Propuesta Didáctica para la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad Clásica y Frecuencial en un Aula Inclusiva con Estudiantes Sordos y Oyentes

María Camila Guacaneme Rojas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2024

Propuesta Didáctica para la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad Clásica y Frecuencial en un Aula Inclusiva con Estudiantes Sordos y Oyentes

María Camila Guacaneme Rojas

Trabajo de grado como requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas

Director

Diego Guerrero Garay

Mgtr. en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2024

Dedicatoria

A mi mami Stella, quien con su sabiduría y amor incondicional me ha guiado en cada paso de vida, enseñándome el valor de la perseverancia y la importancia de seguir mis sueños. Este logro también es suyo.

Y, a mi sobrina Luciana, quien con sus ojos llenos de inocencia y admiración me inspira a ser la mejor versión de mí misma.

Agradecimientos

A mi mamá, por su apoyo constante y su fe inquebrantable en mí. Gracias por ser mi mayor inspiración y ejemplo a seguir, incluso estando lejos de casa.

A mi hermana Vanessa, por ser mi compañera de vida y confidente. Cada conversación es un recordatorio de lo afortunada que soy de tenerla a mi lado.

A las mejores amigas que me brindó la universidad Melany y Sofía, por hacer de este camino algo inolvidable, entre locura y sensatez. No podría haberlo logrado sin ustedes.

A mi amiga y compañera Nicol, por ser mi apoyo en los momentos difíciles. Su presencia ha hecho este trayecto más llevadero.

A mis amigas del colegio y a distancia Lorena, Katherine y Lina, por hacer que cada reencuentro sea especial. Son mi recarga de energía semestral.

A mi director de trabajo de grado el profesor Diego, por su orientación e inspiración a explorar nuevas ideas. Su apoyo ha sido clave en cada paso de este trabajo.

A los estudiantes de 802 del Colegio Isabel II – JM, por su colaboración en el desarrollo de esta propuesta. Su energía y entusiasmo me inspiran a ser una mejor profesora.

Índice General

Lista de Ilustraciones

Lista de Tablas

Lista de Anexos

1. Preliminares

Este capítulo establece los fundamentos y el contexto general del presente trabajo de grado, abordando los elementos clave que sustentan la investigación y enmarcan el desarrollo de una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva. Se presentan la introducción, el planteamiento del problema, la justificación, los antecedentes, los objetivos generales y específicos, y la metodología empleada, conformando una estructura coherente que guía el enfoque del estudio.

En la introducción, se ofrece una visión general del proyecto, destacando la importancia de diseñar estrategias pedagógicas inclusivas que faciliten el aprendizaje de conceptos probabilísticos para estudiantes con discapacidad auditiva y oyentes. Se subraya la relevancia del estudio al abordar las necesidades de una población estudiantil diversa, donde la equidad y la accesibilidad son pilares fundamentales. Asimismo, se explicitan las motivaciones personales y académicas que impulsan el desarrollo de esta propuesta, destacando su contribución tanto al ámbito educativo como al fortalecimiento de prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas.

El planteamiento del problema delimita la cuestión central que se busca resolver, poniendo de manifiesto las limitaciones existentes en la enseñanza de la probabilidad en contextos inclusivos. Entre los principales retos identificados, se destacan la falta de formación específica en los docentes, la escasez de materiales didácticos adaptados y las barreras comunicativas que enfrentan los estudiantes sordos. Este apartado resalta la necesidad urgente de contar con herramientas pedagógicas que permitan superar estas dificultades y aseguren un aprendizaje significativo para todos los estudiantes.

En la justificación, se argumenta la pertinencia del estudio tanto desde un enfoque teórico como práctico. A nivel teórico, se destaca la importancia de enriquecer la literatura sobre la enseñanza de la probabilidad en aulas inclusivas, mientras que, a nivel práctico, se busca ofrecer soluciones concretas que promuevan la equidad en el aula. Este apartado enfatiza el compromiso con la inclusión educativa, considerando que garantizar el acceso a una educación de calidad para estudiantes sordos y oyentes es un derecho fundamental.

Los antecedentes incluyen una revisión de investigaciones previas que abordan la enseñanza de la probabilidad y la inclusión educativa. Este apartado posiciona el trabajo dentro del contexto de estudios existentes, identificando vacíos que la propuesta busca llenar. Además, se analizan enfoques y estrategias que han sido útiles en otros contextos, sirviendo como punto de partida para el diseño de la propuesta didáctica.

Los objetivos generales y específicos delinean las metas centrales que guían la investigación. Estos objetivos reflejan el propósito principal de la propuesta: desarrollar y validar una herramienta pedagógica que integre la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva, atendiendo a las necesidades de todos los estudiantes. Cada objetivo específico contribuye a estructurar el enfoque metodológico y a garantizar que el trabajo responda de manera efectiva a los desafíos planteados.

Por último, la metodología describe el enfoque adoptado para llevar a cabo la investigación, detallando las fases del proceso, las técnicas empleadas y los criterios de análisis. Este apartado subraya la importancia de la experimentación y la validación como ejes centrales para evaluar la efectividad de la propuesta y garantizar que esta se ajuste a las necesidades reales del aula.

En su conjunto, este capítulo preliminar proporciona una base sólida para el desarrollo del trabajo de grado. Su estructura clara y comprensiva asegura una comprensión integral del propósito, la relevancia y el enfoque metodológico adoptado, permitiendo que los lectores aprecien la importancia de esta investigación en el contexto de la educación inclusiva y la enseñanza de la probabilidad.

1.1. Introducción

La atención e inclusión de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales [NEE], particularmente personas con discapacidad auditiva, en el sistema educativo ha sido una prioridad en las últimas décadas. A pesar de los avances legislativos y los esfuerzos por mejorar la calidad educativa para estas poblaciones, persisten desafíos significativos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y especialmente de la probabilidad en contextos inclusivos.

En respuesta a esta problemática, se propone desarrollar una propuesta didáctica con base a la gamificación que aborde la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial generando así un espacio inclusivo para estudiantes sordos y oyentes.

Las actividades diseñadas se centrarán en la creación de un ambiente de aprendizaje inclusivo, la presentación de conceptos de probabilidad de manera accesible y la consolidación del aprendizaje a través de actividades prácticas. Se buscará integrar la Lengua de Señas Colombiana [LSC] y otros recursos visuales y manipulables para garantizar la comprensión y participación de todos los estudiantes.

Además, como parte de esta propuesta, se desarrollará un material didáctico complementario que servirá de apoyo para estas actividades, diseñado específicamente para ser utilizado por ambas poblaciones. Este material estará adaptado para satisfacer las necesidades específicas de los estudiantes y promoverá una experiencia de aprendizaje inclusiva y enriquecedora.

Destacando que, la creación de esta propuesta didáctica y el desarrollo de material didáctico adaptado son pasos para construir aulas inclusivas donde todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades diversas, puedan participar plenamente en el proceso de aprendizaje y alcanzar su máximo potencial en el estudio de la probabilidad.

1.2. Planteamiento del Problema

El problema inicial surgió de una agrupación de factores que llamaron la atención y generaron preocupación en el ámbito educativo. La experiencia comenzó en un espacio académico denominado *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Escolares*, que forma parte del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y está vinculado a la práctica educativa. Este curso se desarrolló durante el semestre académico 2023-1, y como practicante en el Colegio Isabel II, ubicado en la localidad de Kennedy, Bogotá. Esta institución se distingue por su enfoque inclusivo y su compromiso con la enseñanza de estudiantes sordos.

Como parte de la práctica educativa, se me asignó un curso de octavo grado que incluía a estudiantes sordos. A medida que avanzaba en mi rol de docente en formación, se identificaron discrepancias significativas en la manera en que se abordaba la educación matemática para estos estudiantes en comparación con sus compañeros oyentes.

Durante la etapa de observación, se identificaron diversas barreras que enfrentaban los estudiantes sordos en su proceso de aprendizaje. Estas barreras incluían la falta de materiales y recursos adaptados, así como la ausencia de estrategias pedagógicas inclusivas. Quedó claro que existía una brecha importante en la atención y consideración de las necesidades individuales de estos estudiantes, quienes, en algunas clases, en lugar de sentirse incluidos, enfrentaban situaciones de exclusión.

Esta discrepancia entre el enfoque inclusivo proclamado por la institución y la realidad experimentada por los estudiantes sordos planteaba importantes interrogantes sobre la equidad educativa. Más allá de ser una preocupación académica, este problema representaba un obstáculo significativo para el desarrollo educativo integral de estos estudiantes.

Reconocer este problema no solo implicaba identificar las deficiencias presentes, sino también proponer soluciones efectivas que aseguraran la igualdad de oportunidades y el acceso a una educación de calidad para todos los estudiantes, sin importar sus diversas capacidades. A pesar de que las políticas educativas nacionales en Colombia resaltan la importancia de una educación accesible para todos, la implementación de estas regulaciones en las aulas dejaba mucho que desear.

Una de las principales barreras identificadas fue la falta de capacitación de los docentes en relación con la enseñanza de estudiantes con NEE, especialmente aquellos que requieren el uso de la LSC. La mayoría de los docentes no estaban preparados para abordar las necesidades específicas de estos estudiantes, lo que resultaba en una experiencia educativa limitada y desigual para ellos.

La brecha entre la teoría y la práctica en el ámbito educativo subraya la urgente necesidad de implementar medidas concretas y efectivas que garanticen un acceso equitativo y de calidad a la educación para todos. Además, la escasez de recursos y materiales adaptados profundizaba la situación, dificultando la posibilidad de ofrecer una educación inclusiva y de calidad.

El hecho de que la identificación de este problema surgiera a través de la práctica educativa de un estudiante de la Licenciatura en Matemáticas llevó a una reflexión sobre el papel y la preparación de los Futuros Educadores Matemáticos (FEM). Resulta preocupante que, hasta ese punto, el plan de estudios de la licenciatura no proporcionara las herramientas y habilidades necesarias para abordar adecuadamente las necesidades de inclusión de los estudiantes con NEE, particularmente aquellos que requieren la LSC.

Es esencial que la formación de los FEM refleje la diversidad de las necesidades educativas de todos los estudiantes y los capacite con las habilidades necesarias para crear un entorno de aprendizaje inclusivo y enriquecedor para todos.

En cuanto a la enseñanza de la probabilidad, durante el curso *Enseñanza y Aprendizaje de la Estocástica* en el semestre 2022-2, se identificó que la enseñanza de la probabilidad en las aulas ha sido una incorporación reciente. Esta situación se debe a que su integración en el currículo no había sido priorizada, lo que implica que muchos docentes tienen una formación limitada en este ámbito.

El problema mayor, relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad clásica y frecuencial para estudiantes sordos y oyentes, se origina en la falta de capacitación docente para atender a estudiantes con NEE, especialmente los sordos, y el desconocimiento de la LSC. Por tanto, es fundamental reconocer e incorporar las señas correspondientes en la enseñanza de los conceptos fundamentales de la probabilidad para garantizar la comprensión y participación de los estudiantes sordos.

Esto implica la necesidad de intérpretes de LSC en el aula, así como el desarrollo de materiales educativos que incluyan contenido en LSC. De esta forma, para lograr clases inclusivas de probabilidad, es crucial emplear estrategias pedagógicas adaptables, recursos accesibles y apoyos individualizados centrados en la LSC, lo que aseguraría un proceso educativo inclusivo y efectivo para todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades auditivas.

En consecuencia, este trabajo busca responder a la pregunta: ¿Cuál es el impacto de diseñar, gestionar y validar una alternativa metodológica que propicie el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en aulas inclusivas con estudiantes sordos y oyentes teniendo en cuenta la limitada capacitación docente y la escasez de material didáctico?

1.3. Justificación

A partir de la última década de los años 90, se ha establecido la necesidad de atender e integrar poblaciones con NEE en los sistemas educativos de los países; de ahí nace la preocupación cada vez mayor por incluir este aspecto en las políticas públicas. En ese sentido, se promulgaron legislaciones para atender la problemática y para establecer los parámetros de educación de esta población desde el nivel preescolar hasta el bachillerato; asimismo, se dio impulso a investigaciones y a evaluaciones de impacto de tales procesos. En el caso de Colombia, obedece, además, a la necesidad de garantizar derechos educativos a personas consideradas en situación de discapacidad, vulnerabilidad o desventaja.

En un principio, desde la Ley 115 de 1994, Ley General de Educación, derivada por el Congreso de la República de Colombia, se legisla la transformación gradual de las instituciones de educación especial de entonces, lo que se tradujo en su desaparición y, en consecuencia, la integración de los estudiantes con discapacidad en las aulas formales. Luego, el decreto 1421 de

2017 emanado por el Presidente de la República de Colombia de la época, por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad, establece que todos los estudiantes con discapacidad, sin discriminación alguna tienen el derecho de acceder a la oferta institucional existente cerca a su lugar de residencia, con estudiantes de su edad y recibir los apoyos y ajustes razonables que se requieren para que tengan un proceso educativo exitoso.

En Bogotá, el estudio de Médicis y Flórez (2007) sobre la integración educativa de personas sordas en los colegios de la ciudad, dio resultados relacionados con la necesidad de analizar y proponer cambios organizacionales para optimizar la atención educativa a estudiantes con discapacidad auditiva. Asimismo, para que la calidad educativa no se convierta en un sueño inalcanzable, con la comunidad sorda se hace imprescindible atender algunas necesidades educativas especiales. Según Naranjo (2010) es absolutamente fundamental la formación de los profesores en el campo de la educación bilingüe para discapacidad auditiva, así como la búsqueda de estrategias y materiales de trabajo en el aula de clase, que permitan la inclusión de esta comunidad.

De aquí nace el interés de esta propuesta en proponer a la comunidad de educadores matemáticos una información valiosa para la práctica docente, con el fin de no seguir cayendo en el mismo error de rotular a un estudiante sordo como minusválido y con pobre capacidad de aprendizaje, por desconocer sobre el verdadero significado de ser sordo.

Por otro lado, durante las últimas décadas, Estrada, A. y Batanero, C. (2015) comentan que la probabilidad se ha incorporado desde muy temprana edad en los currículos educativos de distintos países. Sin embargo, una parte del profesorado ha tenido poca preparación en probabilidad y su didáctica durante su formación inicial, debido a su reciente incorporación en el currículo. Como producto de esta falta de preparación, en ocasiones la enseñanza de esta materia tiende a omitirse y cuando se realiza, se focaliza en la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas.

Jiménez, M. y Jiménez, F. (2015) señalan que el azar ha sido un recurso utilizado por algunas sociedades para resolver situaciones y que en nuestra época se ha intentado utilizar en la asignación de empleos. Agregan que, hay que aprender a dudar y a reconocer la incertidumbre. De esta manera, específicamente en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, al menos en el nivel de bachillerato en el país, se debe incluir en los programas el concepto de aleatoriedad. Además, es fundamental enseñar un conjunto de teorías que den acceso a los estudiantes a los elementos básicos de probabilidad, que le permitan tomar decisiones en su vida cotidiana y contar con una formación mínima para que puedan desarrollarse desde esa perspectiva en cualquier campo profesional o científico.

Concluyendo, Pérez, B., Castillo, A. y De los Cobos, S. (2000) mencionan que "La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos, sólo así se logrará cumplir con el compromiso de formar un individuo que pueda manejar los conceptos básicos del siglo XXI" (p. 15).

Ahora bien, para articular estos dos escenarios y considerando las experiencias de las prácticas de inmersión total desarrolladas hasta la fecha, se ha evidenciado que, al buscar material didáctico y referencias bibliográficas que ayuden a orientar la enseñanza de la probabilidad en aulas inclusivas, es casi nula. Por ende, se cree que diseñar una propuesta didáctica que abarque esta problemática es pertinente para garantizar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento aleatorio en las aulas inclusivas.

1.4. Antecedentes

En este apartado se proponen algunas ideas que se derivan de la taxonomía y que posibilitan la investigación y evaluación de los resultados obtenidos en un proceso de enseñanza centrado en los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial, especialmente diseñado para aulas integradas o inclusivas. Hasta la fecha se encontraron dos documentos:

El primer documento es titulado “Desarrollo de conceptos básicos de probabilidad en un aula compartida por estudiantes sordos y oyentes de grado séptimo” de Lilibeth Vidal del año 2020 como tesis de maestría para la obtención del título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá D.C.

Este estudio presenta una secuencia educativa diseñada para enseñar a estudiantes de séptimo grado los conceptos de probabilidad en un aula inclusiva que incluye tanto niños sordos como oyentes, con el respaldo de un intérprete de LSC. El diseño se centra en facilitar el aprendizaje visual con materiales tangibles, representaciones gráficas, experimentación y actividades recreativas. El objetivo es superar las barreras de comunicación y facilitar la comprensión de conceptos fundamentales de probabilidad, como experimentos aleatorios, espacios muestrales, diagramas de árbol y asignación de probabilidades utilizando enfoques clásicos y axiomas básicos.

Y, el segundo documento es titulado “Comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos. Una experiencia con estudiantes sordos: edades 17-26 años” de Pablo Lonngi y Ana

María Ojeda del año 2011 como parte de una tesis de maestría en la Ciudad de México, se llevó a cabo este informe sobre cuatro estudiantes sordos que participaron en un programa gubernamental local diseñado para prepararlos para ingresar al bachillerato.

Este informe examina su comprensión inicial de conceptos fundamentales de probabilidad y estadística, así como su desempeño en actividades estadísticas durante sesiones de clase. La estrategia de enseñanza de matemáticas para estudiantes sordos se basó en instrucciones escritas. Se focalizó en una actividad de estadística descriptiva donde los estudiantes interpretaron una gráfica de barras y respondieron preguntas mediante la actividad de completar oraciones. De los cuatro estudiantes, dos se comunicaban oralmente, mientras que los otros dos utilizaban exclusivamente la Lengua de Señas Mexicana [LSM]. Los resultados no mostraron una diferencia significativa entre ambos grupos, aunque se observó una mayor habilidad en los estudiantes oyentes para identificar categorías en las gráficas.

1.5. Objetivos

En el marco de esta investigación, se establece un objetivo general para desarrollar una propuesta en la didáctica de la probabilidad. Este se respalda de tres objetivos específicos que orientan y estructuran el enfoque de la propuesta pedagógica.

1.5.1. Objetivo General

Gestionar y validar una alternativa metodológica para la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva (estudiantes sordos y oyentes) utilizando material didáctico.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Caracterizar los elementos teóricos asociados a la probabilidad clásica y frecuencial desde las experiencias en aulas inclusivas.
- Enfatizar en las características de un aula inclusiva y su diferencia entre un aula integrada que permitan desarrollar un material didáctico para la enseñanza de la probabilidad.
- Corroborar si el material didáctico diseñado aporta al aprendizaje de la probabilidad en un aula inclusiva (estudiantes sordos y oyentes).

1.6. Metodología

La metodología de este trabajo sigue el enfoque de experimentación didáctica propuesto por Camargo (2021), quien plantea un ciclo compuesto por varias fases que permiten estructurar el proceso de enseñanza y aprendizaje en entornos inclusivos. Estas fases incluyen la fundamentación conceptual, formulación de conjeturas, diseño de secuencias de enseñanza, experimentación, ajustes y evaluación. A lo largo de esta metodología, estas fases se adaptan a la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial, tanto para estudiantes sordos como oyentes, mediante un enfoque inclusivo que combina gamificación y el uso de material didáctico adaptado.

A continuación, se detallan las fases de esta metodología y su relación con las propuestas:

1.6.1. Fundamentación Conceptual y Análisis Previo

La primera fase, la *fundamentación conceptual sobre el aprendizaje y la construcción conceptual de un contenido específico*, es esencial para asentar las bases teóricas de la propuesta. En este caso, se llevó a cabo un análisis de los modelos de enseñanza inclusiva para que fuesen aplicados a la probabilidad, tanto clásica como frecuencial, y de cómo estos se pueden adaptar para estudiantes sordos y oyentes en el contexto escolar. Este análisis incluyó la revisión de estudios sobre la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con discapacidad auditiva y estrategias didácticas que integran múltiples formas de comunicación, como el uso de la LSC y el lenguaje visual.

En esta fase, también se realizó un análisis contextual del grupo 802 del Colegio Isabel II – JM, el cual cuenta con estudiantes sordos y oyentes. Este análisis permitió identificar las necesidades específicas de estos estudiantes, así como las barreras comunicativas y sociales presentes en el aula, lo que a su vez guio la formulación de conjeturas didácticas adecuadas para este entorno.

1.6.2. Formulación de Conjeturas Didácticas

La segunda fase de la metodología se enfoca en la *formulación de conjeturas sobre qué enseñar y cómo enseñar*. En esta etapa, se estableció que el contenido principal a enseñar sería la probabilidad clásica y frecuencial, utilizando la gamificación como estrategia para promover el aprendizaje. Se formuló la hipótesis de que, al presentar los conceptos probabilísticos a través de un juego didáctico, donde los estudiantes sordos y oyentes trabajen en colaboración, se potenciaría tanto la comprensión matemática como la integración social en el aula. Las conjeturas específicas incluyeron:

- El uso de *material visual y manipulativo* como recurso fundamental para la enseñanza de los conceptos probabilísticos, lo que facilitaría la comprensión tanto para los estudiantes sordos como para los oyentes.

- La aplicación de un *juego de mesa didáctico*, donde los estudiantes superarían desafíos progresivos relacionados con la probabilidad clásica y frecuencial en un entorno de aventura y colaboración, facilitando así el aprendizaje mediante el juego.
- La integración de un *modelo colaborativo* de enseñanza, donde estudiantes sordos y oyentes trabajen juntos para resolver los retos del juego, lo que promovería la inclusión y la participación de todos los estudiantes.

1.6.3. Diseño de Secuencia Didáctica

La siguiente fase, que corresponde a la *planeación de una secuencia de enseñanza*, implicó el diseño de una secuencia didáctica estructurada en torno al juego de mesa didáctico. Este diseño incluyó cuatro mundos temáticos, alineados con el desarrollo progresivo de conceptos probabilísticos:

- Mundo 1: Nociones básicas de la probabilidad.
- Mundo 2: Probabilidad clásica.
- Mundo 3: Probabilidad frecuencial.
- Mundo 4: La combinación de probabilidad clásica y frecuencial.

Cada mundo contiene una serie de desafíos que permiten a los estudiantes aplicar los conceptos de manera lúdica y concreta. El diseño del juego responde a la propuesta de Camargo (2021) de estructurar la enseñanza en tareas secuenciadas que lleven a los estudiantes desde la comprensión inicial de los conceptos hasta su aplicación en problemas más complejos. A través de esta secuencia, los estudiantes sordos y oyentes avanzan gradualmente en su comprensión de la probabilidad, colaborando para superar obstáculos y ganar el juego.

1.6.4. *Experimentación de la Secuencia*

Esta fase corresponde a la *experimentación de tareas de la secuencia de enseñanza*. En esta etapa, la secuencia diseñada fue implementada con el grupo 802 del Colegio Isabel II – JM, donde se llevaron a cabo las sesiones del juego didáctico. Estas sesiones incluyeron la resolución de problemas relacionados con la probabilidad clásica y frecuencial, utilizando el material didáctico.

- **Contexto inclusivo**: La experimentación fue realizada en un aula inclusiva, donde participaron tanto estudiantes sordos como oyentes. Durante las sesiones, los estudiantes sordos utilizaron la LSC con el apoyo del intérprete y del profesor sordo, mientras que los estudiantes oyentes utilizaron el español hablado. Esta integración sigue la línea de experimentación propuesta por Camargo (2021), al evaluar cómo diferentes grupos de estudiantes interactúan y resuelven tareas colaborativamente.

- **Evaluación del impacto de la gamificación**: En este punto, se experimentó cómo los desafíos del juego fueron resueltos en colaboración entre estudiantes sordos y oyentes. Se observó que el formato gamificado aumentó la motivación y participación de los estudiantes, cumpliendo con la conjetura inicial de que un entorno lúdico podría facilitar la enseñanza de la probabilidad.

1.6.5. *Evaluación Final*

La fase final de la metodología corresponde a la *evaluación de los resultados de aprendizaje*, donde se evaluó el impacto global de la propuesta en el aprendizaje de los estudiantes. Se realizaron pruebas de conocimiento para medir el progreso en la comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial, y se analizaron las interacciones entre los estudiantes sordos y oyentes para evaluar el grado de integración alcanzado.

- **Resultados de aprendizaje**: Los resultados preliminares indicaron que la mayoría de los estudiantes, tanto sordos como oyentes, lograron una comprensión sólida de los conceptos probabilísticos abordados en los desafíos del juego. Además, el uso del material visual y manipulativo fue clave para la retención de los conceptos y su aplicación práctica.

2. Marco Referencial

Este marco referencial establece los fundamentos teóricos, contextuales y legales que sustentan la creación e implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva. Esta propuesta se orienta hacia estudiantes sordos y oyentes, tomando en cuenta las barreras comunicativas y las particularidades del aprendizaje en contextos diversos. La estructura del marco referencial se organiza en tres enfoques clave: el marco disciplinar, el marco didáctico y el marco legal, los cuales guían y fundamentan la investigación, asegurando que el diseño de la propuesta esté alineado con las mejores prácticas pedagógicas, los avances teóricos en la probabilidad y las normativas de inclusión educativa en Colombia.

El marco disciplinar profundiza en las bases conceptuales de la probabilidad clásica y frecuencial, ofreciendo un análisis exhaustivo sobre su desarrollo histórico y su relevancia en el contexto educativo. Esta sección aborda cómo la probabilidad ha evolucionado desde sus orígenes, centrándose en las teorías fundamentales que permiten entender los conceptos probabilísticos y su aplicación en el aula. Se discuten hitos históricos importantes que marcan la consolidación de la probabilidad como una disciplina científica, como las contribuciones de matemáticos clave (Fermat, Pascal, Laplace) y los desarrollos más recientes en la teoría de la probabilidad frecuencial. Estos avances proporcionan el contexto matemático necesario para que los estudiantes no solo comprendan los conceptos, sino que también sean capaces de aplicarlos en su vida cotidiana.

Además, se exploran los conocimientos previos que los estudiantes suelen tener sobre estos conceptos, cruciales para la construcción de estrategias didácticas efectivas. El razonamiento probabilístico, la capacidad de identificar y analizar eventos aleatorios, es un componente central en el aprendizaje de la probabilidad. Comprender las nociones de aleatoriedad, espacio muestral y la diferencia entre los enfoques clásico y frecuencial permite diseñar actividades pedagógicas que favorezcan una comprensión profunda y aplicable de la probabilidad en un aula inclusiva.

El marco didáctico aborda el enfoque pedagógico necesario para enseñar la probabilidad desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, poniendo especial énfasis en las dificultades y errores conceptuales que los estudiantes pueden enfrentar al interactuar con los contenidos probabilísticos. Este marco se enriquece con una revisión de las teorías de enseñanza que explican cómo los estudiantes construyen y comprenden los conceptos matemáticos, y cómo las barreras cognitivas y de comunicación pueden influir en su aprendizaje. La identificación de los sesgos más comunes, como la falacia de la probabilidad equiprobable o la confusión entre eventos dependientes e independientes, es esencial para planificar intervenciones pedagógicas que permitan superar estos obstáculos.

Una parte crucial de este marco es la inclusión educativa, que se analiza a través de la clasificación de la discapacidad auditiva. Este análisis permite adaptar las estrategias didácticas y el material educativo a las necesidades de los estudiantes sordos, garantizando que los contenidos sean accesibles y comprensibles. La integración de la LSC y otras formas de comunicación visual en las actividades de aprendizaje es un componente esencial para asegurar que los estudiantes sordos participen activamente en las clases. A la par, se exploran los beneficios de la gamificación, como herramienta pedagógica que fomenta la motivación y el aprendizaje activo a través de dinámicas de juego, esenciales para hacer de la enseñanza de la probabilidad un proceso participativo y entretenido para todos los estudiantes.

Finalmente, el marco legal contextualiza la propuesta dentro de la legislación educativa colombiana, asegurando que esté alineada con las normativas vigentes que promueven la inclusión de estudiantes con discapacidad. A lo largo del trabajo, se resalta la importancia de la Ley 115 de 1994 (Ley General de Educación) y el Decreto 1421 de 2017, que reglamenta la atención educativa a la población con discapacidad, impulsando la transformación de los entornos educativos hacia la inclusión plena. Estas políticas y leyes subrayan el derecho de todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades, a acceder a una educación de calidad en un entorno inclusivo.

2.1. Marco Disciplinar

Este marco disciplinar se centra en explorar la evolución del desarrollo probabilístico, desde sus conceptos previos hasta su formalización en la probabilidad clásica y frecuencial. En primera instancia, se analizarán los antecedentes históricos que dieron lugar a la formulación de la probabilidad clásica, una rama de la matemática que se ocupa de cuantificar la incertidumbre en experimentos aleatorios, estableciendo sus fundamentos teóricos y su relevancia en el análisis de sucesos equiprobables.

Luego, se examinará la probabilidad frecuencial, un enfoque que surge como respuesta a la necesidad de interpretar la probabilidad en términos empíricos y observables, y que se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de los eventos a lo largo del tiempo. Se detallarán las definiciones y conceptos matemáticos clave que subyacen a ambas corrientes, proporcionando una comprensión profunda de los métodos que permiten predecir y analizar resultados en situaciones de incertidumbre.

2.1.1. Razonamiento Probabilístico

La probabilidad ofrece una perspectiva única para abordar y comprender los fenómenos del mundo real. Según Batanero et al. (2016) el razonamiento probabilístico es una forma de pensamiento que se enfoca en la toma de decisiones y en la formulación de juicios bajo condiciones de incertidumbre, lo cual es fundamental en múltiples aspectos de la vida cotidiana, como la evaluación de riesgos. Este tipo de razonamiento permite contemplar escenarios diversos, explorar y valorar los posibles resultados en situaciones donde la certeza no es absoluta.

Por consiguiente, el razonamiento probabilístico contiene la capacidad de:

- Identificar sucesos aleatorios en la naturaleza, la tecnología y la sociedad.
- Analizar las condiciones de dichos sucesos y deducir las hipótesis de modelización adecuadas.
- Construir modelos matemáticos para situaciones estocásticas y explorar diversos escenarios y resultados a partir de estos modelos.
- Aplicar métodos y procedimientos matemáticos de probabilidad y estadística.

Un aspecto crucial en la aplicación de la probabilidad a situaciones del mundo real es la modelización de eventos aleatorios. Desde la consciencia de que el mundo en que vivimos no es determinista, se hace ineludible educar a nuestros estudiantes para ser ciudadanos competentes en la toma de decisiones adecuadas, ante situaciones aleatorias.

Pensamiento contraintuitivo. El razonamiento probabilístico se distingue significativamente del razonamiento en la lógica clásica de dos valores, donde una afirmación es categóricamente verdadera o falsa. Este tipo de razonamiento sigue reglas propias, que pueden desafiar nuestras expectativas. Savage (como se citó en Batanero et al., 2016) menciona que un ejemplo notable es el de los dados no transitivos de Efron y Quimby, donde se rompe la transitividad de las preferencias: en este juego, la persona que elige su dado en segundo lugar siempre tiene ventaja, sin importar qué dado escoja primero su oponente.

Según Batanero et al. (2016) el campo de la probabilidad está lleno de desafíos intuitivos y paradojas, y es común encontrar conceptos erróneos y falacias en este ámbito. Lo sorprendente es que estos resultados contraintuitivos no solo aparecen en los niveles avanzados de la probabilidad, sino también en su forma más elemental, a diferencia de otras ramas de las matemáticas, donde lo contraintuitivo suele emerger solo en conceptos más complejos. Un ejemplo claro es la llamada "falacia del jugador", que sugiere erróneamente que una racha de cuatro caras consecutivas al lanzar una moneda afecta la probabilidad de que el siguiente lanzamiento también resulte en cara, cuando en realidad, cada lanzamiento es independiente y tiene la misma probabilidad.

Además, la probabilidad emplea un lenguaje y una terminología que pueden ser exigentes y no siempre coinciden con la notación utilizada en otras áreas de las matemáticas, como el uso de letras griegas o mayúsculas para denotar variables aleatorias. Sin embargo, es crucial entender que la probabilidad no es solo un precursor de la estadística inferencial, sino un modo de pensamiento esencial por derecho propio. Su capacidad para abordar y resolver problemas reales justifica plenamente su inclusión en el currículo escolar, donde puede equipar a los estudiantes con herramientas fundamentales para el razonamiento crítico en situaciones de incertidumbre.

Según Batanero et al. (2016), algunos aspectos que son relevantes para el desarrollar un razonamiento probabilístico son los siguientes:

Causalidad. Es la capacidad de diferenciar entre causalidad y condicionamiento. Se resalta que, aunque la independencia en probabilidad se puede expresar matemáticamente, es importante incluir en el análisis didáctico una discusión sobre las relaciones entre la independencia estocástica y la independencia física, así como abordar las cuestiones psicológicas que llevan a las personas a interpretar la independencia de manera causal.

En muchas situaciones de la vida real, el enfoque causal y el probabilístico están entrelazados. Frecuentemente observamos fenómenos que se comportan de cierta manera debido a factores causales específicos, combinados con perturbaciones aleatorias. El desafío, que a menudo se aborda mediante métodos estadísticos, es separar la influencia causal de la aleatoria. Para poder comprender y manejar estas situaciones es esencial un dominio sólido de las probabilidades condicionales, así como una comprensión básica de la estadística inferencial.

Variación Aleatoria y Causal. La capacidad de distinguir entre variación aleatoria y causal. La variación es una característica fundamental en cualquier conjunto de datos. Por ejemplo, las diferencias en altura entre varios estudiantes pueden deberse a variaciones aleatorias, mientras que las diferencias entre chicos y chicas pueden tener una explicación causal.

Es crucial entender que no toda diferencia observada se debe a una causa específica; muchas veces, estas diferencias son simplemente “ruido”, es decir, variaciones aleatorias. Separar la “señal” (la verdadera causa de una diferencia) del “ruido” es esencial en el análisis estadístico.

Este discernimiento es vital porque los datos de la vida real están influenciados tanto por factores causales como por variaciones aleatorias. La estadística nos ayuda a determinar cuándo una diferencia es significativa y cuándo es producto del azar. Sin embargo, muchos estudiantes tienden a buscar explicaciones causales incluso cuando los datos solo reflejan variaciones aleatorias, lo que destaca la importancia de aprender a identificar cuándo algo es aleatorio y cuándo es causado.

2.1.2. Conceptos Previos

Antes de presentar la definición de probabilidad, es prudente introducir una serie de conceptos preliminares que resultarán fundamentales para una comprensión más profunda del tema. Se comienza con el concepto de fenómeno aleatorio, que se refiere a eventos observables y, en la mayoría de los casos, cuantificables.

En este contexto, Sánchez (2004) menciona que la estadística se enfoca en el estudio y análisis del comportamiento de estos fenómenos. Cabe destacar que estos fenómenos se generan como resultado de experimentos, lo que permite usar términos como fenómenos y experimentos aleatorios de manera intercambiable. Y explícitamente dice que "un experimento aleatorio es aquel que puede concretarse en al menos dos resultados posibles, con incertidumbre en cuanto a cuál de ellos tendrá lugar" (p. 2).

Los experimentos pueden ser clasificados en deterministas y aleatorios.

Experimentos Deterministas. Son aquellos en los que el resultado está completamente determinado por las condiciones iniciales y las reglas del experimento. Esto permite predecir el resultado con certeza si se conocen todas las variables relevantes y las leyes que rigen el sistema.

Experimentos Aleatorios. Son aquellos en los que el resultado está sujeto a la incertidumbre y se modela mediante distribuciones de probabilidad. Esto significa que el resultado no puede predecirse con certeza, incluso si se conocen las condiciones iniciales y las reglas del experimento.

Sánchez (2004) menciona algunas características que cumplen los experimentos aleatorios:

- El experimento puede ser repetido u observado de manera continua en condiciones prácticamente idénticas.
- Aunque no se puede predecir el resultado particular del experimento, sí se puede conocer el conjunto que abarca todos los posibles resultados.
- Si el experimento se realiza sólo unas cuantas veces, los resultados pueden parecer erráticos o caóticos. Sin embargo, si el experimento se realiza un número infinito de veces, se empieza a observar un patrón o regularidad en los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta el conjunto que abarca todos los posibles resultados (segunda característica), a este conjunto se le llama **Espacio Muestral** y se representa con la letra E. Este espacio puede ser finito o infinito dependiendo del conjunto de los resultados.

En el ámbito de los espacios infinitos, se distinguen entre aquellos que son numerables y los que no lo son. Los espacios finitos y los infinitos numerables se llaman **Espacios Discretos**, mientras que los no numerables se conocen como **Espacios Continuos**.

De esta forma, el espacio muestral E es el conjunto que se forma a partir de los resultados obtenidos en un experimento, los cuales son indivisibles en su naturaleza. Estos resultados se conocen como **Suceso** o **Evento** y son resultados elementales del experimento aleatorio.

Teniendo en cuenta el concepto de suceso, se denota la tipología de estos.

Suceso Elemental. Consiste en un único resultado o evento básico. No puede ser descompuesto en eventos más simples. ***Ejemplo***, lanzar una moneda y obtener cara.

Suceso Compuesto. Está formado por dos o más sucesos elementales. Se compone de una combinación de resultados simples. ***Ejemplo***, lanzar una moneda y obtener cara o cruz.

Suceso Seguro o Universal. Siempre ocurre, es decir, tiene probabilidad 1. Incluye todos los posibles resultados del experimento. ***Ejemplo***, al lanzar un dado, el suceso "obtener un número del 1 a 6 ".

Suceso Imposible. Nunca ocurre, es decir, tiene probabilidad 0. No hay ningún resultado del experimento que lo satisfaga. ***Ejemplo***, al lanzar un dado, el suceso "obtener un número menor que 1 o mayor que 6".

Ahora bien, se muestran las operaciones que pueden realizarse con estos sucesos teniendo en cuenta el ejemplo.

Ejemplo. Sea el experimento que consiste en contar el número de mujeres en una muestra de 12 parlamentarios seleccionados al azar.

Suceso Contenido en Otro. Se dice que A está contenido en B y lo indicaremos por $A \subset B$ si todos los elementos de A pertenecen a B.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen los sucesos:

A = "que haya 8 o 9 mujeres" y B = "que haya mayoría de mujeres".

En este caso se dice que $A \subset B$.

Igualdad de Sucesos. Se dice que A y B son dos sucesos iguales si se cumple simultáneamente que $A \subset B$ y $B \subset A$.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen los sucesos:

A = "mayoría de mujeres" y B = "al menos siete mujeres".

Aquí se cumple que $A \subset B$ y $B \subset A$, por lo que $A = B$.

Unión de Sucesos. Dados dos sucesos A y B, se define la unión de ambos como otro suceso, que indicaremos por $A \cup B$, que está formado por los elementos pertenecientes a A, a B o a los dos a la vez.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen los sucesos:

A = "al menos siete mujeres" y B = "más de cinco mujeres, pero menos de diez".

En este caso: $A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$.

Por lo que $A \cup B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cup \{6, 7, 8, 9\} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Intersección de Sucesos. Dados dos sucesos A y B, se define la intersección de ambos como otro suceso, que representamos por $A \cap B$, compuesto por resultados comunes a A y B simultáneamente.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen los sucesos:

A = "al menos siete mujeres" y B = "más de cinco mujeres, pero menos de diez".

En este caso: $A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$.

Por lo que $A \cap B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cap \{6, 7, 8, 9\} = \{7, 8, 9\}$.

Sucesos Disjuntos, Incompatibles o Mutuamente Excluyentes. Dados dos sucesos A y B, se dicen que ambos son incompatibles, disjuntos o mutuamente excluyentes si la presencia de uno impide la del otro. En tal caso ocurre que $A \cap B = \emptyset$.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen los sucesos:

A = "al menos siete mujeres" y B = "no más de cinco mujeres".

En este caso: $A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Por lo que $A \cap B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \emptyset$.

Complementario o Contrario. Dado un suceso A, se define el complementario de A como otro suceso que ocurre cuando no ocurre A y que representaremos por A.

A partir del experimento definido en el ***ejemplo***, se definen el suceso:

A = "al menos siete mujeres".

El complementario de este suceso es $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.1.3. Desarrollo Histórico de la Probabilidad Clásica y Frecuencial

En este desarrollo histórico y epistemológico, se narra la evolución de la teoría de la probabilidad desde la antigüedad, inicialmente centrada en resolver interrogantes vinculados a los juegos de azar. Este enfoque, fue motivado por la necesidad de prever resultados en diferentes aspectos cotidianos y ha sido un impulsor fundamental en el estudio y desarrollo de la probabilidad.

A continuación, se presenta un recorrido por el desarrollo de la teoría de la probabilidad, desde sus orígenes hasta su formalización axiomática. Destacados matemáticos como Fermat, Pascal y Laplace han influido significativamente en esta historia estableciendo las bases que llevaron a la formalización de la teoría por parte de Kolmogorov.

Hay unos posibles registros respecto a los juegos de azar en la época de la Prehistoria alrededor del año 5000 a.C., donde algunas **Culturas Antiguas** usaban huesos tallados, extraídos de talones de animales y se cree que fueron utilizados para el azar, denominaban a estos huesos "astrágalos" que al ser lanzados podrían caer en cuatro posiciones diferentes. Asimismo, se han hallado representaciones de este objeto pintadas en tumbas de los faraones egipcios, junto con tablas donde se registraban algunos resultados obtenidos; esto se puede interpretar que estas culturas manejaban alguna noción de probabilidad. Con base a esto, Vega-Amaya, O. (2002) afirma que los astrágalos son precursores de los dados de como los conocemos hoy en día. Se presume que **Pálameles** inventó los dados que se utilizan comúnmente a partir del juego con este tipo de huesos.

A su vez, Vega-Amaya, O. (2002) menciona que alrededor del año 1200 a.C., los juegos con este hueso eran practicados comúnmente en diferentes regiones de España, Italia y Francia. Aunque las reglas precisas de estos juegos no son conocidas, era evidente la influencia del azar en su desarrollo. Uno de los indicios de esta conexión se encuentra en los nombres asignados a estos juegos; por ejemplo, la palabra "Hazard", derivada del árabe que significa "al azar", ilustra claramente esta relación con la aleatoriedad.

Vega-Amaya, O. (2002) también resalta que algunas culturas usaban estos astrágalos con fines relacionados a la religión y se usaban como mecanismo para revelar la fortuna y el futuro de las personas.

Algo para destacar son las concepciones de **Aristóteles** (384 a.C. – 322 a.C.) sobre la naturaleza de los eventos. Según Hald, A. (1987), Aristóteles clasificaba estos eventos en tres tipos: los eventos que pasan necesariamente, los eventos probables que ocurren en la mayoría de los casos y los imprevistos que pasan por casualidad, y que, los resultados que se obtenían en los juegos de dados estaban relacionados con el tercer evento, por ende, no podían ser estudiando científicamente. A su vez, como se cita en Hald, A. (1987), **Tomás de Aquino** (1225 – 1274) diferencia la ciencia y el conocimiento seguro, y, las opiniones o el conocimiento probable y los accidente o casualidad. Aquino mide la contingencia asignándole un peso a esta, dándole una interpretación que depende de la frecuencia de lo probable, introduciendo así la probabilidad frecuencial como se conoce hoy en día.

De acuerdo con Alonso, R., Rodríguez, A. y Ordás, P. (2004), durante la Edad Media **Girolamo Cardano** (1501 – 1576) fue el primero en escribir un libro titulado *Liber de Ludo Aleae* donde se evidencia las primeras consideraciones con los juegos de azar dando pie a un primer acercamiento de la definición de probabilidad, además de eso, introdujo la idea de que la probabilidad de un evento es un valor que está entre 0 y 1, todo esto con relación a los juegos de azar.

Al mismo tiempo, **Galileo Galilei** (1564 – 1642) también escribía un libro con relación a los juegos de azar titulado *Sopra le Scoperte dei Dadi*, sin conocer el trabajo de Cardano. Se evidencia que Galileo llega a los mismos resultados de Cardano afirmando que la probabilidad debería obtenerse enumerando los resultados posibles y contando el número de resultados favorables. Cabe resaltar que este es uno de los aportes más grandes e importantes en el campo de la probabilidad en la que se puede reconocer la noción clásica de la probabilidad.

Otro de los aportes de Galileo fue definir y diferenciar el "error sistemático" y el "error aleatorio", posteriormente esto sirvió como apoyo para diferenciar la probabilidad de la estadística.

En esta misma época, algunos matemáticos intentaban solucionar un problema que involucraba probabilidades, conocido como el "problema de los puntos" presentado en 1494 por

Luca Pacioli (1440 – 1517) la cual se trataba de cómo se debía repartir el dinero apostado por varios jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar:

> Un grupo juega a la pelota de tal modo que se necesitan un total de 60 puntos para ganar el juego y la apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando se queda con 50 puntos y el otro con 30. ¿Qué parte del dinero del premio le corresponde a cada bando? (Burton, 2006, p. 444).

Pacioli y **Fontana Tartaglia** (1499 – 1557) proponen soluciones para este problema, pero estas son erradas porque no toman en cuenta las probabilidades de ganar de cada equipo según Vega-Amaya, O. (2002), comenta que, **Blaise Pascal** (1623 – 1662) y **Pierre de Fermat** (1607 – 1665) relacionaron dicho problema con los juegos de azar, ellos mantenían una conversación constante por medio de cartas donde escribían la interpretación del problema y los posibles resultados.

Algo que destaca Fernández, S. (2007) es que, Pascal soluciona el "problema de los puntos" haciendo uso del triángulo aritmético, usualmente conocido como "Triángulo de Pascal", que como bien se sabe está conformado por números combinatorios. A su vez, afirma que Pascal y Fermat sostienen las bases teóricas en las que se asienta la moderna teoría de la probabilidad.

Otro aspecto que menciona Fernández, S. (2007) es un estudio vinculado a los "problemas de puntos" que corresponde a **Christhiaan Huygens** (1629 – 1695), quien, además de exponer su propia solución al problema, introduce el concepto de valor esperado. Este concepto, cuando se aplica a juegos, se interpreta como el promedio de ganancias esperadas al jugar repetidamente. En 1657, Huygens publicó su primer tratado sobre probabilidad, titulado *De Rationnis in Ludo Aleae*, donde desarrolló de manera lógica la teoría de la probabilidad. Este trabajo incluyó resultados relacionados con problemas de lanzamientos de dados, las probabilidades de ganar juegos y situaciones de juegos con tres o cuatro jugadores. En este tratado, Huygens también presenta la definición de probabilidad de un evento como la relación entre el número de casos favorables y el total de casos posibles.

Teniendo en cuenta a las contribuciones de Pascal, Fermat y Huygens, se puede afirmar que los juegos de azar evolucionaron de simples entretenimientos a auténticos desafíos intelectuales, atrayendo la participación de las mentes científicas más destacadas de la época.

Fernández, S. (2007) destaca que uno de estos prodigios fue **Jacques Bernoulli** (1655 – 1705), quien planteó diversos problemas relacionados con la probabilidad a los matemáticos y filósofos de su tiempo y posteriormente ofreció soluciones a dichos enigmas. Se menciona que la mayoría de los avances matemáticos realizados por la familia Bernoulli en este ámbito, están documentados en la reconocida revista *Acta Eruditorum*. No obstante, Bernoulli también redactó una obra de gran importancia titulada *Ars Conjectandi*, la cual no fue publicada hasta el año 1713. Esta obra aborda cuatro aspectos fundamentales. Primero, retoma el trabajo realizado por Huygens, añadiendo comentarios y demostraciones adicionales. Un segundo aspecto se centra en el análisis de permutaciones, combinaciones y sus expresiones. La tercera sección presenta diversos problemas vinculados a los juegos de azar, que sirven como ejemplos ilustrativos de lo expuesto en las dos secciones anteriores. Por último, se exploran aplicaciones de la teoría de probabilidad en contextos civiles, morales y económicos; aunque esta sección quedó inconclusa, se considera la parte más significativa de la obra aportando contribuciones claves en todos los aspectos de la teoría de la probabilidad. Este, también conocido como la *Ley de los Grandes Números*, que se puede resumir de la siguiente manera: “Es muy poco probable que, si efectuamos un número suficientemente grande de experimentos, la frecuencia de un acontecimiento se aparte notablemente de su probabilidad.” (Fernández, 2007, p. 17)

Este teorema es el primer principio fundamental de la teoría de la probabilidad, estableciendo que la frecuencia relativa de los resultados en un experimento aleatorio tiende a estabilizarse en un valor específico, que coincide con la probabilidad, cuando el experimento se hace repetidamente.

Bernoulli también se ocupó de determinar la probabilidad de que ocurriera un evento, incluso cuando resulta imposible contar los casos favorables, según lo expresó: “Aquí hay otro camino disponible para alcanzar el resultado deseado. Lo que no se puede hallar a priori se puede obtener a posteriori, es decir, mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…” (Fernández, 2007, p. 17)

Sin duda, **Abraham de Moivre** (1667 – 1754), es reconocido como el autor de una obra fundamental para desarrollar la teoría probabilística, menciona Fernández, S. (2007), tanto por historiadores como el pionero en descubrir la distribución normal. En 1711, publicó un detallado estudio sobre las leyes del azar en las *Philosophical Transactions*. Siete años después, amplió este trabajo y lo incorporó en un nuevo tratado titulado *The Doctrine of Chances*, el cual abordó numerosos problemas y aplicaciones relacionados con dados, juegos, anualidades de vida, entre otros.

Este tratado, que contiene diversos problemas y observaciones introductorias que explican la probabilidad como una medida, se destaca como la obra principal de De Moivre. En este trabajo, se exploran de manera profunda por primera vez conceptos como: la probabilidad condicional, la independencia de sucesos, así como los problemas de probabilidad total y compuesta. Es notable que la teoría combinatoria elemental, que implica el cálculo del número de combinaciones y permutaciones, se deriva a partir de los principios de las probabilidades, en contraposición a la presentación convencional en la actualidad.

Tiempo después, el matemático francés **Pierre-Simon Laplace** (1749 – 1827) no solo consolidó la teoría de la probabilidad como una disciplina científica, sino que también la impulsó de manera continua a lo largo del tiempo. A los 63 años, en 1812, Laplace publicó un tratado monumental titulado *Théorie Analytique des probabilités*, que marcó un hito a un siglo de distancia del trabajo de Bernouilli. En este extenso trabajo, Laplace no solo se centró en los juegos de azar, sino que también exploró las probabilidades asociadas con las causas de eventos.

Con el objetivo de difundir sus ideas entre lectores no especializados, Laplace redactó en 1814 un ensayo introductorio sobre la probabilidad llamado *Essai philosophique des probabilités*. En este ensayo, expresó una idea que resonaría a lo largo del tiempo: "En el fondo, la teoría de probabilidades es solo sentido común expresado con números". (Fernández, 2007, p. 19)

Esta frase encapsula la idea de que la probabilidad es una forma cuantitativa de comprender y expresar el razonamiento lógico inherente al sentido común.

Las contribuciones de Laplace a la teoría matemática de la probabilidad fueron trascendentales. Descubrió y demostró el papel esencial desempeñado por la distribución normal, dividiendo sus esfuerzos en dos áreas. En primer lugar, creó un método para aproximarse a integrales normales, y, en segundo lugar, ofreció una demostración rigurosa de lo que ahora conocemos como el teorema central del límite.

Su obra cumbre *Théorie Analytique des probabilités*, consta de dos libros y tres suplementos. El primer libro se enfoca en el estudio de funciones generatrices y la teoría de la aproximación, mientras que el segundo desarrolla varios aspectos de la teoría de la probabilidad, aplicando las ideas de Laplace para resolver una variedad de problemas.

Este libro, además de ser una obra maestra analítica, revela la habilidad de Laplace para abordar problemas complejos mediante el uso de técnicas avanzadas, como la Transformada de Laplace. Sus contribuciones fueron tan fundamentales que, prácticamente, lo que quedó por hacer fue un trabajo de ordenación, precisión, rigor y crítica.

Finalizando este recorrido histórico de la probabilidad, se tiene a **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** (1903 – 1987) quien desempeñó un papel influyente en el desarrollo de la teoría de la probabilidad durante el siglo XX, aportando innovadoras ideas que consolidaron y expandieron las contribuciones de sus predecesores.

Su obra *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, marcó un hito al establecer los axiomas fundamentales que rigen la probabilidad. Al proporcionar una estructura axiomática, Kolmogorov dotó a la teoría de la probabilidad de un marco lógico y riguroso, elevándola a un nivel de formalismo matemático que facilitó su aplicación en una variedad de disciplinas.

La visión de Kolmogorov trascendió la probabilidad, extendiéndose hacia la teoría de la medida y la teoría de la información. Sus contribuciones en estos campos influyeron en la forma en que entendemos la aleatoriedad y la incertidumbre en diversos contextos científicos.

Hoy en día, las contribuciones de Kolmogorov siguen siendo fundamentales en la enseñanza y aplicación de la teoría de la probabilidad. Su legado perdura en la consolidación de la probabilidad como una disciplina matemática esencial, y su influencia se extiende a áreas como la estadística, la teoría de juegos y la inteligencia artificial.

2.1.4. Probabilidad Clásica

La definición que presenta Sánchez (2004) para probabilidad clásica dice que:

Si el experimento que se está realizando da lugar a un espacio muestral E que es finito y cuyos resultados son conocidos de antemano y equiprobables o simétricos, entonces, la probabilidad del suceso A perteneciente a E se define como el cociente de los resultados favorables a A respecto del total de resultados posibles:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ favorables\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ posibles}$$

A esta expresión se le conoce como *regla de Laplace*.

Este concepto de probabilidad está íntimamente ligado a los juegos de azar. Esta definición satisface tres propiedades:

1. No negatividad, $P(A) \geq 0$.
2. Certeza, $P(E) = 1$.
3. Aditividad, Si A y B son dos sucesos del espacio E y ambos son mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de $C = A \cup B$ será $P(C) = (PA) + P(B)$.

El adjetivo "clásica" hace alusión a que fue la forma en la que los primeros estadísticos abordaron este concepto. A su vez el término "a priori" se refiere a que la probabilidad de cualquiera de los sucesos de este tipo de experimentos es conocida incluso antes que los mismos tengan lugar. De hecho, no es necesario realizar el experimento para conocer las probabilidades de sus resultados.

2.1.5. Probabilidad Frecuencial

Para la probabilidad frecuencial, Sánchez (2004) define que:

En este caso la probabilidad de un suceso A se define como el límite de una frecuencia relativa, cuando el experimento se realiza un número infinito de veces. Formalmente se dice que:

$$P(A_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i A_i}{n}, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

Donde k es el punto de espacios muestrales, n el número de simulaciones n_i es el número de apariciones en el evento A_i.

Esta conceptualización de probabilidad también satisface los tres principios establecidos previamente. Con esta noción de probabilidad, se busca abordar experimentos en los cuales no se cumplen los requisitos mencionados antes, especialmente el de equiprobabilidad o simetría de los resultados. Esta situación implica que la probabilidad de cada resultado no es conocida de antemano, siendo necesario llevar a cabo el experimento para determinarla.

Con esta definición, es posible calcular la probabilidad de diversos eventos, por ejemplo: obtener caras en un dado cargado, la producción de piezas defectuosas en una empresa, accidentes de tráfico, facturas impagadas, clientes morosos, la probabilidad de que el cliente de un establecimiento comercial sea menor de 25 años, la probabilidad de que los ingresos de una persona sean superiores a la media, entre otros ejemplos.

2.2. Marco Didáctico

El marco didáctico se orienta en los enfoques pedagógicos y metodológicos que sustentan la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial, especialmente en un entorno inclusivo que integra tanto a estudiantes sordos como oyentes. Este marco explora cómo los principios de la didáctica de las matemáticas se aplican a la enseñanza de la probabilidad, y se examinan las dificultades comunes, los errores conceptuales y los sesgos que los estudiantes suelen enfrentar al aprender estos temas.

Además, el marco incluye la revisión de estudios sobre la clasificación de la discapacidad auditiva, lo que permite adaptar las estrategias didácticas para garantizar la participación de todos los estudiantes. También se destaca la gamificación en el aula como herramienta innovadora que promueve el aprendizaje incorporando dinámicas lúdicas, motivando a los estudiantes a interactuar con los conceptos probabilísticos.

2.2.1. La Probabilidad desde la Didáctica de las Matemáticas

Al igual que cualquier término relevante, la probabilidad tiene múltiples matices de significado y se utiliza de diversas maneras. Un análisis de los términos empleados en el lenguaje cotidiano, a través de diccionarios comunes, indica que el azar y la incertidumbre se consideran cualidades que pueden ser graduadas. Entre lo que se considera cierto o seguro, es decir, lo que ocurrirá necesariamente o es verdadero sin ninguna duda, y lo imposible, que es lo que nunca puede ocurrir, se encuentra lo probable. Según la definición de Moliner (como se citó en Díaz et al., 1991) lo probable es aquello que, según el hablante, es más probable que ocurra que deje de ocurrir.

Para expresar estas tres circunstancias (imposible, probable, seguro), existen una variedad de términos.

- **Posible:** es posible que llueva.
- **Previsible:** es previsible que mañana haga frío.

- **Presumible:** parece presumible que apruebe el examen.
- **Factible:** es factible que termine a tiempo.
- **Viable:** es viable que ocurra.

Estos términos proporcionan distintos matices para describir la probabilidad de un evento, desde la simple posibilidad hasta la alta probabilidad de que ocurra.

Algunos significados de la probabilidad clásica y frecuencial que presenta Batanero (2005) están clasificados en cinco categorías: campos de problemas, algoritmos y procedimiento, elementos lingüísticos, definiciones y propiedades, y algunos conceptos relacionados como se evidencias en la **Tabla 1**.

Tabla 1. *Distintos significados de la probabilidad clásica y frecuencial.*

P.	Campos de problemas	Algoritmos y procedimientos	Elementos lingüísticos	Definiciones y propiedades	Algunos conceptos relacionados
P. Clásica	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar.	- Combinatoria. - Proporciones. - Análisis a priori de la estructura del experimento.	- Triangulo aritmético. - Listado de sucesos. - Formulas combinatorias.	- Cociente de casos favorables y posibles. - Equiprobabilidad de sucesos simples.	- Esperanza - Equitatividad - Independencia
P. Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones	- Registros de datos estadísticos a posteriori. - Ajuste de curvas matemáticas. - Análisis matemático. - Simulación	- Tablas y gráficos estadísticos. - Curvas de densidad. - Tablas de números aleatorios. - Tablas de distribución.	- Límite de las frecuencias relativas. - Carácter objetivo basado en la evidencia empírica.	- Frecuencia relativa. - Universo. - Variable aleatoria. - Distribución de probabilidad.

Nota. Datos tomados de Batanero (2005).

2.2.2. Posibles Sesgos y Errores en el Concepto de Probabilidad

Batanero et al. (2016) mencionan que el docente conoce las investigaciones que exploran el razonamiento y las creencias de los niños en situaciones de incertidumbre, ya que pueden influir en el desarrollo de ideas correctas o erróneas en el campo de la probabilidad. Por ende, se destacan algunos de estos errores que se consideran importantes para el estudio de los conceptos que se abordaran en el diseño e implementación de la propuesta didáctica.

Uso del lenguaje probabilístico. El lenguaje juega un papel crucial en la construcción del conocimiento probabilístico, como se refleja en los diseños curriculares. Según Azcárate et al. (2005) es esencial que el vocabulario utilizado en la enseñanza de la probabilidad sea preciso y adecuado al nivel de descripción, para que los estudiantes comprendan claramente los conceptos tratados.

Cuando los estudiantes comienzan a estudiar probabilidad, ya han utilizado términos relacionados con el azar en su vida diaria y juegos, pero estos términos no siempre tienen el mismo significado en un contexto académico, lo que puede ser un obstáculo en su aprendizaje. Investigaciones, como las de Truran (como se citó en Azcárate et al., 2005), han mostrado que los niños a menudo confunden términos como “imposible” y “muy poco probable”, lo que refleja una falta de comprensión de los conceptos subyacentes.

También, señalan que la introducción a la aleatoriedad suele hacerse de manera descriptiva, utilizando términos como “imprevisible” o “incierto”, pero sin clarificar adecuadamente su significado, lo que puede llevar a interpretaciones ambiguas y dificultar la comprensión de la noción de aleatoriedad.

Además, en la enseñanza de las matemáticas se pueden encontrar tres tipos de palabras:

1. Técnicas (exclusivas del lenguaje matemático).
2. Términos con diferentes significados en contextos matemáticos y cotidianos.
3. Palabras con significados similares en ambos contextos.

En el caso de la probabilidad, la mayoría de los términos pertenecen a las dos últimas categorías, lo que puede crear dificultades de comunicación si no se manejan correctamente.

Experimentación y ejemplificación. Las limitaciones de la experimentación empírica en la enseñanza de la probabilidad son notables, ya que las experiencias en clase suelen no alcanzar los resultados esperados debido al carácter aleatorio de las sucesiones, lo que dificulta la ilustración de ciertos conceptos probabilísticos (Azcárate et al., 2005).

Los generadores aleatorios, como ruletas, barajas y urnas, son herramientas comunes para introducir nociones probabilísticas. Cada uno de estos dispositivos tiene ventajas particulares: las ruletas son útiles para mostrar la relación parte-todo y aplicar la Regla de Laplace y, las barajas y urnas permiten trabajar con situaciones de muestreo, facilitando la comprensión de sucesos dependientes e independientes. Sin embargo, el uso exclusivo de un solo generador puede limitar la comprensión profunda de las propiedades probabilísticas, ya que los estudiantes podrían asociar erróneamente el dispositivo con el concepto, sin alcanzar un aprendizaje significativo.

Significado subjetivo de la aleatoriedad. Batanero (2001) menciona que algunas investigaciones en psicología y educación matemática han demostrado que tanto niños como adultos tienden a buscar patrones deterministas en situaciones aleatorias, intentando identificar asociaciones inexistentes para reducir la incertidumbre. Esta inclinación a imponer orden en lo aleatorio, conocida como “recencia negativa”, puede llevar a errores en la comprensión de la probabilidad. Al intentar generar o reconocer secuencias aleatorias, los participantes suelen crear rachas cortas de símbolos similares o alternancias con demasiada precisión, reflejando un malentendido común sobre la verdadera naturaleza de la aleatoriedad y los fenómenos probabilísticos.

Representatividad de la muestra. Descrita por Kahneman (como se citó en Batanero, 2001), consiste en estimar la probabilidad de un evento basándose en su similitud con la población de la que proviene, sin considerar el tamaño de la muestra ni la variabilidad del muestreo. Esto puede llevar a una confianza indebida en muestras pequeñas, suponiendo que cada repetición de un experimento debe reflejar todas las características de la población. Por ejemplo, se espera que la frecuencia de una característica en una muestra coincida con su proporción en la población, lo que lleva a la creencia errónea de que, después de una larga racha de un suceso, debería aparecer el suceso contrario, ignorando la independencia de los ensayos repetidos.

El sesgo de equiprobabilidad. Batanero (2001) y Azcárate et al. (2005) mencionan que la creencia generalizada de que todos los sucesos en un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrir. Un ejemplo de esta creencia es un problema donde se pregunta si al lanzar dos dados es igual de probable obtener un 5 y un 6, que obtener dos veces un 5. A pesar de que se varía el contexto y el formato de la pregunta, los resultados son consistentes, mostrando que las personas creen firmemente en la equiprobabilidad de estos resultados. Argumentan que esta creencia no se debe a una falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con situaciones donde interviene el azar. Los estudiantes sometidos a esta prueba consideran que, al depender del azar, todos los posibles resultados son igualmente probables.

2.2.3. *Clasificación de la Discapacidad Auditiva*

Según el Consejo Nacional de Fomento Educativo [CONAFE] (2010), la discapacidad auditiva se puede clasificar según el momento en que se presenta la pérdida de la audición como se evidencia en la **Tabla 2**.

Tabla 2. *Clasificación de la pérdida de audición.*

Congénita	Esta pérdida auditiva se manifiesta desde el nacimiento y puede deberse a factores como bajo peso al nacer, afecciones del sistema nervioso, deformaciones en la cabeza o rostro, problemas renales, o enfermedades virales contraídas durante el embarazo.
Adquirida	En este caso, la pérdida de audición se desarrolla por enfermedades virales, mal uso de medicamentos, manejo inadecuado de desinfectantes o infecciones frecuentes en los oídos.

Nota. Datos tomados de CONAFE (2010).

Además, el CONAFE clasifica la discapacidad auditiva según la ubicación de la lesión como de evidencia en la **Tabla 3**.

Tabla 3. *Clasificación de la discapacidad auditiva.*

Conductiva	Se caracteriza por problemas en el oído medio, en el conducto auditivo o en la oreja, lo que dificulta la percepción de sonidos de baja intensidad.
Neuro-Sensorial	Ocurre cuando hay una lesión en el nervio auditivo o en el oído interno que afecta la transmisión del sonido hacia el cerebro, lo que impide la diferenciación de sonidos.
Mixta	Se presenta cuando coexisten tanto la pérdida auditiva conductiva como la neuro-sensorial, o puede manifestarse en momentos distintos, antes o después del desarrollo del lenguaje oral.
Pre-Lingüística	Aparece antes de que el niño desarrolle el lenguaje oral.
Post-Lingüística	Ocurre después de que el individuo ya ha desarrollado la comunicación oral.

Nota. Datos tomados de CONAFE (2010).

A su vez, la Ley 982 del Congreso de la República de Colombia (2005) establece normas dirigidas a la equiparación de derechos para personas sordas, especialmente en el ámbito educativo, y define los niveles de sordera. La comunidad sorda es reconocida como un grupo social identificado por la experiencia de la sordera, formando parte del patrimonio pluricultural de la nación y con los mismos derechos que los pueblos y comunidades indígenas.

Según lo establecido en esta Ley, la definición y clasificación de la población sorda se detallan en la siguiente **Tabla 4**.

Tabla 4. *Definición y clasificación de sordos.*

Sordo. Es todo aquel que no posee la audición suficiente y que en algunos casos no puede sostener una comunicación y socialización natural y fluida en lengua oral alguna, independientemente de cualquier evaluación audio-métrica que se le pueda practicar**.**	
Sordo Señante	Es todo aquel cuya forma prioritaria de comunicación e identidad social se define en torno al uso de la Lengua de Señas Colombiana y de los valores comunitarios y culturales de la comunidad de sordos.
Sordo Hablante	Es todo aquel que adquirió una primera lengua oral. Esa persona sigue utilizando el español o la lengua nativa, puede presentar restricciones para comunicarse satisfactoriamente y puede hacer uso de ayudas auditivas.
Sordo Semilingüe	Es toda persona que no ha desarrollado a plenitud ninguna lengua, debido a que quedó sordo antes de desarrollar una primera lengua oral y a que tampoco tuvo acceso a una lengua de señas.
Sordo Monolingüe	Es todo aquel que utiliza y es competente lingüística y comunicativamente en la lengua oral o en la Lengua de Señas.

Sordo Bilingüe	Es todo aquel que vive una situación bilingüe en Lengua de Señas Colombiana y español escrito u oral según el caso, por lo cual utiliza 2 (dos) lenguas para establecer comunicación tanto con la comunidad sorda que utiliza la Lengua de Señas, como con la comunidad oyente que usa el español o el idioma nativo.

Nota. Datos tomados del Congreso de la República de Colombia (2005).

Las personas con discapacidad auditiva se distinguen por utilizar la lengua de señas como su principal medio de comunicación. Este sistema viso-gestual permite la recepción y emisión de información a través de movimientos corporales y expresiones faciales. La lengua de señas, como cualquier otro idioma, posee su propia gramática y reglas, las cuales están profundamente ligadas al contexto sociocultural de la comunidad sorda.

A diferencia de las personas oyentes, las personas sordas enfrentan mayores desafíos en el acceso a una lengua, ya que la mayoría no adquiere la lengua de señas en su entorno familiar, dado que generalmente provienen de familias oyentes. Esta situación subraya la necesidad de ofrecer una educación que proporcione las condiciones necesarias para el desarrollo comunicativo y lingüístico de los niños sordos, permitiéndoles así establecer interacciones significativas con sus pares.

2.2.4. Integración Escolar e Inclusión Educativa

El debate sobre los términos "integración" e "inclusión" en el ámbito de la educación, especialmente en lo que se refiere a la educación especial, ha generado una gran cantidad de teorías y conceptos significativos. Mientras algunos se refieren a la integración, otros prefieren hablar de inclusión, y el verdadero significado de cada palabra depende de la perspectiva desde la cual se aborde. En una entrevista realizada por Estitxu Izagirre a Rafael Mendia en 1999 (como se citó en

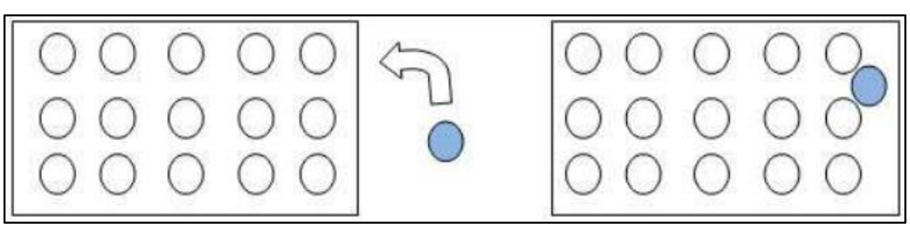
Naranjo, 2010), titulada *De la Integración a la Inclusión*, se ofrecen aclaraciones importantes sobre estos términos.

En su entrevista Mendia menciona que la integración se refiere al proceso de incorporar a una persona en un entorno ordinario desde un contexto segregado. Este concepto surgió en un momento en que los alumnos con discapacidades eran educados en ambientes separados, como hospitales. Aunque la integración contribuyó a superar concepciones obsoletas, como la visión clínica de la sordera, sigue siendo limitada. En la integración, la persona debe adaptarse al grupo dominante, sin que se respeten necesariamente sus diferencias individuales o socioeconómicas.

En el contexto educativo, Naranjo (2010) menciona que un estudiante puede ser físicamente integrado en una escuela o aula regular, pero esto no garantiza su aceptación total como se evidencia en la **Ilustración 1**. Si el estudiante no logra adaptarse a las normas del grupo, puede ser excluido de actividades cotidianas, lo que lo empuja nuevamente hacia la educación especial.

El peligro de la integración radica en su potencial para perpetuar la exclusión, tanto educativa como social. De ahí surge la necesidad de avanzar hacia un modelo de inclusión educativa.

Ilustración 1. *Interpretación de la integración.*



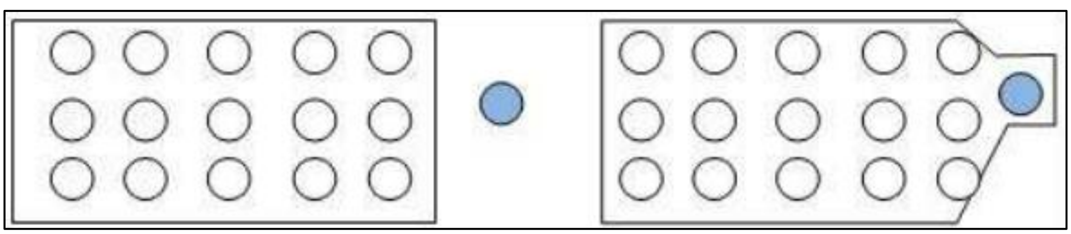
Nota. Ilustración tomada de Naranjo (2010).

En cuanto a la inclusión, se trata de un concepto más reciente y en constante evolución. Según Naranjo (2010), una sociedad inclusiva es aquella que valora la diversidad humana y fomenta la aceptación de las diferencias individuales como se evidencia en la **Ilustración 2**.

En el ámbito educativo, la inclusión se entiende como la integración de todos los estudiantes en las aulas, sin importar sus condiciones sociales, físicas, raciales, culturales o de género. Esto se alinea con la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner, quien sostiene que cada niño aprende de manera diferente y tiene distintas capacidades intelectuales.

La inclusión, por lo tanto, implica repensar la educación, creando un entorno escolar que no imponga barreras de entrada y que esté abierto a la diversidad, facilitando la participación y el aprendizaje de todos los estudiantes.

Ilustración 2. *Interpretación de la inclusión.*



Nota. Ilustración tomada de Naranjo (2010).

Con base a lo anterior, se destacan algunas diferencias clave entre integración e inclusión:

- La integración busca que el estudiante se incorpore al aula, mientras que la inclusión asegura que se sienta parte del grupo.
- La integración intenta insertar a los estudiantes excluidos en la escuela ordinaria, mientras que la inclusión abarca a todos, en todos los ámbitos.
- La integración se ajusta a las estructuras institucionales existentes, mientras que la inclusión promueve la adaptación de estas estructuras a las necesidades de cada estudiante.

- La integración se centra en apoyar a los estudiantes con discapacidad, mientras que la inclusión aborda la diversidad en su totalidad, enfocándose en las capacidades de cada persona.

Concluyendo que, aunque la integración e inclusión puedan parecer términos complementarios, son conceptos profundamente diferentes. La inclusión va más allá, proponiendo una educación que no deja a nadie fuera y que se ajusta a las necesidades de cada estudiante, promoviendo una igualdad real de oportunidades.

2.2.5. Gamificación en el Aula

García et. al. (2021) destacan que la gamificación en el ámbito educativo ha ganado relevancia en los últimos años, siendo considerada una herramienta clave para motivar a los estudiantes y mejorar su proceso de aprendizaje. Aunque en el pasado la enseñanza era memorística y el rol del profesor era unidireccional, las nuevas corrientes pedagógicas han transformado este panorama. Hoy en día, el profesor ha pasado a ser un facilitador del aprendizaje, y los alumnos son los protagonistas activos de su educación.

La gamificación no se trata simplemente de "jugar en el aula", sino de aplicar elementos y dinámicas de los juegos a entornos no lúdicos, como la educación. Estos elementos pueden incluir puntos, recompensas, niveles y tablas de posiciones, que se utilizan para captar la atención del alumno y mantenerlo motivado. Su principal objetivo es fomentar la motivación intrínseca de los estudiantes, es decir, hacer que se interesen en el aprendizaje por el propio placer de aprender (Torres y Romero, 2018).

Es importante destacar que "jugar en el aula", "aprender jugando" y "gamificación educativa" no son lo mismo (**Tabla 5**). Jugar en el aula no necesariamente tiene un propósito didáctico, mientras que el aprendizaje basado en juegos tiene como objetivo utilizar el juego como un canal pedagógico. Por su parte, la gamificación educativa busca involucrar a los estudiantes mediante recompensas y retos para alcanzar objetivos de aprendizaje específicos.

Tabla 5. *Diferencias entre jugar en el aula, aprender jugando y gamificación educativa.*

Jugar en el Aula	▪ Puede estar o no relacionado a una actividad didáctica. ▪ No tiene finalidad educativa. ▪ Su función principal es la socialización. ▪ No requiere planificación pedagógica.
Aprender Jugando	▪ Está vinculado directamente con un contenido pedagógico. ▪ Tiene finalidad educativa. ▪ Su función principal es fingir como canal didáctico entre el contenido y el educando. ▪ Requiere planificación pedagógica.
Gamificación Educativa	▪ El contenido pedagógico debe ser el contenido trasversal de las mecánicas. ▪ Tiene finalidad educativa. ▪ Su función es alcanzar la motivación intrínseca del alumnado por los elementos de juego. ▪ Requiere planificación pedagógica y de dinámicas, mecánicas y estética.

Nota. Datos tomados de Torres y Romero (2018).

La Gamificación como herramienta motivadora. La motivación es uno de los factores clave en el proceso educativo. Un alumno motivado tiene más posibilidades de participar activamente en su aprendizaje, y la gamificación ofrece un marco ideal para fomentar esta motivación (García et. al., 2021). La motivación en el contexto de la gamificación puede dividirse en dos tipos:

1. ***Motivación extrínseca.*** Se refiere a cuando el estudiante se motiva por recompensas externas, como las notas o la aprobación familiar.

2. ***Motivación intrínseca.*** Ocurre cuando el estudiante se siente motivado por el propio deseo de aprender y mejorar, sin necesidad de estímulos externos.

Aunque la gamificación utiliza recompensas externas (puntos, retos, niveles), estas también pueden ayudar a desarrollar la motivación intrínseca. Al incorporar elementos de juego en la enseñanza, los alumnos se sienten más comprometidos con sus tareas y experimentan un sentido de autonomía y competencia, lo que refuerza su interés por aprender.

Pasos para diseñar una gamificación. Werbach y Hunter (como se citó en García et. al., 2021) establecen siete etapas para desarrollar una propuesta basada en la gamificación (**Tabla 6**).

Tabla 6. *Etapas relacionadas con el diseño de la gamificación en el aula.*

Etapa	Descripción
Definir los objetivos de aprendizaje	Establecer con claridad las competencias y habilidades que los estudiantes deben adquirir, considerando si es necesario cambiar el comportamiento del grupo para lograr las metas.
Perfilar las actitudes de los estudiantes	Identificar las actitudes necesarias para alcanzar los objetivos, guiando a los estudiantes hacia un rol más participativo, especialmente en entornos educativos tradicionales.
Seleccionar los elementos de gamificación y diseñar la evaluación	Elegir los elementos gamificados (puntos, niveles, insignias) y establecer un sistema de evaluación adecuado al contexto social y cultural de los estudiantes.
Organizar equipos y roles	Formar equipos y asignar roles para fomentar la cooperación, esencial para las actividades gamificadas.
Diseñar actividades con ciclos de progreso	Estructurar las actividades en ciclos, comenzando con tareas sencillas y avanzando gradualmente hacia metas más complejas.
Crear recursos inclusivos	Asegurar que los recursos y actividades sean accesibles para todos los estudiantes, considerando su diversidad.
Autoevaluación continua	Realizar un seguimiento constante del sistema para mejorar y ajustar el diseño según sea necesario.

Nota. Etapas tomadas de Werbach y Hunter citadas en García et. al., (2021).

Esto conduce a que, un estudiante está motivado se interesa en participar activamente en la resolución de tareas y mejorar su aprendizaje. Sin embargo, es difícil lograr que los estudiantes pasen de una motivación basada en recompensas externas a una en la que encuentren satisfacción intrínseca en la tarea. La gamificación surge como una herramienta clave para influir en los estudiantes, brindándoles control y autonomía en el proceso de aprendizaje. Esta metodología fomenta la participación, el desarrollo de habilidades y competencias, transformando la enseñanza tradicional y redefiniendo el proceso educativo.

2.3. Marco Legal Colombiano

En este contexto normativo, se profundizará en los elementos que guían la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, considerando los documentos emitidos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN]. Estos documentos proporcionan un marco pedagógico sólido que orienta la elaboración de secuencias didácticas fundamentadas desde una perspectiva disciplinaria. También, se examinará la evolución de las Leyes Colombianas en cuanto a la inclusión de estudiantes sordos en el aula. Además, se analiza desde una concepción inicial de integración hasta un enfoque actual que promueve la inclusión plena de todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades individuales. Esta evolución legal refleja un compromiso creciente con la equidad educativa y la igualdad de oportunidades para todos los estudiantes en el sistema educativo colombiano.

2.3.1. La Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad

En 1998, el Ministerio de Educación Nacional [MEN] presentó los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, que delinean la progresión del pensamiento matemático con cinco tipos de pensamientos y sus sistemas correspondientes.

1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
4. Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
5. Pensamiento variacional y, sistemas algebraicos y analíticos.

Este documento busca asegurar que el conocimiento enseñable llegue de manera completa y coherente al ámbito escolar.

Dentro de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del MEN (1998), se destaca la integración de la probabilidad en el **Pensamiento Aleatorio y los Sistemas de Datos**, proponiendo la estadística como la disciplina matemática que mejor aborda la dominancia, descripción y manejo de la incertidumbre. La estadística y la probabilidad permite organizar de manera sistemática los fenómenos aleatorios, ofreciendo herramientas para realizar inferencias de manera efectiva, sin perder de vista el reconocimiento consciente del margen de error inherente.

La relevancia de este enfoque radica en preparar a los estudiantes para enfrentar decisiones en su vida diaria, donde la incertidumbre y el azar son factores presentes. En este sentido, se resalta la importancia de que los alumnos adquieran habilidades fundamentales, como la capacidad de recolectar, organizar, sistematizar, representar y analizar resultados de experimentos diversos, con significado práctico.

Es crucial destacar que estos procesos no deben presentarse de manera rígida y formal, ya que las reglas de cálculo formal tienden a alejarse de la naturaleza intrínseca de los fenómenos aleatorios y a disimular las nociones fundamentales de incertidumbre. Más bien, se busca cultivar en los estudiantes la capacidad de conjeturar y reflexionar sobre situaciones del mundo real, donde la probabilidad y el azar son elementos ineludibles que requieren comprensión y aplicación reflexiva. Este enfoque educativo busca preparar a los estudiantes para desenvolverse con confianza en un mundo donde la toma de decisiones informada es esencial.

Esta entidad dio a conocer los Estándares Básicos de Competencia Matemática [EBCM] en el año 2006. En dicho documento, se adopta la misma perspectiva sobre el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos que se presenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Sin embargo, es importante señalar que en los EBCM se amplía la conceptualización del pensamiento aleatorio, denominándolo también pensamiento probabilístico o estocástico. Además, se destaca la afirmación de que el azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones.

En el marco de las propuestas educativas del MEN (2006), se delinean las competencias mínimas esperadas al final de la escolaridad básica y media. La noción de competencia, según esta perspectiva, va más allá de la simple adquisición de conocimientos en el aula; se entiende como la capacidad de aplicar y adaptar ese saber en contextos diversos y desafiantes.

Antes de la intervención normativa del MEN, la noción de competencia en el ámbito de la Educación Matemática se limitaba a la ejecución de tareas específicas aprendidas en el aula. Sin embargo, la evolución de estos conceptos se refleja en la definición más amplia que propone el

MEN (2006). Este enfoque expande la comprensión de la competencia, considerándola como un conjunto holístico que abarca no solo conocimientos y habilidades, sino también actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras.

La conceptualización ampliada de competencia, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se presenta como un entramado complejo de elementos interrelacionados. Este conjunto tiene como objetivo facilitar un desempeño no solo eficaz, sino también flexible y significativo en entornos novedosos y desafiantes. En este sentido, la educación busca formar individuos capaces de aplicar su conocimiento de manera adaptativa y reflexiva en situaciones que demandan respuestas creativas y pertinentes.

Partiendo de esta concepción de competencia, se plantea la interrogante fundamental acerca de qué implica ser matemáticamente competente. Según las directrices del MEN (2006), se considera que una persona exhibe competencia en matemáticas cuando demuestra la presencia de procesos generales en todas las actividades matemáticas que realiza, siguiendo los lineamientos establecidos previamente por el MEN (1998). Estos procesos fundamentales incluyen: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

2.3.2. Estudiantes con Discapacidad Auditiva y la Inclusión en el Aula

En lo concerniente a la normativa colombiana, se observa que, aunque ni la Constitución Política ni la Ley General de Educación hacen mención explícita al término de educación inclusiva, sí reconocen el derecho de las personas con discapacidad a recibir educación. Además, establecen los requisitos mínimos que cada institución educativa debe cumplir para garantizar el acceso de las personas con discapacidad auditiva a la educación.

Inicialmente, se encuentra que la **Constitución Política de Colombia (1991)** incorpora el principio de igualdad y estipula la responsabilidad del estado de crear y fomentar condiciones para hacer efectivo dicho principio. Un ejemplo de ello se observa en la "obligación" que se le impone al estado en relación con la población con discapacidad, la cual debe adoptar medidas de protección especial para aquellas personas que presentan condiciones físicas y mentales particulares.

En el **Artículo 67** de la Constitución Política de Colombia (1991) se establece que la educación es un derecho fundamental de toda persona y un servicio público con una importante función social. Su objetivo es proporcionar acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y otros aspectos valiosos de la cultura. El estado, la sociedad y la familia tienen la responsabilidad compartida de garantizar este derecho. Es deber del Estado asegurar que el servicio educativo esté adecuadamente cubierto y proporcionar a los menores las condiciones necesarias para que puedan acceder y permanecer en el sistema educativo.

Asimismo, en el **Artículo 68** se aborda específicamente la educación de las personas con discapacidad. Se establece que la erradicación del analfabetismo y la educación de individuos con limitaciones físicas o mentales, así como aquellos con capacidades excepcionales, son responsabilidades especiales del estado.

Después, la Ley General de Educación, conocida como **Ley 115 de 1994**, en su **Capítulo 1 del Título III**, aborda específicamente la educación dirigida a personas con limitaciones o habilidades excepcionales. En este sentido, la ley enfatiza la importancia de establecer una política de integración en las instituciones educativas. El objetivo es equiparar las oportunidades de acceso a la educación para estas personas y eliminar cualquier forma de discriminación o exclusión hacia aquellos con discapacidad.

Para garantizar la educación de las personas con discapacidad, los **Artículos del 46 al 49** de la Ley General de Educación (1994) disponen que esta forma parte integral del servicio educativo. Por lo tanto, todos los establecimientos educativos deben llevar a cabo acciones pedagógicas y terapéuticas, así como implementar programas de apoyo especializado. Estas medidas deben tener en cuenta los requisitos necesarios para lograr la integración académica y social de las personas con discapacidad.

A partir de la Ley General de Educación (1994) y los avances en la legislación internacional, se han promulgado decretos que complementan y desarrollan de manera específica los elementos mencionados en dicha ley. Entre estos, se destacan los **Decretos No. 2082 de 1996**, **2247 de 1997**, **3011 de 1997** y **3012 de 1997**, los cuales desempeñan un papel crucial en la regulación de la organización y el funcionamiento de las escuelas con el propósito de ofrecer educación inclusiva a las personas con discapacidad.

Estas regulaciones abarcan diversos aspectos, como la adaptación de la infraestructura escolar para garantizar la accesibilidad, la implementación de programas de apoyo especializado, la formación del personal docente en técnicas de enseñanza inclusiva, entre otros. Además, estos decretos establecen los lineamientos para la elaboración e implementación de planes de inclusión educativa que promuevan la participación plena y efectiva de las personas con discapacidad en el ámbito educativo.

Específicamente para la educación de las personas con discapacidad auditiva, se destaca la **Ley 324 de 1996**, que principalmente reconoce la importancia de la LSC como el medio de comunicación oficial de las personas sordas.

Esta ley establece el compromiso del estado de proporcionar intérpretes y de promover acciones en las instituciones educativas para ofrecer apoyo técnico y pedagógico a las personas con discapacidad auditiva. Además, la Ley 324 de 1996 busca garantizar el acceso equitativo a la educación y fomentar la inclusión de las personas sordas en todos los ámbitos de la sociedad.

Mediante el **Decreto 2369 de 1997**, se reconoce, define y conceptualiza oficialmente la LSC. Este decreto establece la obligatoriedad del uso de intérpretes en diversas instituciones y organizaciones, incluyendo las instituciones educativas, con el propósito de asegurar el acceso equitativo a la educación para las personas con discapacidad auditiva. Además de reconocer la importancia de la LSC como medio de comunicación para la comunidad sorda, el decreto busca promover la inclusión y la igualdad de oportunidades en el ámbito educativo y en otros sectores de la sociedad.

Por consiguiente, la **Resolución 2565 de 2003** establece la responsabilidad de las entidades territoriales de crear y ofrecer oportunidades educativas adecuadas para la población que presenta NEE derivadas de diversas condiciones, como la discapacidad motora, emocional, cognitiva, sensorial, entre otras.

Esta normativa enfatiza la importancia de garantizar la inclusión de estos grupos en el sistema educativo, promoviendo la igualdad de acceso y oportunidades para todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades o condiciones particulares. Además, la resolución busca impulsar la implementación de programas y servicios educativos adaptados y especializados que satisfagan las necesidades específicas de cada individuo, contribuyendo así a su desarrollo integral y su plena participación en la sociedad.

Luego, la **Ley 982 de 2005**, además de otros aspectos, reconoce la importancia de la educación bilingüe, lo que implica el compromiso del Estado de proporcionar ayudas auditivas para garantizar el acceso efectivo a la educación de las personas con discapacidad auditiva. Estas ayudas incluyen el acceso a intérpretes, guías intérpretes y mediadores en LSC.

Asimismo, la ley establece pautas para regular quiénes pueden ejercer como intérpretes de LSC, lo que contribuye a garantizar la calidad y la profesionalidad de los servicios de interpretación ofrecidos a la comunidad sorda. Esta legislación representa un avance significativo en el reconocimiento de los derechos y la inclusión de las personas con discapacidad auditiva en el ámbito educativo y en la sociedad en general.

Posteriormente surge la **Ley 1346 de 2009** establece el derecho fundamental de las personas con discapacidad a recibir una educación basada en los principios de igualdad, inclusión y no discriminación. Esta ley tiene como objetivo proporcionar a las personas con discapacidad la oportunidad de adquirir habilidades para la vida y el desarrollo social, con el fin de promover su participación plena y equitativa en el ámbito educativo.

Esta legislación busca garantizar que todos los individuos, independientemente de sus capacidades, tengan acceso a una educación de calidad que les permita alcanzar su máximo potencial y contribuir activamente a la sociedad.

Del mismo modo, la **Ley 1618 de 2013** tiene como objetivo asegurar que las personas con discapacidad ejerzan plenamente sus derechos, incluido el derecho a la educación. Esta legislación promueve la implementación de acciones afirmativas que eliminen cualquier forma de discriminación contra las personas con discapacidad en el ámbito educativo.

Su propósito es garantizar que todas las personas, independientemente de su condición, tengan acceso equitativo a oportunidades educativas y sean tratadas con igualdad y respeto en todos los aspectos de la vida escolar.

Finalizando así, con la **Ley 2049 de 2020** busca establecer el Consejo Nacional de Planeación Lingüística de la LSC, cuya misión principal será la de reconocer y promover los derechos lingüísticos de la comunidad sorda en Colombia. Este consejo se encargará de integrar y representar a la comunidad sorda a nivel nacional, asegurando que todos sus miembros tengan igualdad de oportunidades lingüísticas.

Su objetivo es facilitar la comunicación entre las diferentes comunidades sordas, así como con personas oyentes e intérpretes en todo el país, promoviendo una interacción fluida y efectiva en todos los ámbitos de la vida cotidiana.

3. Diseño de la Propuesta Didáctica

La propuesta didáctica presentada en este trabajo se basa en el diseño de un juego que busca facilitar el aprendizaje de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva, con especial atención a las necesidades de los estudiantes sordos y oyentes. Esta propuesta responde a los desafíos identificados en los preliminares, donde se destacó la escasa capacitación docente en la enseñanza de la probabilidad, así como la falta de material didáctico adaptado para estudiantes sordos. A partir de estas problemáticas, se plantea una propuesta que, a través de la gamificación, permite a los estudiantes interactuar y aprender en un contexto inclusivo, fomentando la participación y la inclusión social de todos los estudiantes.

En la información general de la propuesta, se presentan los fundamentos y principios que guían su desarrollo. Siguiendo las directrices del marco didáctico, que explora la importancia de la inclusión y la adaptación pedagógica, el juego se articula como una herramienta educativa accesible y atractiva para los estudiantes sordos y oyentes. Se establecen objetivos de aprendizaje claros y específicos que orientan el proceso educativo, alineándose con los fundamentos teóricos de la probabilidad clásica y frecuencial descritos en el marco disciplinar. Estos objetivos no solo buscan que los estudiantes comprendan y apliquen los conceptos probabilísticos, sino también que desarrollen habilidades sociales y colaborativas, un aspecto esencial de las aulas inclusivas.

El diseño del juego se estructura en diversos mundos temáticos, comenzando con "El Bosque de las Nociones Básicas", un entorno introductorio que permite a los estudiantes familiarizarse con los conceptos fundamentales de la probabilidad. En este primer mundo, los estudiantes enfrentan desafíos como "El Claro de la Sabiduría" y "El Lago del Reflejo Aleatorio", que facilitan el aprendizaje de nociones como espacio muestral, eventos, y las reglas básicas de la probabilidad. Este enfoque lúdico permite que los estudiantes, tanto sordos como oyentes, interactúen en un entorno compartido, respetando las necesidades de cada grupo.

A medida que avanzan en el juego, los estudiantes se sumergen en "La Ciudadela de la Probabilidad Clásica" y "Las Cuevas de la Frecuencia", donde se abordan los conceptos más avanzados de la probabilidad clásica y frecuencial. En estos mundos, los desafíos se vuelven más complejos, integrando situaciones en las que los estudiantes deben aplicar tanto el razonamiento deductivo (característico de la probabilidad clásica) como el enfoque experimental y empírico (de la probabilidad frecuencial). Estas fases del juego son cruciales para consolidar los aprendizajes y reforzar las habilidades matemáticas de los estudiantes, en línea con el objetivo de desarrollar su razonamiento probabilístico.

El juego culmina en "El Reino de la Unión Probabilística", un mundo donde los estudiantes integran todos los conceptos aprendidos a través de "La Prueba de la Torre del Caos". Este desafío final evalúa el conocimiento adquirido, permitiendo a los estudiantes aplicar de manera práctica los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial en situaciones complejas. Además, esta última fase del juego está diseñada para evaluar no solo el aprendizaje académico, sino también la integración y el compañerismo entre los estudiantes, lo que refuerza la idea de un aula inclusiva.

A lo largo del juego, se utilizan diversas herramientas pedagógicas, tales como el manual del juego, el manual del DM, las fichas de conocimiento y las cartas de desafío, que estructuran los contenidos de manera accesible y dinámica. Estas herramientas permiten que los estudiantes comprendan los conceptos a través de representaciones visuales y manipulativas, adaptadas a sus diferentes necesidades de comunicación y aprendizaje. En particular, la inclusión de recursos como la LSC y el uso de materiales visuales garantizan que los estudiantes sordos puedan acceder plenamente a los contenidos y participar activamente en el juego.

De ese modo, esta propuesta didáctica no solo busca educar, sino también promover la inclusión y el compañerismo entre los estudiantes, estableciendo un espacio de aprendizaje compartido y enriquecedor. Al incluir tanto a estudiantes sordos como oyentes, se fomenta un entorno educativo donde todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades, tienen la oportunidad de aprender y colaborar.

3.1. Información General de la Propuesta Didáctica

La propuesta didáctica presentada tiene como objetivo principal facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad clásica y frecuencial en un contexto inclusivo, atendiendo a las necesidades de estudiantes sordos y oyentes. Esta propuesta busca promover un ambiente educativo donde todos los estudiantes puedan comprender y aplicar conceptos de probabilidad a través de métodos dinámicos y creativos. La integración de elementos lúdicos, como historias, herramientas y desafíos, tiene como finalidad fomentar el interés y la motivación de los alumnos en el aprendizaje del pensamiento aleatorio.

3.1.1. Desarrollo Previo

El desarrollo previo de esta propuesta se fundamenta en la identificación de las dificultades que enfrentan los docentes en la enseñanza de la probabilidad, así como en la escasez de materiales didácticos accesibles que consideran la diversidad de los estudiantes. A lo largo de la investigación, se ha observado que:

- Muchos docentes carecen de la formación necesaria para enseñar conceptos de probabilidad de manera efectiva, especialmente en aulas inclusivas que integran estudiantes con diferentes capacidades.
- Se ha detectado una escasez de recursos que se adaptan a las diversas formas de aprendizaje, especialmente para estudiantes sordos que requieren el uso de la LSC y otros apoyos visuales.
- Los estudiantes con diferentes habilidades y estilos de aprendizaje pueden beneficiarse de enfoques pedagógicos que fomentan la participación y el trabajo en equipo.

A partir de estos antecedentes, se ha diseñado una propuesta que no solo aborda la teoría de la probabilidad, sino que también proporciona actividades prácticas y lúdicas que facilitan el aprendizaje y la retención de conceptos.

3.1.2. Objetivos de Aprendizaje

Los objetivos de aprendizaje de esta propuesta están alineados con la necesidad de enseñar la probabilidad de manera inclusiva y efectiva, por ende, se espera:

- Facilitar a los estudiantes la comprensión de conceptos fundamentales de la probabilidad, como eventos ciertos, inciertos, posibles, imposibles, probables, improbables y aleatoriedad.
- Desarrollar habilidades para calcular probabilidades utilizando la regla de Laplace y la probabilidad frecuencial en diversas situaciones, incluyendo eventos independientes y dependientes.

- Crear un ambiente de aprendizaje inclusivo donde todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades, puedan colaborar y participar activamente en el proceso educativo.

3.1.3. Descripción

La propuesta didáctica se estructura en varios mundos temáticos, cada uno diseñado para abordar diferentes aspectos de la probabilidad. Cada mundo presenta un entorno de aprendizaje que mezcla la narrativa y juegos, fomentando el aprendizaje activo. A continuación, se describe el enfoque de cada mundo:

- **Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas**. Introduce a los estudiantes en los conceptos esenciales de la probabilidad, utilizando desafíos que les permiten clasificar eventos según su probabilidad. Los estudiantes deben trabajar en equipo para resolver acertijos, promoviendo la colaboración y la discusión.
- **Mundo 2: La ciudadela de la probabilidad clásica.** En este mundo, los estudiantes se enfocan en la probabilidad clásica y su cálculo a través de la regla de Laplace. A través de desafíos como el Laberinto de las Decisiones, los jugadores aprenderán a calcular probabilidades en situaciones múltiples y discernir entre diferentes eventos, aplicando tanto la suma como la multiplicación de probabilidades.
- **Mundo 3: Cuevas de la frecuencia.** Este mundo se centra en la probabilidad frecuencial, donde los estudiantes explorarán cómo se pueden utilizar datos para estimar probabilidades. A través de juegos de simulación, aprenderán a recopilar y analizar datos, desarrollar habilidades prácticas que son esenciales en la comprensión de la probabilidad en contextos reales.

- **Mundo 4: El reino de la unión probabilística.** El mundo final fusiona los conceptos aprendidos en los mundos anteriores, enfocándose en la combinación de probabilidades clásicas y frecuenciales. Los estudiantes deben aplicar todo su conocimiento para resolver desafíos complejos y enfrentarse a los Hechiceros Oscuros en la Torre del Caos, simbolizando su dominio sobre el tema.

La propuesta incluye una variedad de herramientas, como cartas de desafío, fichas de conocimiento y actividades que involucran la manipulación de objetos físicos. Además, se contempla el uso de la LSC y recursos visuales que favorecen la inclusión de estudiantes sordos, asegurando que todos los alumnos puedan acceder a la información de manera equitativa.

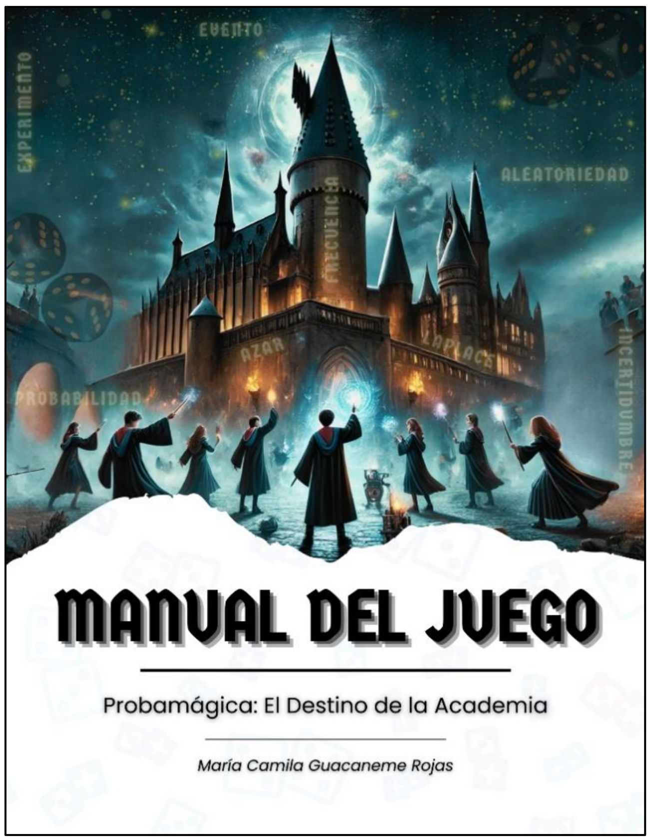
3.2. Herramientas

En esta sección se presentan las herramientas diseñadas para la implementación del juego didáctico enfocado en la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial. Estas herramientas constituyen la base de la propuesta metodológica y están orientadas a facilitar tanto la comprensión de los conceptos matemáticos como la participación de los estudiantes sordos y oyentes en el aula.

El Manual del Juego provee una guía detallada de las reglas y objetivos, asegurando que los jugadores comprendan el contexto y las dinámicas de cada desafío. El manual del director de juego, por su parte, ofrece pautas claras para la moderación de las actividades, proporcionando al docente o facilitador las instrucciones necesarias para guiar a los estudiantes a lo largo del juego. Las Fichas de Conocimiento sirven como un recurso clave para reforzar los conceptos teóricos abordados en cada mundo, mientras que las Cartas de Desafío presentan situaciones problemáticas que los jugadores deben resolver aplicando lo aprendido. Finalmente, el Tablero Modular permite la personalización del escenario de juego, promoviendo la interacción de los estudiantes con el material de manera dinámica y participativa.

3.2.1. Manual del Juego

Ilustración 3. *Portada del manual del juego.*



Nota. Para ver el manual completo dirigirse al **Anexo A**.

El manual del juego es una guía detallada diseñada para facilitar el uso de un juego educativo enfocado en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad clásica y frecuencial. A través de una experiencia lúdica y colaborativa, este juego permite a los estudiantes enfrentar desafíos probabilísticos en un entorno narrativo que los lleva a explorar cuatro mundos temáticos. Cada uno de estos mundos presenta problemas específicos relacionados con la probabilidad, que los jugadores deben resolver utilizando estrategias de razonamiento y trabajo en equipo.

El juego fomenta el desarrollo de habilidades relacionadas a la probabilidad mientras los estudiantes avanzan en una aventura para salvar la Academia Probamágica, superando retos que van desde la comprensión de conceptos básicos hasta la integración de probabilidades clásicas y frecuenciales en situaciones complejas. Con instrucciones claras, un diseño manipulable y componentes didácticos innovadores, este manual es una herramienta fundamental para guiar a los docentes y estudiantes en su travesía por el mundo de la probabilidad.

Objetivo del juego. El principal objetivo es que los estudiantes experimenten el aprendizaje de la probabilidad a través de un entorno lúdico, dividido en varios "mundos" temáticos. Los jugadores deben superar una serie de retos matemáticos en estos mundos, los cuales están diseñados para fomentar habilidades como el análisis crítico, la toma de decisiones estratégicas y el trabajo en equipo. La historia gira en torno a salvar la Academia Probamágica, la cual está bajo un maleficio, y solo resolviendo los desafíos los jugadores pueden liberarla.

Requisitos del juego.

- ***Número de jugadores.*** Se permite la participación de 2 a 6 jugadores, lo que lo hace adecuado para grupos pequeños o clases completas.
- ***Duración.*** Cada mundo toma entre 45 minutos y 1 hora, lo que permite que el juego se desarrolle en una o varias sesiones de clase.
- ***Edad recomendada.*** Se sugiere para estudiantes de 11 a 16 años, pero el juego puede adaptarse a otros niveles, dependiendo de la necesidad.

- ***Conocimientos previos.*** No se requieren conocimientos avanzados de probabilidad, ya que el juego introduce los conceptos básicos.
- ***Materiales.*** El juego utiliza un tablero, fichas de conocimiento, cartas de desafío, dados y urnas con esferas de colores, lo que crea un entorno interactivo y tangible para los jugadores.

Componentes del juego.

- ***Tablero del juego.*** Representa el recorrido de los jugadores por los cuatro mundos. Cada mundo tiene un diseño visual único, lo que hace que el tablero sea atractivo y mantenga el interés de los participantes. Los jugadores avanzan por el tablero completando desafíos que están alineados con el contenido de cada mundo.
- ***Fichas de conocimiento.*** Estas fichas se obtienen al completar desafíos y permiten a los jugadores acumular puntos de avance y desbloquear nuevas áreas del tablero. Funcionan como una medida de progreso en el juego, incentivando a los jugadores a resolver correctamente los problemas.
- ***Cartas de desafío.*** Cada mundo tiene su propio conjunto de cartas que presentan problemas de probabilidad. Los desafíos van desde realizar cálculos matemáticos hasta interpretar experimentos probabilísticos. Las cartas están adaptadas a los temas de cada mundo, lo que permite una progresión natural en la dificultad y complejidad.
- ***Dados.*** Se utilizan tanto para mover a los jugadores a lo largo del tablero como para resolver ciertos desafíos que involucran eventos aleatorios. Esto añade un componente de azar que refleja los principios probabilísticos.

- ***Urna y esferas de colores.*** Estos elementos se usan en desafíos frecuenciales, donde los jugadores deben realizar extracciones de esferas y registrar las frecuencias de los resultados. Esto les permite comparar los resultados experimentales con las probabilidades teóricas, reforzando el concepto de probabilidad frecuencial.

Preparación del juego.

- ***Montar el tablero.*** Se despliega el tablero en un espacio central para que sea accesible a todos los jugadores.
- ***Organización de cartas y fichas.*** Cada mundo tiene su propio conjunto de cartas y fichas, por lo que deben estar separadas y listas para su uso.
- ***Colocar urna y esferas.*** Las urnas con esferas de colores son fundamentales para los desafíos que implican el cálculo de probabilidades frecuenciales, y deben estar listas para ser usadas.
- ***Designación del DM.*** Un facilitador o uno de los jugadores asume el rol de DM, quien guía la narrativa del juego, mantiene el flujo de los turnos y asegura que las reglas se sigan adecuadamente.

Reglas Generales.

- ***Turnos rotativos.*** Los jugadores juegan por turnos, siguiendo el sentido de las agujas del reloj. El jugador que saque el número más alto en los dados comienza.
- ***Movimiento en el tablero.*** Los jugadores lanzan los dados para moverse por el tablero. El número obtenido en los dados determina la cantidad de espacios que pueden avanzar.

- ***Resolución de desafíos.*** Al caer en un espacio del tablero que contenga un desafío, el jugador toma una carta de desafío correspondiente al mundo en el que se encuentra y debe resolver el problema planteado.
- ***Fichas de conocimiento.*** Los jugadores ganan fichas por cada desafío resuelto. Estas fichas les permiten desbloquear nuevas áreas y avanzar en el juego.

Descripción de los mundos del juego. Cada uno de los cuatro mundos presenta un ambiente único y desafíos enfocados en diferentes aspectos de la probabilidad:

- ***Mundo 1: El bosque de las nociones básicas.*** Este es el primer mundo, donde los jugadores comienzan su aventura aprendiendo conceptos básicos de probabilidad, como la aleatoriedad, los eventos ciertos, inciertos, posibles, imposibles, probable e improbable. Algunos desafíos incluyen:
  - El claro de la sabiduría: Los jugadores clasifican eventos en ciertos, posibles e imposibles.
  - El lago del reflejo aleatorio: Los jugadores determinan si los eventos reflejados son dependientes o independientes entre sí.
- ***Mundo 2: La ciudadela de la probabilidad clásica.*** En este mundo, los jugadores aprenden los fundamentos de la probabilidad clásica y cómo calcularla usando la regla de Laplace. Los desafíos incluyen:
  - El Salón de los Conceptos Fundamentales: Los jugadores aprender a usar la regla de Laplace en eventos sencillos.
  - El laberinto de las decisiones: Los jugadores deben calcular probabilidades correctas para avanzar en un laberinto.

- ***Mundo 3: Las cuevas de la frecuencia.*** Aquí los jugadores aprenden sobre la probabilidad frecuencial, basándose en la observación de eventos pasados. Algunos desafíos incluyen:
  - La cámara de la frecuencia: Los jugadores utilizan esferas para calcular frecuencias relativas y estimar probabilidades.
  - El río de los patrones: Los jugadores observan eventos repetidos en un río mágico y estiman probabilidades basadas en eventos anteriores.
- ***Mundo 4: El reino de la unión probabilística.*** Este mundo reúne todos los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial. El desafío final 'La Prueba de la Torre del Caos', requiere que los jugadores resuelvan problemas combinando ambos enfoques para salvar la Academia.

Mecánicas del Juego. Las mecánicas principales del juego incluyen:

- ***Movimiento en el tablero.*** Los jugadores avanzan lanzando dados.
- ***Extracción de esferas.*** Se utilizan urnas con esferas de colores para desafíos frecuenciales.
- ***Resolución de problemas.*** Los jugadores deben resolver problemas probabilísticos en cada carta de desafío.
- ***Obtención de fichas de conocimiento.*** Ganar desafíos permite avanzar en el juego y desbloquear nuevas áreas.

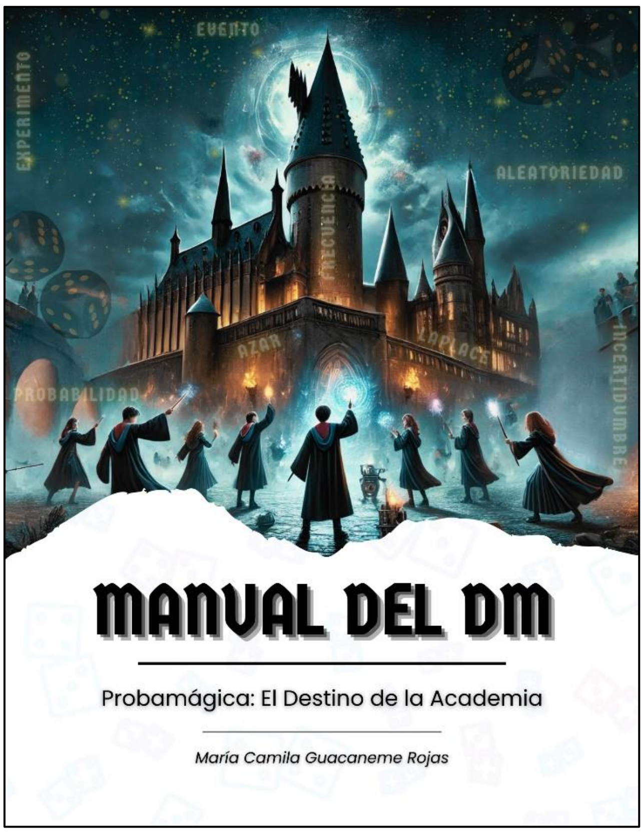
Consejos

- ***Colaboración.*** En algunos desafíos, colaborar con otros jugadores puede ser ventajoso.

- ***Reflexión antes de actuar.*** Los jugadores deben pensar detenidamente antes de resolver los desafíos.
- ***Uso estratégico de fichas de conocimiento.*** Estas fichas permiten desbloquear nuevas áreas y deben ser usadas con prudencia.
- ***Análisis de resultados.*** Es crucial analizar los resultados experimentales para tomar decisiones informadas en los desafíos futuros.

3.2.2. Manual del DM

Ilustración 4. *Portada del manual del DM.*



Nota. Para ver el manual completo dirigirse al **Anexo B**.

El manual del director de juego (DM) es una herramienta esencial diseñada para guiar al facilitador en la conducción efectiva del juego educativo de probabilidad. Su propósito es proporcionar al DM todas las indicaciones necesarias para narrar la historia, explicar las reglas, y supervisar los desafíos matemáticos, asegurando que los jugadores comprendan y apliquen conceptos clave de probabilidad clásica y frecuencial. Además de mantener el ritmo y la estructura del juego, el DM debe crear una experiencia inmersiva a través de la narración, ajustando la dificultad según las necesidades del grupo y garantizando que el aprendizaje sea dinámico y divertido.

Este manual es fundamental para asegurar que el juego se desarrolle de manera fluida, motivadora y educativa. A continuación, se describe de manera general el contenido clave del manual:

Funciones del DM. El DM asume múltiples roles que son esenciales para el éxito del juego:

- ***Narrador del juego.*** El DM es responsable de contar la historia del juego, describiendo los mundos y los desafíos. Esta narración no solo debe ser informativa, sino también atractiva, sumergiendo a los jugadores en el universo del juego.
- ***Facilitador de reglas.*** El DM debe conocer las reglas a profundidad y explicarlas de manera clara a los jugadores. Además, resuelve dudas o conflictos que puedan surgir durante el juego, asegurando que las reglas sean seguidas correctamente.
- ***Guía de desafíos matemáticos.*** El DM debe presentar las cartas de desafío, explicar las tareas a realizar y supervisar que los jugadores resuelvan correctamente los problemas. Esto incluye observar el proceso de cálculos y experimentos para garantizar que los conceptos de probabilidad sean aplicados correctamente.

- ***Moderador del progreso.*** El DM controla el ritmo del juego, asegurándose de que los jugadores avancen por los diferentes mundos de acuerdo con su progreso en los desafíos. También gestiona la distribución de las fichas de conocimiento, que son las recompensas obtenidas por superar los retos.
- ***Adaptador de dificultad.*** Dependiendo del nivel de los jugadores, el DM puede ajustar la dificultad de los desafíos, ofreciendo más o menos apoyo. También tiene la opción de simplificar reglas para asegurar una mejor comprensión por parte de los jugadores.
- ***Controlador del tiempo y la dinámica.*** Es responsabilidad del DM monitorear el tiempo que los jugadores tardan en resolver cada desafío, asegurando que el ritmo sea adecuado para mantener la atención y evitar la frustración.

Mundos del juego. El juego está dividido en cuatro mundos, cada uno con sus propios desafíos y metas. El DM debe guiar a los jugadores a través de estos mundos, ajustando el tono y la atmósfera de la narración para que coincida con cada escenario:

- ***Mundo 1: El bosque de las nociones básicas.*** Este mundo introduce a los jugadores a conceptos fundamentales de probabilidad, como eventos ciertos, posibles, inciertos e imposibles, así como la aleatoriedad. El DM debe crear un ambiente místico y tranquilo, donde los jugadores se enfrentan a desafíos narrados, como el ‘Claro de la Sabiduría’ y el ‘Camino de los Árboles Susurrantes’, que requieren interpretar eventos probabilísticos.
- ***Mundo 2: La ciudadela de la probabilidad clásica.*** En este mundo, los jugadores aprenden a calcular la probabilidad usando la regla de Laplace. El DM debe presentar este mundo como una fortaleza antigua, donde cada desafío está diseñado para enseñar

los fundamentos de la probabilidad clásica. Los jugadores deberán resolver problemas utilizando conceptos matemáticos como en el desafío del 'Laberinto de las Decisiones'.

- ***Mundo 3: Las cuevas de la frecuencia.*** Este es un sistema de túneles iluminados por cristales donde los jugadores aprenden la probabilidad frecuencial. El DM guía a los jugadores en la realización de experimentos, como extraer esferas de una urna y registrar sus frecuencias. Los jugadores deberán usar estos datos para calcular probabilidades basadas en la observación repetida de eventos.
- ***Mundo 4: El reino de la unión probabilística.*** En este mundo final, los jugadores deben combinar los conocimientos adquiridos sobre la probabilidad clásica y frecuencial. El desafío culminante tiene lugar en la 'Torre del Caos', donde el DM supervisa la resolución de problemas complejos que integran ambos enfoques de la probabilidad.

Mecánicas y narración. El Manual del DM también especifica cómo el facilitador debe narrar cada escena y desafío, utilizando diferentes tonos y estilos para crear una atmósfera inmersiva. Por ejemplo, en el 'Claro de la Sabiduría', el DM debe usar un tono sereno, mientras que en el 'Río de los Patrones' de las Cuevas de la Frecuencia, el tono debe ser enérgico y emocionante.

Reglas de progresión y recompensas. El DM controla el flujo de las fichas de conocimiento. Los jugadores obtienen estas fichas al completar desafíos con éxito, y estas sirven como un indicador de progreso en el juego. El DM es responsable de entregar estas recompensas en el momento adecuado y de monitorear cuándo los jugadores están listos para avanzar al siguiente mundo.

Flexibilidad y adaptación. El Manual del DM destaca la importancia de la flexibilidad. El DM puede modificar los desafíos o ajustar las reglas según las necesidades del grupo, ya sea para hacerlo más accesible a jugadores más jóvenes o para hacerlo más desafiante para aquellos que tienen más conocimientos matemáticos.

Control del tiempo. Finalmente, el manual enfatiza que el DM debe mantener un buen ritmo durante todo el juego. Es crucial que el tiempo dedicado a cada desafío sea equilibrado para evitar que el juego se vuelva tedioso o demasiado difícil, asegurando una experiencia de aprendizaje efectiva y entretenida.

3.2.3. Fichas de Conocimiento

Ilustración 5. *Ejemplo de una ficha de conocimiento.*

Nota. Para ver el manual completo dirigirse al Anexo C.

Las fichas de conocimiento en este sistema están diseñadas para brindar a los jugadores la información necesaria sobre los temas específicos de cada mundo y desafío dentro del juego. Estas fichas están clasificadas mediante un código que sigue el formato **M __:D__**, donde:

- **M** indica el mundo correspondiente. **M1** se refiere al mundo 1, **M2** al mundo 2, **M3** al mundo 3 y **M4** al mundo 4.
- **D** se refiere al número de desafío dentro de cada mundo. **D1** corresponde al desafío 1, **D2** al desafío 2, **D3** al desafío 3 y **D4** al desafío 4.

Estas fichas no solo proporcionan definiciones clave, sino que también explican los conceptos en relación con los desafíos que se presentan en cada mundo. Cada ficha contiene una estructura informativa clara:

- **Título y clasificación.** Cada ficha empieza con una clasificación que corresponde al mundo y desafío al que pertenece, permitiendo una rápida localización del tema y su relación con el progreso del jugador.
- **Definición del concepto.** Proporciona una definición precisa del concepto central de la ficha, como puede ser “evento probable”, “evento independiente” o “probabilidad clásica”. Esto introduce a los jugadores al tema que deberán manejar en el contexto del desafío.
- **Ejemplo práctico.** Para ayudar a la comprensión, se acompaña con ejemplos aplicables y sencillos, que conectan el concepto abstracto con situaciones concretas que los jugadores pueden visualizar o replicar.

- **Recordatorios claves.** Incluyen frases cortas que refuerzan el concepto, resaltando los aspectos fundamentales, por ejemplo: “siempre ocurre” para eventos ciertos o “puede o no ocurrir” para eventos inciertos.
- **Reglas y fórmulas.** Algunas fichas presentan fórmulas matemáticas, como la Regla de Laplace para calcular probabilidades, permitiendo que los jugadores aprendan y utilicen herramientas útiles para avanzar en los desafíos.

Estas fichas no solo actúan como guías educativas, sino que también establecen las bases para que los jugadores superen los retos de cada mundo mediante el conocimiento adquirido, integrando tanto la teoría como la práctica en un contexto lúdico

3.2.4. Cartas de Desafío

Ilustración 6. *Ejemplo de una carta de desafío.*

Nota. Para ver el manual completo dirigirse al Anexo D.

Las cartas de desafío están diseñadas para ofrecer a los jugadores ejercicios prácticos relacionados con los conceptos aprendidos en cada mundo y desafío. Al igual que las fichas de conocimiento, estas cartas siguen una clasificación que indica su ubicación dentro del juego. La estructura es **M __:C__**, donde:

- **M** indica el mundo correspondiente. **M1** se refiere al mundo 1, **M2** al mundo 2, **M3** al mundo 3 y **M4** al mundo 4.
- **C** se refiere a la carta específica dentro de ese mundo y desafío. **C1** son las cartas del desafío 1, **C2** son las cartas del desafío 2, **C3** son las cartas del desafío 3 y **C4** son las cartas del desafío 4.

Cada carta de desafío contiene una estructura clara en cuanto a los ejercicios planteados:

- **Ejercicios temáticos.** Cada carta presenta un conjunto de desafíos o preguntas que los jugadores deben resolver, basados en los conceptos aprendidos de probabilidad. Algunos ejemplos incluyen determinar si un evento es cierto, posible o imposible, o calcular la probabilidad de obtener un resultado en un dado o una moneda.
- **Clasificación de eventos y probabilidad.** Muchas cartas piden a los jugadores que clasifiquen eventos como probables o improbables, y dependientes o independientes, lo que permite una aplicación directa de los conceptos teóricos.
- **Puntaje asignado.** Cada ejercicio tiene una cantidad específica de puntos que los jugadores pueden acumular. Para avanzar al siguiente desafío o mundo, los jugadores deben resolver correctamente los ejercicios y acumular la cantidad mínima de puntos indicados.

- **Desafíos progresivos.** A medida que los jugadores avanzan en los mundos y cartas, los ejercicios se vuelven más complejos, pasando de conceptos básicos de probabilidad a cálculos más avanzados, como la probabilidad clásica o frecuencial.
- **Contexto de aprendizaje y reflexión.** Las cartas no solo involucran cálculos, sino que también invitan a los jugadores a reflexionar sobre las diferencias entre probabilidades clásicas y frecuenciales, o a predecir resultados basados en observaciones y experimentos previos.

Las cartas de desafío son herramientas fundamentales para medir el progreso de los jugadores. A través de estos ejercicios prácticos, los jugadores no solo demuestran su comprensión de los temas, sino que también acumulan puntos que les permiten avanzar en el juego

3.2.5. Tablero Modular

Ilustración 7. *Tablero Modular.*

Nota. Para ver el manual completo dirigirse al Anexo E.

El tablero está dividido en cuatro grandes mundos, cada uno con su propia temática visual y desafíos únicos que abordan distintos aspectos de la probabilidad (básica, clásica, frecuencial, y la combinación de ambas). A nivel visual, el tablero tiene una estructura que facilita el desplazamiento por los diferentes escenarios y proporciona una narrativa coherente para los jugadores.

Los bordes del tablero están decorados con un marco de piedra, lo que le da una estética de aventura y misterio, simulando un entorno de fantasía donde los jugadores avanzan en una misión para salvar la Academia Probamágica, como se ha mencionado en las descripciones anteriores.

Mundo 1: El bosque de las nociones básicas. El Mundo 1 es el punto de partida del juego, y su diseño refleja un entorno natural lleno de árboles, claros y caminos que representan el aprendizaje inicial sobre probabilidad.

El escenario está lleno de naturaleza: árboles alto, un cielo despejado, y claros que invitan a explorar. El ambiente es tranquilo y acogedor, lo que representa la fase de introducción a los conceptos fundamentales de probabilidad.

Se observan caminos y espacios abiertos que simbolizan la sencillez de los conceptos que los jugadores deberán abordar aquí. Cada claro o camino está claramente identificado con los desafíos correspondientes, proporcionando un flujo visual que facilita el aprendizaje progresivo.

Mundo 2: La ciudadela de la probabilidad clásica. El mundo 2 es una ciudadela antigua y majestuosa, con un estilo arquitectónico que recuerda a las grandes bibliotecas y templos de sabiduría.

La Ciudadela está compuesta por pasillos con columnas, detalles geométricos y estructuras que evocan conocimiento y análisis. El diseño de este mundo sugiere orden y rigor, lo cual es adecuado para el estudio de la probabilidad clásica, donde las reglas y las fórmulas juegan un papel crucial.

Las salas y corredores de la Ciudadela están divididos en áreas que simbolizan los desafíos del Salón de los Conceptos Fundamentales y el Laberinto de las Decisiones. Las líneas rectas y las formas precisas del diseño reflejan la naturaleza lógica y estructurada de la probabilidad clásica.

Mundo 3: las cuevas de la frecuencia. Este mundo lleva a los jugadores a un entorno subterráneo, lleno de cavernas y estructuras que parecen esculpidas en la roca, simbolizando la exploración profunda de la probabilidad frecuencial.

Las cuevas tienen un diseño oscuro, con luces que emergen del suelo y paredes, creando un ambiente que evoca misterio y descubrimiento. Los elementos visuales, como los ríos de energía o agua, representan la fluidez y el patrón repetitivo de los eventos en la probabilidad frecuencial.

Los caminos que se bifurcan y las estructuras irregulares dentro de la cueva aluden a los patrones y frecuencias que deben ser descubiertos y analizados. Las cámaras subterráneas son espacios donde los jugadores se enfrentarán a desafíos que requieren repetición y análisis estadístico.

Mundo 4: Reino de la unión probabilística. Este es el mundo final del tablero, un espacio donde se unifican los conocimientos previos adquiridos sobre probabilidad clásica y frecuencial.

El Reino de la Unión Probabilística tiene un diseño grandioso, con estructuras circulares y un vasto paisaje que parece extenderse infinitamente. La Torre del Caos domina este mundo, con un diseño que sugiere complejidad y poder. Este ambiente refleja el desafío último de combinar ambos enfoques de la probabilidad.

El mundo está diseñado como una especie de coliseo o arena, con caminos que conducen hacia el centro donde se encuentra la Torre del Caos. Los jugadores deberán atravesar este reino enfrentando un desafío final que reúne todos los conceptos aprendidos, en un ambiente visual que representa la convergencia de las ideas de probabilidad.

3.3. Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas

El Bosque de las Nociones Básicas es un lugar lleno de misticismo, donde la naturaleza misma parece obedecer a las leyes de la probabilidad. A medida que los jugadores se adentran en este entorno, perciben que las reglas tradicionales del mundo no siempre se aplican aquí: la probabilidad es el lenguaje que gobierna cada elemento del bosque y los fenómenos que ocurren.

Cada zona del bosque ofrece un desafío único, diseñado para que los jugadores utilicen su ingenio y colaboren para avanzar. Los jugadores sienten que están en un lugar donde la certeza es una ilusión y el azar dicta los caminos, preparándolos para desafíos más complejos en los mundos venideros.

El objetivo central de este mundo es que los jugadores se familiaricen con los conceptos esenciales de la probabilidad, tales como la diferencia entre eventos ciertos, inciertos, posibles e imposibles, probables, improbables y la noción de aleatoriedad. A través de distintos desafíos, los jugadores deberán aplicar estos conceptos, afianzando su comprensión de cómo las probabilidades rigen el entorno. Al completar el mundo, deben obtener la Bendición del Oráculo para avanzar al siguiente nivel, lo que simboliza su dominio sobre las nociones básicas de probabilidad.

3.3.1. Primer Desafío: El Claro de la Sabiduría

Los jugadores comienzan su travesía en un amplio claro bañado por la luz del sol, conocido como el Claro de la Sabiduría. Aquí, la tranquilidad reina, los árboles susurran suavemente al viento, y el tiempo parece detenerse, brindando un respiro para que los jugadores preparen su mente para los retos que se avecinan.

Desafío. En el centro del claro, se encuentra una estatua del Gnomo de la Sabiduría, un sabio inmortalizado en piedra. Cuando los jugadores se aproximan, la estatua cobra vida y plantea un desafío basado en la clasificación de eventos según su probabilidad. El gnomo pide a los jugadores que clasifiquen una serie de eventos en cuatro categorías: ciertos, inciertos, posibles e imposibles.

Eventos.

- El sol saldrá mañana (evento cierto).
- Lloverán piedras esta noche (evento imposible).
- Un dado mostrará un número par (evento posible).
- Habrá una nevada en el desierto (evento incierto).

Los jugadores deben discutir y llegar a un consenso sobre cómo clasificar cada evento, basándose en su conocimiento y razonamiento probabilístico. Si dudan, el Gnomo les proporciona pistas, explicando cómo distinguir entre lo absolutamente cierto y lo impredecible. Este proceso refuerza el entendimiento de cómo la probabilidad nos ayuda a prever y gestionar lo inesperado. Una vez que los jugadores clasifican correctamente todos los eventos, el Gnomo revela un sendero oculto y les entrega su primera Ficha de Conocimiento, simbolizando su progreso en la aventura.

3.3.2. Segundo Desafío: El Camino de los Árboles Susurrantes

Siguiendo el sendero abierto por el Gnomo de la Sabiduría, los jugadores se adentran en el oscuro Camino de los Árboles Susurrantes, donde la luz apenas penetra a través de las ramas. Los árboles, antiguos y misteriosos, murmuran palabras en un lenguaje antiguo de probabilidades.

Desafío. Los jugadores deben escuchar atentamente los susurros y descifrar los enigmas probabilísticos que estos presentan. Cada árbol plantea un dilema que los jugadores deben resolver, identificando si el evento descrito es probable o improbable.

Susurros.

- A veces, un trueno sigue al relámpago; otras veces, reina el silencio (evento probable).
- Las montañas caminarán al amanecer (evento improbable).

Cada vez que los jugadores resuelven correctamente un enigma, un nuevo camino se abre en el bosque, acercándolos al siguiente desafío. Una vez que hayan clasificado correctamente todos los susurros, los árboles se apartan, revelando un atajo hacia el Lago del Reflejo Aleatorio.

3.3.3. Tercer Desafío: El Lago del Reflejo Aleatorio

El Lago del Reflejo Aleatorio es una vasta extensión de agua transparente, donde los jugadores ven no solo su reflejo, sino también destellos de futuros posibles y probables. A medida que se acercan, notan que la superficie del lago cambia constantemente, mostrando imágenes de eventos que aún no han sucedido.

Desafío. El lago está lleno de reflejos que representan eventos, y los jugadores deben determinar si los eventos reflejados son independientes o dependientes. Cada acierto acerca a los jugadores a una verdad probabilística más profunda.

Reflejos.

- Un pez salta del agua y una hoja cae al mismo tiempo (eventos independientes).
- Una roca cae al agua y las ondas empujan una hoja hacia la orilla (eventos dependientes).

A medida que los jugadores resuelven correctamente los reflejos, el lago se calma, revelando más fragmentos de sabiduría probabilística. Una vez que identifican todos los eventos de manera correcta, el lago otorga una Gema del Conocimiento y se transforma en un puente de cristal, llevándolos al Claro del Oráculo.

3.3.4. Cuarto Desafío: El Claro del Oráculo

Los jugadores llegan al majestuoso Claro del Oráculo, donde una entidad luminosa, el Oráculo del Bosque, los espera. Este último desafío les permitirá obtener la Bendición del Oráculo para avanzar al siguiente mundo.

Desafío. El Oráculo presenta una serie de situaciones que los jugadores deben clasificar según su probabilidad. Además, se les proporciona un dado y una moneda para experimentar la aleatoriedad. Los jugadores deben predecir los resultados de los lanzamientos y observar cómo la aleatoriedad influye en el resultado.

- Dado: Los jugadores predicen la probabilidad de obtener un número específico en cada lanzamiento.
- Moneda: Los jugadores predicen si caerá en cara o sello.

Cada vez que los jugadores hacen una predicción correcta y demuestran haber comprendido la aleatoriedad, obtienen una Piedra de Aleatoriedad. Acumular suficientes piedras les garantiza el éxito en este desafío.

Una vez que completan todas las tareas, el Oráculo les otorga la Bendición del Oráculo, un amuleto mágico que simboliza su comprensión del mundo probabilístico. Con esta bendición, los jugadores están preparados para enfrentar los desafíos de los mundos siguientes.

3.3.5. Cierre del Mundo 1

El primer desafío en el Claro de la Sabiduría les permitió a los jugadores familiarizarse con la clasificación de eventos según su probabilidad, fortaleciendo su habilidad para distinguir lo que es seguro de lo que es incierto. Luego, al adentrarse en el Camino de los Árboles Susurrantes, aplicaron este conocimiento a situaciones del mundo real, diferenciando eventos probables e improbables. Finalmente, el Lago del Reflejo Aleatorio introdujo el concepto de eventos dependientes e independientes, haciendo que los jugadores comprendieran cómo algunos eventos pueden afectar a otros, mientras que otros ocurren de forma autónoma.

La Bendición del Oráculo que reciben al final del mundo simboliza su dominio de las nociones básicas de probabilidad y les brinda la confianza para enfrentar los desafíos más complejos del siguiente mundo, La Ciudadela de la Probabilidad Clásica. Esta nueva etapa pondrá a prueba su comprensión de las probabilidades simples e independientes, permitiéndoles aplicar las lecciones aprendidas de manera más profunda y estratégica.

3.4. Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica

La Ciudadela de la Probabilidad Clásica es una fortaleza, construida sobre los cimientos de secretos matemáticos milenarios. Sus torres están decoradas con símbolos de la probabilidad y sus pasillos están llenos de fórmulas antiguas que flotan en el aire.

En este mundo, los estudiantes profundizarán en el concepto de la probabilidad clásica, aprendiendo a calcularla mediante la regla de Laplace. A través de diferentes desafíos, los jugadores desarrollarán una comprensión sólida de cómo las probabilidades se aplican a eventos simples y cómo las matemáticas subyacen en las decisiones cotidianas. Este mundo es un punto de inflexión, pues introduce las herramientas matemáticas necesarias para enfrentar retos más complejos en los mundos futuros.

3.4.1. Primer Desafío: El Salón de los Conceptos Fundamentales

El viaje por la ciudadela comienza en el Salón de los Conceptos Fundamentales, una sala que ilustran los conceptos relacionados a la probabilidad clásica. En el centro del salón hay una mesa, adornada con objetos como dados, monedas y una urna llena de pompones de colores. Cada uno de estos elementos será clave para entender los conceptos que los jugadores están por descubrir.

Este desafío tiene como objetivo enseñar a los jugadores el concepto básico de la probabilidad clásica, la idea de que la probabilidad de un evento es una fracción que compara los resultados favorables con el número total de resultados posibles. La regla de Laplace será el fundamento matemático que guiará este proceso y los jugadores deben captar la importancia de esta fórmula y cómo se aplica en situaciones cotidianas.

Desafío. Los estudiantes son guiados por un ente mágico con una voz y unas señas que llaman la atención en el salón. La voz les plantea preguntas sencillas para que reflexionen sobre el concepto de probabilidad:

- ¿Qué creen que significa 'probabilidad'?
- ¿Cómo medirían la posibilidad de que algo ocurra?

Después de la discusión inicial, el ente mágico explica que la probabilidad clásica es la relación entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles. Para ilustrar esto, se les presenta la **regla de Laplace**:

La probabilidad de un evento se calcula como:

$$P(A) = \frac{Números\ de\ resultados\ favorables}{Número\ total\ de\ resultados\ posibles}$$

Para poner en práctica este concepto, la voz les pide que realicen un experimento sencillo con una urna llena de 5 esferas rojas y 5 esferas azules. La pregunta que deben responder es:

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera roja de la urna?

Los estudiantes deben calcular:

- Número total de resultados posibles (número total de esferas): 10.
- Número de resultados favorables (esferas rojas): 5.
- Probabilidad de sacar una esfera roja:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Una vez que los estudiantes respondan correctamente todos los desafíos propuestos se revelará un pasadizo secreto que conduce al siguiente desafío.

3.4.2. Segundo Desafío: El Laberinto de las Decisiones

Tras aprender la teoría básica en el Salón de los Conceptos Fundamentales, los estudiantes avanzan hacia el Laberinto de las Decisiones, un sistema de pasillos donde cada cruce ofrece dos puertas. Este desafío va más allá de los conceptos simples de probabilidad, introduciendo a los jugadores en el cálculo de probabilidades múltiples. Las decisiones que tomen dentro del laberinto dependerán de su capacidad para calcular correctamente probabilidades combinadas, empleando tanto la suma como la multiplicación de probabilidades, según las situaciones.

El objetivo es que los estudiantes aprendan a calcular probabilidades en escenarios que implican eventos múltiples, ya sean independientes o dependientes. Esto les permitirá comprender cómo calcular la probabilidad de varios eventos que ocurren de manera secuencial o simultánea.

Desafío. En cada encrucijada del laberinto, los estudiantes se enfrentan a dos puertas, cada una asociada a un conjunto de eventos. Para elegir la puerta correcta, deberán calcular cuál de los eventos tiene una probabilidad más alta de ocurrir. El ente mágico les recuerda que, para eventos múltiples, las probabilidades se calculan multiplicando las probabilidades individuales si los eventos son independientes, o sumándolas cuando corresponda. Por ejemplo:

Puerta A. "Lanzar un dado y obtener un 1, 2 o 3".

Este evento implica una suma de probabilidades, ya que el jugador necesita que ocurra uno de varios resultados posibles.

- Probabilidad de obtener un 1: $P(uno) = \frac{1}{6}$

- Probabilidad de obtener un 2: $P(dos) = \frac{1}{6}$
- Probabilidad de obtener un 3: $P(tres) = \frac{1}{6}$
- Probabilidad total:

$$P(suma) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Puerta B. "Lanzar un dado y obtener un 4 en el primer lanzamiento y un 5 en el segundo".

Este evento implica la multiplicación de probabilidades, ya que se trata de obtener dos resultados específicos en lanzamientos consecutivos, y ambos eventos son independientes.

- Probabilidad de obtener un 4 en el primer lanzamiento: $P(cuatro) = \frac{1}{6}$
- Probabilidad de obtener un 5 en el segundo lanzamiento: $P(cinco) = \frac{1}{6}$
- Probabilidad total:

$$P(multiplicación) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0.27$$

En este caso, la probabilidad de elegir correctamente la puerta A es mucho mayor que la de la puerta B, por lo que los estudiantes deberían optar por esa puerta para avanzar.

A medida que los jugadores se adentran más en el laberinto, los eventos combinados se vuelven más complejos, requiriendo que utilicen tanto la suma como la multiplicación de probabilidades. En cada cruce, si calculan correctamente y eligen la puerta con la probabilidad más alta, avanzan un paso más cerca de la salida del laberinto. En caso de error, son redirigidos a callejones sin salida, lo que les obliga a revisar sus cálculos antes de continuar.

3.4.3. Cierre del Mundo 2

Al completar el mundo 2, los estudiantes no solo habrán adquirido una comprensión sólida de la probabilidad clásica, sino que también habrán aplicado estos conceptos a problemas más complejos que implican probabilidades múltiples. En el Salón de los Conceptos Fundamentales, aprendieron los principios básicos de la probabilidad como la relación entre los resultados favorables y los posibles. Este conocimiento les permitió avanzar hacia el Laberinto de las Decisiones, donde tuvieron que aplicar la teoría para resolver problemas más avanzados, utilizando tanto la suma como la multiplicación de probabilidades.

A través de los acertijos del Laberinto, los estudiantes aprendieron a identificar cuándo sumar probabilidades de eventos mutuamente excluyentes (eventos que no pueden suceder al mismo tiempo) y cuándo multiplicar probabilidades de eventos independientes (cuando la ocurrencia de un evento no afecta al otro). Ahora comprenden cómo calcular probabilidades no solo de eventos simples, sino también de eventos múltiples, un paso crucial para enfrentar problemas más avanzados en futuros mundos.

3.5. Mundo 3: Cuevas de la Frecuencia

Las Cuevas de la Frecuencia son un vasto y misterioso sistema de túneles, iluminados por cristales bioluminiscentes que brillan con la energía de eventos pasados. A medida que los estudiantes avanzan, deben aprender a usar la probabilidad frecuencial para interpretar y predecir eventos futuros basándose en patrones observados. Este mundo es crucial para que los estudiantes comprendan cómo la observación repetida de eventos puede ayudar a calcular probabilidades en la vida real.

En este mundo, los estudiantes aprenderán sobre la probabilidad frecuencial, entendiendo cómo se relaciona con la frecuencia de eventos observados a lo largo del tiempo. A través de desafíos interactivos, explorarán cómo las probabilidades se pueden estimar basándose en la frecuencia relativa de los eventos.

3.5.1. Primer Desafío: La Cámara de la Frecuencia

Los estudiantes ingresan a la Cámara de la Frecuencia, una sala cuyas paredes de cristal reflejan imágenes vívidas de eventos históricos y momentos significativos del pasado.

En el centro de la sala, una urna brillante está llena de esferas de diversos colores, cada una simbolizando la ocurrencia de un evento específico. De igual modo, se encuentran unos dados poliédricos donde sus diferentes caras no solo atraen la atención, sino que también representan diferentes probabilidades y frecuencias de sucesos.

El objetivo de este desafío es que los estudiantes comprendan a fondo los conceptos fundamentales de la probabilidad frecuencial. A través de experimentos prácticos, aprenderán cómo se calcula la frecuencia y cómo se utiliza este cálculo para estimar la probabilidad de un evento.

Desafío. El ente mágico de las Cuevas de la Frecuencia les da la bienvenida y les explica:

“La probabilidad frecuencial se basa en la frecuencia con la que ocurre un evento. Cuantas más veces observas un evento, más precisa es tu estimación de su probabilidad.”

Luego, les pide que realicen un experimento utilizando la urna: Los estudiantes deben extraer una esfera de la urna, registrar su color, y luego devolverla a la urna. Deben repetir este proceso 20 veces y registrar los resultados.

Después de realizar el experimento, los estudiantes deben calcular la probabilidad frecuencial de cada color. Por ejemplo, si sacan 8 esferas rojas y 12 esferas azules, esta sería:

- Probabilidad frecuencial de esferas rojas:

$$P(roja) = \frac{número\ de\ esferas\ rojas}{total\ de\ extracciones} = \frac{8}{20} = 0.4$$

- Probabilidad frecuencial de esferas azules:

$$P(azul) = \frac{número\ de\ esferas\ azules}{total\ de\ extracciones} = \frac{12}{20} = 0.6$$

Al finalizar el experimento y comprender los resultados, las paredes de cristal de la cámara comienzan a brillar más intensamente, y un pasadizo se abre, conduciendo a los jugadores al siguiente desafío.

3.5.2. Segundo Desafío: El Río de los Patrones

Tras salir de la Cámara de la Frecuencia, los estudiantes se encuentran a orillas del Río de los Patrones, un río mágico cuyas aguas muestran imágenes en movimiento de eventos repetidos. A lo largo de las orillas del río, hay estaciones de observación donde los estudiantes pueden ver cómo diferentes objetos, como hojas y piedras, caen en el río y son arrastrados por la corriente.

El objetivo de este desafío es que los estudiantes apliquen lo que aprendieron en la Cámara de la Frecuencia, observando y calculando la probabilidad frecuencial de diferentes eventos de manera divertida y práctica.

Desafío. Los estudiantes deben trabajar en equipo para simular cómo los objetos caen en el río y son arrastrados por la corriente. En cada estación de observación, se les pide que predigan la probabilidad de que ciertos objetos lleguen a un punto específico en el río basándose en la observación de eventos anteriores. Por ejemplo:

Los estudiantes observan cómo caen hojas verdes y marrones en el río. De las últimas 20 hojas que cayeron, 12 eran verdes y 8 marrones. Basándose en esta información, deben predecir la probabilidad de que la próxima hoja sea verde.

$$P(verde) = \frac{número\ de\ hojas\ verdes}{total\ de\ hojas} = \frac{12}{20} = 0.6$$

Esto significa que, basándose en los datos recopilados, hay un 60% de probabilidad de que la próxima hoja que caiga en el río sea verde. Este ejercicio no solo les ayuda a aplicar los conceptos de probabilidad, sino que también les enseña a observar y analizar patrones en su entorno.

Una vez que los estudiantes completen sus predicciones, el río comienza a fluir más rápido y se forma un puente de piedra que les permite cruzar al otro lado. Este puente los guía fuera de las Cuevas de la Frecuencia, habiendo demostrado su capacidad para aplicar la probabilidad frecuencial en situaciones reales.

3.5.3. Cierre del Mundo 3

A lo largo de estos desafíos, los estudiantes han adquirido una comprensión profunda de los conceptos fundamentales de la probabilidad frecuencial. Han aprendido a calcular la frecuencia de eventos y a utilizar estos cálculos para estimar la probabilidad de sucesos futuros.

Al salir de las Cuevas de la Frecuencia, los estudiantes no solo llevan consigo conocimientos teóricos, sino también experiencias que los preparan para enfrentar los desafíos finales en el próximo mundo. Así, se sienten más confiados y equipados para aplicar lo aprendido en nuevas situaciones.

3.6. Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística

El objetivo final de este mundo es que los estudiantes integren y apliquen todo lo aprendido sobre la probabilidad clásica y la probabilidad frecuencial. Mediante un desafío culminante, deberán demostrar su comprensión de ambos conceptos y cómo se relacionan para resolver problemas complejos. El éxito en este desafío simboliza la culminación de su aprendizaje y su capacidad para aplicar la probabilidad en diversos contextos.

El Reino de la Unión Probabilística es un lugar donde las reglas de la probabilidad clásica y frecuencial convergen. Este reino, visualmente deslumbrante con paisajes que cambian y se entrelazan, está lleno de desafíos que requieren una combinación de ambos enfoques probabilísticos. En su centro, se encuentra la Torre del Caos, una estructura mística que representa la complejidad y la imprevisibilidad de la probabilidad en su forma más avanzada.

3.6.1. Desafío Final: La Prueba de la Torre del Caos

El Desafío Final en el Reino de la Unión Probabilística se lleva a cabo dentro de la imponente Torre del Caos, un lugar donde se mezclan la incertidumbre y la lógica, y donde los estudiantes deben demostrar su dominio de la probabilidad clásica y frecuencial. A medida que se acercan a la cima de la torre, el Guardián de la Unión los recibe y les plantea el reto más complejo del juego: resolver un conjunto de situaciones que requieren combinar ambos enfoques probabilísticos para deshacer el hechizo que ha afectado la Academia Probamágica.

Estructura del Desafío. El desafío está compuesto por una serie de diez cartas o pruebas que abarcan distintos escenarios, cada uno exigiendo a los estudiantes que apliquen lo aprendido a través de cálculos de probabilidad, análisis comparativos, decisiones estratégicas y reflexiones sobre la confiabilidad de los resultados. Este desafío busca no solo comprobar el conocimiento técnico de los jugadores, sino también su capacidad para adaptarse y ajustar su estrategia en función de los resultados que obtengan durante el proceso.

- ***Carta 1.*** La primera carta les pide a los estudiantes que calculen la probabilidad clásica de un evento, como sacar un pompón de un determinado color de una urna. Este ejercicio refuerza la comprensión de los estudiantes sobre la probabilidad clásica, que se basa en las posibles combinaciones y el total de resultados.
- ***Carta 2.*** En la segunda prueba, se les presenta a los estudiantes un experimento que implica la repetición de eventos, como sacar varias esferas de la urna y contar cuántas veces ocurre un resultado en particular. Aquí, los estudiantes deben registrar los resultados y calcular la probabilidad frecuencial basándose en las observaciones.
- ***Carta 3.*** La tercera carta desafía a los estudiantes a comparar los resultados de la probabilidad clásica y la frecuencial para el mismo evento. A partir de esto, deben reflexionar sobre las diferencias que puedan surgir entre ambas aproximaciones y entender cómo los resultados pueden variar debido a la naturaleza del muestreo en la probabilidad frecuencial.
- ***Carta 4.*** A partir de los cálculos realizados, los estudiantes deben tomar decisiones basadas en probabilidades, como elegir el color de pompón con mayor probabilidad de salir en una nueva extracción. Este ejercicio no solo evalúa la precisión de sus cálculos, sino también su capacidad para aplicar esos conocimientos en la toma de decisiones.

- ***Carta 5.*** La siguiente carta pide a los estudiantes que realicen más intentos, lo que les permite actualizar sus estimaciones de la probabilidad frecuencial con nuevos datos. Este componente enfatiza el carácter dinámico de la probabilidad frecuencial y enseña a los estudiantes la importancia de observar más eventos para mejorar la precisión de las predicciones.
- ***Carta 6.*** En esta prueba, los estudiantes deben analizar sus nuevas probabilidades y decidir si ajustasen su estrategia inicial en función de los nuevos resultados. Este paso fomenta el pensamiento crítico y la habilidad de adaptación frente a nueva información.
- ***Carta 7.*** Aquí, se pide a los estudiantes que reflexionen sobre cuál de los dos enfoques probabilísticos les parece más confiable en función de los resultados obtenidos y las situaciones en las que se encuentran. Este análisis es clave para comprender cuándo y por qué un enfoque puede ser más adecuado que el otro.
- ***Carta 8.*** La carta siguiente desafía a los estudiantes a predecir resultados futuros basados en sus observaciones anteriores. Este ejercicio fomenta la extrapolación de datos y les permite ver cómo las predicciones pueden volverse más precisas a medida que aumenta la cantidad de datos observados.
- ***Carta 9.*** En esta carta, los estudiantes deben pensar en situaciones reales donde aplicarían los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial que han aprendido. Esta tarea conecta el aprendizaje del juego con aplicaciones prácticas en el mundo cotidiano.
- ***Carta 10.*** La última carta invita a los estudiantes a reflexionar sobre su experiencia a lo largo del juego, pensando en cómo lo aprendido sobre probabilidad les servirá en el futuro. Esta reflexión cierra el desafío con una valoración personal de su progreso y conocimiento.

3.6.2. Cierre del Mundo 4 y Conclusión del Juego

Al completar este desafío, los estudiantes habrán demostrado su capacidad para aplicar tanto la probabilidad clásica como la frecuencial de manera integrada. El Mundo 4 actúa como una culminación de todo lo aprendido en los mundos anteriores, donde los conceptos se entrelazan para ofrecer una comprensión más profunda y matizada de la probabilidad. Este entorno final refuerza la idea de que, en muchas situaciones del mundo real, ambos enfoques probabilísticos son importantes y deben considerarse cuidadosamente para tomar decisiones informadas y efectivas.

Conclusión del juego. El Guardián de la Unión felicita a los estudiantes por su éxito, expresando su admiración por el esfuerzo y la dedicación mostrados a lo largo del viaje. Les explica que han dominado los principios fundamentales de la probabilidad, y que están ahora equipados para enfrentar desafíos aún más complejos en el futuro. Este reconocimiento no solo celebra sus logros académicos, sino que también destaca la importancia de la colaboración y el pensamiento crítico en la resolución de problemas.

Con la Academia Probamágica a salvo y en paz, los estudiantes son honrados con el título de Maestros Probamágicos. Este título simboliza no solo su destreza y comprensión en el arte de la probabilidad, sino también su compromiso de aplicar estos conocimientos para el bien común. La ceremonia de graduación está llena de alegría y orgullo, donde cada estudiante reflexiona sobre su viaje y el crecimiento personal que han experimentado.

Además, se les anima a seguir explorando el vasto campo de la probabilidad y a compartir su conocimiento con otros, convirtiéndose en embajadores de la comprensión matemática. El mundo de la probabilidad se abre ante ellos, lleno de posibilidades y nuevas aventuras, donde cada decisión puede estar guiada por los principios que han aprendido. La historia de la Academia

Probamágica continúa, con nuevos desafíos esperando ser enfrentados por aquellos que se atrevan a explorar más allá de lo conocido.

4. Validación de la Propuesta Didáctica

Este capítulo presenta el proceso de validación de la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva, integrada por estudiantes sordos y oyentes. La validación se lleva a cabo a través de la caracterización de la población participante, el desarrollo de varias sesiones didácticas y un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos. Este enfoque permite evaluar no solo la efectividad del diseño pedagógico propuesto, sino también su capacidad para promover un aprendizaje equitativo en un entorno diverso.

En primer lugar, se describen las características del grupo de estudio, destacando la heterogeneidad del aula y las dinámicas de interacción entre los estudiantes. El grupo está compuesto por estudiantes con diferentes capacidades, lo que requiere una atención especial para garantizar que el material didáctico y las actividades sean accesibles y significativas para todos. La inclusión de estudiantes sordos, que utilizan la LSC, junto con los estudiantes oyentes, permite observar cómo los recursos visuales y manipulativos diseñados se adaptan a sus necesidades, facilitando la participación de todos. A través de esta caracterización, se identifican las barreras y oportunidades presentes en el aula, que resultan clave para ajustar las estrategias pedagógicas durante el proceso.

A continuación, se detallan las tres sesiones didácticas implementadas, donde se describen las actividades realizadas y la organización de los grupos. Cada sesión se diseña con el objetivo de que los estudiantes avancen en su comprensión de los conceptos probabilísticos de manera lúdica y colaborativa. La organización de los grupos, tanto para los desafíos como para las actividades de reflexión, favorece la interacción entre los estudiantes sordos y oyentes, promoviendo el aprendizaje cooperativo y la integración. Estas sesiones son fundamentales para evaluar cómo los estudiantes se apropian de los contenidos relacionados con la probabilidad clásica, frecuencial y su combinación, aplicando los conocimientos en situaciones reales y contextuales.

Para facilitar la evaluación del impacto de la propuesta, se definen categorías de análisis organizadas en torno a las nociones básicas de probabilidad, la probabilidad clásica, la probabilidad frecuencial y la combinación de probabilidades. Cada una de estas categorías permite observar cómo los estudiantes comprenden y aplican los conceptos a medida que avanzan en los diferentes mundos del juego. Además, se incluye un análisis específico sobre la inclusión en el desarrollo de la actividad, lo que permite identificar cómo se promueve la participación y equitativa de los estudiantes en todas las fases del proceso. Este análisis también sirve para evaluar cómo el diseño de la propuesta contribuye a la integración de los estudiantes sordos en el aprendizaje compartido con los oyentes, asegurando que se rompan barreras de comunicación y se fomente una experiencia educativa conjunta.

4.1. Caracterización de la Población

El curso 802 del colegio Isabel II IED, perteneciente a la Jornada Mañana, está conformado por 30 estudiantes, quienes, a lo largo de las clases, han mostrado una notable falta de compañerismo e integración. El ambiente dentro del aula está marcado por la división en pequeños grupos sociales, formados en función de afinidades personales, lo que crea un entorno donde predomina la segregación. Esta falta de cohesión no solo afecta la interacción entre los estudiantes, sino que también repercute en el trabajo colaborativo y el respeto mutuo.

En este contexto, los cinco estudiantes sordos del curso enfrentan un aislamiento aún mayor. Su ubicación física en el aula es un reflejo de esta división social, ya que suelen estar situados en un lado del salón, alejados de sus compañeros oyentes. La interacción de los estudiantes sordos se da, principalmente, entre ellos mismos y con el intérprete de LSC que los acompaña en las clases, limitando así su participación en las dinámicas grupales del aula.

Con base a la información proporcionada a las observaciones de clase, la experiencia que se tuvo durante cuatro meses desarrollando la Practica de Integración Profesional a la Escuela (PIPE) y un informe dado por la profesora del área de matemáticas y la encargada del departamento de inclusión del colegio, se puede clasificar la discapacidad auditiva de los estudiantes sordos del curso 802 del colegio Isabel II IED de la siguiente manera:

Tabla 7. *Caracterización de la discapacidad auditiva de los estudiantes de 802.*

Estudiante[1]	**Clasificación de la Discapacidad Auditiva**
Estudiante A	**Clasificación**: **Sorda hablante**. Puede pronunciar sonidos y algunas palabras, lo que indica que ha desarrollado una primera lengua oral.
	Situación lingüística: **Bilingüe**. Usa la LSC y tiene habilidades orales, aunque limitadas.
Estudiante B	**Clasificación**: **Sordo señante**. Se comunica exclusivamente mediante LSC, sin usar la lengua oral.
	Situación lingüística: **Monolingüe**. Se comunica exclusivamente en Lengua de Señas Colombiana.
Estudiante F	**Clasificación**: **Sordo señante**. Se comunica a través de la Lengua de Señas Colombiana y no utiliza la lengua oral.
	Situación lingüística: **Monolingüe**. Su única forma de comunicación es mediante LSC.

[1] Para garantizar la confidencialidad de los estudiantes, se les mencionará como Estudiante A, Estudiante B, y así sucesivamente, utilizando una organización aleatoria que se asignó durante las sesiones. En el siguiente apartado se detallará este proceso de asignación.

Estudiante H	**Clasificación**: **Sordo hablante**. Tiene habilidades orales limitadas, pero es capaz de pronunciar algunas palabras, lo que sugiere que ha desarrollado una lengua oral, aunque su comunicación principal sigue siendo en LSC.
	Situación lingüística: **Bilingüe**. Usa tanto LSC como algunas habilidades orales para comunicarse.
Estudiante I	**Clasificación**: **Sordo señante**. No usa el lenguaje oral, pero se comunica principalmente mediante la LSC.
	Situación lingüística: **Monolingüe**. Se comunica exclusivamente en Lengua de Señas Colombiana.

Nota. Información brindada por el departamento de inclusión del colegio.

4.2. Desarrollo de las Sesiones

Los estudiantes sordos del curso 802 habían estado mezclados con sus compañeros oyentes en la mayoría de las materias, siempre acompañados por un intérprete. Sin embargo, en mayo de este año, la dinámica cambió con la vinculación de un profesor sordo de matemáticas en el colegio. A partir de ese momento, los estudiantes sordos comenzaron a tomar las clases de matemáticas de forma separada, en la biblioteca, donde recibían sus clases de matemáticas directamente en LSC. Para las demás asignaturas, continuaron integrados con los oyentes, aunque acompañados de intérpretes, cuya presencia variaba según la disponibilidad horaria.

Con el objetivo de promover una verdadera inclusión, la propuesta didáctica requería que tanto los estudiantes sordos como los oyentes compartieran el mismo espacio durante el desarrollo de las sesiones. Esto supuso un ajuste en la dinámica habitual de las sesiones de clase que se habían desarrollado en PIPE, ya que implicó la presencia simultánea del profesor sordo, la profesora de matemáticas que impartía clases a los oyentes y un intérprete que facilitara la comunicación entre ambos grupos. El propósito de esta reestructuración era garantizar un entorno de aprendizaje equitativo, en el que tanto sordos como oyentes pudieran participar y comprender el contenido de manera efectiva, reforzando el concepto de una educación inclusiva y accesible para todos.

4.2.1. Organización de los Grupos

Estas sesiones, que involucraban a 30 estudiantes en total (25 oyentes y 5 sordos), presentaban un desafío clave: fomentar un verdadero ambiente de inclusión, respetando las necesidades de los estudiantes sordos y oyentes. Para ello, se decidió dividir la clase en tres grupos de 10 estudiantes cada uno. Esta estrategia buscaba no solo una mejor organización del aula, sino también crear oportunidades para que ambas poblaciones trabajaran juntas y aprendieran a colaborar de manera efectiva.

Desde el momento en que se anunció la división, los estudiantes entendieron que uno de los grupos debía estar conformado por sordos y oyentes, promoviendo la interacción entre ellos. De manera espontánea y natural, los estudiantes oyentes que solían sentarse cerca de los estudiantes sordos en las primeras filas decidieron formar un equipo con ellos. Este gesto demostró una disposición positiva hacia la inclusión y una voluntad de cooperación, lo que permitió que el grupo resultante estuviera equilibrado, con 5 estudiantes sordos y 5 oyentes.

Este grupo mixto fue seleccionado como el grupo focal para el análisis posterior debido a su composición diversa. A cada estudiante se le asignó una letra[2], desde Estudiante A hasta Estudiante J, siguiendo un orden alfabético según sus nombres.

4.2.2. Primera Sesión

En la primera sesión, hubo un retraso de casi 40 minutos debido a un error en la planificación del departamento de inclusión del colegio. Este no había previsto la asignación de un intérprete para la clase del curso 802, ya que se asumía que, al contar con un profesor de matemáticas sordo, no se necesitaría intérprete en ese horario. Sin embargo, la propuesta requería la presencia de un intérprete para facilitar la comunicación entre los estudiantes, tanto sordos como oyentes y quien modularía la sesión. Durante ese tiempo de espera, se aprovecharon los minutos para organizar los grupos y disponer el aula de manera que cada uno de los tres grupos tuviera un espacio designado con sus respectivos integrantes.

Una vez que llegó el intérprete, se inició la actividad, comenzando con el Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas, parte del juego didáctico diseñado para enseñar los conceptos fundamentales de probabilidad. No obstante, debido al tiempo reducido que quedaba tras el retraso, en la primera sesión solo se alcanzó a desarrollar este primer mundo, compuesto por cuatro desafíos. Los tres primeros desafíos fueron completados de manera exitosa, y los estudiantes registraron sus avances por escrito. El cuarto desafío, por falta de tiempo, solo tuvo un registro

[2] Por confidencialidad, se mantendrán los nombres de los estudiantes de manera anónima por tratamiento de datos de menores de edad, pese a que ellos fueron consientes del motivo y fin de las actividades.

oral y en señas, sin que los estudiantes pudieran plasmar sus ideas en la hoja de cálculo que se había dispuesto para ello.

A pesar del contratiempo, la actividad permitió observar cómo los estudiantes sordos y oyentes trabajaban juntos en los desafíos, con comunicación fluida entre ellos gracias al intérprete, tomando la iniciativa de compartir respuestas y asegurarse de que los desafíos estuvieran resueltos de la manera correcta. Pero, durante el desarrollo de estos desafíos surgió una inquietud cuando se notó que los estudiantes sordos no diferenciaban términos como “posible” y “probable” o “imposible” e “improbable”, ellos asociaban a que estas palabras eran lo mismo de acuerdo con las señas que les hacía el intérprete. Esto generó sospechas sobre posibles confusiones conceptuales.

4.2.3. Segunda Sesión

Al comenzar la segunda sesión, se decide indagar más a fondo sobre esta confusión, preguntando al intérprete cómo se señalaban en LSC términos como “posibilidad” y “probabilidad”. El intérprete explicó que ambos términos compartían la misma seña, lo que confirmaba la causa de la confusión. El profesor sordo también intervino, señalando que él mismo usaba la misma seña para ambos conceptos, ya que, consideraba que eran muy similares, por no decir que los mismos en el contexto cotidiano.

Ante esto, se comenta la importancia de diferenciar estos términos en el ámbito probabilístico porque serían fundamentales para los temas que se seguirían abordando en las siguientes sesiones.

Para aclarar esta diferencia y enseñar las señas adecuadas, se recurre a un vídeo de YouTube publicado por el Insor Educativo Colombia (2020), el cual mostraba diversas señas relacionadas con el vocabulario específico de probabilidad. En el video se muestran las señas para términos clave como: aleatorio, azar o suerte, casos o eventos, casos posibles, casos favorables, conjunto, conteo, posibilidad y probabilidad.

Durante la mayor parte de la clase, el intérprete y el profesor sordo se dedicaron a enseñar estas nuevas señas a los estudiantes sordos, mientras los oyentes del grupo focal también aprendían sobre estas. Esto ocupó más de la mitad de la sesión, pero fue un momento clave para garantizar que los estudiantes sordos comprendieran correctamente el vocabulario que utilizarían en los próximos temas, y para asegurar que la comunicación sobre probabilidad fuera precisa tanto para sordos como para oyentes.

Después de este proceso, se da inicio al Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica. Se trabajó en el primer desafío, que introdujo a los estudiantes al concepto de probabilidad clásica, asociado a la regla de Laplace. Sin embargo, debido al tiempo limitado que quedaba, se optó por no abordar el segundo desafío, que estaba centrado en la probabilidad de eventos múltiples. Este ajuste en la planificación dejó claro que, aunque el aprendizaje de las señas consumió más tiempo del esperado, era esencial para asegurar una comprensión sólida de los conceptos que seguirían desarrollándose en las sesiones posteriores.

4.2.4. Tercera Sesión

En la tercera y última sesión, afortunadamente no hubo inconvenientes logísticos, lo que permitió iniciar de inmediato con el Mundo 3: Las Cuevas de la Frecuencia. El primer desafío de este mundo requería que los estudiantes realizaran experimentaciones repetidas y calcularan la probabilidad de un evento específico basado en un número determinado de experimentos. Dado que estos experimentos son meticulosos y consumen bastante tiempo, se decidió omitir el segundo desafío, que estaba relacionado con la probabilidad basada en observaciones previas, para asegurar que se pudiera avanzar en el programa sin contratiempos.

Luego, se desarrolló el Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística, cuyo objetivo principal era evaluar y consolidar todo lo aprendido durante las sesiones previas. En este mundo final, los estudiantes debían aplicar tanto la probabilidad clásica como la frecuencial. Algunas respuestas fueron registradas de manera escrita, mientras que otras fueron expresadas oralmente y a través de señas, lo que permitió a los estudiantes sordos y oyentes compartir sus ideas de manera efectiva.

Es importante señalar que esta última sesión coincidió con el último día de clases antes de las vacaciones, lo que afectó la disposición y el nivel de concentración de los estudiantes. A diferencia de las sesiones anteriores, muchos no mostraron el mismo entusiasmo o compromiso con las actividades, posiblemente debido a la proximidad del receso. Sin embargo, a pesar de esta falta de motivación, se logró completar la actividad tal como estaba planeada, cumpliendo con los objetivos propuestos para la jornada.

4.3. Categorías de Análisis

Para el desarrollo del componente de validación de la propuesta didáctica, las categorías de análisis se han diseñado con el fin de evaluar de manera precisa y diferenciada los avances y logros de los estudiantes en cada mundo. Dado que cada mundo está estructurado en torno a diferentes conceptos y niveles de complejidad dentro de la probabilidad, es esencial que las categorías de análisis reflejen estas variaciones temáticas y didácticas, asegurando una evaluación que responda a las particularidades de cada desafío.

En este contexto, las categorías se han creado con base en los siguientes criterios: comprensión conceptual, aplicación práctica, y capacidad de resolver problemas complejos. Cada mundo tiene sus propios indicadores, ajustados a la complejidad del objeto matemático tratado. Así, la validación del juego no solo se centra en la adquisición de conocimientos, sino también en cómo los estudiantes aplican dichos conocimientos en contextos dinámicos, midiendo su capacidad para transferir lo aprendido a situaciones prácticas. Las categorías de análisis permiten obtener una visión clara del progreso individual y grupal, facilitando la retroalimentación y el ajuste de las estrategias pedagógicas empleadas, asegurando que los objetivos de enseñanza se cumplan de manera inclusiva y efectiva para todos los estudiantes, sordos y oyentes, que participan en el juego.

4.3.1. Categorías Asociadas a las Nociones Básicas de Probabilidad

Las categorías del Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas, se estructura en torno a varios indicadores clave que permiten evaluar el progreso y la comprensión de los estudiantes en los desafíos planteados. Cada desafío presenta situaciones diseñadas para que los estudiantes, tanto sordos como oyentes, demuestren su capacidad de aplicar conceptos fundamentales de probabilidad.

Los indicadores abarcan desde la clasificación de eventos según su certeza, hasta la distinción entre eventos dependientes e independientes, y la predicción basada en la aleatoriedad. Además, se presta especial atención a la capacidad de los estudiantes para aprovechar las pistas y los mensajes que el entorno les ofrece, como las pistas del gnomo o los susurros de los árboles, lo que refleja no solo su habilidad para resolver los desafíos, sino también su capacidad de adaptación y ajuste en sus predicciones a medida que obtienen nuevos resultados.

A través de estos indicadores, se evalúa de manera integral el nivel de comprensión de los jugadores sobre conceptos básicos de probabilidad, observando cómo estos se aplican en situaciones prácticas y dinámicas dentro del juego (**Tabla 8**).

Tabla 8. *Categorías de análisis para las actividades del mundo 1.*

Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas		
Desafío	**Indicador**	**Descripción**
Desafío 1: El Claro de la Sabiduría	Clasificación de eventos según certeza.	Evalúa si los jugadores son capaces de reconocer con claridad la diferencia entre eventos como ciertos, inciertos, posibles e imposibles.
	Aplicación de pistas del gnomo.	Se evalúa la capacidad de los jugadores para aprovechar las pistas del gnomo cuando enfrentan dificultades y su impacto en la resolución correcta del desafío.
Desafío 2: El Camino de los Árboles Susurrantes	Identificación de eventos probables e improbables.	Determina si los jugadores son capaces de distinguir correctamente entre eventos que es probable que sucedan y aquellos que no lo son.
	Comprensión de los susurros de los árboles.	Evalúa la capacidad de atención y comprensión de los jugadores al descifrar los mensajes que presentan los árboles, reflejando su habilidad para aplicar el conocimiento de la probabilidad.
Desafío 3: El Lago del Reflejo Aleatorio	Distinción entre eventos dependientes e independientes.	Evalúa si los jugadores comprenden cómo algunos eventos pueden influir en otros o no, mediante el análisis de los reflejos del lago.
	Predicción basada en la aleatoriedad.	Evalúa la comprensión de los jugadores sobre la aleatoriedad y la probabilidad en la predicción de resultados de lanzamientos repetidos.
Desafío 4: El Claro del Oráculo	Observación y ajuste en predicciones.	Mide si los jugadores pueden aprender de los resultados observados y ajustar sus predicciones basándose en la noción de aleatoriedad.
	Acumulación de piedras de aleatoriedad.	Se mide la cantidad de piedras acumuladas, lo que refleja el nivel de comprensión de los jugadores sobre la aleatoriedad y la probabilidad.

Nota. Elaboración propia según las actividades creadas para el mundo 1.

4.3.2. Categorías Asociadas a la Probabilidad Clásica

Estas categorías del Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica, se centran en evaluar la comprensión y aplicación de los conceptos fundamentales de la probabilidad clásica. Los desafíos propuestos buscan determinar si los estudiantes son capaces de identificar, calcular y reflexionar sobre probabilidades en situaciones prácticas.

A través de diversos indicadores, se evalúa su habilidad para aplicar la regla de Laplace, tanto en experimentos simples como en problemas más complejos que involucran eventos mutuamente excluyentes o independientes. En este sentido, la Ciudadela desafía a los estudiantes a tomar decisiones basadas en el cálculo de probabilidades, poniendo a prueba su capacidad de razonamiento lógico y su destreza para aplicar correctamente las operaciones de suma y multiplicación de probabilidades.

Tabla 9. *Categorías de análisis para las actividades del mundo 2.*

Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica		
Desafío	**Indicador**	**Descripción**
Desafío 1: El Salón de los Conceptos Fundamentales	Comprensión de la probabilidad clásica.	Evalúa si los estudiantes comprenden el concepto de probabilidad clásica como la relación entre resultados favorables y resultados posibles, utilizando la regla de Laplace.
	Aplicación de la Regla de Laplace.	Evalúa si los estudiantes aplican correctamente la regla de Laplace en diferentes experimentos simples.
	Reflexión sobre el concepto de probabilidad.	Analiza la capacidad de los estudiantes para reflexionar y discutir sobre el concepto de probabilidad antes de realizar los experimentos.
Desafío 2: El Laberinto	Identificación de probabilidades mutuamente excluyentes.	Evalúa si los estudiantes comprenden la necesidad de sumar probabilidades en situaciones de eventos mutuamente excluyentes.

	Aplicación de la multiplicación de probabilidades en eventos independientes.	Evalúa si los estudiantes aplican correctamente la multiplicación de probabilidades en eventos independientes.
	Toma de decisiones basadas en el cálculo de probabilidades.	Evalúa si los estudiantes eligen correctamente las puertas del laberinto basándose en los cálculos de probabilidad más favorables.

Nota. Elaboración propia según las actividades creadas para el mundo 2.

4.3.3. Categorías Asociadas a la Probabilidad Frecuencial

Las categorías del Mundo 3: Las Cuevas de la Frecuencia, se enfocan en la evaluación de la comprensión y aplicación del concepto de probabilidad frecuencial. A través de los desafíos, se busca determinar si los estudiantes son capaces de definir el concepto de probabilidad basada en la frecuencia de eventos observados y si logran recolectar datos de manera precisa durante las actividades experimentales. En este contexto, se analiza la habilidad de los estudiantes para utilizar los datos obtenidos y calcular correctamente las probabilidades frecuenciales, mostrando una comprensión clara de cómo la observación repetida influye en la estimación de probabilidades. Además, se evalúa su capacidad para identificar patrones en eventos repetidos y aplicar estos conocimientos en la predicción de futuros eventos, lo que permite observar su precisión y consistencia en la estimación de probabilidades futuras.

Tabla 10. *Categorías de análisis para las actividades del mundo 3.*

Mundo 3: Las Cuevas de la Frecuencia		
Desafío	**Indicador**	**Descripción**
Desafío 1: La Cámara	Comprensión del concepto de probabilidad frecuencial.	Evalúa si los estudiantes son capaces de definir y explicar el concepto de probabilidad frecuencial antes y después del desafío.

	Exactitud en la recolección de datos.	Observa si los estudiantes llevan un registro preciso y ordenado de los resultados obtenidos durante la actividad, asegurando la correcta interpretación posterior.
	Cálculo de la probabilidad frecuencial.	Evalúa si los estudiantes son capaces de utilizar los datos recolectados para calcular correctamente la probabilidad de cada color o número, comprendiendo la relación entre resultados observados y probabilidad estimada.
Desafío 2: El Río de los Patrones	Identificación de patrones en eventos repetidos.	Evalúa la capacidad de los estudiantes para detectar regularidades y patrones en los eventos observados, como la frecuencia con la que caen hojas verdes o marrones.
	Aplicación de la probabilidad frecuencial en predicciones.	Evalúa si los estudiantes son capaces de aplicar los cálculos de probabilidad frecuencial a situaciones reales, como predecir la probabilidad de que la próxima hoja que caiga en el río sea verde.
	Precisión en la estimación de probabilidades futuras.	Analiza si los estudiantes logran hacer predicciones correctas y consistentes, usando datos previamente observados para estimar las probabilidades de futuros eventos.

Nota. Elaboración propia según las actividades creadas para el mundo 3.

4.3.4. Categorías Asociadas a la Unión de Probabilidades

Las categorías del Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística tienen como objetivo evaluar la capacidad de los estudiantes para integrar los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial, y aplicar estos enfoques de manera adecuada según el contexto de los problemas presentados.

A través del desafío final, "La Prueba de la Torre del Caos", se examina la capacidad de los jugadores al momento de combinar ambos enfoques probabilísticos, identificando las diferencias y analizando las razones detrás de las variaciones en los resultados. Además, se pone a prueba su habilidad para tomar decisiones estratégicas basadas en los cálculos de probabilidades, evaluando qué enfoque les ofrece mayor confianza y precisión.

También se fomenta la reflexión sobre la confiabilidad de cada método, alentando a los estudiantes a determinar cuál consideran más adecuado según los resultados obtenidos. Finalmente, se analiza su capacidad para aplicar estos conocimientos en situaciones del mundo real, mostrando una comprensión profunda y práctica de la probabilidad clásica y frecuencial en contextos cotidianos.

Tabla 11. *Categorías de análisis para las actividades del mundo 4.*

Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística		
Desafío	**Indicador**	**Descripción**
Desafío Final: La Prueba de la Torre del Caos	Integración de la probabilidad clásica y frecuencial.	Evalúa la capacidad para combinar y aplicar los conceptos de probabilidad clásica y frecuencial para comprender sus diferencias y aplicarlos de manera adecuada según el contexto del problema.
	Análisis comparativo entre probabilidad clásica y frecuencial.	Evalúa la identificación de las posibles diferencias entre las probabilidades calculadas utilizando ambos enfoques y explicar las razones de estas variaciones.
	Toma de decisiones basada en probabilidades.	Evalúa la capacidad para tomar decisiones estratégicas utilizando los resultados evaluando cuál enfoque probabilístico les ofrece mayor confianza y precisión para cada situación
	Reflexión sobre la confiabilidad de las probabilidades.	Evalúa la reflexión sobre cuál de los enfoques probabilísticos (clásico o frecuencial) consideran más confiable en función de los resultados obtenidos y el contexto del desafío.
	Aplicación de la probabilidad en contextos reales.	Evalúa la capacidad de identificar situaciones del mundo real en las que puedan aplicar lo aprendido sobre probabilidad clásica y frecuencial, demostrando comprensión práctica del tema.

Nota. Elaboración propia según las actividades creadas para el mundo 4.

4.3.5. Categorías Asociadas a la Inclusión en el Desarrollo de la Actividad

Las categorías del componente pedagógico y didáctico de las sesiones en términos de inclusión tienen como objetivo evaluar si se logró una integración efectiva entre los estudiantes sordos y oyentes durante las actividades del juego de probabilidad.

Se observará la participación equitativa de ambos grupos, analizando si los estudiantes sordos tuvieron la oportunidad de expresar sus ideas mediante la LSC o herramientas de apoyo visual, y si los estudiantes oyentes interactuaron con estas adaptaciones. Además, se medirá la frecuencia y calidad de las interacciones entre ambos grupos, valorando la cooperación en la resolución de problemas y el esfuerzo de los oyentes por incluir a sus compañeros sordos mediante la LSC.

Se examinará también la adecuación de los medios comunicativos empleados, para garantizar que las instrucciones y explicaciones fueran accesibles para todos, así como la comprensión efectiva de los desafíos por parte de ambos grupos. Otro aspecto central será la colaboración entre sordos y oyentes en la resolución de los desafíos, analizando si existió un intercambio de ideas y estrategias en igualdad de condiciones. Finalmente, se evaluarán las actitudes inclusivas demostradas por los estudiantes oyentes, observando su disposición para comunicarse de manera accesible y respetuosa, y trabajar de forma colaborativa sin generar barreras de exclusión.

Tabla 12. *Categorías de análisis para el desarrollo inclusivo en las sesiones.*

Componente Pedagógico y Didáctico de las Sesiones		
Tema	**Indicador**	**Descripción**

Inclusión en el Aula con los Estudiantes Sordos y Oyentes	Participación de los estudiantes sordos y oyentes en la actividad.	Analiza si ambos grupos participan de manera equitativa en las actividades y si se les dio la oportunidad de contribuir a la solución de los desafíos en igualdad de condiciones. Se observará si los estudiantes sordos pudieron expresar sus ideas a través de la LSC o cualquier otra herramienta de apoyo visual, y si los estudiantes oyentes también interactuaron con las adaptaciones comunicativas.
	Frecuencia y calidad de la interacción entre estudiantes sordos y oyentes durante la actividad.	Evalúa si hubo interacción significativa entre los estudiantes sordos y oyentes. Se observará si se generan intercambios comunicativos, como la cooperación en la resolución de problemas o el trabajo en equipo, y si los estudiantes oyentes hicieron un esfuerzo por incluir a sus compañeros sordos a través del uso de la LSC o apoyo visual.
	Adecuación de los medios comunicativos utilizados.	Analiza si las adaptaciones comunicativas (como el uso de la LSC, intérpretes o materiales visuales) fueron adecuadas para que los estudiantes sordos comprendieran y participaran activamente en las actividades. También se evaluará si las instrucciones y explicaciones fueron accesibles para todos los estudiantes.
	Comprensión de las instrucciones y desafíos por parte de ambos grupos.	Evalúa si los estudiantes sordos y oyentes comprendieron las instrucciones de manera clara y pudieron realizar los desafíos sin obstáculos significativos. Esto incluye la claridad de las explicaciones, la presencia de apoyos visuales y la adaptación de las dinámicas del juego para facilitar la comprensión de los estudiantes sordos.
	Colaboración entre sordos y oyentes para resolver los desafíos del juego.	Analiza si ambos grupos colaboraron en la resolución de los desafíos del juego de probabilidad y si hubo un intercambio de ideas y estrategias que incluirá a todos los estudiantes. Se observará si los estudiantes sordos participarán en la toma de decisiones de manera equitativa.
	Actitudes inclusivas demostradas por los estudiantes oyentes hacia sus compañeros sordos.	Evalúa si los estudiantes oyentes demostraron actitudes inclusivas, como la disposición para comunicarse a través de la LSC, el respeto por el tiempo y los medios que los estudiantes sordos necesitaron para comprender y participar, y la disposición a trabajar en conjunto sin generar. barreras de exclusión.

Nota. Elaboración propia según la información investigada en el capítulo del marco didáctico.

5. Análisis y Resultados de los Datos y Sesiones

En este capítulo se presenta el análisis de los datos recolectados durante el desarrollo de las sesiones del juego didáctico, enfocado en la enseñanza de la probabilidad en un aula inclusiva. Este análisis se organiza en torno a los conceptos clave abordados en las actividades y las interacciones observadas entre los estudiantes sordos y oyentes. El objetivo es evaluar cómo la propuesta didáctica facilita el aprendizaje de la probabilidad y promueve la inclusión de todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades auditivas.

En primer lugar, se examina la comprensión y aplicación de los conceptos básicos de probabilidad, destacando cómo los estudiantes asimilaron nociones básicas. Se evalúa cómo los recursos visuales y manipulativos utilizados en el juego, como las cartas de desafío y las fichas de conocimiento, ayudaron a los estudiantes a identificar y diferenciar entre los diferentes tipos de eventos en situaciones de probabilidad.

A continuación, se analiza el manejo de la probabilidad clásica, con especial énfasis en el uso adecuado de la regla de Laplace y otros conceptos clave, como la equiprobabilidad de los eventos y la relación entre el número de resultados favorables y el total de posibles. Se observa cómo los estudiantes aplicaron estos conceptos a través de actividades estructuradas, como los desafíos en "La Ciudadela de la Probabilidad Clásica". Este enfoque permite evaluar la comprensión profunda de los estudiantes sobre la probabilidad clásica y su capacidad para resolver problemas que requieren la aplicación de esta regla en situaciones específicas.

Luego, se aborda la probabilidad frecuencial, destacando la habilidad de los estudiantes para recolectar y analizar datos a partir de experimentos repetidos. A través de actividades diseñadas en el entorno de las “Cuevas de la Frecuencia”, los estudiantes tuvieron la oportunidad de realizar experimentos y registrar resultados, lo que les permitió calcular frecuencias relativas y desarrollar una comprensión empírica de la probabilidad.

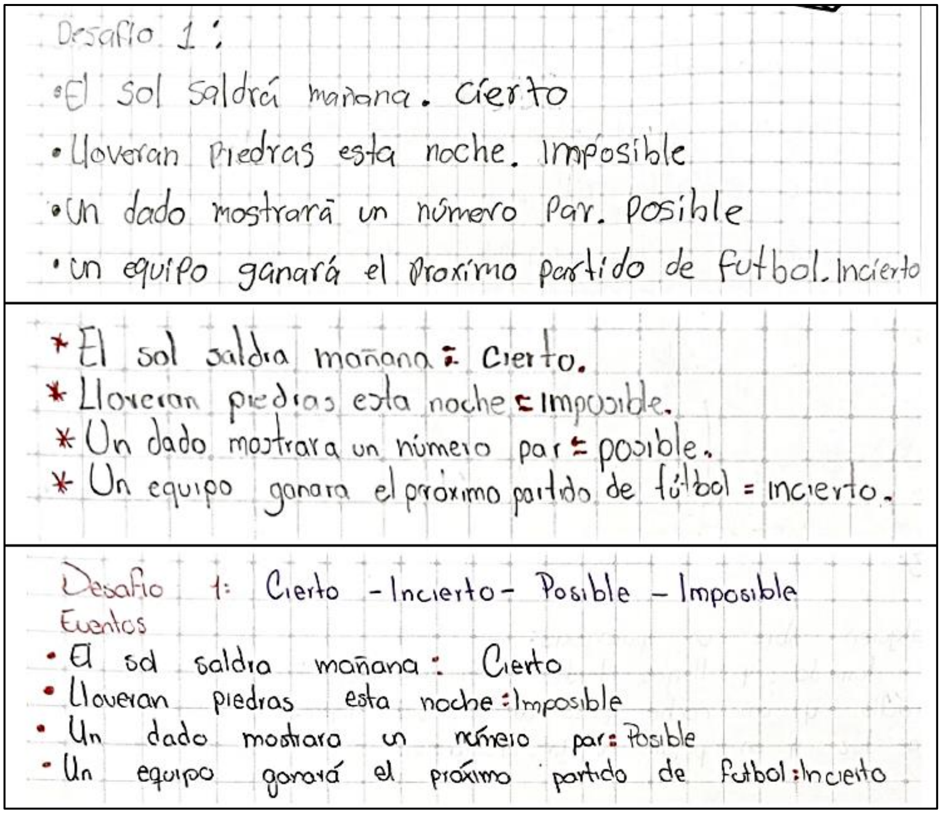
El apartado de aplicación de los conceptos profundiza en la capacidad de los estudiantes para transferir lo aprendido a situaciones nuevas o más complejas, integrando los enfoques clásico y frecuencial. Se exploran las interacciones de los estudiantes durante el desafío final, “La Prueba de la Torre del Caos”, donde los estudiantes debieron combinar sus conocimientos sobre ambos enfoques para resolver problemas más complejos que requerían tanto razonamiento deductivo como análisis empírico. Este análisis muestra cómo los estudiantes lograron integrar las nociones adquiridas y aplicarlas de manera efectiva en nuevas situaciones.

Finalmente, se explora el aspecto de la inclusión en las sesiones, evaluando la interacción entre estudiantes sordos y oyentes a lo largo de las actividades. Este análisis se enfoca en cómo los estudiantes colaboraron, se comunicaron y participaron de manera equitativa en el desarrollo del juego, superando barreras de comunicación y promoviendo una experiencia de aprendizaje compartido.

5.1. Conceptos Básicos de Probabilidad

En el **Desafío 1: El Claro de la Sabiduría**, los estudiantes cumplieron de manera satisfactoria con el indicador de *clasificación de eventos según certeza*. Durante la actividad, lograron identificar de forma clara las diferencias entre eventos ciertos, inciertos, posibles e imposibles, como se puede sustentar con lo registrado en la hoja de cálculo.

Ilustración 8. *Primeras respuestas de los estudiantes del desafío 1.*



Nota. Las respuestas corresponden a los estudiantes A, E y J respectivamente.

No obstante, al inicio del desafío, varios estudiantes presentaron dificultades para diferenciar entre los términos “cierto” e “incierto” y “posible” e “imposible”, lo que generó una serie de intercambios comunicativos entre ellos.

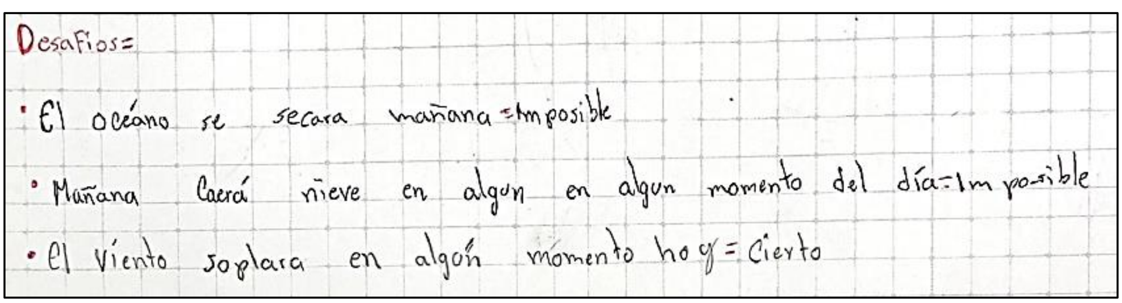
Durante estas discusiones, los estudiantes analizaron colectivamente los conceptos, llegando a la conclusión de que un evento *cierto* es aquel que puede conocerse con seguridad, mientras que un evento *incierto* es aquel que no se puede prever con certeza. De igual forma, aclararon que un evento *posible* es aquel que tiene la capacidad de suceder, mientras que un evento *imposible* no puede ocurrir nunca. Estas explicaciones fueron discutidas tanto en forma oral como en LSC, lo que ayudó a que todos los estudiantes, tanto sordos como oyentes, reforzaran su comprensión, haciendo énfasis en que, los estudiantes sordos eran quienes presentaban más confusión que los oyentes.

Además, el indicador de *aplicación de las pistas del gnomo* también fue logrado. El gnomo, personaje clave en la dinámica del juego, proporcionó pistas importantes a los estudiantes cuando estos enfrentaban dificultades en la resolución del desafío. A lo largo de la actividad, los estudiantes que prestaron atención a las pistas del gnomo y las aplicaron en el contexto del juego, lograron una mayor precisión al clasificar los eventos.

Esta intervención fue indispensable, especialmente para aquellos que inicialmente estaban confundidos. Se observó que los estudiantes que usaron las pistas mejoraron notablemente en su desempeño y alcanzaron soluciones más rápidas y exactas. Esto demuestra que la utilización adecuada de las ayudas ofrecidas en el juego no solo facilitó la comprensión de los conceptos, sino que también impactó positivamente en el proceso de resolución de los desafíos.

Es importante aclarar que el gnomo no proporcionaba las respuestas, sólo orientaba los eventos, pero se observó que los estudiantes respondían con base a su contexto y su día a día.

Ilustración 9. *Respuestas brindabas con base a su contexto.*

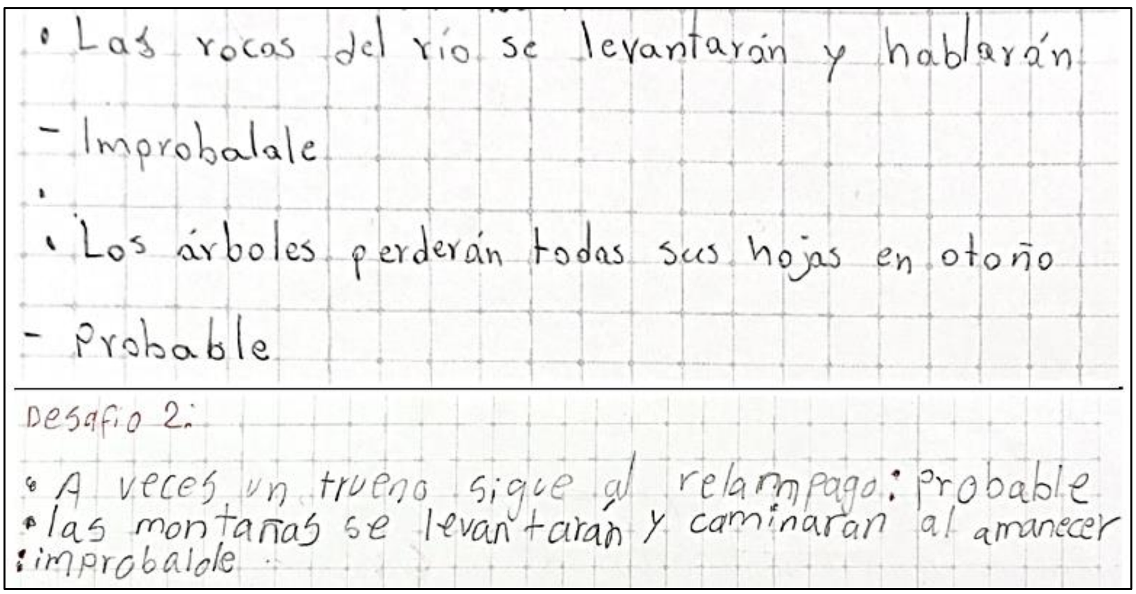


Nota. Respuestas correspondientes al Estudiante C.

Luego, durante el desarrollo del **Desafío 2: El Camino de los Árboles Susurrantes**, los estudiantes lograron cumplir de manera efectiva con los indicadores propuestos, comenzando con la *identificación de eventos probables e improbables*. La actividad consistía en diferenciar entre eventos que tenían una alta probabilidad de ocurrir (probables) y aquellos cuya ocurrencia era menos factible (improbables).

Dado que el desafío ofrecía únicamente dos opciones de respuesta, los estudiantes, tanto sordos como oyentes, pudieron realizar esta clasificación sin mayor dificultad.

Ilustración 10. *Respuestas brindadas al desafío 2.*



Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante B y H respectivamente.

En cuanto al segundo indicador, la *comprensión de los susurros de los árboles*, se observó una atención adecuada por parte de los estudiantes al descifrar los mensajes presentados. Los susurros, que contenían pistas importantes sobre los eventos, fueron interpretados con claridad tanto por los estudiantes oyentes como por los sordos, quienes recibieron una interpretación precisa a través de la LSC. La capacidad de los estudiantes para procesar la información y aplicar el conocimiento probabilístico fue notoria en este aspecto. Es importante destacar que la interpretación de estos susurros (eventos) fue interesante para ambas poblaciones debido a que, el interpreté fue muy grafico al momento de interpretar, lo que cautivó y facilitó su comprensión.

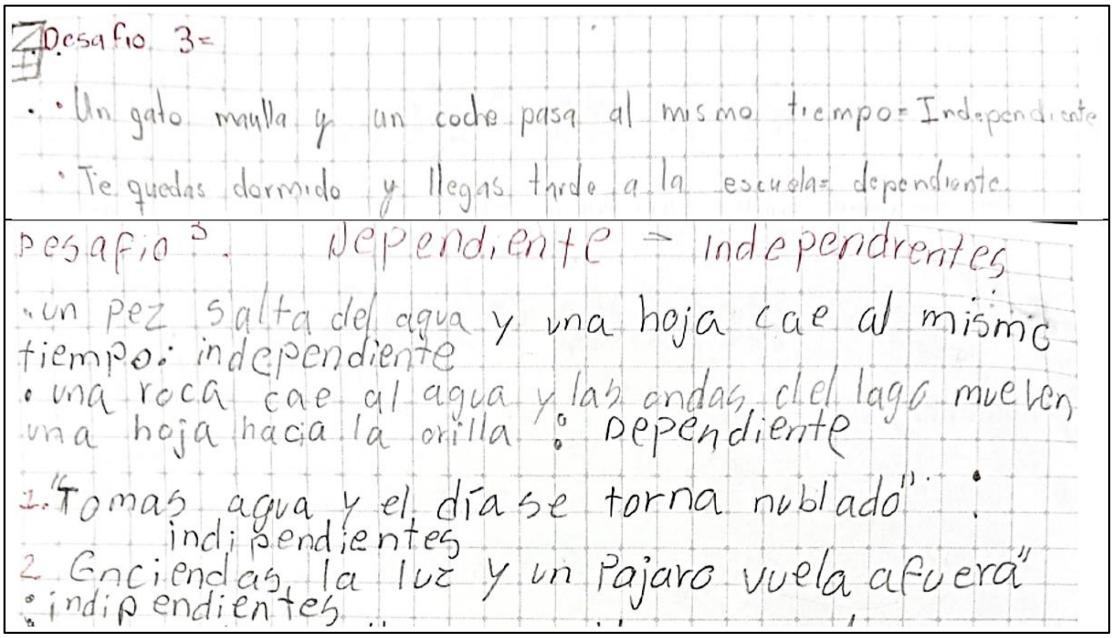
Un reto que surgió durante la actividad fue la identificación de las señas que los estudiantes sordos utilizaban para los conceptos de “posible” e “imposible”, ya que estas resultaron ser las mismas que usaban para “probable” e “improbable”. Este punto de confusión generó un breve debate entre los estudiantes sordos, el intérprete y el profesor sordo, a lo que, dijeron que para ese caso lo términos que se iban a utilizar era probable e improbable y no hacían una seña especifica, sino que, mostraban la palabra en el tablero.

En el **Desafío 3: El Lago del Reflejo Aleatorio**, los estudiantes enfrentaron algunas dificultades en la comprensión del concepto de aleatoriedad. Aunque lograron distinguir entre eventos dependientes e independientes con cierta facilidad tras ejemplos y explicaciones, el indicador relacionado con la *predicción basada en la aleatoriedad* presentó mayores retos, ya que, confundían este concepto con “azar”. Un ejemplo que se les dio para que pudieran diferenciar fue: lanzar un dado es un proceso aleatorio, ya que no se puede predecir qué número saldrá, sin embargo, el azar es lo que describe la incertidumbre de todos esos posibles resultados. Pese a que los términos están relacionados, no son los mismos. Pero, aun así, la mayoría de los estudiantes no entendieron esta diferencia.

En contraste a la *distinción entre eventos dependientes e independientes* fue mucho más clara. Durante el desafío, algunos de los eventos que los estudiantes debían clasificar incluían situaciones como “un gato maúlla y un coche pasa al mismo tiempo” y “tomas agua y el día se torna nublado”.

Los estudiantes comprendieron que, en el primer caso, el maullido del gato y el paso del coche no tenían influencia mutua, lo que los clasificaba como eventos independientes. En contraste, en el segundo caso, pudieron identificar fácilmente que el hecho de tomar agua no afectaba el clima, reafirmando que también eran independientes.

Ilustración 11. *Respuestas sobre eventos dependientes e independientes.*


Desafio 3=
• Un gato maulla y un coche pasa al mismo tiempo= Independiente
• Te quedas dormido y llegas tarde a la escuela= dependiente.

Desafio 3. dependiente = independrentes
• un pez salta del agua y una hoja cae al mismo tiempo: independiente
• una roca cae al agua y las andas del lago mueven una hoja hacia la orilla : dependiente
1. "Tomas agua y el día se torna nublado" : indipendientes
2. Gnciendas la luz y un pajaro vuela afuera" : indipendientes

Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante G y H respectivamente.

Esta distinción fue mucho más clara para los estudiantes en comparación con el concepto de aleatoriedad, que resultó ser un desafío más complejo. Las respuestas registradas en las hojas de cálculo confirman que lograron cumplir con el indicador, aunque la comprensión de la aleatoriedad aún requería un trabajo adicional.

En el análisis del **Desafío 4: El Claro del Oráculo**, es importante señalar que, debido a la limitación de tiempo en la primera sesión, no se pudo realizar un registro escrito, ni un énfasis adecuado en los conceptos. Sin embargo, las respuestas de los estudiantes fueron notablemente diversas y reflejaron un nivel de entendimiento general sobre la probabilidad.

Cuando se les preguntó “¿Qué probabilidad hay de obtener cara al lanzar la moneda?”, los estudiantes ofrecieron respuestas variadas como: “la misma de sello”, “igual”, “la mitad”, “50/50” y los estudiantes sordos mantenían su seña para referirse a la mitad o que eran iguales. Estas respuestas indicaron que, a pesar de la falta de profundización, lograron captar la idea de que las probabilidades de ambos resultados eran equitativas.

Al abordar la siguiente pregunta “¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado de seis caras?”, las respuestas se centraron en la idea de que la probabilidad era “muy baja” debido a que había solo una opción “que servía” entre seis caras del dado.

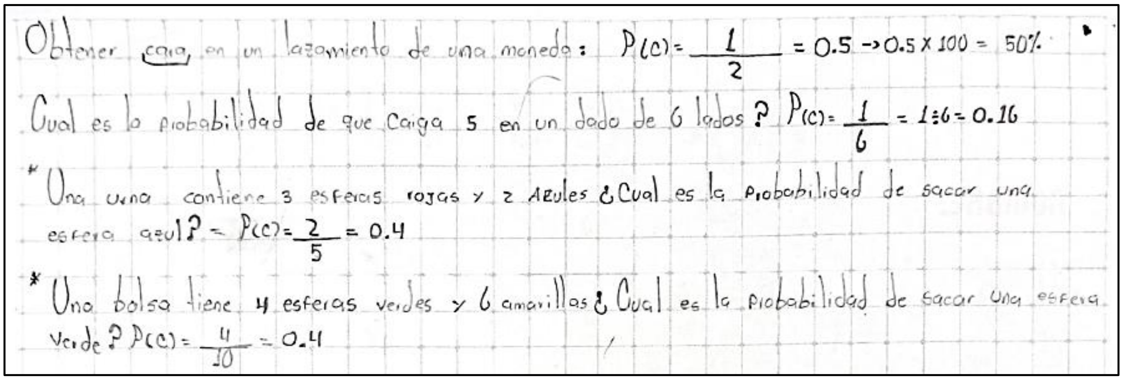
Es importante destacar que no se enfatizó en cálculos específicos, ya que estos se abordarían en el siguiente mundo del juego. Sin embargo, los intercambios de ideas de los estudiantes evidencian que se cumplió, al menos en parte, con el indicador de *observación y ajuste en predicciones*, lo que permitirá que, en futuras sesiones, se desarrollen con mayor claridad los conceptos relacionados con la probabilidad.

5.2. Probabilidad Clásica

Con relación al Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica, haciendo énfasis en el **Desafío 1: El Salón de los Conceptos Fundamentales** se observó un progreso notable con relación a sus respuestas para el Desafío 4 del mundo anterior en la comprensión de la probabilidad haciendo uso de la regla de Laplace. Los estudiantes lograron aplicar esta regla de manera correcta en diversas situaciones, lo cual es un indicativo positivo de su avance en el concepto de probabilidad clásica.

Sin embargo, al inicio del desafío, los estudiantes presentaron dificultades al momento de calcular la fracción que representa la probabilidad; y luego se centraron únicamente en obtener el resultado de la división sin traducir este valor a su equivalente porcentual.

Ilustración 12. *Resultados sin interiorizar el equivalente porcentual.*



Obtener cara, en un lazamiento de una moneda: $P(C) = \frac{1}{2} = 0.5 \to 0.5 \times 100 = 50\%$

Cual es la probabilidad de que caiga 5 en un dado de 6 lados? $P(C) = \frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.16$

* Una urna contiene 3 esferas rojas y 2 azules ¿Cual es la probabilidad de sacar una esfera azul? $- P(C) = \frac{2}{5} = 0.4$

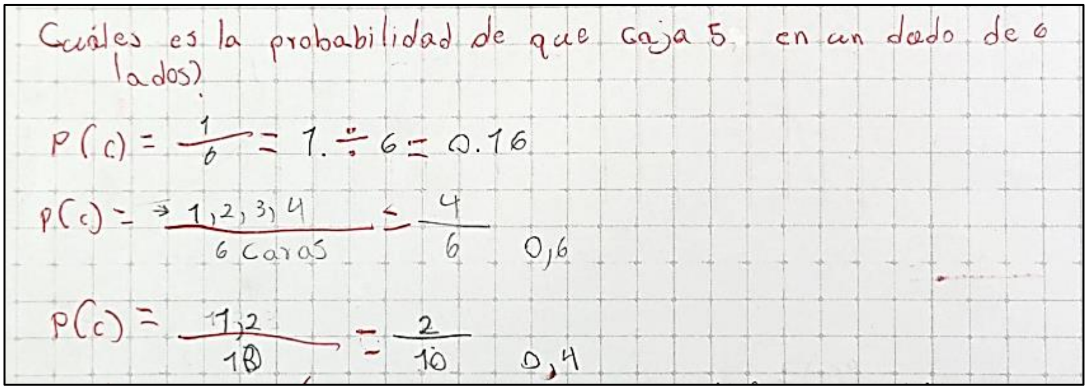
* Una bolsa tiene 4 esferas verdes y 6 amarillas ¿Cual es la probabilidad de sacar una esfera verde? $P(C) = \frac{4}{10} = 0.4$

Nota. Respuestas correspondientes al Estudiante D.

A lo largo de la actividad, se hicieron intervenciones que guiaron a los estudiantes a reflexionar sobre el significado de los valores que estaban representados en fracción, debido a que no hallaban su equivalencia o simplemente no sabían a 'qué tanta probabilidad' hacía referencia. Preguntas como: "¿qué significa ese valor?" y "¿a cuánto equivale?" fueron fundamentales para ayudarles a entender que, si bien habían logrado identificar el valor de la división, era igualmente importante contextualizarlo.

En un caso particular, un estudiante simuló una especie de conteo ya que no lograba entender cómo salían los números correspondientes al numerador y al denominador haciendo alusión al indicador *comprensión de la probabilidad clásica*, la cual demuestra que, pese a las dificultades, se logra comprender esta relación.

Ilustración 13. *Contextualización de la situación en cuanto al conteo.*



Cuáles es la probabilidad de que caja 5 en un dado de 6 lados?

P(c) = 1/6 = 1 ÷ 6 = 0.16

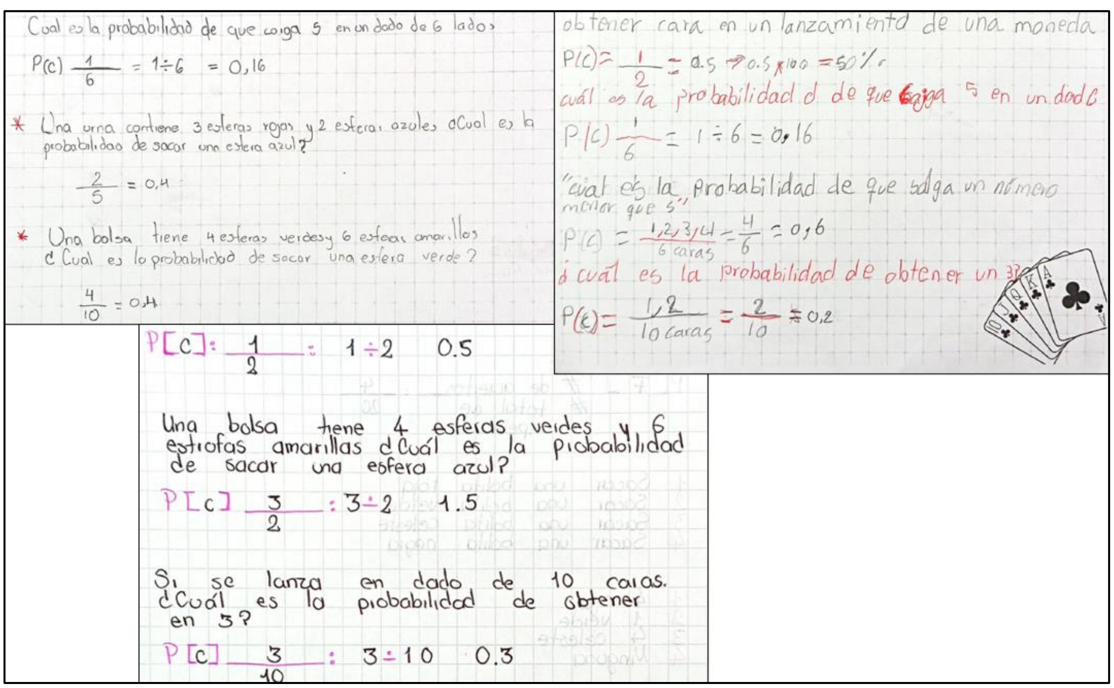
p(c) = 1, 2, 3, 4 / 6 caras = 4/6 0,6

P(c) = 1, 2 / 10 = 2/10 0,4

Nota. Respuestas correspondientes al Estudiante B.

Aunque se evidencia que todos los estudiantes comprendieron que la probabilidad se presenta en un rango de 0 a 1, y que un valor más cercano a cero implica baja probabilidad y viceversa, su proceso de reflexión previo y posterior a los cálculos fue escaso. En sí, solo se centraron en aplicar la regla de Laplace de forma correcta sobresaliendo el indicador *aplicación de la Regla de Laplace*.

Ilustración 14. *Cálculos de la regla de Laplace.*



Cual es la probabilidad de que caiga 5 en un dado de 6 lados

P(c) 1/6 = 1÷6 = 0,16

* Una urna contiene 3 esferas rojas y 2 esferas azules ¿Cual es la probabilidad de sacar una esfera azul?

2/5 = 0,4

* Una bolsa tiene 4 esferas verdes y 6 esferas amarillos ¿Cual es la probabilidad de sacar una esfera verde?

4/10 = 0,4

obtener cara en un lanzamiento de una moneda

P(c) = 1/2 = 0.5 → 0.5 x 100 = 50%

cuál es la probabilidad de que caiga 5 en un dado

P(c) 1/6 = 1 ÷ 6 = 0,16

"cual es la probabilidad de que salga un número menor que 5"

P(c) = 1,2,3,4 / 6 caras = 4/6 = 0,6

¿cuál es la probabilidad de obtener un 3?

P(c) = 1,2 / 10 caras = 2/10 = 0,2

P[c]: 1/2 : 1 ÷ 2 0.5

Una bolsa tiene 4 esferas verdes y 6 esferas amarillas ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera azul?

P[c] 3/2 : 3 ÷ 2 1.5

Si se lanza un dado de 10 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?

P[c] 3/10 : 3 ÷ 10 0.3

Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante E, H y J.

Al realizar las operaciones, haciendo énfasis en la *reflexión sobre el concepto de probabilidad*, las respuestas se limitaron a expresiones como “es muy baja” o “es la mitad”, lo que evidenció que, si bien había una comprensión básica, la capacidad de análisis sobre el concepto de probabilidad aún necesita ser fortalecida.

En relación con **el Desafío 2: El Laberinto de las Decisiones** no se puede realizar un análisis debido a que esta actividad no se llevó a cabo, principalmente por la falta de tiempo. Este desafío se centraba en la probabilidad de eventos múltiples utilizando la regla de Laplace.

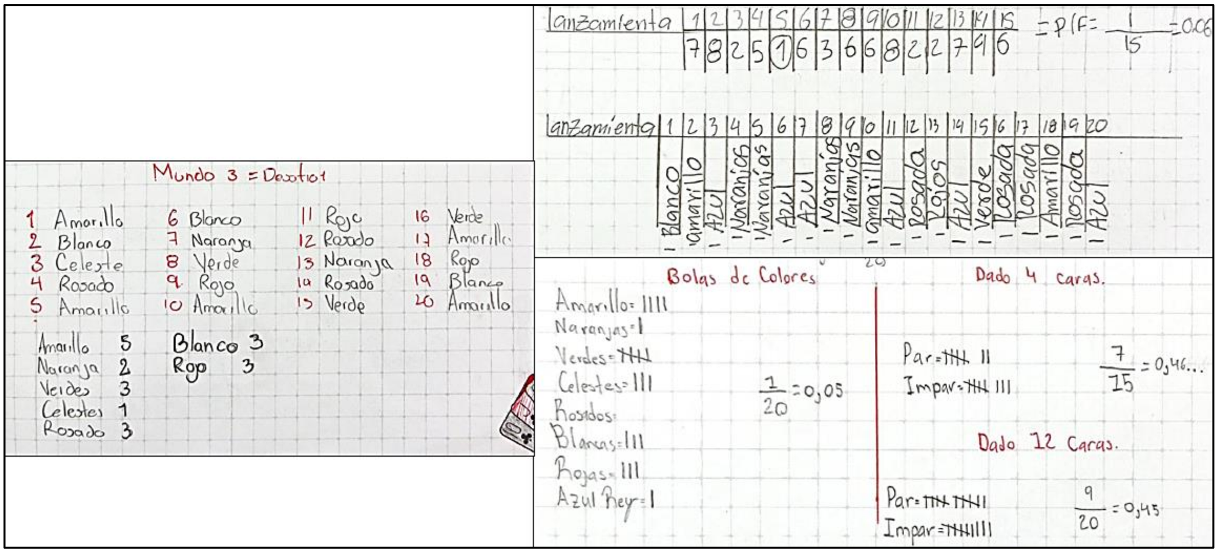
5.3. Probabilidad Frecuencial

En el **Desafío 1: La Cámara de la Frecuencia** del Mundo 3, los estudiantes demostraron una comprensión sólida de los conceptos clave de la probabilidad frecuencial y cumplieron de manera destacada con todos los indicadores de evaluación.

En cuanto a la *comprensión del concepto de probabilidad frecuencial*, tanto los estudiantes sordos como oyentes lograron definir y explicar el concepto claramente. Al inicio, algunos tenían una idea más vaga de lo que implicaba, pero después de realizar varias rondas de experimentos, entendieron que la probabilidad frecuencial se basa en el número de veces que ocurre un evento en relación con el total de eventos observados. Al finalizar el desafío, todos los estudiantes pudieron expresar que mientras más veces se repite un experimento, más exacta es la estimación de la probabilidad.

Sobre la *exactitud en la recolección de datos*, los estudiantes mantuvieron un registro preciso y ordenado de los resultados obtenidos. Usaron tablas y listas de frecuencia de manera efectiva para registrar cuántas veces ocurría cada evento, ya fuera el color de una pelota extraída o el número en el dado. Pese a que recolectaron los datos de forma diferente, esta habilidad para organizar los datos fue clave para asegurar la correcta interpretación y aplicación posterior.

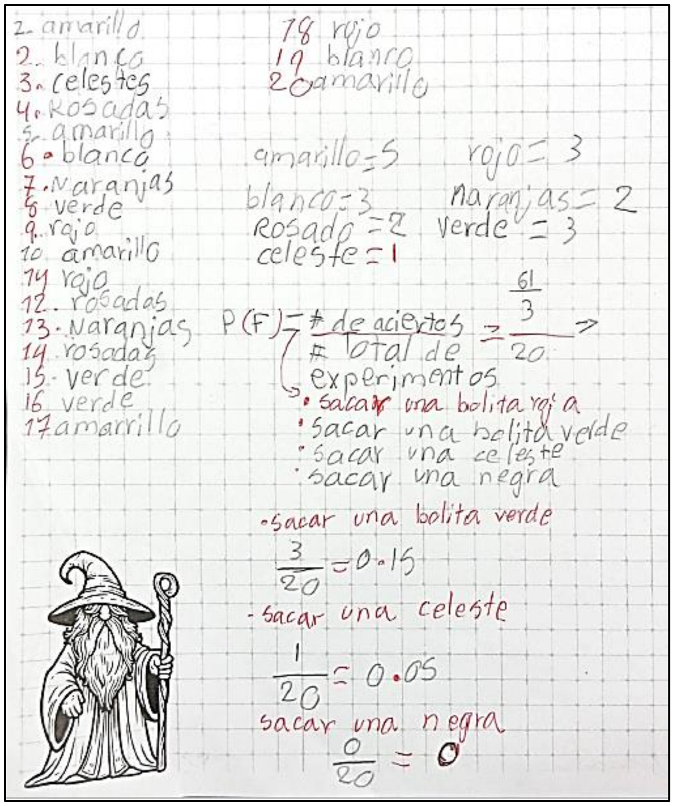
Ilustración 15. *Formas de recolección de datos.*



Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante A, E y G.

Finalmente, en cuanto al *cálculo de la probabilidad frecuencial*, los estudiantes utilizaron los datos recogidos para calcular correctamente las probabilidades, mostrando una buena comprensión de la relación entre los eventos y el total de experimentos. Reconocieron que cuanto más repetían los experimentos, más precisos eran sus cálculos, lo que reflejó un dominio claro del concepto de probabilidad frecuencial.

Ilustración 16. *Cálculo de la probabilidad frecuencial a partir de un experimento.*



Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante H.

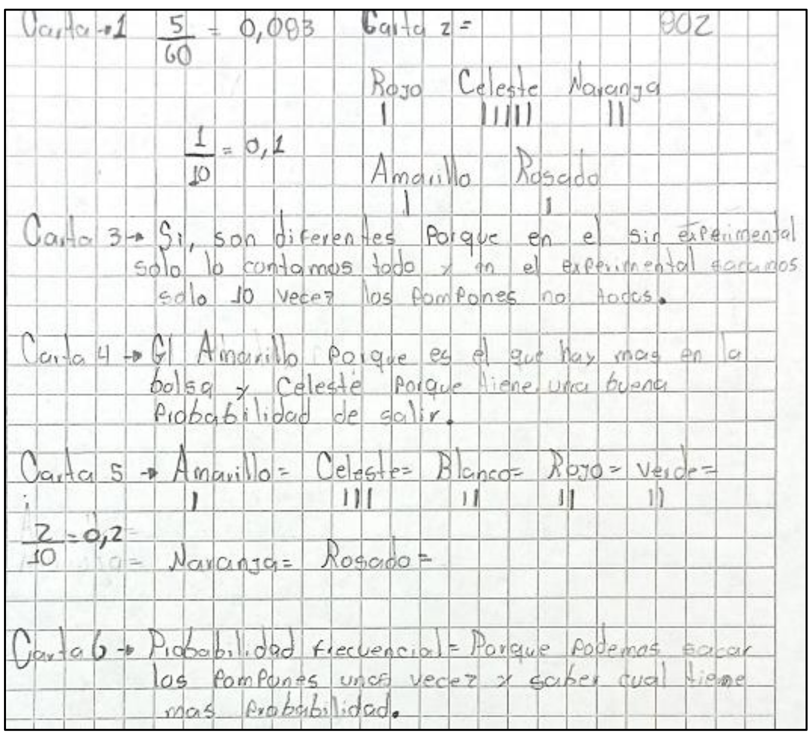
En general, el desempeño de los estudiantes en este desafío fue excelente, integrando con éxito la teoría y la práctica, y superando los retos planteados gracias a su atención a los detalles y el trabajo colaborativo.

No se realizará un análisis del **Desafío 2: El Río de los Patrones** de este mundo, que tenía como objetivo trabajar la probabilidad basada en las observaciones, debido a la falta de tiempo durante la sesión. Este desafío estaba centrado en identificar patrones en eventos repetidos y aplicar los cálculos de probabilidad frecuencial a situaciones basadas en las observaciones previas, pero no fue posible desarrollarlo completamente.

5.4. Aplicación de los Conceptos

En el **Desafío Final: La Prueba de la Torre del Caos** del Mundo 4, los estudiantes no hicieron uso de las fichas de conocimiento, por lo que se evaluó lo que habían aprendido hasta ese momento. A pesar de la ausencia de estas fichas, se evidenció un buen desempeño en cuanto a la *integración de la probabilidad clásica y frecuencial*. Los estudiantes lograron combinar ambos enfoques, aunque se observó una preferencia marcada por la probabilidad frecuencial, ya que muchos argumentaron que, al basarse en experimentos, esta les garantizaba mayor seguridad en los resultados.

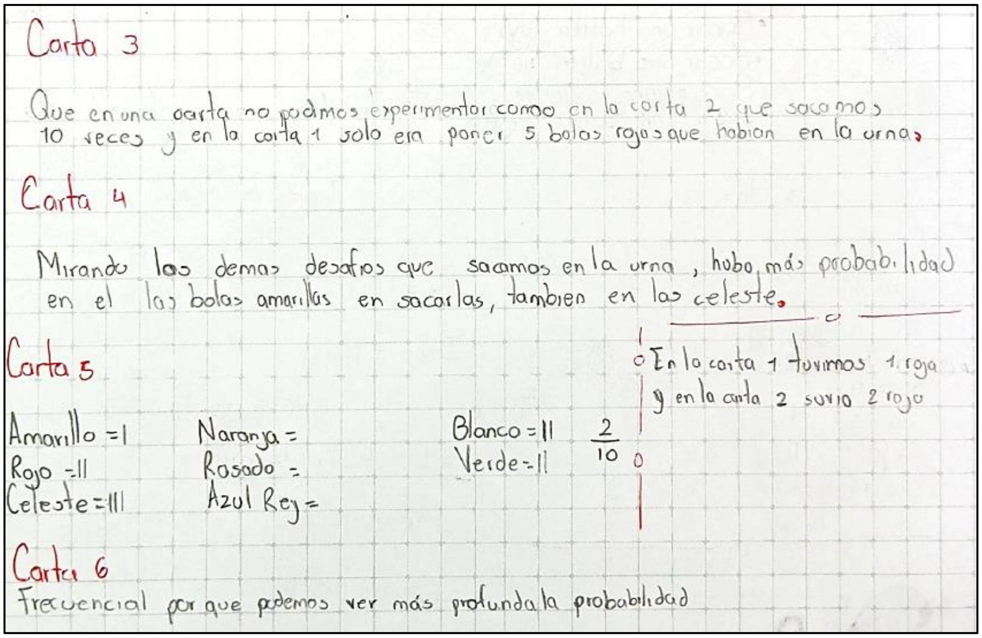
Ilustración 17. *Respuestas con base al desafío final.*



Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante D.

Esto permitió cumplir con el indicador de *toma de decisiones basada en probabilidades*, ya que justificaron su elección en función de los experimentos previos y los resultados observados.

Ilustración 18. *Análisis en cuanto a las probabilidades.*



Carta 3

Que en una carta no podemos experimentar como en la carta 2 que sacamos 10 veces y en la carta 1 solo era poner 5 bolas rojas que habian en la urna.

Carta 4

Mirando los demas desafios que sacamos en la urna, hubo más probabilidad en el las bolas amarillas en sacarlas, tambien en las celeste.

Carta 5

En la carta 1 tuvimos 1 roja y en la carta 2 salio 2 rojo

Amarillo = I
Rojo = II
Celeste = III
Naranja =
Rosado =
Azul Rey =
Blanco = II
Verde = II
$\frac{2}{10}$

Carta 6

Frecuencial por que podemos ver más profunda la probabilidad

Nota. Las respuestas corresponden al Estudiante E.

El indicador de *análisis comparativo entre probabilidad clásica y frecuencial* también fue abordado, aunque aquí se presentó un desafío: les costó comprender que, con muchos experimentos, la probabilidad frecuencial tiende a acercarse a la clásica. Si bien comprendieron las diferencias conceptuales, la transición de un enfoque al otro no fue completamente fluida, lo que indica que aún hay espacio para reforzar este aspecto.

En cuanto a la *reflexión sobre la confiabilidad de las probabilidades*, se evidenció que la mayoría de los estudiantes consideraba más confiable la probabilidad frecuencial debido a la posibilidad de verificar los resultados mediante la repetición de experimentos. Esto demostró una comprensión más práctica del enfoque frecuencial, aunque algunos aún no lograron percibir cuándo sería más útil aplicar la probabilidad clásica en contextos abstractos o sin datos experimentales previos.

Finalmente, aunque no se registraron ejemplos específicos de *aplicación de la probabilidad en contextos reales*, el desempeño de los estudiantes al aplicar los conceptos de probabilidad a los desafíos indica que comprendieron los principios fundamentales y estaría en condiciones de trasladarlos a situaciones del mundo real, esto con base a conversaciones se tuvieron luego de terminar las actividades.

5.5. Inclusión en las Sesiones

El análisis de la inclusión en el aula, de estudiantes sordos y oyentes, mostró una evolución significativa en los mundos, evidenciando aciertos y áreas de mejora en cuanto a la equidad en la participación y la interacción comunicativa.

En los desafíos del Mundo 1, se observó que los estudiantes oyentes asumieron la iniciativa de organizarse para trabajar en grupo, lo que favoreció una mayor integración. Sin embargo, en este mundo, el intérprete jugó un rol clave como mediador de la comunicación entre sordos y oyentes. Los estudiantes oyentes se acercaban al intérprete para leer las respuestas y luego los estudiantes sordos entregaban su hoja de cálculo para que el intérprete la leyera en voz alta. Este mecanismo funcionó bien para garantizar que ambos grupos compartieran sus respuestas, aunque dependía mucho de la intermediación del intérprete, lo que limitaba la *participación equitativa* de los estudiantes sordos en la solución de los desafíos.

No obstante, se evidenció una *adecuación de los medios comunicativos* a través del intérprete, lo cual permitió que los estudiantes sordos participaran de manera activa, aunque con cierto retraso en la comunicación.

En los Mundos 2 y 3, se notó una mejora en la interacción entre ambos grupos. Los estudiantes rotaban sus hojas para verificar los cálculos y, al realizar los experimentos, compartían los resultados de manera más inclusiva. Se turnaban para manipular la urna o los dados y mostraban los resultados a todos para que registraran de forma correcta, lo cual facilitó una *frecuencia y calidad de la interacción* más significativa. Aquí, los estudiantes oyentes hicieron un mayor esfuerzo por incluir a los sordos en la actividad, rotando materiales y utilizando estrategias visuales para asegurar que todos comprendieran los resultados. De esta manera, se cumplió con el *indicador de colaboración*, ya que, ambos grupos participaron activamente en la recolección de datos y cálculo de probabilidades, aunque aún se dependía en gran medida del intérprete.

En cuanto al Mundo 4, se observó una regresión en la interacción colaborativa. Aunque los estudiantes registraron los resultados de los experimentos, decidieron que, por razones de tiempo, solo una persona realizaría los experimentos mientras los demás registraban. Esto disminuyó la *participación equitativa* en comparación con los mundos anteriores, ya que, la colaboración se limitó al registro de los resultados sin un intercambio tan activo como antes. Aunque esta decisión fue práctica para cumplir con los tiempos, afectó la dinámica inclusiva y colaborativa entre sordos y oyentes, especialmente en lo que respecta a la *toma de decisiones* y la discusión de estrategias.

Un aspecto notable a lo largo de los mundos fue la *actitud inclusiva* de los estudiantes oyentes hacia sus compañeros sordos. En varias ocasiones, los oyentes hicieron preguntas al intérprete sobre señas específicas, como “¿ya acabaste?” o “¿me prestas tal cosa?”, lo que muestra un esfuerzo por comunicarse de manera directa con los estudiantes sordos. Además, al inicio de la primera sesión, se observó que, pese a ser compañeros de curso, muchos no sabían cómo referirse a sus compañeros mediante señas. Para resolver esto, todos los integrantes del grupo se presentaron con su seña respectiva, un gesto que fomentó el respeto por las identidades de los estudiantes oyentes y sordos.

En cuanto a la *comprensión de las instrucciones y desafíos*, ambos grupos, sordos y oyentes, lograron comprender las explicaciones y desarrollar los desafíos sin grandes obstáculos, gracias a la presencia del intérprete y la adaptación visual de las actividades. No obstante, se podría mejorar en la autonomía de los estudiantes sordos al recibir las explicaciones, promoviendo más el uso de la LSC por parte de los oyentes.

Resaltando así que los indicadores de inclusión fueron cumplidos en buena medida, especialmente en lo que respecta a la *colaboración y frecuencia de interacción* entre sordos y oyentes, aunque en los últimos desafíos se observó una ligera caída en la integración total de los sordos en las actividades. La *adecuación de los medios comunicativos* fue efectiva a lo largo de las actividades, pero es fundamental reforzar la autonomía de los estudiantes sordos y promover aún más la interacción directa entre ambos grupos sin depender tanto del intérprete.

6. Conclusiones y Reflexiones

A partir de la investigación, diseño, desarrollo y análisis de la propuesta, se puede concluir que la gestión y validación de una alternativa metodológica para la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial en un aula inclusiva fue exitosa en varios aspectos.

Primero, la caracterización de los elementos teóricos de la probabilidad clásica y frecuencial en el contexto de aulas inclusivas permitió identificar aspectos clave para la enseñanza de estos conceptos en estudiantes sordos y oyentes. La probabilidad clásica, fundamentada en la teoría de eventos equiprobables, se caracteriza por su enfoque matemático determinista, en el que se asume que todos los resultados de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrir. Esta aproximación es útil en un entorno inclusivo, ya que facilita la comprensión a través de representaciones visuales claras y la manipulación de elementos concretos, como dados, que permiten a los estudiantes interactuar con los resultados y entender la relación entre el número de eventos favorables y el total de resultados posibles.

Por otro lado, la probabilidad frecuencial, que se basa en la observación y la repetición de experimentos para calcular la probabilidad a través de la frecuencia relativa de eventos, ofrece un enfoque empírico. Este enfoque tiene una particular relevancia en las aulas inclusivas, ya que fomenta la experimentación y la interpretación de datos reales, lo cual puede facilitar una comprensión más accesible de los conceptos para estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje. En el contexto de la enseñanza a estudiantes sordos, el uso de materiales manipulativos y la integración de la LSC resulta trascendente, lo que permite a los estudiantes interactuar directamente con las ideas de probabilidad sin depender exclusivamente de un lenguaje verbal.

Las experiencias en aulas inclusivas demostraron que, al combinar estos dos enfoques teóricos, se puede cubrir una gama más amplia de necesidades de aprendizaje. La probabilidad clásica facilita la estructuración de los conceptos básicos, mientras que la probabilidad frecuencial permite a los estudiantes aplicar estos conceptos en situaciones prácticas, promoviendo una comprensión más profunda y una conexión directa con el mundo real. Esto subraya la importancia de adaptar los enfoques teóricos a las características específicas de los estudiantes sordos, garantizando que todos los estudiantes, independientemente de su capacidad auditiva, puedan participar activamente en el aprendizaje de la probabilidad.

De esta manera, la caracterización de la probabilidad clásica y frecuencial en el marco de las aulas inclusivas no solo permitió diferenciar los enfoques, sino que también proporcionó las bases para desarrollar estrategias pedagógicas que favorezcan la comprensión de estos conceptos por todos los estudiantes, especialmente a través de un diseño de materiales didácticos accesibles y de la implementación de metodologías inclusivas.

Segundo, el análisis de las características de un aula inclusiva en comparación con un aula integrada resultó ser un aspecto esencial para el desarrollo de material didáctico adaptado a las necesidades de los estudiantes sordos y oyentes. En primer lugar, es importante entender que un aula integrada es un espacio donde estudiantes con discapacidad se incorporan a un grupo general de estudiantes, pero sin una modificación significativa en los métodos de enseñanza o en la forma de interactuar. En cambio, un aula inclusiva va más allá de la simple convivencia de estudiantes con y sin discapacidad; busca un enfoque en el que todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades, participen activamente en el proceso de aprendizaje, con métodos y recursos adaptados a sus necesidades.

Las aulas inclusivas se distinguen por un enfoque pedagógico que promueve la equidad y la participación de todos los estudiantes, lo que implica una modificación significativa en las estrategias didácticas. A diferencia de un aula integrada, donde los estudiantes con discapacidad pueden sentirse como una población separada o en una dinámica de aprendizaje pasiva, en un aula inclusiva los docentes emplean recursos adaptados, como material visual y manipulativo, para garantizar que todos los estudiantes puedan acceder al contenido y participar de manera activa en el proceso de aprendizaje.

El material didáctico debe ser diseñado para ser accesible a todos los estudiantes, teniendo en cuenta las barreras de comunicación y aprendizaje que pueden enfrentar los estudiantes sordos. Esto incluye, por ejemplo, la integración de la LSC, recursos visuales claros, y herramientas que permitan la manipulación directa de conceptos matemáticos, como tableros y juegos. Además, los materiales deben ser diseñados para facilitar la interacción entre los estudiantes sordos y oyentes, promoviendo la colaboración y la integración social, un aspecto fundamental de las aulas inclusivas. La posibilidad de que los estudiantes participen en actividades colaborativas y de aprendizaje mutuo es uno de los pilares de la inclusión educativa.

En este contexto, el diseño de material didáctico para la enseñanza de la probabilidad debe ir más allá de lo tradicional. El uso de la gamificación, los juegos didácticos y las actividades experimentales resulta ser una estrategia efectiva para involucrar a todos los estudiantes en el aprendizaje de conceptos probabilísticos. Este tipo de material no solo facilita la comprensión de los conceptos abstractos de la probabilidad, sino que también promueve la interacción social y la integración de los estudiantes con diferentes necesidades educativas. La clave es que el material didáctico no sea solo accesible, sino también inclusivo en términos de contenido y contexto pedagógico.

Tercero, la corroboración de si el material didáctico diseñado realmente contribuye al aprendizaje de la probabilidad en un aula inclusiva fue un proceso indispensable para evaluar la efectividad de la propuesta pedagógica implementada. En este sentido, el material didáctico, desarrollado para integrar los enfoques de la probabilidad clásica y frecuencial, cumplió un papel fundamental en la comprensión y aplicación de estos conceptos por parte de los estudiantes sordos y oyentes.

El uso de herramientas visuales y manipulativas permitió que los estudiantes pudieran visualizar los conceptos abstractos de la probabilidad de una manera concreta y accesible. Estos recursos fueron diseñados específicamente para facilitar la interacción de los estudiantes con diversos estilos de aprendizaje, lo que favoreció la comprensión de los principios fundamentales de la probabilidad, tales como la noción de probabilidad, eventos, aleatoriedad, regla de Laplace en la probabilidad clásica, así como la frecuencia relativa en la probabilidad frecuencial.

Además, la integración de la LSC en los materiales didácticos, sumada al uso de representaciones visuales claras y simplificadas, garantizó que los estudiantes sordos pudieran acceder al contenido de manera efectiva y participar activamente en las actividades de aprendizaje. Los estudiantes sordos, al tener acceso a los conceptos matemáticos de forma lúdica y al trabajar en colaboración con sus compañeros oyentes, demostraron una mayor integración social y académica dentro del aula. Esta inclusión no solo se reflejó en la comprensión de los conceptos matemáticos, sino también en su capacidad para participar de manera equitativa en el proceso de resolución de problemas y desafíos propuestos durante las sesiones de aplicación.

El impacto del material didáctico fue corroborado a través de observaciones directas y evaluaciones formativas, donde se constató que la mayoría de los estudiantes, tanto sordos como oyentes, mostraron un entendimiento sólido de los conceptos probabilísticos tratados. Los estudiantes fueron capaces de resolver problemas y completar tareas relacionadas con la probabilidad clásica y frecuencial, aplicando los conocimientos adquiridos en el contexto de los desafíos presentados a lo largo del juego. La metodología gamificada, que permitió a los estudiantes enfrentarse a desafíos progresivos en un entorno lúdico, también aumentó la motivación y el interés por aprender, lo cual fue evidente en su participación durante las actividades.

Así, el material didáctico diseñado no solo cumplió su función de hacer accesibles los conceptos de probabilidad para los estudiantes sordos y oyentes, sino que también promovió la inclusión social y académica en el aula inclusiva. Esto refuerza la conclusión de que un diseño pedagógico adaptado, que integre diversos enfoques teóricos y recursos accesibles, es fundamental para garantizar el éxito en el aprendizaje de la probabilidad en contextos inclusivos.

Finalmente, a través de la investigación, diseño, desarrollo y análisis de la propuesta, se buscó ofrecer una solución integral que respondiera a las necesidades educativas de los estudiantes sordos y oyentes, garantizando que todos los estudiantes pudieran acceder al aprendizaje de manera equitativa. La cual se concluye que la propuesta y el material didáctico desarrollado para la enseñanza de la probabilidad en un aula inclusiva no solo cumplió con su propósito de hacer accesibles los contenidos matemáticos, sino que también promovió una educación más equitativa y participativa. Esta investigación resalta la importancia de adaptar las metodologías de enseñanza a las necesidades de los estudiantes sordos, garantizando que todos los estudiantes puedan aprender, interactuar y desarrollarse juntos en un entorno inclusivo y colaborativo.

7. Bibliografía

Alonso, R., Rodríguez, A. y Ordás, P. (2004). La teoría de los juegos de azar en el siglo XVIII. La participación del matemático francés Francois Nicoles. En: M. P. Galán (Ed.). *Historia de la probabilidad y la estadística, (2)*, p. 109 – 122. Madrid, España: Delta Publicaciones.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el Aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, (4)*, pp. 59 – 81.

Blanco, L. (2004). Probabilidad. UNIBIBLOS.

Batanero, C. (2001) Didáctica de la estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Granada, España.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(3), pp. 247 – 263. https://www.redalyc.org/pdf/335/33508302.pdf

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. Springer.

Batanero, C., Ortiz, J. & Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Revista UNO, (44),* pp. 7 – 16. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51377/1/2015-Actas-XIX-SEIEM_06.pdf

Burton, D. (2006). The History of Mathematics: An Introduction (6.a ed.). McGraw Hill.

Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis. Universidad Pedagógica Nacional.

Consejo Nacional De Fomento Educativo. (2010). Discapacidad Auditiva. Guía Didáctica Para la Inclusión en Educación Inicial y Básica. CONAFE. México.

Constitución Política de Colombia. (1991, 4 de julio). Asamblea Constituyente de Colombia. Articulo 67 y 68. Bogotá.

Díaz, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, (17)*, pp. 11 – 33. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/19667/19153

Díaz, J., Batanero, C., & Cañizares, J. (1991). Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis, 1991.

Estrada, A. & Batanero. C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.

Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de la probabilidad. *Revista SUMA, (55),* p. 7 – 20. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/14017/007-020.pdf?sequence=1

García, F., Cara, J., Martínez, J., & Cara, M. (2021). La gamificación en el aula como herramienta motivadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Logía, educación física y deporte*, *1*(2), pp. 43 – 52. https://logiaefd.com/wp-content/uploads/2021/02/5.pdf

Hald, A. (1987). *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750.* (Vol. 50193178).

Insor Educativo Colombiano. (2020, 15 de abril). *Vocabulario Probabilidad_Glosario de Matemáticas_En Lengua de Señas Colombiana*. [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=TKh9WcLsoto

Jiménez, M. & Jiménez, F. (2015). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 6(1). https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2138/1944*

Médicis, M. & Flórez, R. (2007). *Proceso de Integración educativa: accesibilidad, promoción y permanencia de personas sordas en el sistema educativo, en el nivel básico primaria del sector público y privado en Bogotá*. [Tesis de posgrado, magister, Universidad Nacional de Colombia]. Archivo digital.

Ley 115 de 1994. (1994, 8 de febrero). Congreso de la República de Colombia. Ley General de Educación. Bogotá.

Ley 982 de 2005. (2 de agosto de 2005). Congreso de la República de Colombia. Equiparación de oportunidades para personas sordas y sordociegas. Bogotá.

Ley 1421 de 2017. (2017, 29 de agosto). Ministerio de Educación Nacional. Por el cual se reglamenta en el marco de la Educación Inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Bogotá.

Naranjo, C. (2010). Una aproximación sociocultural hacia una Educación Matemática para Sordos. *Revista Sigma, 10(2),* pp. 27 – 42. https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/9/9

Penagos, M. (2017). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica para estudiantes de grado noveno*. [Tesis de posgrado, maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Archivo digital.

Pérez, B., Castillo, A. & De los Cobos, S. (2000). Introducción a la Probabilidad. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México.

Salazar, P. (2010). Comprensión de los procesos de inclusión educativa de estudiantes sordos desde una perspectiva organizacional. *Pedagogía y Saberes, (32),* pp. 73 – 86. https://www.redalyc.org/pdf/6140/614064887008.pdf

Sánchez, J. (2004). Introducción a la Estadística Empresarial. Capítulo 6. Probabilidad. Departamento de Estadística y Econometría, Universidad de Málaga. Málaga, España.

Torres, A., & Romero, L. (2018). Aprender jugando. La gamificación en el aula. *Educar para los nuevos medios,* pp. 61 – 72. https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/17049/1/Educar%20para%20los%20nuevos%20medios.pdf#page=62

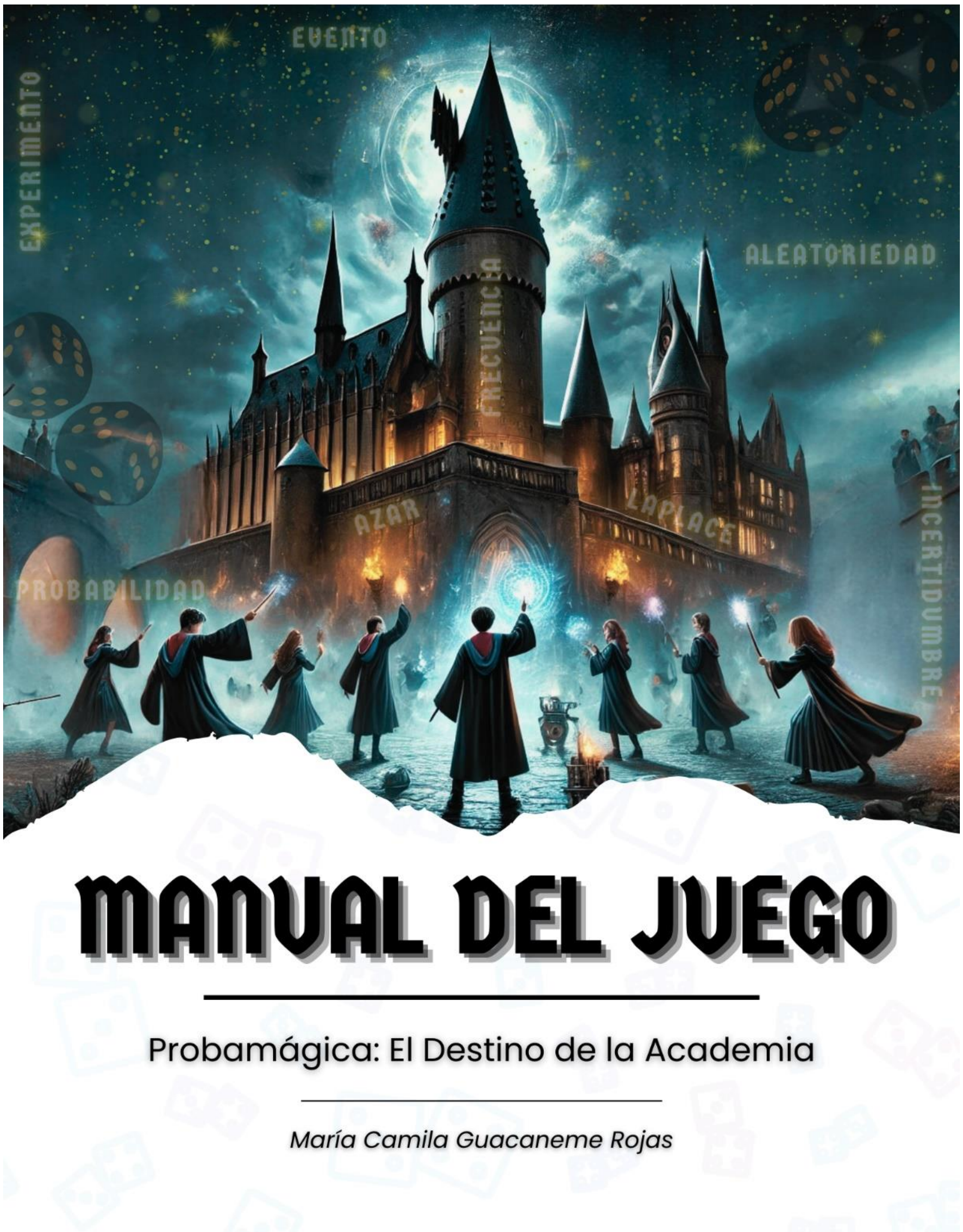
Vásquez, C. & Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (7),* pp. 27 – 48.

Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de historia de las matemáticas 1(1)*, pp. 54 – 62.

Vidal, L. (2020). *Desarrollo de conceptos básicos de probabilidad en un aula compartida por estudiantes sordos y oyentes de grado séptimo.* [Tesis de posgrado, maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Archivo digital. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77867

8. Anexos

Anexo A. Manual del juego.



índice

I. Objetivo

El objetivo del juego es proporcionar a los estudiantes una experiencia lúdica y educativa, en la que puedan aprender y aplicar conceptos clave de probabilidad clásica y frecuencial.

A través de una serie de mundos interconectados, los jugadores avanzan por desafíos matemáticos que requieren análisis, razonamiento y toma de decisiones estratégicas, mientras intentan deshacer el maleficio que afecta a la **Academia Probamágica.**

El juego promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, pensamiento crítico, trabajo en equipo y reflexión personal. Los jugadores deben aplicar los conocimientos adquiridos en cada mundo para superar pruebas cada vez más complejas, alcanzando una comprensión sólida y práctica de la probabilidad.

II. Requisitos

- **Jugadores:** 2 a 6 participantes, dependiendo del formato de la clase o grupo.
- **Duración del juego:** Cada mundo toma aproximadamente entre 45 minutos y 1 hora.
- **Edad recomendada:** Estudiantes de nivel escolar (11-16 años), aunque puede adaptarse a diferentes edades.
- **Conocimientos previos:** No se requieren conocimientos avanzados de probabilidad.
- **Material didáctico:** Tablero del juego, fichas de conocimiento, cartas de desafío, dados, urnas con esferas de colores, papel y lápiz para anotaciones.

III. Componentes

- **Tablero del Juego:** El tablero representa el recorrido de los jugadores por los cuatro mundos: El Bosque de las Nociones Básicas, La Ciudadela de la Probabilidad Clásica, Las Cuevas de la Frecuencia, y El Reino de la Unión Probabilística. Cada sección del tablero tiene un diseño visual único que refleja el ambiente de cada mundo. Los caminos del tablero guían a los jugadores a través de los desafíos y permiten seguir su progreso a medida que avanzan en el juego.

- **Fichas de Conocimiento:** Las fichas de conocimiento son elementos clave en el juego. Se obtienen al completar con éxito los desafíos matemáticos de probabilidad. Estas fichas permiten a los jugadores acumular puntos de avance y también desbloquear nuevas áreas del tablero. Cuantas más fichas obtengan, más cerca estarán de deshacer el hechizo maligno.

- **Cartas de Desafío:** Cada mundo tiene su propio conjunto de cartas de desafío, que plantean problemas relacionados con la probabilidad clásica o frecuencial. Estas cartas detallan instrucciones específicas para los jugadores, desde realizar cálculos hasta interpretar resultados experimentales. Los jugadores deben resolver estos desafíos para avanzar.

- **Dados:** Los dados se usan principalmente para el movimiento de los jugadores a lo largo del tablero. Sin embargo, también juegan un papel crucial en algunos desafíos relacionados con eventos aleatorios, donde se requiere generar resultados al azar para aplicar los conceptos de probabilidad.

- **Urnas y Esferas:** Las urnas contienen esferas de diferentes colores, y se utilizan en los desafíos que requieren la aplicación de la probabilidad frecuencial. Los jugadores deben sacar esferas de manera repetida, registrando los resultados y comparándolos con las probabilidades teóricas para evaluar diferencias.

IV. Preparación

- **Montar el tablero:** Desplegar el tablero en el centro de la mesa o espacio de juego.

- **Organizar las cartas y fichas**: Cada mundo tiene su propio conjunto de cartas de desafío y fichas de conocimiento. Asegúrate de que cada componente esté ubicado correctamente y sea accesible para los jugadores.

- **Colocar las urnas y esferas:** Las urnas con esferas (pompones) de colores deben estar listas para ser utilizadas en los desafíos que implican la extracción y el cálculo de frecuencias.

- **Designar un Director de Juego (DM)**: Es ideal que un jugador o facilitador actúe como DM, narrando la historia del juego y guiando el desarrollo de los desafíos. El DM tiene un papel esencial para mantener el ritmo del juego y aclarar las reglas.

V. Reglas Generales

- **Turnos rotativos:** Los jugadores juegan por turnos, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, iniciaa quién saque el número mayor al lanzar un dado.

- **Movimiento en el tablero:** Los jugadores lanzan los dados para moverse en el tablero. El número obtenido indica la cantidad de espacios que pueden avanzar. Algunos espacios en el tablero desencadenan eventos especiales o cartas de desafío.

- **Resolución de desafíos:** Al caer en un espacio con un desafío, el jugador toma una carta de desafío correspondiente al mundo en el que se encuentra y debe resolver la tarea matemática planteada.

- **Ganar fichas de conocimiento:** Cada desafío exitoso otorga una ficha de conocimiento. Estas fichas permiten a los jugadores desbloquear nuevas áreas y seguir avanzando en el juego.

- **Colaboración:** Los jugadores pueden optar por resolver algunos desafíos en colaboración o de manera competitiva, dependiendo de la dinámica grupal.

- **Objetivo final:** Los jugadores deben superar los desafíos de los cuatro mundos para enfrentar el Desafío Final en el Reino de la Unión Probabilística y salvar la Academia Mágica de Arcania

VI. Mundos

- **Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas**
  El Bosque de las Nociones Básicas es un lugar místico lleno de magia donde las reglas normales del mundo no siempre se aplican. Aquí, los jugadores enfrentan desafíos que les permiten entender conceptos fundamentales de probabilidad como eventos ciertos, inciertos, posibles, imposibles y la aleatoriedad.

Desafío 1: El Claro de la Sabiduría

- *Descripción*: Un gnomo sabio plantea acertijos de probabilidad y pide a los jugadores clasificar eventos en ciertos, posibles e imposibles.
- *Objetivo*: Clasificar correctamente los eventos según su probabilidad.
- *Aprendizaje*: Diferenciar entre eventos ciertos, posibles e imposibles y comprender su relación con la probabilidad.

Desafío 2: El Camino de los Árboles Susurrantes

- Descripción: Los árboles del bosque susurran enigmas de probabilidad que los jugadores deben interpretar, identificando eventos probables e improbables.
- *Objetivo*: Identificar si los eventos susurrados son probables o improbables.
- *Aprendizaje*: Desarrollar la habilidad de evaluar la probabilidad de diferentes eventos a través de la interpretación.

Desafío 3: El Lago del Reflejo Aleatorio

- *Descripción*: El lago muestra reflejos de eventos futuros, y los jugadores deben determinar si son eventos independientes o dependientes entre sí.
- *Objetivo*: Clasificar los eventos como independientes o dependientes.
- *Aprendizaje*: Entender la diferencia entre eventos independientes y dependientes en la probabilidad.

Desafío 4: El Claro del Oráculo

- *Descripción*: El Oráculo desafía a los jugadores a predecir la probabilidad de resultados con dados y monedas mágicas.

- *Objetivo*: Predecir la probabilidad de diferentes resultados y analizar la influencia de la aleatoriedad.
- *Aprendizaje*: Comprender la naturaleza de la aleatoriedad y su impacto en la predicción de eventos.

Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica
Una fortaleza antigua llena de símbolos matemáticos donde los jugadores aprenden la probabilidad clásica y cómo calcularla usando la regla de Laplace. Este mundo introduce conceptos fundamentales de probabilidad y prepara a los estudiantes para desafíos más complejos.

Desafío 1: El Salón de los Conceptos Fundamentales

- *Descripción*: Un amplio salón con murales que narran la historia de la probabilidad. En el centro hay objetos como dados, monedas y una urna con esferas.
- *Objetivo*: Introducir la probabilidad clásica y enseñar cómo usar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de eventos simples.

- *Aprendizaje*: Comprender la probabilidad clásica como la relación entre resultados favorables y resultados posibles.

Desafío 2: El Laberinto de las Decisiones

- *Descripción*: Un laberinto donde cada encrucijada presenta dos puertas, cada una con un evento probabilístico. Los estudiantes deben calcular la probabilidad correcta para avanzar.
- *Objetivo*: Aplicar la regla de Laplace en diferentes situaciones para calcular la probabilidad de eventos sencillos.
- *Aprendizaje*: Desarrollar la habilidad de calcular probabilidades en escenarios prácticos y tomar decisiones basadas en ellas.

Mundo 3: Las Cuevas de la Frecuencia

Un misterioso sistema de túneles iluminado por cristales bioluminiscentes, donde los estudiantes aprenden a usar la probabilidad frecuencial para interpretar eventos y predecir futuros basados en patrones observados.

Desafío 1: La Cámara de la Frecuencia

- *Descripción*: Una sala redonda con paredes de cristal que muestran imágenes de eventos pasados, en el centro hay una urna con esferas de diferentes colores.
- *Objetivo*: Enseñar los conceptos básicos de probabilidad frecuencial y cómo calcular la frecuencia relativa para estimar la probabilidad de un evento.
- *Aprendizaje*: Los estudiantes comprenderán cómo las probabilidades se basan en la frecuencia observada de eventos y cómo más observaciones aumentan la precisión.

Desafío 2: El Río de los Patrones

- *Descripción*: Un río mágico cuyas aguas muestran eventos repetidos. Los estudiantes deben observar cómo diferentes objetos son arrastrados por la corriente y calcular probabilidades basándose en eventos previos.
- *Objetivo*: Aplicar la probabilidad frecuencial en la observación de eventos naturales para predecir futuros resultados.

- *Aprendizaje*: Los estudiantes aprenderán a utilizar las observaciones anteriores para estimar la probabilidad de eventos futuros en situaciones reales.

Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística
Un reino donde la probabilidad clásica y frecuencial convergen, lleno de desafíos que requieren una combinación de ambos enfoques. En el centro está la Torre del Caos, símbolo de la complejidad probabilística.

Desafío 1: La Prueba de la Torre del Caos

- *Descripción*: Los estudiantes se enfrentan al Guardián de la Unión y deben resolver un problema complejo que combina la probabilidad clásica y frecuencial, usando una urna mágica de esferas de diferentes colores.
- *Objetivo*: Integrar los enfoques clásicos y frecuenciales de la probabilidad para tomar una decisión informada.
- *Aprendizaje*: Los estudiantes aprenderán a utilizar ambos tipos de probabilidad para resolver problemas, basando sus decisiones

en el cálculo teórico y en la observación empírica.

- **Cierre del juego**
  Tras superar el desafío, el Guardián de la Unión felicita a los estudiantes, proclamándolos como Maestros Probamágicos, reconociendo su dominio en el arte de la probabilidad. La Academia Probamágica está a salvo, y los estudiantes están listos para enfrentar retos más avanzados.

VII. Mecánicas

Las mecánicas del juego incluyen:

- **Movimiento en el tablero:** Lanzar los dados para avanzar.

- **Extracción de esferas:** Aplicar la probabilidad en extracciones de esferas de urnas.

- **Resolución de desafíos:** Cada carta de desafío plantea un problema matemático de probabilidad, que debe resolverse para avanzar.

- **Obtención de fichas de conocimiento:** Resolver desafíos con éxito otorga fichas de conocimiento, las cuales son necesarias para desbloquear nuevos mundos y avanzar en el juego.

VIII. Consejos

- **Colabora con tus compañeros:** Algunos desafíos se resuelven mejor en equipo, especialmente aquellos que requieren cálculos complejos o experimentos repetidos.

- **No te apresures:** Algunos desafíos requieren reflexión y análisis antes de actuar. No te dejes llevar por la prisa; tómate tu tiempo para entender las probabilidades y planear tu estrategia.

- **Aprovecha las fichas de conocimiento:** Estas fichas no solo son símbolos de progreso, sino que también pueden ayudarte a desbloquear nuevas oportunidades y avanzar más rápidamente en el juego.

- **Analiza los resultados experimentales:** La probabilidad frecuencial puede ofrecerte pistas valiosas sobre cómo actuar en los desafíos futuros.

Este material fue hecho con mucho amor, por favor, cuídalo.

Anexo B. Manual del DM.

Descripción

El **Manual del Director de Juego (DM)** es una guía detallada diseñada para el facilitador del juego didáctico de probabilidad. Este manual tiene como objetivo ayudar al DM a dirigir el juego de manera efectiva, asegurando que los jugadores comprendan las reglas, sigan la narrativa del juego y resuelvan los desafíos relacionados con la probabilidad clásica y frecuencial. El DM es responsable de mantener el flujo del juego, guiar a los jugadores a través de los diferentes mundos, y asegurarse de que los conceptos matemáticos se integren de manera clara y entretenida.

Funciones del DM:

Narrador del Juego: El DM es el encargado de contar la historia del juego, presentando cada mundo y sus desafíos. Esto incluye describir el contexto de cada escenario, los personajes clave, y los problemas que deben resolver los jugadores para avanzar.

Facilitador de las Reglas: El DM debe conocer y explicar las reglas del juego a los jugadores, resolviendo cualquier duda o conflicto que pueda surgir durante el transcurso del juego.

Guía de los Desafíos Matemáticos: El DM debe presentar las cartas de desafío a los jugadores y explicar cómo resolverlas.

Además, debe supervisar los cálculos y laejecución de experimentos (como la extracción de esferas) para garantizar que se estén aplicando correctamente los conceptos de probabilidad.

Moderador del Progreso: El DM controla el avance de los jugadores a través del tablero y decide cuándo es apropiado cambiar de un mundo a otro. También gestiona la distribución de las fichas de conocimiento, asegurándose de que los jugadores obtengan las recompensas adecuadas por sus logros.

Adaptador de la Dificultad: Dependiendo del nivel de los jugadores, el DM puede ajustar la dificultad de los desafíos, proporcionando más o menos apoyo en función de las necesidades del grupo. También puede optar por modificar o simplificar las reglas para facilitar la comprensión en ciertos casos.

Controlador del Tiempo y la Dinámica: El DM debe ser consciente del tiempo que toma cada desafío, manteniendo un ritmo adecuado para asegurar que el juego sea dinámico y atractivo. Es importante evitar que el juego se prolongue demasiado o que los jugadores se frustren con problemas excesivamente difíciles.

Mundo 1

Instructivo Detallado del Mundo 1: El Bosque de las Nociones Básicas

Objetivo del Mundo. Los jugadores deben familiarizarse con conceptos fundamentales de la probabilidad, como eventos ciertos, posibles, inciertos e imposibles, y la noción de aleatoriedad. A lo largo de su travesía, deberán superar desafíos para obtener *Fichas de Conocimiento*, que indicarán su progreso, y luego enfrentarán *Cartas de Desafío* para reforzar los conceptos aprendidos.

Descripción del Mundo. El Bosque de las Nociones Básicas es un lugar místico, lleno de magia latente. Los árboles altos y el dosel denso crean un ambiente de penumbra, interrumpido solo por claros luminosos. A lo largo de su camino, los jugadores se encontrarán con desafíos que pondrán a prueba su ingenio y los prepararán para los mundos siguientes. Cada vez que superen un desafío, recibirán una Ficha de Conocimiento, que simboliza su avance. Al final del mundo, deberán enfrentar Cartas de Desafío, donde consolidarán sus aprendizajes.

Mundo 1

Primer Desafío: El Claro de la Sabiduría

(El DM debe crear una atmósfera tranquila y reflexiva, como si los jugadores estuvieran en un lugar lleno de sabiduría ancestral).

Narración: Después de una caminata corta pero intrigante, el denso dosel de árboles se abre ante ustedes, revelando un claro lleno de luz. Este es el Claro de la Sabiduría, donde todo se siente en calma. En el centro, una estatua antigua de un sabio gnomo los observa con ojos de piedra. A medida que se acercan, la estatua cobra vida, y el Gnomo de la Sabiduría comienza a hablar. '¡Bienvenidos, viajeros! Para continuar, deben demostrar que entienden la diferencia entre lo que es cierto, posible, incierto e imposible en este mundo. Clasifiquen estos eventos correctamente, y les abriré el camino hacia lo desconocido.'

Desafío: Clasificación de Eventos Ciertos, Posibles, Inciertos e Imposibles

El Gnomo presenta tres eventos a los jugadores, y deben discutir y clasificar cada uno correctamente. El DM puede ofrecer pistas si los jugadores dudan. Se debe mencionar sólo la frase, ya que, lo que está en paréntesis es la respuesta correcta.

Mundo 1

Eventos:

- El sol saldrá mañana. *(Evento Cierto)*
- Lloverán piedras esta noche. *(Evento Imposible)*
- Un dado mostrará un número par. *(Evento Posible)*
- Un equipo ganará el próximo partido de fútbol. *(Evento Incierto)*

(Si los jugadores clasifican correctamente los eventos)

Narración: '¡Excelente!', exclama el gnomo con una sonrisa. 'Han demostrado que pueden diferenciar lo cierto de lo incierto, y lo posible de lo imposible. Como recompensa, les otorgo su primera Ficha de Conocimiento.

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **10 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las <u>cartas de desafío</u> a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narración: El Gnomo de la Sabiduría les revela un sendero oculto que se extiende hacia las profundidades del bosque. 'Continúen, pero recuerden: la probabilidad siempre los acompañará en este viaje.'

Mundo 1

Segundo Desafío: El Camino de los Árboles Susurrantes

(El tono del DM debe cambiar a algo más oscuro y misterioso, como si el bosque estuviera vivo y observando).

Narración: A medida que avanzan por el sendero oculto, la luz del sol se desvanece gradualmente. Los árboles aquí son enormes y sus ramas bloquean casi toda la luz, creando un ambiente inquietante. Este es el Camino de los Árboles Susurrantes. Los árboles murmuran palabras en un lenguaje antiguo, y aunque sus palabras son ambiguas, parece que están hablando en términos de probabilidad.

Desafío: Interpretación de Probabilidades

Los jugadores deben interpretar correctamente los susurros de los árboles, que describen eventos probables o improbables. Deben resolver los enigmas para avanzar.

Susurros:

- “A veces, un trueno sigue al relámpago; otras veces, el silencio reina.” (Evento probable)
- “Las montañas se levantarán y caminarán al amanecer.” (Evento improbable)

(Si los jugadores interpretan correctamente los susurros)

Mundo 1

Narración: El bosque, satisfecho con sus respuestas, les recompensa con su segunda Ficha de Conocimiento.

El DM entrega las fichas de conocimiento a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **10 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las cartas de desafío a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narrador: Los árboles se inclinan, permitiendo que un nuevo camino se revele. 'Han escuchado bien los secretos del bosque', susurran los árboles. 'Sigamos adelante.'

Mundo 1

Tercer Desafío: El Lago del Reflejo Aleatorio

(El DM debe adoptar un tono de asombro y misticismo, creando una atmósfera mágica).

Narración: Finalmente, llegan a un claro especial donde se encuentra el Lago del Reflejo Aleatorio. La superficie del lago es cristalina, pero al acercarse, notan que no solo refleja sus imágenes, sino también posibles futuros y eventos que aún no han ocurrido. Este lago mágico les planteará un reto relacionado con la noción de aleatoriedad y eventos independientes.

Desafío: Identificación de Eventos Independientes

Los jugadores deben observar los reflejos en el lago y determinar si los eventos que ven son dependientes o independientes.

Reflejos:

- Un pez salta del agua y una hoja cae al mismo tiempo. (Eventos Independientes)
- Una roca cae al agua y las ondas mueven una hoja hacia la orilla. (Eventos Dependientes)

(Si los jugadores interpretan correctamente los eventos)

Mundo 1

Narración: El lago se calma, permitiendo que sus reflejos se vuelvan más claros y nítidos. Han demostrado su comprensión de la independencia entre eventos. El lago les otorga sus terceras Fichas de Conocimientos, y ante sus ojos, el agua se transforma en un puente de cristal.

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar 10 puntos o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las <u>cartas de desafío</u> a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narración: El puente de madera que el lago crea les guía al último desafío del bosque: el Claro del Oráculo.

Mundo 1

Cuarto Desafío: El Claro del Oráculo

(El tono del DM debe transmitir solemnidad y grandeza, como si estuvieran ante una entidad poderosa)

Narración: En el centro del Claro del Oráculo, sobre un pedestal de piedra, aparece una entidad luminosa. El Oráculo del Bosque les da la bienvenida. 'Han llegado lejos, viajeros. Pero antes de que puedan avanzar al siguiente mundo, deben superar un último desafío. Solo aquellos que comprendan la aleatoriedad y las probabilidades podrán obtener mi Bendición.'

Desafío: Predicción de Probabilidades

El Oráculo les entrega un dado. Los jugadores deben hacer predicciones sobre los resultados de lanzar ambos objetos y discutir cómo la aleatoriedad afecta estos resultados.

(Si los jugadores interpretan correctamente los susurros)

Narración: Han comprendido el poder de la aleatoriedad', declara el Oráculo con satisfacción. 'Aquí tienen su última Ficha de Conocimiento.'

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Mundo 1

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar 10 puntos o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las cartas de desafío a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narración: Han superado con éxito las pruebas del Bosque de las Nociones Básicas. Su comprensión de la probabilidad es clara y precisa.

Conclusión del Mundo 1

Narración: Con la Bendición del Oráculo en sus manos y las Cartas de Desafío superadas, los jugadores se preparan para abandonar el Bosque de las Nociones Básicas. Han demostrado su comprensión de los conceptos fundamentales de la probabilidad, y ahora están listos para enfrentarse a los desafíos aún más grandes que les esperan en los mundos siguientes. Con el bosque a sus espaldas, dan un paso adelante hacia lo desconocido… ¡La aventura continúa!

Mundo 2

Instructivo Detallado del Mundo 2: La Ciudadela de la Probabilidad Clásica

Objetivo del Mundo. Los jugadores aprenderán qué es la probabilidad clásica y cómo se calcula utilizando la regla de Laplace. A través de desafíos y acertijos, explorarán los fundamentos de la probabilidad clásica, desarrollando una comprensión básica de cómo se calculan las probabilidades de eventos simples.

Descripción del Mundo. La Ciudadela de la Probabilidad Clásica es una antigua fortaleza en la que cada pasillo está decorado con símbolos y fórmulas que representan las bases matemáticas de la probabilidad. En este mundo, los jugadores se adentrarán en las reglas fundamentales de la probabilidad clásica, guiados por una voz mágica que los conducirá a través de desafíos en los que deberán aplicar la regla de Laplace para avanzar.

Mundo 2

Primer Desafío: El Claro de la Sabiduría

(El DM debe crear un ambiente solemne, como si los jugadores estuvieran en una sala llena de historia y conocimiento)

Narración: Entrando en el Salón de los Conceptos Fundamentales, un lugar majestuoso con murales que cuentan la historia de las matemáticas y la probabilidad, los jugadores se encuentran con una enorme mesa. Encima, descansan objetos como dados y una urna llena de esferas de colores. De repente, una voz mágica resuena desde las paredes: 'Bienvenidos, viajeros. Aquí aprenderán los principios básicos de la probabilidad clásica comenzando por la regla de Laplace. ¿Están listos para descubrir el significado de la probabilidad y cómo medir la posibilidad de que ocurran ciertos eventos?'

Actividad del Primer Desafío

Los jugadores deben reflexionar sobre el concepto de probabilidad, guiados por las preguntas de la voz mágica:

- ¿Qué creen que significa la palabra "probabilidad"?
- ¿Cómo medirían la posibilidad de que algo ocurra?

Narración: Explicación de la regla de Laplace: La probabilidad clásica se calcula dividiendo el número de resultados favorables entre el número total de resultados posibles:

Mundo 2

$$P(C) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

Para ilustrar este concepto, los jugadores deben imaginarse una urna que contiene **5 esferas rojas** y **5 esferas azules**.

Pregunta del desafío:

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera roja?

Cálculos esperados:

- Número total de esferas: 10.
- Número de esferas rojas (resultados favorables): 5.
- Probabilidad: 5/10.

(Si los jugadores calculan correctamente la probabilidad)

Narración: La sala se ilumina mientras los murales en las paredes cobran vida. Los cálculos correctos revelan un pasadizo secreto hacia el siguiente desafío. La voz mágica anuncia: 'Han dominado los conceptos fundamentales de la probabilidad. Tomen su primera Ficha de Conocimiento y continúen.'

El DM entrega las fichas de conocimiento a los jugadores

Mundo 2

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **15 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las <u>cartas de desafío</u> a los jugadores

(Si los jugadores completan los 15 puntos)

Narración: Un pasadizo oscuro se abre ante ustedes, guiándolos hacia el Laberinto de las Decisiones. Los cálculos que han aprendido serán su única salida.

Mundo 2

Segundo Desafío: El Laberinto de las Decisiones

(El DM debe crear una atmósfera de tensión y misterio, como si los jugadores estuvieran en un lugar lleno de incertidumbre)

Narración: Después de dejar atrás el Salón de los Conceptos Fundamentales, los jugadores entran en el Laberinto de las Decisiones, un lugar lleno de encrucijadas y puertas misteriosas. A cada paso, deberán tomar decisiones basadas en su capacidad para calcular probabilidades usando la regla de Laplace. Cada puerta representa un desafío, y solo tomando el camino correcto podrán avanzar.

Actividad del Segundo Desafío

En cada encrucijada del laberinto, los jugadores encuentran dos puertas, cada una con un evento.

Los jugadores deben calcular la probabilidad de que ocurra el evento asociado a cada puerta antes de elegir por cuál avanzar (se elige la puerta que tenga más probabilidad).

***Ejemplo de encrucijada*:**

Puerta 1: "Lanzar un dado y obtener un número mayor que 4."

- Resultados favorables: 5, 6 (2 resultados favorables).
- Número total de resultados posibles: 6 (total de caras del dado).
- Probabilidad: **2/6**.

Mundo 2

Puerta 2: "Lanzar un dado y obtener un número impar."

- Resultados favorables: 1, 3, 5 (3 resultados favorables).
- Número total de resultados posibles: 6.
- Probabilidad: **3/6**.

(Si los jugadores eligen la puerta correcta basándose en la probabilidad calculada)

Narración: Al tomar la decisión correcta, las puertas se abren ante ustedes, revelando un nuevo pasillo. La voz mágica les recompensa con otra Ficha de Conocimiento: '¡Excelente! Han tomado decisiones calculadas y han avanzado un paso más en su camino hacia la maestría de la probabilidad clásica.'

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **10 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las <u>cartas de desafío</u> a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narración: Siguen avanzando a través del laberinto, cada vez más cerca de la salida, pero las decisiones se vuelven más complejas.

Mundo 2

Conclusión del Mundo 2

Narración: Con el conocimiento de la regla de Laplace bien cimentado y habiendo superado las pruebas del laberinto y las Cartas de Desafío, los jugadores salen de la Ciudadela de la Probabilidad Clásica. Han dominado los conceptos esenciales de la probabilidad clásica, preparándose para los desafíos más complejos que les esperan en los mundos siguientes.

Mundo 3

Instructivo Detallado del Mundo 3: Las Cuevas de la Frecuencia

Objetivo del Mundo. En este mundo, los jugadores aprenderán sobre la probabilidad frecuencial, entendiendo cómo se relaciona con la frecuencia de eventos observados. A través de desafíos interactivos, explorarán cómo las probabilidades se pueden estimar basándose en la frecuencia relativa de los eventos.

Descripción del Mundo. Las Cuevas de la Frecuencia son un vasto y misterioso sistema de túneles, iluminados por cristales bioluminiscentes que brillan con la energía de eventos pasados. A medida que los estudiantes avanzan, deben aprender a usar la probabilidad frecuencial para interpretar y predecir eventos futuros basándose en patrones observados. Este mundo es crucial para que los estudiantes comprendan cómo la observación repetida de eventos puede ayudar a calcular probabilidades en la vida real.

Mundo 3

Primer Desafío: El Claro de la Sabiduría

(El DM debe hablar con voz profunda y pausada, como si estuviera en un antiguo templo, creando un ambiente cargado de reverencia y misterio)

Narración: ¡Saludos, intrépidos exploradores! Han llegado a la Cámara de la Frecuencia, un lugar donde los eventos pasados resuenan en cada rincón. Aquí, aprenderán sobre la probabilidad frecuencial. Esta forma de probabilidad se basa en cómo la frecuencia de un evento observado puede ayudarnos a estimar su probabilidad futura. A medida que realicen sus observaciones, descubrirán cómo la probabilidad frecuencial puede revelar patrones ocultos.

Actividad del Primer Desafío

Narración: La voz mágica les dice: 'La probabilidad frecuencial se basa en la observación repetida de eventos. Cuantas más veces observamos un evento, más cerca estaremos de conocer su verdadera probabilidad.' Vamos a hacer un experimento para entenderlo mejor.

***Experimento*:**

Usen la urna con esferas de colores para registrar los resultados de sus extracciones. Saquen una esfera, registren su color y devuélvanla a la urna. Repitan esto 20 veces y registren todos los resultados.

Mundo 3

***Resultados*:**
Una vez que los estudiantes hayan completado el experimento, deben calcular la probabilidad frecuencial de cada color. Por ejemplo, si obtienen 8 esferas rojas y 12 esferas azules, deben calcular haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$P(F)=\frac{\text{Número de aciertos}}{\text{Número total de experimentos}}$$

- Probabilidad Frecuencial de esferas rojas: 8/20 = 0.4
- Probabilidad Frecuencial de esferas azules: 12/20 = 0.6

(Si los jugadores hacen el experimento y calculan las probabilidades correctamente)

Narración: '¡Excelente! Han calculado la probabilidad frecuancial acorde a sus experimentos, como recompensa, aquí tienen más fichas de conocimiento.

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **15 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

Mundo 3

El DM entrega las cartas de desafío a los jugadores

(Si los jugadores completan los 15 puntos)

Narración: ¡Excelente trabajo! Ahora, observen cómo las paredes de cristal comienzan a brillar con intensidad, revelando un pasadizo secreto que les llevará al siguiente desafío.

Mundo 3

Segundo Desafío: El Río de los Patrones

(El DM debe hablar con entusiasmo y un tono enérgico, como si estuviera frente a un majestuoso río que palpita con vida)

Narración: Han llegado al Río de los Patrones, donde las aguas fluyen llenas de eventos en movimiento. Aquí tendrán la oportunidad de aplicar lo que han aprendido sobre la probabilidad frecuencial. En cada estación de observación, deben analizar cómo los objetos caen en el río y son arrastrados por la corriente. Utilicen las observaciones previas para predecir la probabilidad de que ciertos objetos lleguen a un punto específico en el río.

Actividad

En cada estación, los jugadores deben:

- **Estación 1:** Observar cómo caen hojas verdes. De las últimas 20 hojas observadas, 12 eran verdes. Deben calcular la probabilidad de que la próxima hoja sea verde.
- **Estación 2:** Observar cómo piedras de diferentes tamaños son arrastradas por la corriente. De las últimas 15 piedras observadas, 10 eran pequeñas. Deben estimar la probabilidad de que la próxima piedra sea pequeña.

Narración: Registren sus observaciones y calculen las probabilidades frecuenciales. Utilicen la siguiente fórmula para hacer sus predicciones en cada estación:

Mundo 3

$$P(O) = \frac{\text{Número de aciertos observados}}{\text{Número total de observaciones}}$$

***Resultados*:**

- Estación 1: Hojas verdes: 12/20.
- Estación 2: Piedra pequeña: 10/15.

(Si los jugadores estiman las probabilidades correctamente)

Narración: Después de completar las predicciones y los cálculos en todas las estaciones, el río empieza a fluir más rápido y trae consigo unas fichas de conocimiento.

El DM entrega las <u>fichas de conocimiento</u> a los jugadores

Narración: Para superar este desafío, deben completar resolver las cartas de desafío que se les entregará a continuación, al completar **10 puntos** o más, pasarán al siguiente desafío.

El DM entrega las <u>cartas de desafío</u> a los jugadores

(Si los jugadores completan los 10 puntos)

Narración: ¡Impresionante! Han dominado el arte de la probabilidad frecuencial. El puente de piedra les guiará fuera de las Cuevas de la Frecuencia, señalando su éxito en la aplicación práctica de sus conocimientos.

Mundo 3

Conclusión del Mundo 3

Narración: ¡Felicidades, valientes exploradores! Han superado los desafíos de las Cuevas de la Frecuencia y aprendido a aplicar la probabilidad frecuencial. Ahora comprenden cómo la observación repetida de eventos puede ayudar a calcular las probabilidades en situaciones del día a día. Están un paso más cerca de enfrentar los retos finales en el próximo mundo. ¡Prepárense para la siguiente aventura!

Mundo 4

Instructivo Detallado del Mundo 4: Reino de la Unión Probabilística

Objetivo del Mundo. El objetivo final de este mundo es que los estudiantes integren y apliquen todo lo aprendido sobre la probabilidad clásica y la probabilidad frecuencial. Mediante un desafío culminante, deberán demostrar su comprensión de ambos conceptos y cómo se relacionan para resolver problemas complejos. El éxito en este desafío simboliza la culminación de su aprendizaje y su capacidad para aplicar la probabilidad en diversos contextos.

Descripción del Mundo. El Reino de la Unión Probabilística es un lugar donde las reglas de la probabilidad clásica y frecuencial convergen. Este reino, visualmente deslumbrante con paisajes que cambian y se entrelazan, está lleno de desafíos que requieren una combinación de ambos enfoques probabilísticos. En su centro, se encuentra la Torre del Caos, una estructura mística que representa la complejidad y la imprevisibilidad de la probabilidad en su forma más avanzada.

Mundo 4

Desafío Final: La Prueba de la Torre del Caos

(El DM debe hablar con un tono grave y ceremonial, como si estuviera en un lugar sagrado lleno de poder y misterio, creando un ambiente de expectativa)

Narración: El desafío final se desarrolla en la imponente Torre del Caos, donde los estudiantes serán recibidos por el Guardián de la Unión, una figura sabía que representa la combinación de la probabilidad clásica y frecuencial. El Guardián les revela que para deshacer el hechizo maligno que amenaza la Academia Probamágica, deben demostrar que dominan ambos enfoques probabilísticos y pueden integrarlos de manera efectiva.

A lo que el Guardián menciona: '¡Valientes exploradores! Han llegado al último desafío en el Reino de la Unión Probabilística. En la Torre del Caos, enfrentarán la Prueba Final, que pondrá a prueba todo lo que han aprendido. Aquí, deberán combinar la probabilidad clásica con la frecuencial para resolver un enigma complejo que decidirá el destino de la Academia Probamágica'.

Mundo 4

Instrucciones Generales

- ***Introducción a la Torre del Caos:***

Narración: Frente a ustedes se encuentra una urna mágica llena de esferas de diferentes colores: 25 rojas, 15 azules y 10 verdes. Cada color representa un tipo de conjuro que puede romper el hechizo maligno. Sin embargo, debido al caos en la torre, las propiedades de las esferas cambian dependiendo de la frecuencia con la que se hayan sacado en intentos anteriores.

- ***Uso de las Cartas de Desafío***

Narración: Para resolver el enigma, deberán utilizar las Cartas de Desafío que se les han proporcionado. Estas cartas les guiarán a través de una serie de actividades que combinan tanto la probabilidad clásica como la frecuencial.

A continuación, se les entregarán unas cartas de desafío, una por una hasta terminar el desafío.

(El DM va entregando las <u>cartas de desafío</u> de forma secuenciada, es decir, entrega la número 1, cuando los jugadores respondan correctamente, entrega la número 2 y así hasta finalizar)

Es IMPORTENTE aclarar el uso de las <u>fichas de conocimineto</u> de los mundos anteriores para evaluar el progreso de los jugadores.

Final

Conclusión del Mundo 4 y del Juego

Narración: Al completar este desafío, habrán demostrado su habilidad para integrar la probabilidad clásica y frecuencial de manera efectiva. Su éxito en la Prueba de la Torre del Caos es la culminación de su viaje educativo y la clave para salvar la Academia Probamágica. El Guardián de la Unión les felicita por su dominio en el arte de la probabilidad. ¡Ustedes son ahora Maestros Probamágicos, preparados para enfrentar desafíos aún más complejos en el futuro!

Con la Academia a salvo y el hechizo maligno disipado, los estudiantes se han convertido en verdaderos expertos en probabilidad, listos para aplicar su conocimiento en el mundo real y más allá.


Este material fue hecho con mucho amor, por favor, cuídalo.

Anexo C. Fichas de conocimiento.

Eventos Dependientes

Definición: Los eventos dependientes son aquellos en los que la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Como cuando una roca cae al agua y las ondas mueven una hoja.

Recordar: Uno afecta al otro, están conectados.

M1 : D3

Eventos Aleatorios

Definición: Los eventos aleatorios son aquellos donde cada resultado es igualmente probable, como lanzar una moneda.

Recordar: Cada resultado tiene la misma oportunidad de suceder.

M1 : D4

Aleatoriedad

Definición: La aleatoriedad significa que no hay un patrón o predicción clara de lo que ocurrirá, como lanzar una moneda.

Recordar: No se puede predecir, todo es por azar.

M1 : D3

Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica es una forma de calcular la posibilidad de que ocurra un evento. Se basa en contar el número de resultados favorables y dividirlo por el número total de resultados posibles.

Ejemplo: Si tienes una moneda, hay 2 resultados posibles: cara o cruz.

M2 : D1

Concepto de Probabilidad

La probabilidad nos ayuda a saber qué tan probable es que ocurra algo. Por ejemplo, si lanzas una moneda, la probabilidad de que salga cara es igual a la probabilidad de que salga cruz, porque hay dos posibles resultados y ambos son igualmente probables.

M1 : D4

Probabilidad Clásica [I]

Uso: La **regla de Laplace** se usa para calcular la probabilidad clásica de un evento cuando todos los resultados posibles son igualmente probables.

M2 : D1

Predicción y Aleatoriedad

Hacer predicciones basadas en la aleatoriedad significa usar el conocimiento sobre cómo funcionan los eventos al azar, como lanzar un dado o una moneda.

Usa lo que sabes para adivinar, pero recuerda que el azar siempre puede sorprenderte.

M1 : D4

Probabilidad Clásica [II]

Regla de Laplace:

$$P(C) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

Si lanzas un dado de **6** caras, la probabilidad de obtener un **3** es **1/6** porque hay **un** resultado favorable **(3)** y **seis** resultados posibles **(1, 2, 3, 4, 5, 6)**.

M2 : D1

Resultados Favorables

Definición: Un resultado favorable es un resultado que cumple con las condiciones que estamos buscando.

Ejemplo: En una urna con 5 esferas rojas y 5 azules, los resultados favorables al sacar una esfera roja son 5.

M2 : D1

Resultados Totales Posibles

Definición: El número total de resultados posibles incluye todos los resultados que podrían ocurrir.

Ejemplo: En una urna con 5 esferas rojas y 5 azules, los resultados totales posibles son 10 (5 + 5 = 10).

M2 : D1

Probabilidad de Eventos Sencillos

Descripción: Un evento sencillo es un evento que tiene un solo resultado. La probabilidad de un evento sencillo se calcula usando la regla de Laplace.

Ejemplo: La probabilidad clásica de sacar una esfera azul de una urna con 2 esferas azules y 3 rojas es 2/5. (2 + 3 = 5)

M2 : D2

Probabilidad de Múltiples Eventos

Descripción: : Cuando se calculan probabilidades para múltiples eventos, se **suman** o se **multiplican** las probabilidades dependiendo de si los eventos son independientes o no.

M2 : D2

Suma de Probabilidades

La probabilidad de sacar un **2** **(1/6)**o un **4** **(1/6)** en un dado de **6** caras es:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

M2 : D2

Multiplicación de Probabilidades

La probabilidad de obtener **cara** al lanzar una **moneda (1/2)** dos veces es:

$$P = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

M2 : D2

Probabilidad Frecuencial [I]

Definición: La probabilidad frecuencial es la estimación de la probabilidad de un evento basada en la frecuencia con la que ocurre en una serie de **experimentos**.

M3 : D1

Probabilidad Frecuencial [II]

Fórmula para calcular:

$$P(F) = \frac{\textbf{Número de aciertos}}{\textbf{Número total de experimentos}}$$

Donde el número de aciertos son las veces que sale el **evento elegido** y el número total de experimentos son las veces que se intentó.

M3 : D1

Probabilidad Frecuencial [III]

Ejemplo: Si lanzas una moneda 10 veces y sale cara 6 veces, la probabilidad frecuencial de obtener cara es:

$$P(F) = \frac{6 \text{ (caras)}}{10 \text{ (lanzamientos)}} = 0.6 \text{ o } 60\%$$

M3 : D1

¿Cómo Realizar un Experimento para Calcular la Probabilidad Frecuencial?

1. **Haz el Experimento:** Realiza el experimento varias veces.
2. **Cuenta los Resultados Favorables:** Registra cuántas veces ocurre el evento de interés.
3. **Cuenta el Total de Experimentos:** Registra el número total de veces que realizaste el experimento.
4. **Calcula la Probabilidad Frecuencial:** Usa la fórmula.

M3 : D1

Frecuencia a partir de Observaciones [I]

Concepto: En observaciones repetidas, la frecuencia te ayuda a estimar la probabilidad de que ocurra un evento en futuros intentos.

Recordar: No necesariamente se deben hacer experimentos, sino que, se toman los datos observados previamente.

M3 : D2

Frecuencia a partir de Observaciones [II]

Fórmula para calcular:

$$P(O) = \frac{\text{Número de aciertos observados}}{\text{Número total de observaciones}}$$

Ejemplo: Se cayeron 15 hojas verdes de 50 caídas, la probabilidad de que caiga una hoja verde es: 15/50 = 0.3 o 30%.

M3 : D2

La Importancia de Más Observaciones [I]

Cuantas más veces repitas el experimento, más precisa será tu estimación de la probabilidad frecuencial. **Con muchas observaciones, la probabilidad frecuencial se acercará a la probabilidad clásica**.

M3 : D2

La Importancia de Más Observaciones [II]

Ejemplo: Si lanzas un dado 10 veces, puedes obtener una estimación poco precisa de la probabilidad de obtener un 6. Si lanzas el dado 1000 veces, tu estimación será más cercana a la probabilidad clásica.

M3 : D2

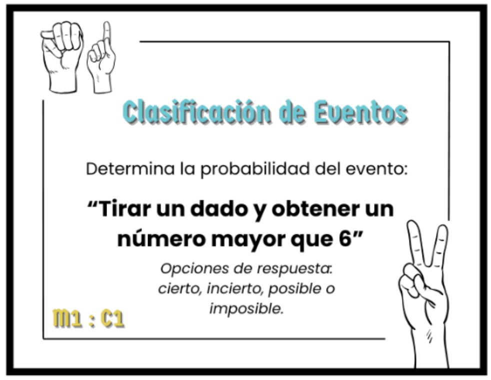
Diferencias...

¿Cuál es la diferencia entre probabilidad clásica y frecuencial?

- **Probabilidad Clásica:** Basada en cálculos matemáticos (Regla de Laplace).
- **Probabilidad Frecuencial:** Basada en observaciones reales y experimentos respecto a su frecuencia.

M4 : Df

Anexo D. Cartas de desafío.



Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Las estrellas parpadean en el cielo nocturno”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Un unicornio aparecerá al amanecer”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“La luna llena saldrá esta noche”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Las rocas del río se levantarán y hablarán”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Los árboles perderán todas sus hojas en otoño”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Un árbol crecerá durante la primavera”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Hoy habrá un león caminando por las calles”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Susurros del Árbol

Interpreta la frase y determina la probabilidad:

“Encontrar un billete tirado en la calle mañana”

Opciones de respuesta: probable e improbable.

M1 : C2

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Un gato maúlla y un coche pasa al mismo tiempo"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Un árbol cae y un pájaro sale volando del árbol"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Llueve y alguien abre un paraguas"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Una estrella fugaz cruza el cielo y alguien pide un deseo"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Te quedas dormido y llegas tarde a la escuela"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Comes demasiados dulces y te duele el estómago"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Tomas agua y el día se torna nublado"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

Reflejos de Independencia

Determina la relación entre los eventos:

"Enciendes la luz y un pájaro vuela afuera"

Opciones de respuesta: dependientes e independientes.

M1 : C3

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 4 en un dado de seis caras?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“¿Qué probabilidad hay de obtener cara al lanzar la moneda?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado de seis caras?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“Si lanzas una moneda dos veces, ¿qué probabilidad hay de que ambas sean cara?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“"¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 al lanzar dos dados de seis caras?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 3 en un dado de seis caras?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“¿Qué probabilidad hay de obtener sello al lanzar la moneda?”

M1 : C4

Predicción de Resultados

Predice el resultado del siguiente suceso:

“Si lanzas una moneda ¿cuál es la probabilidad de que no salga cara?”

M1 : C4

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cara?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza un dado de 10 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una urna contiene 3 esferas rojas y 2 esferas azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera azul?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una ruleta tiene 4 secciones iguales: rojo, azul, verde y amarillo. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en verde?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanzan dos dados ¿Qué probabilidad hay de que muestren un número par?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una bolsa tiene 4 esferas verdes y 6 esferas amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera verde?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza una moneda ¿Cuál es la probabilidad de que salga sello?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza un dado de 6 caras, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cara?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza un dado de 10 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una urna contiene 3 esferas rojas y 2 esferas azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera azul?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una ruleta tiene 4 secciones iguales: rojo, azul, verde y amarillo. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en verde?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanzan dos dados ¿Qué probabilidad hay de que muestren un número par?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una bolsa tiene 4 esferas verdes y 6 esferas amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una esfera verde?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza una moneda ¿Cuál es la probabilidad de que salga sello?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se lanza un dado de 6 caras, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Si se tienen 3 monedas: 1 dorada, 1 plateada y 1 de cobre. Si eliges una al azar ¿cuál es la probabilidad de elegir la moneda dorada?"

M2 : C1

Probabilidad Clásica

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

"Una rueda tiene 5 secciones: 2 rojas, 2 azules y 1 amarilla. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en azul?"

M2 : C1

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 1, 2 o 3.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 4 en el primer lanzamiento y un 5 en el segundo.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 2 o un 3.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un número par en dos lanzamientos.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 5 o un 6.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 3 y un 4 en dos lanzamientos.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un número menor que 3 (1 o 2).
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 2 y un 6 en dos lanzamientos.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 1 o un 2.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un número impar en dos lanzamientos.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un número menor que 5 (1, 2, 3, o 4).
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 1 y un 3 en dos lanzamientos.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 1 o un 2.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 5 en el primer lanzamiento y un 6 en el segundo.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un número menor que 4 (1, 2 o 3).
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un número par en dos lanzamientos

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un 4 o un 5.
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 2 en el primer lanzamiento y un 3 en el segundo.

M2 : C2

PC: Múltiples Eventos

Elige cuál de las dos puertas es más probable:

<u>Puerta A:</u> Lanzar un dado y obtener un número mayor que 3 (4, 5 o 6).
<u>Puerta B:</u> Lanzar un dado y obtener un 1 y un 2 en dos lanzamientos.

M2 : C2

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 10 veces y anota cuántas veces obtienes uno celeste. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón celeste?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 30 veces y anota cuántas veces obtienes uno rosado. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón rosado?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 20 veces y anota cuántas veces obtienes uno azul rey. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón azul rey?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 30 veces y anota cuántas veces obtienes uno amarillo. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón amarillo?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 10 veces y anota cuántas veces obtienes uno verde. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón verde?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 15 veces y anota cuántas veces obtienes uno blanco. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón blanco?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 20 veces y anota cuántas veces obtienes uno naranja. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón naranja?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Extrae un pompon de la urna 10veces y anota cuántas veces obtienes uno negro. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un pompón negro?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 20 caras 15 veces y anota cuántas veces obtienes un número par. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número par?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 12 caras 20 veces y anota cuántas veces obtienes un número impar. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número impar?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 4 caras 20 veces y anota cuántas veces obtienes un número menor a 2. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número menor a 2?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 8 caras 15 veces y anota cuántas veces obtienes el número 1. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener el número 1?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 10 caras 20 veces y anota cuántas veces obtienes un número menor a 5. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número menor a 5?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 6 caras 10 veces y anota cuántas veces obtienes un número mayor a 5. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número mayor a 5?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 20 caras 15 veces y anota cuántas veces obtienes un número menor a 18. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número menor a 18?

M3 : C1

Probabilidad Frecuencial

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Lanza un dado poliédrico de 4 caras 15 veces y anota cuántas veces obtienes un número par. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener un número par?

M3 : C1

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo caen hojas verdes y marrones en el río. De las últimas 10 hojas que cayeron, 6 eran verdes. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima hoja sea verde?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo caen hojas verdes y marrones en el río. De las últimas 12 hojas que cayeron, 4 eran marrones. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima hoja sea marrón?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo piedras de diferentes tamaños caen en el río. De las últimas 15 piedras, 9 eran pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima piedra sea pequeña?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo piedras de diferentes tamaños caen en el río. De las últimas 20 piedras, 5 eran grandes. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima piedra sea grande?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo caen hojas en el río. De las últimas 8 hojas, 3 eran rojas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima hoja sea roja?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo piedras redondas y planas caen en el río. De las últimas 10 piedras, 7 eran redondas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima piedra sea redonda?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo caen hojas de diferentes colores en el río. De las últimas 14 hojas, 5 eran amarillas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima hoja sea amarilla?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo piedras blancas y oscuras caen en el río. De las últimas 12 piedras, 4 eran blancas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima piedra sea gris?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo caen hojas naranjas y verdes en el río. De las últimas 16 hojas, 7 eran naranjas. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima hoja sea verde?

M3 : C2

PF: Observaciones

Resuelve el siguiente desafío haciendo de las fichas de conocimiento:

Imagina cómo piedras grises y negras caen en el río. De las últimas 18 piedras, 9 eran grises. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la próxima piedra sea blanca?

M3 : C2

Carta 1

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Calcula la probabilidad clásica de sacar un pompón rojo de la urna.

M4 : CF

Carta 2

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Saca 10 pompones y cuenta cuántos son rojos. Basado en tus resultados ¿cuál es la probabilidad frecuencial de sacar un pompón rojo?

M4 : CF

Carta 3

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Compara las probabilidades clásica y frecuencial de sacar un pompón rojo. ¿Son diferentes estas probabilidades? ¿Por qué?

M4 : CF

Carta 4

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Decide cuál color de pompón elegirías teniendo en cuenta la probabilidad de ocurrencia. ¿Qué color eliges y por qué?

M4 : CF

Carta 5

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Realiza otros 10 intentos con la urna para sacar el pomón rojo. ¿Cómo cambian las probabilidades después de estos intentos adicionales?

M4 : CF

Carta 6

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Decide cuál tipo de probabilidad (clásica o frecuencial) parece más confiable. ¿Cuál es más confiable y por qué?

M4 : CF

Carta 7

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Predice el color menos común en 10 nuevas extracciones. ¿Qué color será menos común y por qué?

M4 : CF

Carta 8

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Predice el color más común en 10 nuevas extracciones. ¿Qué color será más común y por qué?

M4 : CF

Carta 9

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Piensa en una situación real donde podrías usar lo aprendido. ¿Cómo aplicarías la probabilidad clásica y frecuencial en esa situación?

M4 : CF

Carta 10

Desafío Final

Con base a lo aprendido anteriormente:

Reflexiona sobre lo aprendido en este juego. ¿Qué has aprendido sobre probabilidad y cómo lo usarías en el futuro?

M4 : CF

Anexo E. Tablero modular.