

*DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE CONJETURACIÓN Y ARGUMENTACIÓN DE  
ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO, EN UN PROBLEMA DE SUCESIONES*

*YEIMI PAOLA HERRERA NARANJO*

*NURY ANDREA RODRÍGUEZ PARDO*

*UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL*

*FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA*

*DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS*

*ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*

*BOGOTÁ, D.C*

*DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE CONJETURACIÓN Y ARGUMENTACIÓN DE  
ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO, EN UN PROBLEMA DE SUCESIONES*

*YEIMI PAOLA HERRERA NARANJO*

*CÓDIGO: 2015182009*

*CC: 1032459206*

*NURY ANDREA RODRÍGUEZ PARDO*

*CÓDIGO: 2015182019*

*CC: 1073512506*

*Trabajo de grado presentado ante el departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional  
para optar al título de Especialista en Educación Matemática*

*Asesor:*

*EDWIN CARRANZA*

*UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, D.C*

*2015*

## RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Descripción de los procesos de conjeturación y argumentación aplicado a estudiantes de grado noveno en un problema de sucesiones
<b>Autor(es)</b>	HERRERA NARANJO, Yeimi Paola RODRÍGUEZ PARDO, Nury Andrea
<b>Director</b>	Edwin Carranza
<b>Publicación</b>	Bogotá, D.C., 2015, Universidad Pedagógica Nacional, p. 196
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	Árbol pitagórico, Sucesiones, Nociones del cálculo, Proceso de conjeturación, Proceso de argumentación

2. Descripción
<p>En este documento se presenta un reporte del trabajo de grado realizado en el marco de la Especialización en Educación Matemática, el cual surge del interés de las autoras por generar alternativas que contribuyan al desarrollo de los procesos de conjeturación y argumentación ligados a las nociones del cálculo como sucesión, límite, entre otras.</p> <p>Para ello, se construyó un applet en GeoGebra que acompañada de una guía con el fin de ahondar y poder establecer relaciones entre los procesos de conjeturación y argumentación de los estudiantes y las nociones del cálculo, a partir de esto, se realiza una descripción de los resultados que se obtuvieron durante la aplicación de dichos instrumentos.</p>

### 3. Fuentes

A continuación se mencionan las fuentes bibliográficas principales:

- Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, M. N. (2014). Actividades Matemáticas : Conjeturar y Argumentar. *Números, Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 85(1), 75–90.
- Apostol, T. M. (1984). *Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté.
- Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (1999). Approaching theorems in grade VIII: some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice. The Rotterdam: Sense Publishers*, 247–262.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. a., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de Las Ciencias*, 26(3), 431–444.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, Springer*, 66(1), 23–41.
- MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Matemáticas. *Bogotá : Magisterio*.
- Santaló, Luis. (1994). Una nueva caracterización de la enseñanza y del conocimiento matemático escolar. Implicaciones sobre el papel del profesor. En el educador en la enseñanza de la matemática. San José: EUNED.
- Spivak, M. (1992). *Calculus: Cálculo infinitesimal*. España: Reverté.
- Toulmín, S. (2007). *Los usos de la argumentación* (Ediciones ). España: Barcelona.

### 4. Contenidos

Se presenta la justificación y los objetivos que se pretenden abarcar durante el desarrollo del trabajo. Se expone el marco de referencia, el cual se divide en marco didáctico y matemático; en

el *marco didáctico* se presentan los referentes teóricos respecto a los procesos de argumentación y conjeturación y las características que se abordarán o se tendrán en cuenta en el desarrollo de la descripción de las evidencias obtenidas; en el *marco matemático* se plasman las definiciones de las ideas o nociones del cálculo que se buscan desarrollar durante la aplicación de la actividad. Se plasma a la metodología usada, en el cual se evidencia el paso a pasó realizado para cumplir con los objetivos establecidos inicialmente. Se muestra la descripción de la guía de aplicación, además del proceso de construcción de la misma, presentando los propósitos de cada una de las fases que componen la actividad. Se presenta la descripción de los resultados obtenidos, se presentan algunos de los procesos de conjeturación y argumentación que se evidencian en los resultados obtenidos frente a cada una de las fases de la actividad propuesta, además de las nociones de cálculo que se consideran están presentes en cada uno de estos argumentos. Se encuentran las conclusiones de la descripción de la actividad realizada de acuerdo con los objetivos planteados.

## 5. Metodología

Se realizó una búsqueda de trabajos y publicaciones relacionados con la teoría de la argumentación, en particular, documentos que hicieran referencia a la actividad matemática, procesos de conjeturación y argumentación, así mismo, se indagó acerca de algunas nociones del cálculo que podrían estar involucradas en el desarrollo de una guía que se propone para los estudiantes. En la segunda etapa, se realizó el proceso de elaboración y aplicación de una guía (con preguntas abiertas), con la cual se pretende describir los procesos de conjeturación y argumentación de algunos estudiantes de noveno del colegio SCALAS, mediante el desarrollo de la actividad, la cual se denomina “árbol pitagórico”. En la tercera etapa de la ejecución del trabajo, se realizó la descripción los resultados obtenidos, se precisa la forma como se realizó la aplicación de la guía, la manera de estructurar la descripción de la información recolectada y su contraste con los elementos teóricos tratados en el marco de referencia.

## 6. Conclusiones

A continuación se presenta un resumen de las conclusiones del trabajo:

Se identifica, en gran medida, un proceso de conjeturación en las respuestas de los estudiantes y las preguntas de la guía contribuyen al desarrollo de los diferentes pasos de tal proceso; por ejemplo, la tabla promueve la observación y registro de algunos casos particulares

Se evidenciaron diferentes procesos de argumentación, los cuales se estructuran de acuerdo con el modelo básico de Toulmin. Los datos, casi siempre fueron los valores registrados en la tabla o los que se encuentran en el applet de la guía, las conclusiones están relacionadas con los propósitos planteados en la descripción de la guía, de acuerdo con la fase correspondiente. Las garantías encontradas también son obtenidas de secuencias, observación de patrones y verificación de casos particulares con la información presentada en el applet, dichas garantías son de tipo hipotético, debido a que no tiene un sustento teórico aceptado por una comunidad. En algunos de los segmentos, se consideró un respaldo para validar las conclusiones, estos se basan en los conocimientos de los estudiantes, como fórmulas de áreas, o expresiones generales para representar algo.

Durante el desarrollo de la guía, los estudiantes involucran algunas nociones del cálculo, como sucesión, serie, convergencia, límite, procesos infinitos y convergencia.

<b>Elaborado por:</b>	<b>Yeimi Paola Herrera Naranjo</b> <b>Nury Andrea Rodríguez Pardo</b>
<b>Revisado por:</b>	Edwin Carranza

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	18	10	2015
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

## ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "*Descripción de los procesos de conjeturación y argumentación de estudiantes de grado noveno en un problema de sucesiones*", presentado por los estudiantes:

**Rodríguez Pardo Nury Andrea - 2015182019 - 1073512506**  
**Yeimi Paola Herrera Naranjo - 2015182009 - 1032459206**

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con **46 Puntos**.

Observaciones:

---

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2015.

### JURADOS

Directora del Trabajo:

Profesor:

  
EDWIN CARRANZA

Jurados:

Profesor:

  
ALBERTO DONADO

## TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	1
INTRODUCCIÓN .....	3
1. ASPECTOS GENERALES .....	4
1.1. JUSTIFICACIÓN.....	4
1.2. OBJETIVOS.....	5
1.2.1. Objetivo general .....	5
1.2.2. Objetivos específicos .....	5
2. MARCO DE REFERENCIA .....	6
2.1. Marco Didáctico .....	6
2.1.1. Actividad Matemática .....	6
2.1.2. Conjeturación .....	8
2.1.3. Proceso de conjeturación.....	10
2.1.4. Argumentación .....	13
2.1.5. Modelo de Toulmin.....	15
2.2. Marco Matemático.....	19
2.2.1. Sucesión .....	20
2.2.2. Serie.....	20
2.2.3. Límite .....	20

2.2.4.	Convergencia de una sucesión .....	21
3.	METODOLOGÍA .....	22
4.	PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APLICACIÓN.....	24
4.1.	Proceso de construcción de la guía.....	24
a.	Selección de posibles ítems a incluir en la guía y diseño de applet: .....	24
b.	Implementación de dos pruebas piloto: .....	25
c.	Descripción de la guía .....	26
5.	DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS.....	36
5.1.	Algunas consideraciones acerca de la aplicación de la guía .....	36
5.2.	Algunas consideraciones acerca de la descripción de los resultados .....	37
5.3.	Descripción de resultados Fase 1 de la guía .....	40
5.3.1.	Conclusiones resultados Fase 1 .....	42
5.4.	Descripción de resultados Fase 2 de la guía .....	44
5.4.1.	Conclusiones resultados Fase 2.....	60
5.5.	Descripción de resultados Fase 3 de la guía .....	62
5.5.1.	Conclusiones resultados Fase 3.....	79
5.6.	Descripción de resultados Fase 4 de la guía .....	81
5.6.1.	Conclusiones resultados Fase 4.....	91
5.7.	Descripción de resultados Fase 5 de la guía .....	94

5.7.1. Conclusiones resultados Fase 5.....	96
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	97
BIBLIOGRAFÍA.....	101
ANEXOS.....	103
ANEXO 1: GUÍA DE APLICACIÓN .....	103
ANEXO 2: APLICACIÓN .....	116
ANEXO 3: EVIDENCIAS.....	117
1. Transcripciones o evidencias fase 1 de la guía .....	117
2. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía .....	125
3. Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía .....	148
3. Transcripciones o evidencias fase 4 de la guía .....	171
4. Transcripciones o evidencias fase 5 de la guía .....	190

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo de tarea actividad matemática .....	6
Figura 2 Esquema simple del modelo de Toulmin.....	16
Figura 3 Ejemplo esquema de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007) .....	16
Figura 4 Esquema modelo de Toulmin .....	17
Figura 5 Ejemplo esquema de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007) .....	17
Figura 6 Esquema completo del modelo de argumentación de Toulmin.....	18
Figura 7 Ejemplo Esquema completo de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007).....	18
Figura 8 Esquema simple Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007) .....	19
Figura 9 Teorema de Pitágoras .....	26
Figura 10. Construcción árbol pitagórico.....	26
Figura 11 Construcción árbol pitagórico 2.....	27
Figura 12 Árbol pitagórico.....	27
Figura 13 Construcción rama pitagórica .....	28
Figura 14 Rama del árbol pitagórico.....	28
Figura 15 Applet proporcionado a los estudiantes .....	29
Figura 16 Fase: Exploración .....	30
Figura 17 Tabla: Registro de información .....	30
Figura 18 Preguntas Fase 2: Cuadrados .....	31
Figura 19 Preguntas fase 2: Cuadrados y triángulos.....	31
Figura 20 Preguntas fase 3: Relación entre cuadrados.....	32
Figura 21 Algunas preguntas orientadoras.....	33
Figura 22 Preguntas fase 3: Relación entre las áreas de cuadrados y triángulos .....	34
Figura 23 Rama pitagórica .....	34
Figura 24 Matriz Fase 1 .....	38
Figura 25 Matriz Fases 2, 3, 4 y 5.....	39

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Resumen consideraciones acerca de la conjeturación.....	9
Tabla 2. Pasos de los diferentes tipos de conjetura basada en Cañadas et al. (2008) .....	10
Tabla 3. Características de las fases de la conjeturación.....	12
Tabla 4 Definiciones argumentación y otras consideraciones .....	14
Tabla 5. Resumen características de los componentes del modelo de Toulmin .....	18
Tabla 6. Características de las nociones del cálculo a tener en cuenta .....	21
Tabla 7. Descripción de resultados fase 1 de la guía .....	40
Tabla 8. Descripción momento o segmento 1, fase 2 .....	44
Tabla 9. Descripción momento o segmento 2, fase 2 .....	46
Tabla 10. Descripción momento o segmento 3, fase 2 .....	50
Tabla 11. Descripción momento o segmento 8, fase 2 .....	54
Tabla 12. Descripción momento o segmento 10, fase 2 .....	57
Tabla 13 Descripción momento o segmento 1, fase 3.1 .....	62
Tabla 14 Descripción momento o segmento 2, fase 3.1 .....	64
Tabla 15 Descripción momento o segmento 1, fase 3.2 .....	66
Tabla 16 Descripción momento o segmento 2, fase 3.2 .....	68
Tabla 17 Descripción momento o segmento 3, fase 3.2 .....	70
Tabla 18 Descripción momento o segmento 1, fase 3.3 .....	72
<i>Tabla 19 Descripción momento o segmento 2, fase 3.3.....</i>	<i>75</i>
Tabla 20 Descripción momento o segmento 3, 4 y 5, fase 3.3 .....	77
Tabla 21. Descripción momento o segmento 1 y 2, fase 4 .....	81
Tabla 22. Descripción momento o segmento 3 y 4, fase 4 .....	84
Tabla 23. Descripción momento o segmento 5 y 6, fase 4 .....	88
Tabla 24 Descripción momento o segmento 1, 2,3 y 4, fase 5 .....	94
Tabla 25 Transcripciones o evidencias fase 1 de la guía .....	117
Tabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía .....	125
Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía .....	148
Tabla 28. Transcripciones o evidencias fase 4 de la guía .....	171
Tabla 29 Transcripciones o evidencias fase 5 de la guía .....	190

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se plantea y aplica una situación relacionada con el estudio de las sucesiones y de algunas ideas o nociones del cálculo que se relacionan con este concepto, para ello se crea una aplicación realizada en GeoGebra, la cual se denomina “*Árbol Pitagórico*” con la que se pretende indagar sobre los procesos de conjeturación y argumentación de los estudiantes de grado noveno del colegio SCALAS.

El documento consta de seis capítulos, en el primero se presenta la justificación y los objetivos que se pretenden abarcar durante el desarrollo del trabajo; en el segundo capítulo se expone el marco de referencia, el cual se divide en marco didáctico y matemático; en el *marco didáctico* se presentan los referentes teóricos respecto a los procesos de argumentación y conjeturación y las características que se abordarán o se tendrán en cuenta en el desarrollo de la descripción de las evidencias obtenidas; en el *marco matemático* se plasman las definiciones de las ideas o nociones del cálculo que se buscan desarrollar durante la aplicación de la actividad; el capítulo número tres corresponde a la metodología, en el cual se evidencia el paso a pasó realizado para cumplir con los objetivos establecidos inicialmente; en el cuarto capítulo se muestra la descripción de la guía de aplicación, además del proceso de construcción de la misma, presentando los propósitos de cada una de las fases que componen la actividad; en el quinto capítulo, correspondiente a la descripción de los resultados obtenidos, se presentan algunos de los procesos de conjeturación y argumentación que se evidencian en los resultados obtenidos frente a cada una de las fases de la actividad propuesta, además de las nociones de cálculo que se consideran están presentes en cada uno de estos argumentos, para esto se hacen explícitas algunas indicaciones con el fin de que el lector comprenda mejor el instrumento construido para la síntesis de dichos resultados y por último en el capítulo seis se encuentran las conclusiones de la descripción de la actividad realizada de acuerdo con los objetivos planteados.

# 1. ASPECTOS GENERALES

## 1.1. JUSTIFICACIÓN

Al realizar una búsqueda de literatura relacionada con los procesos de argumentación y prueba en cálculo se logra evidenciar que es escasa y no hay autores que relacionen estos procesos con el cálculo, por el contrario, la mayoría de escritos consultados vinculan dichos procesos con la geometría, por esta razón se pretende ahondar y aportar algunas generalidades encontradas frente a los procesos de argumentar y conjeturar en el cálculo.

Se considera pertinente abordar una situación que permita estudiar regularidades numéricas y geométricas, y las relaciones que hay entre las mismas, conduciendo a la caracterización, no necesariamente explícita, de ciertas nociones del cálculo como sucesión, serie, convergencia y límite, con el propósito de identificar y describir los procesos de conjeturación y argumentación en los estudiantes de grado noveno del colegio SCALAS, esto se hace debido a que se evidencia una carencia de garantías y/o respaldos que validen las afirmaciones que realizan los estudiantes frente una determinada situación que se les presente.

Según (Flores, Valencia, Dávila, & García, 2008) el concepto de límite es concebido como una de las máximas expresiones del discurso matemático moderno y su manejo es crucial para la comprensión del cálculo y sus aplicaciones, razón por la cual se construye y aplica una situación en la que se estudia la noción de límite a partir de la idea de convergencia de sucesiones, haciendo un reconocimiento a algunas características fundamentales como infinito, procesos infinitos, aproximación y tendencia.

Por otro lado (Álvarez, Ángel, Carranza, & Soler, 2014) precisan que actividad matemática se concreta en los procesos de conjeturar y argumentar, donde el proceso de conjeturar es un mecanismo que permite identificar y plantear, partiendo de ciertas observaciones, conjeturas a través de ciertas afirmaciones; además que el proceso de argumentación “tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de

garantizar la validez de alguna afirmación hecha” (Álvarez *et al*, 2014); por esta razón se pretende que la situación propuesta propicie dicha actividad matemática en el aula.

## **1.2. OBJETIVOS**

### ***1.2.1. Objetivo general***

Describir procesos de conjeturación y argumentación de estudiantes de grado noveno del colegio SCALAS, en el desarrollo de una situación relacionada con las sucesiones.

### ***1.2.2. Objetivos específicos***

- Reportar algunos elementos teóricos necesarios para fundamentar el trabajo de grado, principalmente los procesos de conjeturación y argumentación.
- Diseñar una guía relacionada con las sucesiones en la que se utilicen recursos tecnológicos, que involucre algunas nociones del cálculo, como sucesión, límite, convergencia, entre otras.
- Aplicar la guía propuesta a los estudiantes de noveno del colegio SCALAS y organizar la información obtenida, para determinar algunos procesos de conjeturación y argumentación.

## 2. MARCO DE REFERENCIA

### 2.1. Marco Didáctico

#### 2.1.1. Actividad Matemática

Como docentes de matemáticas estamos en el deber de transformar la educación matemática vista como la acumulación de hechos y procedimientos; según Santaló (1994), debemos enfocarnos en la construcción de herramientas que permitan generar recursos, estrategias y conocimientos necesarios para que los estudiantes desarrollen habilidades para explorar, conjeturar y razonar lógicamente; en definitiva hacer y desarrollar actividad matemática en el aula de clase.

Existen diferentes posturas acerca de la actividad matemática, Luque, Mora y Torres (2006), afirman que esta se relaciona con la “ejercitación de procesos de creación, discusión, proposición de algoritmos, manejo de teorías, formulación de conjeturas, formulación y demostración de teoremas. Expresión y comunicación de ideas matemáticas”. Algunas de las características de esta afirmación se pueden verificar al proponer la tarea al estudiante de observar la secuencia presentada en la Figura 1, solicitarle inicialmente que dibuje la siguiente figura y cuestionarlo acerca del número de cuadrados en cada una de ellas de acuerdo con la posición dada. Se pretende que el estudiante llegue a la expresión general de dicha relación.

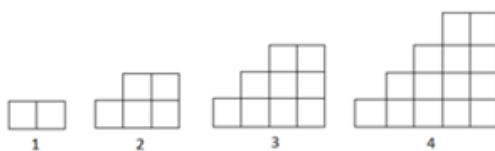


Figura 1. Ejemplo de tarea actividad matemática

El estudiante se encuentra ante una tarea en la cual “ejercita procesos de creación” en el momento en que busca estrategias para encontrar la expresión general, debido a que no se da la forma de cómo debe llegar a esta; al indagar en el problema, se observa una regularidad en el número de cuadrados de cada figura, por esta razón el estudiante puede crear una manera de relacionar tal cantidad con la forma de la figura resultante o con el

número de cuadrados por fila; puede realizar tablas para registrar los datos, contar, identificar la cantidad de cuadrados que aumenta de una figura a otra, etc.

En cuanto a la “discusión”, el problema planteado permite discutir acerca de la solución del mismo en el momento en que se expresan las ideas y otra persona puede mencionar algo que contradiga o afirme los planteamientos del estudiante, de tal suerte que la tarea permite realizar “formulación de conjeturas”, las cuales surgen de la exploración y la forma como la persona abordó el problema. Una conjetura que se puede mencionar es que en cada posición se añade una fila de cuadrados que tiene uno más que la fila anterior y el proceso siguiente conduce a la forma de “comunicar las ideas”, se puede realizar verbalmente, escribir de manera retórica la conjetura, simbólicamente o mostrar una tabla.

El problema también permite realizar una justificación, no necesariamente se llegaría a una demostración formal, pero sí a una muestra de cómo el estudiante logra determinar la solución al problema. Por otro lado, Santaló (1994), precisa que la actividad matemática debe desarrollar procesos matemáticos como “la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento y la capacidad de establecer conexiones”, de tal forma que los estudiantes puedan adquirir habilidades en la exploración, la conjeturación, el razonamiento lógico, la expresión de ideas, la búsqueda de generalizaciones, el uso de información cuantitativa espacial, entre otras.

En la tarea mencionada anteriormente se evidencian algunas de estas características, las cuales se relacionan con la postura de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional- MEN, 1998), en la que se precisa que la actividad matemática debe promover otros procesos como la modelación y la ejercitación de procedimientos. Se debe tener en cuenta que en la tarea que se le propone a los estudiantes, como parte del presente trabajo, se pueden poner en juego gran parte de los procesos y habilidades mencionadas como parte de la actividad matemática.

Es necesario mencionar que el papel del docente es de gran importancia pero más aún, el papel del estudiante, debido a que se considera que el aprendizaje de las

Matemáticas es un “proceso constructivo y dinámico, en el cual el sujeto de aprendizaje es el responsable directo” (Luque, Mora y Torres, 2006), al asumir la construcción de su propio conocimiento a partir del trabajo activo en procesos de exploración, análisis, síntesis, generalización y formulación de los contenidos matemáticos.

### ***2.1.2. Conjeturación***

Diversos autores hacen referencia a la teoría de la argumentación como parte de la actividad matemática de los estudiantes, en particular, se precisa que esta “se concreta en procesos tales como los de conjeturar y argumentar” (Álvarez, Ángel, Carranza, & Soler, 2014, p. 2), los cuales también pueden contribuir al desarrollo de los procesos mencionados anteriormente (resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998, p. 35)). Por tal motivo, es importante aludir a algunas posturas que permiten hacer una mirada de las definiciones asociadas a la teoría de la argumentación. Vale la pena resaltar que con frecuencia, se tiende a caracterizar términos como conjeturación, explicación, justificación y argumentación, sin hacer explícitas sus diferencias o sin mostrar claramente sus relaciones, esto causa que no se logre identificar realmente cuál es el proceso que realiza el estudiante al solucionar alguna tarea y la mirada que debe hacer el docente de acuerdo con sus objetivos de enseñanza.

En primer lugar se aborda el término “conjeturación” observando las siguientes posturas:

- Camargo (2010) precisa que tal concepto, hace referencia a la formulación de hipótesis, suposiciones o a dar afirmaciones como parte de un trabajo empírico, que puede ser una exploración. Se puede ver visibilizar en el estudiante cuando se proponen ejemplos o se realiza coherentemente una frase de la forma “sí-entonces” (la cual debe tener relación con el enunciado de la situación planteada y concordancia).

- Boero et al. (como se citó en Camargo, 2010) precisa que la conjeturación no es un proceso sencillo, por ello el docente debe hacer parte del mismo. Se suele considerar que el paso de la exploración a la formulación de la conjetura es inmediato, pero la realidad es que el planteamiento lingüístico de la misma, exige rigurosidad y precisión, lo cual no se logra tan fácilmente (Camargo, 2010).
- “Se constituye en el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones acerca de las propiedades de determinados objetos o las relaciones que se dan entre estos, a partir de ciertas observaciones, exploraciones, ensayos o experimentos sobre dichos objetos, que permiten identificar información para plantear conjeturas a través de tales afirmaciones” (Álvarez et al., 2014, p. 2)
- Es “una observación hecha por una persona quien no tiene dudas acerca de su verdad. La observación de la persona deja de ser una conjetura y se convierte en un hecho según su visión una vez que la persona obtiene certeza de su verdad”. (Harel y Sowder, como se citó en Álvarez et al., 2014, p. 2 )
- “La condicionalidad del enunciado puede ser producto de una exploración de la situación problema durante la cual la identificación de una regularidad especial conduce a un corte temporal del proceso de exploración, que será seguido por un distanciamiento de esa exploración y luego una “cristalización” desde un punto de vista lógico (‘si... entonces...’)” (Boero, Garuti, y Lemut, 1999, p. 248)

Para sintetizar tales posturas, se presenta la siguiente tabla en la cual se distinguen los aspectos que se tendrán en cuenta a la hora de hablar de un proceso de conjeturación:

*Tabla 1. Resumen consideraciones acerca de la conjeturación*

<b>¿Qué es?</b>	<b>Surge a partir de</b>	<b>Se debe tener en cuenta</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proceso</li> <li>- Formulación de hipótesis</li> <li>- Formulación de afirmaciones</li> <li>- Hacer suposiciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Trabajo empírico</li> <li>- Observaciones</li> <li>- Exploraciones</li> <li>- Ensayos o experimentos</li> <li>- Identificación de regularidades</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Precisión</li> <li>- Rigurosidad</li> <li>- Uso de “sí...entonces”</li> </ul>

Es necesario tener en cuenta que en el presente trabajo no se considera la conjeturación en los aspectos de precisión y rigurosidad en el lenguaje usado por los estudiantes, debido a que no se ha llevado un proceso con ellos que permita llegar a la formulación rigurosa de sus conjeturas.

Vale la pena mencionar que el desarrollo de actividades en las que se pone en juego procesos de conjeturación, se promueve el razonamiento inductivo, de acuerdo con Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, y Yevdokimov (2008, p. 433) “vislumbrar más allá de lo que se percibe, ver alguna regularidad y plantear conjeturas es el ‘corazón’ de la inducción”; en este trabajo se plantea una actividad con la cual se pretende que los estudiantes formulen conjeturas que posiblemente surjan de manera inductiva, se debe tener en cuenta que este tipo de razonamiento “corresponde al paso de casos particulares a leyes generales” (Neubert y Binko, como se citó en Álvarez et al., 2014, p. 9).

### 2.1.3. *Proceso de conjeturación*

En este trabajo se pretende realizar una descripción de los procesos de conjeturación de los estudiantes, presentes en el desarrollo de una actividad, por ello, se debe precisar cuáles son los posibles pasos que componen tal proceso y que permiten dar un orden a los procedimientos realizados por los estudiantes. A continuación, se presenta una tabla basada en Cañadas et al. (2008) en la cual se mencionan 3 de los 5 tipos de conjeturas sugeridos, junto con los respectivos pasos cada uno de estos.

*Tabla 2. Pasos de los diferentes tipos de conjetura basada en Cañadas et al. (2008)*

		<b>CONJETURA TIPO 1:</b> <b>Inducción empírica a partir de número finito de casos discretos</b>	<b>CONJETURA TIPO 3:</b> <b>Analogía</b>	<b>CONJETURA TIPO 4:</b> <b>Abducción</b>
<b>PROCESO DE CONJETU</b>	Observación de casos	Observación de dos casos	Observación de caso	
	Organización de casos	Búsqueda de semejanzas entre los casos	Observación de cierta característica significativa del caso	

Búsqueda y predicción de patrones	---	---
Formulación de la conjetura	Formulación de una conjetura basada en la semejanza	Formulación de una conjetura en que la característica se aplica a otros casos
Validez de la conjetura	Validez de la conjetura	Validez de la conjetura
Generalización de la conjetura	Generalización de la conjetura	Generalización de la conjetura
Justificación de la generalización	Justificación de la generalización	Justificación de la generalización

En la tabla anterior se presentan 3 tipos de conjeturas (ver Tabla 2), de acuerdo con Cañadas et al. (2008), la primera de ellas, denominada “Inducción empírica a partir de número finito de casos discretos” surge de la observación de casos particulares en los cuales se puede encontrar un patrón o regularidad; este tipo de conjetura puede hacer visible con la actividad de aplicación que se plantea, debido a que se implica el trabajo con propiedades numéricas. La conjetura tipo 3, denominada “analogía” se puede hacer visible en el momento en que los estudiantes realicen conjeturas a partir de casos ya conocidos en los cuales se cumple una regla o regularidad. Por último, se hace referencia a las conjeturas tipo “abducción”, determinadas a partir de un solo caso o ejemplo, con el que se llega a una afirmación general.

Si bien, se describen de manera general tales tipos de conjeturas, el principal propósito es dar una mirada a los pasos o fases en los que se lleva a cabo la conjeturación, de esta forma se puede identificar el proceso que realizan los estudiantes al desarrollar la guía propuesta. En la “Tabla 2” se encuentran algunas similitudes en los tipos de conjeturas, las diferencias se presentan en los pasos 2 y 3 (ver Tabla 2, en las filas 3 y 4) en los que se pretende organizar, buscar semejanzas u observar características

significativas de los casos, así mismo, en la conjetura de inducción se añade una fase en la cual se realiza la “búsqueda y predicción de patrones”. Como se mencionó anteriormente, al desarrollar la guía que se propone en este trabajo se involucra en gran medida el razonamiento inductivo, por ello, es posible que el tipo de conjetura que más se presente sea de tipo 1.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, se determina que los pasos que se espera observar en las conjeturas de los estudiantes son: observar y organizar casos, buscar regularidades o patrones, formular, verificar, generalizar y validar. A continuación se presenta una tabla en la cual se realiza una caracterización de tales fases de acuerdo con Álvarez et al. (2014) y Cañadas et al. (2008).

*Tabla 3. Características de las fases de la conjeturación*

FASE	CARACTERÍSTICAS
<b>Observar y organizar casos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se da una mirada a casos particulares</li> <li>- Se estudian los datos iniciales</li> <li>- Se sistematizan datos, por ejemplo se realizan tablas o listas</li> </ul>
<b>Buscar regularidades, relaciones, patrones o propiedades</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se observan otros casos</li> <li>- Observación de situaciones constantes o que se repiten</li> <li>- Se identifican aspectos o cualidades relevantes que son comunes</li> <li>- Se realizan predicciones sobre los casos desconocidos</li> </ul>
<b>Formular</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realizar afirmaciones o declaraciones</li> <li>- Se basa en hechos empíricos</li> <li>- Comunicar o registrar las relaciones encontradas ya sea verbal, simbólica o gráficamente</li> <li>- No es necesario usar lenguaje matemático riguroso</li> <li>- Se puede utilizar simbología propia del lenguaje matemático para escribir de manera abreviada las observaciones</li> </ul>

<b>Verificar</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se pretende convencerse y convencer a otros de la afirmación realizada</li> <li>- Se busca probar si la conjetura es válida en algunos nuevos casos o por el contrario que se muestre que la conjetura es falsa</li> <li>- Puede conducir a la reformulación de la conjetura y se debe volver al paso inicial</li> </ul>
<b>Generalizar</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se considera que la conjetura se cumple para todos los casos se convierte en una regla generalmente aceptada</li> <li>- No se requiere de un proceso formal pero se puede presentar algún tipo de prueba matemática (como justificación que garantiza la verdad de la conjetura)</li> <li>- No es suficiente la verificación de casos</li> <li>- Se busca convencer con argumentos fuertes la conjetura que ahora es general</li> </ul>
<b>Validar</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tiene que ver con la argumentación, se pretende validar la conjetura generalizada a partir de los antecedentes y del contexto en el que se esté trabajando</li> </ul>

Vale la pena destacar que los pasos de la conjeturación expuestos en la tabla anterior (ver Tabla 3) no necesariamente se deben encontrar todos en cada conjetura, ni tienen que presentarse en el orden mencionado. Finalmente, se puede decir que la fase de validar, como se concibe en este trabajo, tiene que ver con la argumentación, en el siguiente apartado se hace alusión a tal constructo teórico.

#### ***2.1.4. Argumentación***

Como se mencionó anteriormente, en las fases de la conjeturación aparece el proceso de argumentar debido a que en cada paso se debe validar una conclusión o afirmación realizada, de acuerdo con los antecedentes y el contexto en el que se esté trabajando, por tal motivo, es necesario ahondar en los elementos teóricos que se deben tener en cuenta para aludir a la argumentación y cuál es el proceso que se puede llevar a cabo durante su realización. Pedemonte (2007, p. 4) considera que “la investigación actual

en la educación matemática no ofrece mucho conocimiento sobre estos asuntos”, por ello, sugiere una caracterización de argumentación en Matemáticas de dos formas, funcional y estructural, la primera tiene que ver con establecer la definición de la argumentación, “su utilidad, su papel dentro de un discurso” (p. 4) y la segunda se relaciona con un modelo que permita organizar el proceso de argumentación.

Siguiendo tal forma de caracterizar la argumentación, se presenta una tabla en la cual se exponen diferentes definiciones y consideraciones propuestas por algunos autores (ver Tabla 4).

*Tabla 4 Definiciones argumentación y otras consideraciones*

AUTOR(ES)	DEFINICIÓN	CARACTERÍSTICAS
<b>Álvarez et al. (2014)</b>	El proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones. Argumentar, es decir, el proceso de generar argumentos, tiene un carácter social y cobra sentido cuando hay la necesidad de garantizar la validez de alguna afirmación hecha. En este sentido, el valor de verdad de una afirmación depende del contexto en el que se esté desarrollando la actividad matemática. (p. 82)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presente en la actividad matemática</li> <li>- Carácter social</li> <li>- Garantizar la validez de alguna afirmación</li> <li>- Depende del contexto</li> </ul>
<b>Balacheff (2000)</b>	Tal término significa mostrar la validez de alguna posición como parte de cierta actividad relativa al contexto social, por tal motivo, la argumentación puede ser abierta y dar lugar a dudas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presentar validez</li> <li>- Tiene en cuenta el contexto social</li> </ul>
<b>Boero, Douek y Ferrari (como se citó en Goizueta 2011)</b>	La argumentación es el “acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión” (p. 10), o también, quiere decir realizar un discurso que esté conectado de forma coherente y lógica, no necesariamente debe ser deductivo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formar inducciones</li> <li>- Sacar conclusiones</li> <li>- Discurso coherente</li> </ul>
<b>Camargo (2010)</b>	Argumentar es “dar razones fundadas para apoyar las plausibilidad de una conjetura o progresar en la resolución de un problema” (p. 39), es posible utilizar un discurso que contenga enunciados teóricos, pero en tal caso se hace referencia a un tipo de argumentación particular “argumentación deductiva” (Douek, como se citó en Camargo, 2010, p. 39)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dar razones fundadas</li> <li>- Uso de discursos coherentes</li> </ul>

<b>Duval (1999)</b>	La argumentación debe hacer uso de un lenguaje natural y es el medio para convencer a alguien.	- Busca convencer a alguien
<b>Rodríguez (2004)</b>	La argumentación es un proceso secuencial que permite inferir conclusiones a partir de ciertas premisas.	- Proceso secuencial
<b>Pedemonte (2007)</b>	La argumentación de tipo funcional tiene que ver con los siguientes elementos: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Justificación racional</li> <li>- Se usa para convencer</li> <li>- Se dirigen a un público universal (la comunidad matemática, el aula, el docente y a sí mismo)</li> <li>- Pertenece a un campo específico (álgebra, cálculo, geometría, etc.)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justificación racional</li> <li>- Busca convencer</li> <li>- Para un público universal</li> <li>- Se desarrolla en un campo específico</li> </ul>

De acuerdo con las posturas expuestas en la tabla anterior (ver Tabla 4) se considera que la argumentación es un proceso que se puede encontrar en la actividad matemática, con la cual se pretende convencer a una comunidad acerca de una afirmación realizada, que se trata de justificar de manera racional o de garantizar su validez, se puede hacer visible mediante un discurso coherente que no necesariamente es teórico. La argumentación depende del contexto en el cual se esté realizando la actividad matemática.

### **2.1.5. Modelo de Toulmin**

Es necesario aludir a la argumentación de tipo estructural, la cual se puede organizar de acuerdo con el modelo propuesto por Toulmin (1958), quien considera que las argumentaciones cotidianas no siguen el clásico modelo riguroso de silogismo<sup>1</sup>, por esta razón se propone un esquema que permite analizar cualquier tipo de argumentación.

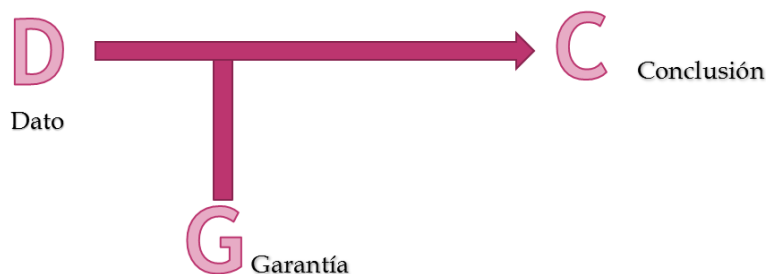
En primer lugar, se debe considerar que un argumento está conformado por una *afirmación* simbolizada como C, que es la conclusión, la cual se determina a partir de unos *datos* (D). Por lo general se pueden formular de manera breve, concisa y precisa -*si*

---

<sup>1</sup> El silogismo es una forma de razonamiento que permite llegar a una conclusión, a partir de proposiciones.

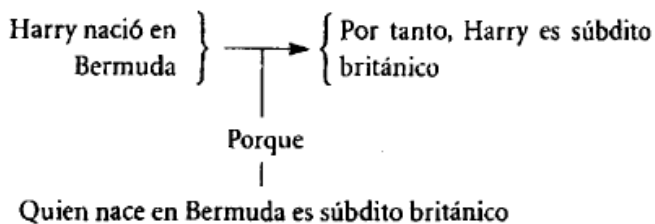
*D*, entonces *C*-, además, Toulmin (2007) define la *garantía* (G) como la proposición que le da validez a la conclusión o afirmación; la garantía es la que permite el paso de los datos a las conclusiones.

Por tanto ya se tiene el primer esbozo de esquema para analizar argumentos (Ver *Figura 2*).



*Figura 2 Esquema simple del modelo de Toulmin*

Dando un ejemplo:



*Figura 3 Ejemplo esquema de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007)*

Teniendo como punto de partida el esquema presentado anteriormente (Ver *Figura 2*), se construye paso a paso el esquema de argumento que propone finalmente Toulmin; por un lado se encuentra que hay diferentes tipos de garantía, que confieren diferentes grados de fuerza a las conclusiones que justifican. Algunas garantías permiten pasar de los datos a la conclusión con total certeza, otras en cambio, lo hacen provisionalmente, con algunas excepciones o restricciones, por eso se ve en la necesidad de incluir calificativos o un *modalizador* (M) que matice la afirmación teniendo en cuenta las condiciones de

excepción o refutación (E) (Toulmin, 2007), estos nuevos componentes generan un nuevo esquema del modelo de Toulmin (Ver Figura 4).

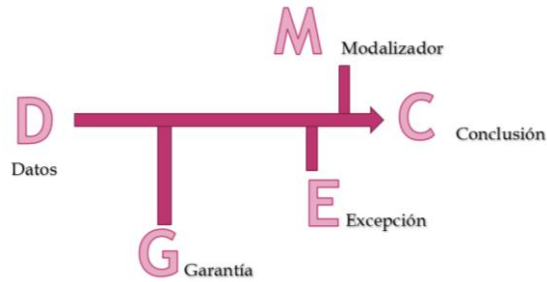


Figura 4 Esquema modelo de Toulmin

Por ejemplo,

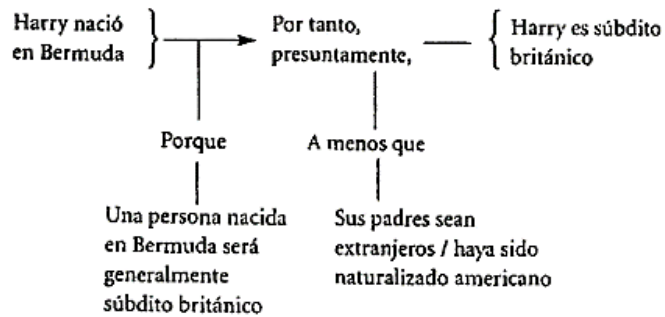


Figura 5 Ejemplo esquema de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007)

Ahora bien, en algunas ocasiones la garantía por sí sola carece de autoridad y vigencia, por eso es necesario otras certezas que respalden la garantía, los *respaldos* (R) serán necesario en algunos casos para que la garantía adquiera la fuerza para poder validar la conclusión, así se completa el esquema de Toulmin que se puede representar de la siguiente manera:

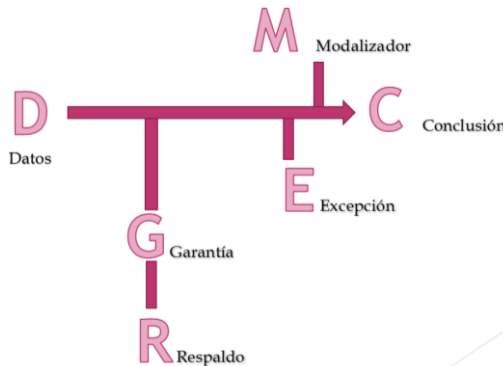


Figura 6 Esquema completo del modelo de argumentación de Toulmin

Siguiendo el ejemplo se tiene,

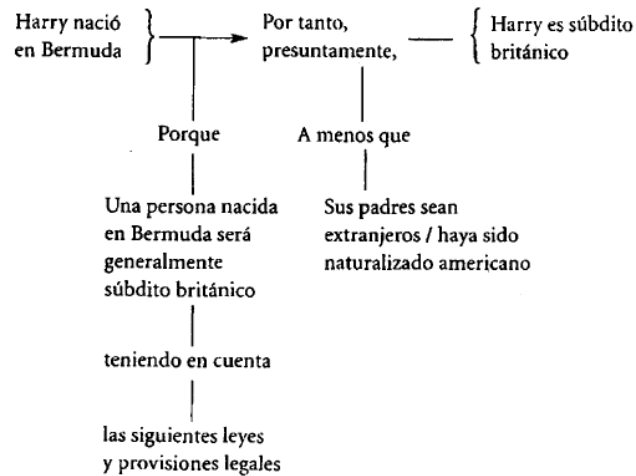


Figura 7 Ejemplo Esquema completo de Toulmin (Tomado de Usos de la Argumentación, Toulmin, 2007)

Por otro lado, se caracterizan cada uno de los componentes del modelo de Toulmin, para así identificar posteriormente cuáles están involucrados en los posibles argumentos que den los estudiantes (Ver Tabla 5).

Tabla 5. Resumen características de los componentes del modelo de Toulmin

COMPONENTE	CARACTERÍSTICAS
<b>Dato (D)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Hechos o premisas</li> <li>✓ Descriptivos</li> <li>✓ Claros</li> <li>✓ No se pueden refutar</li> </ul>
<b>Garantía (G)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Enunciado hipotético</li> <li>✓ Explicativo, de carácter general</li> </ul>
<b>Respaldo (R)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Certeza sin la cual la garantía carece de autoridad</li> <li>✓ Categórico basado en leyes o teorías fundamentadas</li> </ul>



serie y límite. A continuación se presentan algunas definiciones o nociones de estos conceptos.

### 2.2.1. Sucesión

Según Spivak (1992) una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, la cual se designa con la letra  $a$ , y los valores particulares de la sucesión se denotan como  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y la misma sucesión suele designarse mediante el símbolo  $a_n$ .

### 2.2.2. Serie

Según Apóstol (1984), partiendo de una sucesión de números reales, se puede formar una nueva sucesión sumando los términos sucesivamente. Es decir si la sucesión está dada por los términos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  entonces la nueva sucesión (*sucesión de las sumas parciales*) será:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= a_1 \\
 s_2 &= a_1 + a_2 \\
 s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
 &\dots \\
 s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.
 \end{aligned}$$

Ahora, a la sucesión  $\{s_n\}$  de sumas parciales se le denomina *serie infinita* o *serie* y su notación es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

### 2.2.3. Límite

Una definición “provisional” de límite que propone Spivak es que “la función  $f$  tiende hacia el límite  $l$  cerca de  $a$ , si se puede hacer que  $f(x)$  esté tan cerca como se

quiera de  $l$  haciendo que  $x$  esté suficiente cerca de  $a$ , pero siendo distinto de  $a$ .” (Spivak, 1992, p.107).

#### 2.2.4. *Convergencia de una sucesión*

Una sucesión  $a_n$  converge hacia  $l$  (en símbolos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ) si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que, para todos los números naturales  $n$ , si  $n > N$ , entonces  $a_n - l < \varepsilon$ . En algunas ocasiones se dice que la sucesión tiende a  $l$  o que el límite es  $l$ . Además la sucesión diverge si no converge (Spivak, 1992, p. 615).

Estas definiciones no se abordarán explícitamente dentro de la actividad propuesta, sin embargo se pretende hacer un acercamiento intuitivo a estas ideas propias del cálculo, para ello se tendrán en cuenta algunas características principales (*ver*

*Tabla 6*).

*Tabla 6. Características de las nociones del cálculo a tener en cuenta*

CONCEPTO	IDEAS DEL CÁLCULO A TENER EN CUENTA
<b>Sucesión</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Correspondencia entre los números naturales y algunos valores de los números reales.</li> <li>• No se tendrá en cuenta la notación usual de las sucesiones <math>a_n</math>.</li> <li>• Infinito</li> </ul>
<b>Serie</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucesión de sumas parciales<sup>2</sup> entre cada una de los términos.</li> <li>• No se usa notación para designar la serie.</li> <li>• Procesos infinitos.</li> </ul>
<b>Límite y convergencia</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Infinito.</li> <li>• Procesos infinitos.</li> <li>• Cercanía (&lt;infinitamente pequeño&gt;).</li> <li>• Aproximación.</li> <li>• Límites al infinito (entendido como el comportamiento que se obtiene de estudiar casos muy grandes &lt;infinitamente grande&gt;).</li> </ul>

<sup>2</sup> En la guía se denominarán “sumas acumulativas”.

### 3. METODOLOGÍA

A continuación, se realiza una descripción general de los procedimientos metodológicos que se llevaron a cabo en el desarrollo del presente trabajo de grado (posteriormente, se precisan con más detalle algunos de ellos), el cual es de tipo cualitativo, debido a que se describen las respuestas de los estudiantes a partir del desarrollo de una guía (ver Anexo 1). Vale la pena recordar, que el trabajo se basa en fundamentos de la teoría de la argumentación y algunas nociones del cálculo, las cuales se mencionaron en el MARCO DE REFERENCIA, en particular se pretende identificar los procesos de conjeturación y argumentación que se ponen en juego al desarrollar dicha guía y las nociones del cálculo que se involucren. Este trabajo fue desarrollado en tres etapas fundamentalmente, a saber:

- ✓ Se realizó una búsqueda de trabajos y publicaciones relacionados con la teoría de la argumentación, en particular, documentos que hicieran referencia a la actividad matemática, procesos de conjeturación y argumentación, así mismo, se indagó acerca de algunas nociones del cálculo que podrían estar involucradas en el desarrollo de una guía que se propone para los estudiantes, dentro de ellas, se encuentra una noción de sucesión, límite, convergencia, serie, procesos infinitos, etc. Tal información teórica permite sustentar, fundamentar el trabajo y contrastar algunos de estos elementos con los resultados obtenidos al aplicar la guía propuesta en este trabajo.
- ✓ En la segunda etapa, se realizó el proceso de elaboración y aplicación de una guía (con preguntas abiertas), con la cual se pretende describir los procesos de conjeturación y argumentación de algunos estudiantes de noveno del colegio SCALAS.

La guía, que incluyó preguntas enfocadas a promover el desarrollo del proceso de conjeturación y argumentación fue aplicada a 24 estudiantes, se describe la estructura y los propósitos de la misma en uno de los apartados del trabajo (*Ver PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APLICACIÓN*); dicha guía se organiza en 5 fases, en cada una de ellas se realizan diferentes preguntas enfocadas a ciertas relaciones numéricas o geométricas que se podrían observar durante el

desarrollo de la misma. Se describe el proceso de construcción de tal elemento de recolección de datos, debido a que este fue modificado a partir de la ejecución de pruebas piloto con algunos estudiantes de otros grados (octavo) y tras la revisión de un applet<sup>3</sup> (ver “ANEXO 2”) requerido para el desarrollo de la guía, el cual se denomina “árbol pitagórico”.

- ✓ En la tercera etapa de la ejecución del trabajo, se realizó la descripción los resultados obtenidos, se precisa la forma como se realizó la aplicación de la guía, la manera de estructurar la descripción de la información recolectada y su contraste con los elementos teóricos tratados en el marco de referencia. Se pretende determinar los procesos de conjeturación y argumentación y las nociones del cálculo involucradas en algunos segmentos de evidencia<sup>4</sup>. La información recolectada (transcripciones de audio e imágenes de la guía resuelta organizadas en segmentos o momentos de evidencia), se organiza en tablas, de igual forma se crean algunas matrices para estructurar la descripción de los resultados encontrados, es necesario tener en cuenta los parámetros establecidos que se mencionan posteriormente, para realizar la lectura de tales tablas, de manera adecuada.

A partir de la información organizada en las matrices de descripción, se realizan conclusiones particulares, de cada fase de la guía.

---

<sup>3</sup> Se hace referencia a “applet” a la construcción geométrica diseñada y asociada a la guía de aplicación.

<sup>4</sup> Se denominan segmentos de evidencia a las transcripciones e imágenes escogidas para sustentar la producción de los estudiantes y contrastar esa información, con la teoría expuesta en el marco de referencia.

## 4. PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APLICACIÓN

### 4.1. Proceso de construcción de la guía

Para construir la guía presentada (ver “ANEXO 1: GUÍA DE APLICACIÓN”) se realizaron los siguientes pasos:

#### *a. Selección de posibles ítems a incluir en la guía y diseño de applet:*

Inicialmente, se buscó una situación relacionada con las sucesiones en la que se involucraran diferentes relaciones numéricas, regularidades y algunas nociones matemáticas como límite, convergencia, serie, incluso, variación y cambio; al mismo tiempo esta debía posibilitar procesos de conjeturación y argumentación; en ese sentido, se decidió abordar una situación geométrica que se pudiera presentar por medio de una construcción en GeoGebra, en la que se involucraran algunos conceptos matemáticos que los estudiantes de noveno del colegio SCALAS ya hubieran estudiado, por el ejemplo el teorema de Pitágoras, tales conocimientos previos les permitiría realizar sus argumentos con garantías o respaldos mejor sustentados. Así, se escogió una situación denominada “árbol pitagórico” (en el siguiente apartado se describe detalladamente la situación) en la cual se acogen todas estas apreciaciones. Se diseñó el applet en GeoGebra con el cual los estudiantes resolverían la guía propuesta.

En cuanto a los posibles ítems para incluir en la guía, se realizó un estudio de las propiedades matemáticas del árbol pitagórico para tener una idea de las relaciones que se pretendía que los estudiantes encontraran y de allí se diseñaron diferentes preguntas, sin embargo, se encontró que la guía era demasiado extensa debido a que muchas de las cuestiones tenían que ver con registro y observación de datos, por lo tanto se decidió incluir una tabla, que sería una herramienta importante, para los estudiantes, de recolección de datos y observación de regularidades.

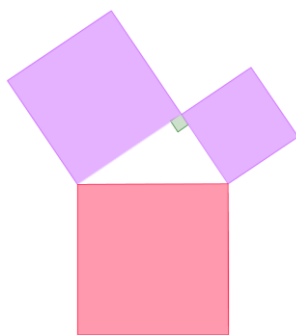
***b. Implementación de dos pruebas piloto:***

Se realizaron dos pruebas piloto, la primera fue aplicada a 15 estudiantes de sexto del colegio SCALAS, posterior a ello, se identificaron errores de forma en cuanto a la redacción de las preguntas, estaban desorganizadas, es decir, en unas se hacía referencia a algunos elementos y en las siguientes se mezclaban asuntos de otros aspectos del applet, por lo tanto la guía casi no permitía la identificación de regularidades numéricas; además, en el applet habían muchos botones que desviaban la atención de las propiedades que se pretendía que identificaran. De esta forma, se generó una reestructuración de la guía, se añadieron otras preguntas y se corrigió la construcción presentada en GeoGebra. La segunda prueba se realizó con los estudiantes de octavo del mismo colegio, se contó con un tiempo de 1 hora y 30 minutos.

De ambas pruebas piloto surgieron defectos de forma (comprensión de los enunciados), el tiempo era insuficiente, las preguntas no conducían a la determinación de argumentos, debido a que no se solicitaban justificaciones o razones por las cuales se identificaba una regularidad o propiedad, por tal motivo, se corrigieron algunas preguntas en las que se pedía la forma como los estudiantes habían llegado a su respuesta, con cuestiones como ¿Por qué concluyes esto? ¿Cómo hiciste para llegar a eso? ¿Qué te permite realizar esta afirmación?, entre otras. También se identificó que la tabla propuesta en la guía era muy extensa, los estudiantes gastaban mucho tiempo para completarla y en el momento de responder las preguntas no utilizaban la información registrada allí, sino que solo usaban el applet, lo cual no les permitía vislumbrar las relaciones pretendidas. Después de la segunda prueba piloto se cambia la estructura de la guía, en la que se distinguen 5 fases principales (las cuales se describen en el siguiente apartado); se decide dejar la tabla como se propuso inicialmente, pero se hizo precisión de las indicaciones que los estudiantes debían seguir para completarla de acuerdo con la fase, es decir, los datos en la tabla se iban registrando al inicio de cada fase dependiendo de la información en la que se debían centrar los estudiantes para identificar las propiedades numéricas.

### *c. Descripción de la guía*

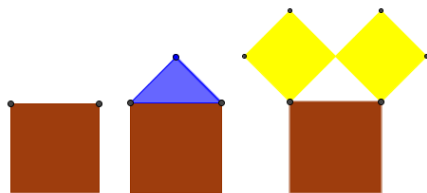
La guía que se propone está relacionada con nociones del cálculo tales como sucesión, serie, límite, convergencia, entre otras, en el conjunto de los números reales; estas serán abordadas desde el estudio de generalidades geométricas y aritméticas del fractal conocido como “*Árbol Pitagórico*”, el cual fue construido por el profesor de Matemáticas Albert E. Bosman (1891 - 1961), en Holanda en 1942. Para la creación de este árbol, se tiene presente el conocido Teorema de Pitágoras, el cual enuncia que para todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, la forma tradicional de representar este teorema se muestra en la Figura 9.



*Figura 9 Teorema de Pitágoras*

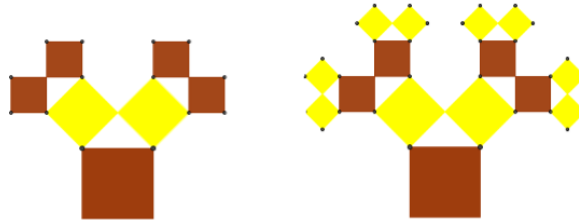
Una forma equivalente de construir geoméricamente el Teorema de Pitágoras es: Dado un cuadrado, se construye un triángulo rectángulo (para la guía se construirán triángulos rectángulos isósceles (ver

ANEXO 2)) sobre uno de los lados de dicho cuadrilátero y se dibujan los cuadrados correspondientes a los otros dos lados del triángulo, como se observa a continuación,



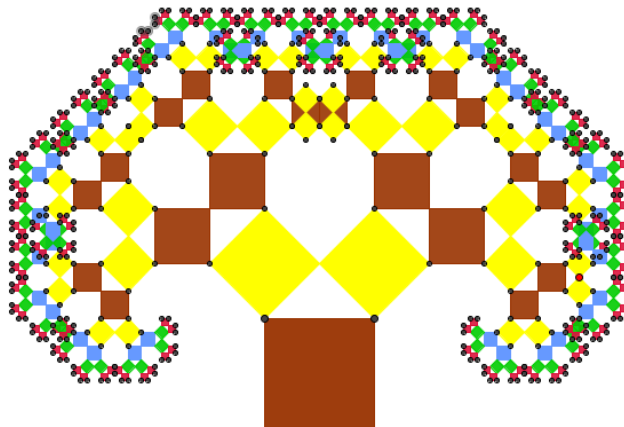
*Figura 10. Construcción árbol pitagórico*

Luego se repite el mismo procedimiento con estos nuevos cuadrados, como se muestra en la Figura 11.



*Figura 11 Construcción árbol pitagórico 2*

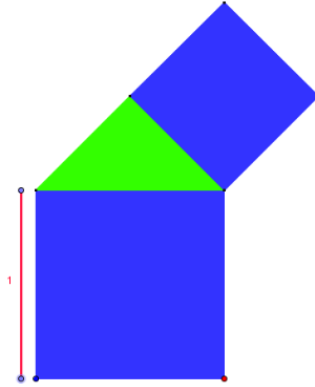
Y así sucesivamente una cantidad indefinida de veces, obteniendo así un árbol pitagórico como que se muestra en la Figura 12:



*Figura 12 Árbol pitagórico*

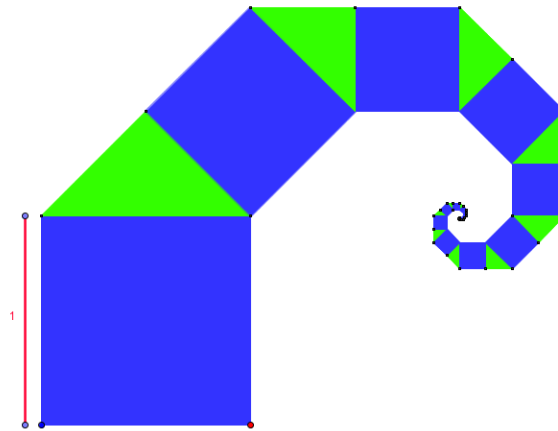
Para el desarrollo de la guía propuesta se diseña un applet, en el que solo se tendrá en cuenta una de las ramas que se forma en el árbol pitagórico, para ello se tienen en cuenta las siguientes apreciaciones:

Inicialmente se construye un cuadrado, cuyo lado mide una unidad, luego sobre él se traza el triángulo rectángulo isósceles. Después se dibuja un cuadrado en uno de los lados del triángulo (en este caso se opta por el lado derecho del triángulo).



*Figura 13 Construcción rama pitagórica*

Luego se repite este procedimiento una cantidad indefinida de pasos hasta obtener la rama completa del árbol pitagórico (Ver Figura 14).

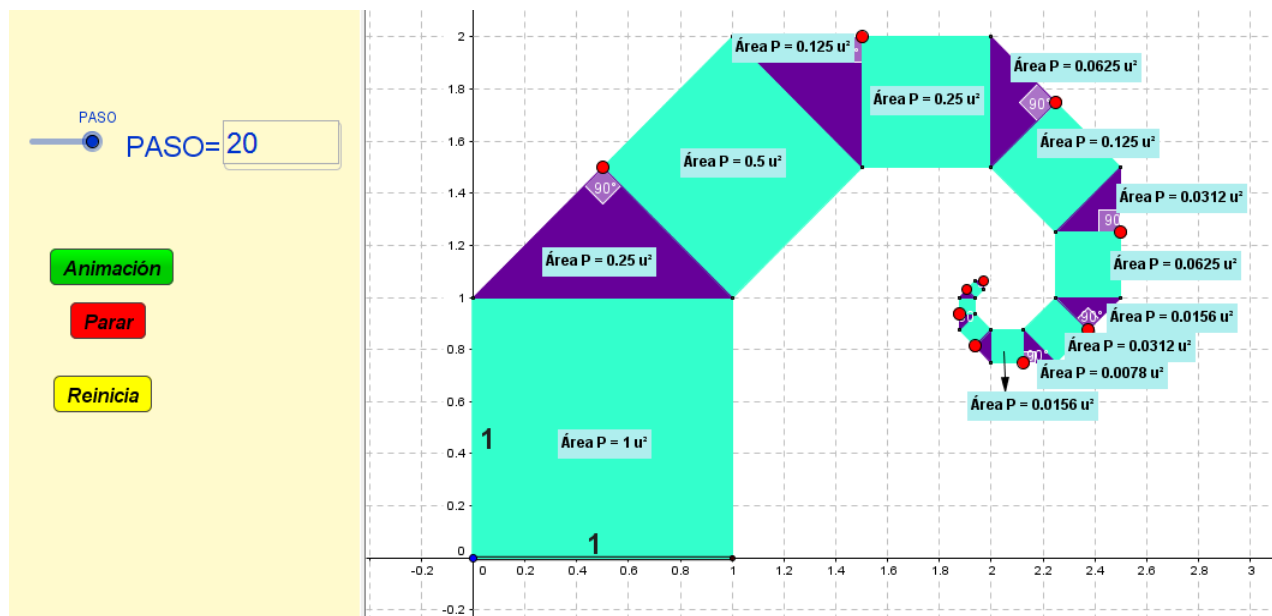


*Figura 14 Rama del árbol pitagórico*

Para el estudio de la rama pitagórica, se realiza un applet con el software GeoGebra (ver

ANEXO 2), el cual incluye únicamente las áreas de los primeros cuadrados y triángulos (específicamente las áreas de los cuadrados hasta el séptimo y de los triángulos hasta el sexto), se realiza esto de manera intencional de acuerdo con los propósitos de la guía, debido a que se pretende que los estudiantes realicen cálculos y obtengan algunas generalizaciones. En la construcción geométrica se dejan marcados los ángulos rectos de los triángulos, para que los estudiantes evidencien fácilmente que estos son rectángulos; además se crean comandos como “Animación” que muestra la construcción paso a paso,

el comando “Parar” que detiene la animación de la figura y por último el comando “Reinicia” el cual deja el plano en blanco, es decir, se deja de mostrar la rama pitagórica. En el applet se presenta un deslizador, que indica “el paso” de cada figura a medida que van apareciendo en la construcción, así, en el paso 20 se muestra una vista como la que se presenta en la *Figura 15*.



*Figura 15 Applet proporcionado a los estudiantes*

Para la aplicación de la actividad, se les proporcionará el applet y además una guía con preguntas orientadoras con el fin de que los estudiantes puedan estudiar la rama pitagórica con un orden o una secuencia especial; Esta guía se divide en cinco momentos o fases (*Exploración, Relación número figura-paso, área de figuras consecutivas, Suma acumulativa de áreas de figuras y Comportamiento puntos rojos*).


**Fase 1. Exploración:**

En esta fase se pretende que los estudiantes observen y describan cuáles son los comandos del applet, el funcionamiento de cada uno de ellos y se familiaricen con el software y con la actividad en general. Algunas preguntas que se desarrollan en la guía se muestran en la *Figura 16*.

**1. Exploración**

a. Observa y describe para qué sirve cada botón de la construcción en GeoGebra.

RESPUESTA:

b. Mueve el deslizador "PASO"  ¿qué función tiene este botón en la construcción geométrica?

RESPUESTA:

c. ¿Qué figuras geométricas van apareciendo en la construcción? ¿Cuáles son las características de cada una?

RESPUESTA:

d. ¿Hay similitud en las figuras del mismo color? ¿Cuáles?

RESPUESTA:

e. ¿Hay diferencias en las figuras del mismo color? ¿Cuáles?

RESPUESTA:

*Figura 16 Fase: Exploración*

Antes de iniciar con las demás fases, al estudiante se le indica cuál de las columnas de la tabla deberá registrar para que la fase se pueda realizar con éxito. El objetivo de dicha tabla es que el estudiante observe y organice los datos que le servirán como base para poder buscar, formular, verificar y validar conjeturas y plantear algunos argumentos frente a las mismas.

TABLA DE DATOS									
Cuadrado NUMERO	Paso	Área del cuadrado	Suma acumulativa de las áreas de los cuadrados	Triángulo NUMERO	Paso	Área del triángulo	Suma acumulativa de las áreas de los triángulos	Sumas Acumulativas entre el cuadrado y el triángulo	Cociente entre el área del cuadrado con el área del triángulo
1.	1	1	1	1.	2	0.25	0.25	$1 + 0.25 = 1.25$	$1 / 0.25 = 4$
2.	3			2.	4	0.125	$0.25 + 0.125 = 0.375$		
3.				3.					
4.				4.					
5.				5.					
6.				6.					
7.				7.					

*Figura 17 Tabla: Registro de información*

**Fase 2. Relación número figura-paso:**

Esta parte se realiza con el fin de que el estudiante logre evidenciar y conjeturar las relaciones entre el número de la figura y el número del paso de cada una de las figuras (cuadrados y triángulos). Los literales a, b y c de esta fase tienen el objetivo de observar que los cuadrados siempre estarán en un paso impar, es decir de la forma  $2n - 1$ , donde  $n$  es el número del cuadrado (Ver Figura 18).

Cuadrado  $n \rightarrow$  paso número  $2n - 1$

<p><b>a.</b> ¿En qué “PASO” se encuentra el <b>cuadrado</b> número 5?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><b>RESPUESTA:</b></p> </div>	
<p><b>b.</b> Si en la construcción geométrica en GeoGebra estuviera el cuadrado número 11, ¿en qué “PASO” estaría? ¿Por qué?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><b>RESPUESTA:</b></p> </div>	<b>CUADRADOS</b>
<p><b>c.</b> ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier <b>cuadrado</b> y su respectivo “PASO”? ¿Por qué?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p><b>RESPUESTA:</b></p> </div>	

Figura 18 Preguntas Fase 2: Cuadrados

Análogamente con los triángulos, se quiere encontrar la relación entre el número y el paso de los triángulos, en otras palabras, se pretende que los estudiantes encuentren que:

Triángulo número  $n \rightarrow$  Paso  $2n$

Por último, en el literal *g* de la fase 2 se pretende que con lo que hayan concluido hasta el momento referente a las relaciones del número de la figura y su respectivo paso, puedan resolver un caso en particular cuyo paso o número ha de ser grande.

<p><b>g.</b> De acuerdo con tus respuestas en los ítems <b>c</b> y <b>f</b> anteriores, escribe el número del paso en el que se encontraría el cuadrado <b>número 21</b> y cuál sería el número del triángulo en el <b>paso 42</b>:</p>			
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>CUADRADO</b></p> <p>NÚMERO: 21      PASO: _____</p> <p><b>Justificación:</b></p> </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>TRIÁNGULO</b></p> <p>NÚMERO: _____ PASO: 42</p> <p><b>Justificación:</b></p> </td> </tr> </table>	<p style="text-align: center;"><b>CUADRADO</b></p> <p>NÚMERO: 21      PASO: _____</p> <p><b>Justificación:</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>TRIÁNGULO</b></p> <p>NÚMERO: _____ PASO: 42</p> <p><b>Justificación:</b></p>	<b>GENERALIDADES</b>
<p style="text-align: center;"><b>CUADRADO</b></p> <p>NÚMERO: 21      PASO: _____</p> <p><b>Justificación:</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>TRIÁNGULO</b></p> <p>NÚMERO: _____ PASO: 42</p> <p><b>Justificación:</b></p>		

Figura 19 Preguntas fase 2: Cuadrados y triángulos

### ***Fase 3. Áreas de figuras consecutivas***

#### ***3.1. Cuadrados***

En esta fase, los estudiantes observarán las relaciones que existen entre los cuadrados de número consecutivo, por ejemplo, el cuadrado número 1 con el número 2, el número 2 con el 3, el 3 con el 4, ..., el cuadrado  $n$  con el cuadrado  $n + 1$ .

##### **3.1. Cuadrados**

- a. Si no te dieran el valor del área del **cuadrado número 1** ¿podrías hallarla de acuerdo con la construcción dada en la actividad de GeoGebra? ¿Cómo?

**RESPUESTA:**

- b. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 1 con el área del cuadrado número 2?

**RESPUESTA:**

- c. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 2 con el área del cuadrado número 3? Y ¿La relación entre el área de los cuadrados 3 y 4?

**RESPUESTA:**

- d. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del **cuadrado número 8**? ¿Por qué?

**RESPUESTA:**

*Figura 20 Preguntas fase 3: Relación entre cuadrados*

El objetivo es que los estudiantes a partir de una serie de preguntas (*Ver Figura 20*), encuentren que el área del cuadrado  $n + 1$  es la mitad del área del cuadrado  $n$ .

#### ***3.2. Triángulos***

Análogamente a las relaciones encontradas anteriormente entre los cuadrados, en esta sección se busca encontrar la relación existente entre un triángulo con su consecutivo, es decir, el triángulo número 1 con el número 2, el número 2 con el 3, el 3 con el 4, ..., el triángulo  $n$  con el triángulo  $n + 1$ .

Además se pretende que los estudiantes encuentren que el área del triángulo  $n + 1$  es la mitad del área del área del triángulo  $n$ . Algunas de las preguntas planteadas para este fin se presentan en la *Figura 21*.

### 3.2. Triángulos

- a. Si no te dieran el valor del área del **triángulo número 1 (Paso 2)** ¿podrías hallarla de acuerdo con la construcción dada en la actividad de GeoGebra? ¿Cómo?

RESPUESTA:

- a. ¿Cómo se puede relacionar el área del **triángulo número 1** con el área del **triángulo número 2**?

RESPUESTA:

- b. ¿Cómo se puede relacionar el área del **triángulo número 2** con el área del **triángulo número 3**? Y ¿La relación entre el área de los triángulos **3** y **4**?

RESPUESTA:

- c. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del **triángulo número 7**? ¿Por qué?

RESPUESTA:

*Figura 21 Algunas preguntas orientadoras*

### 3.3. Cuadrados y triángulos

El objetivo de esta fase es que los estudiantes descubran que el área del triángulo 1 es un cuarto el área del cuadrado 1, que el área del triángulo número 2 es 0,125 que corresponde al área del cuadrado número 2 dividido entre cuatro y así sucesivamente hasta encontrar que en general, el área del triángulo  $n$  es un cuarto del área del cuadrado  $n$ . Análogamente, que el área del triángulo 2 es un medio el área del cuadrado 3, y que en general el área del triángulo  $n - 1$  es un medio del área del cuadrado  $n$ . Algunas de las preguntas que se plantean para cumplir este objetivo se muestran en la *Figura 22*.

- a. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 1** con el área del triángulo **número 1**? ¿Qué te permite realizar esa afirmación?

RESPUESTA:

- b. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 4** con el área del triángulo **número 4**? ¿Cómo obtienes esa información?

RESPUESTA:

- c. ¿Qué relación tienen las áreas de los cuadrados y los triángulos que tienen el mismo número, por ejemplo ***n***? ¿Cómo llegas a tu respuesta? **¿Por qué se cumple esa relación?**

RESPUESTA:

Figura 22 Preguntas fase 3: Relación entre las áreas de cuadrados y triángulos

#### Fase 4. *Suma acumulativa de áreas de figuras:*

En esta parte se quiere que los estudiantes evidencien que la suma acumulativa de cuadrados converge a 2, que la suma acumulativa de triángulos converge a 0,5, por tanto la suma, de las sumas acumulativas converge a 2,5 (Convergencia del área de la figura completa, Ver Figura 23).

#### Fase 5. *Comportamiento puntos rojos:*

El propósito de esta fase es que los estudiantes observen y determinen que los puntos tienen una forma de espiral y que a medida de que el área de las figuras tiende a cero, estos puntos tienden a la coordenada (2,1) (Ver Figura 23).

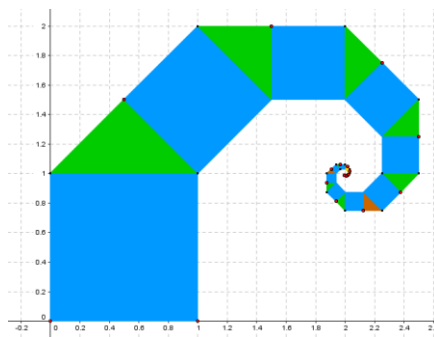


Figura 23 Rama pitagórica

Durante el desarrollo de la actividad se considera que algunas de las garantías o respaldos que los estudiantes podrían manifestar de manera explícita o implícita son:

- Los datos proporcionados por el applet.
- Los valores registrados en la tabla.
- Teorema de Pitágoras.
- Formula de área de un cuadrado.
- Formula de área de un triángulo.
- Propiedades de los triángulos isósceles.
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

## **5. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS**

En este apartado, se realiza una descripción de los resultados obtenidos al realizar la aplicación de la guía propuesta a la población seleccionada (estudiantes de noveno del colegio SCALAS), para ello, se cuenta con dos fuentes de información, la guía solucionada por los estudiantes y algunos registros de audio o fotos, que se obtuvieron durante este proceso.

A continuación, se presentan algunas consideraciones acerca de la forma como se realizó la aplicación de la guía y los parámetros que se tuvieron en cuenta para organizar la información y posteriormente estructurarla en la descripción, con el ánimo de contrastarla con la teoría expuesta en el marco de referencia, del presente trabajo de grado.

### **5.1. Algunas consideraciones acerca de la aplicación de la guía**

La guía se realiza en 3 sesiones de clase de 35 minutos cada una, se solicitó a los 24 estudiantes del curso noveno del colegio SCALAS, trabajar en parejas, debido a que de esta forma se podrían presentar diálogos y entre juntos encontrar aportes que contribuyeran en la solución de la guía.

Cada pareja de estudiantes contó con un computador en el cual se encontraba el applet del “Árbol pitagórico”, dispuesto para la solución de la guía, la docente, respondía algunas dudas de los estudiantes y en algunas ocasiones los orientaba para que pudieran obtener mejor sus respuestas, dichos diálogos fueron registrados en audio y en uno de los grupos, se tomó registro de la pantalla<sup>5</sup> con las actividades que hicieron en el computador (con ayuda del software Camtasia), junto con la grabación de voz.

Así, se recolectaron en total 12 guías y aproximadamente 15 grabaciones de voz cortas, con diálogos referidos a diferentes partes de la guía.

---

<sup>5</sup> No se realizó registro de la pantalla ni grabación de voz a todas las parejas debido a que en el colegio no se permitió la instalación del software Camtasia y no se podía acceder a la grabación de voz. Estos datos fueron registrados con el computador de la docente y algunos de sus elementos.

## 5.2. Algunas consideraciones acerca de la descripción de los resultados

Para describir los resultados obtenidos se debe tener en cuenta que se escogieron 7 guías de los estudiantes, debido a que se presentaron relaciones entre algunas de estas, otras estaban incompletas y no se tuvieron en cuenta aquellas en las que no se encontraban procesos de conjeturación o argumentación.

Los insumos de evidencia fueron las guías y las transcripciones de algunas de las grabaciones de voz registradas, dichas evidencias se organizan y estructuran de acuerdo con las 5 fases de la guía, se debe recordar que estas son:

- Fase 1: Exploración.
- Fase 2: Relación número figura-paso.
- Fase 3: Áreas de figuras consecutivas (cuadrados, triángulos, cuadrado-triángulo).
- Fase 4: Suma acumulativa de áreas de figuras.
- Fase 5: Comportamiento puntos rojos.

Se realizan tablas para cada fase en las cuales se presenta la información necesaria, clasificada por segmentos o momentos correspondientes a diferentes grupos, los cuales sirven evidenciar procesos de argumentación o conjeturación, tales insumos se encuentran en el ANEXO 3. Vale la pena aclarar que en todas las fases, no se ubican las respuestas de los 7 grupos seleccionados, el interés es destacar solo algunos procesos encontrados.

En cuanto a la descripción de los resultados obtenidos se debe tener en cuenta que:

- Se organizan por secciones de acuerdo con las 5 fases de la guía y al final de cada una de ellas, se presentan unas conclusiones generales de los resultados de la fase, se tienen en cuenta los propósitos mencionados en la descripción de la guía.
- En la fase 1 se utiliza una tabla o matriz de descripción la cual consta de una descripción general, el número del segmento que corresponde a la organización de la información recolectada (*ver ANEXO 3*), en la fase 1, y

algunas generalidades que se obtienen del segmento correspondiente. Tal matriz de análisis se presenta a continuación:

<b>Fase 1</b>	
<b>Descripción general</b>	
<b>Segmento</b>	<b>Generalidades</b>
1.	
2.	

*Figura 24 Matriz Fase 1*

- En las otras 4 fases se utiliza una matriz diferente, en la cual se precisa, el número de la fase, una descripción general del momento que se está describiendo, se referencia el número de la tabla en la cual se encuentra, el número del segmento o momento que corresponde a la organización de la información presentada en las tablas del anexo 3 de acuerdo con cada fase. Se incluyen 3 asuntos de interés del trabajo de grado, primero, el proceso de conjeturación, en este caso se mencionan los pasos encontrados en el segmento de evidencia que se describe (observación y organización de casos, búsqueda de regularidades, formular, verificar, generalizar y validar); segundo, se presenta el proceso de argumentación en el cual se describen los elementos encontrados, de acuerdo con el modelo de Toulmin: finalmente, se precisan algunas nociones del cálculo involucradas en el segmento de evidencia.

<b><u>NÚMERO DE LA FASE</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver Tabla 23, segmento 1- FASE 2)		<b>(ESPACIO PARA LA DESCRIPCIÓN GENERAL)</b>
<b>MOMENTO O SEGMENTO  1</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<i>Proceso de <u>Conjeturación</u></i>	
		<i>Argumentación</i>	
		<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	

Figura 25 Matriz Fases 2, 3, 4 y 5

- Se debe tener en cuenta que en la descripción de cada asunto de interés del trabajo de grado, en algunos casos, se ubican se frases textuales que ilustren la teoría encontrada o se hace referencia a imágenes particulares en las que se encuentra la evidencia exacta de cierto elemento teórico mencionado, estas se denominan “Evidencia imagen...<sup>6</sup>” y se encuentran en las tablas en las que se organizaron los datos obtenidos (Ver Tabla ANEXO 3) de acuerdo con la fase descrita.
- En algunos casos, se describen varios segmentos en una misma matriz, esto se debe a que se encuentran relaciones en las respuestas y por ello, no se considera necesario realizar una tabla para cada uno. Se toman evidencias de alguno de los segmentos o de varios para presentar los asuntos de interés en la matriz.

---

<sup>6</sup> De acuerdo con el número de la evidencia imagen.

### 5.3. Descripción de resultados Fase 1 de la guía

A continuación se presenta la descripción de los resultados encontrados en la Fase 1 teniendo en cuenta los procesos de conjeturación y argumentación

Tabla 7. Descripción de resultados fase 1 de la guía

<b>Fase 1</b>	
<b>Descripción general</b>	Los estudiantes realizan una observación y exploración al applet que se les proporciona, posteriormente responden las preguntas planteadas ( <i>Ver Tabla 25</i> ).
<b>Segmento</b>	<b>Generalidades</b>
1.	<p>Se evidencia que todos los grupos reconocen la funcionalidad de los comandos y realizan una breve descripción de cada uno de ellos; algunos grupos relacionan la función del comando con el color del mismo (<i>Ver Segmento 1, fase 1</i>), algunos aspectos que se encontraron frente a los procesos de conjeturación y argumentación, y las nociones del cálculo que se observan en este segmento son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• No se logra evidenciar proceso de conjeturación.</li> <li>• No se observa proceso de argumentación.</li> <li>• No se encuentran nociones del cálculo.</li> </ul>
2.	<p>Los estudiantes identifican la función del deslizador “paso” sin embargo los grupos 2 y 3 agregan que la figura va teniendo forma de espiral, lo cual corresponde a uno de los objetivos de la guía (<i>Ver Segmento 2, fase 1</i>).</p> <p>Con respecto a los asuntos de interés del trabajo de grado se logra evidenciar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se presenta la fase 1 del proceso de conjeturación, debido a que los estudiantes visualizan, observan los datos que les presenta el applet y afirman que la figura siempre tiene forma de espiral.</li> <li>• No hay proceso de argumentación.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No hay nociones del cálculo involucradas.</li> </ul>
3.	<p>Los estudiantes identifican diferentes características de las figuras que componen la rama pitagórica, como las diferencias que hay entre las áreas, además uno de los grupos observa que los triángulos son rectángulos, también se observó que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sigue presente la fase 1 del proceso de conjeturación, debido a que los estudiantes observan y caracterizan algunas de las propiedades que cumple la rama pitagórica.</li> <li>• No hay proceso de argumentación.</li> <li>• Algunas características de límite están presentes, como la noción de infinito o de límite al infinito debido a que en algunas de las respuestas, los estudiantes manifiestan que a medida de que se va avanzando en la rama pitagórica “el número de la figura es más grande” las áreas son cada vez más y más pequeñas (<i>Ver Segmento 3, fase 1</i>).</li> </ul>
4.	<p>Los estudiantes en esta fase relacionan el color de la figura con la forma de la misma, encuentran que los cuadrados tienen el mismo color (azul), de igual forma todos los triángulos son morados y en algunas ocasiones identifican que estos son triángulos rectángulos (<i>Ver Segmento 4, fase 1</i>).</p> <p>Frente a los procesos de conjeturación y argumentación y las nociones de cálculo involucradas se evidencia que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La actividad aporta al desarrollo de la fase uno del proceso conjeturación (<i>observación y organización de los datos</i>), debido a que los estudiantes exploran el applet e identifican propiedades o características que mantienen las figuras de la rama pitagórica.</li> <li>• No se presenta proceso de argumentación.</li> <li>• No se desarrollan ideas o nociones ligadas al cálculo.</li> </ul>
5.	<p>En general los estudiantes observan algunas diferencias que hay el tamaño y el área de</p>

	<p>los cuadrados y los triángulos (<i>Ver Segmento 5, fase 1</i>). También se observó que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En esta parte de la guía se desarrolla las fases 1, 2 y 3 del proceso de conjeturación, debido a que los estudiantes observan y caracterizan algunas de las propiedades que cumplen las figuras que componen la rama pitagórica, además buscan e identifican algunas regularidades, formulando algunas conjeturas como: “cada vez que van apareciendo más figuras, se va disminuyendo las áreas” (<i>Ver evidencia imagen 16</i>).</li> <li>• No hay proceso de argumentación.</li> <li>• Algunas ideas del cálculo están presentes, como la idea de infinito o de límite al infinito en el momento en que determinan que a medida de que el número de la figura se hace cada más y más grande, su área se va haciendo más y más pequeña.</li> </ul>
--	--

### 5.3.1. Conclusiones resultados Fase 1

Partiendo de las generalidades encontradas en la fase 1 y que se describen en la tabla anterior, se identifican 4 aspectos importantes:

- Se cumplen los propósitos que se plantearon inicialmente, debido a que los estudiantes se familiarizaron con el applet, encontraron la funcionalidad de cada uno de los comandos y además identificaron algunas propiedades que se guardan entre las figuras de la rama pitagórica para así poder avanzar con la siguiente fase de la actividad.
- Respecto al proceso de conjeturación se evidencia que esta fase ayudó al desarrollo principalmente de las fases 1 y 2 de este proceso (*observación y organización y búsqueda de regularidades*).

- Frente al proceso de argumentación, esta fase no la desarrolló puesto que esto no estaba dentro de los propósitos de esta parte de la actividad.
- A pesar de que para esta fase no se tenía presupuestado que se desarrollara alguna noción del cálculo, se encontró que los estudiantes empezaron a identificar algunas de las características de la idea de límite al considerar comportamientos de las figuras cuando tienen un número muy grande.

#### 5.4. Descripción de resultados Fase 2 de la guía

Tabla 8. Descripción momento o segmento 1, fase 2

<b><u>FASE 2</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b>  (ver Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía Tabla 26, segmento 1-FASE 2)		Se presenta un diálogo entre los estudiantes y la profesora mientras que ellos responden unas preguntas de la guía. Se inicia la conversación al pedir razones por las cuales los estudiantes agregaron números en la tabla (ver Evidencia imagen 20) para responder una de las preguntas (2b). A partir de ello, la docente indaga sobre cómo se han obtenido algunas de las respuestas y consigue información para evidenciar los procesos de conjeturación y argumentación presentes.
MOMENTO O SEGMENTO          <b>1</b>	ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO	<i>Proceso de Conjeturación</i>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes realizan observación y organización de los datos relacionados con el número y el paso respectivo de los cuadrados al completar los valores en la tabla.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Cuando se incluyen unos valores no solicitados, se evidencia una regularidad, que es ir sumando 2 al número del paso anterior.</p> <p><b>Formular:</b> Se formula la siguiente conjetura:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Los cuadrados se encuentran en los pasos impares, es decir “el paso es dos veces el número y se le resta uno”</li> </ul> <p><b>Verificar:</b> Se verifica tal conjetura para un caso específico del cuadrado número 4, se pretende</p>

			<p>hallar el paso a partir de la relación encontrada.</p> <p><i>“mira si probamos por ejemplo para el cuadrado número 4[...], pues lo que hago es hacer 2 por 4 que da 8 y le resto 1 y ya nos da 7, y así se cumple con todos.”</i></p> <p><b>Generalizar:</b> Al mencionar las frases “...y así se cumple con todos”, “siempre es un número impar” además, se plantea una expresión general “<math>y=2x-1</math>” (ver Tabla 26, segmento 1, p. 125) para hallar el paso de cualquier cuadrado, se evidencia que los estudiantes generalizan.</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO  <b>1</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 1- Fase 2 ( Tabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div data-bbox="957 699 1696 1117" data-label="Diagram"> <pre> graph TD     D[D: Cuadrados y su respectivo número de paso en el applet de la guía hasta el cuadrado 10. Se registra en la tabla estos valores (columnas 1 y 2) de la guía] --&gt; G[G: Se verifica para diferentes casos que se cumple la regularidad, se contrastan los resultados con los datos dados en el applet y con la tabla y se incluyen otros valores en esta (ver Evidencia imagen 1). Se menciona que se sigue una secuencia que son los números impares y por ello se cumple la regularidad.]     G --&gt; C[C: Los cuadrados se encuentran en los pasos impares, es decir “el paso es dos veces el número y se le resta uno” Con la expresión “y=2x-1” se puede hallar el paso del cuadrado siendo x el número del cuadrado.]   </pre> </div> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 1</i></p>

<b>MOMENTO O SEGMENTO  1</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS</b>	<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se puede evidenciar que los estudiantes involucran la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales (paso) y la posición de los cuadrados, los cuales se relacionan mediante una expresión de los números impares.</li> <li>• Se encuentra la idea de infinito, al considerar que para todos los números naturales hay una relación con uno impar, se debe recordar que esto surge, a partir de una situación (applet de la guía) que se presenta para casos particulares.</li> </ul>
--	-------------------------------	---	--

Tabla 9. Descripción momento o segmento 2, fase 2

<b><u>FASE 2</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL  (ver Tabla 9, segmento 2, 3, 5 y 6- FASE 2)</b>	Se presenta un diálogo entre los estudiantes y la profesora, mientras que ellos responden algunas preguntas de la guía. Se inicia la conversación al pedir las razones por las cuales los estudiantes escribieron esa respuesta a la pregunta 2c de la guía (ver segmento 2, fase 2). Se realiza una conjetura correspondiente a una expresión general para hallar el número del paso de cada cuadrado de acuerdo con su número, los estudiantes mencionan la forma de hallarla e intentan convencer a la profesora de su validez.
<b>MOMENTO O SEGMENTO  2, 3,</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS  DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>
		<p><b>Formular:</b> Se formula la siguiente conjetura:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Para hallar el número del paso de cualquier cuadrado con <math>x</math> es el número del cuadrado y <math>y</math> corresponde al paso, se usa la expresión <math>y = 2x - 1</math> (ver Evidencia imagen 23)</li> </ul> <p><b>Verificar:</b> Se verifica tal conjetura para varios casos (ver Evidencia imagen 24)</p> <p>“Pues por ejemplo, con los cuadrados que aparecen en GeoGebra, como para el cuadrado número 2 el paso es 3 porque se hace lo mismo multiplicar 2 por 2 y restarle 1 o sea 3 y así mismo se hace con</p>

**5, 6**

otros y sí funciona la ecuación.”

**Generalizar:** Se realiza una generalización con la expresión encontrada “ $y = 2x - 1$ ” y los estudiantes precisan que esto se cumple para todos los casos.

**Validar:** Los estudiantes validan debido a que mencionan cómo obtuvieron la expresión. Precisan que esta corresponde a los números impares de manera general. Esto se puede evidenciar al considerar que:

“y es igual al paso que necesitamos encontrar para hallar el paso del cuadrado, por 2, equis,....., digo x es el número del cuadrado, por 2 porque el número de figuras que van formando la figura completa son dos cuadrado y triángulo, y el -1 porque para formar cada figura que está conformada por 2 toca restarle el triángulo que sería la segunda figura para que quede un cuadrado y así se sabe el número de su paso.”

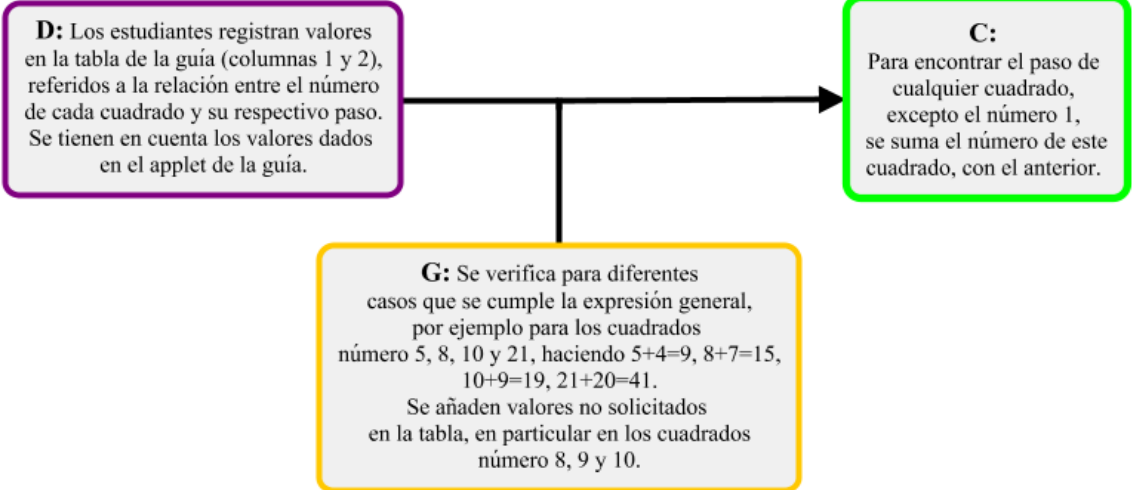
<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p>2, 3, 5, 6</p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmento 2, 3 5 y 6- Fase 2 (verTabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div data-bbox="982 435 1671 803" data-label="Diagram"> <pre> graph TD     D[D: Se busca alguna relación entre los cuadrados y su respectivo paso se tienen los valores presentados en el applet de la guía.] --&gt; C[C: Con la expresión "y=2x-1" se puede hallar el paso del cuadrado siendo x el número del cuadrado y y el paso.]     G[G: Se verifica para diferentes casos que se cumple la expresión general.] --&gt; R[R: Los estudiantes saben que esa es la forma general de escribir los números impares.]     R --&gt; G   </pre> </div> <p><i>Proceso de argumentación 2</i></p>
---	--	--	--

<b>MOMENTO</b> <b>O</b> <b>SEGMENTO</b>  <b>2, 3,</b>  <b>5, 6</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS</b>	<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se involucra la noción de sucesión debido a la correspondencia entre el conjunto de los números naturales y un subconjunto del mismo (números pares).</li> </ul>
--	---------------------------	---	--

Los segmentos de evidencia 3, 5 y 6 (ver Tabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía) están relacionados con el proceso de conjeturación y argumentación que se presenta en la tabla anterior para el momento 2 (ver Tabla 9), por tal motivo, no se explicitan tales elementos teóricos en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 10. Descripción momento o segmento 3, fase 2

<b><u>FASE 2</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver Tabla 9, segmentos 4 y 7- FASE 2)		Se presenta un registro de las respuestas escritas en la guía (de las preguntas 2a a 2c, 2g y tabla en las columnas 1 y 2) de un grupo de estudiantes, concernientes al número de los cuadrados y la relación con el paso que aparece en el applet de la guía, a partir de tales respuestas, se evidencia el proceso de conjeturación y argumentación.
MOMENTO O SEGMENTO  <b>4</b>  <b>y</b>  <b>7</b>	ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>	<p><b>Observación y organización de casos:</b> Se evidencia este paso de la conjeturación en las respuestas de los estudiantes, al realizar el registro de los valores en la tabla y precisar que por ejemplo, el cuadrado número 5 está en el paso 9.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> al añadir otros valores no solicitados en la tabla, por ejemplo el caso de los cuadrados número 8, 9 y 10 y registrar el paso correspondiente (Evidencia imagen 29), se observa que se encuentra una regularidad.</p> <p><b>Formular:</b> Se formulan la siguientes conjeturas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- “Todos los cuadrados están en pasos impares”</li> <li>- A la pregunta ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier <b>cuadrado</b> y su respectivo “PASO”? ¿Por qué? los estudiantes responden “Todos los números excepto el 1, se le suma el anterior...” (Evidencia imagen 27) Los estudiantes presentan algunos ejemplos para explicar que se refieren a la forma de encontrar el paso de cualquier cuadrado, excepto el número 1, sumando</li> </ul>

			<p>el número del cuadrado con el anterior.</p> <p><b>Verificar:</b> Se verifica tal conjetura para varios casos, en particular se halla el paso de los cuadrados 5, 8, 10 y 21 de la forma como se mencionó en la formulación anterior (<i>Ver Evidencia imagen 27 y Evidencia imagen 28</i>).</p> <p><b>Generalizar:</b> Al mencionar en las conjeturas, la palabra “todos” se observa una generalización de la regularidad encontrada en los datos registrados en la tabla de la guía (columnas 1 y 2).</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO  <b>4 y 7</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE  GRADO</p>	<p><i>Procesos de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmento 4 y 7- Fase 2 (Tabla 26), se puede evidenciar el siguiente esquema:</p>  <pre> graph LR     D["<b>D:</b> Los estudiantes registran valores en la tabla de la guía (columnas 1 y 2), referidos a la relación entre el número de cada cuadrado y su respectivo paso. Se tienen en cuenta los valores dados en el applet de la guía."]     G["<b>G:</b> Se verifica para diferentes casos que se cumple la expresión general, por ejemplo para los cuadrados número 5, 8, 10 y 21, haciendo 5+4=9, 8+7=15, 10+9=19, 21+20=41. Se añaden valores no solicitados en la tabla, en particular en los cuadrados número 8, 9 y 10."]     C["<b>C:</b> Para encontrar el paso de cualquier cuadrado, excepto el número 1, se suma el número de este cuadrado, con el anterior."]     D --- G     G --- C   </pre> <p><b>D:</b> Los estudiantes registran valores en la tabla de la guía (columnas 1 y 2), referidos a la relación entre el número de cada cuadrado y su respectivo paso. Se tienen en cuenta los valores dados en el applet de la guía.</p> <p><b>G:</b> Se verifica para diferentes casos que se cumple la expresión general, por ejemplo para los cuadrados número 5, 8, 10 y 21, haciendo <math>5+4=9</math>, <math>8+7=15</math>, <math>10+9=19</math>, <math>21+20=41</math>. Se añaden valores no solicitados en la tabla, en particular en los cuadrados número 8, 9 y 10.</p> <p><b>C:</b> Para encontrar el paso de cualquier cuadrado, excepto el número 1, se suma el número de este cuadrado, con el anterior.</p>

			<i>Proceso de argumentación 3</i>
<b>MOMENTO O SEGMENTO  4 y 7</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS</b>	<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	Este segmento involucra la noción de sucesión debido a que se establece una correspondencia entre los números naturales con los números pares en el caso de los triángulos, esta relación se encuentra al completar las columnas 1 y 2 de la tabla.

El segmento de evidencia 7 (ver Tabla 26) está relacionado con el proceso de conjeturación y argumentación que se presenta en la tabla anterior para el momento 2 (ver Tabla 10), por tal motivo, no se explicitan tales elementos teóricos en las respuestas de los estudiantes.



Tabla 11. Descripción momento o segmento 8, fase 2

<b><u>FASE 2</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b>  (ver Tabla 9, segmentos 8, 9 y 14-FASE 2)		Se presenta un registro de las respuestas escritas en la guía (de las preguntas 2d a 2f y 2g y tabla en las columnas 5 y 6 de la guía) de un grupo de estudiantes, concernientes al número de los triángulos y la relación con el paso que aparece en el applet de la guía. A partir de tales respuestas, se evidencia el proceso de conjeturación y argumentación.
<b>MOMENTO o SEGMENTO</b>  <b>8, 9</b>  <b>y</b>  <b>14</b>	<b>ASUNTOS DE INTERES DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>	<p><b>Observación y organización de casos:</b> En las respuestas de los estudiantes se muestran registros de valores en la tabla y en el establecimiento de correspondencias entre el PASO y la posición de los triángulos. Por ejemplo se encuentra que “el triángulo número 6 está en el paso 12”.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Al añadir otros valores no solicitados en la tabla, por ejemplo el caso de los triángulos número 8, 9 y 10 y registrar el paso correspondiente (Evidencia imagen 36) una regularidad es encontrada. También se identifica esto en la respuesta de los estudiantes, al mencionar que los pasos de los triángulos siguen la secuencia: 2, 4, 6, 8, 10, etc.</p> <p><b>Formular:</b> Se formula la siguiente conjetura:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- “Los triángulos aparecen en pasos pares” (Evidencia imagen 36)</li> </ul> <p><b>Verificar:</b> Se verifica tal conjetura para varios casos, en particular se halla el paso de los triángulos 1, 2, 3, 4, 5, entre otros.</p>

			<p><b>Generalizar:</b> Se establece una generalización al precisar que se puede hallar el paso de cualquier triángulo con la expresión <math>x = 2y</math> o en otros casos, los estudiantes determinan que “<i>el paso de <math>\Delta = 2n</math></i>” (Evidencia imagen 36).</p> <p><b>Validar:</b> Se válida la afirmación al mencionar que tal expresión (<math>x = 2y</math>) corresponde a la forma de escribir los números pares o el doble de un número.</p>
<p>MOMENTO o SEGMENTO</p> <p><b>8, 9</b></p> <p><b>y</b></p> <p><b>14</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 8, 9 y 14- Fase 2 (ver Tabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía), se puede evidenciar el siguiente esquema de argumentación:</p> <div data-bbox="840 747 1764 1250" data-label="Diagram"> <pre> graph TD     D["<b>D:</b> Se busca alguna relación entre los triángulos y su respectivo paso se tienen los valores presentados en el applet de la guía."] --&gt; C["<b>C:</b> Con la expresión "<math>x=2y</math>" se puede hallar el paso de cualquier triángulo siendo <math>x</math> el número del cuadrado y <math>y</math> el paso."]     G["<b>G:</b> Se verifica para diferentes casos que se cumple la expresión general. Se determinan secuencias que indican que los pasos corresponden a los números pares."] --&gt; C     R["<b>R:</b> Los estudiantes saben que esa es la forma general de escribir los números pares o el doble de un número."] --&gt; G   </pre> </div> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 4</i></p>

<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>8, 9 y 14</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS</p>	<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se involucra la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales (Número del triángulo) con los números pares (Paso del triángulo) y lo relacionan al completar las columnas 5 y 6 de la tabla en la guía propuesta.</li> <li>• Se encuentra la idea de infinito, al considerar que para todos los números naturales hay una relación con los números pares.</li> </ul>
---	---------------------------	--	---

Los segmentos de evidencia 9 y 14 (ver Tabla 26), están relacionados con los procesos de conjeturación y argumentación que se presentan en la tabla anterior para el momento 8 (ver Tabla 11), por tal motivo, no se explicitan tales elementos teóricos en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 12. Descripción momento o segmento 10, fase 2

<b><u>FASE 2</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver Tabla 9, segmentos 8, 9 y 14-FASE 2)		Se presenta un registro de las respuestas escritas en la guía (de las preguntas 2d a 2f y 2g y tabla en las columnas 5 y 6 de la guía) de un grupo de estudiantes, concernientes al número de los triángulos y la relación con el paso que aparece en el applet de la guía, a partir de tales respuestas, se evidencia el proceso de conjeturación y argumentación.
<b>MOMENTO O SEGMENTO 10, 11, 12 y 13</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>	<p><b>Observación y organización de casos:</b> Se evidencia este paso de la conjeturación en las respuestas de los estudiantes, al realizar el registro de los valores en la tabla (ver Evidencia imagen 41 y Evidencia imagen 48)</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> al añadir otros valores no solicitados en la tabla, por ejemplo el caso de los triángulos número 8, 9, 10, 11 y 12, y registrar el paso correspondiente (ver Evidencia imagen 41 y Evidencia imagen 48), se observa que se encuentra una regularidad.</p> <p><b>Formular:</b> Se formulan la siguientes conjeturas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- El triángulo número 12 “estaría en el [paso] 24 porque es el doble del número y los triángulos son pasos pares”</li> <li>- “El número del paso es el doble del número del triángulo” (ver Evidencia imagen 42 y Evidencia imagen 46)</li> </ul> <p><b>Verificar:</b> Se verifica tal conjetura para varios casos, en particular se halla el paso de los triángulos</p>

			<p>1, 5, 8 entre otros (ver Evidencia imagen 43 y Evidencia imagen 47).</p> <p><b>Generalizar:</b> Se afirma que “todos los números [de pasos de los triángulos] son pares” (ver Evidencia imagen 42 y Evidencia imagen 46)</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>10, 11, 12 y 13</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 10, 11, 12 y 13- Fase 2 (ver Tabla 26), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div data-bbox="709 711 1980 1177" data-label="Diagram"> <pre> graph LR     D["<b>D:</b> Valores de los pasos de los triángulos de acuerdo con el número que se presenta en el applet de la guía."] --&gt; C["<b>C:</b> El número del paso es el doble del número del triángulo."]     G["<b>G:</b> Los números son pares, se verifica para varios casos la correspondencia entre el número con su doble, para hallar el paso del triángulo correspondiente."]   </pre> </div> <p><i>Proceso de argumentación 5</i></p>

<p><b>MOMENTO</b></p> <p><b>O</b></p> <p><b>SEGMENTO</b></p> <p><b>10, 11, 12 y</b></p> <p><b>13</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS</b></p>	<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se evidencia que se involucra la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales y se relacionan al completar las columnas 5 y 6 de la tabla en la guía propuesta.</li> <li>• Se encuentra la idea de infinito, al considerar que para todos los números hay una relación con uno par.</li> </ul>
--	----------------------------------	--	--

Los segmentos de evidencia 11, 12 y 13 (ver Tabla 26) está relacionados con el proceso de conjeturación y argumentación que se presenta en la tabla anterior para el momento 2 (ver Tabla 12), por tal motivo, no se explicitan tales elementos teóricos en las respuestas de los estudiantes.

#### **5.4.1. Conclusiones resultados Fase 2**

A partir de las descripciones realizadas en las tablas anteriores, referidas a la fase 2 de la guía, se pueden considerar 4 elementos principales:

- Los estudiantes hacen uso de la guía y se realizan algunos diálogos para recolectar la información que permite evidenciar los contrastes teóricos que se encuentran en el desarrollo de la misma; el applet y el uso de GeoGebra, permite observar características de las figuras y la relación entre el paso de una figura con su número respectivo.
- Se identifica, en gran medida, un proceso de conjeturación en las respuestas de los estudiantes y las preguntas de la guía contribuyen al desarrollo de los diferentes pasos de tal proceso; por ejemplo, la tabla promueve la observación y registro de algunos casos particulares, en esta fase, referidos a la relación entre el paso de los cuadrados o los triángulos y su respectivo número en la figura completa. Se debe tener en cuenta, que en varias ocasiones, los estudiantes añadieron pasos no solicitados en los últimos renglones de la tabla, lo cual refleja la observación de regularidades y patrones. En cuanto a las formulaciones, se pudo evidenciar que las conjeturas surgen a partir de la exploración y el registro de datos, se realizan en un lenguaje poco riguroso, aunque en algunos casos se usan símbolos para indicar ciertos elementos en las preguntas de la guía, como el número de una figura y su expresión para hallar el número del paso correspondiente.

Las conjeturas planteadas por los estudiantes, tienen que ver con relaciones entre números naturales y se obtienen al realizar procesos inductivos, en los cuales se parte de casos particulares para llegar a una generalización. En la mayoría de las evidencias, se encuentra el paso de la verificación de las formulaciones realizadas, en ocasiones esto conduce a generalizaciones que no necesariamente se expresan en un lenguaje matemático.

Se encuentran pocas evidencias de la forma como los estudiantes validan las conjeturas o generalizaciones planteadas; la manera de convencer a otros de las

respuestas dadas, se basa principalmente en el registro realizado en las tablas o la observación de la construcción geométrica presentada en el applet de la guía. En algunos momentos, se encontró que los conocimientos de los estudiantes influyeron para validar sus conjeturas, por ejemplo, al mencionar cómo se escribe de manera general un número impar.

- De manera similar, se evidenciaron diferentes procesos de argumentación, en los cuales se privilegia la identificación de 4 de los elementos que corresponden al modelo de Toulmin, Datos, Conclusión, Garantía y Respaldo; en la fase 2, se encuentra que la mayoría de los argumentos realizados, se estructuran de acuerdo con el modelo básico de Toulmin, en el cual se ponen en juego solamente los primeros 3 elementos mencionados. En este caso, los datos utilizados son los valores registrados en la tabla o los que se encuentran en el applet de la guía, las conclusiones están relacionadas con el número del paso de una figura; es un número impar para los cuadrados y par en el caso de los triángulos, se presentan expresiones generales para hallar tales relaciones. Las garantías encontradas también son obtenidas de secuencias, observación de patrones y verificación de casos particulares con la información presentada en el applet, dichas garantías son de tipo hipotético, debido a que no tiene un sustento teórico aceptado por una comunidad. En uno de los segmentos, se consideró un respaldo para validar las conclusiones, en el cual se hace referencia a la forma general de escribir los números pares y los impares, tales respuestas dadas por los estudiantes, son de tipo categórico, por tal motivo, se tienen en cuenta como respaldos.
- Al desarrollar la fase 2 de la guía se involucran nociones del cálculo como sucesión, debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales con uno impar o par. Posiblemente se encuentre la noción de infinito, al considerar que se cumplen las relaciones mencionadas para todos los números naturales.

### 5.5. Descripción de resultados Fase 3 de la guía

Tabla 13 Descripción momento o segmento 1, fase 3.1

<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.1)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> <b>(ver segmento 1-FASE 3.1)</b></p>		<p>El estudiante desarrolla la parte 3.1 de la guía, pero él no sabe cómo determinar el área del cuadrado número 25, debido a que este valor no se encuentra ni en la tabla ni en el applet, situación que motiva la intervención de la docente mediante algunas preguntas para guiar al estudiante.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO 1</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b><i>Proceso de Conjeturación</i></b></p>	<p><b>Observación y organización:</b> El estudiante observa los datos que arroja el applet y los organiza en la tabla.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> El estudiante relaciona los datos registrados encontrando aspectos en común, situación que evidencia una búsqueda de regularidades, él encuentra que tanto visualmente (en el applet) y numéricamente (valores de la tabla), “las áreas cada vez van disminuyendo”. (Ver segmento 1, fase 3.1).</p> <p><b>Formular:</b> El estudiante formula la siguiente conjetura “<i>cada cuadrado se va volviendo más pequeño cada vez, o sea que se aproximaría a cero</i>” (Ver Evidencia imagen 523).</p> <p><b>Verificar:</b> Después realiza un ejemplo para el caso del cuadrado número 100, buscando probar si la conjetura es válida en casos nuevos.</p>

<b>MOMENTO o SEGMENTO  1</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 1- Fase 3.1 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD     D[D: Valores de las áreas de los cuadrados que se presentan en la tabla.] --- J(( ))     J --- C[C: Entre más grande sea el número del cuadrado, su área se va aproximando a cero.]     J --- G[G: (Conjeturas anteriores): "Las áreas cada vez van disminuyendo"; "el área de un cuadrado es la mitad del cuadrado anterior".]           </pre> </div> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 6</i></p>
		<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- En este segmento se evidencian algunas de las características de la noción de límite, debido a que se trabajan ideas como infinito, procesos infinitos (<i>Ver Evidencia imagen 53</i>).</li> <li>- Además de la noción de sucesión, al considerar una correspondencia entre los números naturales con un subconjunto de los números reales (valores correspondientes a las áreas de los cuadrados).</li> </ul>

Tabla 14 Descripción momento o segmento 2, fase 3.1

<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.1)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver segmento 2 y 3- FASE 3.1)</p>		<p>Se presentan las respuestas de dos grupos de estudiantes, los cuales concluyen que para encontrar el área de un cuadrado se debe dividir en dos el área del cuadrado anterior a él.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO</b> <b>2 y 3</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b><i>Proceso de Conjeturación</i></b></p>	<p><b>Observación y organización:</b> Se evidencia que los estudiantes organizan los datos que arroja el applet (área de los cuadrados) en la tabla y empiezan a relacionar que sucede con dichas áreas.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Los estudiantes mediante algunos cálculos que realizan, encuentran características en común entre los valores de las áreas de cada uno de los cuadrados consecutivos (<i>Ver Evidencia imagen 54</i>).</p> <p><b>Formular:</b> Los estudiantes llegan a la siguiente conjetura para encontrar el área de un cuadrado: “<i>Se va reduciendo a la mitad con cada número de cuadrado</i>” (<i>Ver Evidencia imagen 545</i>)</p> <p><b>Verificar:</b> Los estudiantes parten de la conjetura y la prueban que esta se cumple para los cuadrados 7, 8, 9, y 10, verificando que se siga cumpliendo para nuevos casos.</p>

<b>MOMENTO O SEGMENTO  2 y 3</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmento 2 y 3- Fase 3.1 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph LR     D[D: valores de las áreas de los cuadrados que se presentan en la tabla.] --&gt; C[C: El área de los cuadrados cada vez se va reduciendo y para encontrar el área de un cuadrado hay que dividir el área del cuadrado anterior a él entre dos.]     D --- G[G: Realizar las operaciones y observar que el resultado es el mismo que los valores que proporciona el applet.]           </pre> </div> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 7</i></p>
		<b><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></b>	<p>En este segmento se evidencia el desarrollo de dos nociones del cálculo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la de sucesión, debido a que hay una correspondencia entre los números naturales con un subconjunto de los números reales</li> <li>- La de límite, debido a que se trabaja la idea de infinito (cuando aumenta el número de la figura disminuye el área de la misma).</li> </ul>

Tabla 15 Descripción momento o segmento 1, fase 3.2

<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.2)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver segmento 1- FASE 3.2)</p>		<p>Se muestra un registro de las respuestas de los estudiantes a la parte 3.2 de la guía sobre la relación que hay entre el área de un cuadrado y el área del cuadrado siguiente, los estudiantes usan la calculadora para realizar algunas operaciones.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO 1</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b><i>Proceso de Conjeturación</i></b></p>	<p>Se evidencia que los estudiantes realizan las fases 1, 2, 3 y 5 del proceso de generalización como se describe a continuación:</p> <p><b>Observación y organización:</b> Inicialmente el estudiante observa los datos que le proporciona el applet y los organiza en la tabla que se encuentra dentro de la guía, además añade otros valores no suministrados en la tabla no en el applet.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> El estudiante busca algunas regularidades identificando algunos aspectos que tienen común los datos, haciéndolo para los cuatro primeros casos (cuadrado y triángulo número 1, 2, 3 y 4).</p> <p><b>Formular:</b> El estudiante formula la siguiente conjetura, que sirve para encontrar el área de un triángulo teniendo en cuenta el área del cuadrado anterior <i>“la medida del cateto por el mismo, dividido en dos y ahí nos da el área del triángulo”</i>.</p> <p><b>Validar:</b> El estudiante realiza una prueba para el caso 1 (cuadrado y el triángulo número 1) usando la fórmula para encontrar el área de un triángulo, mostrando así que su conjetura es válida (Ver Evidencia imagen 54).</p>

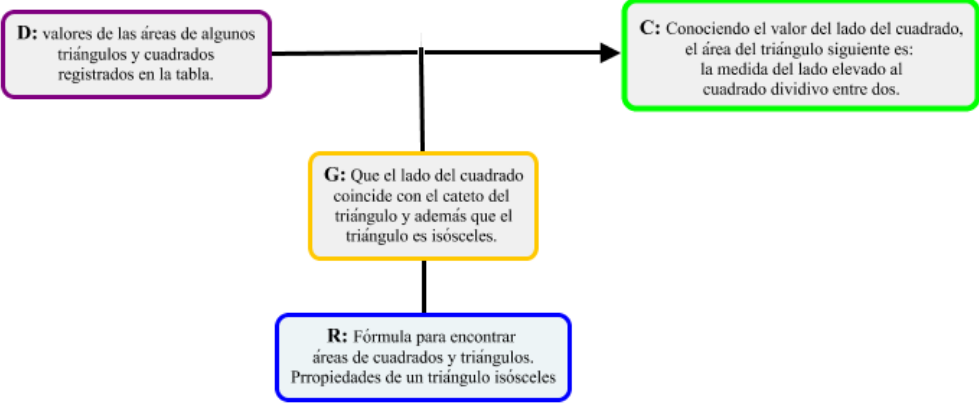
<p>MOMENTO O SEGMENTO  <b>1</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 1- Fase 3.2 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>  <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 8</i></p>
		<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<p>En este segmento se logra evidenciar que se hace uso de la noción de sucesión, al establecerse una función entre el conjunto de los números naturales y algunos números reales (valores de las áreas de los triángulos y de los cuadrados).</p>

Tabla 16 Descripción momento o segmento 2, fase 3.2

<p><b>FASE 3</b> <b>(3.2)</b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> <b>(ver segmento 2 - FASE 3.2)</b></p>		<p>Se desarrolla la parte 3.2 de la guía en la cual se da respuesta a la tercera pregunta de esta fase (c), el estudiante le da a conocer los resultados que obtuvieron hasta el momento respecto el comportamiento de las áreas de los triángulos de número consecutivo evidenciando procesos de conjeturación y argumentación.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO 2</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b>Proceso de Conjeturación</b></p>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes observan y organizan los datos con los que cuentan (del applet y la tabla).</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Los estudiantes realizan una búsqueda algunas regularidades identificando características que tienen los datos en cada uno de los casos, hacen algunos cálculos para los triángulos del 1 al 6, observando que para encontrar el área de cualquier triángulo se debe dividir en dos el área de del triángulo anterior.</p> <p><b>Formular:</b> Luego plantean una conjetura con la cual pretenden encontrar el área de un triángulo, teniendo en cuenta el área del triángulo anterior “<i>Se divide en dos y se encuentra el área del nuevo</i>”</p> <p><b>Verificar:</b> Después el estudiante verifica su conjetura encontrando el área del triángulo número 7, 10 y 13 (Ver Evidencia imagen 57).</p> <p><b>Generalizar:</b> se puede decir que el estudiante logra generalizar en el momento en que plantea que “<i>Siempre se cumplirá la regla</i>”.</p>

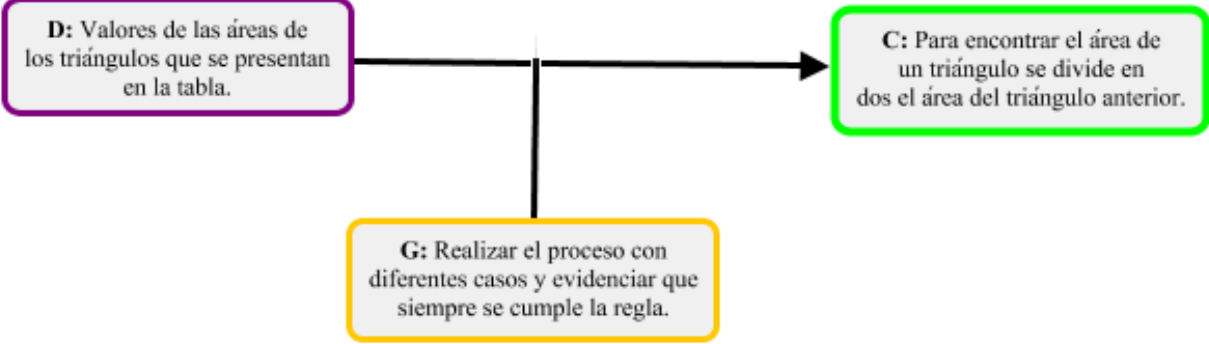
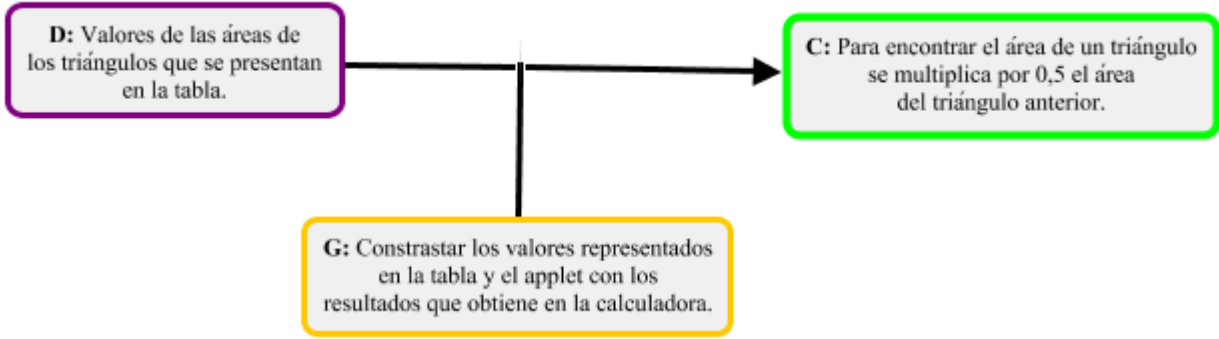
<b>MOMENTO</b> <b>0</b> <b>SEGMENTO</b> <b>2</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 2 - Fase 3.2 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>  <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 9</i></p>
		<i>Nociones del cálculo que se evidencia</i>	<p>En este segmento se desarrolla la noción de sucesión al realizar una correspondencia uno a uno entre los números naturales y algunos números que pertenecen al conjunto de los números reales entre cero y uno (área de los triángulos).</p>

Tabla 17 Descripción momento o segmento 3, fase 3.2

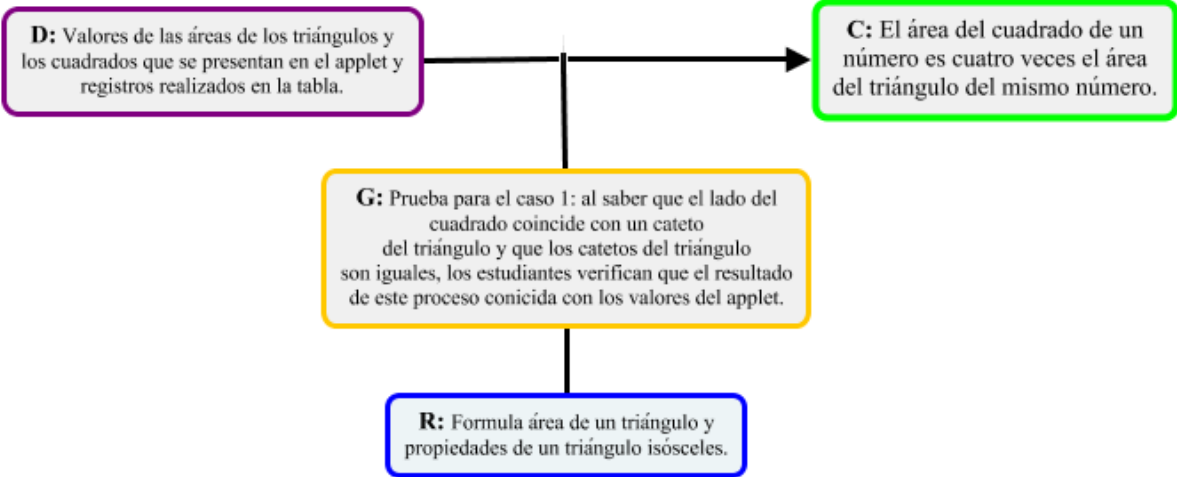
<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.2)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver segmento 3-FASE 3.2)</p>		<p>Los estudiantes solucionan la parte 3.2 de la guía, respondiendo los literales a, b, c y d, en los cuales manifiestan a la docente los resultados obtenidos, con el ánimo de mostrar sus conjeturas frente a la relación encontrada entre las áreas del cuadrado <math>n</math> y el cuadrado <math>n - 1</math>.</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO  3</p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de Conjeturación</i></p>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes observan y organizan los datos con los que cuentan (del applet y la tabla).</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Los estudiantes realizan una búsqueda algunas regularidades identificando características que tienen los datos en cada uno de los casos, hacen algunos cálculos para los triángulos del 1 al 6, observando que para encontrar el área de cualquier triángulo se debe dividir en dos el área de del triángulo anterior.</p> <p><b>Formular:</b> Luego plantean una conjetura con la cual pretenden encontrar el área de un triángulo, teniendo en cuenta el área del triángulo anterior “<i>Se divide en dos y se encuentra el área del nuevo</i>”</p> <p><b>Verificar:</b> Después el estudiante verifica su conjetura encontrando el área del triángulo número 7, 10 y 13 (Ver Evidencia imagen 578).</p> <p><b>Generalizar:</b> se puede decir que el estudiante logra generalizar en el momento en que plantea</p>

			que “ <i>Siempre se cumplirá la regla</i> ”.
MOMENTO 0 SEGMENTO 3	ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO	<i>Proceso de argumentación</i>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 3 - Fase 3.2 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>  <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 10</i></p>

		<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	En este segmento se desarrolla la noción de sucesión, al establecerse una correspondencia entre el conjunto de los números naturales y algunos números reales entre 0 y 1.
--	--	---	--

Tabla 18 Descripción momento o segmento 1, fase 3.3

<b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.3)</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> <b>(ver segmento 1- FASE 3.3)</b>		El estudiante desarrolla la parte 3.3 de la guía respondiendo las preguntas allí plateadas, las cuales se realizan con el fin de que los estudiantes encuentren la relación que hay entre el área de los cuadrados y la de los triángulo de mismo número; se presenta un dialogo entre dos estudiantes en la que la docente no interviene. Ellos usan la calculadora de Windows donde realizan algunos cálculos ( <i>Ver Evidencia imagen 60</i> ), evidenciando así procesos de conjeturación y argumentación.
<b>MOMENTO O SEGMENTO 1</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>Proceso de conjeturación</b>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes con los datos que les proporciona el applet empiezan a observarlos y a organizarlos con el fin de poder visualizar algunas características o propiedades de los mismos.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Con el uso de la calculadora que proporciona Windows realizan algunas divisiones entre dos, con lo que se dan cuenta que el área del triángulo 1 es la cuarta parte del cuadrado número 1 y que pasa lo mismo con el triángulo y el cuadrado de números 2 y 3.</p> <p><b>Formular:</b> Luego plantean la siguiente conjetura: “<i>el área del cuadrado de un número es cuatro veces el área del triángulo del mismo número</i>” (<i>Ver Evidencia imagen 61</i>).</p> <p><b>Verificar:</b> Los estudiantes verifican si su conjetura se cumple para todos los casos teniendo</p>

			<p>en cuenta uno más, hacen uso de la calculadora para comprobar los resultados allí obtenidos con los presentados en el applet.</p> <p><b>Generalizar:</b> Los estudiantes realizan generalización en el momento en que formulan la conjetura para cualquier caso, expresando que se cumple para cualquier caso. (Ver Evidencia imagen 60). (Ver Evidencia imagen 61)</p> <p><b>Validar:</b> Los estudiantes realizan una “prueba o demostración” para el caso 1 (relación del área del cuadrado 1 y triángulo 1) con el fin de mostrar la validez de su conjetura (Ver Evidencia imagen 62).</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO  <b>1</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE  <b>GRADO</b></p>	<p><i>Proceso de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 1 - Fase 3.3 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>  <p style="text-align: center;">Proceso de argumentación 11</p>

		<b><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></b>	En este segmento se desarrolla la noción de sucesión, donde cada uno de los términos son cuadrados y triángulos de la rama pitagórica. Además de realizar una correspondencia entre los números naturales y algunos números reales (valores de las áreas).
--	--	--	--

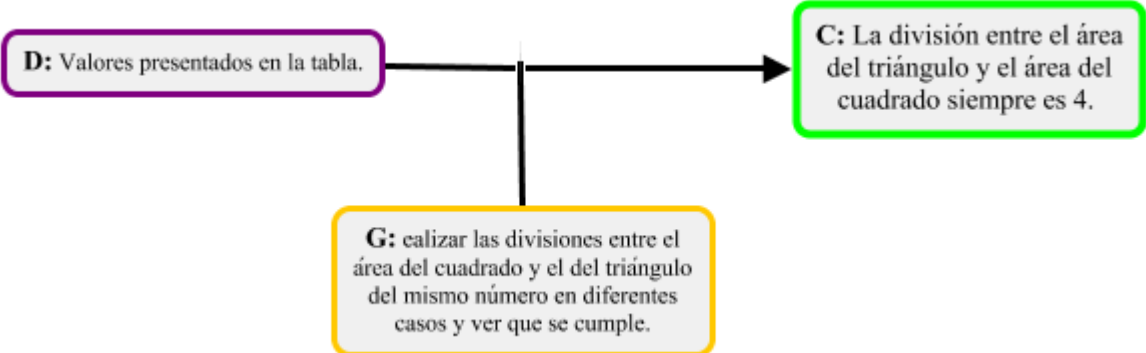
Tabla 19 Descripción momento o segmento 2, fase 3.3

<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.3)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> <b>(ver segmento 2-FASE 3.3)</b></p>		<p>Se presenta un dialogo de dos estudiantes que discuten y desarrollan la sección 3.3 de la guía respecto a la relación que hay entre los cuadrados y los triángulos, la docente no interviene en dicho diálogo.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO 2</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b><i>Proceso de conjeturación</i></b></p>	<p><b>Observación y organización:</b> los estudiantes organizan y observan los datos que se les proporciona en el applet por medio de la tabla de la guía.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> Los estudiantes encuentran algunas regularidades respecto al área de un cuadrado y el área del triángulo anterior a él, para los primero casos logran evidenciar que el área del cuadrado 2 es el doble del área del triángulo 1, también lo enuncian como “<i>el triángulo 1 es la mitad de cuadrado 2</i>” (Ver Evidencia imagen 66).</p> <p><b>Formular:</b> Los estudiantes plantean la siguiente conjetura, con respecto a la relación encontrada entre el área de un cuadrado y el área del triángulo anterior “<i>el área del cuadrado n, es el doble del triángulo n-1</i>”</p> <p><b>Verificar:</b> Los estudiantes luego de formular su conjetura lo prueban para otros casos como cuadrado 3, 4, 5 y 6.</p> <p><b>Generalizar:</b> Los estudiantes logran generalizar en el momento en que formulan su conjetura</p>

			en términos del área del n-ésimo cuadrado respecto al área del triángulo anterior.
<b>MOMENTO</b> <b>o</b> <b>SEGMENTO</b>  <b>2</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en el segmento 2 - Fase 3.3 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 12</i></p>
		<b><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></b>	<p>En este segmento se desarrolla la noción de sucesión al realizar una correspondencia entre los números naturales y un subconjunto de los números reales (valores de las áreas).</p>

Tabla 20 Descripción momento o segmento 3, 4 y 5, fase 3.3

<p><b><u>FASE 3</u></b> <b><u>(3.3)</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> <b>(ver segmento 3, 4 y 5- FASE 3.3)</b></p>		<p>Se presenta un dialogo entre un estudiante y la docente, que por medio de preguntas extra lo ayuda a comprender qué es lo que debe hacer, luego de ello el estudiante reconoce que la razón entre el área de un cuadrado y el área del triángulo siguiente es de 1:4, dando respuesta a las fase 3.3 de la guía.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO</b> <b>3, 4 y 5</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><b><i>Proceso de conjeturación</i></b></p>	<p>En este segmento solo se logran evidenciar las siguientes partes del proceso de conjeturación:</p> <p><b>Observación y organización:</b> los estudiantes observan los datos y realizan una organización de los datos en la tabla que se les proporciona.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> los estudiantes hacen los cocientes entre el área del triángulo y la del cuadrado evidenciando que este resultado siempre les da muy cerca de cuatro, debido a que al realizar las divisiones la calculadora arroja resultados que oscilan entre 3, 9 y 4.</p> <p><b>Formular:</b> La conjetura que presentan los estudiantes es la siguiente: “la división entre el área del triángulo y el área del cuadrado siempre es aproximadamente 4” (ver Evidencia imagen 667).</p>

<b>MOMENTO O SEGMENTO  3, 4 y 5</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 3, 4 y 5- Fase 3.3 (ver Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>  <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 13</i></p>
		<i>Nociones del cálculo que se evidencian</i>	<p>En este segmento se considera que se desarrolla la noción de razón, debido que el estudiante encuentra el cociente entre dos magnitudes.</p>

### 5.5.1. Conclusiones resultados Fase 3

A partir de las descripciones realizadas en las tablas anteriores, referidas a la fase 3 de la guía la cual se divide en tres secciones, la primera respecto a las relación entre las áreas de los cuadrados, en la segunda se aborda la relación que hay entre las áreas de los triángulos y por último se muestra la relación que hay entre el área de los cuadrados y el de los triángulos; con lo descrito anteriormente se pueden considerar 4 elementos principales:

- Se logra cumplir con los propósitos planteados inicialmente debido a que los estudiantes encuentran de una o de otra forma las características en la rama pitagórica que se esperaba que logaran evidenciar, esto lo hacen por medio de un proceso de conjeturación en la cual intervienen las cinco primeras fases (*observación y organización, búsqueda de regularidades, formular, verificar y generalizar*).
- Respecto al proceso de conjeturación se logra evidenciar que en la fase de *observación y organización* de los datos siempre se realizó en el momento de observar los valores arrojados por el applet y registrándolos en la tabla que se les proporcionó en la guía.

En la fase de *búsqueda de regularidades* los estudiantes realizan algunos cálculos teniendo en cuenta los primeros casos, en los cuales contrastan lo geométrico (figura del applet) con lo numérico (registro llevado en la tabla) y así encuentran patrones y regularidades.

A pesar de que los estudiantes no se han tenido un proceso el cual potencialice el desarrollo del proceso de conjeturación, logran abordar la fase tres, correspondiente a la formulación algunas conjeturas, haciéndolo en la mayoría de ocasiones de manear natural y usando u lenguaje cotidiano.

Algunos estudiantes verifican sus conjeturas aplicándolas a casos nuevos y rectificando que los valores correspondan con los que aparecen tanto en el applet como en la tabla, sin embargo algunos estudiantes no lo hacen, debido a que en la

fase de búsqueda de regularidades realizaron tantos ejemplos que ya están convencidos que su conjetura es válida.

La mayoría de estudiantes no abordan la fase de *validar* debido a que no se ha llevado un proceso con esta población, para facilitar la demostración de sus conjeturas.

- Por otro lado, se observa una relación entre el proceso de conjeturación y la argumentación, debido a que al plasmar los argumentos de los estudiantes en el esquema de Toulmin, se evidencia que la fase 1 del proceso de conjeturación (observación y *organización*) se corresponde con los datos (D) de dicho esquema, al igual que la fase de generalizar, está ligada a la conclusión (C) que se describe en el modelo de Toulmin.

Los estudiantes por lo general usan la estructura del esquema simple de Toulmin para dar sus argumentos, debido a que a partir de unos datos o premisas dadas ellos logran conjeturar o concluir algunas características que evidencian y con preguntas como ¿y por qué crees que eso se cumple? ¿Cómo has llegado hasta ahí? Se logra generar el garante (G) que valida o refuta la conjetura propuesta por el estudiante. Sin embargo en algunas ocasiones se logra identificar el respaldo (R) dentro del argumento que presentan los estudiantes.

- La fase tres de la guía contribuye al desarrollo de las nociones de sucesión y de límite en los estudiantes debido a que se involucran características de función cuyo dominio son los números naturales, haciendo una correspondencia uno a uno con un subconjunto de los números reales, además de trabajar con la idea de infinito y de algunos procesos infinitos en el momento en que determinan la convergencia de la sucesión cuando los términos crecen indefinidamente.

## 5.6. Descripción de resultados Fase 4 de la guía

Tabla 21. Descripción momento o segmento 1 y 2, fase 4

<b><u>FASE 4</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b>  (ver Tabla 28, segmentos 1 y 2-FASE 4)		<p>Los estudiantes responden algunas preguntas de la guía, específicamente el ítem 4.1 referido a la suma acumulativa de las áreas de cuadrados, sin embargo, manifiestan algunas dificultades para responder la pregunta 4.1.c, por ello, solicitan la ayuda de la docente.</p> <p>Se indaga sobre las razones que pueden dar los estudiantes para obtener las conjeturas mencionadas por los estudiantes.</p> <p>En este segmento se añaden las imágenes con las respuestas escritas en la guía de los estudiantes.</p>
<b>MOMENTO o SEGMENTO</b>  <b>1 y 2</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes realizan observación y organización de los datos, al completar la tabla de la guía en la columna 4 y considerar por ejemplo que hasta el cuadrado número 3 la suma acumulativa de áreas es 1, 75 y que se halla sumando las áreas anteriores hasta tal cuadrado.</p> <p>Los estudiantes precisan: “sumando cada área de los cuadrados hasta llegar al número 3 y 6”</p> <p><b>Formular:</b> la suma acumulativa de los cuadrados se aproxima a 2 (ver Evidencia imagen 70 y Evidencia imagen 72)</p> <p><b>Verificar:</b> Los estudiantes hallan la suma acumulativas hasta el cuadrado número 9 precisan que se aproxima a 2 “... porque mira de 1,9961” hasta el 7 (ver Evidencia imagen 70)</p> <p><b>Generalizar:</b> En la pregunta de la guía “¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta un número “muy grande”? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa</p>

			<p>conclusión?”</p> <p>“va a aumentar muy poco hasta poder llegar a un número finito decimos que a 2...” (ver)</p> <p><b>Validar:</b> Los estudiantes validan la generalización realizada al considerar que el tamaño de los cuadrados se va haciendo más pequeño esto se observa en la construcción geométrica en el applet de la guía (ver Evidencia imagen 71).</p>
<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>1 y 2</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 1 y 2- Fase 4 (ver Tabla 28), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD     D["<b>D:</b> Valores registrados en la tabla en las columnas 2, 3 y 4 relativas al paso, áreas y suma acumulativa de áreas de cuadrados. Construcción geométrica en el applet de la guía dada."]     G["<b>G:</b> - Se observa que los valores en la columna 4 se van aproximando a 2 - Se observa en el applet que el tamaño de los cuadrados se va haciendo más pequeño y por ello el aumento de la suma acumulativa de áreas de cuadrados no aumenta mucho, se reduce el tamaño porque se suma el área de la mitad del anterior en cada paso."]     C["<b>C:</b> La suma acumulativa de los cuadrados tiende a 2."]     D --- G     G --- C     </pre> </div> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 14</i></p>

<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>1 y 2</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se involucra la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales que se relacionan con el área de cada figura de acuerdo con su paso.</li> <li>• Al considerar la suma acumulativa de los cuadrados se involucra la noción de serie y al tener en cuenta que tal suma se aproxima a 2 pero que no llega a ser este número se pone en juego la noción de límite.</li> </ul> <p>Se identifica la noción de infinito al considerar más casos (“muy grandes”) para las áreas de triángulos y que en infinito se aproximará más a 2, de esta forma, se involucra la noción de convergencia.</p>
---	--	--	--

Tabla 22. Descripción momento o segmento 3 y 4, fase 4

<p><b><u>FASE 4</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver Tabla 28, segmento 1- FASE 4)</p>		<p>En este segmento se añaden las imágenes con las respuestas escritas en la guía de los estudiantes, referidas al ítem 4.2 de la guía propuesta (sumas acumulativas de triángulos). A partir de ello, se observa el proceso de conjeturación y argumentación que se pone en juego.</p>
<p>MOMENTO o SEGMENTO  <b>3 y 4</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Proceso de Conjeturación</i></p>	<p><b>Observación y organización:</b> Los estudiantes realizan observación y organización de los datos, al completar la tabla de la guía en la columna 8 y considerar por ejemplo que hasta el triángulo número 4 la suma acumulativa de áreas es 0,4688 y se halla sumando las áreas anteriores hasta tal triángulo, de la misma forma se realiza este procedimiento para otros triángulos (ver Evidencia imagen 77).</p> <p>Los estudiantes precisan: “[...] ya que se van sumando todas las áreas de los triángulos”</p> <p><b>Formular:</b> la suma acumulativa de los triángulos se aproxima a 0,5 (ver Evidencia imagen 78)</p> <p><b>Verificar:</b> Se observan los datos en la tabla y a medida que aumenta la cantidad de triángulos la suma se va aproximando más a 0,5</p> <p><b>Generalizar:</b> En la pregunta de la guía “¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta un número “muy grande”? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?”</p>

		<p>“Igualmente se aproximaría a 0,5 se observa la secuencia de la tabla se acerca cada vez más a 0,499999999... [...]” (ver Evidencia imagen 78)</p> <p><b>Validar:</b> Los estudiantes validan la generalización realizada al considerar que “[...] cada vez se suma un número más pequeño que es la mitad del anterior” y “[...] el poquito que se añade cada vez es más poquito en infinito sería casi 0,5 pero no alcanza a serlo” (ver Evidencia imagen 78).</p>
--	--	---

<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>3 y 4</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 3 y 4- Fase 4 (ver Tabla 28), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <div data-bbox="806 410 1866 948" style="text-align: center;"> <pre> graph TD     D["<b>D:</b> Valores registrados en la tabla en las columnas 5, 6 y 7 relativas al paso, áreas y suma acumulativa de áreas de triángulos. Construcción geométrica en el applet de la guía dada."]     G["<b>G:</b> - Se observa que las áreas de los triángulos disminuyen - Se observan los valores registrados en la tabla y se identifica que a medida que aumenta el número de triángulos, el valor que se añade a la suma acumulativa de las áreas, es más pequeño"]     C["<b>C:</b> La suma acumulativa de las áreas de los triángulos tiende a 0,5."]     D --- G     D --- C     G --- C     </pre> </div> <p><i>Proceso de argumentación 15</i></p>
---	--	-----------------------------	--

<p>MOMENTO O SEGMENTO</p> <p><b>3 y 4</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En este segmento se involucra la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales que se relacionan con el área de cada figura de acuerdo con su paso.</li> <li>• Al considerar la suma acumulativa de los triángulos se involucra la noción de serie y al tener en cuenta que tal suma se aproxima a 0,5 pero que no llega a ser este número se pone en juego la noción de límite.</li> <li>• Se identifica la noción de infinito al considerar más casos (“muy grandes”) para las áreas de triángulos y que en infinito se aproximará más a 0,5 por lo tanto, se involucra la noción de convergencia.</li> </ul>
---	--	--	---

Tabla 23. Descripción momento o segmento 5 y 6, fase 4

<b><u>FASE 4</u></b>	<b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver Tabla 28, segmentos 5 y 6- FASE 4)		En este segmento se añaden las imágenes con las respuestas escritas en la guía de los estudiantes, referidas al ítem 4.2 de la guía propuesta (sumas acumulativas de triángulos). A partir de ello, se observa el proceso de conjeturación y argumentación que se pone en juego.
MOMENTO o SEGMENTO  <b>5 y 6</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Proceso de Conjeturación</i></b>	<p>En este caso, el proceso de conjeturación no se lleva a cabo como en los segmentos presentados anteriormente, debido a que al iniciar la sección 4.3 de la guía, se realiza la siguiente pregunta, que conduce a la formulación inicial de una conjetura y posteriormente sí se solicitan datos particulares que corresponden a la observación y organización de casos.</p> <p>¿A qué número crees que se aproxima la suma de las áreas de la figura completa (formada por triángulos y cuadrados) cuando haya un número muy grande de cuadrados y triángulos? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?</p> <p><b>Formular:</b> se formula la conjetura: se aproxima “a 2,5 si se suma la de los cuadrados con los triángulos es una suma completa” (ver Evidencia imagen 82)</p> <p><b>Observación y organización:</b> se registran los valores correspondientes a la suma de las figuras que conforman la rama del árbol pitagórico, en la tabla de la guía, en la columna 9 (ver Evidencia imagen 84), se precisa que para realizar tal procedimiento “sería sumar el área del triángulo y luego la del cuadrado, la acumulativa, es decir <math>\blacksquare 1 + \blacksquare 2 + \Delta 1 + \Delta 2</math>, al realizar esto en la tabla da 2,125”</p>

			<p><b>Verificar:</b> Se verifica la conjetura mencionada, por ejemplo al considerar que hasta el triángulo número 5 la suma completa de las figuras hasta ella, es 2,4844 (ver Evidencia imagen 85).</p> <p><b>Generalizar:</b> A la pregunta de la guía: ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo con número “muy grande”? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?, los estudiantes responden que: la suma acumulativa de la figura completa se aproxima “a 2,49999 cada vez van dando más nueves [...]”o “a 2,5 se va haciendo 2,49999 cada vez con más 9 o sea casi 2,5 [...]”(ver Evidencia imagen 83)</p> <p><b>Validar:</b> Se intenta validar tal información al considerar que “[...] la de los cuadrados es casi 2 y la de los triángulos es casi 0,5 [...] <math>2+0,5=2,5</math>” (ver Evidencia imagen 83 y Evidencia imagen 84).</p>
<p>MOMENTO o SEGMENTO</p> <p><b>5 y 6</b></p>	<p>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</p>	<p><i>Procesos de argumentación</i></p>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 5 y 6- Fase 4 (ver Tabla 28), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p>

			<div style="text-align: center;"> <p><b>D:</b> Valores registrados en la tabla en las columnas 4, 8 y 9 relativas a la suma acumulativa de áreas de cuadrados, triángulos y la suma de la rama completa, respectivamente. Construcción geométrica en el applet de la guía dada.</p> <p><b>G:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se observa que la suma de áreas de los cuadrados se aproxima a 2 y la de los triángulos a 0,5, por lo tanto la suma de estos dos valores constituye el valor de la suma de toda la figura que sería 2,5.</li> <li>- Al observar la secuencia en la tabla en la columna 9 y observar que en las cifras del número decimal 2,499 se van añadiendo 9 a las cifras decimales, se considera tal número como 2,4999... que sería decimal periódico mixto y muestra la aproximación a 2,5.</li> </ul> <p><b>C:</b> La suma de la rama completa del árbol pitagórico tiende a 2,5.</p> <p><i>Proceso de argumentación 16</i></p> </div>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO</b></p> <p><b>5 y 6</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Al considerar la suma, de la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados y los triángulos, se involucra la noción de serie y al tener en cuenta que tal suma se aproxima a 2,5 pero que no llega a ser este número se pone en juego la noción de límite.</li> <li>• Se identifica la noción de infinito al considerar más casos (“muy grandes”) para la suma, de la suma de las áreas de los cuadrados y los triángulos en infinito se aproximará más a 2,5 por lo tanto, se involucra la noción de convergencia.</li> </ul>

### **5.6.1. Conclusiones resultados Fase 4**

A partir de las descripciones realizadas en las tablas anteriores, referidas a la fase 4 de la guía, se pueden considerar 4 elementos principales:

- Los estudiantes hacen uso de la guía y se realizan algunos diálogos para recolectar la información que permite evidenciar los contrastes teóricos que se encuentran en el desarrollo de la misma; el applet y el uso de GeoGebra, permite observar características de las figuras como su tamaño, se observa que tanto en el caso de los cuadrados como de los triángulos a medida que aumenta la cantidad de figuras, disminuye el tamaño. Para el desarrollo de esta fase los estudiantes hicieron uso de calculadoras de los computadores o de celulares, para facilitar los cálculos en las sumas acumulativas de áreas.
- Se identifica, en gran medida, un proceso de conjeturación en las respuestas de los estudiantes y las preguntas de la guía contribuyen al desarrollo de los diferentes pasos de tal proceso; por ejemplo, la tabla promueve la observación y registro de algunos casos particulares, en esta fase, referidos a las sumas acumulativas de las áreas de los cuadrados, de los triángulos y la suma de las áreas de las figuras que van conformando toda la rama del árbol pitagórico. Se debe tener en cuenta, que en varias ocasiones, los estudiantes añadieron pasos no solicitados en los últimos renglones de la tabla, lo cual refleja la observación de regularidades y patrones. En cuanto a las formulaciones, se pudo evidenciar que las conjeturas surgen a partir de la exploración y el registro de datos, se realizan en un lenguaje poco riguroso, la mayoría de sus afirmaciones se presentan, a partir de la observación de los datos encontrados en el applet y en la tabla de la guía.

Las conjeturas planteadas por los estudiantes, tienen que ver con relaciones entre números naturales y comparación de la magnitud de áreas acumulativas entre figuras se debía observar a qué número se iba aproximando tal suma a medida que aumentaba la cantidad de polígonos en cada caso, los estudiantes establecen algunas conjeturas de acuerdo con dichos valores numéricos. En la

mayoría de las evidencias, se encuentra el paso de la verificación de las formulaciones realizadas, en ocasiones esto conduce a generalizaciones que no necesariamente se expresan en un lenguaje matemático.

Se encuentran pocas evidencias de la forma como los estudiantes validan las conjeturas o generalizaciones planteadas; la manera de convencer a otros de las respuestas dadas, se basa principalmente en el registro realizado en las tablas o la observación de la construcción geométrica presentada en el applet de la guía.

- De manera similar, se evidenciaron diferentes procesos de argumentación, en los cuales se privilegia la identificación de 4 de los elementos que corresponden al modelo de Toulmin, Datos, Conclusión, Garantía y Respaldo; en la fase 2, se encuentra que la mayoría de los argumentos realizados, se estructuran de acuerdo con el modelo básico de Toulmin, en el cual se ponen en juego solamente los primeros 3 elementos mencionados. En este caso, los datos utilizados son los valores registrados en la tabla o los que se encuentran en el applet de la guía, las conclusiones están relacionadas con el valor al cual convergen las series correspondientes a las áreas de las figuras; 2 para los cuadrados, 0,5 en el caso de los triángulos y por lo tanto 2,5 para la figura completa. Las garantías encontradas también son obtenidas de secuencias, observación de patrones y verificación de casos particulares con la información presentada en el applet, se tienen en cuenta algunas conclusiones de ítems de la guía anteriores, por ejemplo, el número al cuál se aproximan las áreas de las figuras a medida que aumenta la cantidad, dicho valor va disminuyendo por ello tiene a 0; dichas garantías son de tipo hipotético, debido a que no tienen un sustento teórico aceptado por una comunidad.
- En este segmento se involucra la noción de sucesión debido a que se considera una correspondencia entre los números naturales que se relacionan con el área de cada figura de acuerdo con su paso.

Al considerar la suma acumulativa de las diferentes figuras (cuadrados, triángulos o ambos) se involucra la noción de serie y al tener en cuenta que tal suma se aproxima a un valor, pero que no llega a ser este número se pone en juego la noción de límite.

Se identifica la noción de infinito al considerar más casos (“muy grandes”) para las áreas de las figuras y que en infinito se aproximará más a los valores mencionados, por lo tanto, se involucra la noción de convergencia.

Se puede decir, que si bien los estudiantes realizan procesos de conjeturación y argumentación, en estos no se involucran procesos deductivos en los cuales se haga uso de un lenguaje matemático más preciso que permita evidenciar el uso de conceptos implicados en la situación.

### 5.7. Descripción de resultados Fase 5 de la guía

Tabla 24 Descripción momento o segmento 1, 2,3 y 4, fase 5

<p><b><u>FASE 5</u></b></p>	<p><b>DESCRIPCIÓN GENERAL</b> (ver segmento 1, 2, 3 y 4 de la FASE 5)</p>		<p>Se seleccionan las respuestas de cuatro grupos de los cuales se muestran evidencias de sus respuestas.</p>
<p><b>MOMENTO O SEGMENTO 1, 2, 3 y 4</b></p>	<p><b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b></p>	<p><i>Proceso de Conjeturación</i></p>	<p><b>Observación y organización:</b> los estudiantes observan detenidamente la construcción realizada en GeoGebra analizando cuál es el comportamiento de “los puntos rojos”.</p> <p><b>Buscar regularidades:</b> los estudiantes empiezan a definir las coordenadas de algunos puntos rojos para ir caracterizando cada una de las componentes en <math>x</math> y <math>y</math> (ver Evidencia imagen 68), donde encuentran que la figura va formando una espiral (ver Evidencia imagen 90).</p> <p><b>Formular y generalizar:</b> los estudiantes logran evidenciar que las coordenadas de los puntos rojos van tendiendo al punto (2,1) (ver Evidencia imagen 91)</p>

<b>MOMENTO O SEGMENTO  1, 2, 3 y  4</b>	<b>ASUNTOS DE INTERÉS DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b><i>Procesos de argumentación</i></b>	<p>De acuerdo con el modelo de Toulmin y los datos presentados en los segmentos 1, 2, 3 y 4- Fase 4 (ver <i>Tabla 29 Transcripciones o evidencias fase 5 de la guía</i>), se puede evidenciar el siguiente proceso de argumentación:</p> <p style="text-align: center;"><i>Proceso de argumentación 17</i></p>
		<b><i>Nociones del cálculo que se evidencian</i></b>	<p>Esta fase contribuye con el desarrollo de la noción de límite, debido a que se trabaja con las ideas de cercanía, números infinitamente pequeños e infinitamente grandes (Evidencia imagen 89).</p>

### 5.7.1. Conclusiones resultados Fase 5

Partiendo de las generalidades encontradas en la fase 5 y que se describen en la tabla anterior, se identifican 4 aspectos importantes:

- Se cumplen los propósitos que se plantearon inicialmente, debido a que los estudiantes identificaron que la rama pitagórica tiene forma de espiral y además que los punto rojos tiende a la coordenada (2,1).
- Respecto al proceso de conjeturación se evidencia que esta fase contribuyó con el desarrollo principalmente de las fases 1, 2, 3 y 5 de dicho proceso (*observación y organización, búsqueda de regularidades, formular y generalizar*).
- Frente al proceso de argumentación, se evidencia que los argumentos dados por los estudiantes forman el esquema de argumentación simple de Toulmin.
- Esta fase contribuye con el desarrollo de la noción de límite, debido a que se trabaja con las ideas de cercanía, números infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se mencionan las conclusiones del trabajo, referidas inicialmente a los objetivos específicos planteados, los cuales contribuyeron al alcance del objetivo general; además se mencionan algunas conclusiones y recomendaciones generales.

### **Conclusiones referidas a los objetivos**

Para la elaboración del trabajo se planteó un objetivo general y 3 objetivos específicos, a continuación se evalúa cada uno de estos, los cuales contribuyeron al alcance del objetivo general.

Se realizó un reporte estructurado en el cual se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el trabajo, los cuales se contrastan con la información obtenida en la aplicación de una guía; de tal reporte se puede concluir que:

- La situación planteada debe propiciar la actividad matemática, en tanto se busca, que el papel del docente no sea el principal y que las nociones matemáticas involucradas, no se presenten de manera terminada, sino como un proceso en el cual el estudiante tiene la posibilidad de realizar afirmaciones a partir de un trabajo exploratorio, de observaciones, entre otras, y finalmente se llegue a una conclusión.
- Se realiza una guía que se puede denominar es una actividad matemática, debido a que promueve el desarrollo de procesos como la ejercitación de procesos de creación, la formulación de conjeturas, la expresión y comunicación de ideas, entre otras.
- Se debe tener en cuenta que no es lo mismo realizar un trabajo en el cual se indaga acerca de la conjeturación de los estudiantes, que en los procesos de conjeturación, se deben definir algunos pasos que hace parte del mismo, como la observación y organización de casos, la búsqueda de regularidades, la formulación, generalización, etc. Todo esto contribuye en la elaboración de los instrumentos de recolección de información, en este caso de la guía propuesta, debido a que las preguntas se enfocan el desarrollo de dicho proceso.
- En cuanto al proceso de argumentación se puede decir que en la literatura encontrada, la mayor cantidad de trabajos se refieren al modelo de Toulmin para indagar acerca de dicho proceso en los estudiantes. Tal modelo se compone de diferentes elementos, los cuales se

deben tener claros para la elaboración de la guía y para la identificación del mismo en una información obtenida.

- Hay conceptos del cálculo que se suelen abordar presentando los resultados finales en su proceso de construcción en las Matemáticas, sin embargo existen nociones asociadas que se pueden abordar sin necesidad de presentar elementos teóricos formales o que requieran el uso de un lenguaje formal, entre ellos, se encuentran las nociones de sucesión, límite, convergencia y serie.

Se realizó el diseño de una guía relacionada con las sucesiones en la que se utilizaron recursos tecnológicos, la cual, involucró algunas nociones del cálculo, como sucesión, límite, convergencia, entre otras, al respecto se concluye que:

- Se deben tener en cuenta los elementos teóricos que fundamentan el trabajo, a la hora de diseñar la guía, debido a que a partir de ellos se realiza una descripción que evidencia su existencia en las respuestas de los estudiantes.
- El uso de la tecnología, en particular, el software GeoGebra permite la animación y facilita la observación de datos y procesos que con lápiz y papel serían complicados de ilustrar. En este trabajo se realiza una construcción geométrica de una sucesión compuesta de triángulos y cuadrados, a medida que aumenta la cantidad de figuras, esta converge a una coordenada específica, de esta forma, el software Geogebra permite realizar un acercamiento a diferentes nociones del cálculo como sucesión, convergencia, entre otras.
- La guía propuesta facilita los procesos de conjeturación y argumentación en tanto se presentan diferentes preguntas estructuradas que permiten realizar un estudio de manera inductiva, se parte de casos particulares para conducir a posibles generalizaciones. La tabla que se encuentra en la guía permite que los estudiantes registren y organicen datos y observen patrones o regularidades.

En cuanto a la aplicación de la guía propuesta a los estudiantes de noveno del colegio SCALAS, la organización de la información obtenida, para determinar algunos procesos de conjeturación y argumentación, se puede decir que:

- Los estudiantes hacen uso de la guía y se realizan algunos diálogos para recolectar la información que permite evidenciar los contrastes teóricos que se encuentran en el desarrollo de la misma; el applet y el uso de GeoGebra, permite observar características de las figuras, como el tamaño, el tipo de figura, entre otros.
- Se identifica, en gran medida, un proceso de conjeturación en las respuestas de los estudiantes y las preguntas de la guía contribuyen al desarrollo de los diferentes pasos de tal proceso; por ejemplo, la tabla promueve la observación y registro de algunos casos particulares
- En varias ocasiones, los estudiantes añadieron pasos no solicitados en los últimos renglones de la tabla, lo cual refleja la observación de regularidades y patrones. En cuanto a las formulaciones, se pudo evidenciar que las conjeturas surgen a partir de la exploración y el registro de datos, se realizan en un lenguaje poco riguroso, aunque en algunos casos se usan símbolos para indicar ciertos elementos en las preguntas de la guía.
- Las conjeturas planteadas por los estudiantes, tienen que ver con relaciones entre números naturales y se obtienen al realizar procesos inductivos, en los cuales se parte de casos particulares para llegar a una generalización. En la mayoría de las evidencias, se encuentra el paso de la verificación de las formulaciones realizadas, en ocasiones esto conduce a generalizaciones que no necesariamente se expresan en un lenguaje matemático.
- Se encuentran pocas evidencias de la forma como los estudiantes validan las conjeturas o generalizaciones planteadas; la manera de convencer a otros de las respuestas dadas, se basa principalmente en el registro realizado en las tablas o la observación de la construcción geométrica presentada en el applet de la guía. En algunos momentos, se encontró que los conocimientos de los estudiantes influyeron para validar sus conjeturas.
- De manera similar, se evidenciaron diferentes procesos de argumentación, en los cuales se privilegia la identificación de 4 de los elementos que corresponden al modelo de Toulmin, Datos, Conclusión, Garantía y Respaldo; en la fase 2, se

encuentra que la mayoría de los argumentos realizados, se estructuran de acuerdo con el modelo básico de Toulmin, en el cual se ponen en juego solamente los primeros 3 elementos mencionados. Los datos, casi siempre fueron los valores registrados en la tabla o los que se encuentran en el applet de la guía, las conclusiones están relacionadas con los propósitos planteados en la descripción de la guía, de acuerdo con la fase correspondiente. Las garantías encontradas también son obtenidas de secuencias, observación de patrones y verificación de casos particulares con la información presentada en el applet, dichas garantías son de tipo hipotético, debido a que no tiene un sustento teórico aceptado por una comunidad. En algunos de los segmentos, se consideró un respaldo para validar las conclusiones, estos se basan en los conocimientos de los estudiantes, como fórmulas de áreas, o expresiones generales para representar algo.

- Se pudo evidenciar que durante el desarrollo de la guía, los estudiantes involucran algunas nociones del cálculo, como sucesión, serie, convergencia, límite, procesos infinitos y convergencia.

## BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, M. N. (2014). Actividades Matemáticas : Conjeturar y Argumentar. *Números, Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 85(1), 75–90.
- Apostol, T. M. (1984). *Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté.
- Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (1999). Approaching theorems in grade VIII: some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice. The Rotterdam: Sense Publishers*, 247–262.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. a., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de Las Ciencias*, 26(3), 431–444.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, Springer*, 66(1), 23–41. <http://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Flores, R., Valencia, M. A., Dávila, G., & García, M. G. (2008). *Fundamentos del Cálculo*. GARABATOS.
- García, G., Serrano, c., & Díaz, H. (s.f.). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitivaa nociones básicas y conceptos del cálculo. *Red académica*, 6.
- Luque, C., Mora, L., & Torres, A. (2006). ¿ Es posible hacer Matemáticas en el Aula? *Memorias CIIEC*, 1(1), 69–77.
- MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Matemáticas. *Bogotá* : *Magisterio*.
- Rodríguez, I. (2004). El Melo Argumentativo De Toulmin En La Escritura De Artículos De Investigación Educativa. *Revista Digital Universitaria*, 5(1), 1–18.

Santaló, Luis. (1994). Una nueva caracterización de la enseñanza y del conocimiento matemático escolar. Implicaciones sobre el papel del profesor. En el educador en la enseñanza de la matemática. San José: EUNED.

Spivak, M. (1992). *Calculus: Cálculo infinitesimal*. España: Reverté.

Toulmín, S. (2007). *Los usos de la argumentación* (Ediciones ). España: Barcelona.

## ANEXOS


### ANEXO 1: GUÍA DE APLICACIÓN

#### ACTIVIDAD: RELACIONES NUMÉRICAS

##### 1. *Exploración*

- a. Observa y describe para qué sirve cada botón de la construcción en GeoGebra.

*RESPUESTA:*

- b. Mueve el deslizador “PASO”  ¿qué función tiene este botón en la construcción geométrica?

*RESPUESTA:*

- c. ¿Qué figuras geométricas van apareciendo en la construcción? ¿Cuáles son las características de cada una?

*RESPUESTA:*

- d. ¿Hay similitud en las figuras del mismo color? ¿Cuáles?

*RESPUESTA:*

- e. ¿Hay diferencias en las figuras del mismo color? ¿Cuáles?

*RESPUESTA:*

**Ahora, empezaremos a completar la tabla que se presenta a continuación, sigue las instrucciones dadas. Utiliza los datos que te brinda la construcción de la actividad en GeoGebra. *COMPLETA LA TABLA PARTE 1*: Completa la **columna 2** y la **columna 6** nombradas como “PASO”, de acuerdo con el número de la figura correspondiente. Recuerda que las columnas son verticales ↓ y las filas son horizontales → .**

**NOTA:** las últimas 3 filas de la tabla solo se diligencian cuando lo consideres necesario.

*TABLA DE DATOS*

Cuadrado NÚMERO	Paso	Área del cuadrado	Suma acumulativa de las áreas de los cuadrados	Triángulo NÚMERO	Paso	Área del triángulo	Suma acumulativa de las áreas de los triángulos	Sumas Acumulativas entre el cuadrado y el triángulo	Cociente entre el área del cuadrado con el área del triángulo
1.	1	1	1	1.	2	0.25	0.25	$1 + 0.25 = 1.25$	$1 / 0.25 = 4$
2.	3			2.	4	0.125	$0.25 + 0.125$ $= 0.375$		
3.				3.					
4.				4.					
5.				5.					
6.				6.					
7.				7.					

## 2. Relación número figura-Paso

A partir de la información que registraste en la tabla y la observación de la construcción en GeoGebra, responde las siguientes preguntas:

- a. ¿En qué “PASO” se encuentra el **cuadrado** número 5?

RESPUESTA:

- b. Si en la construcción geométrica en GeoGebra estuviera el cuadrado número 11, ¿en qué “PASO” estaría?  
¿Por qué?

RESPUESTA:

- c. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier **cuadrado** y su respectivo “PASO”? ¿Por qué?

RESPUESTA:

- d. ¿En qué “PASO” se encuentra el **triángulo** número 6?

RESPUESTA:

- e. Si en la construcción geométrica en GeoGebra estuviera el **triángulo** número 12, ¿en qué “PASO” estaría?  
¿Por qué?

RESPUESTA:

- f. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier **triángulo** y su respectivo “PASO”? ¿Por qué?

RESPUESTA:

- g. De acuerdo con tus respuestas en los ítems **c** y **f** anteriores, escribe el número del paso en el que se encontraría el cuadrado **número 21** y cuál sería el número del triángulo en el **paso 42**:

CUADRADO

NÚMERO: 21 PASO: \_\_\_\_\_

Justificación:

TRIÁNGULO

NÚMERO: \_\_\_\_\_ PASO: 42

Justificación:

**COMPLETA LA TABLA PARTE 2:** Ahora, completa la **columna 3** y la **columna 7** correspondientes a las áreas de las figuras, de acuerdo con su respectivo número. **NOTA:** Puedes observar que el valor del área de cada figura aparece sobre ella, en la construcción dada en GeoGebra.

### 3. Áreas de figuras consecutivas

#### 3.1. Cuadrados

- a. Si no te dieran el valor del área del **cuadrado número 1** ¿podrías hallarla de acuerdo con la construcción dada en la actividad de GeoGebra? ¿Cómo?

RESPUESTA:

- b. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 1 con el área del cuadrado número 2?

RESPUESTA:

- c. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 2 con el área del cuadrado número 3? Y ¿La relación entre el área de los cuadrados **3** y **4**?

RESPUESTA:

- d. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del **cuadrado número 8**? ¿Por qué?

RESPUESTA:

- e. ¿Cuál es la relación entre el área de dos cuadrados de número consecutivo?

RESPUESTA:

- f. Observa la tabla en la columna 3 y la construcción geométrica en GeoGebra, ¿qué sucede con el área de los cuadrados a medida que aumenta el número de ellos? ¿Por qué?

RESPUESTA:

g. ¿A qué valor se aproxima el área del cuadrado número 25? ¿Por qué?

RESPUESTA:

### 3.2. Triángulos

a. Si no te dieran el valor del área del **triángulo número 1 (Paso 2)** ¿podrías hallarla de acuerdo con la construcción dada en la actividad de GeoGebra? ¿Cómo?

RESPUESTA:

b. ¿Cómo se puede relacionar el área del triángulo número 1 con el área del triángulo número 2?

RESPUESTA:

a. ¿Cómo se puede relacionar el área del triángulo número 2 con el área del triángulo número 3? Y ¿La relación entre el área de los triángulos **3** y **4**?

RESPUESTA:

b. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del **triángulo número 7**? ¿Por qué?

RESPUESTA:

c. ¿Cuál es la relación entre el área de dos **triángulos** de número consecutivo?

RESPUESTA:

- d. Observa la tabla en la columna 3 y la construcción geométrica en GeoGebra, ¿qué sucede con el área de los **triángulos** a medida que aumenta el número de ellos? ¿Por qué?

RESPUESTA:

- e. ¿A qué valor se aproxima el área del triángulo número **28**? ¿Por qué?

RESPUESTA:

**COMPLETA LA TABLA PARTE 3:** Ahora, completa la **columna 10** nombrada como “cociente entre el área del cuadrado con el triángulo”. NO OLVIDES ESCRIBIR TODOS TUS PROCEDIMIENTOS.

### 3.3. Área cuadrados y triángulos

- a. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 1** con el área del triángulo **número 1**? ¿Qué te permite realizar esa afirmación?

RESPUESTA:

- b. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 4** con el área del triángulo **número 4**? ¿Cómo obtienes esa información?

RESPUESTA:

- c. ¿Qué relación tienen las áreas de los cuadrados y los triángulos que tienen el mismo número, por ejemplo  **$n$** ? ¿Cómo llegas a tu respuesta? **¿Por qué se cumple esa relación?**

RESPUESTA:

- d. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 2** con el área del triángulo **número 1**? ¿Qué te permite realizar esa afirmación?

RESPUESTA:

- e. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número 4** con el área del triángulo **número 3**? ¿Qué te permite realizar esa afirmación?

RESPUESTA:

- f. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado **número “n”** con el área del triángulo **número “n-1”**? ¿Qué te permite realizar esa afirmación? **¿Por qué se cumple esa relación?**

RESPUESTA:

**COMPLETA LA TABLA PARTE 4:** Ahora, completa la **columna 4** y la **columna 8** correspondientes a las áreas acumulativas de las figuras, de acuerdo con su respectivo número.

**NOTA:** La suma acumulativa, en este caso de las áreas, significa sumar todas las áreas de las figuras anteriores hasta un número dado, por ejemplo la suma acumulativa de las áreas en el cuadrado número 2 es sumar las áreas de los cuadrados 1 y 2, otro ejemplo, la suma acumulativa de las áreas de los triángulos en el número 6, significa sumar las áreas de triángulos número 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

#### **4. Suma acumulativa de áreas de figuras**

##### **4.1. Cuadrados**

- a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el **número 3**? Y ¿Hasta el **número 6**? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

b. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el **número 9**? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

c. Observa la tabla en la **columna 4** ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el **número 25**? **¿Por qué?**

RESPUESTA:

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta un número “muy grande”? **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

RESPUESTA:

#### 4.2. Triángulos

a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el **número 4**? Y ¿Hasta el **número 6**? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

b. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el **número 9**? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

- c. Observa la tabla en la **columna 4** ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el **número 28**? **¿Por qué?**

RESPUESTA:

grande”? **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

RESPUESTA:

**COMPLETA LA TABLA PARTE 5:** Ahora, completa la **columna 8** correspondiente a la suma, de la suma de las áreas acumulativas del cuadrado y el triángulo.

#### 4.3. Cuadrados y triángulos

- a. A qué número crees que se aproxima la suma de las áreas de la figura completa (formada por triángulos y cuadrados) cuando haya un número **muy grande** de cuadrados y triángulos **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

RESPUESTA:

- b. ¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa (compuesta por triángulos y cuadrados) hasta el triángulo **número 2**? Y ¿Hasta el **número 5**? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

- c. ¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo número 8? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA:

- d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo con número “muy grande”? **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

RESPUESTA:

### 5. Comportamiento de puntos rojos

- a. Observa los puntos rojos que corresponden al vértice del ángulo recto de cada triángulo ¿qué figura forman los 9 puntos que se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo.

RESPUESTA:

- b. ¿Qué figura formarían 15 puntos que se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo **¿Por qué?**

RESPUESTA:

- c. Escribe las coordenadas en el plano cartesiano aproximadas, en las cuáles se encuentra el séptimo y el octavo punto. **Escribe tus procedimientos.**

RESPUESTA:

**d.** Escribe la coordenada en el plano cartesiano a la cual se aproxima el punto número 30. ¿Por qué puedes concluir esto? ¿Cómo llegas a esa información?

*RESPUESTA:*

## **ANEXO 2: APLICACIÓN**

Applet realizado en GeoGebra se podrá encontrar en:

<http://ggbtu.be/m1845609>

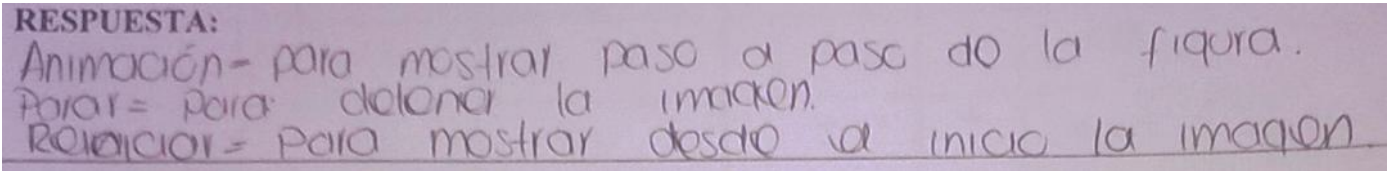
### ANEXO 3: EVIDENCIAS

Tablas de sistematización de evidencias:

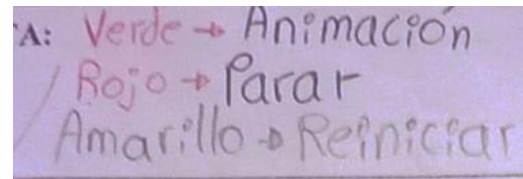
A partir de transcripciones de audio o imágenes se recolectan los datos y se sistematizan en las siguientes tablas, organizadas de acuerdo con las fases de la guía mencionadas anteriormente (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**)

#### 1. Transcripciones o evidencias fase 1 de la guía

Tabla 25 Transcripciones o evidencias fase 1 de la guía

FASE 1	
MOMENTO O SEGMENTO	TRANSCRIPCIONES DE LAS GRABACIONES Y/O EVIDENCIAS ESCRITAS (GUÍA)
1.	<p>Para la primera pregunta de la fase 1 se seleccionan las siguientes respuestas de los diferentes grupos de estudiantes:</p> <p>Grupo 1:</p>  <p><i>Evidencia imagen 1</i></p>

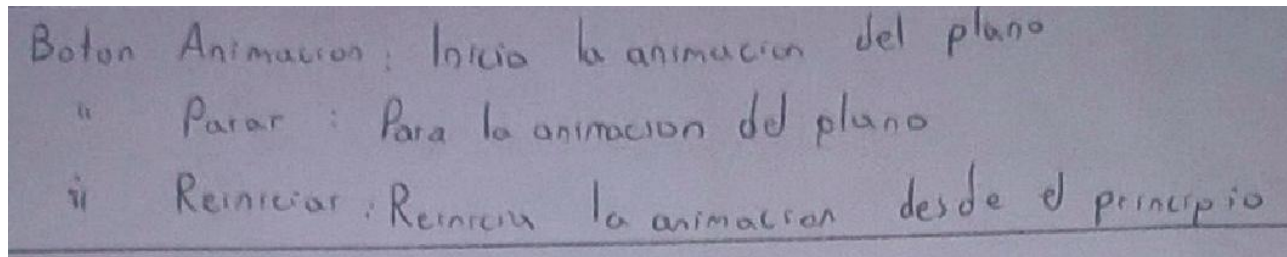
Grupo 2:



A: Verde → Animación  
Rojo → Parar  
Amarillo → Reiniciar

*Evidencia imagen 2*

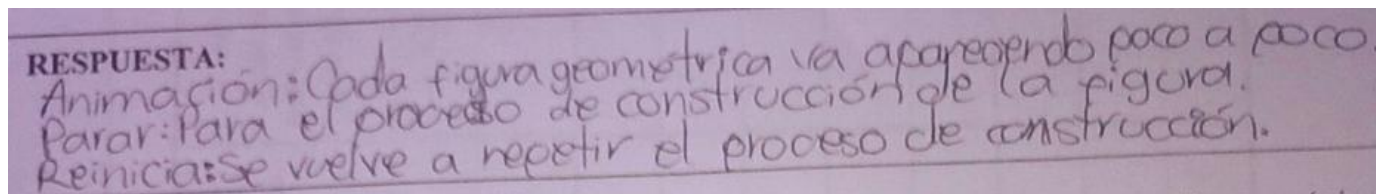
Grupo 3:



Boton Animacion: Inicia la animacion del plano  
" Parar: Para la animacion del plano  
" Reiniciar: Reinicia la animacion desde el principio

*Evidencia imagen 3*

Grupo 4:

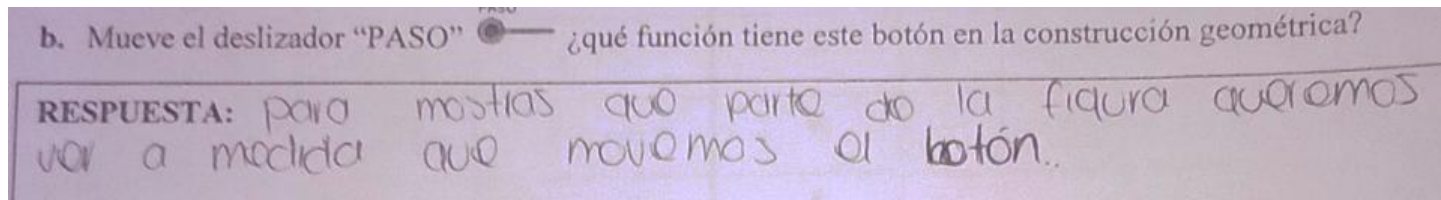


**RESPUESTA:**  
Animación: Cada figura geométrica va apareciendo poco a poco.  
Parar: Para el proceso de construcción de la figura.  
Reinicia: Se vuelve a repetir el proceso de construcción.

2.

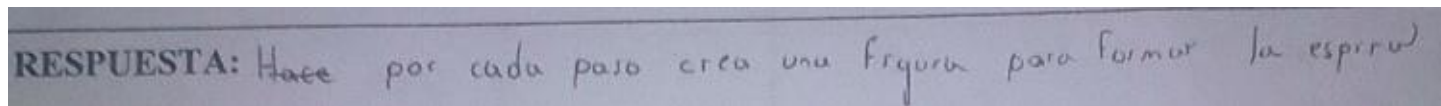
Las respuestas que los estudiantes dan a la pregunta número 2 son las siguientes:

Grupo 1:



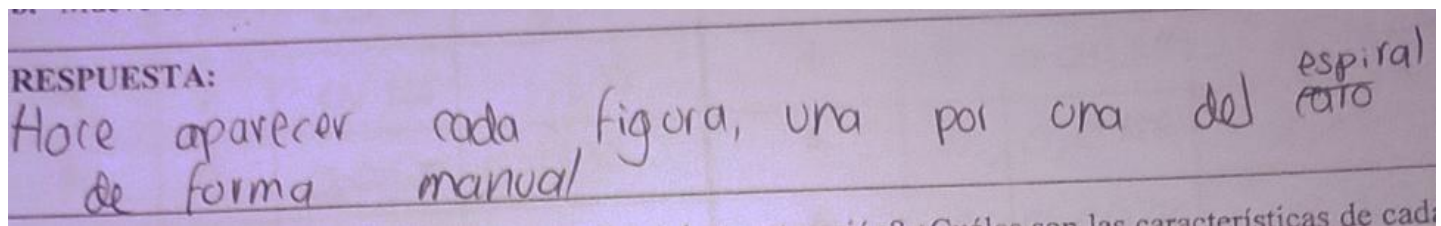
Evidencia imagen 4

Grupo 2:



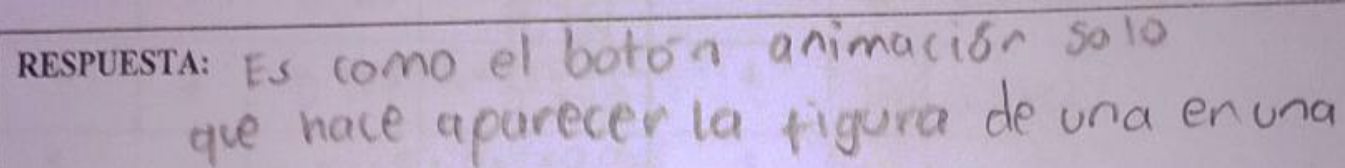
Evidencia imagen 5

Grupo 3:



Evidencia imagen 6

Grupo 4:



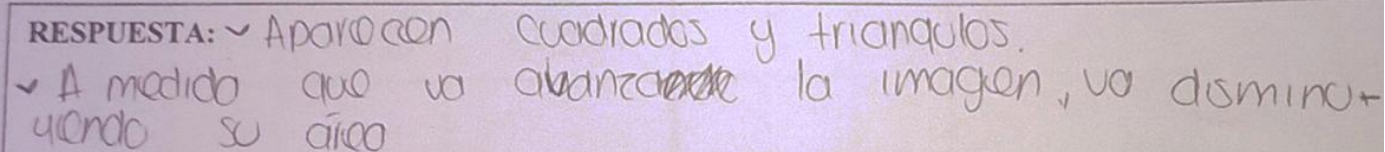
RESPUESTA: Es como el botón animación solo que hace aparecer la figura de una en una

*Evidencia imagen 7*

Al igual que con las preguntas anteriores, se seleccionan cuatro de las respuestas que realizan los grupos de estudiantes con respecto a la tercera pregunta (c) de la fase 1.

**Grupo 1:**

3.



RESPUESTA: ✓ Aparecen Cuadrados y triángulos.  
✓ A medida que va avanzando la imagen, va disminuyendo su área

*Evidencia imagen 8*

**Grupo 2:**

RESPUESTA: Cuadrado y triangulo. Y las caracteristicas son que poseen diferente Area y tamaño.

*Evidencia imagen 9*

**Grupo 3:**

Cuadrados: Figuras con 4 lados y 4 angulos rectos  
Triangulos Rectangulos isosceles

*Evidencia imagen 10*

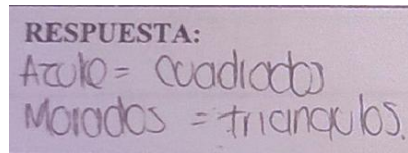
**Grupo 4:**

RESPUESTA: Cuadrado, triangulo y sucesivamente cada vez se hacen mas pequeños.

*Evidencia imagen 11*

Algunas de las repuestas a la cuarta pregunta (d) se presentan a continuación:

**Grupo 1:**

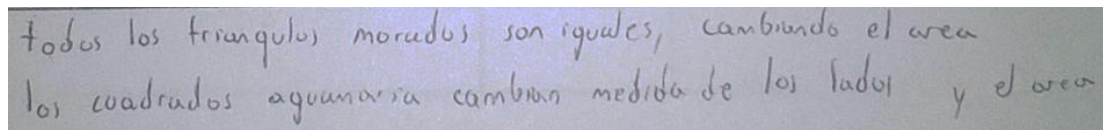


RESPUESTA:  
Azules = Cuadrados  
Morados = triángulos.

*Evidencia imagen 12*

4.

**Grupo 2:**



Todos los triángulos morados son iguales, cambiando el área los cuadrados aumentarían cambian medida de los lados y el área

*Evidencia imagen 13*

**Grupo 3:**

RESPUESTA:  
Si, Todas las azules son cuadrados y todas las moradas son triángulos.

Evidencia imagen 14

**Grupo 4:**

d. ¿Hay similitud en las figuras del mismo color? ¿Cuáles?  
RESPUESTA:  
Todas las figuras Azules son cuadrados y todas las figuras Moradas son triángulos y tienen ángulo de 90°. Están elevados al  $u^2$ .

Evidencia imagen 15

5.

Algunas de las respuesta a la última pregunta de la fase 1 que se obtuvieron son:

**Grupo 1:**

RESPUESTA:  
entre mas van apareciendo, se va disminuyendo el área.

Evidencia imagen 16

**Grupo 2:**

Las únicas diferencias entre las figuras son los lados, por tanto el  
por tanto el tamaño



*Evidencia imagen 17*

**Grupo 3:**

**RESPUESTA:**  
Sí, cambian de tamaño y área. 😊

*Evidencia imagen 18*

**Grupo 4:**

**RESPUESTA:**  
Tienen áreas diferentes y están ubicadas de maneras diferentes  
(por su tamaño) Cuadrado 1 →  Cuadrado 2 → 

*Evidencia imagen 19*

## 2. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía

Tabla 26. Transcripciones o evidencias fase 2 de la guía

FASE 2	
MOMENTO O SEGMENTO	TRANSCRIPCIÓN O EVIDENCIA
<b>1.</b>	<p><b>Docente:</b> Primero, por qué y para qué vieron la necesidad de completar esa tabla, agregar valores</p> <p><b>Estudiante:</b> Para hacer un punto de por acá de un cuadrado o algo así</p> <p><b>Docente:</b> Para cuando les preguntaban por el área del cuadrado número 11 por ejemplo, ustedes llegaron utilizando la tabla. ¿Sí?</p> <p>¿Por qué este estaría en el paso 21, porque dice acá, si en la construcción geométrica en GeoGebra estuviera el cuadrado número 11 en qué paso estaría, por qué? Tú dices que estaría en el paso 21, ¿De dónde sacas que está en el paso 21?</p> <p><b>Estudiante:</b> Porque acá el 11, 21 por la tabla (señala la tabla) [ver “Evidencia imagen 20”]</p>

Cuadrado NÚMERO	Paso
1.	1
2.	3
3.	5
4.	7
5.	9
6.	11
7.	13
8.	15
9.	17
10.	19
11.	21

*Evidencia imagen 20*

**Docente:** Por la tabla, ¿viste la necesidad de completarla hasta el cuadrado 11? ... Dice aquí, ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier cuadrado y su respectivo paso? Tú dices que en cada segundo paso hay un nuevo cuadrado, ¿Cómo así que en cada segundo?

**Estudiante:** Número, o sea, uno, dos, cuadrado, uno, dos, cuadrado, un triángulo, un cuadrado. O sea que estaría ubicado en los impares

**Docente:** Bueno y eso ¿cómo lo ven ustedes? ¿Cómo hacen para llegar a eso?

**Estudiante:** Por el Geogebra, porque en la tabla [ver “Evidencia imagen 20”] vimos que el paso es dos veces el número y se le resta uno y eso siempre es un número impar, además vimos en la tabla que el paso de los cuadrados empieza en 1 y a partir de ahí se le suma de a 2 y mira si probamos por ejemplo para el cuadrado número 4 que mira está en el paso, uno, dos, tres cuatro, ..., siete, en el 7, pues

lo que hago es hacer 2 por 4 que da 8 y le resto 1 y ya nos da 7, y así se cumple con todos.

**Estudiante:** Sí profe porque ahí lleva una secuencia que es sumar siempre 2 a cada número impar.

**Docente:** Bueno, por favor escriban eso en su guía y precisen bien por qué son los impares y cómo hicieron para llegar a que se debe multiplicar el número por 2 y restarle 1.

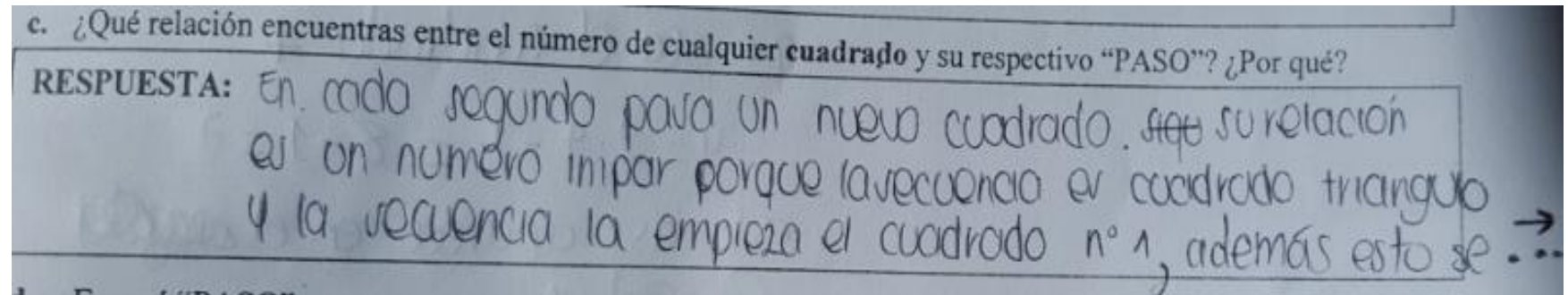
**Estudiante:** También se puede decir que porque lleva una secuencia ¿cierto?

**Docente:** ¿Cuál es la secuencia?

**Estudiante:** Cuadrado, triángulo, cuadrado, triángulo; ahí ya se ve que los cuadrados son de paso impar.

**Docente:** Escribanlo por favor.

[La respuesta que escriben los estudiantes en la guía se presenta a continuación (ver “Evidencia imagen 21 ” y “Evidencia imagen 22”)]



*Evidencia imagen 21*

Puede escribir multiplicando por el número  
y se resta uno si decimos que  $x$  sea  
el número del cuadrado y  $y$  su paso  
entonces quedaría:

$$y = x \cdot x - 1$$

$$y = 2 \cdot 4 - 1$$

y esto se cumple para  
todos. en el caso de  
que sea el cuadrado 4

$$y = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

esto así aparece en el ~~Geogebra~~  
GeoGebra.

*Evidencia imagen 22*

- 2.** [Un grupo de estudiantes responde la pregunta 2c en la guía como se muestra en la siguiente imagen (ver Evidencia imagen 23), la profesora les realiza preguntas al respecto]

c. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier **cuadrado** y su respectivo “PASO”? ¿Por qué?

RESPUESTA: Los cuadrados tienen pasos impares, los triángulos pasos pares.  
Los cuadrados aparecen en los pasos impares y tienen  $x$  ese número en la construcción  $y = 2 \cdot 2 - 1$   $x = \text{N}^\circ \text{ Cuadrados}$   
 $y = x - 2 - 1$   $2 + -1$   $y = 4 - 1$   $y = 3$

*Evidencia imagen 23*

**Docente:** Chicos por favor me cuentan qué respondieron en esta pregunta [¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier cuadrado y su respectivo “PASO”? ¿Por qué?] y ¿cómo llegaron a eso?

[Uno de los estudiantes explica cómo obtuvieron la ecuación que escriben como respuesta]

**Estudiante:** bueno, esto, ..., nosotros hicimos una ecuación para resolver esto,  $y=2x-1$ , y ¿cómo llegamos a deducir esto? “y” es igual al paso que necesitamos encontrar para hallar el paso del cuadrado, por 2, equis, ..., digo x es el número del cuadrado, por 2 porque el número de figuras que van formando la figura completa son dos cuadrado y triángulo, y el -1 porque para formar cada figura que está conformada por 2 toca restarle el triángulo que sería la segunda figura para que quede un cuadrado y así se sabe el número de su paso. Un ejemplo sería igual a  $y=2 \cdot 2-1$  que sería el paso del número, del cuadrado número 2, que el resultado sería 3 porque  $2 \text{ por } 2 = 4 - 1$ , es 3.

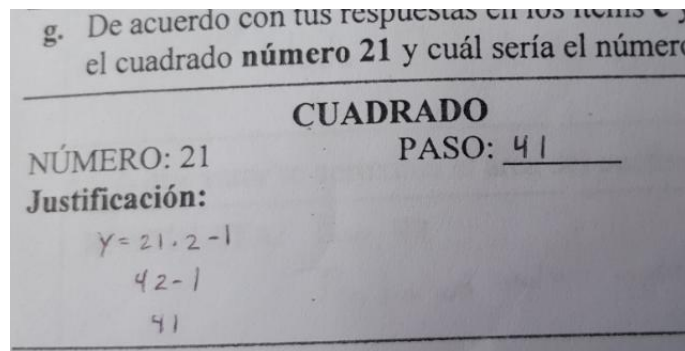
**Estudiante:** Sí, profe ya probamos con varios ejemplos y nos funcionó.

**Docente:** ¿Con cuáles ejemplos?

**Estudiante:** Pues por ejemplo, con los cuadrados que aparecen en GeoGebra, como para el cuadrado número 2 el paso es 3 porque se

hace lo mismo multiplicar 2 por 2 y restarle 1 o sea 3 y así mismo se hace con otros y sí funciona la ecuación.

[En otra de las preguntas (2.g) se solicita hallar el paso del cuadrado número 21, en este caso los estudiantes vuelven a usar la expresión general propuesta, (“ $y=2x-1$ ”) para encontrar la respuesta, esto se puede ver en la siguiente imagen.

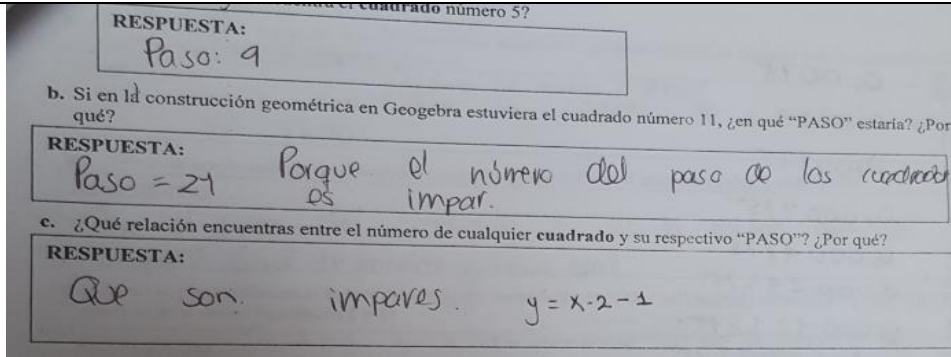


*Evidencia imagen 24*

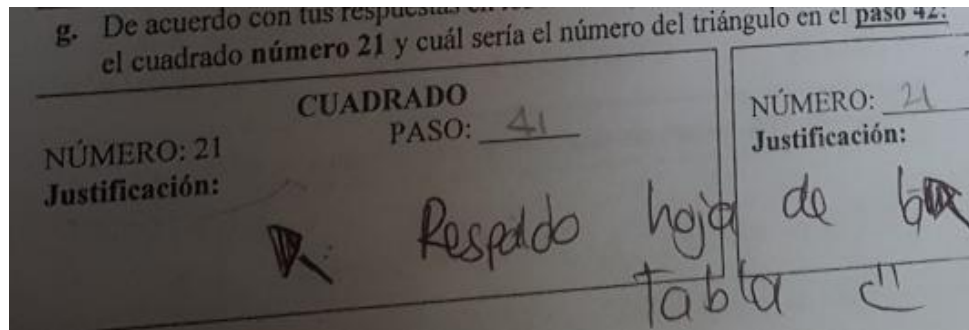
**Estudiante:** a profe, eso también pasa porque como son números impares, esa es la forma general de escribirlos [se refiere a la expresión  $y=2x-1$ ]

**Docente:** ah, bueno chicos escriban sus respuestas en la guía y continúen trabajando, gracias.

**3.** Respuesta a las preguntas 2a a 2c, 2g y tabla:



Evidencia imagen 25



Evidencia imagen 26

	No 11
11	21
12	23
13	25
14	27
15	29
16	31
17	33
18	35
19	37
20	39
21	41
22	43

23  
24  
25

*Evidencia imagen 27*

**4.** Respuesta a las preguntas 2a a 2c, 2g y tabla:

a. ¿En qué "PASO" se encuentra el **cuadrado** número 5?

**RESPUESTA:** En el paso 9.

b. Si en la construcción geométrica en Geogebra estuviera el cuadrado número 11, ¿en qué "PASO" estaría? ¿Por qué?

**RESPUESTA:** Estaría en el paso 21 ya que el anterior fue un triángulo y todos los pasos <sup>Paso 20</sup> son los números impares de los cuadrados.

c. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier **cuadrado** y su respectivo "PASO"? ¿Por qué?

**RESPUESTA:** Todos los números excepto el 1, le les suma el anterior, es decir, a ~~8~~ el cuadrado número 5 le sumo el 4.

$$\boxed{5} + 4 = 9$$

Número  
cuadrado

Número  
paso

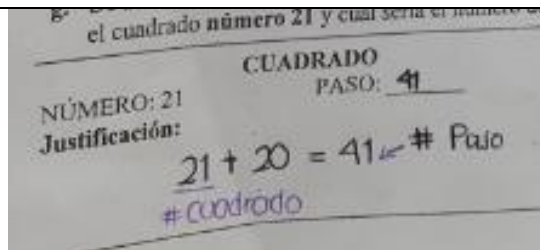
$$\boxed{8} + 7 = \boxed{15} \rightarrow \# \text{ paso.}$$

# cuadrado

$$\boxed{10} + 9 = 19$$

# paso.

d. ¿En qué "PASO" se encuentra el **triángulo** número 6?



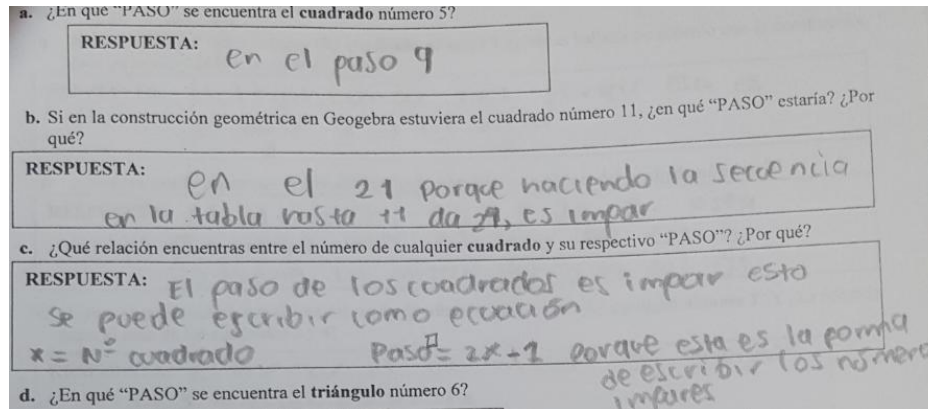
*Evidencia imagen 29*

Cuadrado NÚMERO	Paso
1.	1
2.	3
3.	5
4.	7
5.	9
6.	11
7.	13
8.	15
9.	17
10.	19

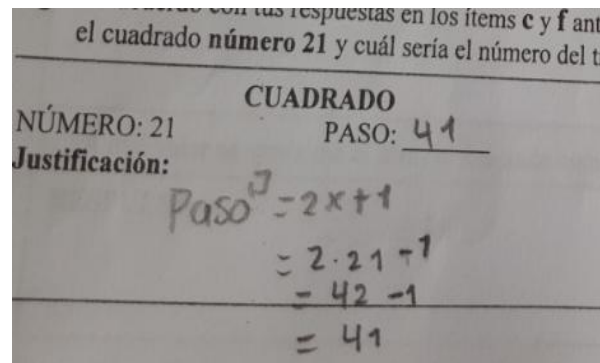
*Evidencia imagen 30*

5.

Respuesta a las preguntas 2a a 2c y 2g:



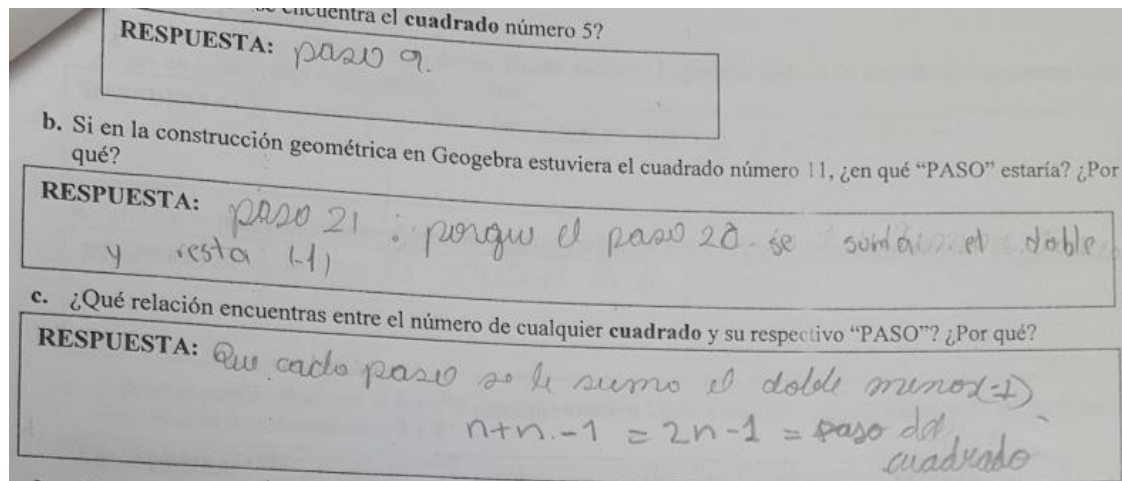
Evidencia imagen 31



Evidencia imagen 32

6.

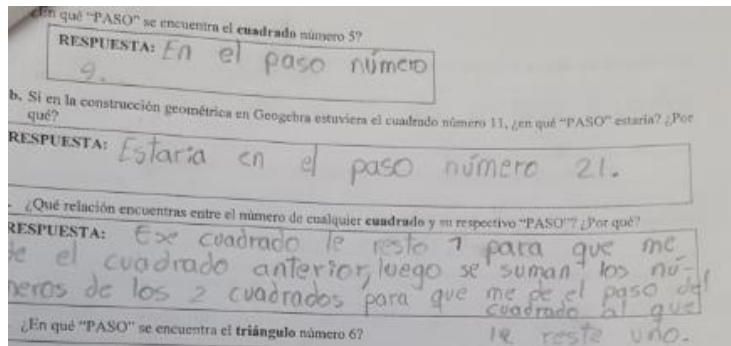
Respuesta a las preguntas 2a a 2c:



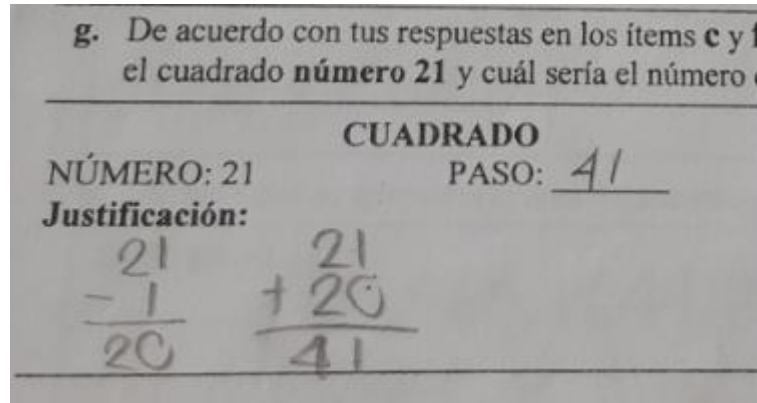
Evidencia imagen 33

7.

Respuesta a las preguntas 2a a 2c y 2g:



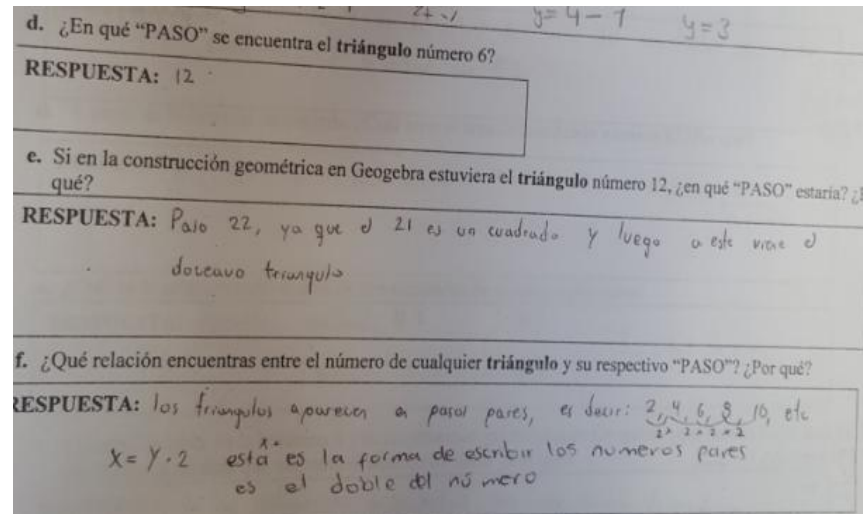
Evidencia imagen 34



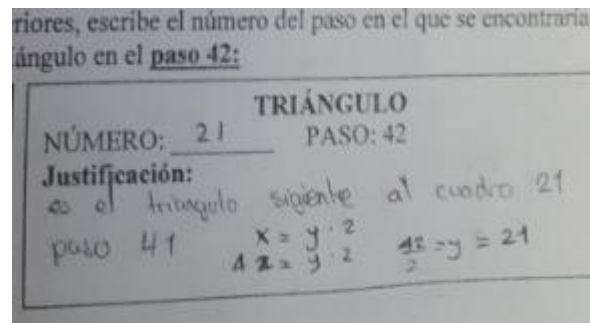
Evidencia imagen 35

8.

Respuesta de la preguntas 2d a 2f y 2g:



Evidencia imagen 36



Evidencia imagen 37

9.

### Respuesta de la preguntas 2d a 2f, 2g y tabla

d. ¿En qué "PASO" se encuentra el triángulo número 6?

RESPUESTA:  
Paso: 12

e. Si en la construcción geométrica en Geogebra estuviera el triángulo número 12, ¿en qué "PASO" estaría? ¿Por qué?

RESPUESTA:  
Paso = 24 Porque el número del paso de los triángulos es par.  $2 \times \text{# de triángulo} = \text{paso}$

f. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier triángulo y su respectivo "PASO"? ¿Por qué?

RESPUESTA:  
Que son pares 2, 4, 6, 8, 10, 12...

Evidencia imagen 38

y cuál sería el número del triángulo en el paso 42.

RADO		TRIÁNGULO
PASO: 41	NÚMERO: 21	PASO: 42
Justificación:		
Respecto hoja de trabajo		
tabla 2"		

Evidencia imagen 39

A handwritten table on a piece of paper. The title is 'Justificación' written at the top. Below it, there are two columns: 'No 11' and 'Justificación'. The numbers in the 'No 11' column are 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. The numbers in the 'Justificación' column are 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44. There are also some numbers written at the bottom left of the page: 23, 24, 25.

No 11	Justificación
11	21
12	23
13	25
14	27
15	29
16	31
17	33
18	35
19	37
20	39
21	41
22	43
	24
	26
	28
	30
	32
	34
	36
	38
	40
	42
	44

Evidencia imagen 40

**10.**

Tabla y respuesta de la preguntas 2d a 2f y 2g:

Triángulo NÚMERO	Paso	Ar tri
1.	2	
2.	4	C
3.	6	O.
4.	8	C
5.	10	O
6.	12	C
7.	14	C
8.	16	C
9.	18	
5	10.	20.

*Evidencia imagen 41*

d. ¿En qué "PASO" se encuentra el triángulo número 6?

**RESPUESTA:** Lo encuentra en el paso 12.

e. Si en la construcción geométrica en Geogebra estuviera el triángulo número 12, ¿en qué "PASO" estaría? ¿Por qué?

**RESPUESTA:** Estaría en el número 24 porque es el doble del número y los triángulos son los pasos pares.

f. ¿Qué relación encuentras entre el número de cualquier triángulo y su respectivo "PASO"? ¿Por qué?

**RESPUESTA:** El número del paso es el doble que el número del triángulo.

$8 \times 2 = 16$        $5 \times 2 = 10$        $1 \times 2 = 2$

# triángulo      # triángulo      # triángulo

# paso      # paso      # paso

Evidencia imagen 42

eriores, escribe el número del paso en el que se encontraría  
triángulo en el **paso 42:**

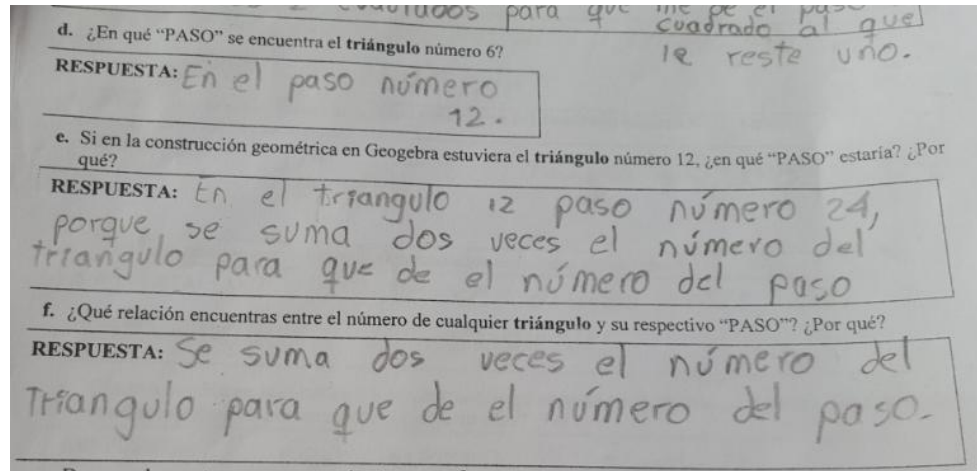
**TRIÁNGULO**  
NÚMERO: 22 PASO: 42

**Justificación:**  
Todos los números son pares y el cuadrado anterior fue 21.

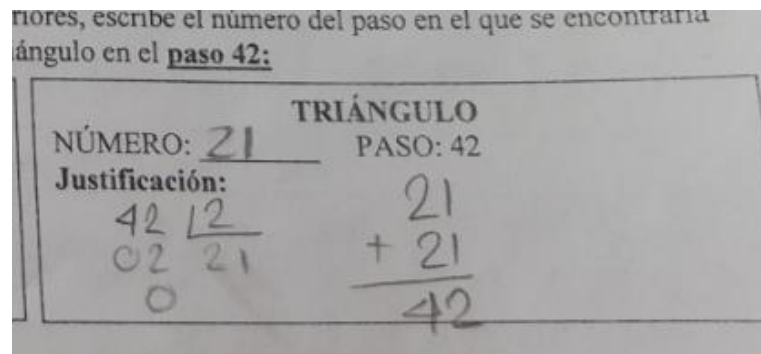
Evidencia imagen 43

11.

Respuesta de la preguntas 2d a 2f y 2g:



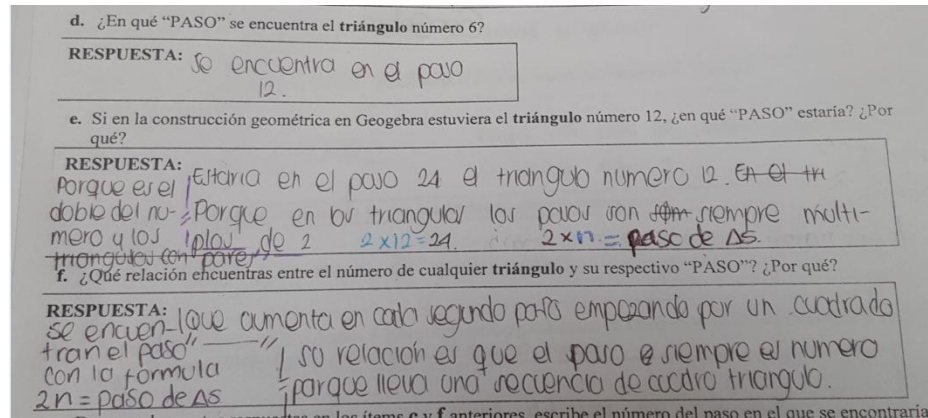
Evidencia imagen 44



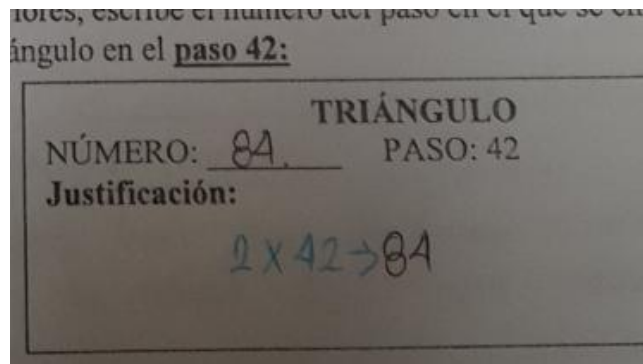
Evidencia imagen 45

12.

Respuesta de la preguntas 2d a 2f, 2g y tabla:



Evidencia imagen 46



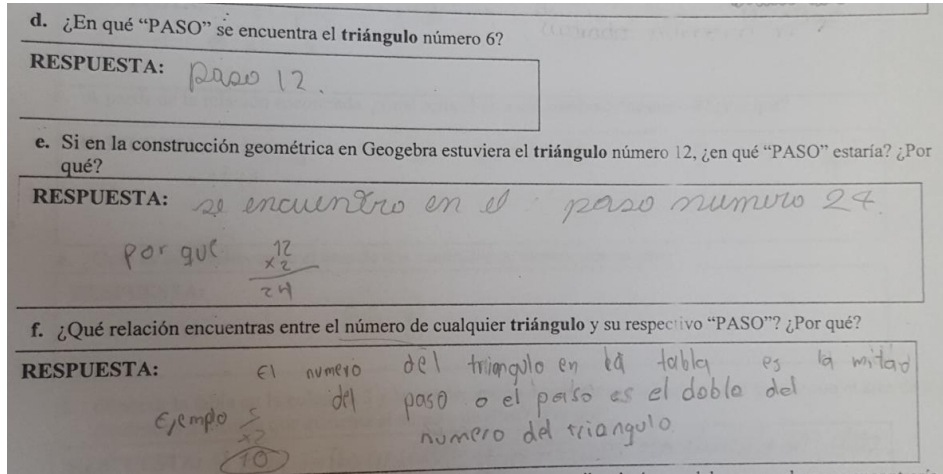
Evidencia imagen 47

Triángulo NÚMERO	Paso
1.	2
2.	4
3.	6
4.	8
5.	10
6.	12
7.	14
8.	16
9.	18
10.	20
11.	22
12.	24

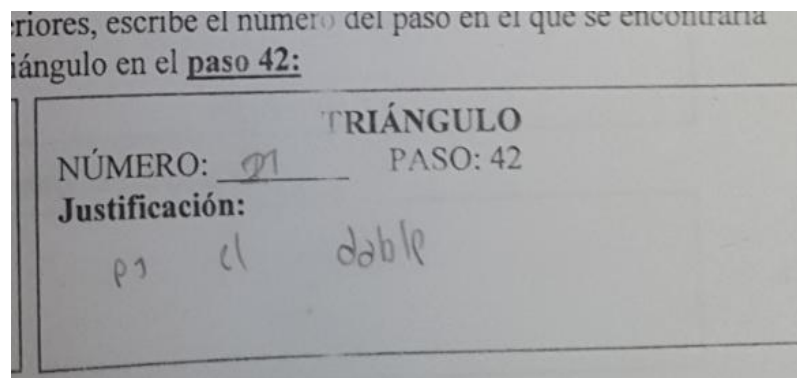
*Evidencia imagen 48*

13.

**Respuesta de la preguntas 2d a 2f y 2g:**



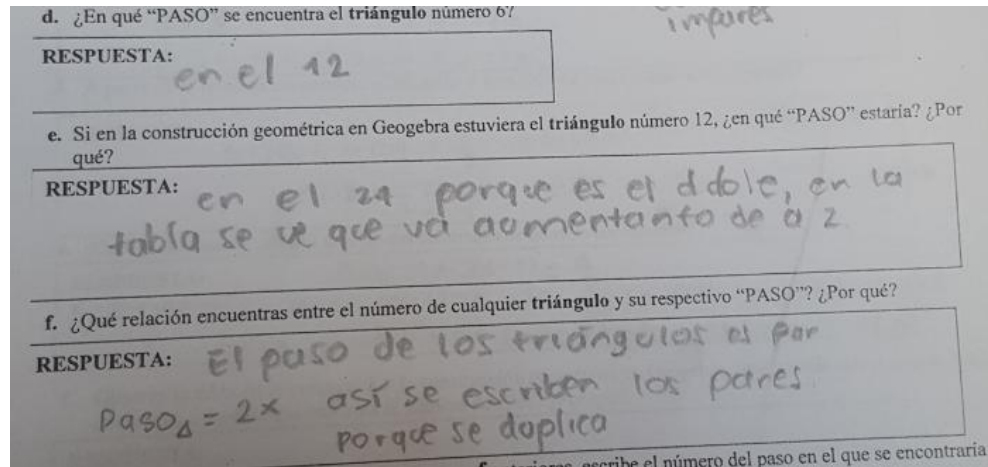
Evidencia imagen 49



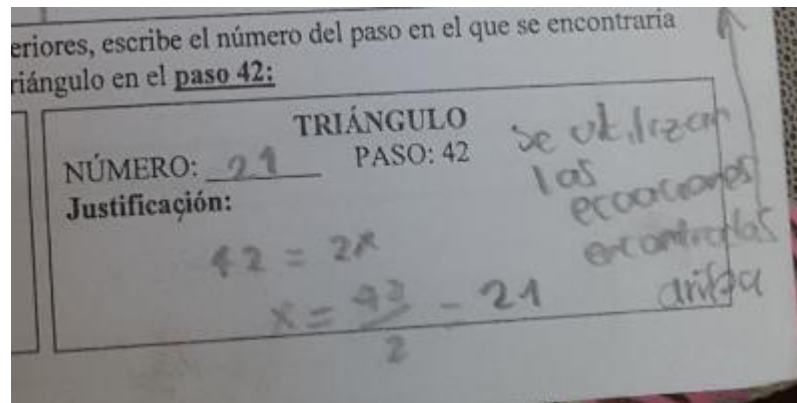
Evidencia imagen 50

14.

Respuesta de la preguntas 2d a 2f y 2g:



Evidencia imagen 51



Evidencia imagen 52

### 3. Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía

Tabla 27 Transcripciones o evidencias fase 3 de la guía

FASE 3	
MOMENTO	TRANSCRIPCIONES Y/O
FASE 3.1	CUADRADOS
1.	<p><b>Estudiante:</b> mira profe, me preguntan sobre el área del cuadrado número 25 y aquí [muestra la tabla] llega hasta el número 6...</p> <p><b>Docente:</b> Debes encontrar a qué valor se aproxima esa área.</p> <p><b>Estudiante:</b> Como tenemos hasta el número 6, entonces podríamos multiplicar ese valor [área del cuadrado] por 6 ¿no?</p> <p><b>Docente:</b> ¿Pero por qué lo multiplicas por 6?</p> <p><b>Estudiante:</b> porque hay más cuadrados ahí [entre el cuadrado 6 y el 25].</p> <p><b>Docente:</b> ¿y no podrían haber más cuadrados?</p> <p><b>Estudiante:</b> o sea, acá [Tabla].</p> <p><b>Docente:</b> si ahí estuviera el cuadrado número 25, ¿aproximadamente cuál sería su área?</p> <p><b>Estudiante:</b> las áreas cada vez van disminuyendo y es la mitad de cada cuadrado.</p> <p><b>Docente:</b> si va disminuyendo, y queremos encontrar el área de un cuadrado de número muy grande, ¿a qué se aproximaría su</p>

área?

**Estudiante:** cada cuadrado se va volviendo más pequeño cada vez, o sea que se aproximaría a cero, ¿cierto?

**Docente:** ¡exacto!, pero ¿por qué se va volviendo cero?

**Estudiante:** por lo que el área es 1 en el primero [cuadrado] y cada vez es la mitad.

**Docente:** entonces, si se quisiera saber cuál es el área aproximada del cuadrado número 100, ¿este es más pequeño o más grande que el primero?

**Estudiante:** es más pequeño.

**Docente:** ¿entonces el área ya casi se aproxima a qué?

**Estudiante:** a ser cero, ¡entonces es cero!

g. ¿A qué valor se aproxima el área del cuadrado número 25? ¿Por qué?

RESPUESTA: 0 porque va disminuyendo hasta llegar al menor número por lo que se ~~está~~ va poniendo la mitad del anterior cuadrado

*Evidencia imagen 53*

2.

**Respuestas de las preguntas b, c y d de la sección 3.1:**

¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 1 con el área del cuadrado número 2?

ESPUESTA: Al dividir  $1 \div 0.5$  da 2, o sea el  $\square_1$  tiene 2 veces el área del  $\square_2$  o el  $\square_2$  tiene la mitad del área del  $\square_1$

¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 2 con el área del cuadrado número 3? Y ¿La relación entre el área de los cuadrados 3 y 4?

RESPUESTA: El menor es la mitad del mayor  
 $A_{\square 3} \div A_{\square 2} = 0.5 = 1/2$   
 $A_{\square 4} \div A_{\square 3} = 0.5 = 1/2$

A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del cuadrado número 8? ¿Por qué?

RESPUESTA:  
 $A_{\square 8} \div A_{\square 7} = \frac{1}{2} \rightarrow$  esta es la relación  
 $A_{\square 8} = \frac{1}{2} A_{\square 7}$       $A_{\square 8} = \frac{A_{\square 7}}{2} = \frac{0.0156}{2} = 0.0078$

Evidencia imagen 54

**Respuestas de las preguntas c, d, e y f de la sección 3.1:**

entre el área de los cuadrados 3 y 4?

RESPUESTA: el cuadrado 4 es la mitad del área del cuadrado 3, y cuadrado #3 la mitad del #2

d. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del cuadrado número 8? ¿Por qué?

RESPUESTA: 0,0078 Justificación: cuadrado #7 = 0,0156  $\left| \begin{array}{r} 2 \\ 0 \end{array} \right| 0,0078$

e. ¿Cuál es la relación entre el área de dos cuadrados de número consecutivo?

RESPUESTA: ejemplo: cuadrado #1                      #2  
 área: 1    0.5                      la mitad de área

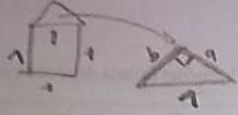
f. Observa la tabla en la columna 3 y la construcción geométrica en Geogebra, ¿qué sucede con cuadrados a medida que aumenta el número de ellos? ¿Por qué?

RESPUESTA: Se va reduciendo a la mitad con cada número de cuadrado  
 lado  $\square = h$  del triángulo: cateto  $\Delta =$  Lado siguiente  $\square$

Evidencia imagen 55

FASE 3.2	TRIÁNGULOS
1.	<p><b>Estudiante 1:</b> Necesito realizar unos cálculos, ¿cómo los puedo hacer con GeoGebra?</p> <p><b>Docente:</b> Si quieres utiliza tu calculadora. ¿Qué quieren hacer con la calculadora?</p> <p><b>Estudiante 1:</b> Encontrar el área del triángulo 7.</p> <p><b>Docente:</b> ¿Cómo están hallando esta área?</p> <p><b>Estudiante 1:</b> Mira, se encuentra con el área del cuadrado...</p> <p><b>Docente:</b> ¿Cuál cuadrado?</p> <p><b>Estudiante 1:</b> del cuadrado anterior, o sea, el que le da la hipotenusa, o bueno, digamos, sería la hipotenusa dividido en dos para que nos dé es la medida del cateto, mmm.... Entonces sería la medida del cateto por el otro, dividido en dos y ahí nos da el área del triángulo. [el ejemplo de esta afirmación se presenta a continuación]</p>

Emplo para el  $\square$  1:



como  $a=b$  y  $A_{\Delta} = \frac{\text{base} \cdot \text{alt.}}{2}$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times a}{2}$$

$$\Delta_1 \rightarrow A_{\Delta_1} = \frac{a^2}{2}$$

$$0.25 = \frac{a^2}{2}$$

$$2 \cdot 0.25 = a^2 = 0.5 = a^2 \quad \sqrt{a^2} = \sqrt{0.5}$$

$$a = 0.70710...$$

entonces para el  $\square$  2 el area se cuenta multiplicando lado x lado  
 así:  $0.70710... \times 0.70710... = 0.499999$

0.499999  
 se puede decir que es 0.5

Evidencia imagen 56

**Docente:** A partir de la relación encontrada ¿cuál sería el área del triángulo número 7? ¿Porque?

**Estudiante:** Mira la calculadora si vez lo divido

**Docente:** Dices acá, el área disminuye a la mitad, tú lo hiciste con la calculadora y como hiciste, dime que hiciste

**Estudiante:** Porque el área del último cuadrado entonces necesito dividir eso, dividirlo en dos, por lo que el área disminuye a la mitad

**Docente:** ¿cómo se dieron cuenta que iba disminuyendo a la mitad?

**Estudiante:** Porque esa es la mitad

**Docente:** Como hicieron para saber que era la mitad

**Estudiante:** Porque si tú ves tú vas dividiendo y si da.

**Docente:** ¿En qué divides?

**Estudiante:** Se divide en dos, o sea seria la mitad

**Docente:** Y como hicieron eso, con la calculadora o como

**Estudiante:** Con la calculadora

**Docente:** A bueno listo, vas a hacerlo hay con la calculadora, que estas dividiendo tu

**Estudiante:** El área de esto

**Docente:** Esa área para encontrar el triángulo siguiente

**Estudiante:** Si, porque esto es un 6

**Docente:** El área de qué número es ese triángulo

**Estudiante:** El 6

**Docente:** El triángulo 6 y quieres encontrar el área del triángulo 7

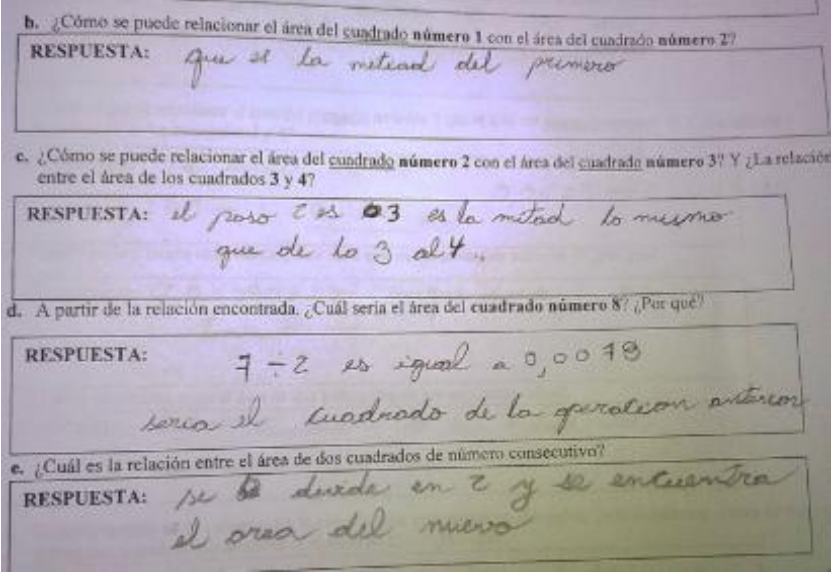
**Estudiante:** Se divide entre dos

**Docente:** Entonces lo divides entre dos, entonces ese valor, ese número 0,039 sería el área del siguiente

**Estudiante:** El área del 7

**Docente:** Listo, ustedes como hicieron para llegar hasta hay sabiendo eso, simplemente lo iban dividiendo entre dos y veían que siempre se cumplía

**Estudiante:** Siempre se cumplirá la regla.

	 <p>b. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 1 con el área del cuadrado número 2?  <b>RESPUESTA:</b> que es la mitad del primero</p> <p>c. ¿Cómo se puede relacionar el área del cuadrado número 2 con el área del cuadrado número 3? Y ¿La relación entre el área de los cuadrados 3 y 4?  <b>RESPUESTA:</b> el paso es 0,3 es la mitad lo mismo que de lo 3 al 4.</p> <p>d. A partir de la relación encontrada, ¿Cuál sería el área del cuadrado número 8? ¿Por qué?  <b>RESPUESTA:</b> <math>7 \div 2</math> es igual a 0,0010 sería el cuadrado de la generación anterior</p> <p>e. ¿Cuál es la relación entre el área de dos cuadrados de número consecutivo?  <b>RESPUESTA:</b> se divide en 2 y se encuentra el área del nuevo</p> <p style="text-align: center;"><i>Evidencia imagen 57</i></p>
2.	<p><b>Estudiante:</b> ¿ahí tengo que contestar, cual es la relación entre el número un triángulo con el triángulo consecutivo?</p> <p><b>Docente:</b> si, tú empiezas a estudiar cada par de triángulos, por ejemplo, el área del triángulo 1 con la del 2, la del 2 con el 3, el 3 y el 4, y así sucesivamente... ¿cuál es la relación?</p> <p><b>Estudiante:</b> Que lo puedo multiplicar por 0,5 y siempre me va a dar el área del siguiente triángulo.</p> <p><b>Docente:</b> ¿Y por qué por 0,5?</p> <p><b>Estudiante:</b> porque me da, la respuesta me da, ¡siempre que multiplica por 0,5 me da! [muestra el resultado en su calculadora]</p>

a. ¿Cómo se puede relacionar el área del triángulo número 1 con el área del triángulo número 2?

RESPUESTA: El área hay que multiplicarlo por 0.5.

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.125 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0.125 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.0625 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0.0625 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.0313 \end{array}$$

b. ¿Cómo se puede relacionar el área del triángulo número 2 con el área del triángulo número 3? Y ¿La relación entre el área de los triángulos 3 y 4?

RESPUESTA: Al igual que el área de los cuadrados hay que multiplicar los por 0.5.

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.125 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0.125 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.0625 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0.0625 \\ \times 0.5 \\ \hline 0.0313 \end{array}$$

c. A partir de la relación encontrada. ¿Cuál sería el área del triángulo número 7? ¿Por qué?

RESPUESTA:

El área del triángulo número 7 es  $0,003906250^2$ .

d. ¿Cuál es la relación entre el área de dos triángulos de número consecutivo?

RESPUESTA: El área del número de triángulo anterior hay que dividirlo en 2 o multiplicarlo por 0.5.

Evidencia imagen 58

### FASE 3.3

### RELACIÓN CUADRADO – TRIÁNGULO

**Estudiante 1:** [Sesión 2 de aplicación, se retoma la guía en la pregunta número 3,3 b] ¿A ver en qué nos quedamos?

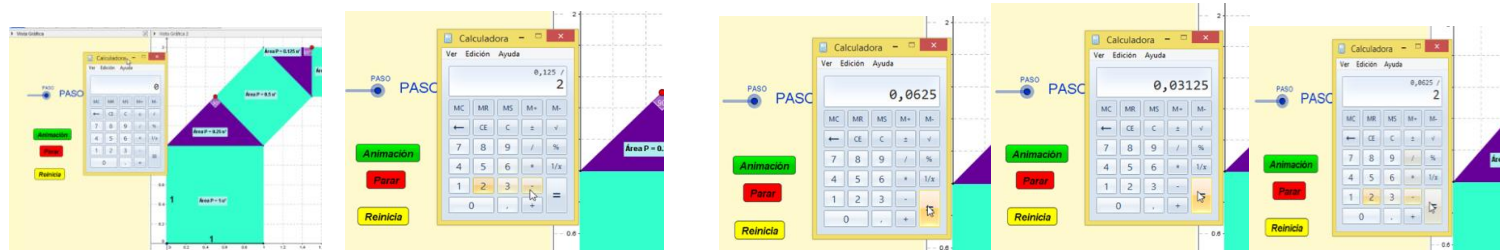
**Estudiante 2:** El área del triángulo 4...

**Estudiante 1:** [Lee la pregunta de la actividad] ¿Qué relación tiene el área del cuadrado número 4 con el área del triángulo número 4?

**Estudiante 2:** Pongamos la calculadora

[Los estudiantes usan la calculadora y realizan los pasos que se muestran en las siguientes imágenes]

1



*Evidencia imagen 59*

[Los estudiantes escriben el área del **cuadrado 4**, la dividen entre 2 y obtienen el número 0,0625 y a este lo dividen entre 2 nuevamente y se dan cuenta que es el número 0,03125, correspondiente al valor del área del **triángulo 4**] Tras realizar tales procedimientos en la calculadora se continúa el diálogo:

**Estudiante 1:** ¡Ah, es la mitad! La mitad de la mitad del área, o sea una cuarta parte.

**Estudiante 2:** Sí, es una cuarta parte

[Luego observan la tabla registrada en las columnas 10]

**Estudiante 2:** Ah, sí, también mire que en la tabla siempre nos dio 4, o sea es como si uno fuera 4 veces el otro o uno la cuarta parte del otro.

el área del cuadrado con el área del triángulo

$1 / 0.25 = 4$
$0.5 / 0.125 = 4$
$0.25 / 0.0625 = 4$
$0.125 / 0.03125 = 4$
$0.0625 / 0.015625 = 4$
$0.03125 / 0.0078125 = 4$
$0.015625 / 0.00390625 = 4$
$0.0078125 / 0.001953125 = 4$
$0.00390625 / 0.0009765625 = 4$

*Evidencia imagen 60*

**Estudiante 1:** sí, bueno, ¿cómo respondemos la pregunta?

**Estudiante 2:** El área del cuadrado número 4 es 4 veces el área del triángulo número 4. ¡Listo!

INFORMACIÓN:  
RESPUESTA: El área del cuadrado #4 es 4 veces el área del triángulo #4

*Evidencia imagen 61*

**Estudiante 1:** [Lee la pregunta 3.3.c] ¿Qué relación tienen las áreas de los cuadrados y los triángulos que tienen el mismo número, por ejemplo  $n$ ? Digamos el triángulo... siempre son la cuarta parte.

**Estudiante 2:** El área del cuadrado de un número es 4 veces...

**Estudiante 1:** el área del triángulo del mismo número.

[Los estudiantes responden lo que se encuentra en la siguiente imagen]

¿Se cumple esa relación?  
RESPUESTA: Siempre son la cuarta parte, es decir, el área del cuadrado de un número es cuatro veces el área del triángulo del mismo número, esto se observa en la columna 10 y en los cálculos de la calculadora también se puede explicar así.  
d. ¿Qué relación tiene el área del cuadrado número 2 con el área del triángulo número 2?

*Evidencia imagen 62*

**Estudiante 1:** Bueno, ¿por qué se cumple esto?, toca escribir por qué se cumple

**Estudiante 2:** Pues porque en la calculadora nos dio eso

**Estudiante 1:** (sonríe) Sí, pero acuérdense que la profesora dijo que respondiéramos mejor...

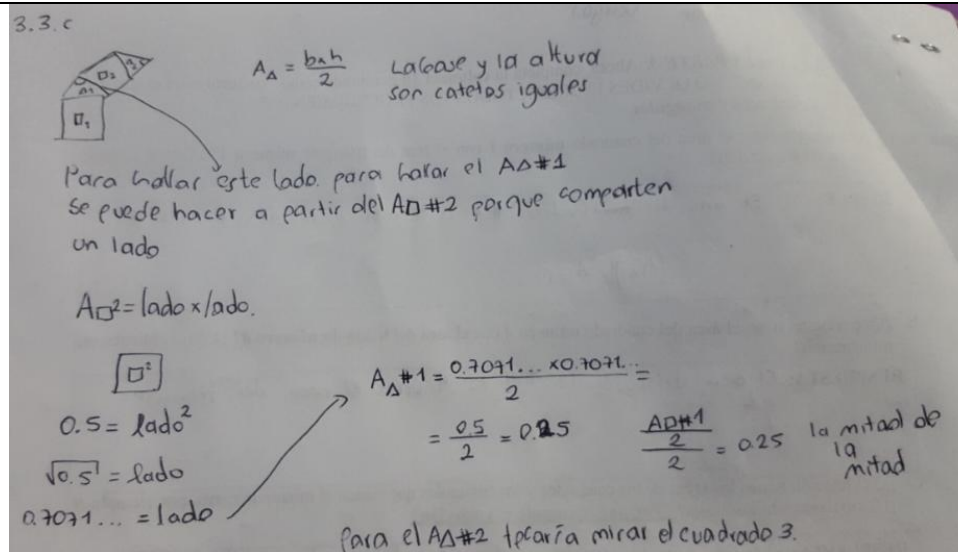
**Estudiante 2:** Se puede con el área del triángulo y del cuadrado porque comparten un lado y sabemos el área del cuadrado 1 y 2 entonces podemos hallarlo.

**Estudiante 1:** ¿Cómo es que es la fórmula del área del triángulo?

**Estudiante 2:** base por altura sobre dos

**Estudiante 1:** a bueno, pero la base y la altura son iguales, son los catetos. ¿Cómo hacemos es que no sé cómo explicarlo? Voy a hacer un dibujo [Observar las siguientes imágenes]

[Al respaldo de la hoja realizan los procedimientos que se ilustran a continuación]



Evidencia imagen 63

2

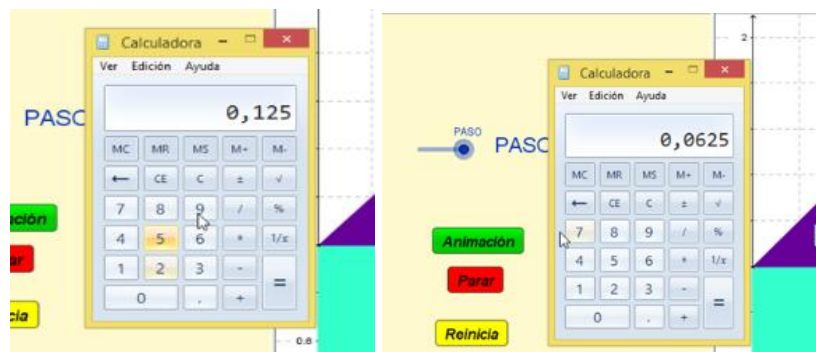
**Estudiante 1:** [Lee la pregunta de la guía] ¿Qué relación tiene el área del cuadrado número 2 con el área del triángulo número 1? ¿Qué te permite realizar esa afirmación?

**Estudiante 2:** que el cuadrado número, ¿qué?, 2 tiene el doble del área del cuadrado número 2.

**Estudiante 1:** [Escribe en la hoja de la guía] El área del cuadrado número 2 es el doble del área del triángulo número 1.

**Estudiante 1:** [Lee la pregunta de la guía] ¿Qué relación tiene el área del cuadrado número 4 con el área del triángulo número 3? Cuadrado 4, ¿triángulo 3?

[Los estudiantes usan la calculadora, escriben el valor del área del cuadrado número 4 y lo dividen entre 2, obteniendo, el valor del área del triángulo 3 (0,0625)]



*Evidencia imagen 64*

**Estudiante 2:** el área del triángulo 3 es la mitad de...del área del cuadrado número 4 [Los estudiantes escriben esta respuesta en la hoja de la guía]

**Estudiante 1:** ¿Qué relación tiene el área del cuadrado número “n” con el área del triángulo número “n-1”?

**Estudiante 2:** y hay que justificarlo... Preguntémosle a la profesora

**Estudiante 1:** No mire ya sé ¿qué relación tiene el cuadrado número n? creo que es un número que nosotros elijamos, por ejemplo 11 ¿sí?

**Estudiante 1:** A ver digamos el cuadrado número n, el cuadrado número 11 con el área del triángulo n-1, o sea este [señalan en la vista de la construcción en Geogebra el triángulo número 10], es la misma [señalan el valor de las áreas en la vista de la

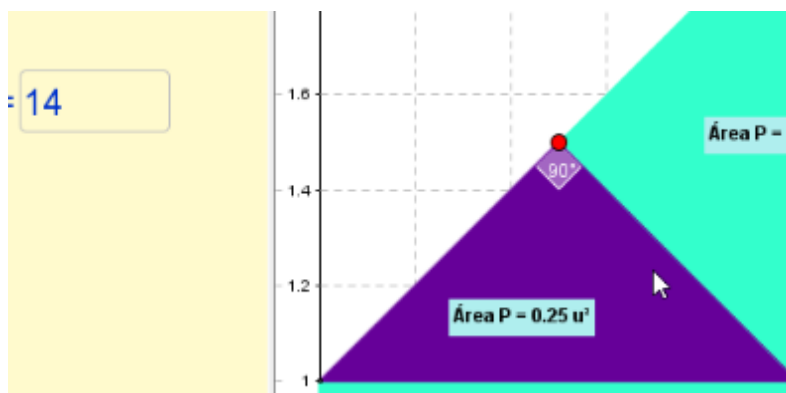
construcción].

**Estudiante 2:** ¿qué? ¿cómo puede ser la misma? Ya habíamos visto que no eran las mismas. ¿Cómo pasó eso? [Los estudiantes arrastraron el valor del área de las figuras en la construcción y cambiaron el orden los valores, parece ser que no se dieron cuenta de ello en el momento que llegaron a responder esta pregunta]

**Estudiante 1:** A ver... qué hacemos

**Estudiante 2:** No, ponga otra, para otra figura... siga avanzando

**Estudiante 1:** Escribamos, depende, en algunos casos... el área del cuadrado, cuadrado entre comillas “n”, es el doble... Es que digamos entre triángulos y cuadrados empezamos con diferente área, empezamos con este [señala el triángulo 1], siendo una cuarta parte (ver la siguiente imagen) ¿sí?

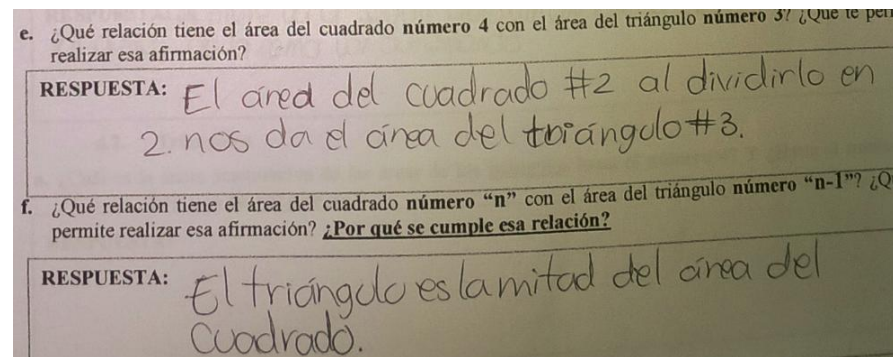


Evidencia imagen 65

**Estudiante 2:** cuando llega al cuadrado número ¿qué? 1, 2, 3, 4, 5

**Estudiante 1:** Depende, en algunos casos, el área del cuadrado  $n$  es el doble del triángulo  $n-1$ , veamos cuántos casos podemos ver acá.

**Estudiante 1:** qué casos, o sea qué cuadrado es... 1, 2, 3, 4, 5, 6...



*Evidencia imagen 66*

3

**Docente:** Buenos días, dime

**Estudiante:** Aquí dice ¿qué relación tienen las áreas los cuadrados y los triángulos que tienen el mismo número? Por ejemplo  $n$ , y yo acá pues me he dado cuenta que acá se repiten, acá están iguales las áreas.

**Docente:** ¿Qué estás mirando que es igual?

**Estudiante:** Que dice ¿qué relación tienen las áreas de los cuadrados que tienen el mismo número? ¿Cómo así el número?

**Docente:** El mismo número es que tenga el cuadrado uno con el triángulo uno, por ejemplo acá dice número uno número uno, el número cuatro número cuatro y aquí ya te dicen por ejemplo  $n$ , es cualquiera. ¿Qué relación tiene cualquiera, entre cualquiera y cualquiera? ¿Aquí qué relación encontraron?

**Estudiante:** Que la división daba 3,9999 o sea se acerca a 4

**Docente:** ¿Y por qué se acerca a 4?

**Estudiante:** Porque da 3,99999...

**Docente:** A ya, el cociente

**Estudiante:** Si

**Docente:** Bueno listo, digamos acá como sería para un  $n$  y otro  $n$ , o sea que tengan el mismo número, cualquiera, si yo te digo por ejemplo el 25, que va a pasar entre el 25 y el 25, el cuadrado 25 y el triángulo 25 ¿qué va a pasar? O si te digo no, el 25 no, sino el 30 ¿qué va a pasar hay? Esta  $n$  significa cualquiera como la generalidad, ¿qué pasa? ¿Qué va a pasar hay? ¿Qué creen que pasaría? ¿Qué relación encontrarían entre el área del cuadrado con el triángulo que tengan el mismo número?

**Estudiante:** Pues toco ponernos a dividir

**Docente:** Si claro y encontraron eso

**Estudiante:** Esa es una relación, pues que tengan el mismo número, pues que están divididos ¿no?

**Docente:** ¿Qué están divididos?

**Estudiante:** Sí, ese es el cuadrado número 1 y el triángulo número 1

**Docente:** ¿Qué relación encuentras entre el área del uno y del otro? ¿El 1 y el 1? Miren acá lo pueden describir

**Estudiante:** Pues que su división da 4

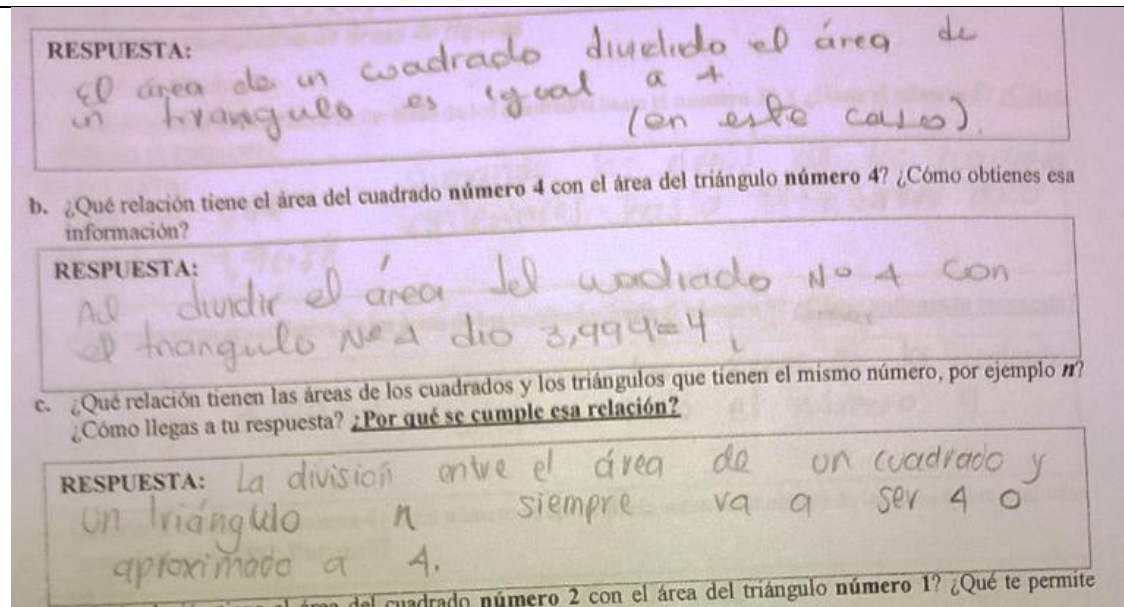
**Docente:** Y ya miraron si siempre da 4

**Estudiante:** O sea la otra vez nosotros vimos que daba así, entonces por aproximamiento da 4 prácticamente, por unas décimas no mas

**Docente:** ¿Y yo lo puedo afirmar para cualquiera? ¿Tú crees que sí?

**Estudiante:** Si porque si no más hasta el 7 va hasta 4 y tal vez para el 30 puede ser 4

**Docente:** O sea si uno ya va a decir para cualquiera, puede decir que es 4, ustedes creen que sí... Por favor comprueben y escriban acá los resultados



Evidencia imagen 67

4

**Estudiante 2:** ¿Cómo así, esto es dividido?

**Docente:** Si, acuérdate ¿qué significa el cociente?

**Estudiante 2:** Bueno, entonces me quedaría 1 dividido entre 0,25... (realizan la operación en la calculadora) ¡Nos da 4!

**Estudiante 3:** Espera y yo intento (realiza  $1/0,25$  en la calculadora). ¡Uy si, da 4!, ¿Por qué?

**Docente:** ¿Por qué creen que da 4?

	<p><b>Estudiante 2:</b> porque al ser decimal nos cambia todo.</p>
<p><b>5</b></p>	<p><b>Estudiante 5:</b> Profe, cierto que la relación entre el área del cuadrado número 4 con el triángulo número 4 es la misma que la relación que hay entre las áreas del cuadrado 1 y el triángulo 1.</p> <p><b>Docente:</b> ¿Cómo logras concluir eso?</p> <p><b>Estudiante 5:</b> Haciendo la misma división que en el primero, osea, dividiendo el área del cuadrado número 4 entre 4 y se obtiene el área del triángulo.</p> <p><b>Docente:</b> y ¿Por qué entre cuatro? ¿Por qué no otro número? ¿Cómo te diste cuenta que es la cuarta parte?</p> <p><b>Estudiante:</b> Porque si se divide entre cuatro da el resultado del triángulo que sigue. [la relación entre el área del cuadrado y el del triángulo es 4]</p> <p><b>Docente:</b> ¿Probaste de primeras con cuatro?</p> <p><b>Estudiante:</b> No, primero intenté con el 2 y luego con el 4.</p> <p><b>Docente:</b> Termina los ejercicios sobre los cocientes entre las áreas de los cuadrados y los triángulos, y determina una relación con lo que acabas de encontrar.</p>
<p><b>6</b></p>	<p><b>Docente:</b> ¿Cuál es la relación entre el cuadrado número 4 con el número 3?</p> <p><b>Estudiante a:</b> Que no tienen la misma área, uno es más pequeño que el otro.</p>

**Docente:** ¿pero qué relación hay entre los dos cuadrados?

**Estudiante a:** Que es la mitad de este [Un cuadrado es la mitad del cuadrado anterior]

**Docente:** ¿estás seguro que es la mitad?

**Estudiante b:** mm... mentiras tres veces menos, osea... ¡un cuarto!

**Docente:** ¿entonces por qué en la guía escribiste que era la mitad?

**Estudiante a:** ¡si, en éste es la mitad!

**Estudiante b:** No, no, no... ponle cuidado... es el cuadrado número 2, no el número 1, el cuadrado número 2 ese si es la mitad del triángulo número 1.

**Docente:** bueno, ahora que dicen que el área del cuadrado es la mitad del triángulo anterior para ese caso [Cuadrado #2], entonces, ¿qué relación hay entre el área de cualquier cuadrado, por ejemplo el número 15 y el área del triángulo anterior?

**Estudiante:** Que va a ser la mitad.

**Docente:** ¡exacto! Ahora, ¿cuál sería la relación entre el cuadrado  $n$  y el triángulo  $n-1$ , osea el anterior al cuadrado?

**Estudiante a:** ¿ $n$  es un cuadrado cualquiera?

**Docente:** si, entonces ¿qué relación guardan estas figuras?

**Estudiante b:** que uno es la mitad del otro.

**Docente:** ¿Por qué creen que es la mitad?

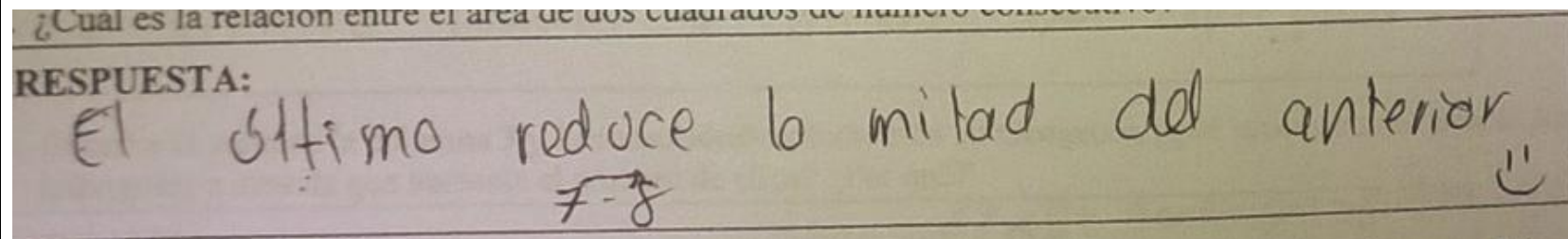
**Estudiante b:** porque el cuadrado que está adelante es el doble del triángulo que está atrás.

**Docente:** ¿De dónde sacas esa información?

**Estudiante b:** ¡Solo viendo!, mira profe, por ejemplo 125 más 125 eso da 250, y éste..., digamos es 6 250, osea... agg, ¡no sé cómo decirlo!

**Estudiante a:** ¡Siempre es la mitad!

**Estudiante b:** o sea, el triángulo anterior siempre va a ser la mitad del cuadrado que está adelante.



Evidencia imagen 68

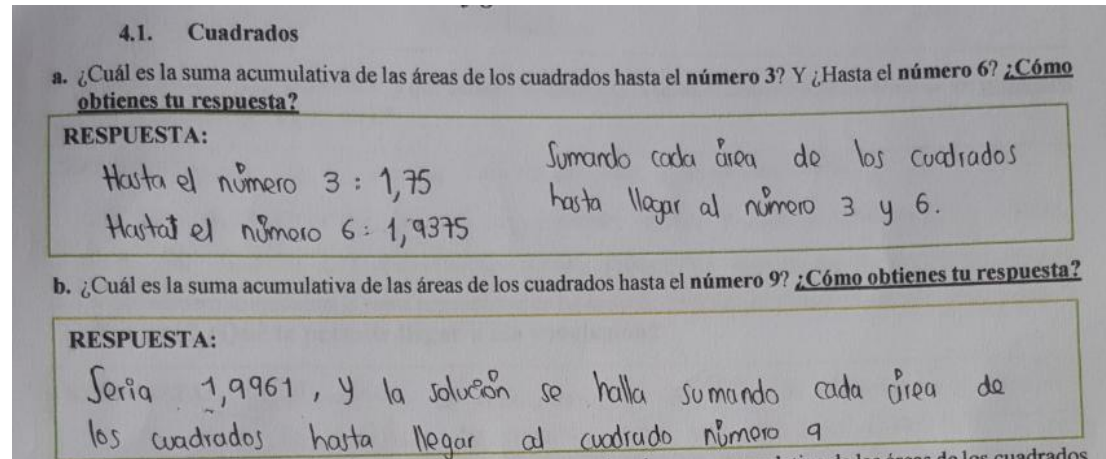
#### 4. Transcripciones o evidencias fase 4 de la guía

Tabla 28. Transcripciones o evidencias fase 4 de la guía

Fase 4	
MOMENTO O SEGMENTO	TRANSCRIPCIÓN

## RELACIONES ÁREAS ACUMULATIVAS ENTRE CUADRADOS

Respuesta de la preguntas 4.1 a y 4.1 b de la guía:



Evidencia imagen 69

[Los estudiantes desarrollan el ítem 4 de la guía, en particular la pregunta 4.1. c, que se precisa como: “Observa la tabla en la columna 4 ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el número 25? ¿Por qué? ¿Cómo obtienes tu respuesta?”]

**Estudiante:** Profe tengo que buscar hasta el número 25 que me da

**Docente:** No, aproximadamente cuánto te da

1.

**Estudiante:** O sea ¿a qué número se aproxima?, a ya, a 2 ¿sí?

**Docente:** ¿Se está aproximando a 2?

**Estudiante:** Pues sí profe

**Docente:** Cómo es que se va aproximando a 2

**Estudiante:** Pues porque va creciendo el número ¿no?

**Docente:** ¿Por qué dices que es a 2?

**Docente:** ¿cómo hiciste para llegar a eso?

**Estudiante:** Porque mira da 1.9961 [señala la tabla, ver Evidencia imagen 70] hasta llegar al noveno cuadrado, ¿entonces solo escribo así aproximado a 2?

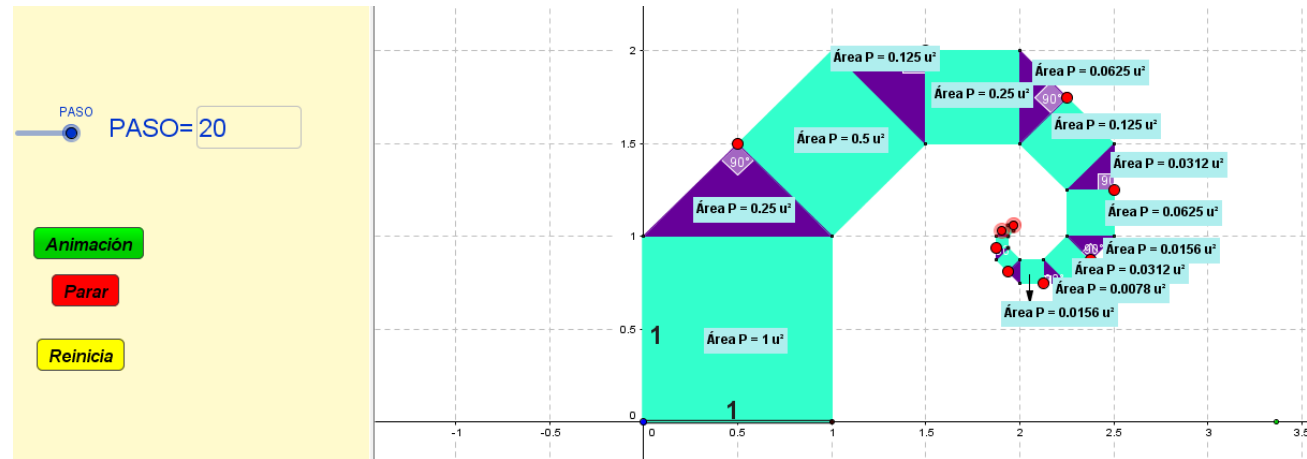
Paso	Área del cuadrado	Suma acumulativa de las áreas de los cuadrados
1	1	1
3	0,5	$1 + 0,5 = 1,5$
5	0,25	$1,5 + 0,25 = 1,75$
7	0,125	$1,75 + 0,125 = 1,875$
9	0,0625	$1,875 + 0,0625 = 1,9375$
11	0,0313	$1,9375 + 0,0313 = 1,9688$
13	0,0156	$1,9688 + 0,0156 = 1,9844$
15	0,0078	$1,9844 + 0,0078 = 1,9922$
17	0,0039	
19		
21		
		1,9999

$\Downarrow$   
 Se aproxima a  
 2

Evidencia imagen 70

**Docente:** Y ¿por qué crees que se aproxima a 2?

**Estudiante:** Porque profe mira que el tamaño de los cuadrados se va haciendo más pequeño [señala la construcción geométrica en el applet de la guía y la tabla en la columna 3] así que cada vez el aumento es más pequeño



Evidencia imagen 71

[Los estudiantes responden la pregunta 4.1. c de la guía como se ilustra en la siguiente imagen (ver Evidencia imagen 72)]

c. Observa la tabla en la columna 4 ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el número 25? ¿Por qué?

**RESPUESTA:**

A 2 porque a medida que va avanzando la suma de las áreas va creciendo el número, pero cada vez el aumento es menor.

*Evidencia imagen 72*

**Estudiante:** Sí profe, además el área de los cuadrados va disminuyendo porque cada uno es la mitad del anterior.

[Los estudiantes responden la pregunta 4.1. d de la guía como se ilustra en la siguiente imagen (ver Evidencia imagen 73)]

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta un número "muy grande"? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?

**RESPUESTA:**

Va a aumentar muy poco hasta poder llegar a un número finito ya que el área que son siguientes a sumar son la mitad del área anterior.

decimos que a 2.

*Evidencia imagen 73*

2.

cuadrado NUMERO	Paso	Área del cuadrado	Suma acumulativa de las áreas de los cuadrados
1.	1	1	1
2.	3	0.5	1.5
3.	5	0.25	1.75
4.	7	0.125	1.875
5.	9	0.0625	1.9375
6.	11	0.0313	1.9688
7.	13	0.0156	1.9844
8	15	0.0078	1.9922
9	17	0.0039	1.9961

Evidencia imagen 74

#### 4.1. Cuadrados

a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el número 3? Y ¿Hasta el número 6? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA:  $\square \#3 = 1.75$   
 $\square \#6 = \del{1.9961}$   
1,9688

Se obtuvieron resultados sumando progresivamente el Área de cada cuadrado con la calculadora

b. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el número 9? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA:  $R_{1a} = 1.9961$

Sumando el valor del Área de los cuadrados  $\square \#8$  y  $\square \#9$  a la suma acumulativa anterior

c. Observa la tabla en la **columna 4** ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta el número 25? ¿Por qué?

RESPUESTA: A 2 aproximadamente, ya que cada vez se suma mucho menos a la suma acumulada

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los cuadrados hasta un número "muy grande"? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?


RESPUESTA: A 2 aproximadamente, ya que cada vez el área de cada cuadrado será menor y no sumará mucho

Evidencia imagen 75

## TRIÁNGULOS

3.

Triángulo NÚMERO	Paso	Área del triángulo X	Suma acumulativa de las áreas de los triángulos	Ac ent y
1.	2	0.25	0.25	1 +
2.	4	0.125	0.25 + 0.125 = <b>0.375</b>	0,5 0
3.	6	0,0625	0,375 + 0,0625 = 0,4375	0,25
4.	8	0,0313	0,4375 + 0,0313 0,4688	0,12
5.	10	0,0156	0,4688 + 0,0156 0,4844	0,06
6.	12	0,0078	0,4844 + 0,0078 0,4922	0,03
7.	14	0,0039	0,4922 + 0,0039 0,4961	
8	16	0,00195	0,4961 + 0,00195 0,49805	
9	18	0,000975	0,49805 + 0,000975 0,499025	
10	20			
11	22			
12	24			
			0,49999	

  
 se aproxima  
 a 0.5

Evidencia imagen 76

4.2. Triángulos

a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 4? Y ¿Hasta el número 6? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA: ~~0,007~~ 0,007 ya que se van sumando todos los áreas de los triángulos

Hasta 4: 0,4688  
Hasta 6: 0,4922

Evidencia imagen 77

a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 9? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA: 0,499025 Se va sumando el área del anterior la acumulativa y se le suma el área del siguiente triángulo, esto se puede mirar en la tabla.

c. Observa la tabla en la columna 4 ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 28? ¿Por qué?

RESPUESTA: A 0.5 en la tabla se ve  $\Leftarrow$  al respaldo.  
Se van aumentando cifras decimales a la acumulativa pero cada vez se suma un número más pequeño que es la mitad del anterior.

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta un número "muy grande"? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?

RESPUESTA: Igualmente se aproxima a 0.5. se observa la secuencia de la tabla. se acerca cada vez más a 0.499999... el poquito que se añade cada vez es más poquito en infinito sería casi 0.5 pero no alcanza a serlo.

Evidencia imagen 78

4.

4.2. Triángulos

a. ¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 4? Y ¿Hasta el número 6?  
¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA:  $A\#4 = 0,4688$       sumando progresivamente el  
 $A\#6 = 0,4922$       area de cada triangulo

*Evidencia imagen 79*

Triángulo NÚMERO	Paso	Área del triángulo
1.	2	0.25
2.	4	0.125
3.	6	0.0625
4.	8	0.0313
5.	10	0.0156
6.	12	0.0078
7.	14	0.0039
8	16	0.00195
9.	18	0.000975

*Evidencia imagen 80*

¿Cuál es la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 9? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA:  $RIA = 0,499025$  haciendo la suma progresiva de los triángulos

c. Observa la tabla en la columna 4 ¿a qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta el número 28? ¿Por qué?

RESPUESTA: 0,5 aproximadamente el área es menor a cada rato y por eso se suma menos cada vez

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de las áreas de los triángulos hasta un número "muy grande"? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?

RESPUESTA: A 0,5 ya que es un número muy grande de cuadrado que apartan de afoco o la suma

*Evidencia imagen 81*

## CUADRADOS Y TRIÁNGULOS

5.

#### 4.3. Cuadrados y triángulos

- a. A qué número crees que se aproxima la suma de las áreas de la figura completa (formada por triángulos y cuadrados) cuando haya un número **muy grande** de cuadrados y triángulos **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

RESPUESTA: a 2.5 si se suma la de los cuadrados con los triángulos. es una suma completa.

- b. ¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa (compuesta por triángulos y cuadrados) hasta el triángulo número 2? Y ¿Hasta el número 5? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA: sería sumar el area del triangulo y luego la del cuadrado. la acumulativa, es decir  $\square_1 + \square_2 + \triangle_1 + \triangle_2$  al realizar esto en la tabla, da 2,125.

Evidencia imagen 82

c. ¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo número 8? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA: 2.42005 Somando la acumulativa hasta el 8 del cuadrado que da 1.922 y la del triángulo hasta el 8 que da 0.49805

¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo con número "muy grande"? ¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?

RESPUESTA: A 2,5 se va haciendo 2,49999 cada vez con más 9 o sea casi 2,5 porque la de los cuadrados es casi 2 y la de los triángulos casi 0,5.

Evidencia imagen 83

	cuadrado	de las áreas de los cuadrados	NÚMERO	Paso	Área del triángulo	Suma acumulativa de las áreas de los triángulos	Sumas Acumulativas entre el cuadrado y el triángulo	el área del cuadrado con el área del triángulo
1	1	1	1.	2	0.25	0.25	$1 + 0.25 = 1.25$	$1 / 0.25 = 4$
3	0,5	$1 + 0,5 = 1,5$	2.	4	0.125	$0.25 + 0.125 = 0.375$	$1,5 + 0.375 = 1,875$	$0,5 / 0,125 = 4$
5	0,25	$1,5 + 0,25 = 1,75$	3.	6	0,0625	$0,375 + 0,0625 = 0,4375$		$0,25 = 4$
7	0,125	$1,75 + 0,125 = 1,875$	4.	8	0,0313	$0,4375 + 0,0313 = 0,4688$		$= 3,99 = 4$
9	0,0625	$1,875 + 0,0625 = 1,9375$	5.	10	0,0156	$0,4688 + 0,0156 = 0,4844$		$= 4$
11	0,0313	$1,9375 + 0,0313 = 1,9688$	6.	12	0,0078	$0,4844 + 0,0078 = 0,4922$		$= 4$
13	0,0156	$1,9688 + 0,0156 = 1,9844$	7.	14	0,0039	$0,4922 + 0,0039 = 0,4961$	$0,0156 + 0,4961$	
15	0,0078	$1,9844 + 0,0078 = 1,9922$	8	16	0,00195	$0,4961 + 0,00195 = 0,49805$	$1,9922 + 0,49805$	
17	0,0039		10	20	0,000975	$0,49805 + 0,000975 = 0,499025$	$2,499025$	
19			11	22				
21			12	24				
						0,49999		

$\Downarrow$   
 Se aproxima a 2

$\Downarrow$   
 se aproxima a 0.5

Entonces se aproxima a 2.5 sumando

$2 + 0.5 = 2.5$

Evidencia imagen 84

6.

Triángulo NÚMERO	Paso	Área del triángulo	Suma acumulativa de las áreas de los triángulos
1.	2	0.25	0.25
2.	4	0.125	$0.25 + 0.125$ $= 0.375$
3.	6	0.0625	0.4375
4.	8	0.0313	0.4688
5.	10	0.0156	0.4844
6.	12	0.0078	0.4923
7.	14	0.0039	0.4961
8.	16	0.00195	0.49805
9.	18	0.000975	0.499025

*Evidencia imagen 85*

cuadrados) cuando haya un número muy grande.  
llegar a esa conclusión?

RESPUESTA: A  $2,5$  ya que la suma acumulativa es cada vez mas pequeño  
asi que el area total seria aproximadamente  $2,5$

b. ¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa (compuesta por triángulos y cuadrados) hasta el triángulo número 2? Y ¿Hasta el número 5? ¿Cómo obtienes tu respuesta?

RESPUESTA: hasta el triángulo #2 =  $1.875$   
" " " #5 =  $2.4844$

Evidencia imagen 86

¿Cuál es la suma, de la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo número 8? **¿Cómo obtienes tu respuesta?**

RESPUESTA: 2.48855

Sumando areas tanto de triangulos como cuadrados

d. ¿A qué número se aproxima la suma acumulativa de la figura completa hasta el triángulo con número “muy grande”? **¿Por qué? ¿Qué te permite llegar a esa conclusión?**

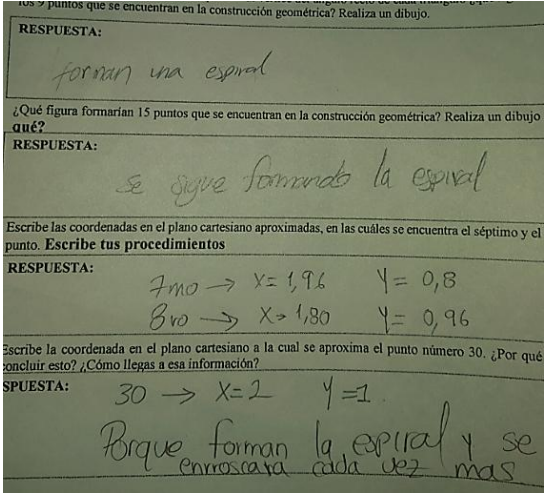
RESPUESTA:

a 2,499 cada vez van dando más ceros

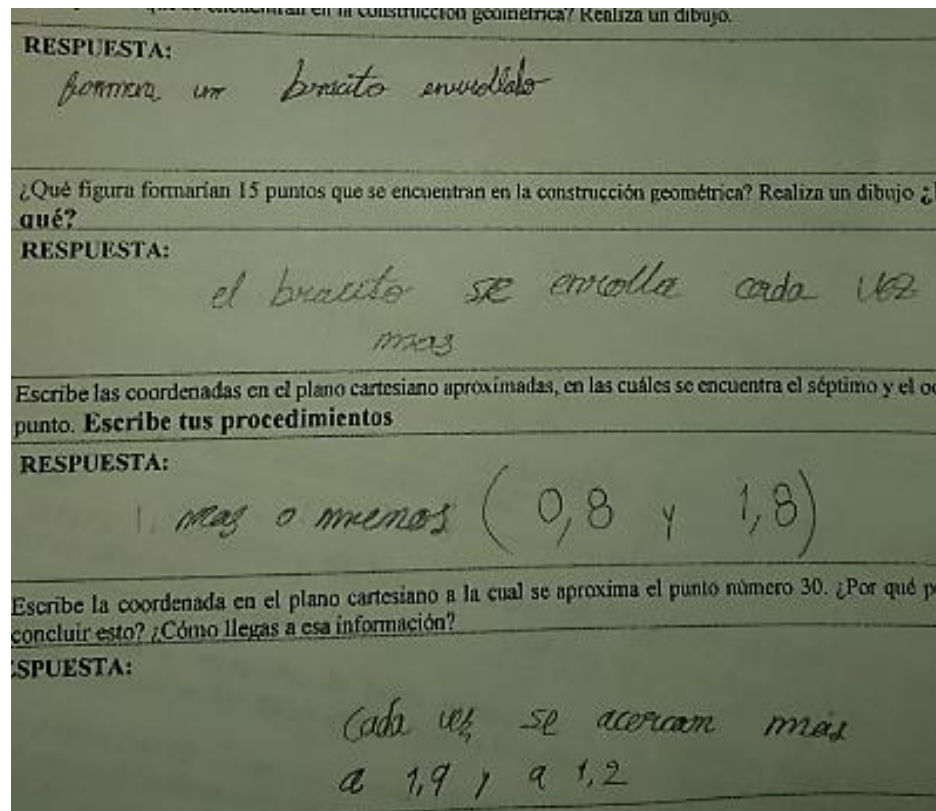
Evidencia imagen 87

5. Transcripciones o evidencias fase 5 de la guía

Tabla 29 Transcripciones o evidencias fase 5 de la guía

FASE 5	
MOMENTO O SEGMENTO	TRANSCRIPCIONES DE LAS GRABACIONES Y/O EVIDENCIAS ESCRITAS (GUÍA)
1.	 <p>RESPUESTA: forman una espiral</p> <p>¿Qué figura formarían 15 puntos que se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo que?</p> <p>RESPUESTA: se sigue formando la espiral</p> <p>Escribe las coordenadas en el plano cartesiano aproximadas, en las cuáles se encuentra el séptimo y el punto. Escribe tus procedimientos</p> <p>RESPUESTA: 7mo <math>\rightarrow</math> <math>x=1,96</math>    <math>y=0,8</math> 8vo <math>\rightarrow</math> <math>x=1,80</math>    <math>y=0,96</math></p> <p>Escribe la coordenada en el plano cartesiano a la cual se aproxima el punto número 30. ¿Por qué concluir esto? ¿Cómo llegas a esa información?</p> <p>RESPUESTA: 30 <math>\rightarrow</math> <math>x=2</math>    <math>y=1</math> Porque forman la espiral y se enroscara cada vez más</p>
	Evidencia imagen 88

2.



Evidencia imagen 89

3.

TA: como una especie de caracol.



formarían 15 puntos que se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo ¿P

TA: También un caracol pero más enrollado



coordenadas en el plano cartesiano aproximadas, en las cuáles se encuentra el séptimo y el octavo punto. **Describe tus procedimientos**

TA:  $(1,9), (0,9)$


coordenada en el plano cartesiano a la cual se aproxima el punto número 30. ¿Por qué punto? ¿Cómo llegas a esa información?

a  $(2,1)$  porque la curva se va enrollando pero cada vez más poco porque las figuras son más pequeñas cuando hay más número.


Evidencia imagen 90

4.

¿Se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo.



¿Serían 15 puntos que se encuentran en la construcción geométrica? Realiza un dibujo. ¿Por qué?



Coordenadas en el plano cartesiano aproximadas, en las cuáles se encuentra el séptimo y el octavo punto. ¿Por qué? ¿Cuáles tus procedimientos?

#7	#8
(1.9, 0.8)	(1.9, 0.9)

Coordenada en el plano cartesiano a la cual se aproxima el punto número 30. ¿Por qué? ¿Cómo llegas a esa información?

(2.1, 1) Cada vez mas se va cerrando la figura formando una espiral.

Evidencia imagen 91