y las cuadrículas.

En la segunda vista gráfica se definen las casillas de verificación, en rótulo se escribe PRUEBA y en la parte inferior de objetos se le asocian las cuatro funciones a la casilla de verificación, se centran las casillas recién creadas, para ello se le quita la fijación para luego mover y volver a fijar.

Posteriormente lo que se hace es asociar las funciones y para que haya esa asociación entonces seleccionamos en el menú la opción de texto, activar fórmula látex y se escribe la función $f(x) =$ avanzado se da clic en el logo de GeoGebra, se selecciona el objeto, es decir, la función que se quiere. Se puede ir haciendo arreglos para que sea agradable a la vista del usuario y luego fijar en la pantalla. Para que haya esa asociación entre una pantalla y otra se ponen las funciones del mismo color, es decir la función $f(x)$ va a tener color verde, luego se configura la siguiente función $g(x)$ que es igual a la función g. Así se obtienen las funciones crecientes, de la misma manera que la anterior se le cambia los colores a la función g que en este caso es rojo. Las funciones crecientes se colocan uno debajo de otro. Lo mismo se hace con las funciones decrecientes. $h(x)$ es igual a la función h y se le cambia el color a azul. Por último, se configura la función $p(x)$ que es igual a p. Así entonces se obtienen las cuatro funciones en la segunda vista gráfica todos del mismo color que en la primera vista.

Video parte II:

Esta es la continuación de cómo configurar las casillas de verificación, aquí es agregar algunos textos, etiquetas y los valores de verdad para que aparezca o desaparezca el texto según la opción elegida.

Lo *primero* que se hace es un pequeño cambio, se elimina la casilla de PRUEBA para luego volver a seleccionar en el menú la opción de casillas de verificación y configurarlo de la manera correcta sin vincularlo a ninguna función u objeto fijando la casilla.

Lo *segundo* es seleccionar texto para escribir la pregunta de: Seleccione las funciones crecientes, se pueden hacer algunas modificaciones al texto como ser cursiva, negrita y dar clic en ok. Posicionando en medio de la pantalla y fijarlo, luego agregar la opción de respuesta correcta y la opción de respuesta incorrecta, ponerlo en negrita y listo. Ordenamos las opciones y fijar en la pantalla, hacer cambios en los colores, por ejemplo, la respuesta correcta o verdadera lo asociamos con el verde, por lo tanto, se configura con color verde. La respuesta incorrecta o falsa, en cambio con color rojo y así quedan las opciones, la respuesta correcta o verdadera de color verde y la respuesta incorrecta o falsa en color rojo.

Lo *tercero* es seleccionar de vuelta en el penúltimo menú casillas de control y se le agregan las etiquetas o rótulos poniendo A) y asociar con la función f, sacarle la casilla fija y mover hasta la función $f(x)$, los mismo se realiza para las demás funciones, cada una se mueve para que la evaluación sea estético y agradable a la vista del usuario.

Podemos observar que las etiquetas que se crearon son A, B, C y D, una etiqueta para cada función, mientras que al mirar en la vista algebraica GeoGebra los denomina b, c, d y e. Esta denominación que GeoGebra le da es lo que se va a utilizar para los valores lógicos, para que aparezca o desaparezca la respuesta correcta o incorrecta. Entonces se tiene que la denominación b y c son las funciones crecientes y la denominación d y e son las funciones decrecientes, es decir, serán las respuestas incorrectas.

El *cuarto* es configurar cada casilla de verificación, primero de respuesta correcta, seleccionar la opción de propiedades, en avanzado, condiciones para mostrar el objeto, en el menú de escritura se encuentran los símbolos lógicos para poder escribir en minúscula $b \wedge c \wedge (\neg d \wedge \neg e)$, clic en enter y ya queda configurada la condición para mostrar el objeto. Lo mismo se hace para configurar la respuesta incorrecta que en este caso la condición para mostrar el objeto es $d \wedge e \wedge (\neg b \wedge \neg c)$, (los símbolos lógicos se encuentran en las barras de entrada de GeoGebra), así entonces ya se tienen los valores.

Si se desmarca la opción A y B automáticamente aparece la respuesta incorrecta C y D sus gráficas. En caso contrario, si se desmarca eso y se marca la etiqueta A y B aparece la opción correcta y sus gráficas.

Figura 41

Cambios en la configuración de la casilla PRUEBA

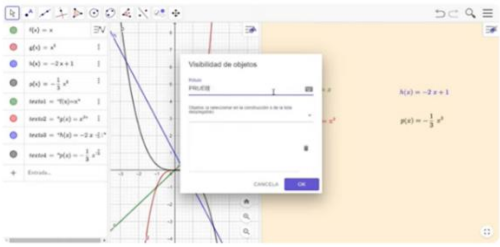


Figura 42

Configuración de los textos

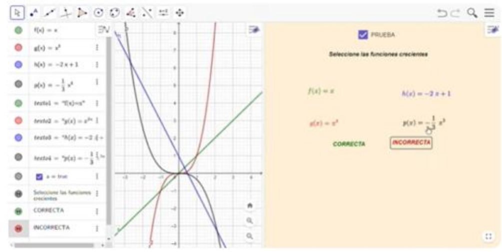


Figura 43

Asociación de las casillas de verificación con las variables booleanas.

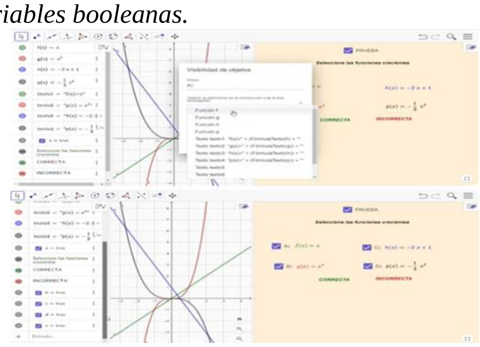


Figura 44

Denominación de etiquetas

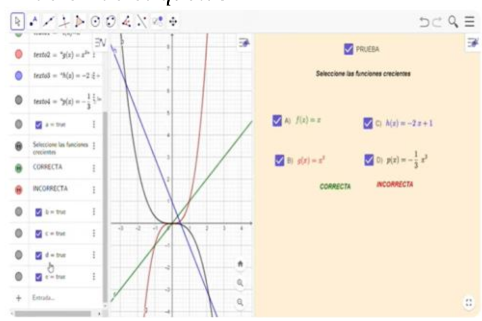


Figura 45

Condiciones específicas para que el objeto se muestre en pantalla.

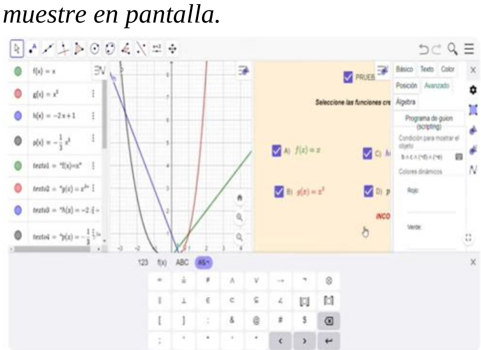
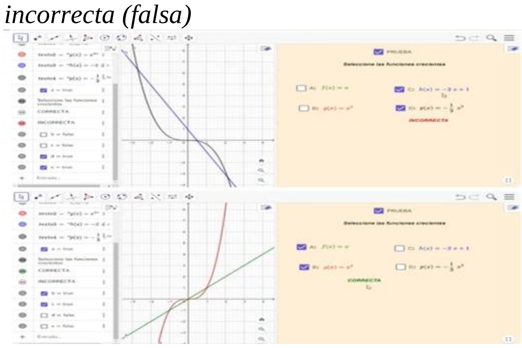


Figura 46

Visualización de la respuesta correcta (verdadera) o incorrecta (falsa)



3) Recurso

Para ejemplificar la utilidad de las casillas de verificación, se ilustró su uso a partir de las funciones crecientes y decrecientes.

Primero es introducir en la barra de entrada cuatro funciones, dos crecientes y dos decrecientes. La primera es la función(lineal) $f(x) = x$, la segunda función (polinómica) $g(x) = x^3$. Luego se crea la tercera función en este caso una función decreciente (lineal) $h(x) = -2x +$

1 y una cuarta función (polinómica) $p(x) = -\frac{1}{3}x^3$ que será la otra función decreciente, ahí ya se tiene entonces el conjunto de funciones, se le cambia de color a la función naranja por un color negro para que no cree confusiones al usuario por el parecido a la función roja.

Segundo es activar la vista gráfica dos, desactivar la cuadrícula y el plano cartesiano para introducir los textos. El primer texto es la de PRUEBA sin asociar a ningún objeto o función, el siguiente texto a introducir es la de “Selecciona las funciones crecientes” ponerlo en negrita y centrarlo a la pantalla para posteriormente fijarlo. Generar otros textos con el nombre de cada función, y para que este esté asociado a la vista gráfica uno configurar cada función con el color correspondiente. Crear otro texto con las opciones de $A, B, C\ y\ D$ respectivamente y asociarlo con cada función creada. El siguiente texto creado es la de opción CORRECTA e INCORRECTA, la correcta de color verde y la incorrecta de color rojo.

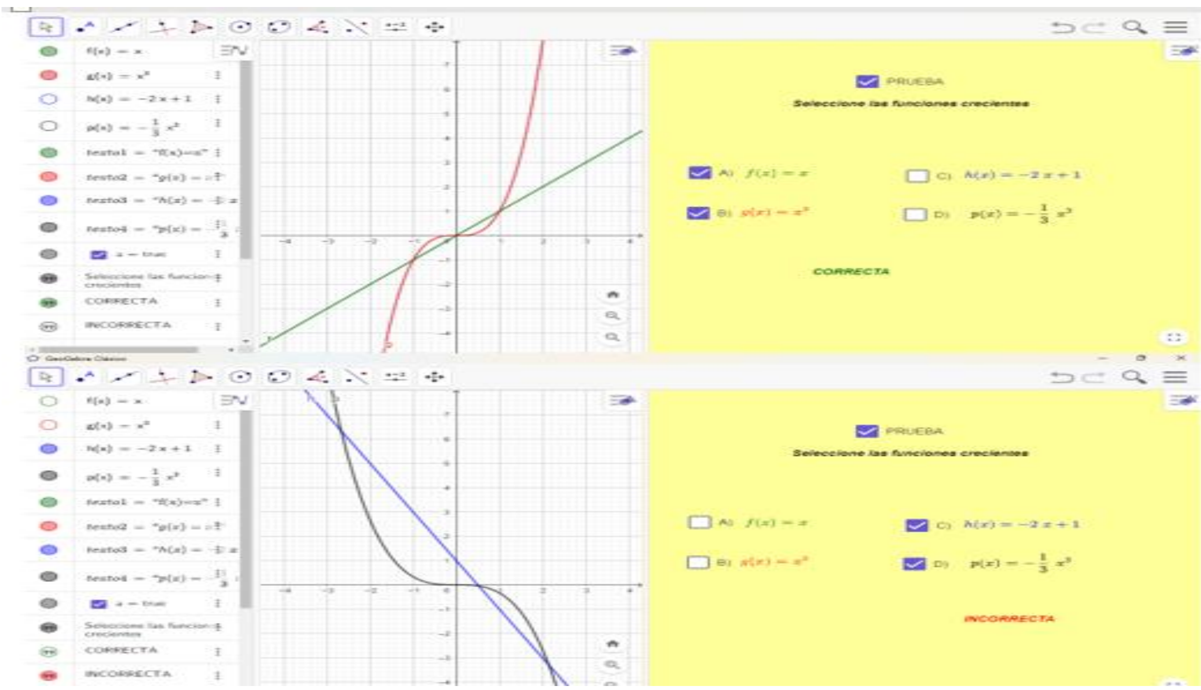
Tercero es configurar cada casilla, primero la opción de respuesta correcta o verdadera, seleccionar la opción de propiedades, en avanzado, condiciones para mostrar el objeto, en el menú de escritura se escriben los símbolos lógicos, hay que escribir en minúscula $b \wedge c \wedge (\neg d \wedge \neg e)$, clic en enter y ya queda configurada la condición para mostrar el objeto. Lo mismo se hace para configurar la respuesta incorrecta que en este caso la condición para mostrar el objeto es $d \wedge e \wedge (\neg b \wedge \neg c)$, y así entonces ya se tienen los valores.

Entonces al seleccionar cualquiera de las opciones crecientes o decrecientes. Aparecerá la respuesta CORRECTA en caso de seleccionar las funciones crecientes o al seleccionar las opciones decrecientes aparece la respuesta INCORRECTA, cada una con su gráfico correspondiente. En dado caso que el usuario seleccione una opción de función creciente y otra de función decreciente, no aparecerá marcada en pantalla la opción CORRECTA o

INCORRECTA, tampoco habrá representación gráfica debido que no está configurado para estos casos.

Figura 47

Ejemplo del recurso utilizado en la sección de casillas de verificación.



Nota: captura de pantalla del ejemplo del recurso utilizado en la sección de casillas de verificación, disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

4) Evaluación

En esta sección se plantean las siguientes interrogantes

¿cuál es la utilidad de las casillas de verificación?

La respuesta esperada es que los profesores puedan describir la utilidad de las casillas de verificación, el cual lo podrán hacer a partir de la observación del video y de realizar la práctica con el ejemplo del recurso disponible en la sección del módulo.

¿Qué son las variables booleanas?

La respuesta esperada es que los profesores puedan definir que son las variables booleanas o variables de verdad, puesto que se estarán trabajando con las mismas para definir las casillas de verificación.

También se plantea una tarea en la sección:

Crea un recurso utilizando las casillas de verificación de GeoGebra

Al realizar la práctica con el ejemplo del recurso y con la observación del video los profesores podrán crear para su propio recurso que posteriormente utilizarán en sus aulas de clase con sus estudiantes.

Las dificultades que se podrían presentar al trabajar con el recurso son el desconocimiento de las variables booleanas y para qué se utilizan en las casillas de verificación. También trabajar con dos vistas gráficas al tiempo podría generar dificultad debido a que uno debe seleccionar siempre la vista donde necesita hacer la escritura correspondiente.

El usuario podría confundir las variables que asigna GeoGebra con la denominación que realiza el usuario, para la simbolización de valores lógicos asegurarse de utilizar los valores que asigna GeoGebra.

Por otro lado, cuando se esté determinando los casos en que aparecerán o desaparecerán las respuestas hay que asegurarse de utilizar los nombres de las variables que por defecto ha dado GeoGebra junto con los símbolos lógicos correctos.

4.1.4. Botones

Propósito de la sección: La cuarta sección del módulo son los botones en GeoGebra, que permiten a los usuarios representar funciones y realizar diversas acciones como: configurar para que estos se animen, aparezcan o desaparezcan y se reinicien de manera automática.

Elementos matemáticos involucrados:

Representación gráfica de funciones.

Funciones par e impar y los cambios que estas producen.

Descripción de la sección

1) Introducción: Aquí se inicia con una introducción de lo que se encontrará en la sección de botones.

Figura 48

Introducción de la sección botones

Introducción

¡Bienvenido(a) a esta sección del módulo de GeoGebra! En esta sección explorarás y aprenderás sobre los botones y cómo utilizarlo en la plataforma GeoGebra. Comenzarás observando un video explicativo que te mostrará el uso básico de los botones de GeoGebra, seguido de un recurso práctico que muestra su aplicación en el estudio de funciones y la variación. Para finalizar, pondrás a prueba lo aprendido con un cuestionario de tres preguntas, diseñado para reforzar tus conocimientos. ¡Prepárate para explorar el potencial de GeoGebra!

Funciones involucradas

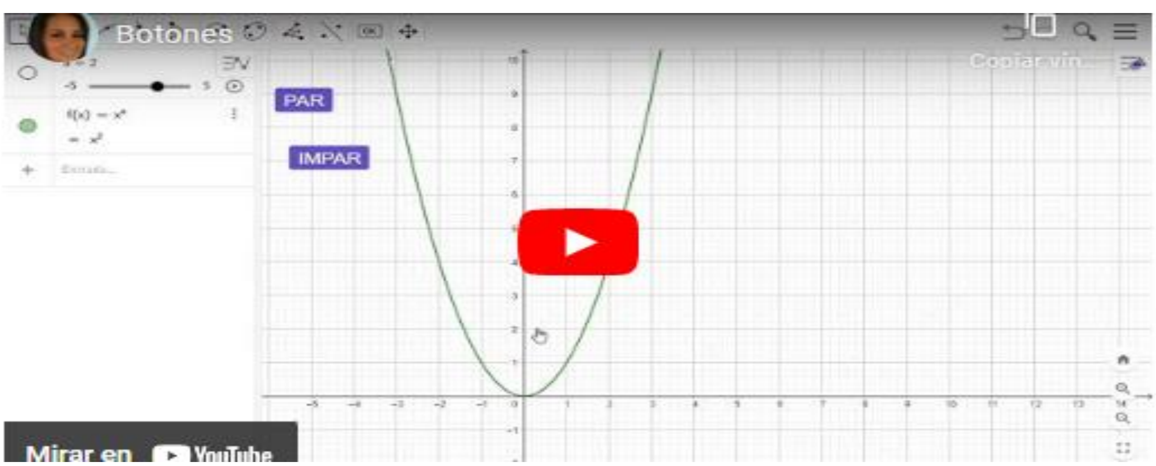
Funciones pares: la función f es par si para toda x en su dominio $f(x) = f(-x)$.
Funciones impares: una función f se denomina impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio.

Nota: captura de pantalla de la introducción sección de botones disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

2) Video:

Figura 49

Video instructivo sobre botones



Nota: captura de pantalla del video publicado en YouTube sobre botones, disponible en https://www.youtube.com/watch?v=XhPEFFbeb4I. Elaboración propia.

Funciones pares: La función f es par si para toda x en su dominio $f(x) = f(-x)$.

Funciones impares**:** Una función f se denomina impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio.

Lo *primero* es definir un número al que se le denomina a, en el caso del video $a = 2$, lo que automáticamente genera un deslizador que por defecto se define el intervalo entre -5 y 5, que según el requerimiento esto se puede definir o redefinir con el intervalo de número que se decida y de la naturaleza que se quiera.

Segundo se define una función que será par o impar dependiendo de la manipulación de los botones, para el efecto se genera la función $f(x) = x^a$, a través del cual se puede ir manipulando el valor de a que se había definido previamente con el deslizador. En el caso del ejemplo haciendo que a sea igual a cero para generar el primer botón al que se denominará PAR.

El *tercer* paso es generar el botón, en en penúltimo menú de GeoGebra se selecciona Botón y se escribe en el rótulo la palabra PAR. En la parte de abajo en el script de GeoGebra se da la instrucción de que la función Valor de a cambie a 2 para que sea par y así se obtiene el primer botón creado.

El *cuarto* paso es crear otro Botón al que se le denomina IMPAR y se le da la instrucción de que el valor de a cambie a 3 y así obtener el siguiente botón impar. De esta forma se tiene el primer par de botones. Luego se hacen varios análisis con la función y el botón para luego manipular los botones.

El *quinto* paso es seleccionar el botón PAR automáticamente se visualiza la función de x^2, sin embargo, al seleccionar IMPAR la función se vuelve impar y la función cambia a x^3.

El *sexto* paso es generar una fuente de activación del deslizador en el comando escribir la palabra inicia animación, seleccionando la opción de iniciar animación, se copia el texto tal como se visualiza en la barra de entrada $IniciaAnimación(\,)$ para generar el botón. En el rótulo escribir Animar y en el guion o script se copia el texto $IniciaAnimación(\,)$ y dentro del paréntesis se coloca el deslizador que se quiere animar, que en este caso es a y se presiona la tecla ok para poder establecerlo y de esa manera se podrá observar las diferencias.

Los botones PAR e IMPAR generan cambios en la paridad o en la imparidad del número, pero el botón Animar inicia el deslizador que va cambiando en términos de la variable a. Así mismo se va generando cambios en términos de la función. En algunos casos se vuelve negativo por lo que no se tendría un dominio claro, sin embargo, se tendría claro los cambios posibles.

Otra forma de utilizar los botones es generando cambios en objetos visibles y no visibles, para eso se pausa el botón y se genera un texto, seleccionando texto. Con la fórmula látex se escribe la función $f(x)$ luego en la opción avanzado se encuentra el logo de GeoGebra y la función generada con anterioridad para poder vincular al texto creado, clic en ok y se obtiene el objeto que una vez listo se decide si será visible o invisible dependiendo del botón. Generando el deslizador "ver", esta palabra se escribe en la barra de entrada de la siguiente forma: $ver = 0$, lo cual crea un deslizador. Al texto generado de la función se le incorpora algunas propiedades, seleccionando el texto, clic derecho sobre el texto y en propiedades en la opción avanzado, se elige condición para mostrar el objeto, en ella se escribe la variable ver de la misma forma que se escribió anteriormente en el comando de entrada, pero en este caso es con doble igual $(==)$ así $ver == 1$, el doble igual se debe colocar porque es una condicional. Para que el Botón tenga todos los datos debe tener el igual de comparación y el igual de estimación, clic en enter y ya queda listo.

El último paso es establecer el botón de inicio para que inicie todos los objetos, generando otra vez un nuevo botón y en rótulo escribir $INICIO$, en script darle la instrucción de que reinicie cuando el valor de “ver” sea cero ($Valor(ver, 0)$) y cuando el valor de “ver” a sea también cero ($Valor(a, 0)$) y esa serían las dos variables, seleccionar ok y el botón ya queda establecido y se puede observar que se han reiniciado todos los objetos creados.

Se pude hacer aún más interesante dando clic sobre la función establecida en la barra de entrada, luego en propiedades, opción avanzado y en condiciones para mostrar el objeto nuevamente se escribe $ver == 1$, de igual manera se tiene la posibilidad de que con colores dinámicos se validen los objetos según el color en términos de variables numéricas. Por ejemplo en el color dinámico, se elige el color rojo y se escribe $1/abs(a)$ (uno sobre valor absoluto de a) dar clic en enter y se puede observar el cambio que genera al dar clic en el botón animar que se había establecido, al animar se puede ver que la variación del color rojo genera variación en el tono de la función que también depende de la variable.

Figura 50
Definir deslizador

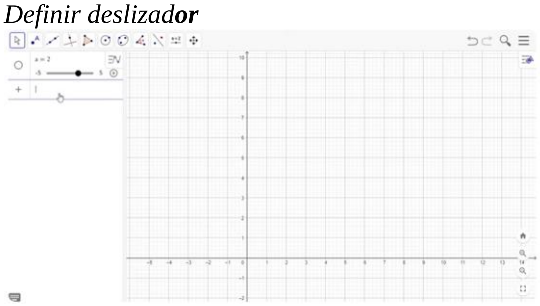


Figura 51
Generar la función

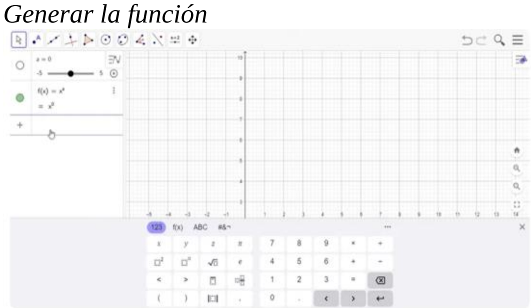


Figura 52
Generación del botón PAR

Figura 53
Generación del botón IMPAR

Figura 54

Visualización de las funciones

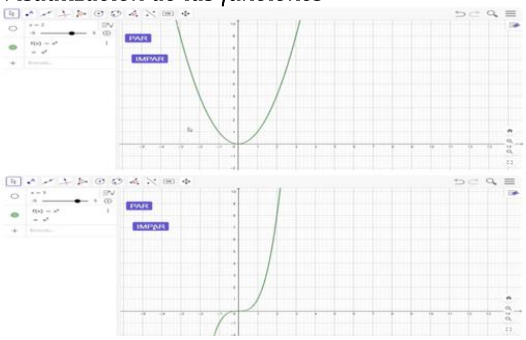


Figura 55

Animación de los botones

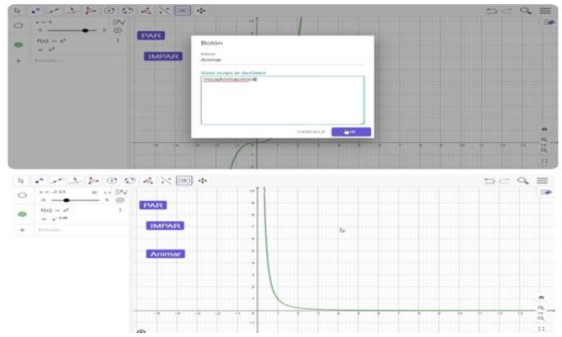


Figura 56

Condiciones para mostrar el objeto

Figura 57

Configuración del botón Inicio

3. Recurso

Para generar los botones de GeoGebra y manipular las funciones generadas se siguió la misma estructura del video para que el profesor pueda manipular los botones creados en el recurso y a partir de allí puedan familiarizarse con la opción de botones de GeoGebra y puedan crear recursos propios a partir de lo que han visto.

Luego se define un número al que se le denomina $a = 2$, lo que automáticamente genera un deslizador que por defecto define el intervalo entre -5 y 5 que según el requerimiento esto se puede definir o redefinir con el intervalo de número que se decida y de la naturaleza que se quiera, adicionalmente se define una función que será par o impar dependiendo de la manipulación de los botones, se genera la función $f(x) = x^a$.

Se puede ir manipulando el valor de a que se había definido previamente con el deslizador, en el caso del ejemplo haciendo que a sea igual a cero para generar el primer botón al que se denominará PAR, escribiendo en el rótulo entonces PAR y en el scrip de GeoGebra se da la instrucción de que la función Valor de a cambie 2 para que sea par y así se obtiene el primer botón. Se crea otro botón al que se le denomina IMPAR y se le da en el Scrip la instrucción de que el valor de a cambie a 3 obteniendo el siguiente botón impar.

Así se tiene el primer par de botones. Seguidamente se hacen varios análisis con la función y el botón para luego manipular los botones. Al seleccionar el botón PAR automáticamente se visualiza la función de x^2, sin embargo, al seleccionar IMPAR la función cambia a x^3. También se puede generar una fuente de activación del deslizador en el comando escribir la palabra Animar, seleccionando la opción de iniciar animación, seleccionar y copiar el texto tal como se visualiza en la barra de entrada $IniciaAnimación(\ )$ para generar el botón y en el rótulo escribir Animar y en el guion o script se copia el texto $IniciaAnimación(\ )$ y dentro del paréntesis se coloca el deslizador que se quiere animar, que en este caso es a clic en ok para poder establecerlo y de esa manera observar las diferencias.

Los botones PAR e IMPAR generan cambios en la paridad o en la imparidad del número, pero el botón Animar inicia el deslizador que va cambiando en términos de la variable a y así mismo se va generando cambios en términos de la función. En algunos casos se vuelve negativo por lo que no se tendría un dominio claro, pero sin embargo se tendría claro los cambios posibles.

Otra forma de utilizar los botones es generando cambios en objetos visibles y no visibles, seleccionando texto, con fórmula látex se escribe la función $f(x)$ luego en avanzado se encuentra el logo de GeoGebra y la función generada con anterioridad para poder vincular al texto creado, clic en ok se obtiene el objeto que una vez listo, se decide si será visible o invisible dependiendo del botón. Generando la variable “ver” a través de la barra de entrada se escribe lo siguiente: $ver = 0$.

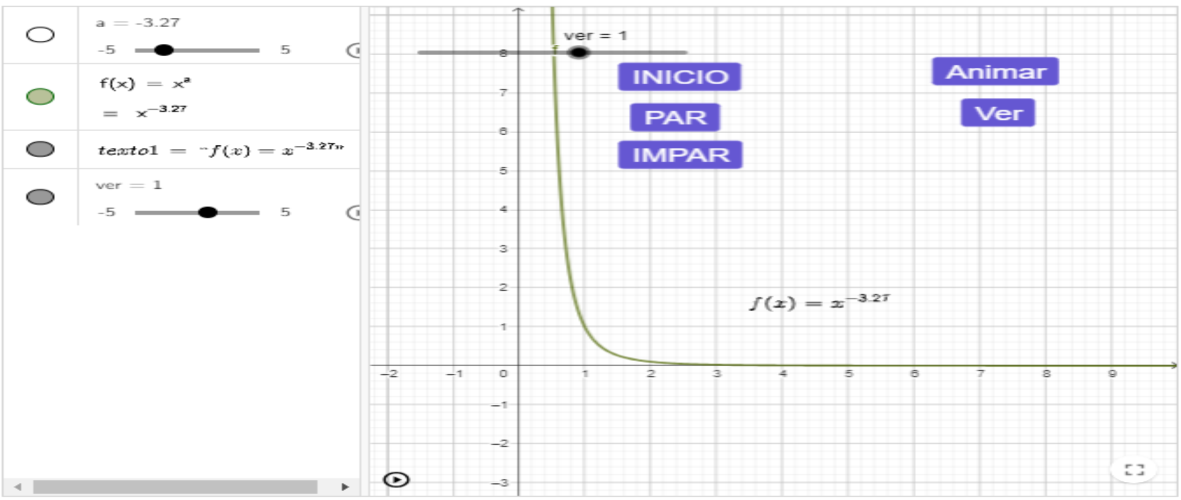
Al texto generado de la función se le incorpora algunas propiedades, seleccionando el texto, clic derecho en propiedades, luego en la opción avanzado, permite encontrar condición para mostrar el objeto, ahí se escribe la variable ver de la misma forma que se escribió anteriormente en el comando de entrada, pero en este caso es con doble igual ($==$), $ver == 1$, el doble igual se debe colocar porque es una condicional, debe tener el igual de comparación y el igual de estimación, clic en enter y ya queda listo.

Luego se genera el botón de VER, dado clic en botón en rótulo escribir VER y abajo en script dar la instrucción de que se visualice cuando la variable ver es 1 $(ver, 1)$, clic en ok y ya queda listo el siguiente botón generado. Luego se establece el botón de inicio para que inicie todos los objetos, generando otra vez un nuevo botón y en rótulo escribir INICIO, en script darle la instrucción de que reinicie cuando el valor de ver sea cero ($Valor(ver, 0)$) y cuando el valor de verde a sea también cero ($Valor(a, 0)$). Esas serían las dos variables, clic en ok y el botón ya queda establecido. Se puede observar que se ha reiniciado todos los objetos creados.

Además, se pude hacer aún más interesante dando clic sobre la función establecida en la barra de entrada, luego en propiedades, en la opción avanzado habilita la opción de condiciones para mostrar el objeto. Ahí nuevamente se escribe $ver == 1$, de igual manera se tiene la posibilidad de que con colores dinámicos se validen los objetos según el color en términos de variables numéricas. Por ejemplo, en la opción color dinámico, se selecciona rojo y se escribe $1/abs(a)$ (uno sobre valor absoluto de a) clic en enter y listo. Se puede observar el cambio que genera al dar clic en el botón animar que se había establecido, al animar se puede ver que la variación del color rojo genera variación en el tono de la función que también depende de la variable.

Figura 58

Ejemplo del recurso de la sección de botones



Nota: captura de pantalla del ejemplo del recurso de la sección de botones, disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

3) Evaluación

En esta sección se plantean dos interrogantes y una tarea.

¿Para qué sirven los botones de GeoGebra?

Se espera que el profesor pueda responder que los botones de GeoGebra sirven para generar nuevos objetos a partir de un simple clic, activando o desactivando las funciones generadas dependiendo de la configuración de los botones.

Al seleccionar un determinado botón, ¿las gráficas van cambiando?

A) Sí

B) No

El profesor podrá responder esta pregunta una vez que visualice el video y practique con el recurso porque se dará cuenta que al presionado determinado botón el mismo genera cambios en las funciones y variables generadas.

Diseña un recurso utilizando los recursos de GeoGebra

Se espera que el profesor pueda diseñar recursos propios utilizando los botones de GeoGebra, lo cual lo puede hacer utilizando varios botones al tiempo como en el video y en el ejemplo del recurso o seleccionar aquellos que le parecieron más relevantes.

Los profesores podrían tener dificultades para generar y manipular los deslizadores debido a que la función creada debe estar en relación con el mismo para que se pueda animar y generar cambios a medida que se mueve el deslizador de acuerdo a los valores asignados en el intervalo.

Al generar el botón también pueden surgir dificultades o confusiones ya que uno debe ir copiando el texto y pegándolo a medida que se generan los botones, los cuales si no se realizan con cuidado no van a generar el efecto esperado en las funciones y no se verán los beneficios de utilizar y manipular los botones. Otra dificultad podría ser la de poner los valores del script tal como está escrito en la barra de entrada, en condiciones para mostrar el objeto y asegurarse de escribirlo tal y como está en la barra de entrada o en el botón.

4.1.5. Tablas de Datos

Propósito de la sección: La última sección del módulo es la tabla de datos la cual posee una característica que permite a los usuarios introducir, organizar y analizar datos en forma de tabla, similar a una hoja de cálculo, permitiendo una integración fluida entre el álgebra, la geometría y el análisis de datos.

Elementos matemáticos involucrados: tabulación de datos

Descripción de la sección

1) Introducción

La sección inicia con una descripción breve de lo que tratará dentro de la misma la cual se describe en la introducción.

Figura 59

Introducción de la sección de tablas de datos

Introducción

¡Bienvenido(a) a esta sección del módulo tabla de datos de este cursillo sobre el uso de GeoGebra! Aquí trabajarás sobre la tabla de datos en la hoja de cálculos, que tiene una función similar a la de Excel y cómo lo puedes utilizar en la plataforma GeoGebra. Explorarás cómo utilizar este recurso y aplicarlo en las clases de matemáticas con los estudiantes. Aquí encontrarás un video explicativo que te servirá de guía para conocer las funciones y aplicaciones de la tabla de datos, seguido de un recurso práctico que explica su aplicación en el contexto de funciones y la variación. Finalmente podrás medir tus conocimientos con un cuestionario diseñado para consolidar lo aprendido.

Nota: captura de pantalla de la sección de tabla de datos, disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

2) Vídeo:

Figura 60

Vídeo explicativo de la sección de tablas de datos

Nota: captura de pantalla del video explicativo de la sección de tabla de datos, disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

El *primer* paso es seleccionar menú y luego la vista de hoja de cálculo, de esa manera se observa la vista hoja de cálculo el cual es muy similar al Excel que conocemos.

El *segundo* paso es seleccionar en la barra la opción de punto y ubicar ese punto en la vista gráfica, dar clic derecho y cerciorarse de la visibilidad del objeto como así también de la etiqueta, luego seleccionar la opción de registro en hoja de cálculo, de esa manera se obtienen las coordenadas de $x(A)$ y de $y(A)$, entonces para registrar las coordenadas del punto lo movemos y se obtiene las coordenadas del punto A.

Esto también se puede hacer de manera automática con el deslizador, para eso se selecciona en la barra la herramienta de deslizador y cerciorarse que tenga un nombre que para este caso es a y que el intervalo esté entre -5 y 5 dar clic en ok para que el deslizador quede definido y aparezca el deslizador en la barra de entrada, establecer otro punto que será denominado $(a, a+1)$, en la vista gráfica aparece el siguiente punto que es B, al igual que el punto A dar clic derecho sobre B y cerciorarse que el objeto y la etiqueta estén visibles y dar clic en la opción registro en hoja de cálculo obteniendo las columnas que corresponden a este punto B.

Figura 61

Vista de hoja de cálculo

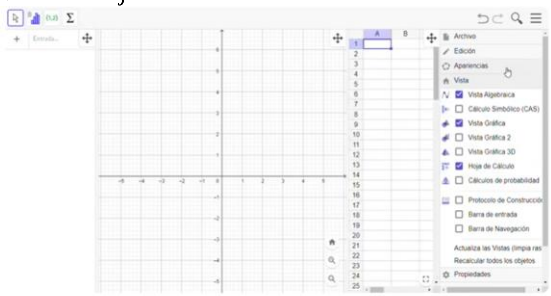


Figura 62

Registro en hoja de cálculo del punto A

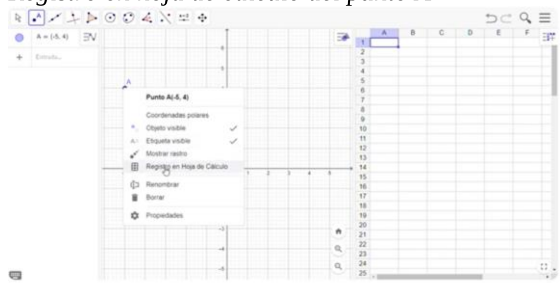


Figura 63

Registro en hoja de cálculo del punto B

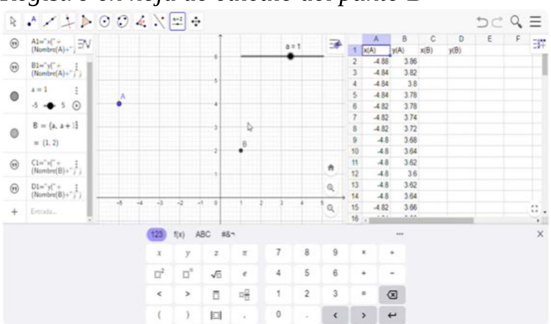
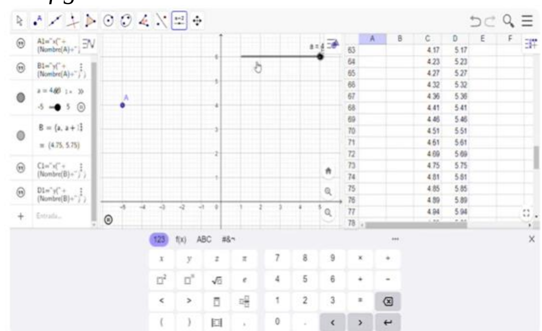


Figura 64

Configuración del deslizador



3) Recurso

Para ejemplificar el mismo se utilizó la herramienta de punto de la vista algebraica, generando puntos y utilizando deslizadores que estén vinculados a los puntos para que el mismo vaya generando de manera automática los valores correspondientes a los puntos generados en la tabla de datos y obtener el comportamiento bien definido de los puntos por una constante en este caso del deslizador generado, tal como se realiza en el video descrito con anterioridad.

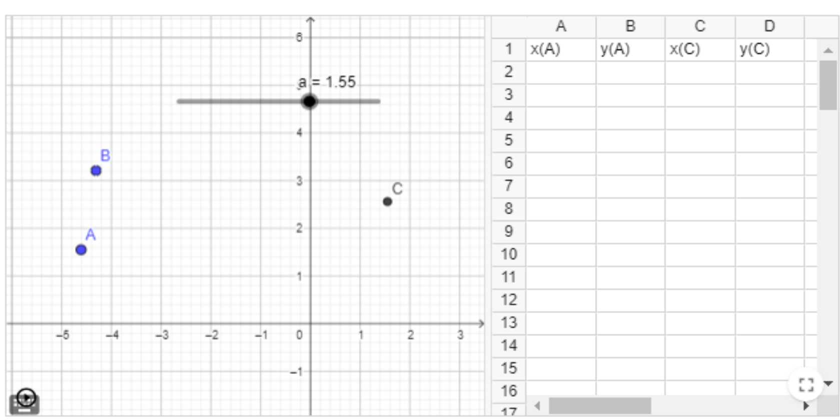
Se comienza dando clic en el menú y seleccionado la vista de hoja de cálculo, de esa manera se observa la vista hoja de cálculo el cual es muy similar al Excel que conocemos, el siguiente paso es seleccionar en la barra la opción de punto y ubicar ese punto en la vista gráfica, cerciorarse de la visibilidad del objeto como así también de la etiqueta.

Luego seleccionar la opción de registro en hoja de cálculo, de esa manera se obtienen las coordenadas de $x(A)$ y de $y(A)$. Entonces, para registrar las coordenadas del punto A se mueve en la pantalla y se obtienen las coordenadas del punto A, esto también se puede hacer de manera automática con el deslizador para eso se selecciona en la barra la herramienta la opción de deslizador, cerciorarse que tenga un nombre que para este caso es a y que el intervalo esté entre -5 y 5 y dar clic en ok para que el deslizador quede establecido y aparezca en la barra de entrada. Se establece otro punto que será denominado $(a, a+1)$, en la vista gráfica aparece el siguiente punto que es B, entonces como se hizo con el punto A, dar clic derecho sobre B y cerciorarse que el objeto y la etiqueta estén visibles, seleccionar la opción registro en hoja de cálculo obteniendo las columnas que corresponden a este punto B.

El siguiente paso es dar animación al deslizador y a medida que este se mueve va registrando también los valores en la tabla correspondiente al punto B. De esta manera se tiene el comportamiento de punto bien definido por una constante en este caso el deslizador o por un movimiento libre que se puede hacer de la misma manera que con el punto A.

Figura 65

Ejemplo del recurso de la sección de tabla de datos



Nota: captura de pantalla del ejemplo del recurso sobre registro en tabla de datos, disponible en https://www.geogebra.org/m/rxam2eqp#material/wf9awdb2. Elaboración propia.

4) Evaluación

Esta sección se conforma por dos interrogantes y una tarea.

¿Qué son las tablas de datos en GeoGebra?

Se espera que identifique que es una vista con la que cuenta GeoGebra muy poco conocida y por tanto poco explorada, cuya función es muy similar a las hojas de cálculo de Excel.

¿Para qué sirven las tablas de datos en GeoGebra?

La respuesta esperada es que los profesores mencionen que las tablas de datos sirven para registrar los valores producidos por los puntos generados en GeoGebra las cuales pueden ser de manera manual o automática a través del deslizador.

Diseña un recurso utilizando la tabla de datos en GeoGebra

Esta tarea tiene como finalidad que el profesor pueda diseñar para su propio recurso y conocer la utilidad de las tablas de datos a partir de lo observado y de esa manera explore otras herramientas de GeoGebra que le serán útiles para el proceso de enseñanza.

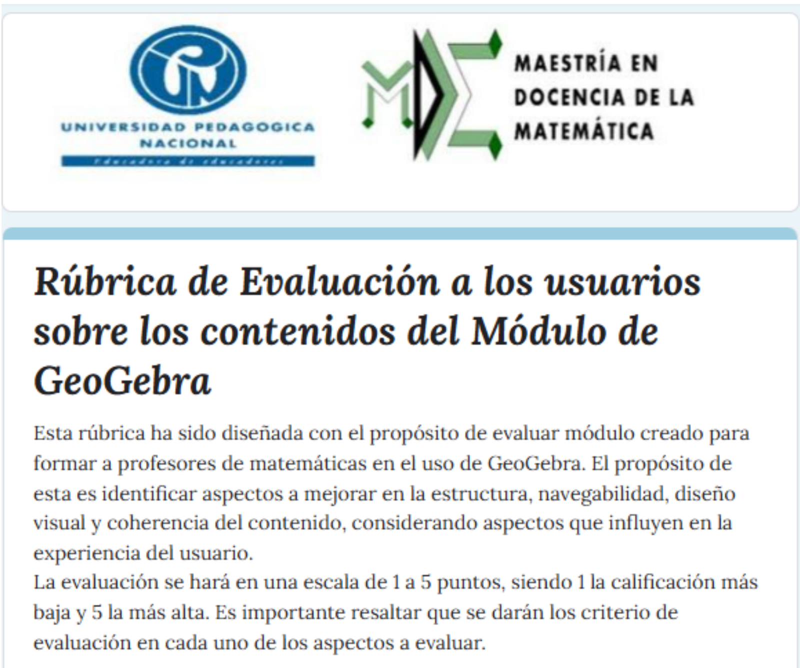
Los profesores podrían tener dificultades para generar la tabla de datos porque la misma no es visible a simple vista, sino que uno debe entrar en el menú y partir de ésta habilitar el registro en hoja de cálculo para poder utilizarlo. Otra dificultad que podrían tener es para generar el deslizador y que la misma genere los datos de manera automática en la hoja de cálculo de GeoGebra.

4.2. Evaluación a los usuarios sobre los contenidos del Módulo

En este apartado se presenta la evaluación que el profesor debe llevar a cabo después de haber completado el módulo. Con esta evaluación se pretende recoger la percepción de los profesores de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania acerca de su experiencia con el módulo de GeoGebra. El enlace para completar la evaluación está alojado en la sección de evaluación del módulo, el cual es: https://forms.gle/c2zA15qXdBM8ZRnRA

Figura 66

Presentación de la evaluación del módulo



Nota: Presentación de la rúbrica de evaluación del módulo, disponible en https://forms.gle/c2zA15qXdBM8ZRnRA. Elaboración propia.

A continuación, se comparte la tabla 8 con los criterios de evaluación y las cinco opciones de respuesta:

Tabla 3

Criterios de evaluación para profesores

Aspecto a evaluar	**Criterios de evaluación**
Organización de la Información (20%)	5: La información está claramente estructurada, con jerarquías bien definidas. Cada sección tiene su propio espacio y se sigue con facilidad. 4: La estructura es clara, pero podría mejorarse la disposición de algunas secciones para facilitar la lectura. 3: La estructura es comprensible, pero algunas secciones están sobrecargadas o se presenta dificultades para seguir la información. 2: La organización es confusa o las secciones no son claras. Se requiere reorganizar varias secciones para mejorar la experiencia del usuario. 1: La información está desordenada, y es difícil identificar las secciones principales.
Navegabilidad y Usabilidad (20%)	5: Los elementos de navegación son intuitivos, y se puede acceder a cualquier sección del cursillo con un máximo de dos clics. 4: Los elementos de navegación son accesibles, pero podrían reorganizarse los enlaces o los botones. 3: Se puede navegar a través de la mayoría de las secciones, pero las rutas son poco intuitivas o requieren múltiples pasos.

	2: La navegación no es intuitiva, y es difícil encontrar las secciones deseadas. 1: La navegación es confusa o no se puede acceder a todas las secciones, y se requiere una reorganización completa de los botones y enlaces para facilitar la interacción.
Diseño Visual y Estética (20%)	5: El diseño es visualmente atractivo, con uso apropiado de colores, tipografías y elementos gráficos que resaltan la información. 4: El diseño es estéticamente agradable, pero algunos elementos podrían mejorarse para generar mayor impacto visual. 3: El diseño es funcional, pero carece de armonía visual en la disposición de algunos elementos. 2: El diseño no es atractivo, y algunos elementos visuales distraen más de lo que aportan. 1: El diseño es pobre o distrae, y no hay coherencia visual entre los elementos.
Coherencia y Fluidez del Contenido (20%)	5:Todo el contenido está conectado y se presenta de manera completa y fluida, con una transición natural entre secciones. 4: Casi todo el contenido es coherente, pero algunas secciones pueden parecer desconectadas o incompletas. 3: La fluidez del contenido es irregular, y algunas transiciones no son naturales. 2: La coherencia entre secciones es baja, y se necesita reestructurar el flujo del contenido. El contenido está incompleto. 1: El contenido está totalmente desconectado o no está completo y carece de coherencia entre las secciones.
Funcionalidad y Experiencia del Usuario (20%)	5: Todos los elementos de (videos, recursos, Quiz) funcionan perfectamente y mejoran la experiencia de aprendizaje. 4: La mayoría de los elementos funcionan bien, pero algunas podrían mejorarse. 3: Los elementos funcionan de manera adecuada, pero algunas características no están implementadas de manera óptima 2: Hay varios elementos que no funcionan correctamente o se dificulta su uso. 1: La funcionalidad de los elementos es mínima o está rota, dificultando la interacción del usuario.

Nota: Aspectos a evaluar y criterios de evaluación para profesores, publicada en https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfYbZKHY18qvyrZqkzrN6H09ter815gKZ_UpfXk_Iu7Qw3Rcg/viewform?usp=send_form

En conclusión, tras un exhaustivo análisis de los documentos y la descripción del módulo diseñado, se puede afirmar que este cumple con las características y funciones esperadas de un módulo de aprendizaje. El módulo se destaca por su flexibilidad, lo que permite a los profesores adaptarlo a sus necesidades individuales y estilos de aprendizaje. Además, proporciona un recurso didáctico independiente que fomenta la autonomía, facilita la evaluación del progreso y actúa como material de referencia confiable. Estas cualidades aseguran que el módulo no solo sea una herramienta adecuada para el aprendizaje, sino que también contribuye al desarrollo de habilidades, promoviendo un enfoque integral y dinámico en el proceso educativo.

5. Conclusiones

En este capítulo se presenta las consideraciones a las que se llegó en relación con el cumplimiento de cada uno de los objetivos propuestos, y la experiencia adquirida con el desarrollo de este trabajo.

Respecto al primer objetivo específico, “Determinar las diferentes herramientas de GeoGebra que se incluirán en el módulo, teniendo en cuenta su potencial para generar recursos que los profesores puedan usar con sus estudiantes”, se puede sostener que se logró de manera adecuada. Se realizó un análisis exhaustivo de las diversas herramientas disponibles en GeoGebra. Dado que existen numerosos tutoriales y recursos relacionados con geometría y álgebra, se optó por explorar herramientas y recursos menos comunes, lo que permitió seleccionar aquellos más adecuados para la enseñanza del cálculo en el nivel medio de Paraguay. Esto es especialmente relevante, ya que la página de www.geogebra.org ofrece cuantiosos recursos sobre geometría y álgebra. Entre las herramientas identificadas se incluyen la creación de gráficos interactivos, simulaciones dinámicas y la representación visual de conceptos matemáticos. Al proporcionar ejemplos concretos de cómo utilizar estas herramientas, el módulo capacita a los profesores para integrar estas tecnologías en sus clases, enriqueciendo así el aprendizaje de sus estudiantes.

En lo que concierne al segundo objetivo específico, “Determinar características de objetos matemáticos para ejemplificar las herramientas de GeoGebra en el módulo”, se puede concluir que se ha cumplido este objetivo. Las secciones del módulo son: *herramientas básicas* en esta sección se involucran representación gráfica de funciones, representación tabular de funciones, definición de función, evaluación de una función en un punto específico; *casillas de entrada* incluye representación gráfica de funciones, funciones cuadráticas, transformaciones de funciones, cálculo y variación; *casillas de verificación* comprende representación gráfica de funciones, funciones crecientes y decrecientes, función polinómica, evaluación de funciones; *botones* involucra a representación gráfica de funciones, funciones par e impar y los cambios que estas producen; *tablas de datos* incluye la tabulación de datos, todas las secciones diseñadas con el propósito de ilustrar mediante ejemplos. Por lo tanto, haciendo alusión al conocimiento tecnológico del contenido que, si se tuvo en cuenta el conocimiento del contenido, pero el objetivo primordial era aprender a usar herramientas de GeoGebra y de esta manera enseñar a los profesores a diseñar recursos para que utilicen con sus estudiantes.

Sobre el tercer objetivo específico, que consiste en "diseñar secciones del módulo para que los profesores generen sus propios recursos", se puede afirmar que se ha cumplido satisfactoriamente, porque sí se logró diseñar el módulo con cinco secciones. Las secciones del módulo han sido estructuradas de manera clara y funcional, denominadas herramientas básicas, casillas de entrada, casillas de verificación, botones y tablas de datos. Los diseños de las secciones del módulo están preparados de modo que al regreso de las responsables a Paraguay sean realizadas las capacitaciones y a través de estas capacitaciones llevar a cabo el desarrollo del módulo. Las secciones están diseñadas para facilitar a los profesores la creación de recursos personalizados que se adapten a sus necesidades pedagógicas y a los contenidos que deben impartir a sus estudiantes.

Además del diseño del módulo, se realizó un análisis a priori para identificar posibles dificultades y errores que los profesores podrían enfrentar durante la capacitación, lo que demuestra que es un recurso beneficioso para profesores que no tienen experiencia con el software. Para complementar la experiencia, se elaboró un formulario que permitirá a los profesores evaluar su experiencia con el módulo y expresar sus percepciones sobre su implementación.

En relación con el objetivo general de este trabajo de grado, que consistió en "Diseñar un módulo en GeoGebra que brinde herramientas al profesor de matemáticas para estructurar recursos que pueda implementar con sus estudiantes del nivel medio de Paraguay", se puede afirmar que se ha cumplido exitosamente. El módulo fue diseñado con una estructura uniforme en sus cinco secciones, lo que facilita su uso y comprensión. Este trabajo no solo proporciona un recurso valioso para los profesores de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania, sino que también establece un camino para la mejora continua en la enseñanza de las matemáticas a través de herramientas tecnológicas.

Las autoras lograron avances conceptuales significativos en matemáticas, fundamentados en referentes teóricos y en la experiencia adquirida durante la elaboración de su trabajo de grado. En este proceso, se revisaron aspectos de la función que habían quedado olvidados, como la transformación de funciones y diversos tipos de funciones junto con sus características específicas, ya que previamente solo se conocían las cuatro funciones más básicas. Se destacó también la importancia de comprender el círculo unitario para explicar y demostrar las funciones trigonométricas. Al retomar estos conceptos, se logró profundizar en el conocimiento y obtener una comprensión más sólida de los mismos. La intensidad del programa de la Maestría, así como la profundidad con la que se abordan los temas en la Universidad Pedagógica, exige un análisis detallado que contemple el porqué, el para qué, el cómo y el para quién de cada tema, lo que contrasta significativamente con el enfoque que se tenía en Paraguay.

En cuanto al aspecto tecnológico, las autoras tuvieron que aprender a manejar GeoGebra desde cero. Al inicio de la Maestría, solo conocían su existencia, pero no tenían experiencia en su uso. Aunque su intención era realizar un trabajo de grado utilizando este software, el proceso de aprendizaje debía comenzar por ellas mismas, lo que requirió tiempo y dedicación. Sin embargo, este desafío demostró que con voluntad se puede aprender y disfrutar del proceso.

Gracias al asesoramiento de los directores de tesis, a la participación en seminarios y al trabajo autónomo, las autoras lograron adquirir habilidades en el manejo del software. Esto no solo les permitió afianzar sus competencias en GeoGebra, sino que también les brindará la oportunidad de instruir a los profesores en sus zonas de influencia, ayudándoles a adquirir estas mismas habilidades. Este proceso de apropiación del software fortalece sus capacidades y les permite realizar representaciones y demostraciones que, con lápiz, papel y pizarra, resultarían difíciles de llevar a cabo.

Es importante mencionar que, durante esta Maestría, las autoras tuvieron la oportunidad de conocer diversos modelos de conocimiento para profesores, destacándose algunos como el TPACK, CK, MTSK, QK y EOS, conocimientos que podrían considerarse didácticos. Cada uno de estos modelos cuentan con autores representativos que han trabajado arduamente por la educación matemática. Además, se descubrió que algunos de estos modelos incluyen metodologías de investigación propias. También se aprendió sobre metodologías específicas para la investigación y profundización, como las estrategias de diseño, que abarcan la estrategia naturalista, la estrategia clínica y la estrategia de diseño. Todas estas estrategias están definidas por tipos y etapas, lo que proporciona un marco claro para su aplicación.

Luego de este tránsito creemos que la Maestría ha sido una oportunidad gigantesca y como tal hay que seguir sea por el Doctorado o por formar parte de comunidades de aprendizaje de matemáticas o de grupos de investigación de educación matemática.

Referencias

Arévalo, B., y Cáceres, J. (2022). *Enseñanzas, aprendizajes y experiencias con GeoGebra y sus funcionalidades, en la constitución del profesor de matemáticas*. [Tesis de Maestría Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional IPN. Disponible en http://hdl.handle.net/20.500.12209/18243

Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., y Del Sol Martínez, J. L. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, *15*(70), 102-108. Epub 02 de diciembre de 2019. de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=es.

Caicedo Bohórquez, C. (2017). *Cualificación de la práctica docente en el área de matemáticas con apoyo de TIC.* [Tesis de maestría en Educación, Universidad de los Andes]. Seneca Repositorio institucional. Disponible en: http://hdl.handle.net/1992/61349

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Editorial Universidad de Antioquia. Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Cisneros, M. (2022). *Formación del profesorado dentro del marco del modelo del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK) como innovación en la enseñanza de las cónicas en nivel medio superior en UNIVA*. [Trabajo recepcional para obtener el de grado de maestro en tecnologías para el aprendizaje, Universidad de Guadalajara]. Disponible en http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.35569.90720

Córdoba, F., y Ardila, P.F. (2016). GeoGebra de artefacto a instrumento proceso de transformación*.* *Revista ALME*. 1389 -1396. http://funes.uniandes.edu.co/11879/1/Cordoba2016GeoGebra.pdf

Córdoba, Y., Ruiz, K. Y., y Rendón, C. E. (2015) La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *RECME Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 1(1), 2500-5251. junio - diciembre de 2015 https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1240871/Cordoba2015Comprension.pdf

Fiallo, J.E. y Parada, S.E. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de Precálculo mediado por GeoGebra*. Colección SEA UIS.

Gómez, P y Mesa, V. (1998)). Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de las funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas. Una empresa docente. Disponible en: http://hdl.handle.net/1992/40567

González, B. M., (2015). Modulo y Desarrollo de Competencia: Origen de una Concepción Diferente. *Actualidades Investigativas en Educación*, 15(3), 610-623. http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-47032015000300610&lng=en&tlng=es.

Jiménez, W. (2018). *Categorización de aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas escolares: GeoGebra*. [Videoconferencia]. Bogotá (Colombia). https://youtu.be/S2VWyF1KP9Q

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2005). What happens when teachers design educational technology? The development of technological pedagogical content knowledge. *Journal of Educational Computing Research*, 32 (2), 131-152.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2007). What Is Technological Pedagogical Content Knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9 (1). 60-70.

https://citejournal.org/volume-9/issue-1-09/general/what-is-technological-pedagogicalcontent-knowledge

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*. 9(1), 60-70.

Koehler, M., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 6(10), 9–23. https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2011.08.019

Mesa, V.M. (1996) Lo bueno, lo malo y lo feo de un curso de precálculo con calculadoras gráficas. *Revista EMA*. 1 (2), 115 -124.

Ministerio de Educación y Ciencias (2007). *Res. Nº 2309 "Por la cual se aprueba el manual de funciones del educador de gestión departamental e institucional con funciones docentes, técnicas y administrativas*. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/6580

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., Castro, E., (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2011, 29(1), 75-88. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824.

Mora, F. (Setiembre 17, 2019). De la Reforma a la transformación educativa en Paraguay (Ensayo). *Ciencia del Sur*. https://cienciasdelsur.com/2019/09/17/reforma-a-transformacion-educativa-en-paraguay/

NCTM (1991). Professionais standards for teaching mathematics. Reston: NCTM.

Quiroga Campos, S. y Jaimes Gómez, F. (2020). *Tipos de recursos en GeoGebra y su incidencia en el desarrollo del pensamiento variacional*. [Tesis de Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional IPN. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/12389.

Real Academia Española. (2023). *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.7 en línea]. https://dle.rae.es/ [Fecha de consulta :01/10/2024].

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4(1), 1-14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Santos - Trigo, M., (2009). Innovación e investigación en la educación en la educación matemática. *Innovación Educativa*, 9 (46), 5-13.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Swokowski. E. W., Romo Muñoz, J.H., y Cole, J.A. (2009). *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* (12a ed). Cengage Learning.

Universitas Muhammadiyah Malang. (2021, 9 de abril). *Overview of the understanding of learning modules and main functions*. https://lp2m.uma.ac.id/2021/04/09/overview-of-the-understanding-of-learning-modules-and-main-functions/

Vaillant, D., Rodríguez Zaidan, E., y Betancor Baigas, G. (2020). Uso de plataformas y herramientas digitales para la enseñanza de la Matemática. Ensaio: *Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 28(108), 1-23, 2020. Fundação CESGRANRIO. https://doi.org/10.1590/S0104-40362020002802241

Willermark, S. (2017) Technological Pedagogical and Content Knowledge: A Review of Empirical Studies Published from 2011 to 2016, *Journal of Educational Computing Research*, 56(3), 315–343. https://doi.org/10.1177/0735633117713114

Anexos

Anexo A. Ejemplos de Características del objeto matemático.

Ejemplo de función par:

Veamos el ejemplo $f(x) = 5x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 1$, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Para determinar si f es par, comenzamos examinando $f(-x)$ donde x es cualquier número real.

Siendo $\quad f(x) = 5x^6 - 3x^4 + 6x^2 + 1$

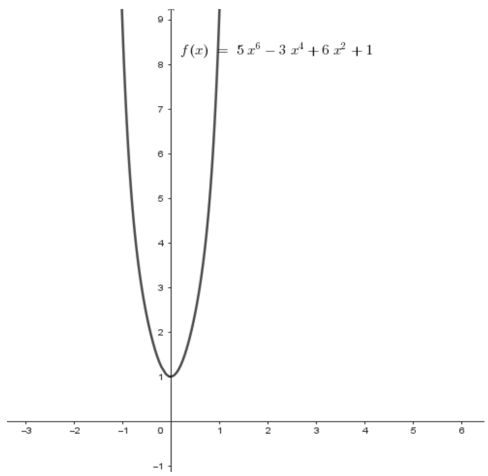
Reemplazamos $-x$ por x en $f(x)$ $\quad f(-x) = 5(-x)^6 - 3(-x)^4 + 6(-x)^2 + 1$

Simplificamos y tenemos que $\quad f(-x) = 5x^6 - 3x^4 + 6x^2 + 1$

Por lo tanto, $f(-x) = f(x)$, luego f es una función par.

Figura 67

Función par.



Nota: Captura de pantalla de la Función Par. Elaboración propia.

Ejemplo función impar:

Veamos el ejemplo $f(x) = 4x^7 + 6x^3 - 5x$, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Para determinar si f es impar, comenzamos examinando $f(-x)$ donde x es cualquier número real.

Siendo $\quad f(x) = 4x^7 + 6x^3 - 5x$

Reemplazamos $-x\ por\ x\ en\ f(x)$ $\quad f(-x) = 4(-x)^7 + 6(-x)^3 - 5(-x)$

Simplificamos $\quad f(-x) = -4x^7 - 6x^3 + 5x$

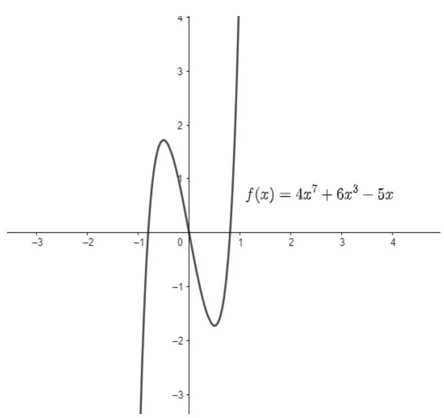
Factorizamos (-1) $\quad f(-x) = -(4x^7 + 6x^3 - 5x)$

Entonces tenemos que $\quad f(-x) = -f(x)$

Por lo tanto, como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar.

Figura 68

Función Impar.



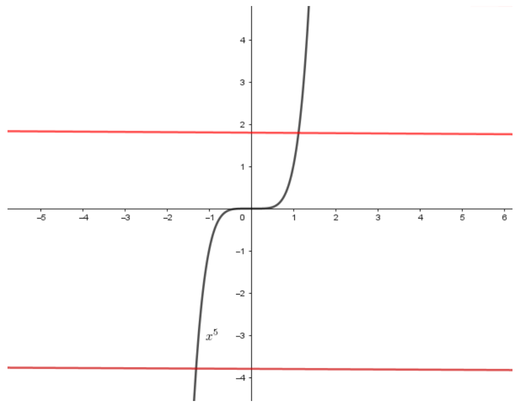
Nota: Captura de pantalla de Función Impar. Elaboración propia.

Ejemplo prueba de la recta horizontal

Veamos un ejemplo siendo $f(x) = x^5$

Figura 69

Prueba de la recta horizontal.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de prueba de la recta horizontal. Elaboración propia

Ejemplo de función inversa y cómo hallar la función inversa:

Para hallar la inversa de una función uno a uno hay que seguir los siguientes pasos:

a) Escribir $y = f(x)$

b) Resolver la ecuación para x en términos de y (toda vez que sea posible).

c) Reemplazar x y y. la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Hallar la inversa de la función

$$f(x) = 5x + 3$$

Se escribe

$$y = f(x)$$
$$y = 5x + 3$$

Luego, se despeja x de la ecuación

$$y - 3 = 5x$$
$$x = \frac{y - 3}{5}$$

Finalmente se reemplaza x y y:

$$y = \frac{x - 3}{5}$$

Por lo tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}$$

Con base en la propiedad de función inversa, se comprueba el resultado

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x + 3)$ $\qquad$ $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-3}{5}\right)$

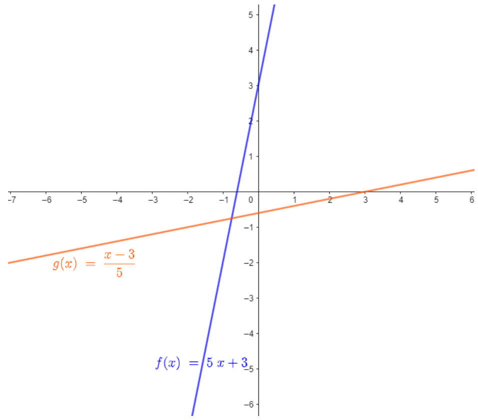
$= \frac{(5x+3)-3}{5}$ $\qquad$ $= 5\left(\frac{x-3}{5}\right) + 3$

$= \frac{5x}{5} = x.$ $\qquad$ $= x - 3 + 3 = x.$

En la gráfica se observa que $f(x)$ es la inversa de $g(x)$.

Figura 70

Ejemplo de Función Inversa.

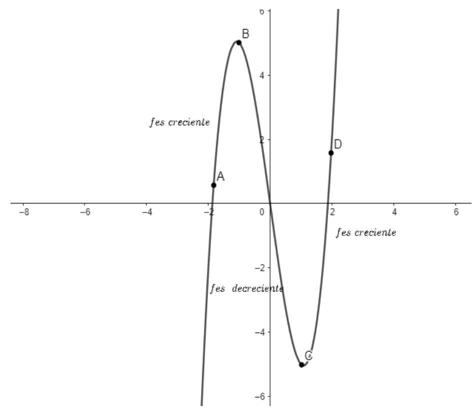


Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función Inversa. Elaboración propia.

Ejemplo de función creciente y decreciente

Figura 71

Función Creciente y Decreciente.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de función creciente y decreciente. Elaboración propia.

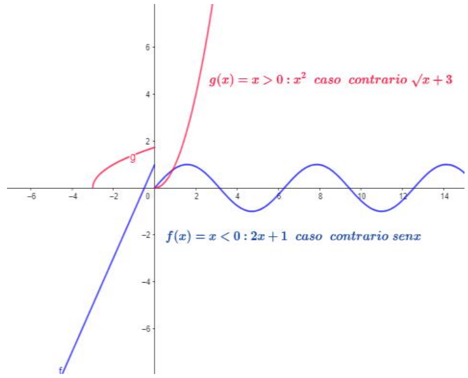
f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$
f es decreciente en $[b, c]$

Ejemplo de función por partes

Se observa que en la función $f(x)$ donde la condición es $x < 0$, entonces la función es $2x + 1$ y en caso contrario la función es $senx$. Sin embargo, en la función $g(x)$ la condición es $x > 0$, entonces la función es x^2 y en caso distinto la función es $\sqrt{x+3}$.

Figura 72

Función definida por partes.

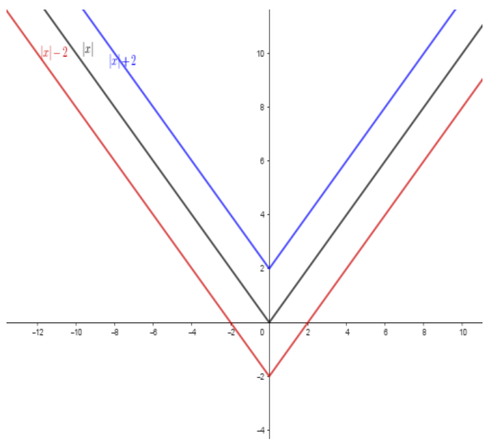


Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función definida por partes. Elaboración propia.

Ejemplo de desplazamiento vertical de una función

Figura 73

Desplazamiento vertical I.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de desplazamiento vertical I. Elaboración propia.

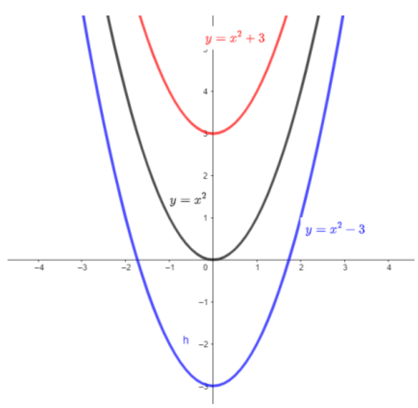
$y = |x|$

$y = |x| + 2$ La gráfica de $y = |x|$ se desplaza hacia arriba

$y = |x| - 2$ La gráfica de $y = |x|$ se desplaza hacia abajo

Figura 74

Desplazamiento vertical II.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de desplazamiento vertical II. Elaboración propia.

$y = x^2$

$y = x^2 + 3$ La gráfica de $y = |x|$ se desplaza hacia arriba
$y = x^2 - 3$ La gráfica de $y = |x|$ se desplaza hacia arriba

Ejemplo de desplazamiento horizontal de una función

Veamos el ejemplo $f(x) = (x)^3 - 5(x)$

$g(x) = (x+2)^3 - 5(x+2) =$

$$g(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 5x - 10$$

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 7x - 2$$

$$h(x) = (x-2)^3 - 5(x-2) =$$

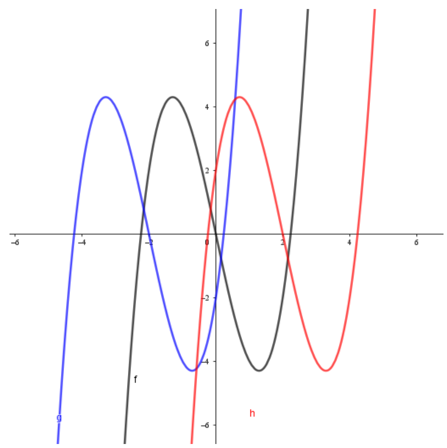
$$h(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 5x + 10$$

$$h(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$$

La gráfica de $y = x$ se desplaza hacia la izquierda
La gráfica de $y = x$ se desplaza hacia la derecha

Figura 75

Desplazamiento horizontal.



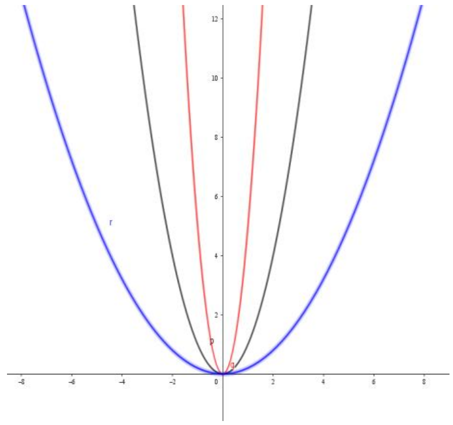
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de desplazamiento horizontal. Elaboración propia.

Ejemplo de elongación o comprensión vertical de una función

$$y = x^2$$
$$y = 5x^2$$
$$y = \frac{1}{5}x^2$$

Figura 76

Elongación o compresión vertical.



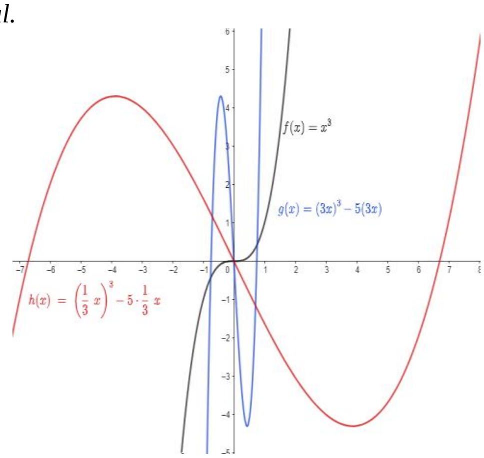
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de elongación o compresión vertical. Elaboración propia.

Ejemplo de elongación y compresión horizontal de una función

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = (3x)^3 - 5(3x)$$
$$g(x) = 27x^3 - 15x$$
$$h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}x\right)$$
$$h(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{5}{3}x$$

Figura 77

Elongación o compresión horizontal.



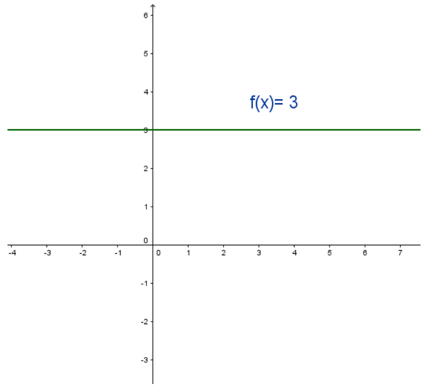
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de elongación o compresión horizontal. Elaboración propia.

Ejemplo función constante

Grafique la función $f(x) = 3$

Figura 78

*Función Constante***.**



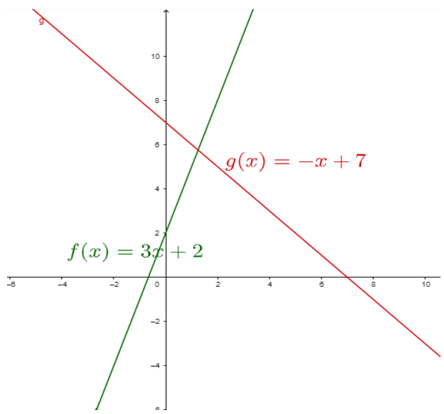
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función constante. Elaboración propia.

Ejemplo de función lineal

Son funciones lineales $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -x + 7$.

Figura 79

*Función lineal***.**

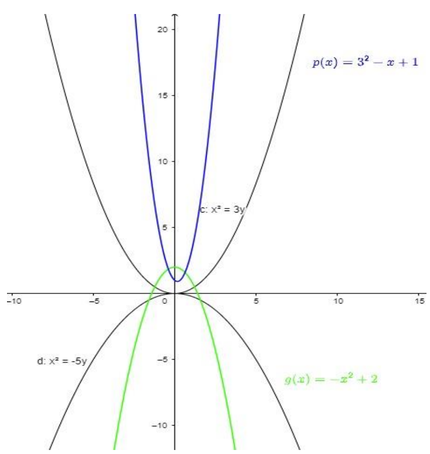


Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función lineal. Elaboración propia.

Ejemplo de funciones cuadráticas

Figura 80

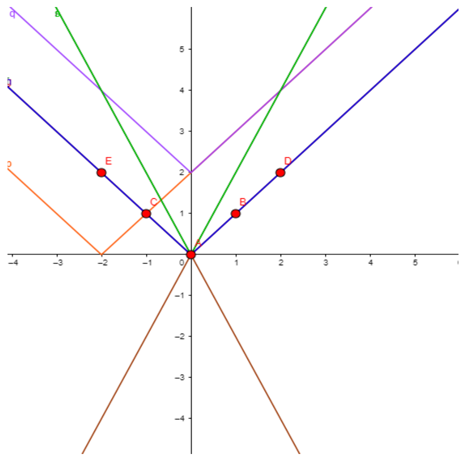
Función cuadrática.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función cuadrática. Elaboración propia.

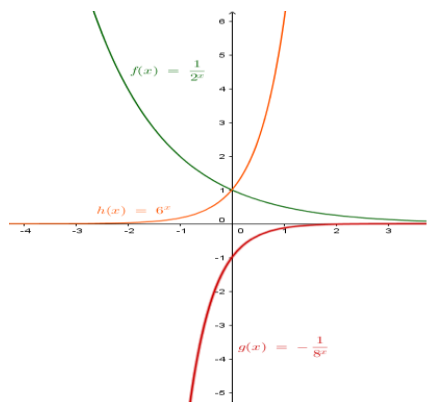
Ejemplo de funciones con valor absoluto

Figura 81
Función con valor absoluto.



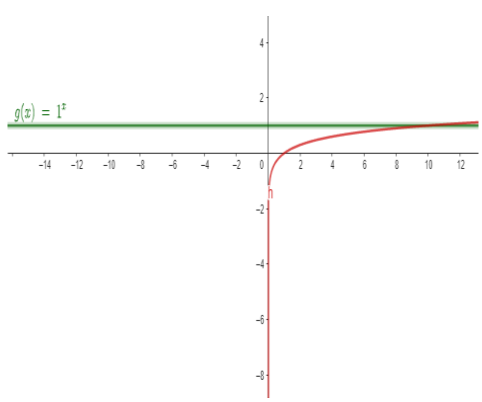
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función con valor absoluto. Elaboración propia.

Ejemplos de funciones exponenciales
Figura 82
Funciones exponenciales.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Funciones exponenciales. Elaboración propia.

Ejemplo de funciones logarítmicas
Figura 83
Funciones logarítmicas.

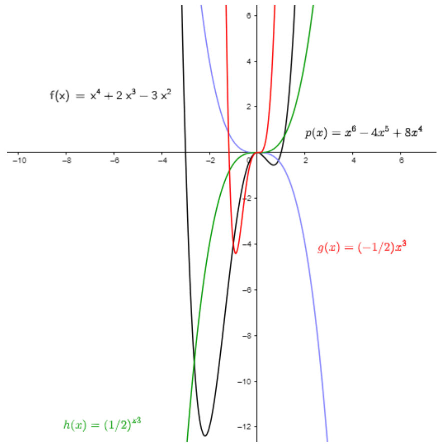


Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Funciones logarítmicas. Elaboración propia.

Ejemplo de funciones polinomiales

Figura 84

Funciones polinomiales.

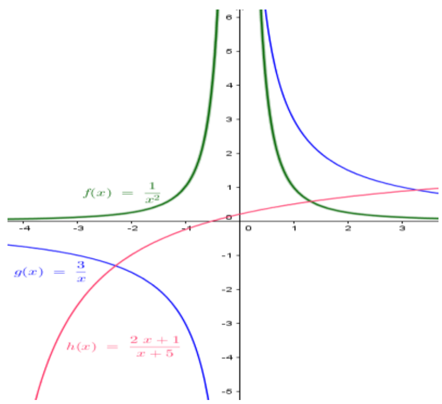


Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Funciones polinomiales. Elaboración de pantalla.

Ejemplo de funciones racionales

Figura 85

Funciones racionales.



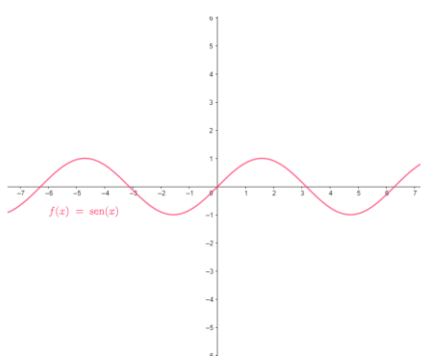
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Funciones racionales. Elaboración propia.

Gráficas de las funciones trigonométricas

A continuacion se presentan gráficas de las tres principales funciones trigonométricas: seno coseno, tangente.

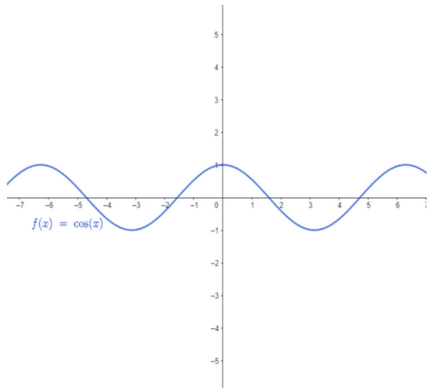
Figura 86

Función seno.



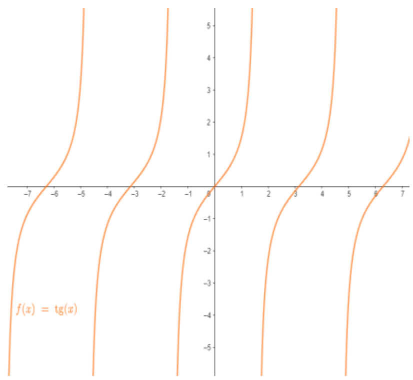
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función seno. Elaboración propia.

Figura 87
Función coseno.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función coseno. Elaboración propia.

Figura 88
Función tangente.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Función tangente. Elaboración propia.

Ejemplos de operaciones entre funciones
Por ejemplo, si f y g son dos funciones, la suma se define como:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Si consideramos las funciones $f(x) = 6x^2 + 4x - 1$ y $g(x) = 3x^3 - 3x + 5$
De acuerdo con la definición $h(x) = f(x) + g(x)$

$$h(x) = (6x^2 + 4x - 1) + (3x^3 - 3x + 5)$$

Se agrupan los términos semejantes y se hacen las operaciones respectivas:

$$h(x) = 6x^2 + 4x - 3x + 3x^3 - 1 + 5$$

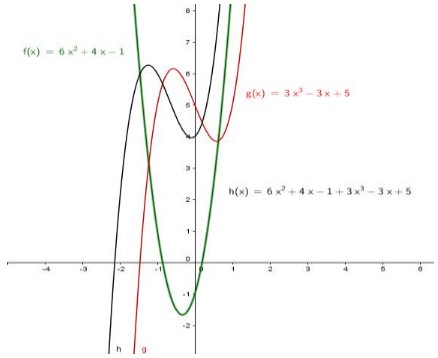
$$h(x) = 6x^2 + 1x + 3x^3 + 4$$

Reorganizando la función resultante:

$$h(x) = 3x^3 + 6x^2 + x + 4$$

Figura 89

Suma de funciones.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de suma de funciones, Elaboración propia.

Se define la resta o sustracción de dos funciones como $f(x)$ y $g(x)$ como:

$$f(x) = 4x - 1$$
$$g(x) = -x^2 - 2x - 2$$

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4x - 1 - (-x^2 - 2x - 2)$$
$$h(x) = 4x - 1 + x^2 + 2x + 2$$

Se agrupan los términos semejantes y se hacen las operaciones respectivas:

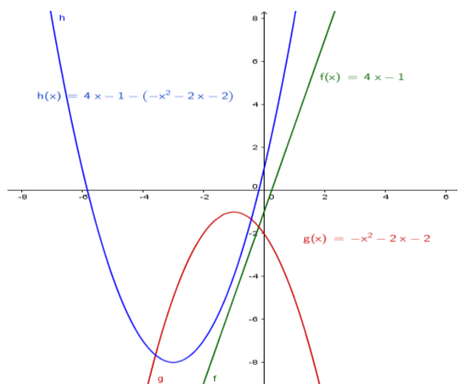
$$h(x) = x^2 + 4x + 2x + 2 - 1$$

Reorganizando la función resultante:

$$h(x) = x^2 + 6x + 1$$

Figura 90

*Resta de funciones***.**



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de resta de funciones. Elaboración propia.

Para calcular el producto o multiplicación de dos funciones, simplemente debemos multiplicar las expresiones de cada función.

$$f(x) \times g(x)$$
$$f(x) = 2x - 3$$
$$g(x) = x + 1$$
$$h(x) = f(x) \times g(x) = (2x - 3) \times (x + 1)$$

Realizamos la operación correspondiente:

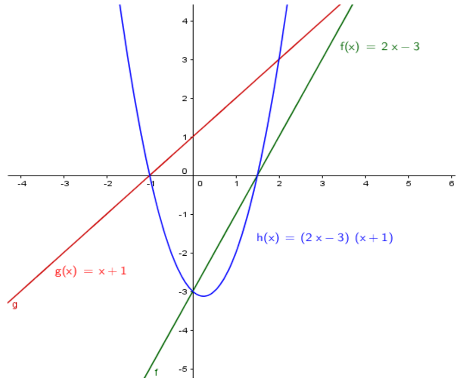
$$h(x) = 2x^2 + 2x - 3x - 3$$

Combinando términos semejantes obtenemos el resultado:

$$h(x) = 2x^2 - x - 3$$

Figura 91

Multiplicación de funciones.



Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de Multiplicación de funciones. Elaboración propia.

El resultado numérico de una división (o cociente) de dos funciones corresponde a la siguiente ecuación:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$f(x) = 3x^2 - 2x$$
$$g(x) = -x$$
$$h(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 2x}{-x}$$

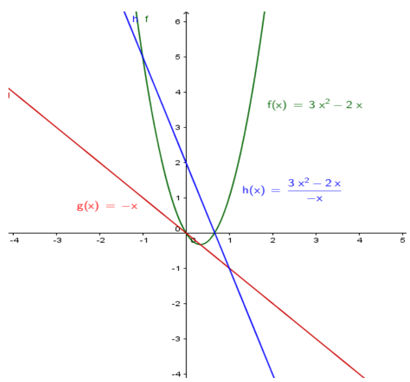
Resolviendo la operación tenemos el siguiente resultado:

$$h(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{3x^2 - 2x}{-x}$$

$$\boldsymbol{h(x) = (f \times g)(x) = -3x + 2}$$

Figura 92

División de funciones.



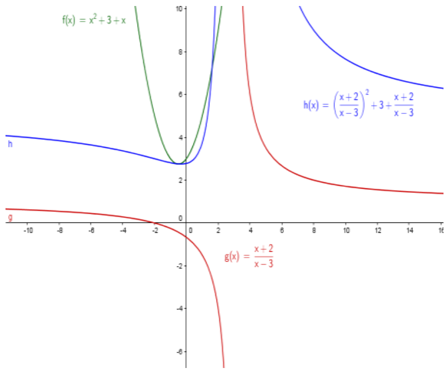
Nota: Captura de pantalla. Ejemplo de División de funciones. Elaboración propia.

Ejemplo de composición de funciones

$$f(x) = x^2 + 3 + x$$
$$g(x) = \frac{x+2}{x-3}$$
$$f(g(x)) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 + 3 + \frac{x+2}{x-3}$$
$$g(f(x)) = \frac{x^2 + 3 + x + 2}{x^2 + 3 + x - 3}$$

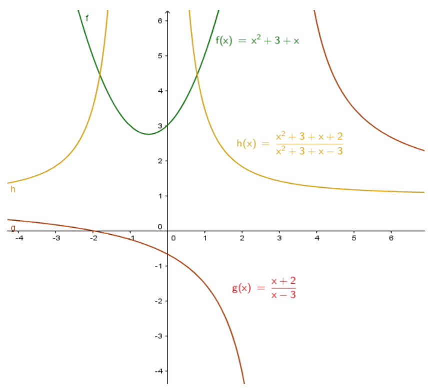
$$g(f(x)) = \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x}$$

Figura 93
Gráfico f(g(x)).



Nota: Captura de pantalla. El gráfico corresponde a $f\big(g(x)\big)$. Elaboración propia.

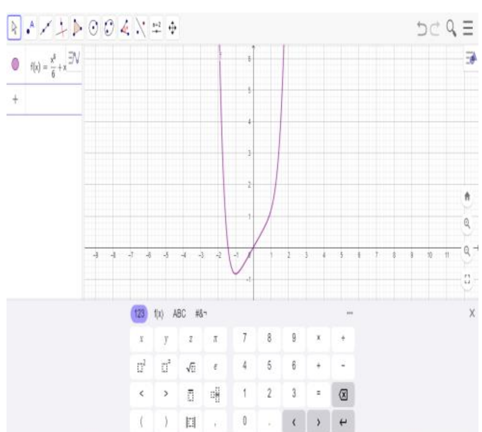
Figura 94
Gráfico g(f(x)).



Nota: Captura de pantalla. El gráfico corresponde a $g\big(f(x)\big)$. Elaboración propia.

Anexo B. Ejemplos GeoGebra

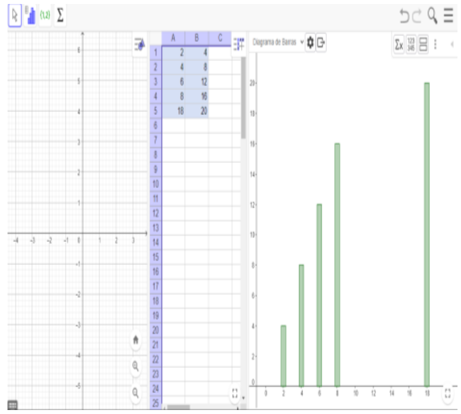
Figura 95
Vista algebraica.



Nota: Captura de pantalla. Vista algebraica GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 96

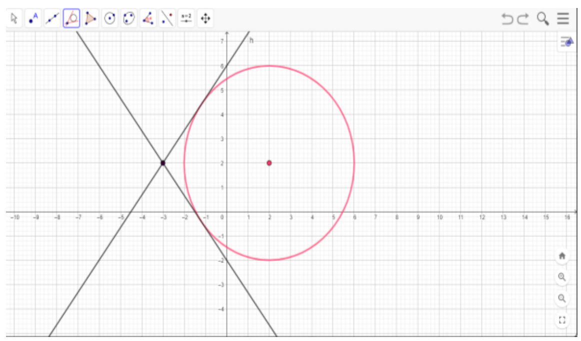
*Vista hoja de cálculo***.**



Nota: Captura de pantalla. Vista hoja de cálculo GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 97

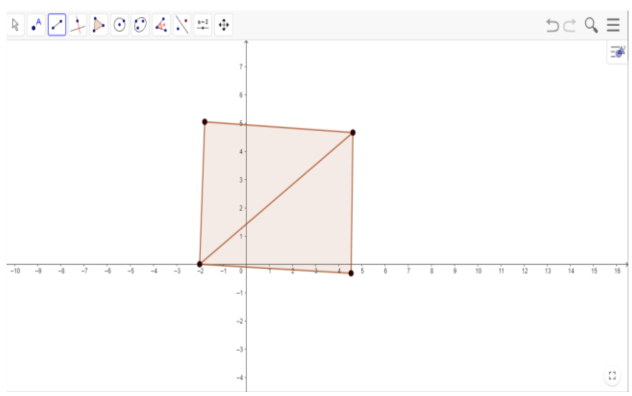
Vista gráfica.



Nota: Captura de pantalla. Vista gráfica GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 98

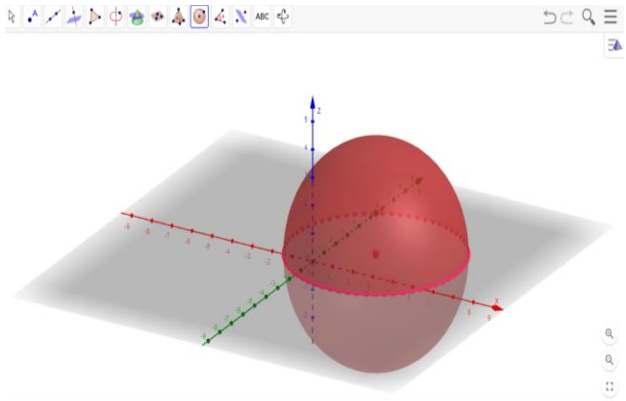
Vista gráfica 2D.



Nota: Captura de pantalla. Vista gráfica 2D GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 99

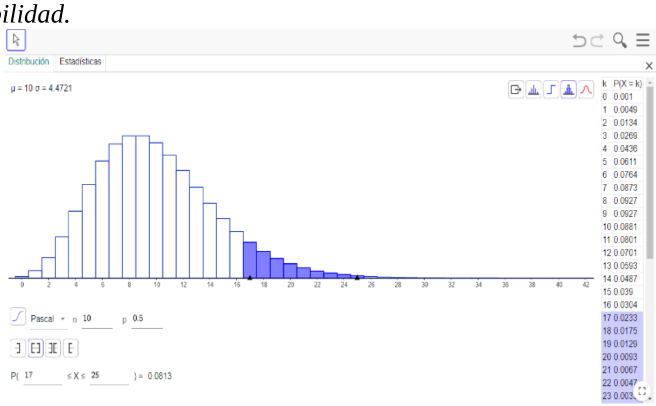
Vista Gráfica 3D.



Nota: Captura de pantalla. Vista gráfica 3D GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 100

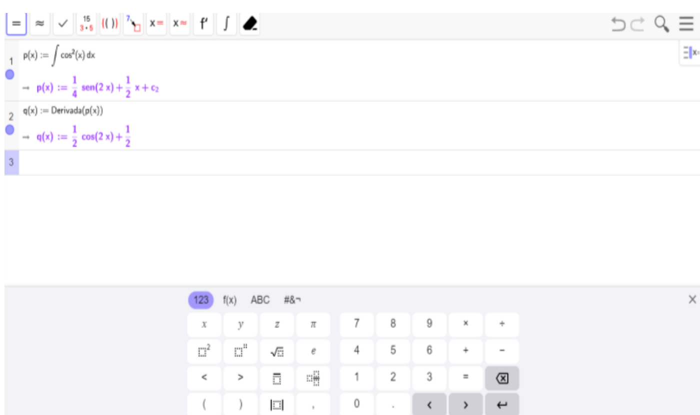
Vista de cálculos de probabilidad.



Nota: Captura de pantalla. Vista cálculos de probabilidad GeoGebra 6. Elaboración propia.

Figura 101

Vista CAS.



Nota: Captura de pantalla. Vista CAS GeoGebra 6. Elaboración propia.

Ejemplo de cómo crear un libro en GeoGebra

En este caso elegiremos la opción libro.

- Llenamos las opciones, que son similares a las del apartado de Configuración de una hoja de trabajo.
- Acabamos guardando y ya podremos empezar a llenar nuestro libro.

- Damos click sobre Agregar capítulo y, a continuación, Crear un nuevo capítulo. También podríamos incorporar capítulos de otros libros a los que tengamos acceso.
- Introducimos el nombre del capítulo y guardamos.
- Repetimos hasta tener preparados todos los capítulos que necesitemos.
- Seleccionamos el primer capítulo y Agregar hoja de trabajo. Ahora podemos crear una hoja de trabajo nueva (como hemos aprendido anteriormente) o incorporar una hoja de trabajo existente. Inicialmente aparecen las hojas de trabajo propias. Pero podemos hacer libros aprovechando hojas de otros autores. Si deseamos modificar una hoja de trabajo ya existente deberemos hacer previamente una copia en nuestro nuevo libro.
- Una vez elaborado el libro, pulsando el botón Ver el libro podemos navegar por él. También podemos cambiar la figura visible que hace de portada:
- Dar click en el lápiz para editar.
- Vamos a Detalles del Libro y en Imagen del libro podremos incorporar una que tengamos preparada.

Figura 102

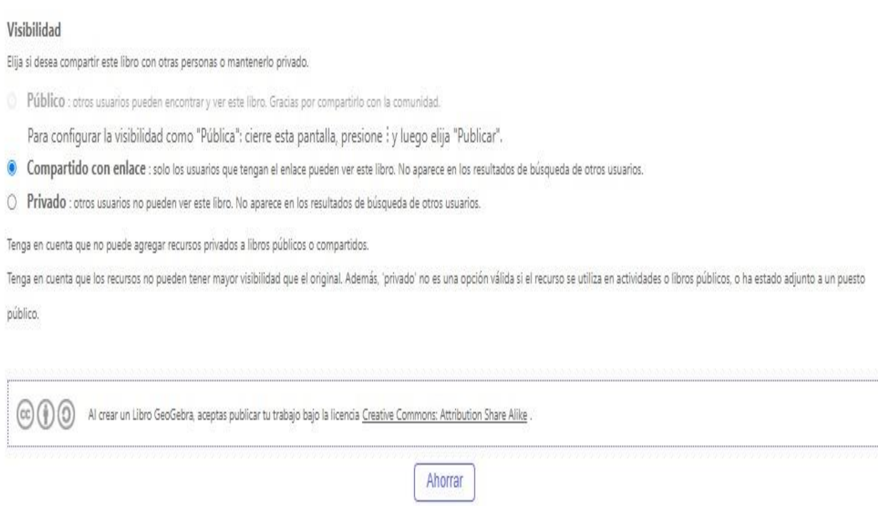
*Vista de creación de libros en GeoGebra***.**

Nota: Captura de pantalla. Vista de la página para la creación de libros en GeoGebra.

Una vez identificados en la página inicial de GeoGebra debemos ir al apartado de nuestras actividades. Para ello dar click o seleccionar la opción Recursos para el Aula y a continuación en tuyos.

Figura 103

Vista Classroom o GeoGebra Classroom.



Nota: Captura de pantalla. Pasos para compartir recursos para estudiantes en Classroom o GeoGebra Classroom.

Anexo C. Resultado de la consulta realizada a profesores de San Juan Nepomuceno y Nueva Germania sobre su interés para conocer GeoGebra.

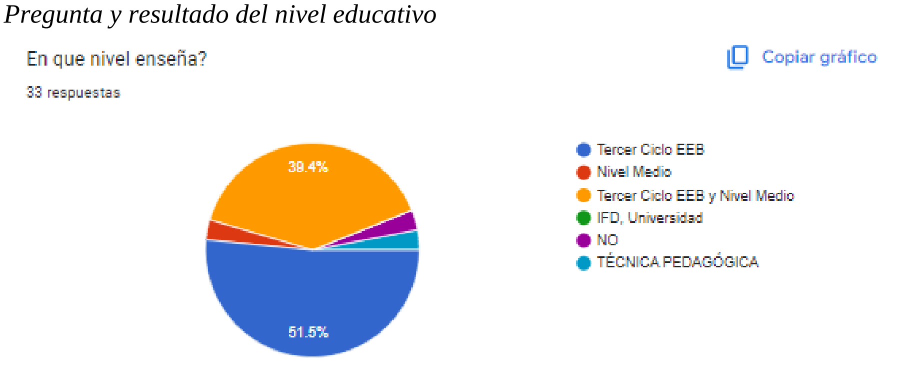
Figura 104

Presentación del formulario

Nota: Presentación del formulario en Google forms. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

Figura 105

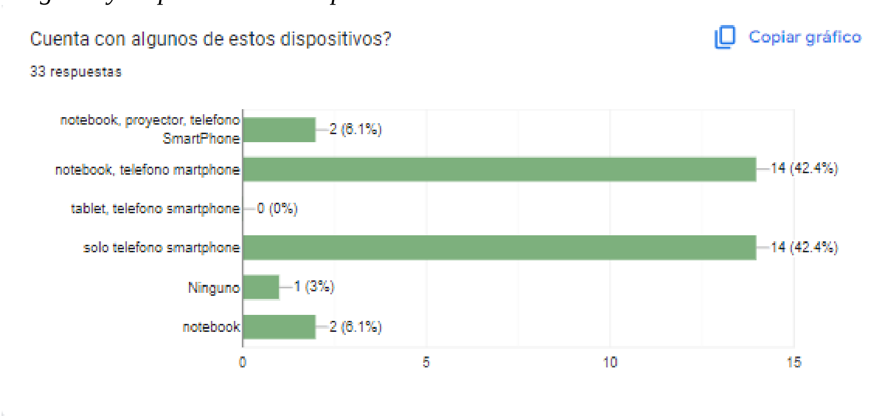
Pregunta y resultado del nivel educativo



Nota: pregunta y resultado de las respuestas de profesores paraguayos, sobre el nivel educativo en que están enseñando. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

Figura 106

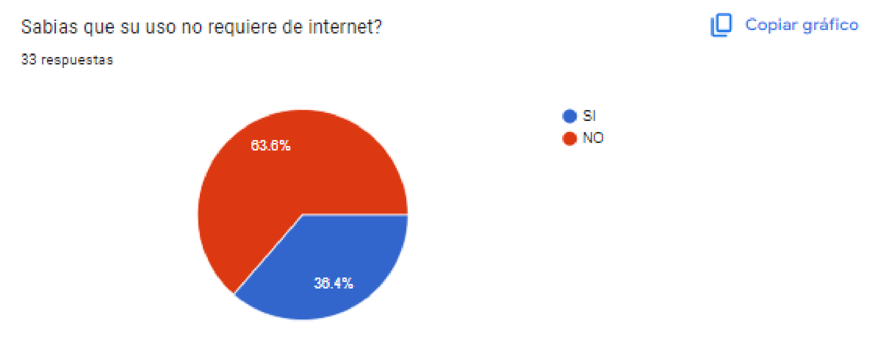
Pregunta y respuesta sobre dispositivos electrónicos.



Nota: pregunta y resultado sobre dispositivos electrónicos con que cuentan los profesores paraguayos consultados. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

Figura 107

Pregunta y respuesta sobre si GeoGebra requiere internet



Nota: pregunta y resultado acerca de saber o no si GeoGebra requiere internet para su funcionamiento. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

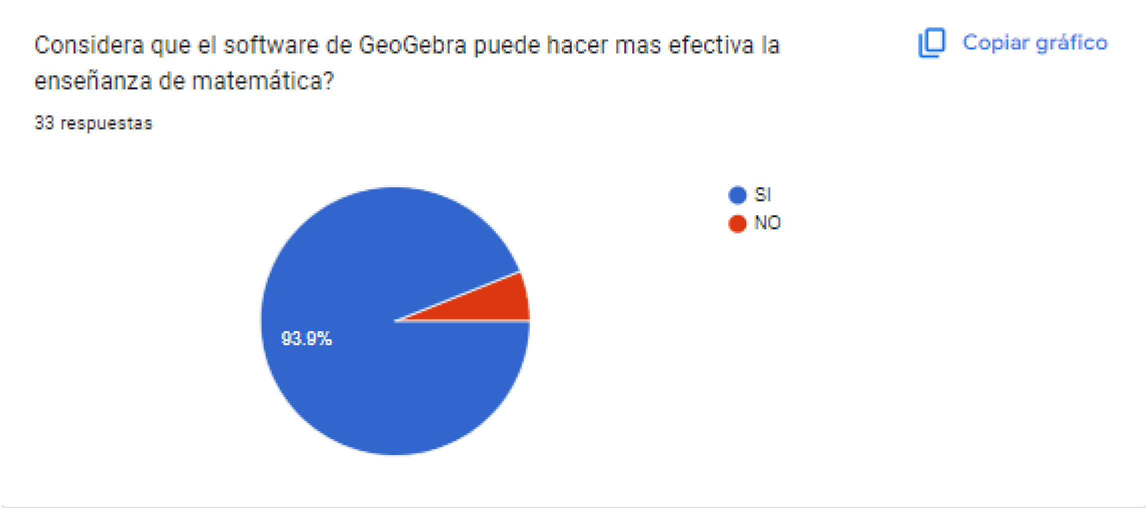
Figura 108

Pregunta y respuesta sobre el interés para conocer su utilidad

Nota: Pregunta y resultado sobre el interés de profesores paraguayos para conocer la utilidad de GeoGebra. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

Figura 109

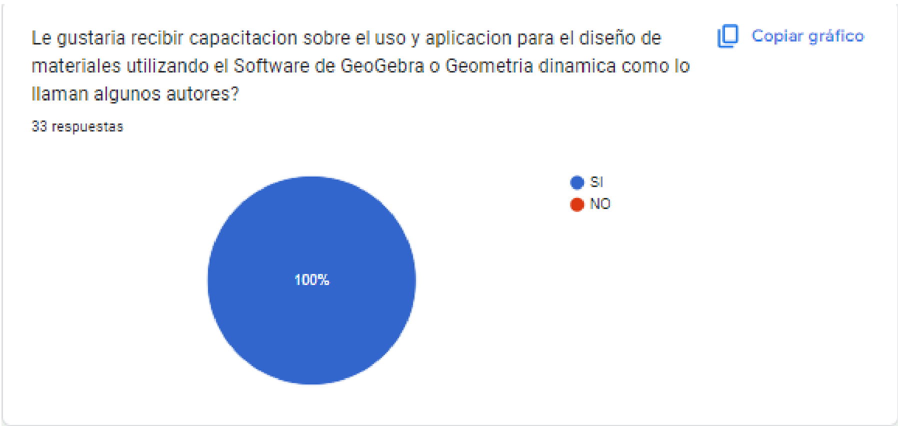
Pregunta y respuesta de profesores sobre aportes del software a la enseñanza



Nota: Pregunta y resultado sobre aportes del software a la enseñanza de matemática. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7

Figura 110

Pregunta y respuesta sobre interés por la capacitación



Nota: Pregunta y resultado sobre el interés de profesores paraguayos por la capacitación en GeoGebra. Elaboración propia. Disponible en https://forms.gle/9wat9fn1hq4c3t4T7