



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

**LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL Y EL CUERPO:  
UNA APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO VARIACIONAL**

**DIANA MARCELA BRAUSÍN FANDIÑO**

**LEYDI YANETH HERRERA VARGAS**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, D.C.**

**2019**

**LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL Y EL CUERPO:  
UNA APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO VARIACIONAL**

**DIANA MARCELA BRAUSÍN FANDIÑO**

**CÓDIGO 2018185001**

**CC. 53.106.583**

**LEYDI YANETH HERRERA VARGAS**

**CÓDIGO 2018185011**

**CC. 1.019.046.289**

**Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de  
Magíster en Docencia de la Matemática**

**Director:**

**EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, D.C.**

**2019**

Para todos los efectos, declaramos que el presente estudio es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos proporcionado los respectivos créditos.

Diana Marcela Brausín Fandiño

Leydi Yaneth Herrera Vargas

## **Dedicatoria**

*A mi mamá, mis hermanos y mi papá, quienes han estado para brindarme lo mejor.*

*A Aldemar, por su constante amor, apoyo, sus palabras de aliento y motivación.*

*A mis estudiantes, por su interés y entrega en la participación de esta investigación.*

*Leidy*

\*\*\*

*A mis padres, por su continuo esfuerzo y apoyo en pro a mi formación.*

*A mis estudiantes, porque sin ellos esta investigación no hubiese sido posible.*

*Diana*

\*\*\*


## **Agradecimientos**

*A nuestro asesor Edwin Carranza, por su constante compromiso y orientación en nuestro proceso de formación en la Maestría y especialmente por compartir sus conocimientos en tecnología, por mostrarnos que hay diversos caminos para aprender y enseñar matemáticas.*

*A las profesoras Nubia Soler y Claudia Salazar, por mostrarnos el lado humano de ser profesores, que pese a las adversidades siempre van a tender una mano amiga para escuchar y comprender al otro.*

*A la profesora Leonor Camargo, por su compromiso, por aportar en los aspectos académicos y por sus enseñanzas en la construcción del presente trabajo.*

*Al profesor Edgar Guacaneme, por su exigencia y sus enseñanzas en la escritura de documentos.*

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 8	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado de Maestría en profundización.
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	La mediación instrumental y el cuerpo: una aproximación al pensamiento variacional
<b>Autor(es)</b>	Brausín Fandiño, Diana Marcela; Herrera Vargas, Leydi Yaneth.
<b>Director</b>	Carranza Vargas, Edwin Alfredo.
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019.131 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	COMUNICACIÓN, REPRESENTACIÓN, VARIACIÓN, MEDIOS SEMIÓTICOS Y ESQUEMAS DE ACCIÓN INSTRUMENTADA.

<b>2. Descripción</b>
<p>Este trabajo de grado está inscrito en el énfasis de Tecnología Digital en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Surge con el propósito de aportar a la línea de investigación <b>Conceptos y procesos del Cálculo</b>, particularmente al desarrollo del pensamiento variacional en la escuela. Para lograr lo anterior, se aplica un conjunto de tareas mediadas por el uso de tecnología computacional, a grupos de estudiantes de grado noveno y décimo, con el objetivo de obtener información sobre los esquemas de acción instrumentada, asociadas al pensamiento variacional, evidentes en los gestos, señalamientos, movimientos corporales, expresiones lingüísticas.</p> <p>Para poder lograr la indagación planteada, se emplean los esquemas de acción instrumentada, para articular los tres referentes teóricos utilizados en este trabajo: los procesos del pensamiento variacional, la mediación instrumental y la teoría de objetivación. Por tal razón, se exponen las diferentes fases llevadas a cabo para la elaboración de este documento y se da cuenta y razón, de los alcances, logros y aspectos por mejorar al hacer uso de la tecnología computacional en la escuela.</p>

### 3. Fuentes

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.
- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), 5–28.
- Ballesteros, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 3(4), 125–137. <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6903>
- Fiallo, J., & Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Pre calculus course in using supported geogebra for the development of variational thinking.*, 20, 56–73. <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=100271851&lang=es&site=ehost-live>
- Goldin, G. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task - Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* Routledge. (pp. 513–545). <https://doi.org/10.5860/choice.38-2281>
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Uniandes-LIDIE*, 10(1), 93–111.
- Grueso, R., & González, G. (2016). *El concepto de función como Covariación en la escuela (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle, Cali.
- Guacaneme, E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, 31, 113–131. <https://doi.org/10.17227/ted.num31-1651>

- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo [Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.]. En *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. [https://www.academia.edu/807014/Dificultades\\_en\\_el\\_aprendizaje\\_del\\_cálculo](https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo)
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. 103. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf.pdf)
- MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA. [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-113759\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-113759_archivo.pdf)
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. <https://doi.org/958-691-290-6>
- Pantano, Ó. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales (Tesis de Maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Parada, S., Conde, L., & Fiallo, J. (2016). Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(56), 1031–1051. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a10>
- Pedrerros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación a la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. En Armand Colin (Ed.), *Sciences et Technologies de l'Information et de La Communication Pour l'Éducation et La Formation*.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Número Esp*, 103–129.
- Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática.*,

7(2), 132–150. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274031870010>

Radford, L. (2014b). La teoría de la objetivación. *Santillana (Ruta maestra)*, 9, 33–37. <http://www.santillana.com.co/rutamaestra/edicion-9/articulos/6%0AEI>

Radford, L., & D'Amore, B. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. En *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Problemas Semióticos, Epistemológicos y Prácticos* (pp. 97–112). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 25 años, 11–30. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854002>

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Universidad del Valle Programa Editorial.

Texas Instruments Incorporated. (1997). *Conceptos básicos del CBR™*. <http://education.ti.com/~media/DB93A481F251435CA6F32D16DAA75D6B>

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Tesis Doctoral)*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

#### 4. Contenidos

Este documento está organizado en cinco capítulos, a través de los cuales se lleva a cabo la propuesta. El segundo, tercer, cuarto y quinto capítulo, corresponde a las fases de estudio: diseño metodológico, consideraciones teóricas, análisis de datos y conclusiones.

Capítulo 1: Generalidades del Estudio. En este capítulo se exponen los aspectos generales del trabajo de grado, como son: el planteamiento del problema, los antecedentes, la justificación y la

formulación de los objetivos. La intención de este capítulo es contextualizar al lector sobre las intenciones de las autoras para llevar a cabo este trabajo.

Capítulo 2: Diseño Metodológico. En este capítulo se describe el tipo de investigación, la estrategia investigativa, el contexto y población al cual fue dirigida las tareas. También, se presentan las fases de investigación: la fundamentación teórica, el diseño del instrumento, la implementación del conjunto de tareas, la recolección de la información, el análisis de los datos; esto con el fin de mostrar cómo se llevó a cabo la construcción de este trabajo.

Capítulo 3: Consideraciones Teóricas. En este capítulo se plantean aquellos acuerdos teóricos que se acogen para desarrollar la propuesta, y que posteriormente, sirvieron de insumo para la construcción de la herramienta analítica. Los constructos teóricos establecidos para el presente estudio son: el Pensamiento variacional, la teoría de Mediación Instrumental (Rabardel, 1995) y la teoría Cultural de Objetivación (Radford, 2006).

Capítulo 4: Análisis de Datos. En este capítulo se elabora el análisis de la experimentación del conjunto de tareas diseñadas. Para hacer el análisis, se construyó la herramienta analítica que facilitó la descripción e interpretación del discurso e interacción de los participantes.

Capítulo 5: Conclusiones. En este último capítulo, se describen las conclusiones y resultados asociados a la construcción de esquemas de acción instrumentada y la forma en que el propio cuerpo se convierte en un instrumento, que permite a los estudiantes aproximarse al pensamiento variacional. También, muestra los aspectos a mejorar y los alcances que puede tener el uso de la Tecnología Computacional en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

## **5. Metodología**

De acuerdo al objetivo de esta investigación, el enfoque adoptado es el fenomenológico con una aproximación interpretativa. Esta aproximación, brinda la posibilidad de hacer inferencias, sobre las diversas formas de pensamiento de un grupo de estudiantes, a la luz de la teoría de la objetivación y del enfoque instrumental. Se pretende rastrear cuidadosamente las acciones, interacciones y

discursos que surgen al abordar tareas, mediadas por el uso de tecnología computacional y el movimiento corporal

La estrategia investigativa adoptada en este trabajo es la Entrevista basada en tareas (Goldin, 2000). Esta privilegia los procesos de interacción entre un grupo de estudiantes, el entrevistador, la herramienta tecnológica y la tarea. Lo anterior, con el propósito de emitir inferencias que aporten a la descripción de los procesos llevados a cabo por los entrevistados al resolver una o varias tareas que los aproximen al pensamiento variacional.

## 6. Conclusiones

Para realizar las conclusiones, se tuvo en cuenta los siguientes aspectos: el uso de la estrategia investigativa adoptada en este trabajo; el alcance de los objetivos, general y específicos; y los aportes reflexivos de este estudio en el campo de la Educación Matemática.

**De la estrategia investigativa:** Dada la naturaleza cualitativa de esta investigación, la problemática propuesta y la pregunta investigativa, la elección de la estrategia metodológica (entrevista basada en tareas), resulta pertinente, debido a que permite conocer sobre los procesos de pensamiento matemático llevados a cabo por los estudiantes participantes y favorece los procesos de interacción entre los entrevistados, el entrevistador, la herramienta tecnológica (Calculadora graficadora y CBR) y el conjunto de tareas.

**Acerca del diseño del conjunto de tareas y su implementación:** Un aspecto a resaltar de la tarea, es que permite la interacción de los estudiantes, dado que deben generar diversas estrategias conjuntas para lograr representaciones gráficas particulares, a partir de la captura de su movimiento con el CBR. Esto, en concordancia con Radford (2006), quien afirma que el aprendizaje es un proceso social a través del cual los individuos entran en relación, no solamente con el mundo de los objetos culturales, sino con otros individuos, y adquieren en el seguimiento común del objeto y el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana.

**De la descripción e identificación de algunos medios semióticos de objetivación:** Se emplean algunos recursos o medios semióticos de objetivación para hacer presentes las intenciones y

organizar las acciones de los estudiantes. Algunos de los medios semióticos que se logran identificar durante la actividad matemática son: el movimiento corporal, los señalamientos y los gestos. Estos recursos son utilizados con el fin de comunicar algunas ideas asociadas a la variación o el cambio y desempeñan un papel fundamental en la manera como los estudiantes interpretan, reflexionan y materializan planteamientos matemáticos que se ejecutan en torno a las tareas propuestas.

**De la descripción e identificación de las habilidades asociadas a algunos procesos matemáticos inmersos en el desarrollo del pensamiento variacional:** la comunicación es uno de los procesos que alcanza mayor protagonismo, puesto que los estudiantes lo emplean para explicar sus ideas y hacerlas inteligibles a sus compañeros. Este proceso, permite a los estudiantes sistematizar los conocimientos personales en un ámbito y, por tanto, ser aceptados como conocimiento nuevo o, en su defecto, ser refutados (MEN, 1998). La verbalización de las ideas va acompañada de gestos y señalamientos que movilizan los estudiantes durante la actividad matemática que se llevan a cabo y que les permite dar cierta forma tangible y corpórea al saber (Radford, 2006). Durante todo el desarrollo de la tarea los estudiantes estuvieron en contacto con distintos registros de representación, sobre todo el gráfico, el kinestésico y el tabular.

**Del reconocimiento de los procesos propios del enfoque instrumental:** Con el propósito de profundizar en la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes a partir de la tarea propuesta, se establecen algunos esquemas de acción instrumentada. Estos esquemas posibilitan la articulación entre la Mediación Instrumental y el Pensamiento Variacional, con el fin de caracterizar las formas de pensamiento en torno a la variación y el cambio. La manera en que se evidencian dichos esquemas mentales fue mediante la identificación de diferentes medios semióticos de objetivación emergentes durante la implementación de la tarea.

<b>Elaborado por:</b>	Brausín Fandiño, Diana Marcela; Herrera Vargas, Leydi Yaneth
<b>Revisado por:</b>	Carranza Vargas, Edwin Alfredo

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	15	12	2019
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ACTA DE VALORACIÓN  
DE TRABAJO DE GRADO**

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **La mediación instrumental y el cuerpo: una aproximación al pensamiento variacional**, presentado por las estudiantes:

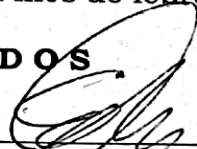
**Diana Marcela Brausin Fandiño, Cód. 2018185001, CC. 53106583**  
**Leydi Yaneth Herrera Vargas, Cód. 2018185011, CC. 1019046289**

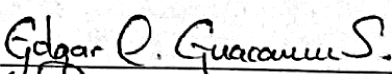
como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con Cuarenta y tres (43) puntos.

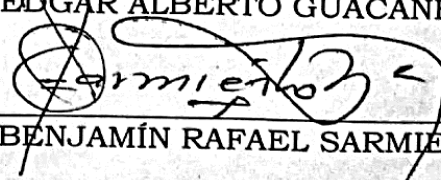
Observaciones:

En constancia se firma a los 24 días del mes de febrero de 2020.

**JURADOS**

Director del Trabajo: Profesor:   
EDWIN ALFREDO CARRANZA (UPN)

Jurados: Profesor:   
ÉDGAR ALBERTO GUACANEME (UPN)

Profesor:   
BENJAMÍN RAFAEL SARMIENTO (UPN)

## Contenido

<b>Introducción .....</b>	<b>20</b>
<b>1. Generalidades del estudio .....</b>	<b>24</b>
<b>1.1. Planteamiento del problema .....</b>	<b>24</b>
<b>1.2. Objetivos.....</b>	<b>27</b>
<b>1.2.1. Objetivo general.....</b>	<b>27</b>
<b>1.2.2. Objetivos específicos .....</b>	<b>27</b>
<b>1.3. Justificación.....</b>	<b>28</b>
<b>1.3.1. Normatividad Legal.....</b>	<b>28</b>
<b>1.3.2. Antecedentes .....</b>	<b>33</b>
<b>2. Diseño metodológico.....</b>	<b>38</b>
<b>2.1. Estrategia investigativa .....</b>	<b>39</b>
<b>2.2. Contexto experimental .....</b>	<b>40</b>
<b>2.3. Fases.....</b>	<b>41</b>
<b>2.3.1. Fase I. Fundamentación teórica .....</b>	<b>42</b>
<b>2.3.2. Fase II. Selección y reconocimiento de los artefactos .....</b>	<b>42</b>
<b>2.3.3. Fase III. Diseño de las tareas .....</b>	<b>48</b>

	15
2.3.4. Fase IV. Recolección, organización y depuración de los datos .....	51
2.3.5. Fase V. Análisis de los datos .....	54
<b>3. Consideraciones teóricas .....</b>	<b>57</b>
3.1 Pensamiento variacional .....	57
3.1.1. Procesos matemáticos asociados al estudio de la variación .....	58
3.2. Enfoque instrumental.....	61
3.3. Teoría cultural de la objetivación .....	63
3.3.1. Los procesos de objetivación y medios semióticos de objetivación.....	67
<b>4. Análisis .....</b>	<b>71</b>
4.1. Etapa 1: familiarización con los artefactos .....	73
4.2. Etapa 2: imitando la gráfica.....	83
4.2.1. Episodio Centeno, Castillo y Soler .....	83
4.2.2. Episodio Russell y Valentina .....	87
4.2.3. Episodio Soto, Henao, Vizcaíno y Vargas .....	90
4.3. Etapa 4: Relacionando registros de representación .....	98
<b>5. Conclusiones.....</b>	<b>108</b>
5.1. De la estrategia investigativa.....	108

5.2. Acerca del diseño del conjunto de tareas y su implementación .....	109
5.3. De la descripción e identificación de algunos medios semióticos de objetivación.....	112
5.4. De la descripción e identificación de las habilidades asociadas a algunos procesos matemáticos inmersos en el desarrollo del pensamiento variacional .....	113
5.5. Del reconocimiento de los procesos propios del enfoque instrumental.....	115
5.6. Consideraciones finales y preguntas para futuras investigaciones .....	118
<b>Referencias.....</b>	<b>120</b>
<b>ANEXO 1.....</b>	<b>124</b>
<b>Secuencia de tareas: la mediación instrumental y el cuerpo: una aproximación al pensamiento variacional .....</b>	<b>124</b>
<b>Etapa 1. Familiarización con los artefactos.....</b>	<b>124</b>
<b>Etapa 2. Imitando una gráfica: Parte 1.....</b>	<b>125</b>
<b>Etapa 3. Imitando una gráfica: Parte 2.....</b>	<b>126</b>
<b>Etapa 4. Relacionando registros de representación .....</b>	<b>127</b>
<b>Etapa 5. Relacionando representaciones.....</b>	<b>128</b>

## LISTA DE TABLAS

TABLA 1. HERRAMIENTAS DEL PROGRAMA RANGER.....	46
TABLA 2: HERRAMIENTA ANALÍTICA.....	55
TABLA 3. ESQUEMAS DE ACCIÓN INSTRUMENTADA.....	73

## LISTA DE IMÁGENES

IMAGEN 1. PARTES DEL CBR. COPYRIGHT 1997 POR TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. ....	44
IMAGEN 2. RUSSELL REALIZA UN MOVIMIENTO DE SU MANO DE ARRIBA A ABAJO. ....	75
IMAGEN 3. FELIPE MUEVE SU MANO ARRIBA - ABAJO. ....	75
IMAGEN 4. FELIPE MUEVE SUS MANOS, EN DIFERENTES DIRECCIONES. ....	77
IMAGEN 5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA OBTENIDA POR EL MOVIMIENTO CORPORAL DE FELIPE. AL LADO IZQUIERDO SE PRESENTA LA GRÁFICA OBTENIDA EN LA PANTALLA DE LA CALCULADORA. AL LADO DERECHO, LA MISMA REPRESENTACIÓN GRÁFICA PARA UBICAR AL LECTOR.....	77
IMAGEN 6. MOVIMIENTOS DE RUSSELL (FLECHA AZUL) Y VALENTINA (FLECHA ROJA) SIMULTÁNEAMENTE.....	79
IMAGEN 7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA OBTENIDA DEL MOVIMIENTO CORPORAL REALIZADO POR VALENTINA Y RUSSELL. ....	80

IMAGEN 8. GRÁFICA ARROJADA ALEATORIAMENTE POR EL PROGRAMA RANGER (LADO IZQUIERDO). AL LADO DERECHO, SE PRESENTA UNA GRÁFICA MUY SIMILAR PARA ORIENTAR AL LECTOR SOBRE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA A IMITAR POR LOS ESTUDIANTES. ....	83
IMAGEN 9. SEÑALAMIENTO HECHO POR SOLER PARA EXPLICAR QUE EL CUERPO ESTÁ EN REPOSO. ....	84
IMAGEN 10. SEÑALAMIENTOS REALIZADOS POR LOS ESTUDIANTES. ....	85
IMAGEN 11. SOLER REALIZA EL MOVIMIENTO DE LA GRÁFICA. VER IMAGEN 8. ....	86
IMAGEN 12. GRÁFICA DISTANCIA VS. TIEMPO ARROJADA ALEATORIAMENTE POR EL PROGRAMA RANGER (LADO IZQUIERDO). GRÁFICO SIMILAR AL QUE SE PRESENTA AL LADO IZQUIERDO (LADO DERECHO), PARA ORIENTAR AL LECTOR. ....	88
IMAGEN 13. GRÁFICA ARROJADA ALEATORIAMENTE POR LA TI 92 PLUS VS MOVIMIENTO REALIZADO POR VALENTINA. ....	88
IMAGEN 14: GRÁFICA ARROJADA ALEATORIAMENTE POR EL PROGRAMA RANGER (IZQUIERDA). REPRESENTACIÓN SIMILAR A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA ARROJADA ALEATORIAMENTE, PARA ORIENTAR AL LECTOR (DERECHA). ....	91
IMAGEN 15. EXPLICACIÓN DE HENAO SOBRE EL MOVIMIENTO QUE SE VA A REALIZAR. ....	93
IMAGEN 16. SOTO CONTANDO LOS TRES PRIMEROS SEGUNDOS SOBRE EL EJE X. ....	94
IMAGEN 17. MOVIMIENTO DE HENAO. ....	97
IMAGEN 18. (IZQUIERDA) PUNTOS MARCADOS EN LA GRÁFICA DEL MOVIMIENTO REALIZADO POR HENAO. (IMAGEN DERECHA) REPRESENTACIÓN ELABORADA POR LAS INVESTIGADORAS PARA ORIENTAR AL LECTOR. ....	97
IMAGEN 19. SEÑALAMIENTO DE ÓSCAR PARA REPRESENTAR LA SITUACIÓN. ....	101

IMAGEN 20. YINETH MOSTRANDO LA TENDENCIA DE LA REPRESENTACIÓN TABULAR. ....	102
IMAGEN 21. MARCAS ELABORADAS POR LOS ESTUDIANTES .....	102
IMAGEN 22. PRIMERA PRUEBA DE ÓSCAR DEL MOVIMIENTO A REALIZAR. ....	103
IMAGEN 23. EXPRESIÓN DE PREOCUPACIÓN, POR PARTE DE ÓSCAR.....	103
IMAGEN 24. ESBOZO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE ÓSCAR.....	103
IMAGEN 25. MOVIMIENTO REALIZADO POR ÓSCAR.....	105
IMAGEN 26. GRÁFICA OBTENIDA DEL MOVIMIENTO REALIZADO POR ÓSCAR. ....	105
IMAGEN 27: GRÁFICA OBTENIDA DEL NUEVO MOVIMIENTO REALIZADO POR ÓSCAR.....	107

## Introducción

Este trabajo de grado está inscrito en el énfasis de Tecnología Digital en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Surge con el propósito de aportar a la línea de investigación **Conceptos y procesos del Cálculo**, particularmente al desarrollo del pensamiento variacional en la escuela. Para lograr lo anterior, se aplica un conjunto de tareas mediadas por el uso de tecnología computacional, a grupos de estudiantes de grado noveno y décimo, con el objetivo de obtener información sobre los esquemas de acción instrumentada, asociadas al pensamiento variacional, evidentes en los gestos, señalamientos, movimientos corporales y expresiones lingüísticas.

Para lograr la indagación planteada, se emplean los esquemas de acción instrumentada, para articular los tres referentes teóricos utilizados en este trabajo: los procesos del pensamiento variacional, la mediación instrumental y la teoría de objetivación. Por tal razón, se exponen las diferentes fases llevadas a cabo para la elaboración de este documento y se da cuenta y razón, de los alcances, logros y aspectos por mejorar al hacer uso de la tecnología computacional en la escuela.

Se reconoce, en primera instancia, que la “evolución” histórica del estudio del Cálculo, en busca de sistematización y rigurosidad extrema, ha generado que su enseñanza se desconozca casi por completo, olvidando asuntos que dieron origen al mismo: la variación y la acumulación. Lo anterior, no significa que la rigurosidad sea un aspecto negativo de las matemáticas, solo que cuando dicho aspecto se convierte en el objeto principal de enseñanza en las cuestiones del Cálculo, se pierde su esencia y por ello, según las investigaciones en Educación Matemática se genera un alto porcentaje de fracaso en el aprendizaje de los estudiantes.

En la escuela, el aprendizaje del Cálculo centra su atención en desarrollar algoritmos y reglas, desconociendo su carácter variacional. Además, los diferentes registros empleados para representar un objeto matemático se presentan en el aula de forma aislada y carecen de significado para los estudiantes. La enseñanza del Cálculo se limita a una manipulación algebraica, desconociendo otras representaciones y conceptos claves como la variación, la acumulación, la aproximación, el infinito o la convergencia, lo que obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del Cálculo, tales como, el concepto de función, de límite, de continuidad, de derivada y de integral (Hitt, 2003)

Lo anterior, conlleva a plantear cuestionamientos sobre la manera en la que se propician en el aula, formas de reflexión comunitarias en torno a la variación y al desarrollo del pensamiento variacional. Según el (MEN, 2004) el pensamiento variacional pretende involucrar conceptos y procedimientos vinculados a la variación, que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones asociadas a la actividad propia del hombre, de otras ciencias y de las mismas matemáticas. Comprender la variación, significa explicar cómo se relacionan las magnitudes variables, también, medir y analizar cómo cambian estas magnitudes, en un problema particular. Sin embargo, para los estudiantes la noción de variación es compleja, ya que implica comprender también el concepto de función (Parada et al., 2016)

Por lo anterior, es necesario que desde la escuela se establezcan posibles soluciones a las dificultades anteriormente mencionadas, por ejemplo, el diseño de tareas no tradicionales que le permita a los profesores rastrear las formas de pensamiento de los estudiantes, mediante el análisis del discurso verbal y corpóreo, entre otros. En consecuencia, surge la pregunta: ¿qué esquemas de acción instrumentada asociadas al desarrollo del pensamiento variacional se pueden evidenciar,

cuando estudiantes de grados noveno y décimo abordan tareas mediadas por el uso de tecnología computacional?

Este documento está organizado en cinco capítulos, a través de los cuales se lleva a cabo la propuesta. El segundo, tercer, cuarto y quinto capítulo, corresponde a las fases de estudio: diseño metodológico, consideraciones teóricas, análisis de datos y conclusiones.

Capítulo 1: Generalidades del Estudio. En este capítulo se exponen los aspectos generales del trabajo de grado, como son: el planteamiento del problema, los antecedentes, la justificación y la formulación de los objetivos. La intención de este capítulo es contextualizar al lector sobre las intenciones de las autoras para llevar a cabo este trabajo.

Capítulo 2: Diseño Metodológico. En este capítulo se describe el tipo de investigación, la estrategia investigativa, el contexto y población al cual fue dirigida las tareas. También, se presentan las fases de investigación: la fundamentación teórica, el diseño del instrumento, la implementación del conjunto de tareas, la recolección de la información, el análisis de los datos; esto con el fin de mostrar cómo se llevó a cabo la construcción de este trabajo.

Capítulo 3: Consideraciones Teóricas. En este capítulo se plantean aquellos acuerdos teóricos que se acogen para desarrollar la propuesta, y que posteriormente, sirvieron de insumo para la construcción de la herramienta analítica. Los constructos teóricos establecidos para el presente estudio son: el Pensamiento Variacional, la teoría de Mediación Instrumental (Rabardel, 1995) y la teoría Cultural de Objetivación (Radford, 2006).

Capítulo 4: Análisis de Datos. En este capítulo se elabora el análisis de la experimentación del conjunto de tareas diseñadas. Para hacer el análisis, se construyó la herramienta analítica que facilitó la descripción e interpretación del discurso e interacción de los participantes.

Capítulo 5: Consideraciones finales. En este último capítulo, se describen las conclusiones y resultados asociados a la construcción de esquemas de acción instrumentada y la forma en que el propio cuerpo se convierte en un instrumento, que permite a los estudiantes aproximarse al pensamiento variacional. También, muestra los aspectos a mejorar y los alcances que puede tener el uso de la Tecnología Computacional en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

## **1. Generalidades del estudio**

En este capítulo se describen las ideas que motivan la realización del presente estudio, por medio de la descripción de una problemática relacionada con la forma en que se aborda el desarrollo del pensamiento variacional en la escuela y la incorporación de recursos tecnológicos para tal fin. En concordancia con lo anterior, se formula la pregunta orientadora y los respectivos objetivos generales y específicos que permiten responderla. Finalmente, se presenta la justificación del por qué es importante para el campo de la Educación Matemática dar solución a la problemática expuesta.

### **1.1. Planteamiento del problema**

Desde nuestra experiencia docente evidenciamos un desarrollo casi nulo del pensamiento variacional en el contexto escolar, debido a que en el aula se privilegia una actividad matemática centrada en algoritmos y procedimientos que invisibilizan aspectos como la variación, el cambio, la tendencia y la acumulación presentes en fenómenos dinámicos.

En particular, el concepto de función se aborda desde una perspectiva de correspondencia o asignación y su tratamiento es principalmente algebraico y estático, lo que produce una fuerte limitación en su comprensión. Además, el manejo aislado de algunos de los registros de representación de las funciones genera dificultades en la producción de saber entorno a este conocimiento matemático. Usualmente, las funciones son estudiadas a través de un tratamiento algorítmico, desde el cual los estudiantes, a partir de un registro algebraico, reemplazan valores del dominio para obtener las imágenes correspondientes, que luego grafican en un plano cartesiano (Grueso & González, 2016).

Lo anterior no privilegia en los estudiantes el reconocimiento de las funciones como modelos de situaciones de variación y cambio, ni se genera articulación alguna entre los diferentes registros de representación empleados. Desde esta visión de la educación se desconoce el aspecto de dependencia entre magnitudes y no se logra el reconocimiento de patrones de variación ni de cambio (Grueso & González, 2016)

En contraste, aunque en los documentos legales que orientan la educación y el currículo colombiano se establece la importancia de desarrollar procesos, habilidades, competencias y contenidos, en las instituciones escolares se sigue centrando la enseñanza en la memorización de temáticas y en el desarrollo de algoritmos para solucionar ejercicios, a veces descontextualizados o en algunos casos bajo escenarios de pseudo realidad que resultan ser muy poco significativos para los estudiantes (Fiallo & Parada, 2014).

Por otra parte, en el panorama de la investigación en Educación Matemática, es posible evidenciar una evolución en el transcurso de los últimos años, debido, entre otros factores, al creciente interés por integrar las Tecnologías Informáticas y Computacionales en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, cuya presencia puede ubicarse desde la década de 1970, cuando la programación computacional se empezó a enseñar en las escuelas (Rojano et al., 2014)

Sin embargo, el uso de estas herramientas tecnológicas en el aula para la enseñanza de las matemáticas ha tenido cierta resistencia en la práctica por parte de la comunidad docente. Las instituciones escolares, aun siendo conscientes de las nuevas posibilidades que la tecnología informática ofrece a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, no logran sacar el mayor provecho de la integración de las calculadoras y los programas de geometría dinámica en las clases (Artigue, 2004).

Una vez expuesta la problemática de interés, es imperativo pensar en posibles soluciones que la mitiguen en cierta medida. Es por ello que, dentro del marco de esta investigación, se elabora un conjunto de tareas, que mediadas por el uso de tecnología computacional, contribuyan al potencial desarrollo del pensamiento variacional en un grupo de estudiantes de grados noveno y décimo. Se espera que, al pilotear dichas situaciones, la actividad matemática emergente en los participantes proporcione indicios o evidencias de cierto desarrollo o aproximación al pensamiento variacional.

Sin embargo, caracterizar la actividad instrumentada asociada al desarrollo del pensamiento variacional, que se genera en un grupo de estudiantes, a la luz de un conjunto de situaciones que integran tecnología computacional, conlleva a pensar en los esquemas cognitivos emergentes. Esta intención de identificar y caracterizar los esquemas mentales que se construyen en medio de la actividad matemática surge a partir del orden psicológico propio del enfoque instrumental, una de las teorías adoptadas en este trabajo, desde la cual los esquemas de acción instrumentada, son un tipo de esquemas de utilización que se consideran como una organización mental estable que incluye habilidades técnicas y conceptuales para dar respuesta a unas tareas (Drijvers & Gravemeijer, 2005; citado en Pedreros Puente, 2012).

Por otro lado, para lograr rastrear las formas de pensamiento, en este caso el variacional, según las ideas que han surgido en la Teoría Cultural de la Objetivación, es necesario identificar y caracterizar los medios semióticos y los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes durante la actividad matemática. En otras palabras, es importante tener en cuenta durante la identificación de los esquemas de acción instrumentada, todos aquellos recursos a los que recurren los estudiantes, tales como, el movimiento corporal, el uso de signos, artefactos, gestos,

señalamientos, expresiones lingüísticas, entre otros, que tengan la intención de comunicar y materializar sus ideas matemáticas; recursos que, usualmente, son invisibilizados en el aula y que son movilizados en medio de procesos de producción de significados (Pantano, 2014)

Es así, como planteamos la pregunta que orienta esta investigación: ¿qué esquemas de acción instrumentada asociadas al desarrollo del pensamiento variacional se pueden evidenciar, cuando estudiantes de grados noveno y décimo abordan tareas mediadas por el uso de tecnología computacional?

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Identificar y describir algunos esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional, cuando estudiantes de grado noveno y décimo abordan tareas mediadas por una calculadora graficadora y un sensor de movimiento.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

- Diseñar e implementar una tarea, mediada por el uso de tecnología computacional con la intención de potenciar algunas habilidades asociadas al desarrollo del pensamiento variacional en un grupo de estudiantes.
- Describir e identificar algunos medios semióticos de objetivación que emergen en la actividad matemática a partir de la implementación de tareas que involucran tecnología computacional.

- Describir e identificar habilidades asociadas a algunos procesos matemáticos inmersos en el desarrollo del pensamiento variacional, emergentes durante la implementación del conjunto de tareas propuesto.
- Reconocer procesos propios del enfoque instrumental que se desarrollen durante en la implementación de la tarea.

### **1.3. Justificación**

Dado que el presente trabajo tiene como fin reflexionar entorno a los esquemas de acción instrumentada asociados al pensamiento variacional que emergen al abordar tareas que integran el uso de tecnología computacional, se consideran dos elementos, que, a nuestro juicio, dan cuenta y razón de la importancia de atender la problemática expuesta anteriormente, en primer lugar, la normatividad legal y, en segundo lugar, algunos estudios desarrollados en el campo de la investigación en Educación Matemática.

#### **1.3.1. Normatividad Legal**

En el año 1975, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) con la intención de realizar una renovación curricular que atendiera a las necesidades propias del país crea el “*Programa Nacional de Mejoramiento Cualitativo de la Educación*” que tuvo como objetivo general “mejorar cualitativa y cuantitativamente la educación sistematizando el empleo y generación de tecnología computacional para ampliar las condiciones de acceso a la educación en forma equitativa, a toda la población colombiana fundamentalmente de las zonas rurales” (MEN, 2004)

En el contexto de la estrategia de renovación se reconoce la importancia, necesidad y pertinencia del estudio de situaciones de cambio, por lo que el MEN en 1975, propone, entre otras sugerencias:

- La utilización de las funciones, las gráficas y las tablas para modelar situaciones de cambio.
- Que puede ser más importante en un primer momento el análisis cualitativo de las gráficas que el trazado muy preciso de gráficas a partir de fórmulas o tablas.
- El trabajo con situaciones de la vida real y sus modelos de puntos y líneas, modelos escalonados, modelos lineales, polinómicos de segundo y tercer grado, exponenciales, radicales y logarítmicos.
- La importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de la función.

Posteriormente, en el año 1996, se lleva a cabo la construcción de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) en los cuales se consolida la importancia de contribuir al desarrollo del pensamiento variacional en los contextos escolares. Los Lineamientos Curriculares tienen como objetivo principal aportar significativamente al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problema inmersas en el contexto sociocultural, el de otras ciencias y de las mismas matemáticas. Particularmente, se hace referencia al pensamiento variacional, cuyo desarrollo es planteado como uno de los logros importantes que debería alcanzarse durante la educación media. La expresión “pensamiento variacional” es introducida con la intención de profundizar respecto al aprendizaje y tratamiento de funciones como modelo de situaciones de cambio (MEN, 2004).

En los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se amplía la visión del desarrollo del pensamiento variacional, en tanto que promueve la organización y modelación de situaciones y problemas en los que se presente variación. “La mayoría de las situaciones de variación y cambio de la vida diaria involucran de manera explícita la consideración del tiempo. El cambio y la variación se presentan cuando una circunstancia dada se transforma con el transcurso del tiempo” (MEN, 2004, p. 17).

Se plantea que la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), las fórmulas y las expresiones analíticas, son algunos de los sistemas de representación asociados a la variación.

De este modo, “el pensamiento variacional es la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas” (MEN, 2004, p. 17). Lograr identificar el fenómeno de cambio en una situación, describirlo, interpretarlo, cuantificarlo, modelarlo y predecir sus consecuencias, son habilidades que se esperan desarrollar con el pensamiento variacional.

En concordancia con los Lineamientos Curriculares, en el año 2006 surgen los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) como un referente para evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar. Este documento plantea que el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, de igual forma con su

descripción, modelación y representación usando diferentes tipos de registro simbólicos tales como el verbal, el icónico, el gráfico o el algebraico, entre otros (MEN, 2006).

Según los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) el pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con otros pensamientos matemáticos como el numérico (tablas, patrones numéricos), el espacial (mecanismos geométricos y gráficas cartesianas), el métrico (medición de magnitudes en situaciones de variación y cambio) y el aleatorio (tratamiento de datos), pues estos pueden presentarse tanto en forma estática como en forma dinámica y variacional.

El desarrollo del pensamiento variacional puede iniciarse prontamente en el currículo a partir del estudio de patrones y de la identificación de sus reglas de formación; también a través del análisis de situaciones de variación relacionadas con el tiempo y representadas gráfica o tubularmente. Las variaciones se expresan más directamente por medio del sistema algebraico, sin embargo, pueden surgir otro tipo de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario, las tabulares, las gráficas o las pictóricas, que le permitan al estudiante observar y describir aspectos de la situación de cambio que se analiza (MEN, 2006).

Por otra parte, respecto a la inclusión de las tecnologías computacionales, afirma que las tecnologías computacionales, como calculadoras graficadoras, sistemas de álgebra computacional (CAS), sensores (CBL, CBR) de movimiento, temperatura, intensidad luminosa, geometría dinámica, programación, entre otras, proporcionan nuevas posibilidades de representación de los fenómenos de variación y permiten pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro (MEN, 2004).

Aunque las nuevas tecnologías no son la solución mágica e inmediata a los problemas actuales que enfrenta la educación, no se deben desconocer sus potencialidades y su posible impacto positivo en la enseñanza de las matemáticas y en particular en el estudio de la variación (Gómez, 1997).

Según (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010; citados en (Rojano, 2014) las investigaciones realizadas desde la década del 90 sobre el impacto de la tecnología en el aula concluyen que los entornos tecnológicos poseen una gran potencialidad para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Algunos de los aspectos que se mencionan a su favor son: la posibilidad de una iniciación temprana al aprendizaje del álgebra y al estudio de la matemática de la variación; una aproximación a la enseñanza de las matemáticas por medio de la modelación de fenómenos del mundo físico; y, la inclusión de nuevos temas en el currículo de matemáticas de distintos niveles escolares (por ejemplo, recursividad, generalización y matemática del cambio en la educación básica).

En particular, las calculadoras graficadoras tienen la capacidad para manejar dinámicamente al menos dos sistemas de representación de objetos matemáticos (simbólica, gráfica y en ocasiones tabular). Estos artefactos ofrecen un escenario que posibilita la experimentación y la verificación de conjeturas matemáticas. Dichas acciones matemáticas son formas de actuar que difícilmente se logran con medios tradicionales como el lápiz y el papel que, por su naturaleza estática, no hacen evidente los aspectos variacionales de ciertos objetos matemáticos (Gómez, 1997).

De acuerdo con las orientaciones dadas por el Ministerio de Educación Nacional en sus distintos documentos legales y los planteamientos propuestos en las investigaciones expuestas a

continuación, es pertinente llevar a cabo esta propuesta de investigación que pretende generar discusión y reflexión en el marco del campo de investigación en Educación Matemática.

### 1.3.2. Antecedentes

En los antecedentes se hace énfasis en tres aspectos: referente a estudios asociados a la variación, las investigaciones referentes al enfoque instrumental, y la teoría de objetivación cultural.

<b>Eje:</b> Pensamiento variacional
<b>Título:</b> Mediación digital e interdisciplinaridad: una aproximación al estudio de la variación.
<b>Autores:</b> Parada, Conde y Fiallo (2016)
<p><b>Aspectos relevantes de la investigación:</b></p> <p>Este artículo tiene como objetivo rescatar el movimiento como núcleo conceptual del Cálculo. Para hacerlo, diseñan una clase denominada <b>cuerdas vibrantes</b> (Conde, 2013), que le permite dotar de significado los objetos matemáticos desde un contexto musical.</p> <p>Los autores consideran el enfoque de resolución de problemas, en el que esperan que los estudiantes construyan las nociones asociadas a la variación. En este reporte investigativo, se emplean algunos procesos matemáticos y estos, son asociados al pensamiento variacional: comunicación; representación; formulación, comparación y</p>

ejercitación de procedimientos; razonamiento y demostración. De estos procesos, emergen las habilidades que sirven de insumo para realizar el análisis de los datos.

Finalmente, los autores presentan los siguientes resultados:

- Un concepto que surge por la resolución del problema en la hoja de cálculo y las preguntas planteadas de la actividad es la del infinito potencial y actual. El estudiante ve la necesidad de usar el redondeo de dos cifras decimales que trae por defecto el software; dicha situación es aprovechada por el profesor para cuestionar y crear la necesidad de aumentar el redondeo. Estas acciones conducen a las ideas de aproximación y tendencia, articuladoras del concepto de límite.
- Se dota de significado auditivo un objeto matemático, en este caso el de variación. Los estudiantes interactúan con las representaciones de la escala musical, asociadas a la estructura fraccionaria y extendida a procesos infinitos. De esta forma asignan un evento sonoro como forma de representación e identificación de las relaciones de variación existente entre los fraccionamientos de la longitud de la cuerda y su frecuencia correspondiente.

**Eje:** Teoría Cultural de la Objetivación

**Título:** Elementos de una Teoría Cultural de la Objetivación

**Autores:** Radford (2006)

**Aspectos relevantes de la investigación:**

En este artículo se presentan los lineamientos generales de la Teoría Cultural de la Objetivación, una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la que el aprendizaje es concebido como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo, en la que se dota de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el aprendiz en su cultura. Y en consecuencia el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas es que el estudiante aprenda a reflexionar de acuerdo con ciertas formas culturales de pensamiento históricamente constituidas que las distinguen de otras formas de reflexión.

El salón de clases se convierte en el espacio social donde el estudiante reflexiona con su realidad histórico-cultural, donde la interacción es consustancial al aprendizaje, es decir, el salón de clases se convierte en una comunidad de aprendizaje. Dicho de este modo, Radford, propone el desarrollo de tres etapas que, según la teoría de objetivación, se deben llevar a cabo en el aula: el trabajo en pequeños grupos, el intercambio entre pequeños grupos y por último las discusiones generales. Para ilustrar dichas etapas, Radford, presenta un extracto de una clase sobre la interpretación del movimiento en una clase de décimo grado. La lección incluía un sensor de movimiento CBR y una calculadora graficadora TI 82. El enunciado que se presenta a los estudiantes es el siguiente: “Dos alumnos, Pierre y Martha, se colocan a una distancia de un metro y empiezan a caminar en línea recta. Martha, que está detrás de Pierre, lleva una calculadora conectada a un CBR. El gráfico obtenido se encuentra reproducido abajo. Describan cómo Pierre y Martha han podido hacer para obtener ese gráfico.”

**Eje:** Enfoque instrumental

**Título:** Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental.

**Autores:** Pedreros (2012)

**Aspectos relevantes de la investigación:**

Este trabajo de investigación articula la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), a partir de la cual se fundamenta la enseñanza del álgebra escolar como instrumento de modelización, con el Enfoque Instrumental desde el cual se fundamenta la integración de un Sistema Algebraico Computacional (CAS), en tanto instrumento central para la creación, representación y manipulación de funciones. Se desarrolla en el contexto de un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle y pretende aportar desde lo teórico y lo metodológico una visión fundamentada de la concepción del álgebra en la educación secundaria y la posibilidad de integración de un CAS y un sensor de movimiento CBR.

Luego, de la implementación de un conjunto de tareas mediado por un CBR y una calculadora Voyage 200 y de los análisis a priori y a posteriori de los datos, surgen las siguientes conclusiones, entre otras:

- Los estudiantes identificaron las magnitudes como distancia y tiempo, debido a que el contexto físico permitió la integración de un CAS y un sensor de movimiento (CBR), para el estudio de las relaciones espacio – temporales a partir de la

representación gráfica de manera experimental. Además, cuantificar las magnitudes y establecer la relación entre ellas, es decir, identificar sus características según los diferentes tipos de variación.

- Debido a que el CBR brindó la posibilidad de tomar “datos reales” de manera experimental, le permitió a los estudiantes tomar decisiones para planificar sus movimientos, hacer conjeturas, validarlas, relacionar la experiencia real o física con la representación gráfica, hacer explícito el punto de referencia, la distancia inicial, emplear de las unidades de medida estandarizadas y arbitrarias, reconocer la velocidad como la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo empleado, entre otras.
- La autora también pudo identificar las dificultades de algunos estudiantes al interpretar las gráficas cartesianas para la descripción de las situaciones de variación en este contexto y que han sido reportadas por Kaput (1987) en los estudios de sistemas de representación matemática, tales como: al generar una gráfica dada de Distancia *vs* Tiempo, los estudiantes tienden a realizar el movimiento siguiendo la trayectoria del gráfico sin considerar la variación de las magnitudes que permiten describir el movimiento.

## 2. Diseño metodológico

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de esta investigación es identificar y describir algunos esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional, cuando estudiantes de grado noveno y décimo abordan tareas mediadas por una calculadora graficadora y un sensor de movimiento.

Desde nuestra experiencia hemos evidenciado que la enseñanza del Cálculo usualmente se centra en el desarrollo de algoritmos y reglas, desconociendo su carácter variacional. Además, los diferentes registros empleados para representar un objeto matemático se presentan en el aula de forma aislada y carecen de significado para los estudiantes. En sintonía con lo anterior, surge la pregunta que orienta el trabajo de esta investigación: ¿qué esquemas de acción instrumentada asociadas al desarrollo del pensamiento variacional se pueden evidenciar, cuando estudiantes de grados noveno y décimo abordan tareas mediadas por el uso de tecnología computacional?

De acuerdo al objetivo de esta investigación, el enfoque adoptado es el fenomenológico con una aproximación interpretativa. Esta aproximación, brinda la posibilidad de hacer inferencias, sobre las diversas formas de pensamiento de un grupo de estudiantes, a la luz de la teoría de la objetivación y del enfoque instrumental. Se pretende rastrear cuidadosamente las acciones, interacciones y discursos que surgen al abordar tareas, mediadas por el uso de tecnología computacional y el movimiento corporal.

En este capítulo se presenta, la estrategia investigativa, el contexto experimental y las fases llevadas a cabo para la construcción de este trabajo. Estas fases incluyen la fundamentación teórica,

el diseño de instrumentos, la implementación de las tareas, los métodos de recolección de datos, el análisis y las conclusiones.

### **2.1. Estrategia investigativa**

Para este trabajo las autoras consideran pertinente desarrollar la estrategia investigativa **Entrevista basada en tareas** (Goldin, 2000). Esta privilegia los procesos de interacción entre un grupo de estudiantes, el entrevistador, la herramienta tecnológica y la tarea. Lo anterior, con el propósito de emitir inferencias que aporten a la descripción de los procesos llevados a cabo por los entrevistados al resolver una o varias tareas que los aproximen al pensamiento variacional.

La Estrategia entrevista basada en tareas busca profundizar sobre la actividad matemática llevada a cabo por unos individuos al resolver tareas previamente diseñadas por uno o varios investigadores. Esta estrategia, pretende documentar las maneras en las que una o más personas desarrollan su razonamiento para solucionar una situación matemática y rastrear formas de exploración o de construcción del pensamiento matemático.

En esta estrategia participan los entrevistados, quienes se encargan de resolver las tareas propuestas y uno o varios entrevistadores que se encargan de crear el escenario adecuado para que los entrevistados expongan de manera clara y precisa las ideas, argumentos o razonamientos que son empleados. También tienen un rol fundamental en el desarrollo de la estrategia los recursos utilizados y las tareas propuestas que deben ser no convencionales y enfocadas en los procesos de resolución, más que en respuestas correctas o incorrectas.

La Entrevista basada en tareas permite la interacción entre los entrevistados, el entrevistador y la tarea misma. Dicha tarea, puede ser orientada a partir de una serie de preguntas, actividades o problemas que faciliten la interacción. Se optó por realizar entrevistas grupales, y no individuales,

para ofrecer a los estudiantes un espacio que permitiera la construcción de ideas y razonamientos, generar un ambiente de confianza entre los participantes y el investigador. De igual forma, favorecer la interacción no solo entrevistador - entrevistados, sino también entre los mismos entrevistados.

Optar por esta estrategia, no implica necesariamente que la tarea y la entrevista debía tener un matiz riguroso; al contrario, la forma en que se creó la tarea proporcionó elementos que generó confianza y seguridad por parte de los estudiantes, lo cual nos llevó a contemplar otros aspectos que no habían sido planeados. En primer lugar, considerar el cuerpo como medio de comunicación para expresar ideas matemáticas: mediante los gestos, señalamientos y los movimientos corporales. En segundo lugar, la tarea misma podía ser enriquecedora, pues facilitaba la creación de ideas, estrategias, así como proponer algunos movimientos no establecidos inicialmente. En tercer lugar, como se mencionó anteriormente, ese ambiente de confianza facilitó la comunicación con el entrevistador.

## **2.2. Contexto experimental**

Atendiendo a la estrategia utilizada para esta investigación, los escenarios escogidos son los colegios donde se desempeñan como profesoras las autoras, debido a que esto facilita la recolección de datos. Una de las instituciones es el Colegio Cafam, de carácter privado, está ubicado en la ciudad de Bogotá, en la localidad de Barrios Unidos. La Institución Educativa Eduardo Santos, de carácter oficial, se encuentra en el municipio de Soacha, barrio Ubaté. Los participantes son estudiantes de grados noveno y décimo cuyas edades están entre los 14 y los 17 años. Se escogen varios grupos de estudiantes de las instituciones educativas, priorizando su interés por participar en la investigación.

En la institución Eduardo Santos se realiza el primer pilotaje con dos estudiantes de grado décimo, durante dos sesiones, cada una de dos horas. Posteriormente, las investigadoras aplican el conjunto de las tareas de la siguiente forma:

- Colegio Cafam: La investigadora escoge cuatro estudiantes de grado noveno, quienes muestran interés por participar en la investigación. Se desarrollan cuatro sesiones, cada una de dos horas.
- Institución Educativa Eduardo Santos: La investigadora decide escoger cuatro estudiantes de cada uno de los tres décimos. En esta institución educativa, se seleccionan en total doce estudiantes y se aplica el conjunto de tareas por grupos de cuatro estudiantes. Con cada grupo de participantes se llevan a cabo dos sesiones de trabajo cada una de dos horas.

### **2.3. Fases**

Esta investigación se desarrolla en cinco fases, a saber: La primera fase atiende la fundamentación teórica, que sirve de soporte para la construcción de las etapas de la tarea y de la herramienta analítica; la segunda fase es la selección y reconocimiento de los artefactos (CBR y Calculadora TI 92 PLUS) por parte de las investigadoras; la tercera fase es el diseño del conjunto de tareas; la cuarta fase resulta de la recolección, depuración y organización de los datos, luego de la implementación del conjunto de tareas; y, por último, en la quinta fase se lleva a cabo el análisis de los datos con el fin de emitir posibles interpretaciones de la actividad matemática de los estudiantes.

### **2.3.1. Fase I. Fundamentación teórica**

Esta fase tiene como propósito documentar a las autoras, con el fin de utilizar los referentes teóricos para la elaboración herramienta analítica, con la que se analizan posteriormente los datos, tal como se muestra en el capítulo cuatro. Los aspectos relevantes de cada uno de los referentes teóricos y documentos estudiados se abordan en el capítulo tres. Durante esta fase se profundiza en el estudio del pensamiento variacional, cuyo desarrollo es eje principal de este trabajo de grado, por lo cual es necesario efectuar la revisión de literatura nacional e internacional alrededor de los procesos de cambio y variación. Adicionalmente, se realiza un acercamiento al Enfoque Instrumental, debido a que el conjunto de tareas que se diseña está mediado por tecnología computacional.

Por último, se decide estudiar aspectos relevantes de la teoría cultural de la objetivación con el propósito de adquirir herramientas que permitan a las investigadoras conocer las formas de pensamiento de los estudiantes.

### **2.3.2. Fase II. Selección y reconocimiento de los artefactos**

Durante el desarrollo de esta fase, las investigadoras eligen los artefactos que consideran pertinentes para la elaboración de la tarea. Estos son un sensor de movimiento CBR y una calculadora TI-92 PLUS. En esta fase, se explica cada uno de los artefactos empleados y su funcionamiento, tomado del manual de instrucciones del CBR (Texas Instruments Incorporated, 1997)

### 2.3.2.1. ¿Qué es el CBR (Calculator-Based Ranger™)?

Es un detector sónico de movimiento que requiere de una calculadora TI-82, TI-83, TI-85/CBL, TI-86 y TI-92. Aporta al aula la posibilidad de capturar y analizar datos reales y al no requerir de la programación facilita el uso en el aula. Como su nombre lo indica, requiere del programa RANGER; este viene incluido en el sensor y es el que permite la recolección de datos.

Con el uso del CBR y la calculadora gráfica TI, los estudiantes pueden capturar, ver y analizar datos del movimiento sin tomar medidas ni hacer dibujos a mano. Además, permite a los estudiantes explorar las relaciones matemáticas y científicas existentes entre distancia, velocidad, aceleración y tiempo, utilizando los datos de las actividades llevadas a cabo. Los estudiantes pueden explorar conceptos matemáticos y científicos tales como:

- Movimiento: distancia, velocidad, aceleración.
- Representación gráfica: ejes de coordenadas, pendiente, cortes con los ejes.
- Funciones: lineal, cuadrática, exponencial, sinusoidal.
- Análisis matemático: derivadas, integrales.
- Análisis estadísticos y de datos: métodos de captura de datos, análisis estadístico.

A continuación, se muestra en la siguiente imagen (Ver Imagen 1) los elementos principales del CBR.

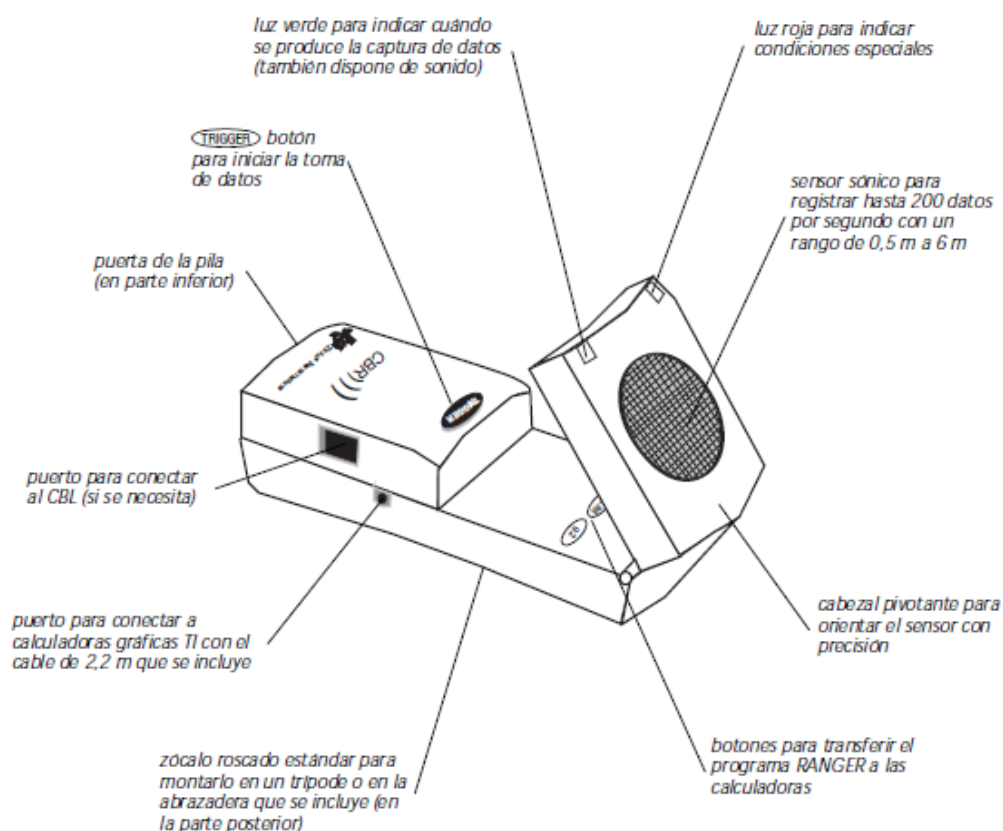


Imagen 1. Partes del CBR. Copyright 1997 por Texas Instruments Incorporated.

### 2.3.2.2. ¿Cómo utilizar el CBR?

1. Conectar el CBR y la calculadora TI utilizando el cable.
2. Elegir la calculadora que será conectada al CBR, para hacer la transferencia del programa RANGER, puesto que este programa está personalizado para cada calculadora. Para el caso de la calculadora TI-92 PLUS, basta con presionar el botón que permite la transferencia del programa RANGER. Cuando finaliza el proceso de transferencia, la luz verde del CBR parpadea una vez, CBR emite un pitido y la pantalla de la calculadora muestra el mensaje DONE. Si hay un problema, la luz roja del CBR parpadea dos veces y el CBR emite dos pitidos.

3. Escribir sobre la pantalla principal RANGER (), luego presionar *enter*, para ejecutar el programa RANGER en la calculadora TI-92 PLUS. Posteriormente, aparece el menú principal (*MAIN MENU*). (Ver *Tabla 1*)

<b><i>MAIN MENU</i></b>	
<b><i>SETUP/SAMPLE:</i></b>	<p>Ver/cambiar los ajustes antes de la toma de datos. Esta función permite a los estudiantes tomar los datos de forma libre. El sensor los captura y posteriormente, en la pantalla de la calculadora se pueden observar los datos obtenidos.</p> <p>cambiar los ajustes a los valores por defecto.</p>
<b><i>SET DEFAULTS:</i></b>	<p>Esta función permite realizar los ajustes antes de la captura de los datos:</p> <p><i>REALTIME: YES/NO</i></p> <p><i>TIME (S)= 1-99 SECONDS</i></p> <p><i>DISPLAY: DISTANCE, VELOCITY, o ACCELERATION</i></p> <p><i>BEGIN ON: [ENTER], [TRIGGER], o 10- SECOND DELAY</i></p> <p><i>SMOOTHING: NONE, LIGTH, MEDIUM, o HEAVY</i></p> <p><i>UNITS: METERS o FEET</i></p>
<b><i>APPLICATIONS:</i></b>	<p><b>DISTANCE MATCH:</b> introduce los conceptos de distancia y tiempo; o, para ser más precisos, el concepto de distancia frente al tiempo. A medida que los estudiantes intentan reproducir gráficas caminando mientras ven representado su movimiento, puede explorarse el concepto de posición.</p> <p><b>VELOCITY MATCH:</b> introduce los conceptos de velocidad y tiempo. Reproduce una gráfica de velocidad-tiempo.</p>

	BALL BOUNCE. Esta aplicación invierte los datos de distancia para que la gráfica se ajuste mejor al movimiento de la pelota que perciben los estudiantes. $y = 0$ en la gráfica es realmente el punto en que la pelota está a máxima distancia del CBR, cuando golpea el suelo.
<b><i>PLOT MENU</i></b>	Permite modificar la pantalla de dibujo. Por ejemplo, reducir el efecto de las señales dispersas o de las variaciones en las medidas de distancia.
<b>TOOLS</b>	Esta función permite obtener los datos que han sido guardados en la memoria del programa RANGER. También le permite al usuario conocer el estado de las pilas del CBR.
<b>QUIT</b>	Salir del programa.

Tabla 1. Herramientas del programa RANGER

### 2.3.2.3. ¿Cómo funciona el CBR?

Es un detector de movimiento que envía una señal ultrasónica y posteriormente mide el tiempo que tarda dicha señal en volver después de chocar con el objeto más cercano. Mide el intervalo de tiempo entre la transmisión de la señal ultrasónica y el primer eco devuelto, pero dispone de un microprocesador incorporado. Cuando se capturan los datos, el CBR calcula la distancia del objeto al CBR utilizando operaciones que tienen en cuenta la velocidad del sonido.

Para comprender el funcionamiento del CBR es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- El tamaño del objeto: La precisión de la lectura depende del tamaño del objeto, si ubica un balón o un ping-pong a cinco metros de distancia, el CBR detectará con mayor facilidad el balón.
- Cuando el CBR envía una señal, la misma choca con el objeto, rebota y es recibida por el CBR. Si un objeto está a menos de 0,5 metros, las señales consecutivas pueden solaparse y es posible que el CBR las identifique mal. La gráfica sería incorrecta, de manera que debe colocar el CBR a más de 0,5 metros del objeto.
- Al desplazarse la señal por el aire, va perdiendo intensidad. Tras recorrer 12 metros (6 de ida y 6 de vuelta al CBR), puede que el eco de vuelta sea demasiado débil para que el CBR lo detecte bien. Esto limita la distancia efectiva para obtener resultados fiables a un máximo de 6 metros de distancia al CBR.
- El haz que emite el CBR es cónico formado por un ángulo de  $10^\circ$ . Se recomienda evitar interferencias con otros objetos, para ello debe establecerse una zona despejada en la trayectoria del haz de luz.

Debido a que el fin principal de la tarea es el posible desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, las investigadoras consideran pertinentes las situaciones de dependencia que ofrece el programa RANGER, a través de las funciones Distancia vs. tiempo que presenta. Por lo que se procede a explorar el funcionamiento, el uso, las potencialidades y posibles restricciones de la tecnología computacional escogida, por medio de pequeñas tareas desarrolladas en cuatro sesiones. Esta experiencia resulta de gran utilidad durante la posterior fase, debido a que facilita el diseño de la ruta necesaria para la elaboración de las tareas.

### **2.3.3. Fase III. Diseño de las tareas**

Luego de comprender el funcionamiento de los artefactos, las investigadoras diseñan una primera versión de las tareas que se serán puestas a prueba con estudiantes de grado décimo. Para ello se consideran dos etapas:

#### **2.3.3.1. Etapa 1. Reconociendo los artefactos**

La docente les presenta a los estudiantes la calculadora TI 92 PLUS y el sensor de movimiento CBR y se desarrolla una etapa de reconocimiento en el que exploran libremente los artefactos para reconocer formas de uso, potencialidades y posibles restricciones. Por indicaciones de la docente se establece dejar fijo el sensor durante todas las sesiones y que sean los estudiantes quienes se desplacen “acercándose” y “alejándose” del sensor. Esta primera parte le concede al estudiante la posibilidad de reconocer las magnitudes representadas en las gráficas, establecer la distancia máxima y mínima captada por el sensor y relacionar la ubicación espacial de un objeto captado por el sensor con un punto en la representación cartesiana que se muestra en la calculadora. Adicionalmente, esta etapa abre la posibilidad a los estudiantes de explorar otros movimientos, no concebidos por las investigadoras inicialmente.

#### **2.3.3.2. Etapa 2. Imitando una gráfica dada (*APPLICATIONS: DISTANCE MATCH*)**

El programa RANGER de manera aleatoria arroja una gráfica (TIEMPO vs. DISTANCIA), y esta debe ser reproducida por los estudiantes, con la mayor exactitud posible, a través de desplazamientos en los que se acercan o se alejan del sensor, según

corresponda. La representación del desplazamiento de los estudiantes aparece de manera casi inmediata en la calculadora y sobre la gráfica presentada inicialmente, lo que facilita la interpretación y comparación de ambas representaciones. En esta etapa los estudiantes suelen emplear expresiones como: “mantenerse en reposo”, “moverse más rápido”, “alejarse del sensor”, “acercarse al sensor en un determinado tiempo”, entre otros, con el objetivo de establecer relaciones entre su movimiento corporal y la representación gráfica de la función, así como, crear estrategias que les permitan reproducir las características propias de la representación gráfica de la función, como ser constante, creciente o decreciente.

Con las etapas preestablecidas, las investigadoras proceden a realizar la primera prueba piloto con dos estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Eduardo Santos para verificar la pertinencia del diseño. La sesión se lleva a cabo sin entregar cuestionarios a los estudiantes, las indicaciones se dan verbalmente por la profesora que acompaña el trabajo. La entrevista no está restringida a un libreto particular, lo único preestablecido son las etapas mencionadas anteriormente. Las preguntas que la profesora hace durante la sesión, surgen de forma espontánea y con la intención de rastrear la actividad matemática de los estudiantes que emerge cuando se enfrentan a los retos propuestos.

Este primer pilotaje, sirve de insumo para corregir algunos aspectos en próximas sesiones:

- **Recolección de la información:** En la primera prueba piloto, solo se empleó una cámara, lo que dificulta tomar un adecuado registro de la situación, pues si se graba los datos de la calculadora, se pierde el registro del movimiento de los niños y viceversa. Por esta razón, se decide emplear mínimo dos cámaras para las siguientes aplicaciones, una

para capturar el movimiento corporal de los estudiantes y otra para capturar los datos de la pantalla de la calculadora.

- **Formulación de las tareas y las preguntas:** se evidencia la necesidad de elaborar un documento que oriente la entrevista, el desarrollo de las tareas y las posibles preguntas que se les puede formular a los estudiantes. Esto debido a que, después de la primera prueba piloto, se evidencian aspectos que fueron pasados por alto durante la aplicación y que hubiesen podido aportar a la investigación.

- **Establecimiento de otras etapas:** A partir de la primera aplicación de las tareas se decide incluir algunas etapas al conjunto de tareas en las que se privilegien otras representaciones, como la tabular.

Con estas nuevas consideraciones, se rediseña el conjunto de tareas y se elabora el taller orientador, ver anexo No. 1. A continuación se describen las etapas adicionales que fueron incluidas.

### **2.3.3.3. Etapa 3. Imitando una gráfica (parte 2):**

Esta etapa tiene como propósito imitar una representación gráfica dada que no aparece en la calculadora. Esto debido a que todas las gráficas Distancia vs. Tiempo arrojadas por el RANGER en la calculadora son funciones a trozos, donde cada trozo es un segmento de recta. Se presenta a los estudiantes imágenes de gráficas de funciones Distancia vs. Tiempo con formas parabólicas o senoidales. De forma similar a la Etapa 2, se espera que los estudiantes creen estrategias que les permitan reproducir la representación gráfica

presentada con la mayor exactitud posible, teniendo la oportunidad de intentarlo, tantas veces como ellos lo soliciten.

#### **2.3.3.4. Etapa 4. Imitando representaciones tabulares**

El propósito de esta etapa es reproducir por medio del desplazamiento de los estudiantes, una función Distancia vs. Tiempo presentada en su representación tabular. Se espera que durante la interacción con esta tarea los estudiantes reconozcan patrones o regularidades para identificar el comportamiento de la función y reproducirla gráficamente por medio del sensor.

#### **2.3.3.5. Etapa 5. Relacionando registros de representación**

Se espera que en esta etapa los estudiantes logren relacionar distintos registros de representación de la misma situación, sin necesidad de utilizar los artefactos involucrados en las etapas anteriores. Los registros presentados de las funciones Distancia vs. Tiempo son gráfico, tabular y descriptivo; este último se hace en términos del movimiento que una persona debe realizar para que los datos captados por el sensor reproduzcan la función deseada.

#### **2.3.4. Fase IV. Recolección, organización y depuración de los datos**

En esta fase las autoras realizan acciones que posibilitan la recolección de la información, su organización y posterior depuración.

Dentro de cada grupo de estudiantes se asignan unos roles específicos para la ejecución de la tarea; sin embargo, todos pueden aportar con sus ideas y argumentos discursivos a la creación de estrategias. Las funciones establecidas para los estudiantes son las siguientes:

- Grabar la pantalla de la calculadora.
- Grabar el movimiento realizado por sus compañeros.
- Realizar el movimiento corporal que reproduzca la gráfica presentada, siguiendo las instrucciones dadas por el equipo de trabajo.
- Proporcionar indicaciones al compañero que realiza el desplazamiento mientras observa en la calculadora los datos captados por el sensor.

Una vez los estudiantes escogen los roles, la profesora (investigadora) dialoga con ellos y les informa el propósito del trabajo que se va a realizar, aclarando, que este tiene como objetivo indagar sobre las diferentes formas de pensamiento que pueden salir a la luz, al abordar un conjunto de tareas que involucra la tecnología computacional y el movimiento kinestésico. Para generar más confianza en los estudiantes, la profesora les menciona que no hay respuestas buenas o malas y que todos sus aportes son bienvenidos, por lo que le solicita a cada uno de los grupos que, en la medida de lo posible, expresen todo lo que piensen o se les ocurra.

En ambas instituciones los participantes seleccionados experimentan todas las etapas propuestas en el conjunto de tareas, de estas interacciones se obtienen videos con audio para registrar las acciones de los estudiantes.

Luego de la aplicación del conjunto de tareas, la información que se recolecta, se organiza en carpetas, según el grado al que pertenecen los estudiantes. Para cada carpeta se crean dos subcarpetas que clasifica la información, según si la grabación es del movimiento corporal de los estudiantes o de la pantalla de la calculadora. Para acceder a la información esta se comparte en una nube de almacenamiento (Google drive), no obstante, debido a la insuficiente capacidad de almacenamiento, fue necesario compartir los vídeos en YouTube. Por ser menores de edad, la identidad de los estudiantes es protegida y se emplean otros nombres durante el análisis, por tal motivo las únicas personas que pueden acceder a este canal son las autoras de este trabajo.

Posteriormente, las autoras deciden depurar la información, escogiendo algunos videos por lo cual fue necesario llegar a acuerdos y establecer los siguientes criterios de selección:

1. El video presenta un matiz descriptivo, es decir los estudiantes son elocuentes con sus ideas, proponen y establecen diferentes estrategias.
2. La calidad del vídeo permite visualizar tanto el movimiento corporal de los estudiantes como la pantalla de la calculadora.
3. El discurso presentado en el vídeo no se repite en otros y aporta evidencias nuevas del pensamiento de los estudiantes.
4. La interacción de los estudiantes captada en el video se relaciona con aspectos variacionales que se ajustan a la herramienta analítica utilizada y a los objetivos propuestos en el estudio.

Una vez elegidos los vídeos que cumplen con los criterios establecidos, se realiza la transcripción de los segmentos de vídeo más representativos para cada una de las etapas.

### 2.3.5. Fase V. Análisis de los datos

En esta fase se elabora la herramienta analítica que se emplea para codificar las transcripciones de los segmentos elegidos. A partir de esta categorización se identifican, algunos esquemas de acción instrumentada que construyen los estudiantes al abordar las tareas propuestas. Finalmente, se realiza la escritura del análisis de los datos desde un enfoque lo descriptivo e interpretativo.

Luego, de la revisión teórica expuesta en el marco de referencia, se propone la herramienta analítica que será utilizada para el análisis de los fragmentos de video seleccionados. Se explicitan las categorías de análisis y las subcategorías correspondientes, como se muestra en la *Tabla 2*. Adicionalmente, se generan unos códigos que simplifican la notación cuando se quiera referir a una u otra subcategoría.

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	CÓDIGOS
PROCESOS MATEMÁTICOS ASOCIADOS AL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN	Comunicar ideas sobre variación	Interpretar enunciados (C-I)
		Explicar ideas (C-E)
		Justificar y argumentar ideas (C-J)
	Representación de objetos matemáticos asociados al estudio de la variación	Construir representaciones (R-C)
		Interpretar representaciones de los objetos matemáticos. (R-I)
		Reconocer, relacionar y conectar las diferentes representaciones de un mismo objeto. (R-R)

MEDIACIÓN INSTRUMENTAL	Instrumentalización	(IZ)
	Instrumentación	(IC)
TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN	Señalamientos y gestos	(O-SG)
	Expresiones lingüísticas asociadas al estudio de la variación	(O-E)
	Movimiento corporal	(O-M)

Tabla 2: Herramienta analítica.

Luego de hacer las transcripciones, se hace lectura de cada una de las líneas y se codifican utilizando ternas que vinculan las tres teorías puestas en juego, los procesos matemáticos asociados al pensamiento variacional, el enfoque instrumental y la teoría cultural de objetivación. En cada una de las entradas de las ternas se asocia una de las teorías y un color característico, como se muestra a continuación: (PROCESOS DE PENSAMIENTO VARIACIONAL - Habilidades: comunicación o representación, ENFOQUE INSTRUMENTAL- Procesos: instrumentalización e instrumentación, TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN - Medios semióticos de objetivación: expresiones lingüísticas, gestos y señalamientos, movimiento corporal).

Con el propósito de conocer cómo el uso de tecnología computacional influye en las formas de pensamiento asociadas a la variación de los estudiantes, se hace necesario para las autoras identificar algunos de los esquemas de acción instrumentada que construyen los niños durante el desarrollo de las tareas. Estos esquemas se logran evidenciar a través de los medios semióticos de objetivación presentes en la actividad matemática (señalamientos, movimientos corporales y expresiones lingüísticas) y el desarrollo de algunas habilidades asociadas al pensamiento variacional, en particular, comunicar y representar. Los esquemas de acción instrumentada son

emergentes durante la fase de análisis, a partir de las intervenciones de los estudiantes durante las etapas de la tarea.

El análisis se realiza con información recolectada únicamente de las etapas uno, dos y cuatro, debido a que de las etapas tres y cinco no se logra obtener información suficiente para hacer un análisis detallado. Las transcripciones de los segmentos de interés de cada etapa, se presentan con su respectiva descripción y análisis interpretativo.

En todas las transcripciones la primera columna hace referencia a la etapa, seguido de la numeración de las intervenciones. En la segunda columna se presenta el nombre de la persona que interviene en la conversación (cada línea corresponde a cada intervención). La tercera columna incluye el discurso de los participantes tanto verbal como corpóreo.

Adicionalmente, durante el análisis, se incluyen imágenes que permiten mostrar el movimiento corporal, los gestos y los señalamientos de los estudiantes al ejecutar las tareas. Estas imágenes también muestran capturas de pantalla de la calculadora con las representaciones gráficas y las modelaciones del movimiento de los estudiantes.

En la escritura del análisis, para hacer referencia a las intervenciones de los participantes se usará el número del episodio, junto con el número de cada línea de la transcripción, es decir, si corresponde a la episodio 1, línea 12, se escribirá de la siguiente forma: [1.12].

### 3. Consideraciones teóricas

Este capítulo presenta los referentes teóricos y artículos investigativos tomados en consideración para identificar y describir algunos esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional, cuando estudiantes de grado noveno y décimo abordan tareas mediadas por una calculadora graficadora y un sensor de movimiento.

Por lo anterior, a continuación, se presentan algunos acercamientos teóricos sobre el desarrollo del pensamiento variacional, el enfoque instrumental y la teoría de objetivación cultural, con el objetivo de orientar el análisis del discurso de los estudiantes.

#### 3.1 Pensamiento variacional

En los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), el pensamiento variacional, tiene como propósito profundizar en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio y variación. Una forma de estudiar la variación y el cambio se puede evidenciar cuando una situación dada se transforma con el transcurso del tiempo de forma continua e ininterrumpida. Cuando la variación es continua, el modelo para el estudio de esta variación es el de las funciones de variable real. Por otro lado, si se estudia la variación en intervalos espaciados de tiempo se habla de variación discreta. El modelo para el estudio de estas situaciones son las sucesiones (funciones de variable entera).

En las situaciones de cambio, se pueden identificar las magnitudes y su relación entre ellas. Requiere, además, de la identificación y el uso de variables, como cantidades que son mensurables y que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian (Parada et al., 2016). La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de cómo las magnitudes se

comportan en cierta situación, puede considerarse como un acercamiento no cuantitativo de la variación (Guacaneme, 2012). En las descripciones de situaciones de cambio se esperan expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que la otra, tal magnitud aumenta más lenta que la otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc. (MEN, 2004).

A continuación, se describen algunos procesos que según (Parada et al., 2016) están asociados al desarrollo del pensamiento variacional, y que se acogen en esta investigación teniendo en cuenta los planteamientos establecidos por el MEN (1998, 2004 y 2006).

### **3.1.1. Procesos matemáticos asociados al estudio de la variación**

#### **3.1.1.1. Proceso de comunicación**

El proceso de comunicación es fundamental en los individuos para para expresarse, particularmente, en el contexto de las matemáticas la comunicación adquiere especial sentido cuando se quiere conjeturar, argumentar, explicar, interpretar, conectar representaciones y convencer, entre otras acciones propias de la actividad matemática. Sin embargo, esta comunicación no solo se presenta de forma verbal o escrita; el cuerpo puede ser también un medio útil para comunicar ideas matemáticas. Las formas de comunicación empleadas por los estudiantes se pueden caracterizar por medio de las siguientes habilidades (Parada et al., 2016):

- Interpretar: consiste en dar sentido a enunciados, leer una situación a través de sus diferentes registros de representación, como gráficos y tablas, hacer una lectura de un resultado de un experimento en el que involucra una situación inicial, entender la variación entre dos magnitudes presentes en una simulación o en un fenómeno.

- Explicar: implica decir, exponer o describir con palabras, gestos o ejemplos ideas asociadas al cambio y la variación, con el fin de que otro comprenda ese objeto de conocimiento.
- Justificar y argumentar: pretende convencer a otro sobre una idea matemática o defender las propias, haciendo uso adecuado del lenguaje y del discurso matemático.

### **3.1.1.2. Proceso de representación**

La utilización de varios sistemas semióticos de representación permite al individuo comprender las matemáticas, lo anterior, es posible cuando se distingue el objeto de su representación. Los objetos matemáticos son los números, las funciones, las rectas, etc., mientras que las representaciones corresponden a la escritura de números decimales o fraccionarios, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras, etc. Un mismo objeto matemático puede tener múltiples representaciones.

Las tecnologías computacionales proveen al usuario de múltiples representaciones dinámicas en dos dimensiones de un mismo objeto matemático, lo que posibilita nuevas formas de exploración y de interpretación de una situación matemática. Las habilidades asociadas al proceso de representación que se consideran en este estudio son (Parada et al., 2016):

- Construir representaciones de los objetos matemáticos: consiste en desarrollar la capacidad de elaborar representaciones, no necesariamente usuales, para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.

- Interpretar diferentes registros de representación de los objetos matemáticos: implica que los estudiantes puedan señalar el comportamiento tendencial de las gráficas, relacionar las magnitudes involucradas, o encontrar patrones y regularidades numéricas en una tabla.
- Reconocer, relacionar y conectar las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático: los estudiantes pueden relacionar y conectar las diferentes representaciones gráficas y tabular de un mismo objeto matemático, a través del reconocimiento de sus variantes e invariantes.

A continuación, se describen algunas formas de representación cualitativas y cuantitativas que, según el MEN (2004) se pueden presentar en las situaciones de cambio.

#### **3.1.1.2.1. Algunas formas de representación cualitativa de las situaciones de cambio**

- **Escrito:** El lenguaje escrito es una forma familiar de los estudiantes para comunicar ideas asociadas a la variación, en una situación dada. El estudiante, puede emplear palabras propias, para escribir lo que observa en una situación de variación y cambio.
- **Pictórico:** El empleo de dibujos, diagramas o gráficos son un medio para entender las situaciones de variación. Estos pueden mostrar los diferentes momentos de la situación de cambio e ir acompañados de explicaciones verbales.
- **Expresiones verbales:** El lenguaje cotidiano de los estudiantes, le permite comunicar ideas asociadas a la variación. Si bien, esta forma de representación no se acoge en MEN (2004),

durante la aplicación de las tareas, se evidencia que los estudiantes presentan mayor facilidad en emplear el lenguaje verbal para comunicar sus ideas, a diferencia del escrito.

#### **3.1.1.2.2. Algunas formas de representación cuantitativa de las situaciones de cambio**

- **Representación tabular:** las tablas de datos numéricos producen diferentes medidas de las magnitudes en la situación de cambio. En la producción de tablas numéricas, es posible encontrar patrones numéricos y de esta forma, encontrar expresiones algebraicas mediante métodos de regresión o de patrones de regularidad.
- **Representación gráfica:** se hace mediante la representación en un plano de sistema de coordenadas cartesianas. Normalmente los estudiantes parten de la representación tabular para realizar la representación gráfica; poco se parte de la expresión algebraica.

### **3.2. Enfoque instrumental**

El enfoque instrumental expone diferencias fundamentales entre lo que llama artefacto y lo que se conceptualiza como instrumento, además, estudia los procesos que se ven inmersos cuando el *artefacto* se transforma en *instrumento*. Dicha transformación se denomina *génesis instrumental*. (Rabardel, 1995). Para abordar un poco más esta teoría, a continuación, se definirán algunos conceptos clave: herramienta, artefacto, instrumento, instrumentalización e instrumentación y esquemas de utilización.

Una herramienta es considerada comúnmente como un dispositivo que fue elaborado por el hombre con el propósito de facilitar la ejecución de alguna tarea. Algunos ejemplos de

herramientas son el cincel, empleado para tallar la madera y la piedra, el anzuelo, usado para la pesca, las agujas, usadas para unir materiales entre sí.

El artefacto es una *cosa que sufre una transformación de origen humano*, y que ha sido elaborada para inscribirse en una actividad intencional. Se conoce el artefacto como un objeto que es susceptible de su uso, no necesariamente material, también puede ser simbólico. Los artefactos empleados en este trabajo de investigación son el cuerpo, la calculadora TI- 92 Plus, el sensor de movimiento CBR, los gestos y el lenguaje (Rabardel, 1995, p. 49).

El instrumento, existe como el resultado de asociar el artefacto con la acción del sujeto, es decir, se configura como una construcción progresiva del sujeto. El instrumento es una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o simbólico y esquemas de utilización elaborados por el sujeto durante su interacción con el artefacto. De acuerdo a lo anterior, se puede afirmar que el instrumento no existe en sí mismo, se vuelve instrumento cuando el sujeto se ha apropiado de este y lo ha integrado a su actividad (Verillon y Rabardel, 1995; citado en Ballestero, 2007, p. 130). Desde esta teoría, se afirma que la génesis instrumental, es un proceso cognitivo elaborado por el sujeto en el que el artefacto es convertido en instrumento; la génesis instrumental se desarrolla en dos direcciones: la instrumentalización y la instrumentación (Rabardel, 1995).

Las acciones de instrumentalización están dirigidas hacia el artefacto: “selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribución de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, entre otros” (Rabardel, 1995). Este proceso ocurre cuando se le dota de potencialidades al artefacto y se le transforma para tareas específicas en diferentes fases: Primero, descubrimiento y selección de funciones pertinentes. Segundo, el usuario escoge el artefacto que mejor se ajuste a sus necesidades. Tercero,

transformación del artefacto, como creación de macros, modificación de la barra de tareas, entre otros (Artigue, 2002).

La instrumentación es una acción dirigida hacia el sujeto, que está relacionada “con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc.” (Rabardel, 1995). La instrumentación es un proceso en el que el instrumento afecta al sujeto, permite que los esquemas de utilización desarrollados evolucionen y permitan la comprensión de las potencialidades y limitaciones del instrumento. La instrumentación permite que el sujeto desarrolle su actividad y elabore esquemas de acción instrumentada que le posibiliten construcción de conocimiento matemático.

Un esquema de acción instrumentada se define como una organización mental estable, en la cual están incluidos tanto habilidades técnicas como conceptos y teoremas que soportan una manera de utilizar un artefacto para realizar una clase de tareas (Drijvers y Gravemeijer (2005), citado en Pedreros, 2012); Estos esquemas, a la vez, pueden ser clasificados en *esquemas de uso* (dirigidas a tareas secundarias que corresponden a las acciones y actividades específicas vinculadas directamente con el artefacto) y *esquemas de acción instrumentada* (permiten dar respuesta a la tarea principal o primaria) (Rabardel, 1995)

### **3.3. Teoría cultural de la objetivación**

La teoría cultural de la objetivación nace como una motivación por proporcionar alternativas a las existentes teorías sobre educación matemática que en general se caracterizan por su carácter utilitarista e individualista. Desde algunas de estas perspectivas, el saber es concebido como

mercancía, el cerebro de los aprendices como un contenedor cuyo fin es acumular conocimiento y la labor del maestro se reduce a la transmisión de contenidos (Sfard, 2008). Todo esto enmarcado dentro de un sistema puramente capitalista, que espera reproducir sujetos con ciertas habilidades y competencias determinadas por algún mercado de consumo (Radford, 2014b). La teoría de la objetivación retoma una dimensión ética, histórica y cultural de la educación.

La teoría cultural de la objetivación parte de una concepción político conceptual que nos invita a repensar la finalidad de la educación matemática como algo que va más allá de la difusión de saberes matemáticos o el desarrollo de estructuras mentales.

La teoría cultural de la objetivación, como aproximación semiótica-cultural, centra su atención en lo corpóreo, el discurso y los signos que emergen cuando los estudiantes se refieren a objetos matemáticos. El individuo es visto como un sujeto que vive, actúa y piensa en el marco de un contexto histórico cultural y cuya actividad cognitiva está permeada por la praxis social. Dentro de esta perspectiva semiótica-cultural, el pensamiento es dimensionado como una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, que se materializa en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos (Vergel, 2014).

Los fundamentos de la teoría de la objetivación desarrollada son dos: uno de naturaleza ontológica y otro de naturaleza epistemológica. El principio ontológico plantea que los objetos matemáticos no son independientes de la actividad matemática realizada por los seres humanos, ni son descubrimientos llevados a cabo por científicos, sino que los objetos matemáticos son generados por individuos inmersos en una dimensión histórico cultural con unas necesidades particulares propias de su contexto. Estos objetos “son patrones fijos de actividad reflexiva

incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006).

En cuanto al fundamento epistemológico, la teoría sugiere que el conocimiento matemático es el resultado de acciones humanas reflexivas y en particular del pensamiento. Este pensamiento es el resultado de prácticas sociales, está situado dentro de las condiciones particulares de cada cultura y está cargado de categorías conceptuales y significados culturales que han acumulado generaciones anteriores.

Estos principios de la teoría de la objetivación permiten tratar la educación en general y la enseñanza y aprendizaje en particular en dos dimensiones, la de los saberes y la de los seres. Dentro de esta perspectiva, la escuela no se restringe a la producción y transmisión de saberes, sino también a la producción de subjetividades, formación y transformación de individuos, culturales e históricos.

En términos más específicos, en la enseñanza y aprendizaje deben estudiarse tanto los conocimientos en juego (es decir, el conocer o “*knowing*” de los alumnos), como la formación del alumno en tanto que es un sujeto humano (es decir, el volver o “*becoming*”). Es decir, el saber y el ser están interrelacionados de una manera profunda en la que uno no ocurre sin el otro.

La teoría de la objetivación plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente (Radford, 2014a)

El principio fundamental en la teoría de la objetivación es la idea de labor o trabajo en el sentido dialéctico materialista. Desde esta perspectiva, la cultura ocurre en la labor o trabajo, los individuos crean la cultura y la cultura crea a sus individuos. Es a través de la labor que encontramos al otro, al mundo y a las formas culturales del ser. La mutua constitución de los individuos y la cultura ocurre en la labor conjunta (Hegel 2009; citado en Radford & D'Amore, 2017). Marx hace referencia a la labor como la expresión de una forma de vida, como la expresión a la vez subjetiva y cultural del sujeto.

Desde la teoría de la objetivación la enseñanza-aprendizaje se concibe, no como dos procesos distintos, sino como una labor conjunta que ocurre en un espacio socio-político al interior del cual tienen lugar el “*knowing*” y el volver “*becoming*”; la enseñanza y el aprendizaje es un mismo proceso a través del cual se producen saberes y subjetividades.

Radford define la objetivación en su teoría desde un sentido hegeliano, es decir, fenomenológico, de la siguiente manera: “La objetivación es un proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de consciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente”(Radford, 2014b). En otras palabras, “La objetivación es ese proceso social de toma de conciencia progresiva, de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (Radford, 2006, p. 116)

Para la teoría de la objetivación, el ‘conocer’ (*knowing*) consiste en una toma de conciencia en el marco de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.).

Según la teoría de Radford (2006), el aprendizaje no consiste en construir conocimiento; se trata de dar sentido a los objetos conceptuales que encuentra el individuo inmerso en la cultura de la cual hace parte. La adquisición de saber es concebida, desde esta teoría, como un proceso de producción de significados; para ello se distinguen dos fuentes importantes de elaboración de significados: el saber depositado en los artefactos y la interacción social.

Una de las fuentes principales para la adquisición de saber es el contacto con artefactos cargados culturalmente de sabiduría histórica emergente de la actividad cognitiva realizada por generaciones pasadas. Esto se da en la medida en que el ser humano es afectado por el artefacto en cuanto a su motricidad, su corporeidad, su intelectualidad, su memoria y su percepción de la realidad (Radford, 2006). Sin embargo, los artefactos por sí mismos, no pueden hacer visible su carga histórica; para lograr esto se requiere de la interacción con otros individuos que tengan intenciones similares. Es entonces, cuando la dimensión cobra sentido como la segunda fuente esencial para el aprendizaje. La interacción social, desde esta perspectiva se desempeña como un agente consustancial del aprendizaje a diferencia de otras teorías que la conciben con fines netamente adaptativos o de negociación de significados.

### **3.3.1. Los procesos de objetivación y medios semióticos de objetivación**

La teoría cultural de la objetivación analiza los procesos de objetivación, que son entendidos, como procesos sociales a través de los cuales los estudiantes comprenden los objetos de conocimiento con el peso cultural del cual han sido previstos por generaciones anteriores, y, además, se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas. Para alcanzar esa comprensión crítica, el cuerpo, los gestos, el lenguaje, los signos, los artefactos desempeñan un rol fundamental (Radford 2003, citado en Pantano, 2014).

El sujeto que participa en el proceso de objetivación es reflexivo, sensible, emocional y está en formación constante al participar en las actividades sociales de la cultura a la que pertenece. Dicho de otro modo, la objetivación promueve un proceso que tiene como objetivo mostrar algo (tangible o no) a alguien (Radford, 2014b). Los medios a los que se recurre para hacer aparente algo que está allí y que se coloca frente al sujeto (Radford 2003, citado en Pantano, 2014), los llama medios semióticos de objetivación; esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción (Vergel, 2014)

Los medios semióticos de objetivación se definen como: “Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentren en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones” (Radford 2003, citado en Pantano, 2014, p. ¿?).

Los procesos de producción de conocimiento están inmersos en sistemas de actividad que involucran otros medios físicos y sensoriales de objetivación, además del escrito y del lenguaje, tales como el gesto que cuenta o que señala, o el movimiento kinestésico. Es a través de la movilización de los medios semióticos de objetivación en la actividad matemática escolar que se puede acceder a los objetos matemáticos y materializar intenciones, dándole cierta forma tangible y corpórea al saber (Radford 2003, citado en Pantano, 2014).

El gesto no es suficiente para visibilizar la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas (Radford 2005, citado en Vergel, 2014). Radford propone que el análisis del proceso de aprendizaje debe tomar en cuenta la relación del gesto con otros sistemas semióticos. Por lo tanto, es posible y necesario detectar un conjunto de medios semióticos a los que recurren los estudiantes

en la actividad matemática para lograr evidenciar en ellos acercamientos conceptuales al objeto matemático.

Con la intención de sintetizar la información expuesta en este capítulo, presentamos un diagrama que relaciona las teorías expuestas en este trabajo de grado (ver Diagrama 1). En los esquemas de acción instrumentada que se logran identificar durante la actividad matemática realizada por los estudiantes, convergen las tres teorías en las que se ha fundamentado este estudio: investigaciones relacionadas con procesos asociados al pensamiento variacional, el enfoque instrumental y la teoría cultural de objetivación. Los esquemas de acción instrumentada emergen al interactuar con el conjunto de tareas propuesto que integra el uso de tecnología computacional y cuyo fin es aproximar a los estudiantes al pensamiento variacional.

A la luz de los lineamientos del enfoque instrumental, las investigadoras identifican procesos de génesis instrumental (mediante la articulación de dos procesos duales y simultáneos: instrumentalización e instrumentación.) en los estudiantes; procesos que a su vez involucran el desarrollo de esquemas de acción instrumentada, en los cuales los aspectos técnicos y conceptuales actúan recíprocamente y se codesarrollan.

La teoría de objetivación entra en juego con el propósito de brindar herramientas a las investigadoras para identificar y analizar los comportamientos notables o manifestaciones externas (corporeidad de las acciones, gestos expresiones lingüísticas, uso de signos y artefactos) a las que recurren los estudiantes durante la construcción de los esquemas de utilización y que tienen como intención comunicar alguna idea matemática asociada al desarrollo del pensamiento variacional. (Ver *Diagrama 1*).

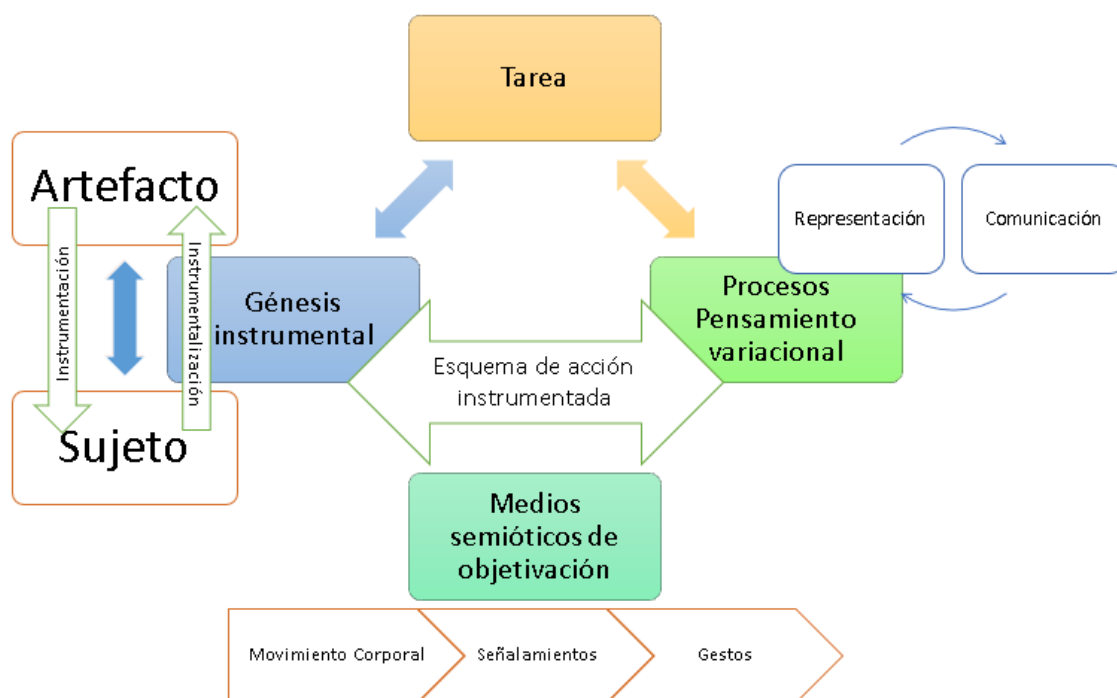


Diagrama 1: Relación de las teorías seleccionadas.

#### 4. Análisis

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos como consecuencia de las formas de acción, expresión, interacción y reflexión, asociadas al pensamiento variacional, de los participantes. Dada la naturaleza de la investigación, la atención se centra en los diferentes esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional que construyen los estudiantes durante el desarrollo de la tarea propuesta y que se evidencian por medio de los medios semióticos de objetivación emergentes. De este modo, se analizan conjuntamente en los niños, el uso de artefactos, las expresiones lingüísticas, los movimientos corporales, los señalamientos y los gestos, que tengan como propósito expresar ideas matemáticas relacionadas con la variación y el cambio.

Las docentes investigadoras elaboran una rejilla de análisis que utilizan como herramienta orientadora para observar los videos y seleccionar los segmentos que serán analizados (Ver *Tabla 3*). La selección de este material, además de tener en cuenta el marco teórico estudiado, no pierde de vista los objetivos del estudio y los intereses investigativos de las autoras.

Una vez establecidas las unidades de análisis las investigadoras determinan algunos de los esquemas mentales mediados por el uso del sensor y de la calculadora han construido los estudiantes durante el desarrollo de la tarea propuesta. Los principales esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional que se evidencian durante el análisis son presentados a continuación con su respectiva descripción.

<b>ESQUEMAS DE ACCIÓN INSTRUMENTADA</b>
Utilizar el CBR y la calculadora como medio para representar gráficamente el movimiento de su cuerpo.
Elaborar conjeturas sobre el funcionamiento del CBR en determinadas situaciones de movimiento específicas.
Elaborar conjeturas sobre el comportamiento de la gráfica que genera el CBR luego de captar los datos de un objeto en movimiento.
Comprobar conjeturas sobre la modelación gráfica (Distancia vs. tiempo) del movimiento de un objeto, utilizando el CBR y la calculadora.
Caracterizar las gráficas Distancia vs. Tiempo que arroja el RANGER, en términos de su comportamiento creciente, decreciente o constante.
Interpretar cómo debe efectuarse el movimiento en términos de alejarse, acercarse o quedarse en reposo respecto al CBR para reproducir una representación gráfica dada.
Establecer relaciones de dependencia entre las Distancia y el Tiempo, reconociendo cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.
Establecer relaciones entre el cambio de posición con respecto al transcurso del tiempo.
Identificar cuánta distancia se debe recorrer en determinado intervalo de tiempo para reproducir una representación gráfica dada.

Asociar la inclinación de los segmentos de la gráfica con la velocidad a la que debe ir el cuerpo en movimiento para reproducir una representación gráfica dada.
Interpretar la información presentada en una representación tabular de un fenómeno de movimiento.
Establecer relaciones entre las variables involucradas en una representación tabular reconociendo su forma (lineal, periódica, simétrica, uniforme, etc.).

Tabla 3. Esquemas de acción instrumentada.

A continuación, se exponen de cada etapa desarrollada, algunos apartados de la interacción de los estudiantes con la tarea propuesta, además de la interpretación elaborada por las docentes investigadoras a la luz del marco de referencia y de los esquemas de acción instrumentada evidenciados.

#### **4.1. Etapa 1: familiarización con los artefactos**

Durante esta etapa, la docente investigadora invita a cuatro estudiantes de grado noveno del colegio Cafam (Valentina, Russell, Tomás y Felipe) a que exploren las potencialidades, las restricciones y las formas de uso de una Calculadora TI 92 PLUS y un sensor de movimiento CBR. Inicialmente, la profesora explica a los estudiantes qué es un sensor de movimiento CBR y por qué requiere de una calculadora graficadora TI 92 PLUS. A través de instrucciones simples muestra a los participantes cómo conectar los equipos y entrar al software “RANGER”, encargado de leer los datos que envía el sensor a la calculadora.

Se dispuso de un espacio amplio, donde los estudiantes tuvieran libertad de movimiento y la tranquilidad necesaria para planear estrategias, en caso de ser necesario. Cabe aclarar que el sensor

CBR es ubicado en un punto fijo por lo que los estudiantes deben moverse teniendo en cuenta esta disposición de los equipos.

El primer ejercicio de reconocimiento que realizan los estudiantes está basado en movimientos que realiza Russell en los que se aleja o se acerca del sensor con el propósito de observar qué tipo de gráfica arroja la calculadora a partir de la lectura del movimiento. Sin embargo, esto no pareció suficiente para ellos y por iniciativa propia proponen diversos movimientos para explorar qué sucede con el comportamiento de las gráficas que modelan la relación Distancia (al sensor) vs. Tiempo de dichos movimientos. Aunque se elaboró un taller con unas instrucciones y unas preguntas específicas para orientar la sesión de reconocimiento de los artefactos, esta tarea propició en los estudiantes una exploración libre y espontánea, dirigida y orientada por ellos mismos, en gran medida (Ver taller, anexo 1).

Tomás siente curiosidad respecto al cómo el sensor y la calculadora representan de forma gráfica a una persona u objeto que permanece inmóvil dentro de la zona de registro y debido a esto propone a sus compañeros hacer una prueba [1.2]. Ante esta propuesta, los estudiantes empiezan a conjeturar sobre cómo será la gráfica obtenida y si el sensor puede leer un objeto que no esté en movimiento. Tomás supone que si no hay movimiento probablemente el sensor no pueda realizar la lectura [1.3], en cambio Russell cree que sí habrá lectura porque, efectivamente, hay un objeto que queda dentro de la zona de registro e indica la región con un movimiento de su mano (ver *¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.*) [1.4].



Imagen 2. Russell realiza un movimiento de su mano de arriba a abajo.

Posteriormente, a Felipe se le ocurre la idea de quedarse quieto frente al sensor, en la zona de registro durante unos segundos y luego empezar a mover sus brazos de forma vertical y horizontal, cuidando de no alterar su distancia al sensor (Ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Su objetivo es observar cómo resultará la gráfica que describe dicho movimiento. Russell expresa que la gráfica obtenida será una “línea recta”, refiriéndose a una recta horizontal [1.7].



Imagen 3. Felipe mueve su mano arriba - abajo.

1.4.	<b>Russell:</b>	No, yo creo que, si puede leer algo, porque es que hay algo que está acá [moviendo su mano frente al sensor]. Ver Imagen 2.
------	-----------------	---

1.5.	<b>Tomás:</b>	Haga de cuenta que lo ponemos al lado de la pared, va a leer que la pared está ahí [señalando la pared] pero nada se está moviendo.
1.6.	<b>Felipe:</b>	Pues me tocaría mover el brazo [Mueve el brazo de arriba abajo]. Ver <i>Imagen 3</i> .
1.7.	<b>Russell:</b>	Pero si está en frente de él es como si rebotara. Va a quedar como una línea recta, creo.

Notamos en las líneas [1.4, 1.5 y 1.6] que Tomás, Russell y Felipe *elaboran conjeturas sobre el funcionamiento del CBR* (C: E, IZ - IC, O:SG - O: E) cuando Felipe se queda quieto dentro de la zona de registro. Este esquema de acción instrumentada se evidencia en el momento en que los estudiantes describen con palabras claras e inteligibles la tendencia de la representación gráfica que resulta cuando un objeto se ubica a una distancia fija del sensor. Los movimientos que realizan los estudiantes con sus manos: de arriba - abajo, derecha - izquierda tienen como objetivo complementar la explicación verbal de la situación que ellos plantean. Posteriormente [1.7], Russell *elabora conjeturas sobre el comportamiento de la gráfica que generará el CBR luego de captar los datos* (C: E, IZ - IC, O: E), estableciendo relaciones con el movimiento realizado por Felipe; las expresiones lingüísticas empleadas por el estudiante permiten evidenciar que él reconoce las dos magnitudes involucradas (Tiempo - Distancia) e interpreta la relación de función constante que existe entre ellas. Los señalamientos y las formas de expresión verbal emergentes se convierten en medios semióticos de objetivación, puesto que hacen parte de los recursos a los que recurren los estudiantes durante la actividad matemática, para hacer presentes sus intenciones.

Mientras Felipe realiza el movimiento que él mismo propuso (ver *Imagen 3*), Valentina observa en la calculadora la gráfica resultante y comprueban que la conjetura de Russell era cierta (ver *Imagen 4*). La profesora que acompaña la actividad les pregunta la razón por la cual la gráfica arrojada durante todo el tiempo de registro fue una línea recta, aun cuando Felipe hizo repetidos

movimientos verticales y horizontales con su brazo. Esta pregunta tenía la intención de determinar la interpretación de los estudiantes respecto al funcionamiento del sensor y la relación existente, en términos de variación y de dependencia, entre la distancia y el tiempo.



Imagen 4. Felipe mueve sus manos, en diferentes direcciones.

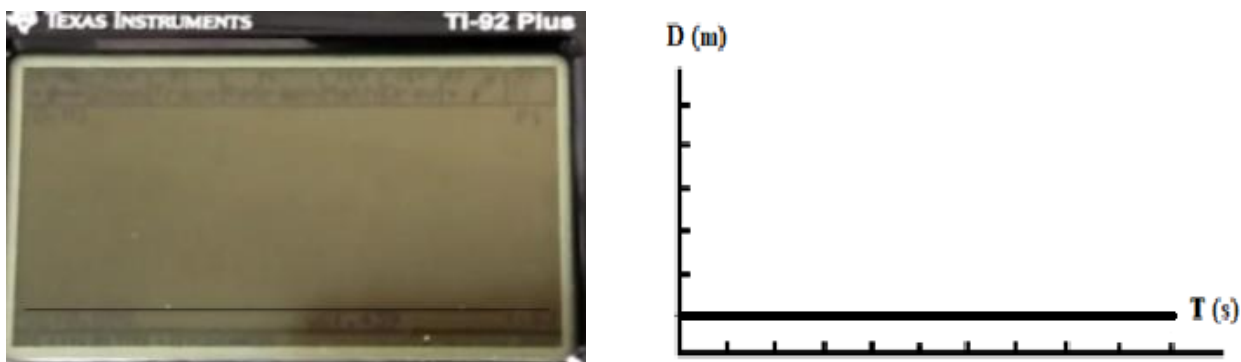


Imagen 5. Representación gráfica obtenida por el movimiento corporal de Felipe. Al lado izquierdo se presenta la gráfica obtenida en la pantalla de la calculadora. Al lado derecho, la misma representación gráfica para ubicar al lector.

1.19.	<b>Profesora:</b>	Y ¿qué pasó?, ¿Por qué igual no afectó en nada en la gráfica?
1.20.	<b>Valentina:</b>	Porque, tenía la misma distancia, el hecho de que moviera el brazo no significa que eso cambiara. [Se refiere a la representación gráfica obtenida]
1.21.	<b>Tomás:</b>	Claro, porque está midiendo la distancia.

1.22.	<b>Russell:</b>	Profe, yo sé, mira [señalando el <i>viewscreen</i> ]. En este caso la variable independiente que era el tiempo, pues siguió recorriendo, mientras tanto la distancia, que era la dependiente, se quedó estática.
-------	-----------------	--

Valentina y Tomás [1.20, 1.21] interpretan que, en el experimento realizado, la distancia no tuvo variaciones; esto lo identifican relacionando el movimiento hecho por Felipe con la representación gráfica de los datos que captura el sensor. Sus afirmaciones intentan explicar que la gráfica obtenida es una línea recta horizontal porque la distancia de Felipe al sensor no cambia. Los estudiantes son capaces de relacionar la representación gráfica que observan con el movimiento corporal realizado por uno de sus compañeros, al reconocer invariantes de ambas representaciones tales como la distancia de Felipe al sensor y la distancia de la representación gráfica al eje  $x$ .

Por su parte, Russell [1.22] *establece relaciones de dependencia entre la Distancia y el Tiempo* (C: A - R: R, IZ - IC, O: E), al reconocer que la distancia depende del tiempo y que es una magnitud constante debido a las condiciones del movimiento realizado por Felipe. Notamos en Russell un discurso matemático relevante, en el cual utiliza adecuadamente términos asociados a la variación, con el propósito de defender sus conjeturas. Sus expresiones lingüísticas, gestos y señalamientos se convierten en medios de objetivación que permiten dar a conocer sus intenciones y proveer de significado la representación gráfica que observan en la calculadora.

Tomás continúa con curiosidad respecto al comportamiento de las posibles gráficas obtenidas al hacer uno u otro movimiento. Su preocupación no se centra en aprender a manejar los artefactos, sino en las representaciones gráficas que estos arrojan, de acuerdo con el movimiento que detectan. Le surge otra idea que comunica a la profesora y a sus compañeros; esta vez desea colocar dos personas en la zona de registro del sensor, una detrás de la otra, de tal manera que cuando ambas

se empiecen a mover, de repente la que está más cerca al sensor se retire y este continúe registrando a la persona de atrás. Tomás se pregunta, ¿Qué pasaría en la gráfica? [1.23, 1.25], e inmediatamente empieza a explicarle a sus compañeros su ocurrencia (Ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Russell y Valentina son quienes realizan el movimiento propuesto (Ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), mientras que Tomás y Felipe observan la gráfica que emerge en la computadora.

**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**



Imagen 6. Movimientos de Russell (flecha azul) y Valentina (flecha roja) simultáneamente

Felipe y Tomás, de forma casi simultánea, comienzan a realizar interpretaciones de la gráfica que observan (ver *Imagen 7*) y a relacionarla de forma intuitiva con el movimiento hecho por sus compañeros. Ambos centran su atención en el instante en el que Valentina se salió de la zona de

registro e intentan explicar con sus palabras el comportamiento de la gráfica. Felipe le llama “corte” a la representación gráfica de ese instante y afirma que hubo un “vacío” hasta que el sensor detectó a Russell. Tomás por su parte, añade que el “corte” fue recto y que tuvo esta forma porque la gráfica sube cuando detecta a Russell y posteriormente se comporta horizontalmente [1.29, 1.30].



Imagen 7. Representación gráfica obtenida del movimiento corporal realizado por Valentina y Russell.

1.27.	<b>Valentina:</b>	¿Qué tenemos que hacer?
1.28.	<b>Tomás:</b>	Entonces, los dos se van a mover todo el tiempo en zigzag y en un momento Amado (Valentina) se va a ir (...) Mi idea es: haga de cuenta que ahí hay alguien, nos estamos moviendo los dos, entonces primero está leyendo el movimiento y la distancia de Amado (Valentina), lo que quiero es que mientras lee la distancia de Amado (Valentina), ella de un momento a otro se vaya y comience a leer la de aquí [señalando la posición de la persona que queda atrás], ¿qué pasa?, ¿qué pasaría en la gráfica? Ver <i>Imagen 7</i> .
1.29.	<b>Felipe:</b>	Ya no lo sigue leyendo... ¡Ah, sí! Hubo un corte [se refiere al comportamiento de la gráfica en el instante en que Valentina salió de la zona de registro del sensor], cuando tú estás ahí (se dirige a Valentina y le muestra la ubicación física de ella), interpreta que estás ahí [se refiere a un punto sobre la gráfica], en ese momento en

		que te saliste no sintió a nadie, entonces hubo un vacío. Hasta que lo sintió [refiriéndose al instante en el que el sensor detectó a Russell]. Ver <i>Imagen 6</i> .
1.30.	Tomás:	(Interrumpe a Felipe) ¡Lol! [Expresión de asombro] ¡Hubo un corte recto! [refiriéndose al segmento vertical de la gráfica]. Hasta que sintió a Russell empezó a subir “pa’riba” [para arriba] todo el tiempo y después vio a Russell y lo dejó recto, bueno casi recto [refiriéndose al segmento horizontal de la gráfica]. Ver <i>Imagen 7</i> .
1.31.	Profesora:	La parte “vertical” de la gráfica ¿cómo la interpretamos?
1.32.	Tomás:	Haz de cuenta que hizo un salto entre la distancia de Amado y la de Russell. Haz de cuenta que Amado [Valentina] se estaba moviendo, se quitó y de repente en un intervalo de dos segundos, por ahí [estimación de los dos segundos] leyó [el sensor] a Russell y ese fue el intervalo de la distancia
1.33.	Russell:	Pues sí profe, que literalmente no tuvo casi tiempo.

En estas líneas evidenciamos que Tomás y Felipe, *intuitivamente, establecen relaciones entre el cambio de la distancia con respecto al transcurso del tiempo (C:E - R:R, IC, O:E)* en el fenómeno registrado. Felipe y Tomás emplean los términos “corte” y “corte recto” respectivamente [1.29, 1.30], con la intención de explicar el cambio en el comportamiento de la gráfica, cuando Valentina sale de la zona de registro del sensor (Ver *Imagen 6*). Las expresiones lingüísticas utilizadas por Felipe y Tomás nos proporcionan indicios sobre cómo ellos relacionan la representación gráfica de la calculadora con el movimiento realizado por Valentina.

Felipe, emplea dos veces el término “ahí” [1.29] en la misma frase con el propósito realizar una correspondencia entre el lugar físico en el que se encuentra Valentina con un punto de la gráfica. Adicionalmente, Felipe describe el cambio de la distancia, registrada por el sensor, entre Valentina y Russell, con la expresión “*hubo un vacío*” [1.29], esto evidencia una toma de conciencia por

parte del estudiante respecto a cómo varía la distancia en este instante. En términos usados por Tomás como “pa` arriba”, “corte recto”, “lo dejó recto”, se evidencia que él intenta, con un lenguaje informal, describir el comportamiento de la gráfica, reconociendo características de la variación de las magnitudes presentes, como crecimiento o mantenerse constante.

1.34.	<b>Felipe:</b>	Recuerda esto, el eje $x$ es el eje del tiempo, el tiempo no transcurrió y te moviste a más distancia [argumenta que en la misma abscisa del tiempo hay dos coordenadas, señalando la gráfica].
-------	----------------	---

Posteriormente, Felipe en [1.34], *establece relaciones entre el cambio de posición con respecto al transcurso del tiempo* (C: E - R: R, IC, O: E), argumentando que, aunque en la variable tiempo no hubo un cambio, sí lo hubo en variable distancia. Dadas sus justificaciones evidenciamos que Felipe analiza relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma el cambio que se produce en la variable independiente es un reflejo de la idea de cambio en el tiempo (MEN, 2004). Además, Felipe *analiza relaciones de dependencia entre el tiempo y la distancia* (C: E - R: R, IC, O: E), porque parece comprender la continuidad del tiempo y por ello argumenta que un único objeto no puede estar al mismo tiempo en dos lugares diferentes, razón por la cual es necesario disponer de dos personas para lograr imitar dicha situación.

Finalmente, los estudiantes deciden repetir el experimento con la intención de minimizar al máximo las curvas que aparecieron en la gráfica anterior y obtener así mayor precisión en los segmentos de recta de la representación. Tomás y Felipe parecen lograr una *génesis instrumental* ya que sin hacer uso del artefacto planean los movimientos, tiempos y distancias que deben llevar a cabo sus compañeros para conseguir la representación cartesiana que tenían prevista. Sin embargo, al ejecutar nuevamente el experimento, los estudiantes no tuvieron en cuenta las

restricciones del sensor con respecto a la zona de registro máxima, por lo cual no obtuvieron los resultados esperados.

## 4.2. Etapa 2: imitando la gráfica

### 4.2.1. Episodio Centeno, Castillo y Soler

Para el desarrollo de esta etapa la docente investigadora convoca a tres estudiantes de grado décimo, de la Institución Educativa Eduardo Santos. Nos referiremos a ellos con los siguientes apellidos: Centeno, Castillo y Soler. Antes de llevar a cabo la tarea propuesta los estudiantes tienen un primer acercamiento a los artefactos involucrados (sensor CBR y calculadora TI 92 PLUS) en el que reconocen algunas de sus potencialidades y algunas de sus restricciones, como la limitación de la zona que alcanza a registrar el sensor. Posteriormente, la profesora les muestra a los participantes una gráfica (Distancia vs. tiempo) que arroja aleatoriamente la calculadora al activar el programa RANGER y les propone que se desplacen de tal forma que la representación gráfica obtenida al capturar su movimiento con el sensor se parezca, con la mayor exactitud posible, a la gráfica enseñada inicialmente (Ver *Imagen 8*).

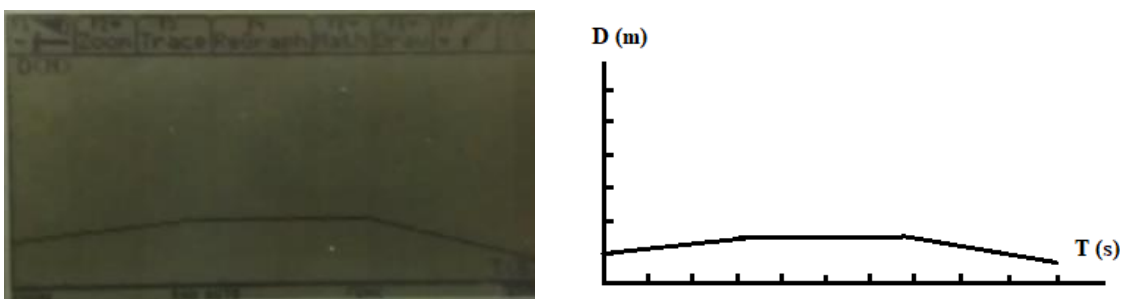


Imagen 8. Gráfica arrojada aleatoriamente por el programa RANGER (lado izquierdo). Al lado derecho, se presenta una gráfica muy similar para orientar al lector sobre la representación gráfica a imitar por los estudiantes.

La profesora pregunta a sus estudiantes por la estrategia que pueden emplear para lograr el objetivo propuesto. Esto con la intención de sugerirles que piensen cómo tendrían que realizar el movimiento, teniendo en cuenta el funcionamiento del sensor y las características de la gráfica presentada.

2.1.	<b>Profesora:</b>	¿Qué estrategia emplearían para reproducir con su movimiento esta gráfica Distancia vs, Tiempo? ¿Qué tendrían que hacer? Ver <i>Imagen 8</i> .
2.2.	<b>Soler:</b>	Tocaría retroceder hasta un punto [Refiriéndose al segmento creciente de la gráfica]
2.3.	<b>Profesora:</b>	Acá en el tiempo cero (señalando con su dedo, sobre la calculadora, el punto de inicio de la gráfica), ¿a cuántos metros del sensor tendría que estar?
2.4.	<b>Castillo:</b>	A un metro.
2.5.	<b>Profesora:</b>	Luego, ¿qué haría?
2.6.	<b>Soler:</b>	Retroceder. Pero aquí, miremos [se queda pensando y señala el segmento de la gráfica que es constante]. Ver <i>Imagen 8</i> .
2.7.	<b>Castillo:</b>	Esto sería como un reposo. Ver <i>Imagen 9</i> .
2.8.	<b>Soler:</b>	Sí, como un reposo del cuerpo.
2.9.	<b>Centeno:</b>	Acá [señalando el segmento creciente de la gráfica], retrocede como un paso lento, se queda quieto [señalando el trozo de la gráfica que es constante] y vuelve y se acerca [señalando el segmento decreciente de la gráfica]. Ver <i>Imagen 9</i> .

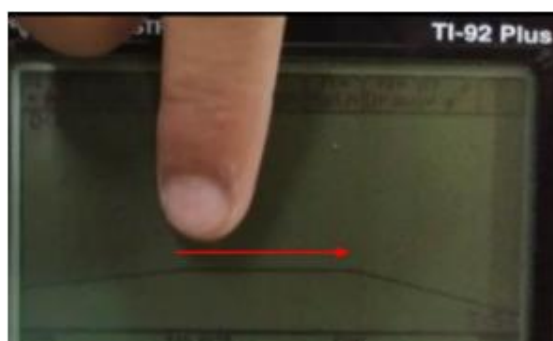


Imagen 9. Señalamiento hecho por Soler para explicar que el cuerpo está en reposo.

Después de la observación del diálogo anterior, identificamos por el discurso y los señalamientos hechos por los estudiantes [2.2, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9], que ellos logran *interpretar cómo deben efectuar el movimiento en términos de alejarse, acercarse o quedarse en reposo respecto al CBR para reproducir la representación gráfica de Imagen 8 (C: I - R: R, IC, O:SG)*. Esto nos indica que, para este momento del desarrollo de la tarea, Centeno, Soler y Castillo reconocen cómo funciona el sensor, pero, además, relacionan la representación de la gráfica que les muestra la calculadora con el movimiento que deben realizar y la forma en que este es captado por los artefactos. Implícitamente, se reconoce la interpretación que realizan los estudiantes del gráfico cartesiano al identificar las magnitudes involucradas y representadas en cada uno de los ejes coordenados, en el eje  $x$  se representa el tiempo y en el eje  $y$  la distancia al CBR.

Los señalamientos sobre la calculadora (ver *Imagen 9*, ver *Imagen 10*. *Señalamientos realizados por los estudiantes.*) que emergen durante la interacción del grupo, son formas a las que recurre la participante para hacer evidente su interpretación de la situación, lo que les permite enriquecer su discurso y crear estrategias conjuntas de resolución a la problemática presentada.



Imagen 10. Señalamientos realizados por los estudiantes.

Por otro lado, en [2.3, 2.4] evidenciamos que Castillo determina correctamente la distancia a en que deben iniciar el movimiento; lo anterior, nos da indicios para afirmar que, él identifica la magnitud representada en el eje  $y$ , y su respectiva unidad de medida, en este caso metros. Adicionalmente, el estudiante relaciona su posición espacial con un punto de la representación gráfica que expone calculadora y reconoce el punto de referencia que utiliza el CBR para capturar los datos.

Posteriormente, los estudiantes proceden a realizar el movimiento según la estrategia diseñada (ver *Imagen 11*).

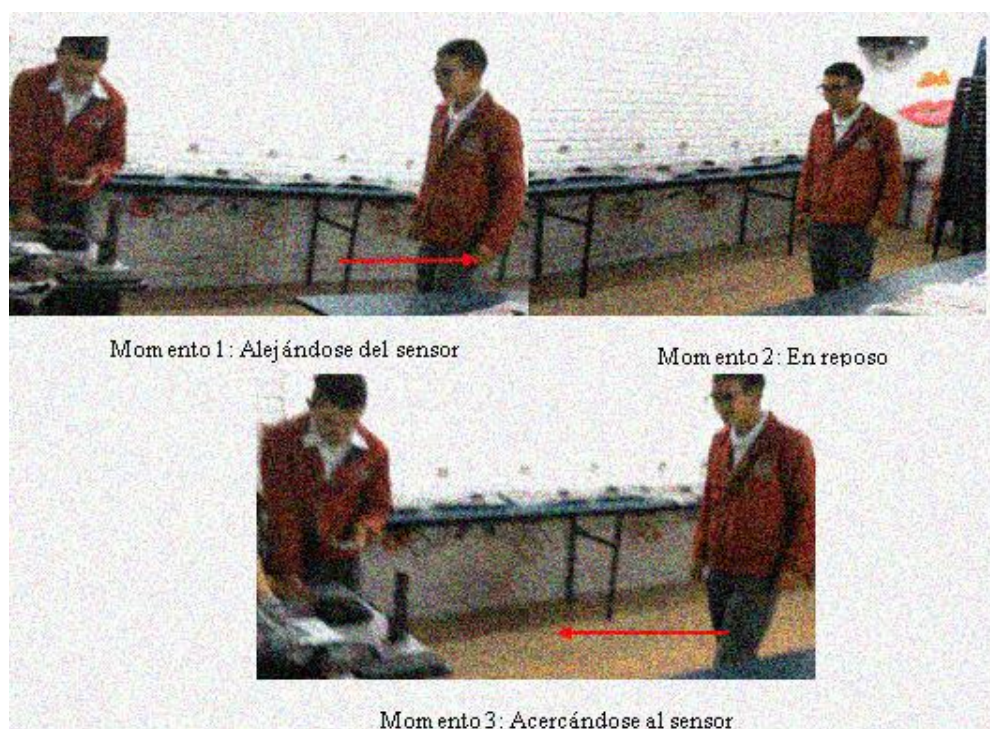


Imagen 11. Soler realiza el movimiento de la gráfica. Ver Imagen 8

Luego, de la toma de datos del CBR, en la TI 92 PLUS se muestra la representación gráfica obtenida (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Al parecer, logran una

representación gráfica muy similar a la pedida, aun cuando no hicieron mediciones de tiempo ni de distancia.

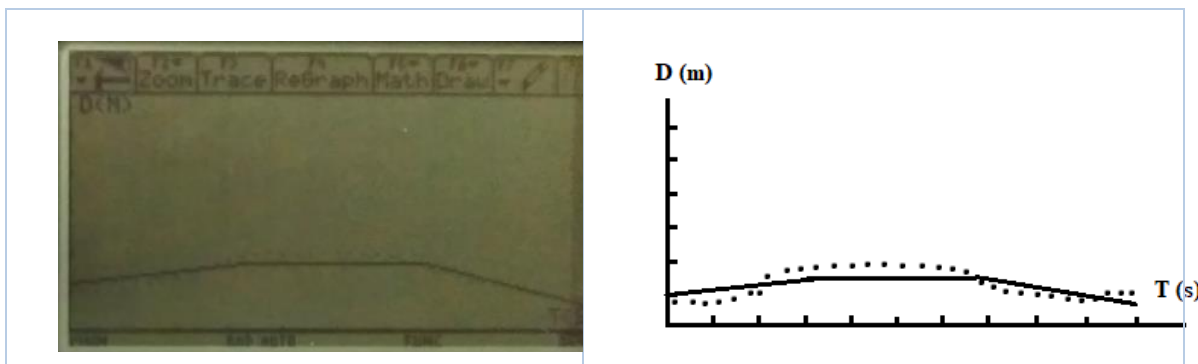


Imagen 13: Datos captados por el CBR del movimiento realizado por Soler.

#### 4.2.2. Episodio Russell y Valentina

Durante este episodio se realiza otra aplicación de la tarea, pero esta vez en el Colegio Cafam. La docente investigadora les muestra a Valentina y Russell (dos estudiantes de grado noveno) una gráfica Distancia vs. Tiempo (*Imagen 12. Gráfica Distancia vs. Tiempo arrojada aleatoriamente por el programa Ranger (lado izquierdo). Gráfico similar al que se presenta al lado izquierdo (lado derecho), para orientar al lector.*), que aleatoriamente fue arrojada por la Calculadora TI 92 PLUS. Posteriormente, ella les solicita a los estudiantes que se desplacen de tal forma que la representación gráfica obtenida al capturar su movimiento por medio de un sensor CBR y la calculadora graficadora, se parezca, con la mayor exactitud posible, a la gráfica enseñada inicialmente. Los estudiantes necesariamente piensan en cómo realizar una representación kinestésica, decir, cómo realizar su movimiento de la función presentada en la calculadora.

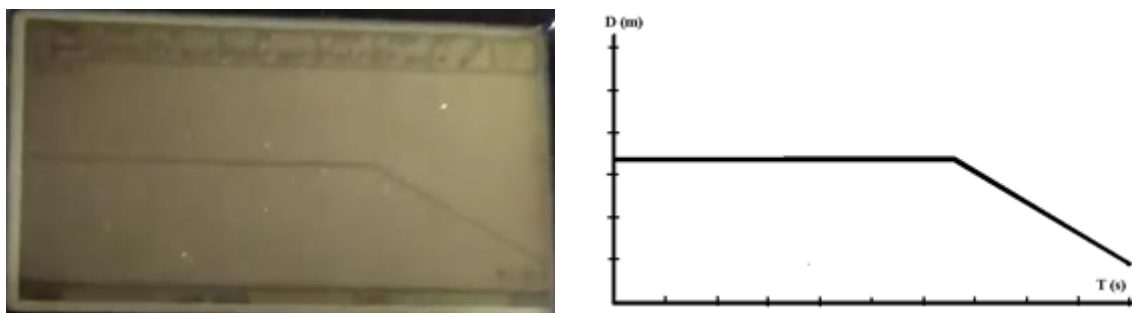


Imagen 12. Gráfica Distancia vs. Tiempo arrojada aleatoriamente por el programa Ranger (lado izquierdo). Gráfico similar al que se presenta al lado izquierdo (lado derecho), para orientar al lector.

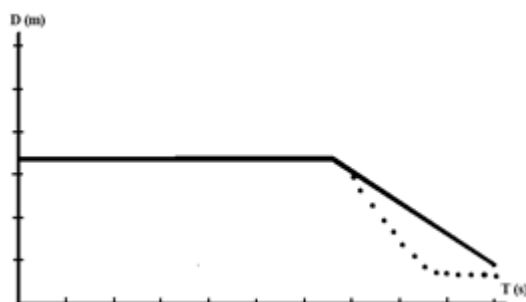


Imagen 13. Gráfica arrojada aleatoriamente por la TI 92 PLUS vs movimiento realizado por Valentina.

Después de observar la gráfica por algunos minutos, la pareja de estudiantes decide que Valentina será quien realice el movimiento, siguiendo las indicaciones dadas por su compañero de clase Russell, quien se quedará observando la calculadora y los datos que vaya captando el CBR.

Una vez que Valentina termina de desplazarse, la profesora orienta el discurso de los estudiantes haciendo algunas preguntas, con el propósito de reconocer indicios del posible desarrollo de procesos matemáticos asociados a la variación y el cambio, emergentes a partir de la tarea propuesta.

Al observar la gráfica arrojada por la TI 92 PLUS vs. la representación gráfica del movimiento de Valentina, surge la siguiente discusión:

3.1.	<b>Russell:</b>	Pero Vale, ¿por qué viniste tan rápido? [refiriéndose a los puntos que quedaron por debajo del segmento de recta decreciente].
3.2.	<b>Profesora:</b>	¿Qué fue lo que pasó?
3.3.	<b>Russell:</b>	Vale aceleró más rápido de lo que debía.
3.4.	<b>Profesora:</b>	Bueno, miremos los puntos obtenidos.
3.5.	<b>Russell:</b>	Bajó hartísimo.
3.6.	<b>Valentina:</b>	Iba “re” bien.
3.7.	<b>Profesora:</b>	Explíquenme, ¿por qué pasó eso?
3.8.	<b>Russell:</b>	Vale se quedó quieta hasta el momento preciso ... (en ese momento es interrumpido por Valentina).
3.9.	<b>Valentina:</b>	Vine a una velocidad más rápida de la que se supone debía venir.
3.10.	<b>Profesora:</b>	¿A una velocidad?, ¿Cómo logras detectar que el tema es de velocidad?
3.11.	<b>Russell:</b>	No, a lo que Vale se refiere es que recorrió la distancia en menos tiempo.
3.12.	<b>Valentina:</b>	Bueno, sí (validando lo dicho por Russell).
3.13	<b>Profesora:</b>	Ah ok.

Como se observa en la *Imagen 13*, los estudiantes lograron la exactitud requerida en el intervalo de 0 a 7 segundos, lo que nos permite afirmar que primero, establecen adecuadamente la posición para iniciar el movimiento; segundo, reconocen que cuando la gráfica tiene un segmento horizontal deben permanecer en reposo porque la distancia no cambia al transcurrir el tiempo, hecho que habrían descubierto en episodios anteriores; y tercero, realizan una buena estimación del tiempo de reposo en el que debe permanecer Valentina, mediante la observación de la calculadora y los datos que va captando el CBR.

Russell apenas observa la representación gráfica del movimiento de Valentina, afirma que ella aceleró más rápido de lo que debía [3.1, 3.3] y que por esa razón los puntos bajaron hartísimo. Las expresiones lingüísticas “aceleró” y “más rápido” son empleadas por Russell para explicar que Valentina se desplazó a una velocidad mayor de la necesaria para lograr la exactitud requerida. Valentina afirma que su velocidad fue más rápida de la necesaria [3.9], y cuando la profesora le pregunta por qué habla de velocidad [3.10], Russell explica que Valentina recorrió la distancia en menos tiempo. Estas acciones nos permiten evidenciar que los estudiantes logran *asociar la inclinación de los segmentos de la gráfica con la velocidad a la que debería ir el cuerpo en movimiento* (C: E - R: R, IC, O: E).

#### **4.2.3. Episodio Soto, Henao, Vizcaíno y Vargas**

Este episodio se desarrolla en la Institución Educativa Eduardo Santos, con cuatro estudiantes de grado décimo, a quienes asignamos los apellidos: Soto, Henao, Vizcaíno y Vargas. La profesora investigadora previamente llevó a cabo una sesión de familiarización con los artefactos, razón por la cual los participantes ya conocen el funcionamiento del CBR y de la TI 92 PLUS para el desarrollo de la presente sesión.

La docente les propone a los estudiantes que diseñen una estrategia que les permita desplazarse respecto al sensor, de tal forma que la representación gráfica de su movimiento se asemeje, con la mayor exactitud posible, a una gráfica presentada de forma aleatoria en la TI 92 PLUS, ver Imagen 14.

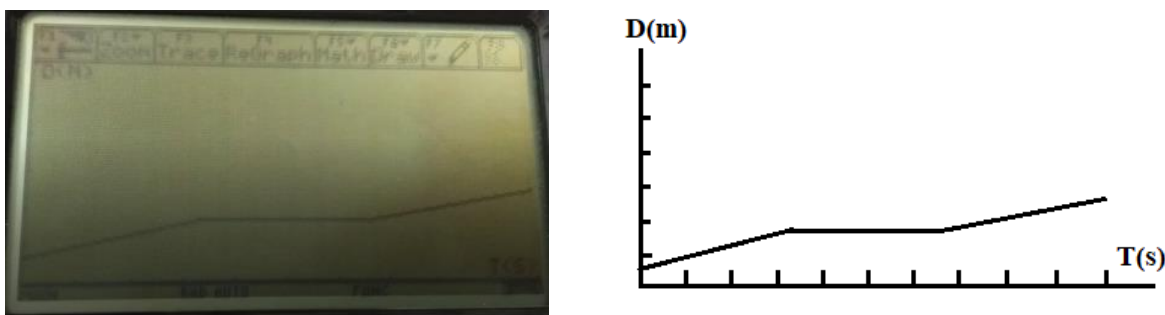


Imagen 14: Gráfica arrojada aleatoriamente por el programa RANGER (izquierda). Representación similar a la representación gráfica arrojada aleatoriamente, para orientar al lector (derecha).

El equipo decide asignar roles, según la situación planteada. Henao realiza el movimiento, Soto es quien debe dirigir el movimiento de Henao, Vizcaíno están junto a la calculadora grabando y observando la representación gráfica de los datos que capta el sensor, y mientras tanto, Vargas se encarga de grabar el movimiento de Henao. Los estudiantes se preparan para planear cómo elaborar una representación kinestésica efectiva de la situación, por lo que, es importante mencionar que todo el equipo está atento y participa discursivamente en pro de generar la mejor estrategia que les permita superar el reto.

4.1.	<b>Profesora:</b>	¿Qué tendrían que hacer?, ¿cómo le diría que se moviera?
4.2.	<b>Vargas:</b>	Tiene que retroceder durante tres segundos.

4.3.	<b>Soto:</b>	Pero tiene que empezar desde menos de un metro del sensor.
------	--------------	--

Cuando la profesora les indaga sobre la forma en la que deben realizar el movimiento para lograr la gráfica deseada [4.1.], Vargas, afirma que Henao debe “retroceder” durante los tres primeros segundos [4.2.], es decir, cuantifica la variable tiempo, pero aún no la variable distancia, aunque, interpreta que esta va en aumento en dicho intervalo y que, por lo tanto, debe alejarse del sensor. Evidenciamos que Vargas, inicialmente, *interpreta cómo debe efectuarse el movimiento en términos de alejarse, acercarse o quedarse en reposo respecto al CBR para reproducir una representación gráfica dada (C: E - R: R, IC, O: E).*

Soto por su parte, relaciona la posición espacial a la que se debe iniciar el movimiento, con un punto de la representación gráfica que expone calculadora, por lo que afirma que el movimiento se debe iniciar a menos de un metro del sensor [4.3.]. Además, implícitamente asocia la posición del sensor con el punto de origen del plano cartesiano mostrado en la calculadora.

El diálogo continúa:

4.4.	<b>Henao:</b>	Yo lo haría así.
4.5.	<b>Profesora:</b>	¿Tú cómo lo harías?
4.6.	<b>Henao:</b>	Entonces serían cuatro metros [comienza a retroceder] (Ver Imagen 16)

4.7.	<b>Soto:</b>	Pero, no serían cuatro metros [corrigiendo a Henao], solo tendrías que moverte un metro hacia atrás, tendría que ser uno, dos, tres segundos (señalando con su dedo sobre la calculadora para hacer el conteo) Ver <i>Imagen 14</i> .
------	--------------	---



Imagen 15. Explicación de Henao sobre el movimiento que se va a realizar

Henao, propone realizar el movimiento retrocediendo y dando tres pasos largos, ver Imagen 16, porque piensa que debe alejarse cuatro metros del sensor [4.6.]. Sin embargo, Soto interviene y mientras observa la gráfica, explica que no son cuatro metros los que debe moverse hacia atrás, sino uno, durante tres segundos [4.7]. Esta afirmación nos indica que Soto logra *identificar a qué distancia y en cuánto tiempo se debe alejar Henao, en el tramo creciente de la gráfica (C: A - R: R, IC, O:M)*, es decir, la estudiante interpreta la razón entre la distancia recorrida en un intervalo de tiempo para obtener una pendiente positiva, aunque en su discurso no haga explícito el término “pendiente”. Los señalamientos que hace Soto sobre las marquillas que indican cada segundo, son intencionados y permiten que tanto sus compañeros como la profesora entiendan la idea que está

comunicando, razón por la cual se convierten en medios semióticos de objetivación, ver



Imagen 16

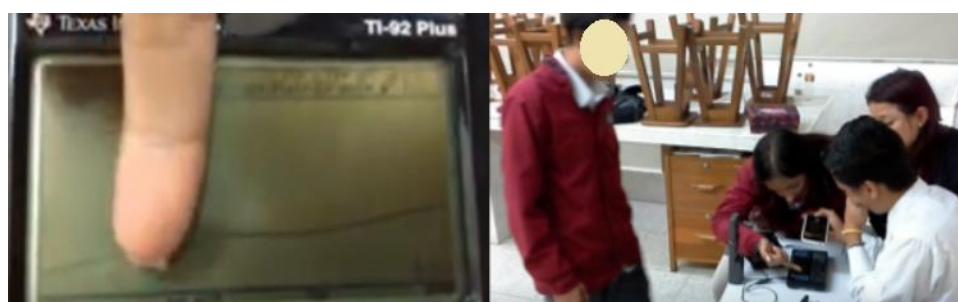


Imagen 16. Soto contando los tres primeros segundos sobre el eje x.

La profesora continúa indagando para conocer más sobre las formas de pensamiento de sus estudiantes:

4.8.	<b>Profesora:</b>	Un metro en tres segundos, ¿y cómo distribuirías ese movimiento en tres segundos?
4.9.	<b>Vizcaíno:</b>	Por paso, ¿no?
4.10.	<b>Soto:</b>	Podría hacer los pasos chiquiticos (Se levanta y da pasos muy cortos hacia atrás)
4.11.	<b>Vargas:</b>	Podría hacerlo paso a paso, midiendo el diámetro de sus pies.

4.12.	<b>Vizcaíno:</b>	Por eso, un paso, un segundo, dos pasos otro segundo, tres pasos...
4.13.	<b>Vargas:</b>	O podría ser midiendo el diámetro de sus pies, poniendo uno en frente del otro, o uno detrás del otro.

Cuando la docente les pregunta a sus estudiantes cómo harían para moverse un metro en tres segundos [4.8.], los estudiantes empiezan a tomar conciencia respecto a la forma de mover su cuerpo para lograr la razón deseada. Vizcaíno propone que, por cada segundo transcurrido, Henao avance un paso [4.12.], Soto afirma que los pasos deben ser “chiquiticos” [4.10.], es decir, cortos, mientras que Vargas propone que se mida el largo del pie y luego se ponga uno detrás del otro [4.13]. Dicha corporeidad de la acción subyace en el significado que los estudiantes van elaborando de la gráfica *Distancia vs. tiempo* y les permite materializar la actividad matemática desarrollada. De este tipo de acciones se deduce la importancia de la inclusión y toma de conciencia del cuerpo en el acto de conocer.

4.14.	<b>Profesora:</b>	Listo, y después, ¿qué tendrían que hacer?
4.15.	<b>Soto:</b>	Tienes que estar en reposo como uno, dos, tres y medio segundos (señalando con su dedo sobre la calculadora para hacer el conteo) y después alejarte más, como uno, dos, tres, cuatro segundos, (...) como un metro también, porque mira que termina como en tres metros y algo.
4.16.	<b>Profesora:</b>	¿En tres metros, tú crees?
4.17.	<b>Vizcaíno</b>	Menos, de tres metros, termina más o menos como en dos y medio.

4.18.	Soto:	Sí.
-------	-------	-----

El anterior diálogo evidencia la construcción de esquemas de acción instrumentada en Soto y Vizcaíno [4.15, 4.17], debido a que *identifican a qué distancia y en cuánto tiempo se debe alejar Henao del sensor (C: E - R: R, IC, O: E)*, para obtener la representación gráfica deseada. Soto realiza una primera estimación del desplazamiento que se debe hacer en función del tiempo para obtener una pendiente positiva, negativa o constante, según convenga. Sin embargo, en su interpretación de la gráfica Soto hace una lectura inadecuada de los metros que debe moverse Henao para el tercer segmento [4.17], por lo que Vizcaíno reacciona y afirma que la distancia máxima que alcanza la gráfica en dicho segmento es aproximadamente dos metros y medio. Lo anterior, verifica la importancia que cobra la interacción discursiva en el proceso de producción de significados sobre variación y cambio de los estudiantes.

Posteriormente, los estudiantes ponen a prueba la estrategia diseñada en la que se generó una toma de conciencia respecto a cómo debe hacerse el movimiento (ver Imagen 16). Determinan si deben alejarse, acercarse, o permanecer en reposo; los estudiantes tienen en cuenta cuánto debe cambiar la distancia en un intervalo de tiempo según corresponda en cada tramo de la gráfica; por último, Vizcaíno y Soto establecen si los pasos deben ser largos o cortos. Henao realiza el movimiento, siguiendo las indicaciones de Soto, quien le avisa a medida que observa la captura de los datos, cuándo avanzar y cuánto tiempo debe permanecer en reposo, ver Imagen 17. *Movimiento de Henao.*



Imagen 17. Movimiento de Henao.

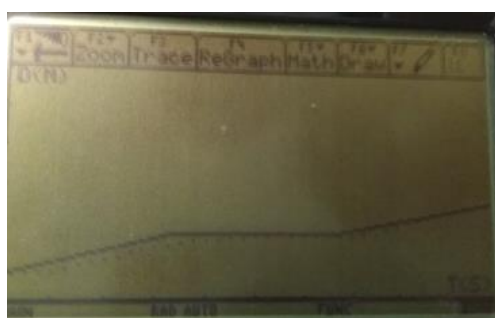


Imagen 18. (izquierda) Puntos marcados en la gráfica del movimiento realizado por Henao. (Imagen derecha) Representación elaborada por las investigadoras para orientar al lector.

A partir de la observación de los datos captados (Ver Imagen 18) por el sensor del movimiento de Henao, surge el siguiente diálogo:

4.23.	<b>Henao:</b>	¡Uh! Casi.
4.24.	<b>Soto:</b>	Acá te demoraste más (señalando los puntos del movimiento de Henao cuando trataba de imitar el primer segmento de la gráfica).
4.25.	<b>Profesora:</b>	¿Cómo tuviste que moverte ahí para que se aproximara?
4.26.	<b>Soto:</b>	Pasito a pasito.

4.27.	<b>Henao:</b>	Con los pies así... como jugando pica pala. <sup>1</sup>
-------	---------------	--

Soto explica por qué los puntos captados por el sensor durante los tres primeros segundos quedaron por debajo de lo ideal, explicando que Henao se demoró más de lo que debía [4.24]. El uso de la palabra “demoró” nos permite percibir que la estudiante *asocia la inclinación de los segmentos de la gráfica con la velocidad a la que debe ir el cuerpo en movimiento* (C: A - R: R, IC, O:M - O: E), puesto que identifica la variación de la distancia respecto al tiempo transcurrido. Y adicionalmente, se evidencia una toma de conciencia por parte de los estudiantes [4.26, 4.27], respecto la forma en que deben moverse en pro del proceso de producción de significados que emerge a partir de la tarea propuesta.

### 4.3. Etapa 4: Relacionando registros de representación

Los participantes seleccionados son de la Institución Educativa Eduardo Santos; para referirnos a ellos, utilizamos los siguientes nombres: Yineth, Óscar, Daniel y Saydith. Los estudiantes, previamente a la elaboración de esta etapa, ya habían explorado con los artefactos y con las etapas anteriores de la tarea. En esta etapa los estudiantes deben establecer una estrategia que les permita imitar el movimiento corporal, de tal forma que la representación gráfica obtenida corresponda con la representación tabular que se muestra a continuación.

Tiempo (s)	0	1	2	3
------------	---	---	---	---

---

<sup>1</sup> Pica y pala es un juego tradicional que consiste en caminar uniendo los pies, uniendo talón con la punta de pie. Cada vez que se cruza los pies se menciona pico-pala.

Distancia (m)	1	2	3	4
---------------	---	---	---	---

Al igual que en los episodios anteriores, los estudiantes tienen roles establecidos. Óscar y Yineth son los encargados de realizar el movimiento corporal y establecer las estrategias para llevarlo a cabo. Por otro lado, Daniel y Saydith son los encargados de captar los videos tanto de la pantalla de la calculadora como del movimiento. Todos los estudiantes tienen la posibilidad de participar en la discusión y hacer las preguntas necesarias durante la aplicación de la tarea. Luego de las indicaciones proporcionadas por la profesora, surge el siguiente diálogo.

5.1.	<b>Óscar:</b>	Entonces, en la primera casilla podría ser un tiempo de cero segundos y una distancia de un metro, o sea que tiene que quedarse quieto [Yineth reacciona con un gesto, expresando inconformidad]. En un segundo, tiene que moverse dos metros, alejarse (...)
5.2.	<b>Profesora:</b>	¿Tú qué opinas Yineth?
5.3.	<b>Yineth:</b>	Pues acá dice (señalando el plano cartesiano en la hoja) que el tiempo empieza desde cero, es decir acá (señalando el punto de origen) y tendría que estar a un metro de distancia (refiriéndose al sensor). Después, en dos segundos se tiene que mover (...)
5.4.	<b>Óscar:</b>	Dos metros.
5.5.	<b>Yineth:</b>	No, en dos segundos, tiene que estar a tres metros, en tres segundos tiene que estar a cuatro metros...
5.6.	<b>Profesora:</b>	Entonces ¿Cómo tendrían que hacer el movimiento?
5.7.	<b>Saydith:</b>	Va aumentando.

Notamos en las líneas [4.3 y 4.5] que Yineth logra *interpretar parcialmente la información presentada en la representación tabular* (C: I - R: R, IC, O:SG - O: E), esto se evidencia cuando

ella emplea expresiones lingüísticas como: “el tiempo empieza desde cero y tendría que estar a un metro ...”. Mientras hace la lectura de la tabla, señala con sus dedos el plano cartesiano, indicando algunas distancias en tiempo específicos para efectuar el movimiento. Además de las expresiones lingüísticas, los señalamientos ejecutados por Yineth, son intencionados y le permiten entender la idea que está comunicando, razón por la cual se convierte en medios semióticos de objetivación.

5.8.	<b>Profesora:</b>	¿Qué movimiento tendrían que hacer?
5.9.	<b>Yineth:</b>	Sería una línea recta.
5.10.	<b>Profesora:</b>	¿Por qué una línea recta?
5.11.	<b>Saydith:</b>	Va como subiendo, porque no hay reposo.

La pregunta realizada en [4.8.] tiene como propósito indagar sobre la manera en que los estudiantes asocian la representación tabular con el movimiento corporal. Yineth por su parte, logra *identificar relación existente entre el tiempo y la distancia a partir de la representación tabular presentada* y consigue *anticiparse a la gráfica que puede ser generada al realizar movimiento* (C: I - R: R, IC, O:SG - O: E). Esto lo notamos cuando ella expresa que “sería una línea recta” [4.9] porque además de reconocer la relación lineal entre las magnitudes a partir de la observación de la tabla, la estudiante puede predecir una representación gráfica de la situación.

Saydith, menciona “va aumentando” [4.7.] y “va subiendo, porque no hay reposo” [4.11] lo que nos indica que ella describe de manera cualitativa la relación entre las magnitudes Tiempo-Distancia, es decir, Saydith *interpreta cómo debe efectuarse el movimiento en términos de alejarse, acercarse o quedarse en reposo respecto al CBR para reproducir una representación tabular dada* (C:I - R:R, IC, O:SG - O:E).

Posteriormente, Óscar emplea su brazo izquierdo para indicar cómo podría ser la representación de la gráfica de dicha situación, ver *Imagen 19. Señalamiento de Óscar para representar la situación.* El cree que va en aumento, pero que, en algún momento, la función tiende a ser constante.



Imagen 19. Señalamiento de Óscar para representar la situación.

Yineth por su parte, aclara que la representación tabular es una “línea recta que va subiendo”

[4.8 y 4.10] y también opta por modelar el movimiento con su brazo (ver **¡Error! No se**

**encuentra el origen de la referencia.**).



Imagen 20. Yineth mostrando la tendencia de la representación tabular.

Acto seguido, los estudiantes comienzan a realizar mediciones en el suelo con una regla con el fin de generar marcas en el piso, con pedazos de papel, que coincidan con los datos que observan en la tabla. El uso de estos elementos es propuesto por ellos mismos, desde etapas anteriores y se ha constituido en una de las estrategias eficaces que el grupo ha diseñado con el objetivo de aproximar su movimiento al solicitado en cada etapa (Ver *Imagen 21*).



Imagen 21. Marcas elaboradas por los estudiantes

Posteriormente, Óscar realiza pruebas acerca de cómo debe realizar el movimiento (ver *Imagen 22*), aún con muchas dudas. Por lo que se detiene y menciona: “algo no me cuadra bien” (expresando preocupación, ver *Imagen 23*).



Imagen 22. Primera prueba de Óscar del movimiento a realizar.

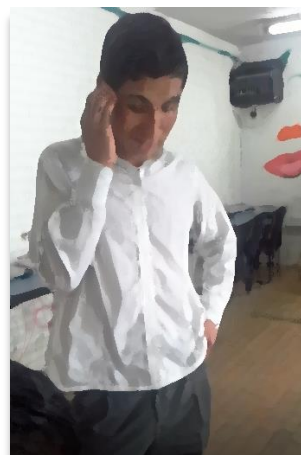


Imagen 23. Expresión de preocupación, por parte de Óscar.

La preocupación de Óscar y la forma de interpretar los datos presentados en la tabla, lo obligaron a recurrir a otra representación, en este caso la gráfica (Ver *Imagen 24*).

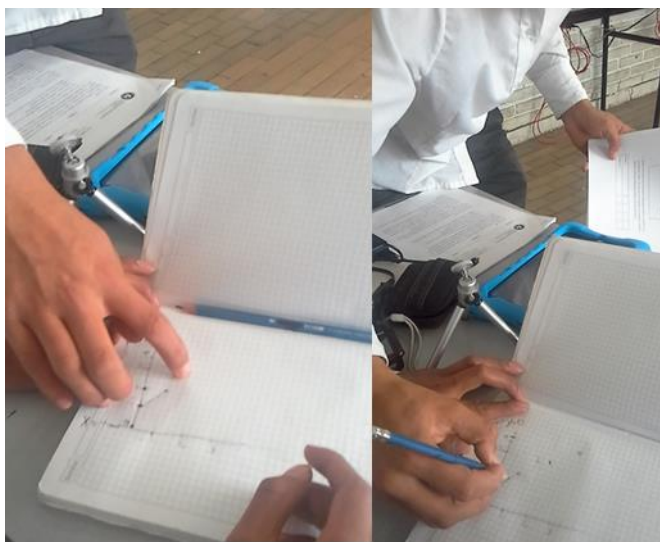


Imagen 24. Esbozo de la representación gráfica de Óscar

5.11.	<b>Profesora:</b>	¿Por qué necesitas la gráfica?
5.12.	<b>Óscar:</b>	Es que <i>acá</i> (señala el intervalo del eje y, desde 0 a 1) es donde me pierdo (...) yo lo entiendo <i>ahí</i> (se refiere a la representación gráfica que él elaboró), pero no sé cómo moverme.
5.13.	<b>Daniel:</b>	Eso significa que empieza a un metro (del sensor).
5.14.	<b>Óscar:</b>	¡Ahh! Sí ya entendí. Tan “abeja”, estaba contando mal. Estaba pensando mal.
5.15.	<b>Profesora:</b>	Entonces, ¿cómo debes moverte?
5.16.	<b>Óscar:</b>	En un segundo, un metro.
5.17.	<b>Saydith:</b>	No, en un segundo a dos metros.
5.18.	<b>Daniel:</b>	En un segundo debe estar a una distancia de dos metros.

La docente pregunta a Óscar por las razones que lo motivaron a realizar la representación gráfica y él manifiesta que lo hizo para tratar de entender cómo hacer el movimiento corporal. Sin embargo, Oscar sigue sin entender cómo relacionar su movimiento con la representación gráfica, particularmente en el instante cero, por lo que señala sobre el eje y, los valores desde 0 hasta 1, ver Imagen 24. Daniel, con la intención de ayudarle a resolver la duda a su compañero afirma que el movimiento debe iniciar a un metro de distancia del sensor [4.13]. Evidenciamos que Daniel relaciona la posición espacial a la que se debe iniciar el movimiento, con un punto de la representación gráfica que expone calculadora.

Oscar participa nuevamente y expresa que luego de la intervención de Daniel ya entendió la situación, pero, la profesora le pregunta nuevamente cómo debe realizar el movimiento y él responde “en un segundo, un metro”. Inmediatamente Saydith y Daniel reaccionan ante esta

respuesta y le explican a Óscar que en un segundo debe estar a una distancia de dos metros [4.17 y 4.18]. Daniel y Saydith realizan una lectura e interpretación adecuada de la situación, tanto en su representación tabular, como en la gráfica, estableciendo una correspondencia biunívoca entre los valores de cada magnitud.

Hasta este momento, ninguno de los participantes logra establecer una razón entre las variables distancia-tiempo, aun cuando contaron con la representación gráfica elaborada por Óscar. Sus interpretaciones de los dos registros se basan en correspondencias uno a uno entre valores discretos que fueron presentados inicialmente en una tabla. Seguidamente, Óscar procede a hacer el movimiento (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) y obtiene como resultado la representación gráfica que se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

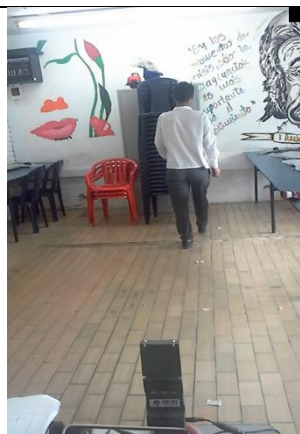


Imagen 25. Movimiento realizado por Óscar.



Imagen 26. Gráfica obtenida del movimiento realizado por Óscar.

. Como el movimiento realizado por Óscar no se asemeja a los valores presentados en la tabla, esto motiva a sus compañeros a intervenir nuevamente y establecer nuevas estrategias para realizar el movimiento:

5.19.	<b>Yineth:</b>	No se tiene que detener (...) Tiene que llegar allá (señalando con su dedo, la última marca) en tres segundos.
5.20.	<b>Daniel:</b>	O sea, pise los tres papelitos y ahí se guía. Las tres pisadas que hace son los tres segundos que se va a demorar.

Cuando Yineth le dice a Óscar que no se debe “detener” evidenciamos que ella procura lograr un movimiento sin intervalos de reposo. Esto nos permite afirmar que Yineth realiza una interpretación más profunda de la situación planteada en la representación tabular, porque piensa el tiempo no de forma discreta, sino continua. Por otro lado, ella realiza una razón entre la distancia total que se debe recorrer en un intervalo de tiempo de tres segundos, es decir, identifica a qué distancia y en cuánto tiempo se debe realizar el movimiento. Daniel por su parte, sugiere que se haga uso de las marcas que pusieron previamente en el piso para determinar la relación entre la distancia a la que se debe estar del sensor en cada instante de tiempo consignado en la tabla. Finalmente, Óscar intenta reproducir el movimiento que se aproxime a los valores consignados en la tabla, acogiendo las ideas y estrategias planteadas anteriormente. Mientras, Óscar camina, sus compañeros ven representado su movimiento en la pantalla de la calculadora (Ver Imagen 27)



Imagen 27: Gráfica obtenida del nuevo movimiento realizado por Óscar

## 5. Conclusiones

Este capítulo presenta las conclusiones que se derivan de la elaboración del presente trabajo de investigación, cuyo objetivo se centra en la identificación y descripción de algunos esquemas de acción instrumentada, evidenciables en un grupo de estudiantes de grados noveno y décimo, cuando abordan una tarea mediada por tecnología computacional. El desarrollo de las mismas se realiza a partir del alcance de los objetivos específicos propuestos en el primer capítulo y se describen de manera simultánea los aportes reflexivos de este estudio en el campo de la Educación Matemática, así como algunas consideraciones finales relacionadas con sus posibilidades de prospección.

### 5.1. De la estrategia investigativa

Dada la naturaleza cualitativa de esta investigación, la problemática propuesta y la pregunta investigativa, la elección de la estrategia metodológica (entrevista basada en tareas), resulta pertinente, debido a que permite conocer sobre los procesos de pensamiento matemático llevados a cabo por los estudiantes participantes y favorece los procesos de interacción entre los entrevistados, el entrevistador, la herramienta tecnológica (Calculadora graficadora y CBR) y el conjunto de tareas.

Dadas las características de esta estrategia, se logra documentar con videos y fotos las formas a las que acudieron los estudiantes para resolver las tareas propuestas, así como el rastreo y la exploración del proceso de construcción de significados que se construyen en el desarrollo de las etapas del conjunto de tareas propuesto. La estrategia permite desligar los juicios de valor respecto a la actividad matemática puesta en juego y, por el contrario, proporciona herramientas de análisis

para profundizar sobre las formas de pensamiento de los estudiantes en contextos mediados por los artefactos computacionales, el cuerpo, el lenguaje, los signos, etc.

La estrategia que se emplea posibilita a las autoras reflexionar en la manera que se realizan las intervenciones durante las entrevistas. Por tal motivo, ellas ven la necesidad de ser cautelosas en los modos de intervención, el empleo de las palabras, la pertinencia de las preguntas y los discursos matemáticos que se utilizan, así como en la frecuencia de las intervenciones.

## **5.2. Acerca del diseño del conjunto de tareas y su implementación**

Una vez las investigadoras eligen la estrategia metodológica a seguir, denominada entrevista basada en tareas, el paso a seguir es la elaboración del conjunto de tareas. Para dicha elaboración, se establecen dos criterios: el primero, que su diseño tenga un matiz no rutinario, y segundo, que centre su atención en potenciar algunas habilidades del desarrollo del pensamiento variacional y no en la recolección de respuestas acertadas o erradas.

Durante el desarrollo del conjunto de tareas propuestas, con sus distintas etapas, se pueden evidenciar algunos resultados que proporcionan indicios sobre su efectividad. En primer lugar, la tarea favorece la interacción de los estudiantes, dado que deben generar diversas estrategias conjuntas para lograr representaciones gráficas particulares, a partir de la captura de su movimiento con el CBR. Esto, en concordancia con Radford (2006), quien afirma que el aprendizaje es un proceso social a través del cual los individuos entran en relación, no solamente con el mundo de los objetos culturales, sino con otros individuos, y adquieren en el seguimiento común del objeto y el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana.

En segundo lugar, la flexibilidad de las tareas permite el libre desarrollo y creación de estrategias en los estudiantes, quienes no tuvieron reparos en actuar espontánea y autónomamente. Aunque las tareas tuvieron ciertos parámetros orientadores, como las etapas claramente diferenciadas, no se constituye un libreto rígido, sino que los diálogos aparecen de forma única e inesperada en algunos casos. Esto resulta enriquecedor y divertido para los estudiantes, participantes de la tarea, quienes, en el marco de esta libertad, deciden explorar curiosamente las potencialidades y restricciones de los artefactos, en algunas ocasiones, sin la orientación del profesor.

En tercer lugar, el conjunto de tareas hace imprescindible el uso de los artefactos seleccionados, calculadora graficadora TI 92 PLUS y sensor de movimiento CBR. También, permite a los estudiantes conocer el funcionamiento, las potencialidades y las restricciones de los artefactos, que, hasta ese momento, fueron desconocidos para ellos. La tecnología computacional que se emplea, dota a los participantes de herramientas, que le permiten visualizar las representaciones y establecer relaciones, entre su movimiento corporal y la representación gráfica; por ejemplo, cuando los estudiantes se ubican frente al sensor sin emitir movimientos de alejamiento o acercamiento, pueden llegar a predecir que obtienen una línea recta (una función constante), también, emplean expresiones como “mantenerse en reposo” o “moverse más rápido”, entre otros. Los participantes utilizan el sensor y la calculadora convenientemente para desarrollar de forma efectiva las tareas, lo que da lugar a la construcción de esquemas de uso y de acción instrumentada que les posibilitan la producción de significados matemáticos asociados al pensamiento variacional.

En cuarto lugar, el conjunto de tareas motiva a los participantes a involucrar el cuerpo, no solo con el objetivo de hacer el movimiento solicitado, sino para hacer inteligibles ideas y pensamientos, por ejemplo, en el episodio de Soto, Henao, Vizcaíno y Vargas, Henao toma conciencia del uso de su cuerpo cuando debe reproducir una gráfica caminando, mientras sus compañeros ven representado su movimiento en la pantalla de la calculadora, Henao [4.27] por su parte mueve los pies como “pico-pala” para mantener la distancia y el tiempo (implícitamente) de la gráfica que aleatoriamente arroja el RANGER. El cuerpo se convierte en un instrumento distinto a los artefactos computacionales involucrados, debido a que posibilita a los estudiantes asociar su movimiento con la representación gráfica que provee el programa.

Un resultado interesante, aunque no directamente relacionado con el pensamiento variacional, surge cuando los estudiantes son motivados por lograr la exactitud en la modelación de su movimiento, por ejemplo, en uno de los episodios no reportado en el análisis, Russell emplea su cuerpo como instrumento para hacer mediciones de longitud, como conoce su altura decide arrojarse al suelo para así obtener la distancia exacta. Esto deja ver cómo el cuerpo de los estudiantes puede cobrar un papel fundamental en la resolución hábil y creativa de problemas.

Vale la pena mencionar que los grupos de estudiantes convocados, en ningún momento consideraron la posibilidad de realizar el movimiento solicitado siguiendo la trayectoria expuesta en la gráfica, es decir, moviéndose de forma diagonal creciente, o diagonal decreciente para lograr el objetivo. Lo cual nos proporciona indicios de que el conjunto de tareas, con sus etapas establecidas puede aportar algunos significados asociado a los movimientos de los objetos y relacionarlo con su representación gráfica.

### **5.3. De la descripción e identificación de algunos medios semióticos de objetivación**

A partir del análisis del discurso y de las acciones de los estudiantes en cada una de las etapas del conjunto de tareas propuesta, se puede afirmar que en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto los estudiantes como las profesoras encontraron inmersos los procesos de producción de significados, y emplean algunos recursos o medios semióticos de objetivación para hacer presentes sus intenciones y organizar sus acciones. Algunos de los medios semióticos que se logran identificar durante la actividad matemática son: el movimiento corporal, los señalamientos y los gestos. Estos recursos son utilizados con el fin de comunicar algunas ideas asociadas a la variación o el cambio y desempeñan un papel fundamental en la manera como los estudiantes interpretan, reflexionan y materializan planteamientos matemáticos que se ejecutan en torno a las tareas propuestas. A continuación, se describe algunos medios semióticos que se utilizaron para el análisis:

- El movimiento corporal: Este recurso se hizo fundamental durante el desarrollo de la tarea, en tanto que ella misma, solicitaba a los estudiantes desplazarse, según ciertas indicaciones. Sin embargo, cuando los estudiantes alcanzaban una toma de conciencia respecto al movimiento de su cuerpo, parece ser que se genera un acercamiento a conceptos relacionados con la variación y el cambio, como inclinación de la recta y velocidad.
- Los señalamientos: Este medio semiótico de objetivación consiste en señalar con el lápiz o con los dedos objetos que necesitan contar, como las marquillas que representan mediciones de distancia o tiempo en una representación gráfica, arrojada por la

calculadora. Los estudiantes lo usan con el propósito de explicar ideas matemáticas o hacer énfasis respecto a un valor particular de alguna de las magnitudes involucradas.

- Los gestos: Estas manifestaciones kinesiológicas emergieron constantemente en los estudiantes para expresar asombro, convencimiento, inconformidad, incredulidad, frustración, entre otros sentimientos, durante momentos particulares del desarrollo de la tarea. La importancia de fijarnos como investigadores en este tipo de recursos radica en considerar el pensamiento como una forma de reflexión activa sobre el mundo mediatizado por percepciones, por movimientos, por gestos, artefactos, signos, el lenguaje, etc. (Radford, 2006)
- Expresiones lingüísticas: Las expresiones lingüísticas utilizadas permitieron a los estudiantes acompañar sus discursos para hacer descripciones de manera cualitativa de situaciones de cambio. En otros casos les permitió relacionar un punto de la gráfica con su posición física, por ello, fue común encontrar la palabra “ahí” frecuentemente. Por ejemplo, en la línea [1.29] en la misma frase los estudiantes emplearon la palabra “ahí” con el propósito de realizar una correspondencia entre el lugar físico en el que se encuentra Valentina, con un punto de la gráfica.

#### **5.4. De la descripción e identificación de las habilidades asociadas a algunos procesos matemáticos inmersos en el desarrollo del pensamiento variacional**

Durante la puesta en escena de esta investigación, el foco de esta investigación se centra únicamente en dos procesos matemáticos, que según (Parada et al., 2016), están asociados al desarrollo del pensamiento variacional: el proceso de comunicación y el proceso de representación.

**Proceso de comunicación:** la comunicación es uno de los procesos que alcanza mayor protagonismo, puesto que los estudiantes lo emplean para explicar sus ideas y hacerlas inteligibles a sus compañeros. Este proceso, permite a los estudiantes sistematizar los conocimientos personales en un ámbito y, por tanto, ser aceptados como conocimiento nuevo o, en su defecto, ser refutados (MEN, 1998). La verbalización de las ideas va acompañada de gestos y señalamientos que movilizan los estudiantes durante la actividad matemática que se llevan a cabo y que les permite dar cierta forma tangible y corpórea al saber (Radford, 2006).

Se percibe en los estudiantes, un acercamiento cuantitativo de la variación, debido a que identifican las magnitudes y hacen una descripción verbal de cómo estas se comportan en cierta situación (MEN, 2004). Por ejemplo, en las descripciones de la situación de cambio los participantes usaron expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que la otra, tal magnitud más lentamente que la otra, o tal magnitud ni aumenta ni disminuye.

Las habilidades asociadas al proceso de comunicación que se hacen más evidentes durante el desarrollo de las tareas fueron, por un lado, la interpretación en tanto que, los participantes le dieron sentido a las representaciones gráficas, tabulares y kinestésicas que tuvieron lugar durante el experimento. Otra habilidad altamente frecuente fue la explicación, debido a que, en medio de la interacción, que todo el tiempo se generó, los estudiantes expusieron sus ideas en torno a la variación con palabras claras o ejemplos, expresando el porqué de una situación, con el fin de hacer comprensible a otro ese objeto de conocimiento. La habilidad de argumentar fue evidenciada, pero con una frecuencia más baja en comparación con las otras dos mencionadas,

debido a que, para su desarrollo, se necesita del uso adecuado del lenguaje y del discurso matemático.

**Proceso de representación:** Dada la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos solo se puede entrar en contacto con ellos, mediante alguna de sus representaciones (Moreno, 2014; citado en Parada et al., 2016). Por ello, durante todo el desarrollo de la tarea los estudiantes estuvieron en contacto con distintos registros de representación, sobre todo el gráfico, el kinestésico y el tabular.

Las habilidades asociadas al proceso de representación que se identifican con mayor frecuencia en los estudiantes son: la interpretación de representaciones debido a que los estudiantes pudieron ver en las gráficas comportamiento tendencial como crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, tendencial, en las tablas encontraron alguna correspondencia entre las magnitudes involucradas. Otra habilidad que se presentó fue relacionar y conectar las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático a través de sus invariantes, particularmente, cuando los estudiantes realizaron representaciones kinestésicas de un fenómeno presentado gráficamente. En algunas ocasiones los estudiantes construyeron representaciones usuales en lápiz y papel, de fenómenos presentados en una tabla o en una gráfica, para organizar, registrar y comunicar sus ideas matemáticas. Adicionalmente, los artefactos computacionales empleados aportaron herramientas para expresar significados visuales que complementaron las representaciones convencionales.

### **5.5. Del reconocimiento de los procesos propios del enfoque instrumental**

La mediación instrumental en el desarrollo de las tareas propuestas juega un papel fundamental en este trabajo investigativo, porque permite registrar evidencias de cómo los estudiantes, con su

conocimiento y curiosidad, usan la calculadora y el sensor en pro de tareas específicas, pero adicionalmente, todo el tiempo exploran las potencialidades de los artefactos involucrados, aunque su principal interés no fue aprender a manipularlos, sino hacer uso de sus herramientas visuales. Estas acciones proporcionan evidencias del posible desarrollo de procesos de instrumentalización e instrumentación en los participantes, casi de forma simultánea, por lo que no es posible analizarlos de forma aislada o como si fueran etapas desarrolladas una posterior a la otra.

Con el propósito de profundizar en la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes a partir de la tarea propuesta, se establecen algunos esquemas de acción instrumentada. Estos esquemas posibilitan la articulación entre la Mediación Instrumental y el Pensamiento Variacional, con el fin de caracterizar las formas de pensamiento en torno a la variación y el cambio. La manera en que se evidencian dichos esquemas mentales es mediante la identificación de diferentes medios semióticos de objetivación emergentes durante la implementación de la tarea.

Los principales esquemas de acción instrumentada asociados al desarrollo del pensamiento variacional que se evidencian durante el análisis son presentados a continuación, como resultado final de este trabajo de investigación (Tabla 4. Esquemas de acción instrumentada)

<b>ESQUEMAS DE ACCIÓN INSTRUMENTADA</b>
Utilizar el CBR y la calculadora como medio para representar gráficamente el movimiento de su cuerpo.
Elaborar conjeturas sobre el funcionamiento del CBR en determinadas situaciones de movimiento específicas.

Elaborar conjeturas sobre el comportamiento de la gráfica que genera el CBR luego de captar los datos de un objeto en movimiento.
Comprobar conjeturas sobre la modelación gráfica (Distancia vs. tiempo) del movimiento de un objeto, utilizando el CBR y la calculadora.
Caracterizar las gráficas Distancia vs. Tiempo que arroja el RANGER, en términos de su comportamiento creciente, decreciente o constante.
Interpretar cómo debe efectuarse el movimiento en términos de alejarse, acercarse o quedarse en reposo respecto al CBR para reproducir una representación gráfica dada.
Establecer relaciones de dependencia entre las Distancia y el Tiempo, reconociendo cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.
Establecer relaciones entre el cambio de posición con respecto al transcurso del tiempo.
Identificar cuánta distancia se debe recorrer en determinado intervalo de tiempo para reproducir una representación gráfica dada.
Asociar la inclinación de los segmentos de la gráfica con la velocidad a la que debe ir el cuerpo en movimiento para reproducir una representación gráfica dada.
Interpretar la información presentada en una representación tabular de un fenómeno de movimiento.
Establecer relaciones entre las variables involucradas en una representación tabular reconociendo su forma (lineal, periódica, simétrica, uniforme, etc.).

*Tabla 4. Esquemas de acción instrumentada*

## 5.6. Consideraciones finales y preguntas para futuras investigaciones

Realizar este trabajo de grado, permite a las autoras tener un acercamiento a una actividad de investigación en Educación Matemática, al llevar a cabo tareas como describir, interpretar y analizar las habilidades de un grupo de estudiantes asociadas al desarrollo del pensamiento variacional, mediado por la tecnología computacional y el cuerpo. Este tipo de ejercicios investigativos posibilitan evidenciar el desarrollo de procesos matemáticos en un grupo de estudiantes cuando abordan un conjunto de tareas propuesto y permiten ampliar la mirada sobre las acciones y discursos de los estudiantes, entendiendo que el estudio del Cálculo no solo implica ser hábil en desarrollar ciertas reglas y algoritmos, sino también en reconocer variación y cambio en fenómenos relacionados con el movimiento.

Durante el desarrollo de este estudio surge una pregunta que, aunque no apunta al objetivo, puede ser de interés para futuras investigaciones. En este trabajo no se analizaron otros procesos, por ejemplo, el de formulación, comparación y ejecución de procedimientos, asociados al pensamiento variacional. Al analizar los datos inicialmente, se consideró que el desarrollo de este proceso podría estar inmerso en la actividad matemática de los estudiantes, cuando estimaban valores de distancia o empleaban objetos no convencionales para hacer algunas mediciones. Sin embargo, poco se profundiza en este proceso, debido el diseño de las tareas. Por lo anterior, surge el interrogante ¿qué habilidades del proceso de formulación, comparación y ejecución de procedimientos asociado al estudio de pensamiento variacional se pueden evidenciar en el desarrollo de una tarea o conjunto de tareas mediadas por el uso de tecnología computacional?

Finalmente, las autoras de este trabajo de investigación consideran que pese a que los artefactos empleados fueron usados hace más de veinte años, estos pueden potencializar el quehacer

matemático con los estudiantes y explorar ideas matemáticas asociadas al estudio del Cálculo. Hoy en día, existen sensores de movimiento mucho más actualizados, sin embargo, el acceso a estas nuevas tecnologías (sensor de movimiento), es difícil por su costo o por su escasa comercialización. Sería interesante pensar en el diseño de una aplicación móvil que permita la recolección de datos como lo hace el CBR.

## Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.
- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), 5–28.
- Ballesteros, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 3(4), 125–137. <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6903>
- Fiallo, J., & Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Pre calculus course in using supported geogebra for the development of variational thinking.*, 20, 56–73. <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=100271851&lang=es&site=ehost-live>
- Goldin, G. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task - Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* Routledge. (pp. 513–545). <https://doi.org/10.5860/choice.38-2281>
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Uniandes-LIDIE*, 10(1), 93–111.

- Grueso, R., & González, G. (2016). *El concepto de función como Covariación en la escuela (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle, Cali.
- Guacaneme, E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, 31, 113–131. <https://doi.org/10.17227/ted.num31-1651>
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo [Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.]. En *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. [https://www.academia.edu/807014/Dificultades\\_en\\_el\\_aprendizaje\\_del\\_cálculo](https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo)
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. 103. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf.pdf)
- MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA. [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-113759\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles-113759_archivo.pdf)
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. <https://doi.org/958-691-290-6>
- Pantano, Ó. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales (Tesis de Maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Parada, S., Conde, L., & Fiallo, J. (2016). *Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una*

- Aproximación al Estudio de la Variación. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(56), 1031–1051. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a10>
- Pedrerros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación a la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. En Armand Colin (Ed.), *Sciences et Technologies de l'Information et de La Communication Pour l'Éducation et La Formation*.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Número Esp*, 103–129.
- Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274031870010>
- Radford, L. (2014b). La teoría de la objetivación. *Santillana (Ruta maestra)*, 9, 33–37. <http://www.santillana.com.co/rutamaestra/edicion-9/articles/6%0AEI>
- Radford, L., & D'Amore, B. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. En *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Problemas Semióticos, Epistemológicos y Prácticos* (pp. 97–112). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 25 años, 11–30.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854002>

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*.

Universidad del Valle Programa Editorial.

Texas Instruments Incorporated. (1997). *Conceptos básicos del CBR™*.

<http://education.ti.com/~ti/media/DB93A481F251435CA6F32D16DAA75D6B>

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto*

*grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Tesis Doctoral)*. Universidad Distrital

Francisco José de Caldas.

## ANEXO 1

### **Secuencia de tareas: la mediación instrumental y el cuerpo: una aproximación al pensamiento variacional**

#### **Etapa 1. Familiarización con los artefactos**

1. Conecte el CBR a la calculadora con el cable proporcionado.
2. Encienda la calculadora y posteriormente oprima la tecla 92 del sensor.
3. Escriba en la calculadora “Ranger ()” para acceder al programa y presione [Enter].
4. Seleccione la opción: 1: Setup/Sample y presione [Enter].
5. En la ventana emergente SETUP OPTIONS presione doble [Enter] cuando esté preparado para hacer el movimiento que desea captar con el sensor.
6. Ubique el sensor en un lugar fijo y sitúese a cierta distancia de este, de tal manera que quede dentro del intervalo de registro.
7. Desplácese en la zona de registro acercándose o alejándose del sensor.
8. Observe la gráfica obtenida por los artefactos y conteste las siguientes preguntas:
  - a) ¿Qué magnitud representa el eje X? ¿Qué representa la distancia de las marcas?  
¿Cuál es la unidad de medida?
  - b) ¿Qué magnitud representa en el eje Y? ¿Qué representa la distancia de las marcas?  
¿Cuál es la unidad de medida?

- c) ¿A qué distancia del sensor comenzó el desplazamiento? ¿Qué tiempo empleó en hacer el recorrido?
  - d) ¿Qué representa “este punto” de la gráfica? Describa
  - e) Describa el movimiento que realizó y relaciónelo con la gráfica obtenida por el sensor y la calculadora.
9. Explore las gráficas que resultan de realizar diversos movimientos como correr, quedarse quieto, hacer movimientos pendulares, o los que imagine. ¿Cómo espera que sea el comportamiento de la gráfica? ¿Cómo resultó la gráfica? Describa.

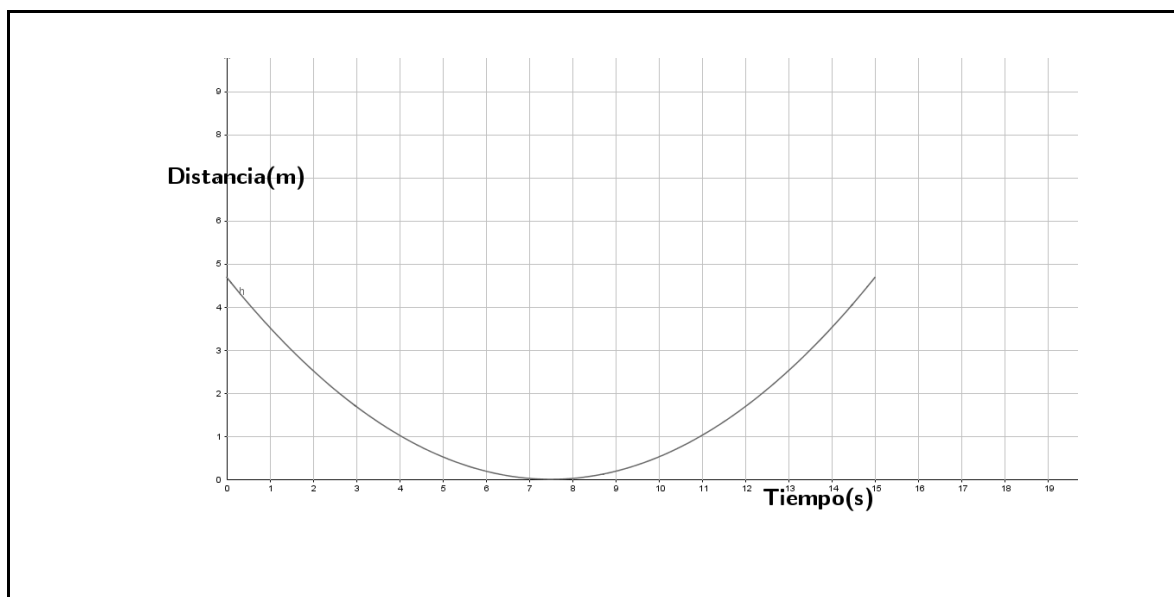
## **Etapa 2. Imitando una gráfica: Parte 1**

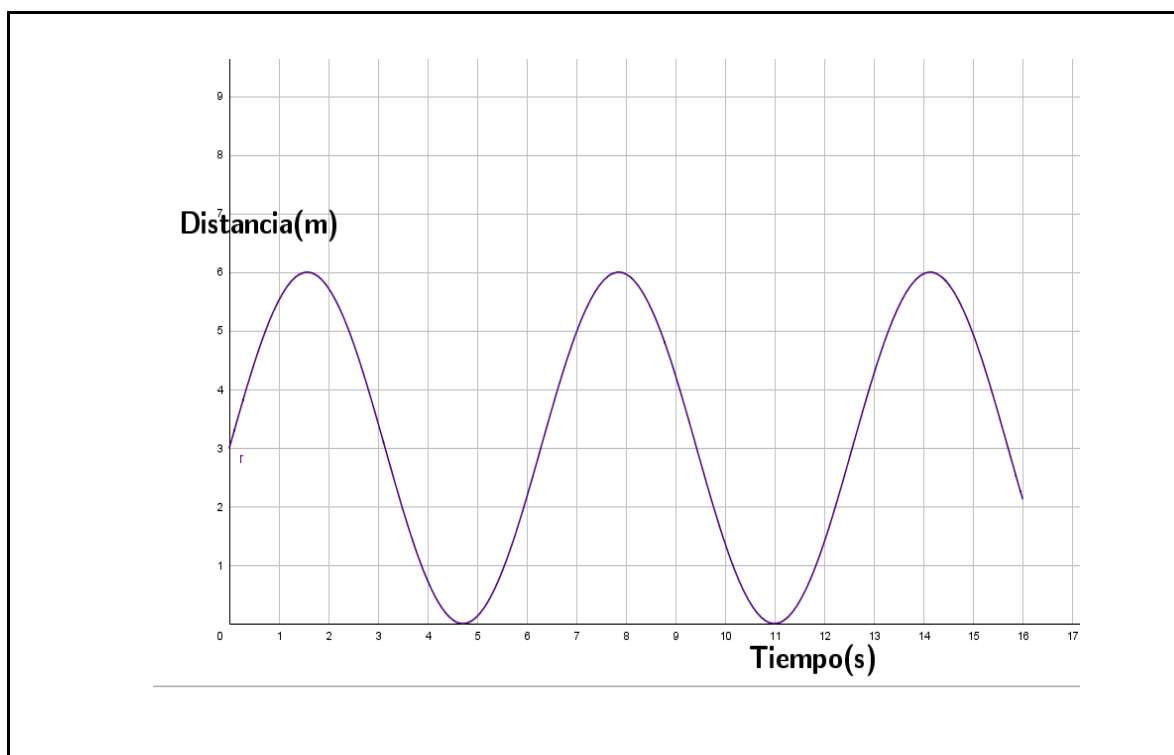
1. Presione ENTER y luego seleccione la opción 4: *Main Menu*.
2. Elija la opción 3: *Applications* y seleccione la unidad de medida de longitud 2: *Meters*.
3. Seleccione la opción 1: *Distance Match*. La calculadora le arrojará de forma aleatoria una gráfica Distancia vs Tiempo.
4. Seleccione la opción 1: *Distance Match*. La calculadora le arrojará de forma aleatoria una gráfica Distancia vs Tiempo.
5. Desplácese de tal forma que la representación gráfica obtenida al capturar su movimiento por medio del sensor y la calculadora se parezca, con la mayor exactitud posible, a la gráfica que le mostró la calculadora inicialmente.

6. Diseñe y describa a con su equipo de trabajo, una estrategia para llevar a cabo el movimiento de forma efectiva.
7. Compare los puntos registrados al realizar su movimiento con la gráfica inicial. ¿Cuál es la diferencia?
8. Intente el movimiento, tantas veces como sea necesario, para lograr la mayor exactitud posible. Si generó nuevas estrategias, descríbalas.

### Etapa 3. Imitando una gráfica: Parte 2

1. Nuevamente, desplácese de tal forma que la representación gráfica obtenida al capturar su movimiento por medio del sensor y la calculadora se parezca, con la mayor exactitud posible, a las siguientes gráficas.





2. Diseñe y describa a con su equipo de trabajo, una estrategia para llevar a cabo el movimiento de forma efectiva. Repítalo tantas veces como sea necesario, para lograr una mayor exactitud.

#### **Etapa 4. Relacionando registros de representación**

1. Realice el movimiento de tal forma que la representación gráfica obtenida corresponda con las representaciones tabulares (relaciones lineales continuas) que se muestran a continuación. Describa la estrategia y luego ejecute cada movimiento.

Tiempo (s)	0	1	2	3
------------	---	---	---	---

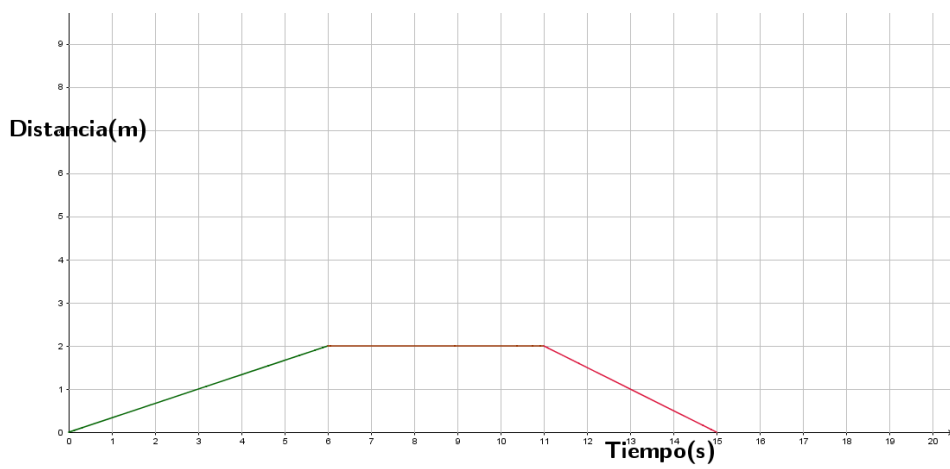
Distancia (m)	1	2	3	4
---------------	---	---	---	---

Tiempo (s)	0	2	5	10
Distancia (m)	1	2	3.5	6

### **Etapa 5. Relacionando representaciones**

1. Sin hacer uso del sensor ni de la calculadora, relacione las siguientes representaciones gráficas, tabulares y con la descripción. Escriba de forma detallada el porqué de la elección.  
Compruebe su respuesta.

#### **Representación gráfica 1:**



### Representación gráfica 2:



### Representación tabular 1:

Tiempo (s)	0	3	6	13	15
Distancia (m)	5	4	3	2	1

**Representación tabular 2:**

Tiempo (s)	0	3	6	11	15
Distancia (m)	0	2	1	1	2

**Representación tabular 3:**

Tiempo (s)	0	3	6	9	13
Distancia (m)	0	1	2	2	1

**Descripción 1:**

El sujeto inicia alejado del sensor 3 metros, se acerca al sensor 1 metro cada 3 segundos. Al llegar a los 3 metros, se mantiene quieto durante 5 segundos, hasta el segundo 11. Finalmente, se aleja del sensor 1 metro cada 4 segundos, hasta quedar a 2 metros del sensor.

**Descripción 2:**

Se ubica frente al sensor y se aleja del sensor 1 metro cada 3 segundos hasta llegar a los 2 metros. Al llegar a los 2 metros se mantiene quieto durante 5 segundos, hasta el segundo 11. Se acerca nuevamente al sensor acercándose 1 metro cada 2 segundos.

**Descripción 3:**

Inicia alejado del sensor 5 metros, se acerca al sensor 1 metro cada 3 segundos. Al llegar a los 3 metros, se mantiene quieto durante 5 segundos, hasta el segundo 11. Finalmente, se acerca al sensor 1 metro cada 2 segundos, hasta quedar 1 metro del sensor.